İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİR HİPERYÜZEYİN PEDALİNİN BAZI KARAKTERİSTİK ÖZELİKLERİ

Erol KILIÇ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
1996

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İşbu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında DOKTORA TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Başkan: Prof.Dr. Sadık KELEŞ..

Üye: Prof.Dr. H. Hilmi HACISALİHOĞLU..

Üye: Doç.Dr. A. İhsan SİVRİDAĞ..

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

22./03./1996

Prof.Dr. Eşref YÜKSEL
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu çalışma dört bölüm olarak hazırlanmıştır. Birinci bölüm ondan sonraki bölümlerin daha iyi anlaşılması için temel kavramlara ayrıldı. Bu bölümde manifold, altmanifold, konneksiyon, v.s. gibi kavramlar kısaca tanıtıldı. İkinci bölümde ise E^3 deki bir M yüzeyinin pedali olan M_π yüzeyi tanımlanarak pedalin regüler yüzey olma şartları verildi. M_π nin birim normal vektör alanı, temel formlarının bileşenleri ile Gauss eğriliği ve ortalama eğriliği hesaplandı. Burada M yüzeyi reflektör olarak adlandırıldı. $\{M, O\}$ optiksel sistemi tanımlanarak $\{M, O\}$ optiksel sisteminin karakteristik dönüşümü olan τ tanımlandı ve τ nun diffeomorfizm olması durumunda τ^{-1} in de bir M' reflektörünün karakteristik dönüşümü olduğu gösterildi. Ayrıca bir M reflektörünün eşleniği tanımlanarak, M nin hangi şartlarda eşleniğe sahip olabileceği araştırıldı ve M ile eşleniğinin asli eğrilikleri arasındaki bağıntılar elde edildi.

Son iki bölüm çalışmanın orijinal kısımıdır. Üçüncü bölümde E^{n+1} deki bir M hiperyüzeyinin pedali tanımlandı ve ikinci bölümdeki kavramlar E^{n+1} deki bir M hiperyüzeyi için genelleştirildi. Burada ayrıca E^{n+1} de verilen M hiperyüzeyinin pedalinin bazı ilginç sonuçları verildi. Dördüncü bölümde ise bir sabit destek fonksiyonlu hiperyüzeyin pedali gözönüne alındı. Burada bir sabit destek fonksiyonlu hiperyüzeyin pedalinin şekil operatörü elde edilerek buna bağlı olarak sabit destek fonksiyonlu hiperyüzeyin pedalinin bazı karakteristik özelikleri incelenmiştir.

ABSTRACT

This thesis consists of four chapter. Chapter 1 contains some basic notions which make simple understanding the following chapters. In this chapter summarised the following notionals manifold, submanifold, connection, etc. The second chapter defined the pedal of a surface M in E^3. We give condition which makes the surface M is regular. We gave the unit normal vector field of the pedal M_π and the Gauss and mean curvatures by using the coefficients of the fundamental forms of the pedal M_π. The optical system $\{M, O\}$ is defined of the surface M, which is called reflector, and the characteristic mapping τ of $\{M, O\}$. τ^{-1} is shown the characteristic mapping of a surface M' when τ is diffeomorphism. Also, we gave the condition the surface M has a conjugate $\overline{M}$ and obtained the relationship between the principal curvatures of M and $\overline{M}$.

The last two chapters are original parts of this thesis. In the third chapter, we gave a generalisation of the notions, which are given in chapter 2 for E^3, to E^{n+1}. We got some interesting results about the pedal of a hypersurface M in E^{n+1}. In the fourth chapter, we considered the pedal of hypersurface M with a constant support function. We obtained the shape operator of the pedal of the hypersurface M with a constant support function and we investigated some characteristic properties of the pedal of the hypersurface with a constant support function.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı hazırlarken değerli vakitlerini esirgemeden bana ayıran, bütün çalışmalarımı titizlikle inceleyen, her adımda bilgisine başvurduğum saygıdeğer hocam Prof.Dr. Sadık KELEŞ' e, teşvik ve desteklerinden dolayı matematik bölümünün değerli elemanlarına sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

E^3 de bir yüzeyin pedali litaratürde çok iyi bilinen, bir eğrinin pedal eğrisinin (örneğin, [4] de görülür) yüzeyler için genelleştirilmiş halidir. TH. Hasanis ve D. koutroufiotis 1985 de yayınlanan [7] deki çalışmalarında bir yüzeyin pedali kavramını ele almışlardır. Onlar bu çalışmalarında bir yüzeyin pedalinin birim normal vektör alanı ve temel formları v.s. gibi kavramları verdiler. Verilen orijinal yüzey M için $\{M,O\}$ optiksel sistemini tanımlayarak $\{M,O\}$ sistemini fiziksel bir sistem olarak gözönüne alıp bu sistemin geometrisi ile ilgilendiler. Ayrıca bu çalışmada önemli bir faktör olan karakteristik dönüşüm kavramını vererek, bu dönüşüm yardımıyla verilen reflektörün bir eşlenik reflektöre sahip olma durumunu gözönüne aldılar. CHR. Georgiou, TH. Hasanis ve D. Koutroufiotis 1988 de yayınladıkları [10] daki çalışmalarında genel bir hiperyüzey M yerine E^{n+1} de bir M^n ovaloidini alarak $\{M^n,O\}$ optiksel sistemini incelediler. Ayrıca burada M^n in pedali gözönüne alındığı gibi M^n nin bir paralel yüzeyini de gözönüne alarak aralarındaki bazı ilişkileri incelemişlerdir.

1991 de [11] de yayınladıkları çalışmalarında TH. Hasanis ve D. koutroufiotis destek fonksiyonu sabit olan hiperyüzeyleri incelemişlerdir. Burada ilk önce sabit destek fonksiyonlu hiperyüzeylerin varlığı ile ilgili örnekler vererek, destek fonksiyonu sabit olan hiperyüzeylerin non-negatif kesit eğriliğine sahip olduğunu göstermişler ve sabit destek fonksiyonu 1 e eşit olan hiperyüzeylerin ya bir hiperkürenin parçası veya genelleştirilmiş silindirler ya da n-boyutlu öklid uzayı E^n olduğunu elde ettiler.

Biz bu çalışmada, TH. Hasanis ve D. Koutroufiotis'in [7] deki çalışmalarını E^{n+1} deki bir M hiperyüzeyi için genelleştirdik. Ayrıca E^{n+1} deki bir sabit destek fonksiyonlu hiperyüzeyin pedalini oluşturarak bazı karakteristik özeliklerini inceledik.

I. BÖLÜM

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm, bundan sonraki bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır. Burada ilk olarak diferensiyellenebilir manifold, tanjant vektör, vektör alanı, Riemann manifoldu ve konneksiyon gibi kavramlar verilmiştir. Daha sonra hiperyüzeyler hakkında kısaca bilgi sunulmuştur.

I.1. Diferensiyellenebilir Manifoldlar ve Altmanifoldlar

I.1.1. Tanım. M bir Hausdorff uzayı olsun. M nin her P noktası için IR^n de bir açık cümleye homeomorf olacak şekilde bir açık komşuluk bulunabiliyorsa M ye *n-boyutlu topolojik manifold* denir [1].

I.1.2. Tanım. M n-boyutlu bir topolojik manifold, M de açık bir cümle U ve V de IR^n de bir açık cümle olsun. $\Psi: U \to V$ bir homeomorfizm olmak üzere (U, Ψ) ikilisine bir *koordinat komşuluğu* denir [1].

Eğer U da bir nokta P ise $\Psi(P)$ de IR^n de bir noktadır. $\Psi(P)$ nin i-yinci koordinatı $x^i(P)$ olsun. Böylece $\Psi(P)=(x^1(P),\dots,x^n(P))$ olarak yazılabilir. Ψ sürekli olduğundan her x^i, U üzerinde tanımlı reel değerli sürekli bir fonksiyondur. Ψ bire-bir olduğundan U nun P, Q noktaları için $x^i(P)= x^i(Q)$, $1 \le i \le n$, ise $P=Q$ dür. Bu şekilde tanımlanan $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ n-lisine (U, Ψ) koordinat komşuluğu üzerinde tanımlı bir *lokal koordinat sistemi* denir [1].

I.1.3. Tanım. M n-boyutlu topolojik manifold olsun. IR^n in açık cümlelerine homeomorf olan M nin bütün açık cümlelerinin kolleksiyonu $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ve her $\alpha \in A$

için U_α ya karşılık gelen homeomorfizm de Ψ_α olmak üzere $\{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ kolleksiyonuna bir *koordinat komşuluğu sistemi* veya *atlas* denir ve $S = \{(U_\alpha, \Psi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ şeklinde gösterilir [1].

$U_\alpha, U_\beta \in S$ için $U_\alpha \cap U_\beta \neq \varnothing$ ise $f_{\beta\alpha} = \Psi_\beta \circ \Psi_\alpha^{-1}$ ve $f_{\alpha\beta} = \Psi_\alpha \circ \Psi_\beta^{-1}$ dönüşümlerini, sırasıyla,

$$f_{\beta\alpha} : \Psi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \Psi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta)$$

ve

$$f_{\alpha\beta} : \Psi_\beta (U_\alpha \cap U_\beta) \rightarrow \Psi_\alpha (U_\alpha \cap U_\beta)$$

şeklinde tanımlayabiliriz. Eğer A nın bu şartı sağlayacak şekildeki her α, β indisleri için IR^n in bir açık cümlesinden IR^n in bir açık cümlesine olan bu $f_{\beta\alpha}$, $f_{\alpha\beta}$ dönüşümleri C^r-sınıfından ise S ye C^r- *sınıfından koordinat komşuluğu sistemi* denir.

I.1.4. Tanım. Eğer n-boyutlu topolojik manifold M, C^r-sınıfından bir koordinat komşuluğu sistemi S ye sahip ise M ye C^r-*sınıfından n-boyutlu diferensiyellenebilir manifold* denir [1].

Bundan sonraki kısımlarda manifold denildiği zaman C^∞-sınıfından diferensiyellenebilir manifoldu kastedeceğiz.

M nin bir P noktasının bütün komşulukları üzerinde tanımlanan bütün reel değerli C^∞-fonksiyonların cümlesini $\Im(P)$ ile göstereceğiz. Eğer f, $g \in \Im(P)$ ise $f+g$ ve $f.g$, f ile g nin tanım cümlelerinin arakesiti üzerinde tanımlı ve $\lambda \in IR$ için λf de f nin tanım cümlesi üzerinde tanımlı olan reel değerli diferensiyellenebilir fonksiyonlardır.

I.1.5. Tanım. M n-boyutlu manifold ve P de M nin bir noktası olsun. v: $\Im(P) \rightarrow IR$ dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise v ye M nin P noktasında bir *tanjant vektörü* denir:

i) $v(\lambda f + \mu g) = \lambda v(f) + \mu v(g)$, $\quad \lambda, \mu \in IR$, $f, g \in \Im(P)$, *ii)* $v(fg) = v(f)g(P) + f(P)v(g)$.

M nin P noktasında iki tanjant vektörü v, v' ve $\lambda \in IR$ olmak üzere $v+v'$ ve $\lambda.v$, $f \in \Im(P)$ için

$$(v+v')(f) = v(f) + v'(f), \qquad (\lambda v)(f) = \lambda v(f)$$

şeklinde tanımlanır. Bu şekilde tanımlanan toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre P noktasındaki bütün tanjant vektörlerinin cümlesi IR üzerinde bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayına M nin P noktasındaki *tanjant uzayı* denir ve $T_P(M)$ ile gösterilir.

U üzerinde bir lokal koordinat sistemi $(x^1,\dots,x^n)$ ve U nun bir P noktasında

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P f = \frac{\partial f}{\partial x^i}\Big|_P \ , \quad 1 \le i \le n,$$

olsun. Bu şekilde tanımlanan $\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P$, P de bir tanjant vektördür ve $\left\{ \frac{\partial}{\partial x^1}\Big|_P, \frac{\partial}{\partial x^2}\Big|_P, \dots, \frac{\partial}{\partial x^n}\Big|_P \right\}$ sistemi $T_P(M)$ nin bir bazıdır [1].

I.1.6. Tanım. Bir $X: M \to \bigcup_{P \in M} T_P(M)$ operatörü vasıtasıyla M manifoldunun her P noktasına bir X_P tanjant vektörü karşılık geliyorsa X e M üzerinde bir *vektör alanı* denir. M nin bir U açık cümlesi üzerinde tanımlı bir lokal koordinat sistemi $(x^1,\dots,x^n)$ ise X_P bir tek şekilde

$$X_P = \sum_{i=1}^{n} \zeta^i(P) \frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P$$

olarak ifade edilebilir. U üzerindeki bu ζ^i fonksiyonlarına $(x^1,\dots,x^n)$ lokal koordinat sistemine göre *X in bileşenleri* denir [1].

M üzerindeki bütün vektör alanlarının cümlesi $\chi(M)$ ile ve M üzerindeki bütün C^∞-fonksiyonların cümlesi de $C^\infty(M, IR)$ ile gösterilir. $X, Y \in \chi(M)$, $\lambda \in IR$ ve $f \in C^\infty(M, IR)$ için

$$(X+Y)_P = X_P + Y_P\,, \quad (fX)_P = f(P)X_P$$

olmak üzere $X+Y$ ve fX operatörleri M üzerinde vektör alanlarıdır. Bu toplama ve skalarla çarpma işlemlerine göre $\chi(M)$, IR üzerinde bir vektör uzayı ve $C^{\infty}(M,IR)$ üzerinde bir modüldür.

I.1.7. Tanım. M bir manifold olmak üzere

$$\langle\, , \rangle : \chi(M)\times\chi(M)\rightarrow C^{\infty}(M,IR)$$

dönüşümü aşağıdaki şartları sağlıyor ise bu dönüşüme M üzerinde *Riemann metriği* veya *metrik tensör* denir [2].

i) $\langle\, , \rangle$ dönüşümü 2-lineerdir.

ii) $\langle\, , \rangle$ dönüşümü simetriktir.

iii) $\langle X, X\rangle \geq 0,\quad \langle X, X\rangle = 0 \Leftrightarrow X = 0,\quad X\in\chi(M)$.

I.1.8. Tanım. Üzerinde Rieamann metriği tanımlanmış olan manifolda *Rieamann manifoldu* denir [2].

I.1.9. Tanım. M bir manifold olmak üzere

$$\langle\, , \rangle : \chi(M)\times\chi(M)\rightarrow C^{\infty}(M,IR)$$

dönüşümü

i) $\langle\, , \rangle$ dönüşümü 2-lineerdir.

ii) $\langle\, , \rangle$ dönüşümü simetriktir.

iii) $\langle X, X\rangle \geq 0,\quad \forall Y\in\chi(M),\ \langle X, Y\rangle = 0 \Rightarrow X = 0.$

özelliklerini sağlıyor ise M ye *yarı-Riemann manifoldu* denir [2].

I.1.10. Tanım. M bir manifold olmak üzere

$$\nabla : \chi(M)\times\chi(M)\rightarrow\chi(M)$$
$$(X\ ,\ Y)\ \rightarrow\ \nabla_X Y$$

dönüşümü

i) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,\quad X,Y,Z\in\chi(M),$

ii) $\nabla_{(X+Y)} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z,$

iii) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y, \quad f \in C^{\infty}(M, IR),$
iv) $\nabla_X fY = f\nabla_X Y + X(f)Y,$

özelliklerini sağlıyor ise ∇ ya M üzerinde bir *afin konneksiyon* denir [3].

I.1.11. Tanım. M bir yarı-Riemann manifoldu ve M üzerinde afin konneksiyon ∇ olmak üzere

i) $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X, \quad X, Y \in \chi(M),$
ii) $X(\langle Y,Z\rangle) = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle, \quad Z \in \chi(M),$

özellikleri sağlanıyor ise ∇ ya *Riemann konneksiyonu* denir [3].

I.1.12. Tanım. M bir k-boyutlu ve $\overline{M}$ de bir n-boyutlu manifold olsun. $\forall P \in M$ noktası için $\overline{M}$ de bir $\overline{U}$ ve M de bir U koordinat komşuluğu mevcut ve

$$U = \{P \in \overline{U} | \overline{x}^{k+1}(P) = \cdots = \overline{x}^n(P) = 0\}$$

ise M ye $\overline{M}$ nin bir *altmanifoldu* denir. Burada $(\overline{x}^1, \cdots, \overline{x}^n)$ koordinat sistemi $\overline{U}$ de ve $\left(x^1 = \overline{x}^1\big|_{\overline{U}}, \cdots, x^k = \overline{x}^k\big|_{\overline{U}}\right)$ da U üzerindeki koordinat sistemidir [4].

I.1.13. Tanım. Bir n-boyutlu manifoldun (n-1)-boyutlu altmanifolduna bu manifoldun bir *hiperyüzeyi* denir [4].

I.1.1. Teorem. Bir Riemann manifoldu üzerindeki Riemann koonneksiyonu tektir [4]
.

I.2. E^{n+1} de Hiperyüzeyler

I.2.1. Tanım. E^{n+1} de bir hiperyüzey M olsun. $\chi(M)^{\perp}$ in bir ortonormal bazı $\{N\}$ ise N ye M nin *birim normal vektör alanı* denir [4].

$\chi(M)^{\perp}$ in iki tane ortonormal bazı vardır, birisi $\{N\}$ ise diğeri $\{-N\}$ dir.

I.2.2. Tanım. (n+1)-boyutlu Öklid uzayı E^{n+1} de bir M hiperyüzeyi üzerindeki diferensiyellenebilir bir birim normal vektör alanına M üzerinde bir *yönlendirme* denir. Üzerinde bir yönlendirme seçilmiş olan bir hiperyüzeye de *yönlendirilmiş hiperyüzey* denir.

I.2.3. Tanım. E^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M olsun. M üzerinde bir lokal koordinat sistemi $\left(u^1,\cdots,u^n\right)$ ve x de M nin bir noktasının yer vektörü olmak üzere

$$g_{ij}=\langle x_i,x_j\rangle,\quad 1\le i,j\le n,\ x_i=\frac{\partial x}{\partial u^i},$$

lere M nin *birinci temel formunun katsayıları* veya *bileşenleri* denir [5].

I.2.4. Tanım. E^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. M üzerinde lokal koordinat sistemi $\left(u^1,\cdots,u^n\right)$ ve x de M nin bir noktasının yer vektörü olmak üzere

$$b_{ij}=-\langle x_i,N_j\rangle,\quad 1\le i,j\le n,\ N_j=\frac{\partial N}{\partial u^j},$$

lere M nin *ikinci temel formunun katsayıları* veya *bileşenleri* denir [5].

I.2.5. Tanım. E^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. M üzerinde lokal koordinat sistemi $\left(u^1,\cdots,u^n\right)$ ve x de M nin bir noktasının yer vektörü olmak üzere

$$n_{ij}=\langle N_i,N_j\rangle,\quad 1\le i,j\le n,\ N_i=\frac{\partial N}{\partial u^i}$$

lere M nin *üçüncü temel formunun katsayıları* veya *bileşenleri* denir [5].

I.2.6. Tanım. E^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M nin birim normal vektör alanı N verilsin. E^{n+1} in Rieamann konneksiyonu ∇ olmak üzere

$$\begin{aligned} S:\chi(M)&\to\chi(M)\\ X&\to S(X)=-\nabla_X N \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı S dönüşümüne, M üzerinde *şekil operatörü* veya M nin *Weingarten dönüşümü* denir [6].

I.2.1. Teorem. E^{n+1} de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olmak üzere S, bir lineer dönüşümdür [4].

I.2.2. Teorem. E^{n+1} de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olmak üzere S, self-adjoint dönüşümdür [4].

M hiperyüzeyinin birinci, ikinci ve üçüncü temel formları (I.2.3), (I.2.4) ve (I.2.5) tanımları ile verildiği gibi, M nin şekil operatörü S olmak üzere $X,Y \in \chi(M)$ için birinci, ikinci ve üçüncü temel formlar, sırasıyla, $I(X,Y)=\langle X,Y\rangle$, $II(X,Y)=\langle S(X),Y\rangle$ ve $III(X,Y)=\langle S(X),S(Y)\rangle$ ile de verilebilir.

I.2.7. Tanım. E^{n+1} de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. M nin her P noktasına karşılık gelen $S(P)$ nin karakteristik değerlerine M nin bu noktadaki *asli eğrilikleri* denir. Asli eğriliklere karşılık gelen ve karakteristik vektör denen vektörlerin belirttiği doğrultulara da M nin bu P noktasındaki *asli eğrilik doğrultuları* denir [4].

I.2.8. Tanım. E^{n+1} de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} K &: M \to IR \\ P &\to K(P) = \det S(P) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M nin *Gauss eğrilik fonksiyonu* ve $K(P)$ değerine de M nin P noktasındaki *Gauss eğriliği* (*total eğrilik*) denir [4].

M nin asli eğrilik fonksiyonları $k_1,k_2,\cdots,k_n$ olmak üzere $K=k_1k_2\cdots k_n$ dir.

I.2.9. Tanım. E^{n+1} de bir hiperyüzey M olsun. M nin bir P noktasındaki şekil operatörü $S(P)$ olmak üzere

$$H: M \to IR$$
$$P \to H(P) = iz\, S(P)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona M nin *ortalama eğrilik fonksiyonu* ve *H(P)* değerine de M nin P noktasındaki *ortalama eğriliği* denir [4].

M nin asli eğrilik fonksiyonları $k_1, k_2, \cdots, k_n$ olmak üzere $H = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i$ dir.

I.2.10. Tanım. E^{n+1} de bir hiperyüzey M ve M üzerindeki bir eğri α olsun. α nın teğet vektör alanı T ve M nin şekil operatörü S olsun. Eğer T vektör alanı α eğrisi boyunca S nin karakteristik vektörlerine karşılık geliyorsa α eğrisine M üzerinde bir *eğrilik çizgisi* denir [4]. Buna göre M üzerindeki α eğrilik çizgilerinin diferensiyel denklemi $S(T) = \lambda T$ dir.

I.2.11. Tanım. E^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M nin birim normal vektör alanı N olsun. M nin bir P noktasının yer vektörü x olmak üzere

$$f: M \to IR$$
$$P \to f(P) = -\langle x, N_P \rangle$$

fonksiyonuna M hiperyüzeyinin *destek fonksiyonu* denir.

I.2.12. Tanım. E^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. E^{n+1} in standart konneksiyonu $\overline{\nabla}$ ve M üzerine indirgenen konneksiyon ∇ olmak üzere

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle S(X), Y\rangle N, \quad X, Y \in \chi(M)$$

denklemine *Gauss denklemi* ve

$$\overline{\nabla}_X N = -S(X)$$

denklemine de *Weingarten denklemi* denir.

I.2.13. Tanım. E^{n+1} de bir hiperyüzey M olsun. $P \in M$ noktasında M nin şekil operatörü S olmak üzere en az bir $\lambda \in IR$ için $S = \lambda I_n$ yazılabiliyor ise P noktasına M nin *umbilik noktası* denir [4].

I.2.14. Tanım. E^{n+1} de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S olsun. $X_P, Y_P \in T_P(M)$ için

$$\langle S(X_P), Y_P \rangle = 0$$

oluyorsa X_P ve Y_P tanjant *vektörlerine eşleniktir* denir. Eğer $X_P \in T_P(M)$ için

$$\langle S(X_P), X_P \rangle = 0$$

ise X_P ye *asimptotik doğrultu* denir [4]. Buna göre M üzerindeki bir α asimptotik eğrisinin teğet vektör alanı T olmak üzere, diferensiyel denklemi $\langle S(T), T \rangle = 0$ dır.

I.2.15. Tanım. E^{n+1} de bir hiperyüzey M ve M nin şekil operatörü S, M üzerinde bir asli doğrultu X ve bu asli doğrultuya karşılık gelen asli eğrilik k olmak üzere

$$S(X) = kX$$

dir. Bu formüle *Olin-Rodrigues* formülü denir [5].

. II. BÖLÜM

BİR YÜZEYİN PEDALİ VE BİR REFLEKTÖRÜN KARAKTERİSTİK DÖNÜŞÜMÜ

E^3 de bir diferensiyellenebilir, yönlendirilmiş ve bağlantılı bir yüzey M olmak üzere O orijin noktasına göre M nin pedali olan M_π tanımlanmıştır. M_π nin regüler yüzey olma şartları verilerek bazı karakteristik özelikleri incelenmiştir. Burada ayrıca $\{M,O\}$ optical sistemi tanımlanmış ve $\{M,O\}$ optical sisteminin karakteristik dönüşümü τ tanımlanarak M nin bazı özellikleri τ yardımıyla incelenmiştir. M nin eşleniği tanımlanarak verilen M yüzeyinin hangi şartlarda eşleniğe sahip olduğu gösterilmiştir.

II.1. Bir Yüzeyin Pedali

E^3 de gömülü, diferensiyellenebilir, bağlantılı ve yönlendirilmiş bir yüzey M ve başlangıç noktasıda O olsun. M nin bir P noktasının yer vektörünü x ile ve x in boyunu da $r = \|x\|$ ile gösterelim. M üzerinde bir lokal parametre sistemi (u^1, u^2) olmak üzere

$$x = x(u^1, u^2) \tag{II.1.1}$$

dir ve M nin birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$N = \frac{x_1 \wedge x_2}{\|x_1 \wedge x_2\|} \tag{II.1.2}$$

dir, burada $x_i = \dfrac{\partial x}{\partial u^i}$, $1 \le i \le 2$, dir. M nin destek fonksiyonu f

$$f = -\langle x, N\rangle \tag{II.1.3}$$

şeklinde tanımlıdır. M nin birinci temel formunun (metrik tensörünün) bileşenleri

$$g_{ij} = \langle x_i, x_j\rangle, \quad 1 \le i \le 2, \tag{II.1.4}$$

ikinci temel formunun bileşenleri

$$h_{ij} = -\langle x_i, N_j\rangle, \quad 1 \le i \le 2, \tag{II.1.5}$$

ile gösterilsin, burada $N_j = \dfrac{\partial N}{\partial u^j}$, $1 \le j \le 2$, dir.

M nin Weingarten dönüşümü S self-adjoint ve lineer bir dönüşümdür. S nin karakteristik değerleri k_1, k_2 ise M nin Gauss ve ortalama eğrilikleri sırasıyla, $K = k_1 k_2$ ve $H = \dfrac{1}{2}(k_1 + k_2)$ dir.

M nin hiçbir noktasındaki tanjant düzlemi içinde kalmayacak şekilde bir O başlangıç noktası seçelim. Bu şekilde seçilen noktaya M için uygun (admisible) bir orijin diyeceğiz. Eğer oirjin olarak böyle bir O noktasını seçersek M nin destek fonksiyonu her yerde sıfirdan farklı olur. Bu durumda ya $f>0$ yada $f<0$ dır. Bundan sonra daima M nin $f>0$ yapan yönlendirmesini seçeceğiz.

II.1.1. Tanım. Yönlendirilmiş bir M hiperyüzeyinin pedali, O ya göre yer vektörü

$$x^{\pi} = -f\,N \tag{II.1.6}$$

olan noktalardan oluşan bir M_{π} yüzeyidir ve bu yüzeyin yönlendirmesi pedal dönüşümü

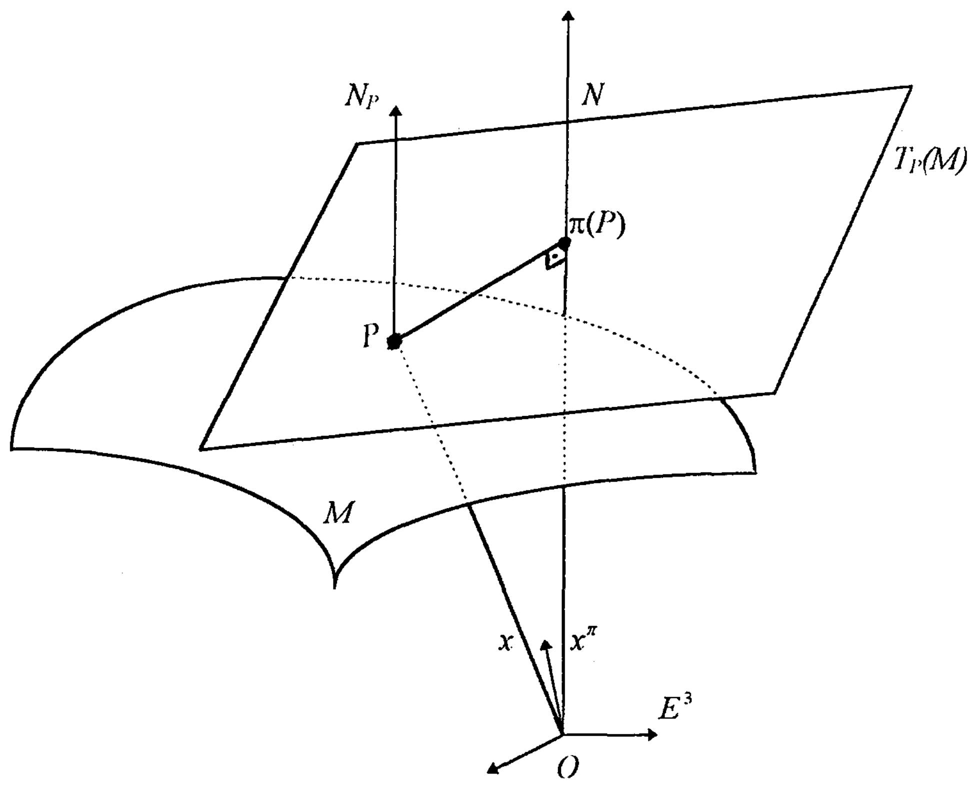
$$\pi : M \to M_{\pi}$$
$$P \to \pi(P) = -f(P)N_P$$

ile M den indirgenen yönlendirmedir. $P \in M$ noktası için $\pi(P)$ noktası P de M nin tanjant düzlemine O dan inilen dikmenin ayağıdır (II.1.1. Şekil). Böylece M_{π}, M nin tanjant düzlemleri ve bu düzlemlere O dan inilen dikmelerin arakesiti olan noktaların geometrik yeridir [7].

II.1.1. Teorem. M_{π} nin bir regüler yüzey olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki iki ifadenin sağlanmasıdır:

i) M nin Gauss eğriliği K her yerde sıfirdan farklıdır.

ii) O orijini M için uygun bir orijindir [7].



II.1.1. Şekil

İspat. M_π nin regülerliği $x_i^\pi = \dfrac{\partial x^\pi}{\partial u^i}$, $1 \le i \le 2$, vektörlerinin lineer bağımsız olmasıyla aynı anlamdadır. Kabul edelim ki *(i)* ve *(ii)* sağlansın. (II.1.3) ve (II.1.6) dan

$$f_i = -\langle x, N_i \rangle, \quad x_i^\pi = -f_i\, N - f\, N_i, \quad N_i = \frac{\partial N}{\partial u^i}, \quad f_i = \frac{\partial f}{\partial u^i}, \tag{II.1.7}$$

olur. $c_i \in IR$ olmak üzere $\sum_{i=1}^{2} c_i\, x_i^\pi = 0$ olsun. (II.1.7) den

$$\sum_{i=1}^{2} c_i f_i\, N + f\, c_i\, N_i = 0$$

olur. $\{N, N_1, N_2\}$ lineer bağımsızdır ve E^3 ün bir bazıdır. Ohalde $f c_i = 0$ dır. *(ii)* den $f \neq 0$ dır. Böylece $c_i = 0$ olur ki bu da $x_i^\pi = \dfrac{\partial x^\pi}{\partial u^i}$ lerin lineer bağımsız olması demektir.

Karşıt olarak, $x_i^\pi = \dfrac{\partial x^\pi}{\partial u^i}$ ler lineer bağımsız olsun. Aksini kabul edelim, yani ya $K = 0$ veya $f = 0$ olsun. Eğer $K = 0$ ise $\sum_{i=1}^{2} c_i x_i^\pi = 0$ olacak şekilde $(c_1, c_2) \neq (0,0)$ reel sayıları vardır. Eğer $f = 0$ ise bu durumda (II.1.7) den $x_i^\pi = -f_i N$ olur. Buradan ise $x_1^\pi = \dfrac{f_1}{f_2} x_2^\pi$ olur ki bu da x_i^π lerin lineer bağımlı olması demektir. Ohalde $K = 0$ veya $f = 0$ kabulü bir çelişkidir, yani *(i)* ve *(ii)* sağlanmak zorundadır.

Bundan sonra M_π nin bir regüler yüzey olduğunu kabul edeceğiz, yani *(i)* ve *(ii)* nin sağlandığını kabul edeceğiz.

Eğer M nin küresel gösterge dönüşümü bire-bir ise π dönüşümü M den M_π ye bir diffeomorfizmdir ve M_π orijine göre yıldız-şeklindedir. $P, Q \in M$ için eğer $\pi(P) = \pi(Q)$ ise M nin P ile Q noktasındaki tanjant düzlemleri çakışır.

M_π nin birinci temel formunun bileşenleri g_{ij}^π ler olmak üzere $g_{ij}^\pi = \langle x_i^\pi, x_j^\pi \rangle$ dir. Buna göre (II.1.7) gözönüne alınarak hesaplanırsa

$$g_{ij}^\pi = f_i f_j + f^2 n_{ij} \tag{II.1.8}$$

olarak bulunur, burada $n_{ij} = \langle N_i, N_j \rangle$, $N_i = \dfrac{\partial N}{\partial u^i}$, olup M nin üçüncü temel formunun bileşenleridir.

II.1.2. Teorem. Bir $\pi(P)$ noktasında M_π nin birim normali

$$N^\pi = \frac{\operatorname{sgn} K}{r}(x + 2f\,N) \tag{II.1.9}$$

ile verilir, burada x bir P noktasının yer vektörü, r bu yer vektörünün uzunluğu, f destek fonksiyonu ve N de M nin birim normalidir.

İspat. M_π nin birim normali N^π olmak üzere

$$N^\pi = \frac{x_1^\pi \wedge x_2^\pi}{\left\| x_1^\pi \wedge x_2^\pi \right\|}$$

dir. (II.1.7) den

$$x_1^\pi \wedge x_2^\pi = f f_1 N \wedge N_2 + f f_2 N_1 \wedge N + f^2 N_1 \wedge N_2 \tag{II.1.10}$$

olur. Bir $P \in M$ noktasında $\{N, N_1, N_2\}$ in E^3 ün bir ortonormal bazı olduğunu kabul edebiliriz. Buna göre P de x yer vektörünü

$$x = -\sum_{i=1}^{2} f_i N_i - fN \tag{II.1.11}$$

olarak yazabiliriz. $N_1 \wedge N_2 = K x_1 \wedge x_2$ olduğundan

$$N_1 \wedge N_2 = (\operatorname{sgn} K)\, N,\ N \wedge N_2 = -(\operatorname{sgn} K)\, N_1 \text{ ve } N_1 \wedge N = -(\operatorname{sgn} K)\, N_2$$

olur. Bunlar (II.1.10) da yerine yazılır ve (II.1.11) kullanılırsa

$$x_1^\pi \wedge x_2^\pi = (\operatorname{sgn} K)\, f\,(x + 2fN) \tag{II.1.12}$$

elde edilir. $\left\| x_1^\pi \wedge x_2^\pi \right\| = \sqrt{\det(g_{ij}^\pi)}$ olduğu gözönüne alınır ve (II.1.11) kullanılarak

$$r^2 = \langle x, x \rangle = f^2 + f_1^2 n_{11} + f_2^2 n_{22} + 2 f_1 f_2 n_{12}$$

elde edilir. Buradan da

$$\left\| x_1^\pi \wedge x_2^\pi \right\| = f r$$

olur ve böylece (II.1.9) elde edilmiş olur.

Bir $P \in M$ noktasının yer vektörü x yüzeye dik ise yani, $\pi(P) = P$ ise bu durumda $N_{\pi(P)}^\pi = \pm N_P$ olur. Bu ise P noktasında M nin M_π ye teğet olması anlamına gelir.

M_π nin destek fonksiyonu

$$f^\pi = (\operatorname{sgn} K) \frac{f^2}{r} \tag{II.1.13}$$

dir. Şimdi $b_{ij}^\pi = -\langle x_i^\pi , N_j^\pi \rangle$ formülünden M_π nin ikinci temel formunun bileşenlerini hesaplayabiliriz. (II.1.9) dan

$$N_j^\pi = \operatorname{sgn} K \left(\frac{x_j + 2 f_j N + 2 f N_j}{r} - \frac{\langle x_j , x \rangle (x + 2fN)}{r^3} \right) \tag{II.1.14}$$

elde edilir. (II.1.7) ve (II.1.14) den

$$b_{ij}^\pi = \frac{\operatorname{sgn} K}{r} \left(2 f_i f_j - f b_{ij} + 2 f^2 n_{ij} \right) \tag{II.1.15}$$

bulunur. M_π nin Gauss eğriliği K^π ve ortalama eğriliği H^π nin

$$K^\pi = \frac{b_{11}^\pi b_{22}^\pi - \left(b_{12}^\pi\right)^2}{g_{11}^\pi g_{22}^\pi - \left(g_{12}^\pi\right)^2}, \qquad H^\pi = \frac{1}{2} \frac{b_{11}^\pi g_{22}^\pi - 2 b_{12}^\pi g_{12}^\pi + b_{22}^\pi g_{11}^\pi}{g_{11}^\pi g_{22}^\pi - \left(g_{12}^\pi\right)^2}$$

formüllerinde g_{ij}^π ve b_{ij}^π nin (II.1.8) ve (II.1.15) deki değerleri yerlerine yazılırsa

$$K^\pi = \frac{4}{r^2} + \frac{1}{K f r^4} \left(f - \left\| grad\, f \right\|_{II}^2 - 4 f^2 H \right) \tag{II.1.16}$$

ve

$$\left(\operatorname{sgn} K\right) H^{\pi} = \frac{2}{r} - \frac{1}{2Kfr^{3}}\left(\left\|grad\, f\right\|_{II}^{2} + 2f^{2}H\right) \qquad \text{(II.1.17)}$$

olarak elde edilir, burada $\left\|grad\, f\right\|_{II}^{2} = \sum_{i,j=1}^{2} b^{ij} f_i f_j$ ve $\left(b^{ij}\right) = \left(b_{ij}\right)^{-1}$ dir.

II.1.1. Yüzeylerin pedalleri için örnekler

II.1.1. Örnek. E^3 ün standart koordinat sistemi $\left(x^1, x^2, x^3\right)$ olsun. Buna göre $x^3 = \frac{1}{2}\left(\left(x^1\right)^2 - \left(x^2\right)^2\right) + c$ hiperbolik paraboloidini gözönüne alalım. Bu yüzeyin Gauss eğriliği hesaplanırsa K<0 olarak elde edilir. $x^1 = x^2 = 0$ için $P_0 = \left(0,0,c\right)$ noktası yüzey üzerinde bir noktadır ve bu noktanın yeteri kadar küçük bir komşuluğunda (II.1.1.Teorem) in *(ii)* ifadesi sağlanır. P_0 noktasında M nin birim normali $N_{P_0} = \left(0,0,-1\right)$ ve M_π nin $\pi(P_0)$ noktasında birim normali $N^{\pi}_{\pi(P_0)} = \left(0,0,1\right)$ ve M_π nin Gaus eğriliği $K^{\pi}\left(\pi\left(P_0\right)\right) = c^{-4}(2c-1)(2c+1)$ olarak bulunur. Böylece pedal, eğer $c > \frac{1}{2}$ ise bir konveks yüzey, $0 < c < \frac{1}{2}$ ise bir semer (saddle) yüzeyidir.

II.1.2. Örnek. C, bir düzlem eğrisi ve C nin orijin noktasına göre pedali C_π ise bu durumda C yi üzerinde bulunduran düzlemde, O yu üzerinde bulunduran eksen etrafinda döndürme yapılırsa $M(C)$ ve $M(C_\pi)$ gibi iki dönel yüzey elde edilir. Burada da O ya göre $M(C)$ nin pedali $M(C_\pi)$ dir. Örneğin, C bir elips ve C nin odaklarından biri O ise, O ya göre C nin pedali C_π, merkezi elipsin merkezi ve yarıçapı elipsin büyük ekseni olan bir çemberdir. Bir eksen etrafında döndürme yapılırsa elipsoid elde edilir ve elipsoidin O ya göre pedali bir küre olur. Eğer C, bir hiperbol ve onun odağından biri O ise bu durumda C_π, merkezi hiperbolün merkezi ve yarıçapı hiperbolün yedek eksen uzunluğunun yarısına eşit ve iki noktası çıkarılmış bir çemberdir. Çıkartılan noktalar, bu çember ile asimptotların arakesiti olan noktalardır. Eğer C bir parabol ise C_π, tepe noktasında parabole teğet olan bir doğrudur. Bir eksene göre döndürme yapılırsa, paraboloidin pedali tepe noktasındaki tanjant düzlemidir.

Bu örneklerden sonra şunu ifade edebiliriz. Eğer verilen yüzey bir M yüzeyinin pedali ise bu durumda M

$$x = -\frac{\left\| x^{\pi} \right\|^2}{\langle x^{\pi}, N^{\pi} \rangle} N^{\pi} + 2x^{\pi} \qquad \text{(II.1.18)}$$

şeklinde bir tek yervektörü ile tanımlanır. Bu (II.1.6) ve (II.1.9) un kullanılmasıyla kolayca görülür.

II.1.2. Pedal dönüşümünün ayrışımı

$\pi : M \to M_{\pi}$ pedal dönüşümü iki dönüşümün bileşkesi olarak yazılabilir. Bunlardan birisi M nin *kutupsal karşıtı* (*polar reciprocal*) olan dönüşüm, diğeri ise *inversiyon* dönüşümüdür. Kutupsal karşıt dönüşümü W.Scherrer tarafından [8] de incelenmiştir.

$K \neq 0$ a sahip bir yönlendirilmiş yüzey M ve M için uygun bir orijin O olsun. M nin kutupsal karşıtı M_{ρ}, yer vektörü

$$y = -\frac{N}{f} \qquad \text{(II.1.19)}$$

olan noktalardan oluşan bir regüler yüzeydir ve yönlendirmesi $\rho : M \to M_{\rho}$ dönüşümü yardımıyla M den indirgenen yönlendirmedir. M üzerinde bir lokal koordinat sistemi $\left(u^1, u^2\right)$ olmak üzere

$$y_i = -\frac{N_i}{f} + \frac{f_i N}{f^2}, \quad 1 \le i \le 2, \qquad \text{(II.1.20)}$$

dir, burada $y_i = \dfrac{\partial y}{\partial u^i}$, $1 \le i \le 2$, dir. Buna göre M_{ρ} nun birinci temel formunun bileşenleri g_{ij}^{ρ} olmak üzere

$$g_{ij}^{\rho} = \frac{f_i f_j + f^2 n_{ij}}{f^4} \qquad \text{(II.1.21)}$$

dir. M_{ρ} nun birim normali ve destek fonksiyonu, sırasıyla,

$$N^{\rho} = -\left(\operatorname{sgn} K\right)\frac{x}{r}, \quad f^{\rho} = \frac{\operatorname{sgn} K}{r} \qquad \text{(II.1.22)}$$

olarak elde edilir. M_{ρ} nun ikinci temel formunun bileşenleri h_{ij}^{ρ} olmak üzere

$$b_{ij}^{\rho} = \frac{\operatorname{sgn} K}{fr} b_{ij} \tag{II.1.23}$$

dir. M_ρ nun Gauss eğriliği K^ρ olmak üzere

$$K^\rho = \frac{\det\left(b_{ij}^{\rho}\right)}{\det\left(g_{ij}^{\rho}\right)}$$

dır. Bu formülde (II.1.21) ve (II.1.23) değerleri yerlerine yazılırsa

$$K^\rho = \frac{f^4}{r^4 K} \tag{II.1.24}$$

olarak elde edilir.

M yönlendirilmiş bir hiperyüzey ve O orijini M üzerinde olmayan bir nokta ise M nin invers yüzeyi M_σ

$$z = \frac{x}{r^2} \tag{II.1.25}$$

yer vektörlerine karşılık gelen noktalardan oluşan bir regüler yüzeydir ve yönlendirilmesi $\sigma: M \to M_\sigma$ dönüşümü yardımıyla M den indirgenen yönlendirmedir. Bu yüzeyin birinci temel formunun bileşenleri

$$g_{ij}^{\sigma} = \frac{g_{ij}}{r^4} \tag{II.1.26}$$

dir. M_σ nın birim normali ve destek fonksiyonu, sırasıyla,

$$N^\sigma = -N - \frac{2f}{r^2} x, \quad f^\sigma = \frac{f}{r^2} \tag{II.1.27}$$

dır. M_σ nın ikinci temel formunun bileşenleri

$$b_{ij}^{\sigma} = \frac{2fg_{ij}}{r^4} - \frac{b_{ij}}{r^2} \tag{II.1.28}$$

dir. İnversiyon asli doğrultuları koruyan bir konform dönüşümdür. M_σ nın parametre eğrileri eğrilik çizgileri olarak gözönüne alınırsa, M_σ nın asli eğrilikleri $k_i^\sigma = \dfrac{b_{ii}}{g_{ii}}$ olur ki buradan

$$k_i^\sigma = 2f - r^2 k_i \tag{II.1.29}$$

olarak elde edilir, burada k_i, M nin i-yinci asli eğriliğidir.

(II.1.19) ve (II.1.25) den kolayca görülür ki pedal dönüşümü π

$$\pi = \sigma \circ \rho \tag{II.1.30}$$

şeklinde ifade edilebilir. (II.1.8) ve (II.1.21) dan, M_π ve M_ρ nun metrikleri arasında

$$g_{ij}^{\pi} = f^4 g_{ij}^{\rho} \qquad \text{(II.1.31)}$$

bağıntısının olduğu görülür.

II.2. Karakteristik Dönüşüm

İlk olarak $\{M, O\}$ optiksel sistemini tanımlayalım.

II.2.1. Tanım. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{M, O\}$ ikilisine bir *optiksel sistem* denir [7].

i) E^3 de diferensiyellenebilir, yönlendirilmiş, bağlantılı ve non-kompakt bir yüzey M olsun. Böyle bir M yüzeyine *reflektör* diyeceğiz. Burada M nin Gauss eğriliği K sıfır olabilir.

ii) O noktası M üzerinde değildir ve M yüzeyi O ya göre yıldız-şeklindedir. Yani M için O uygun bir orijindir.

iii) M nin $f>0$ yapan yönlendirilmesi seçilsin.

O merkezli, yönlendirilmiş (iç normal) birim küre S^2 olsun. $\zeta : M \to S^2$ diferensiyellenebilir dönüşümünü

$$\zeta(x) = \frac{x + 2fN}{r} \qquad \text{(II.2.1)}$$

şeklinde tanımlayalım. $\eta : M \to S^2$ diferensiyellenebilir dönüşümünü de

$$\eta(x) = \frac{x}{r} \qquad \text{(II.2.2)}$$

şeklinde tanımlayalım. η dönüşümü M den S^2 nin $A = \eta(M)$ açık cümlesi üzerine bir diffeomorfizmdir. Bu durumda optiksel sistemin *karakteristik dönüşümü* $\tau : A \to S^2$ yi

$$\tau = \zeta \circ \eta^{-1} \qquad \text{(II.2.3)}$$

olarak tanımlarız.

O ya göre A daki bir noktanın yer vektörünü e ile gösterelim. S^2 nin yönlendirmesinde bir lokal koordinat sistemi (u^1, u^2) olsun. Buna göre

$$e_i = \frac{\partial e}{\partial u^i}, \quad \tau_i = d\tau(e_i) = \frac{\partial \tau}{\partial u^i}$$

diyelim.

Şimdi gösterelim ki τ dönüşümü M reflektörünü tanımlar. (II.2.3) den dolayı

$$\tau(e) = e + \frac{2fN}{r} \qquad \text{(II.2.4)}$$

olarak tanımlanır ve buradan da

$$1 - \langle \tau(e), e \rangle = \frac{2f^2}{r^2} \qquad \text{(II.2.5)}$$

bağıntısını elde ederiz. $e = \frac{x}{r}$ olduğu gözönüne alınırsa $e_i = \frac{x_i}{r} - \frac{\langle x, x_i \rangle}{r^3}$ olarak hesaplanır. Buradan da

$$\langle \tau, e_i \rangle = \frac{2f^2}{r^2} \frac{\partial}{\partial u^i}(\log r), \quad 1 \le i \le 2, \qquad \text{(II.2.6)}$$

elde edilir. (II.2.5) ve (II.2.6) birlikte düşünülürse

$$\frac{\partial}{\partial u^i}(\log r) = \frac{\langle \tau, e_i \rangle}{1 - \langle \tau, e \rangle}, \quad 1 \le i \le 2, \qquad \text{(II.2.7)}$$

birinci dereceden adi diferensiyel denklem sistemi elde edilir ve M nin yer vektörünün uzunluğu bu diferensiyel denklem sistemini sağlar. Bu diferensiyel denklem sistemi için integrallenebilme şartı

$$\frac{\partial}{\partial u^2}\left(\frac{\langle \tau, e_1 \rangle}{1 - \langle \tau, e \rangle}\right) = \frac{\partial}{\partial u^1}\left(\frac{\langle \tau, e_2 \rangle}{1 - \langle \tau, e \rangle}\right)$$

olarak yazılabilir. Bu denklemde karşılıklı kısmi türevler alınıp, hesaplamar yapılırsa (II.2.7) denklemi için integrallenebilme şartı olarak

$$\langle \tau_2, e_1 \rangle - \langle \tau_1, e_2 \rangle = \frac{\langle \tau, e_2 \rangle \langle \tau_1, e \rangle - \langle \tau, e_1 \rangle \langle \tau_2, e \rangle}{1 - \langle \tau, e \rangle} \qquad \text{(II.2.8)}$$

elde edilir.

Kabul edelim ki, sabit noktaları olmayan bir $\tau : A \to S^2$ dönüşümü verilsin. Burada A, S^2 nin açık ve bağlantılı bir açık altcümlesidir. Eğer τ, lokal parametrelere göre (II.2.8) denklemini sağlarsa (II.2.7) diferensiyel denklem sistemini çözebiliriz. Buradaki çözümden pozitif r elde edilir ve M reflektörü

$$x = re \tag{II.2.9}$$

yer vektörü ile belirlenir. (II.2.9) dan

$$x_i = r_i e + r e_i, \quad 1 \le i \le 2,$$

elde edilir, burada $r_i = \dfrac{\partial r}{\partial u^i}$, $1 \le i \le 2$, dir. $\{e_1, e_2, e\}$ sistemi IR^3 ün bir ortonormal bazı olarak kabul edilebilir. Buna göre

$$x_1 \wedge x_2 = r r_1 e_1 + r r_2 e_2 - r^2 e$$

dir ve böylece M nin birim normali

$$N = \frac{r r_1 e_1 + r r_2 e_2 - r^2 e}{\sqrt{r^2 + \|grad\, r\|^2}}$$

olur. Buradan da M nin destek fonksiyonu

$$f = -\langle x, N \rangle = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \|grad\, r\|^2}} > 0$$

olarak elde edilir ki bu da M nin O ya göre yıldız-şeklinde olması demektir. M nin karakteristik dönüşümü verilen τ dönüşümüdür. Şimdi (II.2.4) den M nin pedali M_π nin yer vektörünü

$$x^\pi = -\frac{r}{2}(\tau - e) \tag{II.2.10}$$

olarak yazabiliriz. $\langle x_i^\pi, \tau \rangle = 0$ olduğundan τ dönüşümü M_π nin birim normal vektör alanıdır.

M ve $\overline{M}$ aynı boyutlu, yönlendirilmiş Rieamann manifoldları ve $\varphi: M \to \overline{M}$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $P \in M$ noktasında

$$d\varphi: T_P(M) \to T_{\varphi(P)}(\overline{M})$$

bir lineer dönüşümdür. $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P \right\}$, $T_P(M)$ nin bir ortonormal bazı ve $\left\{ \dfrac{\partial}{\partial \overline{x}^i}\Big|_{\varphi(P)} \right\}$ de $T_{\varphi(P)}(\overline{M})$ nin bir ortonormal bazı olsun. Bu bazlara göre $d\varphi$ lineer dönüşümünün matrisi

$$d\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P \right) = \sum_j c_{ij} \frac{\partial}{\partial \overline{x}^j}\Big|_{\varphi(P)}$$

ile hesaplanır ve $\det(d\varphi)=\det(c_{ij})$ dir. Bu determinant $\left\{\frac{\partial}{\partial x^i}\Big|_P\right\}$ ve $\left\{\frac{\partial}{\partial \overline{x}^i}\Big|_{\varphi(P)}\right\}$ bazlarının seçilişinden bağımsızdır. Eğer M nin her noktasında $\det(d\varphi)>0$ ise φ lokal diffeomorfizmine yönlendirmeyi koruyor ve eğer $\det(d\varphi)<0$ ise φ yönlendirmeyi tersine çeviriyor denir. M, $\overline{M}$ ve $\widetilde{M}$ aynı boyutlu, yönlendirilmiş Rieamann manifoldları ve $\varphi: M\rightarrow\overline{M}$, $\overline{\varphi}:\overline{M}\rightarrow\widetilde{M}$ diferensiyellenebilir dönüşümler olmak üzere $\det(d(\overline{\varphi}\circ\varphi))=\det(d\overline{\varphi})\det(d\varphi)$ dir.

Şimdi M bir reflektör ve O da M için uygun bir orijin olsun. Eğer M ve S^2 aynı yönlendirmeyle verilirse, bu durumda $\eta: M\rightarrow S^2$ dönüşümünün yönlendirmeyi koruduğu açıktır. M nin küresel gösterge dönüşümünü $n: M\rightarrow S^2$ ile gösterelim, M nin Gauss eğriliği, $\det(dn)=-K$ ile hesaplanabilir. Böylece, $K\neq 0$ için, $K<0$ ise n yönlendirmeyi koruyan lokal diffeomorfizm, $K>0$ ise n yönlendirmeyi tersine çeviren lokal diffeomorfizmdir. M nin birim normali (II.2.9) dan

$$N=\frac{\tau(e)-e}{\|\tau(e)-e\|} \tag{II.2.11}$$

olarak elde edilir. $\vartheta: M\rightarrow S^2$ yardımcı dönüşümünü

$$\vartheta(e)=\frac{\tau(e)-e}{\|\tau(e)-e\|}$$

olarak tanımlayalım. Bu dönüşüm yardımıyla M nin küresel gösterge dönüşümünü $n=\vartheta\circ\eta$ olarak ayrıştırabiliriz. Buna göre M nin Gauss eğriliği

$$K=-\det(d\vartheta)\det(d\eta) \tag{II.2.12}$$

olarak ifade edilebilir. Bu formül karakteristik dönüşümü verilen reflektörün eğriliğini hesaplamak için kullanılabilir. $\det(d\eta)>0$ olduğundan, (II.2.12) den görülür ki, reflektörün eğriliği sadece $\det(d\vartheta)=0$ olduğu noktalarda sıfır olur. Buradaki yardımcı dönüşüm ϑ

$$\begin{aligned}\vartheta_1 &: A\rightarrow E^3\\ e &\rightarrow \vartheta_1(e)=\tau(e)-e\end{aligned}$$

ile

$$\begin{aligned}\vartheta_2 &: E^3\rightarrow S^2\\ x &\rightarrow \vartheta_2(x)=\frac{x}{\|x\|}\end{aligned}$$

dönüşümlerinin bileşkesi olarak yazılabilir. Buna göre A nın bir noktasının yer vektörü e için

$$(\vartheta_2 \circ \vartheta_1)(e) = \vartheta_2(\vartheta_1(e)) = \vartheta_2(\tau(e) - e) = \frac{\tau(e) - e}{\|\tau(e) - e\|} = \vartheta(e)$$

olur. M nin bir P noktasında $K \neq 0$ olması $e = \eta(P)$ noktasında $rank(d\vartheta) = 2$ olmasına denktir ve $d\vartheta_1(T_e(A))$ vektör uzayı $\tau(e) - e$ vektörünü ihtiva etmez. Böylece $K \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart $\tau_1 - e_1, \tau_2 - e_2, \tau - e$ vektörlerinin lineer bağımsız olmasıdır. Buna eşdeğer olarak, K=0 olması için gerek ve yeter şart

$$\det(\tau_1 - e_1, \tau_2 - e_2, \tau - e) = 0 \qquad \text{(II.2.13)}$$

olmasıdır.

$\tau = \zeta \circ \eta^{-1}$ olduğundan

$$\det(d\tau) = \frac{\det(d\zeta)}{\det(d\eta)}$$

dır. Buradan $\det(d\eta) = \frac{f}{r^3}$ olarak bulunur. $\zeta_i = d\zeta(x_i) = \frac{\partial\zeta}{\partial u^i}$ olmak üzere $\{\zeta_1, \zeta_2\}$ sistemine Gram-Schmidt ortogonalleştirme yöntemi uygulanırsa

$$\det(d\tau) = \operatorname{sgn}(\det(d\tau)) \, \frac{r^3}{f} \sqrt{\frac{\det(\langle\zeta_i, \zeta_j\rangle)}{\det(\langle x_i, x_j\rangle)}} \qquad \text{(II.2.14)}$$

elde edilir. Burada

$$\det(x, x_1, x_2) = \langle x, x_1 \wedge x_2\rangle = \langle x, N\rangle \det(g_{ij})^{1/2}$$

olduğundan

$$\det(\zeta, \zeta_1, \zeta_2) = -\operatorname{sgn}(\det(d\tau)) \sqrt{\det(\langle\zeta_i, \zeta_j\rangle)}$$

yazılabilir. Bunlar (II.2.14) de yerlerine yazılırsa

$$\det(d\tau) = \frac{r^3 \det(\zeta, \zeta_1, \zeta_2)}{\det(x, x_1, x_2)} \qquad \text{(II.2.15)}$$

elde edilir. (II.2.1) de (u^1, u^2) parametrelerine göre kısmi türev alınırsa

$$\zeta_i = \frac{x_i + 2f_i N + 2fN_i}{r} - \frac{r_i(x + 2fN)}{r^2}, \quad 1 \leq i \leq 2, \qquad \text{(II.2.16)}$$

olur. Eğer $x_i, 1 \leq i \leq 2$, vektörleri asli vektörler olarak seçilirse $N_i = -k_i x_i$ olur. Burada k_i ler x_i lere karşılık gelen asli eğriliklerdir. Bu durumda (II.2.16) ifadesinde düzenleme yapılırsa

$$r\zeta_1 = \left(1-2fk_1 - r_1^2\right)x_1 - r_1r_2x_2 + r_1\left(2rk_1 - fr^{-1}\right)N$$

ve

$$r\zeta_2 = -r_1r_2x_1 - \left(1-2fk_2 - r_2^2\right)x_2 + r_2\left(2rk_2 - fr^{-1}\right)N$$

elde edilir. Bu ifade (II.2.15) de yerine yazılırsa

$$\det(d\tau) = -1 - 4r^2K + 4fH + \frac{2}{f}\left(k_1\langle x, x_1\rangle^2 + k_2\langle x, x_2\rangle^2\right) \qquad \text{(II.2.17)}$$

ifadesine sahip oluruz. Şimdi kabul edelim ki bir P noktasında $K \neq 0$ olsun. $b_{ij} = -\langle x_i, N_j\rangle$ ve $N_i = -k_i x_i$ olduğundan $b^{11} = k_1^{-1}$, $b^{12} = 0$ ve $b^{22} = k_2^{-1}$ olarak elde edilir. Burada $\left(b^{ij}\right) = \left(b_{ij}\right)^{-1}$ dir. Bunlarla birlikte $f_i = -\langle x, N_i\rangle = k_i\langle x, x_i\rangle$ olur. (II.1.16) denklemindeki $\|grad\, f\|_{II}^2$ için

$$k_1\langle x, x_1\rangle^2 + k_2\langle x, x_2\rangle^2 = \|grad\, f\|_{II}^2 \qquad \text{(II.2.18)}$$

olur. (II.2.17) de (II.2.18) yerine yazılırsa

$$\det(d\tau) = -1 - 4r^2K + 4fH + \frac{2}{f}\|grad\, f\|_{II}^2$$

olur ve (II.1.6) dan $\|grad\, f\|_{II}^2$ ifadesi hesaplanıp bu son ifadede yerine yazılırsa

$$\det(d\tau) = -r^4KK^\pi \qquad \text{(II.2.19)}$$

elde edilir.

Eğer $|\det(d\tau)| \geq 1$ ise τ ya *azalmayan alan*, $|\det(d\tau)| \leq 1$ ise τ ya *artmayan alan* diyeceğiz.

II.2.1. Teorem. $\{M, O\}$ bir optiksel sistem ve M reflektörünün Gauss eğriliği her yerde pozitif olsun, yani $K>0$ olsun. Eğer M reflektörünün karakteristik dönüşümü τ azalmayan alan ise bu durumda M nin her noktasında $r^2K \geq 1$ dir.

İspat. (II.1.6) ve (II.1.7) ifadelerinden

$$\left(H^\pi\right)^2 - K^\pi = \frac{1}{f^2r^2K^2}\left\{\frac{1}{4r^4}\left(\|grad\, f\|_{II}^2 + 2f^2H\right)^2 - \frac{f^2}{r^2}K\right\} \geq 0$$

ifadesi elde edilir. Yönlendirmenin seçilişinden $K>0$, ve $f>0$ olduğundan bu son ifadeden

$$\|grad\, f\|_{II}^{2}+2f^{2}H \geq 2fr\sqrt{K}$$

olur. Kabulden dolayı τ yönlendirmeyi tersine çeviren dönüşüm ve aynı zamanda azalmayan alan olduğundan $\det(d\tau)\leq -1$ dir. Böylece (II.2.19) ile birlikte $1-r^{4}KK^{\pi}\leq 0$ dır. Bu eşitsizlikte (II.1.6) gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} 0 \geq 1-r^{4}KK^{\pi} &= -4Kr^{2}+\frac{2}{f}\left(\|grad\, f\|_{II}^{2}+2f^{2}H\right) \\ &\geq -4Kr^{2}+\frac{2}{f}\left(2fr+\sqrt{K}\right) \\ &= 4r\sqrt{K}\left(1-r\sqrt{K}\right) \end{aligned}$$

olur. Buradan da $0\geq\left(1-r\sqrt{K}\right)$ olur ki bu da ispatı tamamlar.

II.2.2. Teorem. M bir reflektör ve M nin karakteristik dönüşümü τ, A dan $\tau(A)$ üzerine bir diffeomorfizm olsun. Bu durumda τ^{-1} yer vektörü $x'=\dfrac{(x+2fN)}{f^{2}}$ olan noktalardan oluşan bir M' reflektörünün karakteristik dönüşümüdür. Eğer M nin Gauss eğriliği $K\neq 0$ ise M' nün pedali, M_{π} nin kutupsal karşıtıdır.

İspat. $e=\dfrac{x}{r}$, $\tau(e)=e+\dfrac{2fN}{r}$ olduğundan x' vektörünü $x'=\left(\dfrac{r}{f^{2}}\right)\tau(e)$ olarak yazabiliriz. Böylece $r'=\|x'\|=\dfrac{r}{f^{2}}$ olur. τ diffeomorfizm ve $\dfrac{r}{f^{2}}$ bir pozitif fonksiyon olduğundan $x_i'=\dfrac{\partial x'}{\partial u^{i}}$, $1\leq i\leq 2$, vektörleri lineer bağımsızdır. Buna göre M' bir regüler yüzeydir ve M', O ya göre yıdız-şeklindedir.

$$x_i'=\frac{x_i+2f_iN+2fN_i}{f^{2}}-\frac{2f_i\left(x+2fN\right)}{f^{3}},\quad 1\leq i\leq 2,$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\langle x_i',-N\rangle=0$$

olur ki, bu $N'=-N$ in M' nün birim normali olması demektir. M' nün destek fonksiyonu $f'=\dfrac{1}{f}>0$ dır ve böylece $-N$, M' nün istenilen yönlendirilmesidir. M' nün karakteristik dönüşümü $\tau':\tau(A)\rightarrow S^{2}$ olsun. Bu durumda

$$\tau'(\tau(e)) = \frac{x' + 2fN'}{r'} = \frac{\dfrac{(x+2fN)}{f^2} + \dfrac{2(-N)}{f}}{\dfrac{r}{f^2}}$$

$$= \frac{x}{r} = e$$

olur. Bu ise $\tau' = \tau^{-1}$ olmasını gerektirir.

Eğer M sıfırdan farklı Gauss eğriliğine sahip ise M nin pedali M_π bir regüler yüzey ve dolaysıyla O, M için uygun bir orijindir. $0 \neq \det(d\tau) = -r^4 K K^\pi$ olduğundan dolayı M_π nin Gauss eğriliği $K^\pi \neq 0$ dır. Buna göre M_π nin kutupsal karşıtı bir regüler yüzeydir. $N^\pi = (sign\, K)\dfrac{x+2fN}{r}$ ve $(sign\, K) f^\pi = \dfrac{f^2}{r}$ olduğundan M' nün bir noktasının yer vektörü $x' = \dfrac{(-N^\pi)}{f^\pi}$ olarak yazılır ki bu da M_π nin kutupsal karşıtı olan $(M_\pi)_p$ nun yer vektörünün eksilisidir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

II.3. Eşlenik Reflektörler

S^2 nin bir noktasının yer vektörü e için $\alpha(e) = -e$ şeklinde tanımlı olan $\alpha : S^2 \to S^2$ dönüşümüne *antipodal dönüşüm* denir ve α yönlendirmeyi tersine çeviren bir izometridir. S^2 nin bir açık altcümlesi A ve $\tau : A \to S^2$ bir dönüşüm olmak üzere $\bar{\tau} = \alpha \circ \tau$ diyelim.

II.3.1. Tanım. Kabul edelimki τ bir M reflektörünün karakteristik dönüşümü olsun. Eğer $\bar{\tau}$ bir $\overline{M}$ reflektörünün karakteristik dönüşümü ise M ve $\overline{M}$ ye *eşlenik reflektörler* denir.

Bu tanıma göre, $\overline{M}$ orijinin seçilişine bağlıdır. Eğer M=S^2 ise, $\tau(e) = -e$ olacağından, S^2 nin merkezi orijin olarak alınırsa bu orijine göre M bir eşlenik reflektöre sahip değildir. Eğer orijin olarak S^2 nin herhangi bir iç noktası alınırsa o zaman $\overline{M}$ eşlenik reflektörü mevcut olur.

II.3.1. Örnek. E^3 de kartezyen koordinatlar (x^1, x^2, x^3) ve M yüzeyi x^3-ekseni etrafinda döndürülmüş, kolları aşağı doğru açık bir paraboloid olsun. Orijin olarak M nin odağı alınsın. M nin pedali, M nin tepe noktasındaki tanjant düzlemidir. τ dönüşümü

S^2-$\{güney\ kutup\}$ dan güney kutup üzerine olan bir sabit dönüşüm olur. $\bar{\tau}$ dönüşümü de S^2-$\{kuzey\ kutup\}$ üzerine olan bir diğer simetrik dönüşüm olur ve $\bar{\tau}$ dönüşümü M nin (x^1, x^2)-düzlemine göre yansımasından elde edilen $\overline{M}$ paraboloidinin karakteristik dönüşümüdür.

Şimdi, aşağıdaki şu teoremi verebiliriz.

II.3.1. Teorem. Bir M reflektörünün bir $\overline{M}$ eşleniğine sahip olması için gerek ve yeter şart M üzerinde $grad\, r \neq 0$ ve $grad\, r$ ile $grad\, f$ vektör alanlarının her noktada lineer bağımlı olmasıdır.

İspat. M nin eşleniği $\overline{M}$ olsun. Bu durumda $\overline{M}$ nin karakteristik dönüşümü $\bar{\tau}$, sabit noktalara sahip değildir yani, her e için $\tau(e) \neq -e$ dir. Bu ise x yer vektörünün hiç bir zaman M ye dik olmadığı anlamına gelir, böylece $grad\, r \neq 0$ dır. τ ve $\bar{\tau}$ nin integrallenebilme şartları, sırasıyla,

$$\langle \tau_2, e_1 \rangle - \langle \tau_1, e_2 \rangle = \frac{\langle \tau, e_2 \rangle \langle \tau_1, e \rangle - \langle \tau, e_1 \rangle \langle \tau_2, e \rangle}{1 - \langle \tau, e \rangle}$$

ve

$$\langle \bar{\tau}_2, e_1 \rangle - \langle \bar{\tau}_1, e_2 \rangle = \frac{\langle \bar{\tau}, e_2 \rangle \langle \bar{\tau}_1, e \rangle - \langle \bar{\tau}, e_1 \rangle \langle \bar{\tau}_2, e \rangle}{1 - \langle \bar{\tau}, e \rangle}$$

dir. $\bar{\tau}(e) = -\tau(e)$ olduğundan integrallenebilme şartlarını karşılaştırırsak

$$\langle \tau_1, e_2 \rangle - \langle \tau_2, e_1 \rangle = 0$$

olarak buluruz. $\tau(e) = e + \dfrac{2fN}{r}$ ve $e = \dfrac{x}{r}$ olduğu gözönüne alınarak u^i lere göre kısmi türevler alınıp hesaplanırsa

$$\langle \tau_1, e_2 \rangle - \langle \tau_2, e_1 \rangle = \frac{4f}{r^3}\left(r_2 f_1 - f_2 r_1\right)$$

elde edilir ki buradan

$$r_2 f_1 = f_2 r_1$$

olur. Bu ise $grad\, f = c\, grad\, r$ olduğunu gösterir.

Tersine $grad\, r \neq 0$ ve $r_2 f_1 = f_2 r_1$ olsun. $grad\, r \neq 0$ olduğundan $\bar{\tau} = \alpha \circ \tau$ sabit noktalara sahip değildir. Böylece $\langle \tau_1, e_2 \rangle = \langle \tau_2, e_1 \rangle$ dir. Bundan dolayı integrallenebilme şartının her iki tarafı sıfır olur. İntegrallenebilme şartında $\bar{\tau}(e) = -\tau(e)$ konulursa $\bar{\tau}$ integrallenebilme şartını sağlar ve $\bar{r}$ çözülür dolaysıyla $\overline{M}$ mevcuttur.

M nin bir noktasının x yer vektörünü

$$x = x_T - fN \tag{II.3.1}$$

olacak şekilde teğet ve normal bileşenlerine ayırabiliriz. Burada x_T, x in teğet bileşenidir. E^3 ün standart konneksiyonu $\overline{\nabla}$ ve M üzerine indirgenen konneksiyon da ∇ olmak üzere Gauss denklemi

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle S(X), Y \rangle N, \quad X, Y \in \chi(M)$$

ve Weingarten denklemi

$$\overline{\nabla}_X N = -S(X)$$

dir. Buna göre

$$\begin{aligned} X = \overline{\nabla}_X x = \overline{\nabla}_X (x_T - fN) &= \overline{\nabla}_X x_T - (Xf)N - f\overline{\nabla}_X N \\ &= \nabla_X x_T + \langle S(X), x_T \rangle N - (Xf)N + fS(X) \end{aligned}$$

olur. Bu denklemin teğetsel bileşenini

$$\nabla_X x_T = (1 - fS)X \tag{II.3.2}$$

ve normal bileşenini

$$S(x_T) = grad\, f \tag{II.3.3}$$

olarak elde ederiz.

Kabul edelimki (II.3.1.Teorem) in şartları sağlansın. $grad\, r = \dfrac{x_T}{r}$ olduğundan $x_T \neq 0$ dır ve (II.3.3) den $S(x_T)$, x_T ye paraleldir. Bu durumda (II.3.1.Teorem) şu şekilde ifade edilebilir: $\overline{M}$ vardır ancak ve ancak M nin her P noktası için yer vektörünün tanjant düzlemi üzerindeki dik izdüşümü olan x_T vektörü S nin karakteristik vektörüdür. Buna göre bir eşleniğe sahip M için x_T vektörü S nin karakteristik vektörü ise (II.3.2) den

$$\nabla_{x_T} x_T = (1 - f k_1) x_T \tag{II.3.4}$$

olur.

$\overline{M}$ nin bir noktasının yer vektörünü $\bar{x}$ ile gösterelim ve $\overline{M}$ nin yer vektörünün boyunu, destek fonksiyonunu ve birim normal vektör alanını da, sırasıyla, $\bar{r}$, $\bar{f}$, $\overline{N}$ ile gösterelim. $\bar{\tau}(e) = -\tau(e)$ ve $\frac{x}{r} = \frac{\bar{x}}{\bar{r}}$ olduğundan

$$\frac{x}{r} + \frac{2f}{r} N = -\frac{x}{r} - \frac{2\bar{f}}{\bar{r}} \overline{N} \tag{II.3.5}$$

şeklinde yazabiliriz. Bu bağıntı $\overline{N}$ nin x ve N tarafından gerilen düzlemde olduğunu gösterir. (II.3.5) den $\overline{N}$ nin N ye dik olduğu sonucuna varırız. Böylece $\overline{N}$ vektör alanı x_T ye pareleldir. $\frac{x}{r} = \frac{\bar{x}}{\bar{r}}$ olduğundan

$$\bar{x} = \frac{\bar{r}}{r} x = \frac{\bar{r}}{r}(x_T - fN),$$

ve

$$\bar{x} = \bar{x}_T - \bar{f}\overline{N}$$

yazabiliriz, buradan da $\overline{M}$ nin destek fonksiyonu

$$\bar{f} = -\frac{\bar{r}}{r}\langle x_T, \overline{N}\rangle$$

elde edilir. $\overline{N} = \frac{-x_T}{\|x_T\|}$ olarak seçilirse $\bar{f}$ pozitif olur ve

$$\bar{f} = \frac{\bar{r}}{r}\|x_T\| \tag{II.3.6}$$

dir.

II.3.2. Teorem. $M \to \overline{M}$ doğal diffeomorfizm asli doğrultuları korur. Ayrıca asli eğrilik fonksiyonları arasında

$$\bar{k}_1 = \frac{\bar{f}r^2}{f\bar{r}} k_1 , \quad \bar{k}_2 = \frac{1 - f k_2}{\bar{f}} \tag{II.3.7}$$

bağıntıları vardır, burada k_1 eğrilik fonksiyonu x_T doğrultusundaki asli eğrilik fonksiyonudur.

İspat. Bunların M nin umbilik olmayan bir noktasının komşuluğunda sağlandığını göstermek yeterlidir. (u^1, u^2) umbilik olmayan bir nokta civarında bir lokal parametre sistemi ve bu parametre sistemine göre M nin parametre eğrileri eğrilik çizgisi olsun. Böylece $u^2 = sbt.$ eğrileri x_T vektör alanının integral eğrileridir. Bu durumda $g_{12} = b_{12} = 0$ ve $k_i = \frac{b_{ii}}{g_{ii}}$ dir. $u^2 = sbt.$ eğrileri üzerinde $r = r(u^1)$, $f = f(u^1)$ ve x_T, x_1 e paraleldir. Şimdi E^3 ün $\{x_1, x_2, N\}$ bazına göre M nin bir noktasının yer vektörünü

$$x = \frac{rr_1}{g_{11}} x_1 - f N \tag{II.3.8}$$

şeklinde yazabiliriz. $x = x_T - f\,N$ olduğundan (II.38) den

$$x_T = \frac{rr_1}{g_{11}} x_1 , \quad rr_1 = \sqrt{g_{11}} \|x_T\| \tag{II.3.9}$$

elde edilir. $\|x_T\|^2 = r^2 - f^2$ olduğundan g_{11} in sadece u^1 e bağlı olduğu sonucuna varırız. (II.3.8) de u^2 ye göre kısmi türev alınır ve Rodrigues formülü uygulanırsa

$$\frac{1 - f k_2}{\|x_T\|} = \frac{1}{2\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial u^1} (\log g_{22}) \tag{II.3.10}$$

eşitliği elde edilir. $h = \frac{\bar{r}}{r}$ denir ve kısmi türevleri alınırsa, $\bar{N} = \frac{-x_T}{\|x_T\|}$ ile (II.3.9) u kullanırsak

$$\bar{N} = \frac{-x_1}{\sqrt{g_{11}}} , \quad h_1 = \frac{-h\sqrt{g_{11}}}{\|x_T\|} , \quad h_2 = 0$$

sonucuna varırız. Böylece $\bar{x} = hx$ den $\bar{x}_1 = h_1 x + h x_1$ ve $\bar{x}_2 = h x_2$ olduğundan $\overline{M}$ nin birinci temel formunun bileşenleri

$$\bar{g}_{11} = \frac{h^2 f^2}{\|x_T\|^2} g_{11} , \quad \bar{g}_{12} = 0 , \quad \bar{g}_{22} = h^2 g_{22}$$

ve $\overline{M}$ nin ikinci temel formunun bileşenleri

$$\bar{b}_{11} \frac{hf}{\|x_T\|} b_{11} , \quad \bar{b}_{12} = 0 , \quad \bar{b}_{22} = \frac{h}{2\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial g_{22}}{\partial u^1}$$

olarak elde edilir. $\bar{g}_{12} = 0$ ve $\bar{b}_{12} = 0$ olduğundan (u^1, u^2) parametrelerine göre $\overline{M}$ nin parametre eğrileri eğrililik çizgileridir, böylece $M \to \overline{M}$ doğal diffeomorfizm asli doğrultuları korur.

$\bar{f} = h\|x_T\|$ olduğu kullanırsa

$$\bar{k}_1 = \frac{\bar{b}_{11}}{\bar{g}_{11}} = \frac{\bar{f}r^2}{f\bar{r}} k_1$$

olur ve

$$\bar{k}_2 = \frac{\bar{b}_{22}}{\bar{g}_{22}} = \frac{1}{2h\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial u^1}(\log g_{22}) = \frac{1 - f k_2}{\bar{f}}$$

bulunur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

II.4. Konform Karakteristik Dönüşüm

Bu kısımda karakteristik dönüşümü konform olan reflektörlerle ilgileneceğiz. Eğer $\tau : A \to S^2$ dönüşümü için

$$\langle d\tau(e_i), d\tau(e_j) \rangle = \lambda^2 \langle e_i, e_j \rangle$$

olacak şekilde λ pozitif fonksiyonu bulunabiliyorsa τ ya *konform dönüşüm* denir. Eğer τ

konform dönüşümü S^2 nin yönlendirmesini koruyor (yani, $\det(d\tau) > 0$) ise τ ya *tam (properly) konform*, τ dönüşümü S^2 nin yönlendirmesini tersine çeviriyor (yani, $\det(d\tau) < 0$) ise bu durumda τ ya *anti-konform* denir.

II.4.1. Teorem. Eğer $\tau : A \to S^2$ dönüşümü tam konform ve sabit noktalara sahip değilse bu durumda karakteristik dönüşümü τ olan bir reflektör vardır.

İspat. A nın keyfi bir noktasında τ nun integrallenebilme şartının sağlandığını göstermemiz yeterlidir. M üzerinde bir lokal koordinat sistemi (u^1, u^2) olsun ve E^3 ün $\{e_1, e_2, e\}$ ve $\left\{ \tau_1/\lambda, \tau_2/\lambda, \tau \right\}$ ortonormal bazlarını gözönüne alalım. $\bar{e}_i = \tau_i/\lambda$ diyelim ve bir $L: IR^3 \to IR^3$ lineer dönüşümünü

$$Le_1 = \bar{e}_1, \quad Le_2 = \bar{e}_2, \quad Le = \tau$$

ile tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan L lineer dönüşümü için $\det L = 1$ dir, yani L bir ortogonal dönüşümdür. Determinantı pozitif olan her 3x3 tipindeki ortogonal (a_{ij}) matrisi

$$\begin{bmatrix} \cos\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\sin\psi & \cos\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\sin\psi & \sin\psi\sin\theta \\ -\sin\psi\cos\varphi - \cos\theta\sin\varphi\cos\psi & -\sin\psi\sin\varphi + \cos\theta\cos\varphi\cos\psi & \cos\psi\sin\theta \\ \sin\theta\sin\varphi & -\sin\theta\cos\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

olarak yazılabilir. Burada φ, ψ ve θ açılarına Euler açıları denir. Eğer $a_{33} = \cos\theta \neq 1$ ise matrisin elemanları

$$a_{12} - a_{21} = \frac{a_{23}a_{31} - a_{13}a_{32}}{1 - a_{33}} \tag{II.4.1}$$

denklemini sağlar. $a_{33} = \langle \tau, e \rangle \neq 1$ dir ve τ nun sabit noktası olmadığından (II.4.1) den

$$\langle \bar{e}_1, e_2 \rangle - \langle \bar{e}_2, e_1 \rangle = \frac{\langle \bar{e}_2, e \rangle \langle \tau, e_1 \rangle - \langle \bar{e}_1, e \rangle \langle \tau, e_2 \rangle}{1 - \langle \tau, e \rangle}$$

olur. Burada $\bar{e}_i = {}^{\tau_i}\!/_{\lambda}$ yazılırsa integrallenebilme şartı elde edilir.

II.4.2. Teorem. Sabit noktaları olmaksızın bir $\tau : A \to S^2$ anti-konform dönüşümü bir M reflektörünün karakteristik dönüşümüdür ancak ve ancak M aşağıdakilerden biriyse:

i) bir düzlem,

ii) orijin merkezli bir küre,

iii) bir odağı orijin olan bir dönel elipsoid,

iv) odaklarından biri orijin olan iki kanatlı hiperboloidin bir kanadı.

Eğer τ sabit ise odağı orijin olan bir dönel paraboloiddir.

İspatı vermeden önce ihtiyacımız olacak olan aşağıdaki iki lemmayı verelim.

II.4.1. Lemma. E^3 de yönlendirilmiş bir yüzey M ve M de $K(P) \neq 0$ olacak şekilde bir nokta P ve O uygun bir orijin olsun.

i) Eğer $x_T(P)=0$ ise $\rho(P)$ noktası $k_1^\rho = k_2^\rho = a$ ya sahip bir umbilik noktadır ancak ve ancak P noktası $k_1 = k_2 = \frac{1}{a}$ ya sahip bir umbilik nokta ise.

ii) Eğer $x_T(P)\neq 0$ ise $\rho(P)$ noktası $k_1^\rho = k_2^\rho = a$ ya sahip bir umbilik noktadır ancak ve ancak $x_T(P)$ vektörünün belirlediği doğrultu $k_1 = \frac{f^3}{r^3}\frac{1}{a}$ ve $k_2 = \frac{f}{r}\frac{1}{a}$ asli eğrilikleri tekebülü ile bir asli doğrultu ise.

İspat. M_ρ yüzeyi $y=-\frac{N}{f}$ yer vektörlerine karşılık gelen noktaların oluşturduğu bir regüler yüzey ve $N^\rho = -(\operatorname{sgn} K)\frac{x}{r}$ dir. $\rho(P)$ noktası umbilik umbilik olsun. Buna göre (II.1.14) den $\operatorname{sgn} K = +1$ olur. Eğer P noktasında M nin bir tanjant vektörü X ise

$$\begin{aligned} dy(X) &= \frac{df(X)}{f^2}N - \frac{1}{f}dN(X) \\ &= \frac{\langle grad\, f, X\rangle}{f^2}N + \frac{1}{f}S(X) \\ &= \frac{\langle S(x_T), X\rangle}{f^2}N + \frac{1}{f}S(X) \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde $grad\, r = \frac{x_T}{r}$ yi kullanarak

$$dN^\rho(X) = \frac{1}{r^3}\langle x_T, X\rangle x_T - \frac{1}{r}X - \frac{f}{r^3}\langle x_T, X\rangle N$$

elde ederiz. Rodrigues formülünden $dN^\rho(X) = -k^\rho dy(X)$ olacağından $dy(X)$ vektörü $\rho(P)$ noktasında M_ρ nun asli doğrultu vektörüdür ancak ve ancak

$$\frac{1}{r^3}\langle x_T, X\rangle x_T - \frac{1}{r}X - \frac{f}{r^3}\langle x_T, X\rangle N + k^\rho\left(\frac{\langle S(x_T), X\rangle}{f^2}N + \frac{1}{f}S(X)\right) = 0$$

ya da buna eşdeğer olarak

$$\frac{f^3}{r^3}\langle x_T, X\rangle = k^\rho \langle S(x_T), X\rangle \tag{II.4.2}$$

ve

$$\frac{1}{r^3}\langle x_T, X\rangle x_T - \frac{1}{r}X = k^\rho S(X) \tag{II.4.3}$$

bağıntıları sağlanıyorsa. Eğer $x_T(P)=0$ ise $f=r$ olacağından bu iki bağıntıyı $k^\rho S(X) = X$ e indirgeriz. Böylece $\rho(P)$, $k_1^\rho = k_2^\rho = a$ ya sahip bir umbilik noktadır ancak ve ancak $S(X) = \frac{1}{a}X$, yani $k_1 = k_2 = \frac{1}{a}$ ise. Bu ise *(i)* nin ispatıdır.

Şimdi $x_T(P) \neq 0$ ve $k_1^P = k_2^P = a$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda P deki her X tanjant vektörü için $k^P(X) = a$ dır. Bu denklemler P de her X için (II.4.2) ve (II.4.3) den

$$\frac{f^3}{r^3}\langle x_T, X\rangle = a\langle S(x_T), X\rangle \qquad \text{(II.4.2)'}$$

$$\frac{1}{r^3}\langle x_T, X\rangle x_T - \frac{1}{r}X = -\frac{a}{f}S(X) \qquad \text{(II.4.3)'}$$

olur. (II.4.2)' den x_T, $k_1 = \frac{f^3}{ar^3}$ asli eğriliği ile bir asli doğrultudur. (II.4.3)' den X vektörü $k_2 = \frac{f}{ar}$ değerine karşılık gelen ile x_T ye dik bir karakteristik vektördür. Tersine, X vektörü x_T ye dik bir vektör ve $S(x_T) = k_1 x_T$, $S(X) = k_2 X$ olacak şekilde $k_1 = \frac{f^3}{r^3}\frac{1}{a}$ ve $k_2 = \frac{f}{r}\frac{1}{a}$ ise $dy(X)$ ve $dN^P(X)$ den $k_1^P = k_2^P = a$ olarak elde edilir.

II.4.2. Lemma. M reflektörünün karakteristik dönüşümü olan τ nun konform (yani $\|d\tau\|^2 = \lambda^2\|de\|^2$, $\lambda>0$) olması için gerek ve yeter şart M nin her X tanjant vektörü için

$$\left(1-\lambda^2\right)\left(X - \frac{\langle x_T, X\rangle}{r^2}x_T\right) + 4f^2S^2(X) - 4fS(X) + 4\langle S(x_T), X\rangle S(x_T) = 0 \qquad \text{(II.4.4)}$$

olmasıdır.

İspat. $\tau = \zeta \circ \eta^{-1}$, $\eta(x) = \frac{x}{r}$ ve $\zeta(x) = \frac{x + 2fN}{r}$ olduğunu biliyoruz. Buna göre τ dönüşümü $\eta(x)$ de S^2 nin her $\overline{X}$ tanjant vektörü için

$$\left\|d\tau(\overline{X})\right\|^2 = \lambda^2\left\|\overline{X}\right\|^2$$

olmasıdır. η bir diffeomorfizm olduğundan, bu M nin her X tanjant vektörü için

$$\left\|d\zeta(X)\right\|^2 = \lambda^2\left\|\zeta(X)\right\|^2 \qquad \text{(II.4.5)}$$

olmasını gerektirir. η ve ζ nın tanımından

$$d\eta(X) = -\frac{\langle x_T, X\rangle}{r^3}x + \frac{X}{r}$$

ve

$$d\zeta(X) = -\frac{\langle x_T, X\rangle}{r^3}(x + 2fN) + \frac{1}{r}(X + 2\langle S(x_T), X\rangle N - 2fS(X))$$

elde edilir. Bunlar (II.4.5) de yerlerine yazılırsa (II.4.4) elde edilir.

Diğer yöndeki ispatı da kolayca gösterilebilir.

Şimdi teoremin ispatını verebiliriz.

(II.4.2.Teorem)'in İspatı: M bir reflektör ve M nin karakteristik dönüşümü τ, anti-konform olsun. τ analitik olduğundan, M analitiktir. Kabul edelim ki M üzerinde $x_T \neq 0$ olsun. $\bar{\tau} = \alpha \circ \tau$ dönüşümü tam konform ve sabit noktası yoktur. (II.4.1.Teorem) e göre $\bar{\tau}$, M nin eşleniği $\overline{M}$ reflektörünün karakteristik dönüşümüdür. (II.3.1.Teorem) in farklı şekildeki ifadesinden x_T vektörü S nin karakteristik vektörüdür. k_1 eğriliği x_T ye karşılık gelen asli eğrilik olsun. (II.4.4) denkleminde X yerine x_T yazarsak

$$\left(1-\lambda^2\right)\left(1-\frac{\|x_T\|^2}{r^2}\right)+4f^2k_1^2-4fk_1+4k_1^2\|x_T\|^2=0$$

veya $\|x_T\|^2 = r^2 - f^2$ kullanırsak

$$4k_1^2r^2-4fk_1+\left(1-\lambda^2\right)\frac{f^2}{r^2}=0$$

denklemini elde ederiz. k_1 e göre bu ikinci dereceden denklemi çözersek

$$k_1=\frac{f}{2r^2}\left(1+\varepsilon_1\lambda\right), \quad \varepsilon_1=\mp 1, \qquad \text{(II.4.6)}$$

buluruz. Şimdi x_T ye dik bir E karakteristik vektörünü alalım. Böylece $S(E)=k_2E$ dir. (II.4.4) de X yerine E alınırsa son denkleme benzer olarak

$$\left(1-\lambda^2\right)+4f^2k_2^2-4fk_2=0$$

elde edilir. Bu denklemin k_2 ye göre çözümünden de

$$k_2=\frac{1}{2f}\left(1+\varepsilon_2\lambda\right), \quad \varepsilon_2=\mp 1 \qquad \text{(II.4.7)}$$

bulunur. (II.4.6) ve (II.4.7) den

$$\left(1-2fk_2\right)\left(2r^2k_1-f\right)=-f\lambda^2\varepsilon_1\varepsilon_2 \qquad \text{(II.4.8)}$$

bulunur. (II.2.17) de $x_1=\dfrac{x_T}{\|x_T\|}$, $x_2=E$ alınırsa

$$\begin{aligned}\det(d\tau)&=-1-4Kr^2+4Hf+\frac{2}{f}k_1\|x_T\|^2\\&=\frac{1}{f}\left(-f-4fKr^2+2r^2k_1+2f^2k_2\right)\\&=\frac{1}{f}\left(1-2fk_2\right)\left(2r^2k_1-f\right)\end{aligned}$$

$$= -\lambda^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 \tag{II.4.9}$$

olur. Böylece, τ anti-konform olduğundan $\det(d\tau) = -\lambda^2 \varepsilon_1 \varepsilon_2 < 0$ olur ve burada $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$ dersek $\varepsilon = \mp 1$ olur.

İlk olarak kabul edelim ki $1+\varepsilon\lambda = 0$ olsun. Bu durumda $k_1 = k_2 = 0$ olur, böylece M bir düzlemdir. Bir U açık kümesi üzerinde $1+\varepsilon\lambda \neq 0$ ise bu durumda (II.4.6) ve (II.4.7) den

$$k_1 = \frac{f^3}{r^3} \frac{(1+\varepsilon\lambda)r}{2f^2}, \quad k_2 = \frac{f}{r} \frac{(1+\varepsilon\lambda)r}{2f^2}$$

olarak yazabiliriz. $1+\varepsilon\lambda \neq 0$ olduğundan U üzerinde $K \neq 0$ dır ve (II.4.1.Lemma, (ii)) den dolayı $\rho(U)$ nun bütün noktalarının, $k_1^\rho = k_2^\rho = \dfrac{2f^2}{(1+\varepsilon\lambda)r} \neq 0$ ile umbilik noktalar olmalarından dolayı $\rho(U)$ kürenin bir parçasıdır. σ inversiyonu asli doğrultuları koruduğundan ve $\pi = \sigma \circ \rho$ olduğundan U nun $(\sigma \circ \rho)(U)$ pedalinin bütün tanjant vektörleri karakteristik vektörlerdir. $K^\pi \neq 0$ olduğundan pedal bir düzlem değildir ve pedal bir kürenin parçasıdır. Bu durumda, pedal örneklerinden bilindiği gibi U odaklarından biri orijin olan bir dönel elipsoidin bir parçası veya odaklarından biri orijin olan iki kanatlı hiperboloidin bir kanadının bir parçasıdır.

$\tau = sbt.$ yani, $\lambda = 0$ olma durumunda benzer şekilde irdeleme yapılır ve burada

$$k_1 = \frac{f}{2r^2}, \quad k_2 = \frac{1}{2f}$$

olur. (II.4.1.Lemma) tekrar uygulanırsa $k_1^\rho = k_2^\rho = \dfrac{2f^2}{r}$ sonucuna varılır. $k_i^\pi = \dfrac{b_{ii}^\pi}{g_{ii}^\pi}$ olduğundan (II.1.8), (II.1.15), (II.1.21) ve (II.1.23) birlikte düşünülürse

$$k_i^\pi = \frac{2}{r} - \frac{k_i^\rho}{f^2} \tag{II.4.10}$$

elde edilir ve buradan da $k_1^\pi = k_2^\pi = 0$ olur ki, böylece M_π bir düzlemdir ve dolaysıyla M bir odağı orijin olan bir dönel paraboloiddir.

Şimdi tersine bakalım. Eğer M orijin merkezli bir küre veya bir düzlem ise bu durumda τ anti-konformdur. Eğer M odağı orijin olan bir dönel paraboloid ise bu durumda M_π, tepe noktasındaki tanjant düzlemidir. τ dönüşümü M_π nin birim normal vektör alanı ve düzlemin normali her noktası için sabit olduğundan τ sabittir. Kabul edelimki M odaklarından biri orijin olan bir dönel elipsoid olsun. M nin pedali, merkezi elipsoidin merkezi ve yarıçapı büyük eksen uzunluğu olan bir küredir. Bir M yüzeyinin M_p kutupsal karşıtı için $K^p = \dfrac{f^4}{r^4 K}$ olduğundan M, k>0 ile bir düzlem eğrisi ise bu durumda $k^p = \dfrac{f^3}{r^3 k}$ olur ve (II.4.10) dan da bu eğrinin pedali için

$$k^\pi = \frac{2}{r} - \frac{f}{kr^3}$$

elde edilir ($k^p = (\operatorname{sgn} k)\dfrac{f^3}{r^3 k}$ olduğunun ispatı, J.W.Bruce, P.J.Giblin ve C.G.Gibson tarafından [9] da farklı bir şekilde verilmiştir). Elipsoidin pedali, büyük eksen uzunluğu a olmak üzere a yarıçaplı bir küre olduğu için $k^\pi = \dfrac{1}{a}$ dır. Budurumda (II.4.1.Lemma) dan $k_1 = \dfrac{f^3}{r^3}\dfrac{1}{k_1^p}$ olur ve (II.4.10) dan da $\dfrac{1}{k_i^p} = \dfrac{ar}{f^2(2a-r)}$ olur, düzenlenirse

$$k_1 = \frac{f}{2r^2}\left(1 + \frac{r}{2a-r}\right)$$

elde edilir ve benzer şekilde

$$k_2 = \frac{1}{2f}\left(1 + \frac{r}{2a-r}\right)$$

olur. Eğer $\lambda = \dfrac{r}{2a-r}$ dersek (II.4.7) ve (II.4.8) denklemleri $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ için sağlanır ve buradan da bu λ değeri için (II.4.4) denklemi dolaysıyla (II.4.9) denklemi sağlanır, yani $\det(d\tau) < 0$ olur. Böylece τ anti-konformdur. Benzer şekilde hiperboloid durumuna bakalım. Hiperbolün tepeden merkezine olan uzaklığı a olmak üzere odaklardan biri orijin ise elipsoidde olduğu gibi

$$k_1 = \frac{f}{2r^2}\left(1 - \frac{r}{2a+r}\right), \qquad k_2 = \frac{1}{2f}\left(1 - \frac{r}{2a+r}\right)$$

dir ve eğer orijin diğer odak ise

$$k_1 = \frac{f}{2r^2}\left(1 - \frac{r}{r-2a}\right), \qquad k_2 = \frac{1}{2f}\left(1 - \frac{r}{r-2a}\right)$$

dır ve τ anti-konformdur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

II.4.3. Teorem. Eğer bir reflektörün karakteristik dönüşümü sabit noktası olmayan bir izometri ise bu durumda reflektör, orijin merkezli bir kürenin parçası veya bir düzlemin parçası yada kutup noktası orijinde olan bir logaritmik spiral üzerine kurulmuş olan silindirin bir parçasıdır.

İspat: (II.4.2.Lemma)'dan $\lambda = 1$ ve her X tanjant vektörü için

$$f^2 S^2(X) - fS(X) + \langle X, S(x_T)\rangle S(x_T) = 0 \qquad \text{(II.4.11)}$$

olur. Burada iki durum vardır. Birinci durum $K \neq 0$ olduğudur. U bir açık cümle ve U üzerinde $K \neq 0$ olsun. Göstereceğizki x_T, U üzerinde sıfırdır. Aksini kabul edelim, yani U da ihtiva edilen bir W açık cümlesi var ve W üzerinde $x_T \neq 0$ olsun. $K \neq 0$ olduğundan S nin inversi vardır ve (II.4.11) e uygulanırsa

$$f^2 S(X) - fS(X) + \langle X, S(x_T)\rangle x_T = 0$$

olur. W daki bir noktada S nin karakteristik vektörleri E_1 ve E_2 ve k_1, k_2 de bu vektörlere karşılık gelen karakteristik değerleri olsun. $X = E_i$ için son denklemden

$$\left(f^2 k_i - f\right)E_i + k_i \langle x_T, E_i\rangle x_T = 0, \quad 1 \leq i \leq 2, \qquad \text{(II.4.12)}$$

olur. $k_1 k_2 \neq 0$ olduğundan bu denklemden x_T nin E_1 ve E_2 ye parelel olduğu sonucuna varırız, yani x_T bir karakteristik vektördür. Kabul edelimki $x_T = \|x_T\| E_1$ olsun. (II.4.12) den

$$k_1 = \frac{f}{r^2} = \frac{f^3}{r^3}\frac{r}{f^2}, \quad k_2 = \frac{1}{f} = \frac{f}{r}\frac{r}{f^2}$$

olur. (II.4.1.Lemma) dan $\rho(W)$ nın $k_1^\rho = k_2^\rho = \dfrac{f^2}{r} = sbt.$ ile bir kürenin parçası olduğu sonucuna varırız. (II.4.10) dan $\pi(W)$, $k_1^\pi = k_2^\pi = \dfrac{1}{r} = sbt.$ eğriliği ile bir kürenin parçasıdır. Bu küre orijin merkezli olduğundan W üzerinde $x_T = 0$ olur. İkinci durum ise K=0 olmasıdır. Eğer τ yönlendirmeyi tersine çeviriyor ise (II.4.2.Teorem) den M bir düzlemdir. Kabul edelimki τ yönlendirmeyi korusun. Bu durumda τ merkezden geçen bir ℓ ekseni etrafında w açılı, S^2 nin bir dönmesidir. τ sabit noktalara sahip olmadığından $w \neq 0$ dır. ℓ ekseni x^3 ekseni olmak üzere, kartezyen koordinat sistemi $\left(O, x^1, x^2, x^3\right)$ ve küresel kutupsal koordinat sistemi de (φ, ψ) olarak alırsak

$$\left(x^1, x^2, x^3\right) = \left(\sin\psi\cos\varphi, \sin\psi\sin\varphi, \cos\psi\right)$$

olur. $\eta : M \to S^2$ bir diffeomorfizm olduğundan (φ,ψ) ile M yi parametrize edebiliriz. Bu durumda $u^1 = \varphi$, $u^2 = \psi$ parametreleri ile (II.2.7) sistemi

$$\frac{\partial(\log r)}{\partial\psi} = -\frac{\cos\psi}{\sin\psi}$$

ve

$$\frac{\partial(\log r)}{\partial\varphi} = \frac{\sin w}{1-\cos w} = c = sbt.$$

olur. Buradan integral alınırsa

$$r(\varphi,\psi) = \frac{A}{\sin\psi} e^{c\varphi}\,, \quad A = sbt. \neq 0$$

elde edilir. Buradan M nin yer vektörü (A=1 olmak üzere)

$$x(\varphi,\psi) = e^{c\varphi}(\cos\varphi, \sin\varphi, \cot\psi)$$

olur. Bu ise M nin $r = e^{c\varphi}$ spirali üzerine kurulan bir silindir olduğunu gösterir. $w = \pi$ için c=0 olur ve böylece M bir çembersel silindirdir.

III. BÖLÜM

E^{n+1} DE BİR HİPERYÜZEYİN PEDALİ VE E^{n+1} DE BİR REFLEKTÖRÜN KARAKTERİSTİK DÖNÜŞÜMÜ

Bu bölümde ilk olarak (n+1)-boyutlu Öklid uzayı E^{n+1} de bir M hiperyüzeyinin pedali tanımlanarak pedalin temel formları ile ilgili bazı sonuçlar verildi. Daha sonra E^{n+1} de $\{M,O\}$ optiksel sistemi tanımlanarak $\{M,O\}$ sisteminin karakteristik dönüşümü τ tanımlandı. Verilen M reflektörünün karakteristik dönüşümü τ nun diffeomorfizm olması durumunda τ^{-1} in de bir reflektörün karakteristik dönüşümü olduğu gösterildi. Ayrıca bir M hiperyüzeyi ile eşleniğinin asli eğrilikleri arasındaki ilişkiler verildi.

III.1. E^{n+1} de Bir Hiperyüzeyin Pedali

E^{n+1} de gömülü, diferensiyellenebilir, bağlantılı ve yönlendirilmiş bir hiperyüzey M olsun. E^{n+1} in orijini O ya göre bir $P \in M$ noktasının yer vektörü x ile ve x vektörünün boyu da $r = \|x\|$ ile gösterilsin. Eğer M üzerindeki bir lokal koordinat sistemi $(u^1, u^2, \cdots, u^n)$ ise M nin parametrik ifadesi

$$x = x(u^1, u^2, \cdots, u^n)$$

şeklinde yazılabilir. M nin birim normal vektör alanı N olmak üzere, O orijin noktasına göre M hiperyüzeyinin destek fonksiyonu f

$$f = -\langle x, N \rangle \qquad \text{(III.1.1)}$$

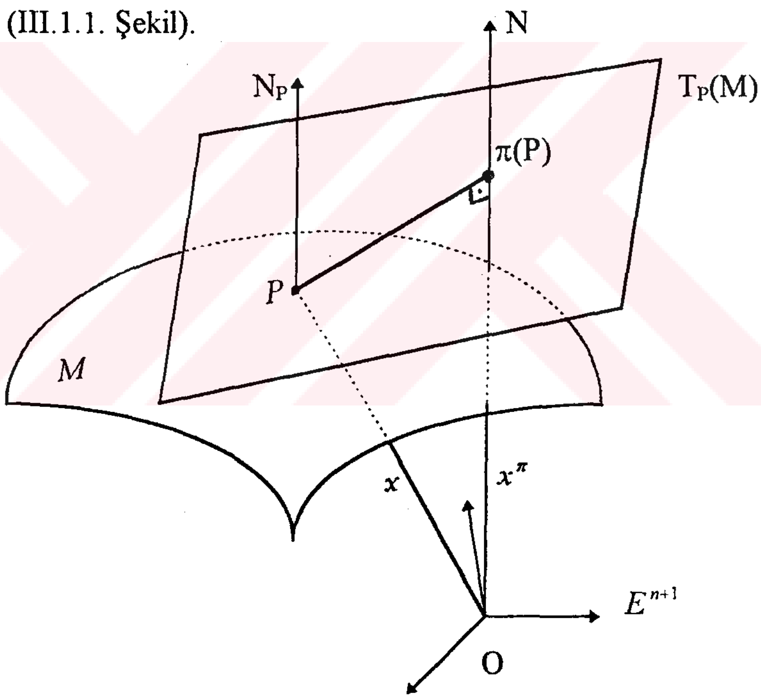
şeklinde tanımlıdır. M için uygun bir orijin O olsun, yani O noktası M nin her P noktası için hiç bir tanjant hiperdüzlemi üzerinde kalmasın. Bu durumda f destek fonksiyonu

M nin bütün noktalarında sıfırdan farklı olur. Böylece ya $f>0$ veya $f<0$ dır. Biz daima $f>0$ yapan yönlendirmeyi tercih edeceğiz.

III.1.1. Tanım. E^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M olsun. O ya göre M hiperyüzeyinin pedali M_π

$$x^\pi = -fN \qquad \text{(III.1.2)}$$

yer vektörü ile tanımlı olan noktalardan oluşan bir hiperyüzeydir ve M_π pedalinin yönlendirilmesi $\pi: M \to M_\pi$ pedal dönüşümü yardımıyla M den indirgenen yönlendirmedir. $P \in M$ noktası için $\pi(P)$ noktası, P noktasında M nin tanjant hiperdüzlemine O dan inilen dikmenin ayağıdır. Böylece M_π hiperyüzeyi M nin bütün tanjant hiperdüzlemleri ile bu hiperdüzlemlere O dan inilen dikmelerin arakesitinin geometrik yeridir (III.1.1. Şekil).



III.1.1. Şekil

III.1.1. Teorem. Bir M hiperyüzeyinin pedali bir regüler hiperyüzeydir ancak ve ancak aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa:

i) M nin Gauss eğriliği K her yerde sıfırdan farklıdır.

ii) M için uygun bir orijin O dur [10].

Bundan sonra M hiperyüzeyinin pedali M_π nin regüler hiperyüzey olduğunu kabul edeceğiz.

M hiperyüzeyinin küresel gösterge dönüşümü $n: M \to S^n$ bire-bir ise bu durumda pedal dönüşümü $\pi: M \to M_\pi$, bir diffeomorfizmdir ve M_π orijine göre yıldız-şeklindedir. $P, Q \in M$ noktaları için $\pi(P) = \pi(Q)$ olması P ve Q noktalarındaki tanjant hiperdüzlemlerinin çakışmasını gerektirir.

III.1.2. Teorem. M yönlendirilmiş bir hiperyüzey ve M nin O ya göre pedali M_π olsun. M_π nin birinci temel formunun bileşenleri g_{ij}^π olmak üzere

$$g_{ij}^\pi = f_i f_j + f^2 n_{ij}, \quad 1 \le i, j \le n, \tag{III.1.3}$$

dir, burada $n_{ij} = \langle N_i, N_j \rangle$, $N_i = \dfrac{\partial N}{\partial u^i}$, olup M nin üçüncü temel formunun bileşenleridir [10].

III.1.3. Teorem. M yönlendirilmiş bir hiperyüzey ve M_π de O ya göre M nin pedali olsun. Bir $\pi(P)$ noktasında M_π nin birim normali

$$N^\pi = \frac{\operatorname{sgn} K}{r}\left(x + 2f N\right) \tag{III.1.4}$$

dir [10].

III.1.1. Sonuç. E^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M nin O ya göre pedali M_π olsun. Bir $P \in M$ noktasının yer vektörü x M hiperyüzeyine dik ise M_π pedali $P \in M$ noktasında M ye teğettir.

İspat. $P \in M$ noktasının x yer vektörü M hiperyüzeyine dik ise $x = \mp r N$ olarak yazılabilir. Bu durumda M nin destek fonksiyonu $f = -\langle x, N\rangle = \mp r$ olur. Bu (III.1.4) de yerine yazılırsa

$$N^\pi = \mp N$$

olur ki buda $P \in M$ noktasında M_π nin M ye teğet olması anlamına gelir.

III.1.4. Teorem. M_π nin destek fonksiyonu

$$f^\pi = \operatorname{sgn} K \frac{f^2}{r} \tag{III.1.5}$$

dir [10].

III.1.5. Teorem. M hiperyüzeyinin M_π pedalinin ikinci temel formunun bileşenleri

$$b_{ij}^\pi = \frac{\operatorname{sgn} K}{r}\left(2f_i f_j - f b_{ij} + 2f^2 n_{ij}\right), \quad 1 \le i, j \le n, \tag{III.1.6}$$

dır [10].

III.1.2. Sonuç. M hiperyüzeyinin ikinci temel formu $\|$, M_π nin birinci ve ikinci temel formu olan $|^\pi$ ve $\|^\pi$ nin lineer birleşimi olarak yazılabilir.

İspat. M_π nin ikinci temel formu

$$\|^\pi = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}\, du^i du^j$$

dir. (III.1.3) ve (III.1.6) dan

$$b_{ij}^\pi = \frac{\operatorname{sgn} K}{r}\left(2g_{ij}^\pi - f b_{ij}\right)$$

olur. Buna göre

$$\|^{\pi} = \frac{\operatorname{sgn} K}{r}\left(2\sum_{i,j} g_{ij}^{\pi}\, du^i du^j - f\sum_{i,j} b_{ij}\, du^i du^j\right)$$

dir ve buradan

$$\|^{\pi} = \frac{\operatorname{sgn} K}{r}\left(2|^{\pi} - f\|\right)$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$\| = \frac{2}{f}|^{\pi} - (\operatorname{sgn} K)\frac{r}{f}\|^{\pi}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

III.1.6. Teorem. E^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M nin O ya göre pedali M_{π} olsun. M_{π} nin üçüncü temel formunun bileşenleri n_{ij}^{π} ler olmak üzere

$$n_{ij}^{\pi} = \frac{\operatorname{sgn} K}{r^2}\left(4f_i f_j + r_i r_j + g_{ij} - 4fb_{ij} + 4f^2 n_{ij}\right) \qquad \text{(III.1.7)}$$

dir, burada $r_i = \dfrac{\partial r}{\partial u^i}$ dir.

İspat. M_{π} nin üçüncü temel formunun bileşenleri $n_{ij}^{\pi} = \langle N_i^{\pi}, N_j^{\pi}\rangle$ dir. $N_i^{\pi} = \dfrac{\partial N^{\pi}}{\partial u^i}$, $1 \le i \le n$, olmak üzere (III.1.4) den

$$N_i^{\pi} = \operatorname{sgn} K\frac{x_i + 2f_i N + 2fN_i}{r} - \frac{r_i N^{\pi}}{r}$$

elde edilir. Buna göre

$$\begin{aligned} n_{ij}^{\pi} = {} & \langle \frac{x_i + 2f_i N + 2fN_i}{r}, \frac{x_j + 2f_j N + 2fN_j}{r}\rangle + \langle \operatorname{sgn} K\frac{x_i + 2f_i N + 2fN_i}{r}, \frac{-r_j N^{\pi}}{r}\rangle \\ & + \langle \frac{-r_i N^{\pi}}{r}, \operatorname{sgn} K\frac{x_j + 2f_j N + 2fN_j}{r}\rangle + \langle \frac{-r_i N^{\pi}}{r}, \frac{-r_j N^{\pi}}{r}\rangle \end{aligned}$$

olur. Burada

$$\langle \frac{x_i + 2f_i N + 2fN_i}{r}, \frac{x_j + 2f_j N + 2fN_j}{r}\rangle = \frac{1}{r^2}\left(g_{ij} - 4fb_{ij} + 4f_i f_j + 4f^2 n_{ij}\right),$$

$$\langle \operatorname{sgn} K\frac{x_i + 2f_i N + 2fN_i}{r}, \frac{-r_j N^{\pi}}{r}\rangle = \frac{-r_i r_j}{r^2},$$

ve

$$\langle \frac{-r_i N^\pi}{r}, \frac{-r_j N^\pi}{r} \rangle = \frac{r_i r_j}{r^2}$$

olduğundan

$$n_{ij}^\pi = \frac{\operatorname{sgn} K}{r^2}\left(4 f_i f_j + r_i r_j + g_{ij} - 4 f b_{ij} + 4 f^2 n_{ij}\right)$$

olur.

III.1.7. Teorem. Eğer E^{n+1} de verilen bir hiperyüzey bir M hiperyüzeyinin pedali ise bu M hiperyüzeyinin noktalarının yer vekyörleri

$$x = \frac{(r^\pi)^2}{f^\pi} N^\pi + 2x^\pi$$

dır.

İspat. E^{n+1} de pedal olarak verilen bu hiperyüzey M_π ise, M_π nin birim normali,

$$N^\pi = \frac{\operatorname{sgn} K}{r}(x + 2 f N)$$

olacağından, M hiperyüzeyinin bir noktasının yer vektörü

$$x = (\operatorname{sgn} K) r N^\pi - 2 f N$$

veya

$$x = (\operatorname{sgn} K) r N^\pi + 2x^\pi$$

olarak elde edilir. Burada (III.1.5) gözönüne alınırsa

$$x = \frac{(r^\pi)^2}{f^\pi} N^\pi + 2x^\pi$$

bulunur.

III.1.1. E^{n+1} de pedal dönüşümünün ayrışımı

E^{n+1} de Gauss eğriliği $K \neq 0$ olan yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M nin pedali M_π olmak üzere $\pi: M \to M_\pi$ pedal dönüşümü CHR.Geogiou, TH.Hasanis ve

D.Koutroufiotis tarafından benzerlik ve inversiyon dönüşümlerinin bileşkesi olarak [10] da ifade edilmiştir.

III.1.2. Tanım. $K \neq 0$ Gauss eğriliğine sahip bir yönlendirilmiş hiperyüzey M ve M için uygun bir orijin O olsun. M nin kutupsal karşıtı (polar reciprocal) olan M_ρ nun noktaları

$$y = -\frac{N}{f} \qquad \text{(III.1.8)}$$

yer vektörü ile verilen bir hiperyüzeydir ve yönlendirmesi $\rho: M \to M_\rho$ dönüşümü yardımıyla M den indirgenen yönlendirmedir [10].

M hiperyüzeyi $(u^1, u^2, \cdots, u^n)$ lokal parametre sistemine göre $x = x(u^1, u^2, \cdots, u^n)$ ile verilmiş ise M_ρ hiperyüzeyi de $y = y(u^1, u^2, \cdots, u^n)$ şeklinde parametrelendirilebilir.

III.1.8. Teorem. M_ρ nun birinci temel formunun bileşenleri g_{ij}^ρ ler olmak üzere

$$g_{ij}^\rho = \frac{f_i f_j + f^2 n_{ij}}{f^4}, \quad 1 \leq i, j \leq n, \qquad \text{(III.1.9)}$$

dir [10].

III.1.9. Teorem. M_ρ hiperyüzeyinin birim normali

$$N^\rho = -\operatorname{sgn} K \frac{x}{r} \qquad \text{(III.1.10)}$$

dir [10].

III.1.10. Teorem. M_ρ hiperyüzeyinin destek fonksiyonu

$$f^\rho = \frac{\operatorname{sgn} K}{r} \qquad \text{(III.1.11)}$$

dir [10].

III.1.11. Teorem. M_ρ hiperyüzeyinin ikinci temel formunun bileşenleri

$$b_{ij}^{\rho} = \frac{\operatorname{sgn} K}{f r} b_{ij} \qquad \text{(III.1.12)}$$

dir [10].

III.1.3. Sonuç. E^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M, M nin pedali M_π ve kutupsal karşıtı da M_ρ olsun. M_π ile M_ρ nun metrik tensörleri arasında

$$g_{ij}^{\pi} = f^4 g_{ij}^{\rho} \qquad \text{(III.1.13)}$$

bağıntısı vardır.

İspatı (III.1.3) ve (III.1.9) dan kolayca görülür.

III.1.4. Sonuç. M_π ile M_ρ hiperyüzeylerinin birinci temel formları arasında

$$|^{\pi} = f^4 |^{\rho}$$

bağıntısı vardır.

İspatı (III.1.13) den aşikardır.

III.1.5. Sonuç. M_ρ nun ikinci temel formu M_π nin birinci ve ikinci temel formlarının lineer birleşimi olarak yazılabilir.

İspat. (III.1.3), (III.1.6) ve (III.1.12) den

$$b_{ij}^{\rho} = \operatorname{sgn} K \frac{2}{f^2 r} g_{ij}^{\pi} - \frac{1}{f} b_{ij}^{\pi}$$

olur. M_ρ nun ikinci temel formu $\|^{\rho} = \sum_{i,j=1}^{n} b_{ij}^{\rho} du^i du^j$ olduğundan

$$\|^{\rho} = \operatorname{sgn} K \frac{2}{f^2 r} \sum_{i,j} g_{ij}^{\pi} du^i du^j - \frac{1}{f} \sum_{i,j} b_{ij}^{\pi} du^i du^j$$

veya

$$\|^{\rho} = \operatorname{sgn} K \frac{2}{f^2 r} |^{\pi} - \frac{1}{f} \|^{\pi}$$

olur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

III.1.12. Teorem. M_p nun üçüncü temel formunun bileşenleri

$$n_{ij}^{p} = \frac{g_{ij} - r_i r_j}{r^2}, \quad 1 \le i, j \le n,$$

dir.

İspat. M_p nun üçüncü temel formunun bileşenleri $n_{ij}^{p} = \langle N_i^{p}, N_j^{p} \rangle$ dir. $N_i^{p} = \dfrac{\partial N^{p}}{\partial u^i}$

olmak üzere (III.1.10) dan

$$N_i^{p} = -\operatorname{sgn} K\left(\frac{x_i}{r} - \frac{r_i x}{r^2}\right)$$

dir. Buna göre

$$n_{ij}^{p} = \frac{1}{r^4}\left(r^2\langle x_i, x_j\rangle - r r_j \langle x_i, x\rangle - r r_i \langle x_j, x\rangle + r_i r_j \langle x, x\rangle\right)$$

elde edilir. Burada

$$r = \sqrt{\langle x, x\rangle}, \quad r_i = \frac{\partial r}{\partial u^i} = \frac{\langle x_i, x\rangle}{r}$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$n_{ij}^{p} = \frac{g_{ij} - r_i r_j}{r^2}, \quad 1 \le i, j \le n,$$

olur.

III.1.3. Tanım. E^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M için uygun bir orijin O olsun. Birim hiperküreye göre M nin inversinin noktaları

$$z = \frac{x}{r^2} \qquad \text{(III.1.14)}$$

yer vektörü ile tanımlı bir M_σ hiperyüzeyidir ve M_σ nın yönlendirmesi $\sigma: M \to M_\sigma$ dönüşümü yardımıyla M den indirgenen yönlendirmedir [10].

III.1.13. Teorem. M_σ nın birinci temel formunun bileşenleri

$$g_{ij}^{\sigma} = \frac{g_{ij}}{r^4}, \quad 1 \le i, j \le n, \tag{III.1.15}$$

dir [10].

III.1.14. Teorem. M_σ hiperyüzeyinin birim normali

$$N^{\sigma} = -N - \frac{2f}{r^2}x \tag{III.1.16}$$

dir [10].

III.1.15. Teorem. M_σ hiperyüzeyinin destek fonksiyonu

$$f^{\sigma} = \frac{f}{r^2} \tag{III.1.17}$$

dir [10].

III.1.16. Teorem. M_σ hiperyüzeyinin ikinci temel formunun bileşenleri

$$b_{ij}^{\sigma} = \frac{2f g_{ij}}{r^4} - \frac{b_{ij}}{r^2}, \quad 1 \le i, j \le n, \tag{III.1.18}$$

dir [10].

III.1.17. Teorem. E^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M nin pedali M_π olsun. Bu durumda pedal dönüşümü $\pi : M \to M_\pi$

$$\pi = \sigma \circ \rho \tag{III.1.19}$$

şeklinde ifade edilebilir [10].

III.1.18. Teorem. E^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M ve M nin pedali M_π olsun. M_π nin asli eğrilik fonksiyonları k_i^π, $1 \le i \le n$, olmak üzere

$$k_i^{\pi} = 2f^{\rho} - \frac{k_i^{\rho}}{f^2} \tag{III.1.20}$$

dir, burada k_i^ρ fonksiyonları M_ρ nun asli eğrilik fonksiyonlarıdır.

İspat. M_π nin parametre eğrilerinin eğrilik çizgileri olduklarını kabul edersek

$$k_i^\pi = \frac{b_{ii}^\pi}{g_{ii}^\pi}$$

olur. (III.1.3) ve (III.1.6) değerleri yazılır ve (III.1.9) ile (III.1.12) gözönüne alınırsa (III.1.20) elde edilir.

III.1.6. Sonuç. E^{n+1} de bir M hiperyüzeyinin M_π pedalinin Gauss eğriliği

$$K^\pi = \frac{1}{f^{2n}}\Big[2^n(f^\rho)^n - n2^{n-1}(f^\rho)^{n-1}H^\rho + 2^{n-2}(f^\rho)^{n-2}\sum_{\sigma\in S_n} k_{\sigma(i)}^\rho k_{\sigma(j)}^\rho$$
$$-2^{n-3}(f^\rho)^{n-3}\sum_{\sigma\in S_n} k_{\sigma(i)}^\rho k_{\sigma(j)}^\rho k_{\sigma(k)}^\rho + \cdots - 2f^\rho\sum_i k_1^\rho \cdots \hat{k}_i^\rho \cdots k_n^\rho + K^\rho\Big]$$

dır, burada K^ρ ile H^ρ, sırasıyla, M_ρ nun Gauss ve ortalama eğrilikleri ve $\hat{k}_i^\rho$ da M_ρ nun i-yinci asli eğriliği k_i^ρ nun atılması anlamındadır

İspat. M_π nin Gauss eğriliği

$$K^\pi = k_1^\pi k_2^\pi \cdots k_n^\pi$$

olduğundan (III.1.20) deki k_i^π değerleri yerlerine yazılırsa ispat tamamlanmış olur.

III.1.7. Sonuç. M_π nin ortalama eğriliği

$$H^\pi = 2f^\rho - \frac{1}{f^2}H^\rho$$

dır.

İspat. $H^\pi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i^\pi$ olduğundan k_i^π değerleri yerlerine yazılırsa ispat tamamlanır.

III.2. E^{n+1} de Bir Reflektörün Karakteristik Dönüşümü

E^3 de olduğu gibi E^{n+1} de $\{M, O\}$ optiksel sistemini tanımlayacağız.

III.2.1. Tanım. Aşağıdaki şartları sağlayan $\{M, O\}$ ikilisine bir optiksel sistem diyeceğiz:

i) E^{n+1} de diferensiyellenebilir, yönlendirilmiş, bağlantılı ve non-kompakt bir hiperyüzey M olsun. Bu şekilde tanımlanan M hiperyüzeyine E^{n+1} de bir reflektör diyeceğiz.

ii) M için uygun bir orijin O dur.

iii) M nin yönlendirilmesi $f>0$ olacak şekilde seçilsin.

O merkezli yönlendirilmiş (iç normal) birim hiperküre S^n olsun. Bir $P \in M$ noktasının yer vektörü x olmak üzere $\zeta : M \to S^n$ diferensiyellenebilir dönüşümünü

$$\zeta(x) = \frac{x + 2fN}{r} \tag{III.2.1}$$

şeklinde tanımlayalım. M den S^n üzerine bir başka diferensiyellenebilir dönüşümü de $\eta : M \to S^n$

$$\eta(x) = e = \frac{x}{r} \tag{III.2.2}$$

olarak tanımlayalım. Bu η dönüşümü, $A = \eta(M)$ olmak üzere $\eta : M \to A$ bir diffeomorfizmdir.

III.2.2. Tanım. E^{n+1} de bir optiksel sistem $\{M, O\}$ olsun. $\tau = \zeta \circ \eta^{-1}$ olmak üzere

$$\tau : A \to S^n$$

dönüşümüne $\{M, O\}$ optiksel sisteminin karakteristik dönüşümü denir ve A nın bir noktasının e yer vektörü için

$$\tau(e) = e + \frac{2fN}{r} \tag{III.2.3}$$

dir.

S^n in yönlendirilmesine göre A için bir lokal koordinat sistemi $(u^1,\cdots,u^n)$ olsun. Buna göre

$$e_i = \frac{\partial x}{\partial u^i}, \quad \tau_i = d\tau(e_i) = \frac{\partial \tau}{\partial u^i}, \quad 1 \le i \le n,$$

diyelim. Buradaki e_i ve τ_i tanjant vektörleri E^{n+1} de adi vektörler olarak gözönüne alınabilir.

III.2.1. Teorem. E^{n+1} de bir reflektör M ve τ da M nin karakteristik dönüşümü olsun. τ dönüşümü sabit noktalara sahip değildir.

İspat. A nın yer vektörü e olsun. (III.2.3) den

$$e - \tau(e) = -\frac{2fN}{r}$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafını e ile skalar çarparsak

$$1 - \langle \tau(e), e \rangle = \frac{2f^2}{r^2} \qquad \text{(III.2.4)}$$

elde ederiz. M üzerinde $f \neq 0$ ve $r \neq 0$ olduğundan (III.2.4) denkleminin sol tarafı sıfırdan farklıdır ve dolaysıyla

$$\langle \tau(e), e \rangle \neq 1$$

dir. Böylece $\tau(e) \neq e$ dir.

A nın yer vektörü $e = \dfrac{x}{r}$ dir ve lokal koordinat sistemi $(u^1,\cdots,u^n)$ e göre de

$$e_i = \frac{x_i}{r} - \frac{\langle x, x_i \rangle}{r^3} x \qquad \text{(III.2.5)}$$

olur. Buna göre

$$\langle \tau, e_i \rangle = \frac{2f^2}{r^2}\left(\frac{\langle x, x_i \rangle}{r^2}\right)$$

olur. Buradan da

$$\langle \tau , e_i \rangle = \frac{2f^2}{r^2}\frac{\partial}{\partial u^i}(\log r), \quad 1 \le i \le n,$$

yazılabilir. Burada (III.2.4) gözönüne alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial u^i}(\log r) = \frac{\langle \tau , e_i \rangle}{1 - \langle \tau , e \rangle}, \quad 1 \le i \le n, \tag{III.2.6}$$

adi diferensiyel denklem sistemi elde edilir. (III.2.6) denklem sistemi için integrallenebilme şartı

$$\frac{\partial}{\partial u^i}\left(\frac{\langle \tau , e_j \rangle}{1 - \langle \tau , e \rangle}\right) = \frac{\partial}{\partial u^j}\left(\frac{\langle \tau , e_i \rangle}{1 - \langle \tau , e \rangle}\right), \quad 1 \le i \ne j \le n,$$

olarak yazılabilir ve M nin bir noktasının yer vektörünün boyu r, (III.2.6) diferensiyel denklem sistemini sağlar. Bu son denklemde kısmi türevler alınarak hesaplamalar yapılırsa (III.2.6) nın integrallenebilme şartı olarak

$$\langle \tau_j , e_i \rangle - \langle \tau_i , e_j \rangle = \frac{\langle \tau , e_j \rangle \langle \tau_i , e \rangle - \langle \tau , e_i \rangle \langle \tau_j , e \rangle}{1 - \langle \tau , e \rangle}, \quad 1 \le i \ne j \le n, \tag{III.2.7}$$

elde edilir.

III.2.2. Teorem. Sabit noktaları olmayan $\tau : A \to S^n$ dönüşümü verilsin. Eğer τ, (III.2.7) şartını sağlıyor ise bu durumda M bir tek şekilde belirlenir.

İspat. İntegrallenebilme şartı (III.2.7) sağlanırsa (III.2.6) adi diferensiyel denklem sistemini çözebiliriz ve pozitif çözüm r olmak üzere M nin yer vektörü

$$x = re \tag{III.2.8}$$

ile belirlenir.

III.2.1. Sonuç. (III.2.8) ile verilen M reflektörü O ya göre yıldız-şeklindedir.

İspat. (III.2.8) den

$$x_i = r_i e + r e_i, \quad 1 \le i \le n, \tag{III.2.9}$$

olur. Burada $\{e_1, e_2, \cdots, e_n, e\}$ sistemini E^{n+1} in bir ortonormal bazı olarak kabul edebiliriz. Bu durumda $\wedge$ dış çarpımı göstermek üzere

$$x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n = r^{n-1} \sum_{i=1}^{n} r_i e_i - re$$

olur. M nin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n}{\left\| x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n \right\|}$$

olarak alınırsa

$$N = \frac{\sum_{i=1}^{n} r_i e_i - re}{\sqrt{r^2 + \left\| grad\, r \right\|^2}}$$

olarak bulunur ve M nin destek fonksiyonu

$$f = -\langle x, N \rangle = \frac{r^2}{\sqrt{r^2 + \left\| grad\, r \right\|^2}} > 0$$

olur ki bu da M nin O ya göre yıldız-şeklinde olması demektir.

III.2.3. Teorem. Sabit noktaları olmaksızın bir $\tau : A \to S^n$ dönüşümü verilsin. Karakteristik dönüşümü τ olan bir M reflektörünün pedali yer vektörü

$$x^\pi = -\frac{r}{2}(\tau(e) - e) \tag{III.2.10}$$

olan noktalar ile bir tek şekilde belirlenir ve τ dönüşümü M_π nin yukarı doğru yönlendirilmiş birim normalidir.

İspat. A nın bir noktasının yer vektörü e olmak üzere

$$\tau(e) = e + \frac{2fN}{r}$$

olduğundan

$$fN = \frac{r}{2}(\tau(e) - e)$$

olarak yazılabilir ve (III.1.2) den

$$x^\pi = -\frac{r}{2}(\tau(e) - e)$$

olarak elde edilir.

Şimdi M_π nin birim normalinin τ olduğunu gösterelim. Bunun içinde, $\|\tau\| = 1$ olduğundan $\langle x_i^\pi, \tau \rangle = 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. (III.2.10) dan

$$x_i^\pi = -\frac{r_i}{2}(\tau - e) - \frac{r}{2}(\tau_i - e_i)$$

dir. Buna göre

$$\langle x_i^\pi, \tau \rangle = -\frac{r_i}{2}\langle \tau - e, \tau \rangle - \frac{r}{2}\langle \tau_i - e_i, \tau \rangle$$

dir ve

$$\langle \tau - e, \tau \rangle = \frac{2f^2}{r^2}, \quad \langle \tau_i - e_i, \tau \rangle = -\frac{2f^2 r_i}{r^3}$$

olduğundan $\langle x_i^\pi, \tau \rangle = 0$ olur.

E^{n+1} de bir reflektör M ve O da M için uygun bir orijin olsun. Eğer M ve S^n aynı yönlendirmelerle verilirse $\eta: M \to S^n$ dönüşümü yönlendirmeyi koruyan bir dönüşüm olur.

M nin küresel gösterge dönüşümünü $n: M \to S^n$ ile gösterelim ve n bire-bir olsun. Bu durumda M nin Gauss eğriliği $\det(dn) = -K$ dır. Ohalde $K<0$ için n, yönlendirmeyi koruyan lokal diffeomorfizm ve $K>0$ için yönlendirmeyi tersine çeviren lokal diffeomorfizmdir. $\tau(e) = e + \frac{2fN}{r}$ olduğundan

$$\frac{2fN}{r} = \tau(e) - e$$

olur ve buradan da

$$N = \frac{\tau(e) - e}{\|\tau(e) - e\|}$$

olarak elde edilir. $\vartheta: A \to S^n$ dönüşümü A nın bir noktasının e yer vektörü için

$$\vartheta(e) = \frac{\tau(e) - e}{\|\tau(e) - e\|}$$

şeklinde tanımlansın. Buna göre

$$
\begin{aligned}
(\vartheta \circ \eta)(x) &= \vartheta(\eta(x)) \\
&= \vartheta(e) \\
&= \frac{\tau(e)-e}{\|\tau(e)-e\|} = n(x)
\end{aligned}
$$

olduğundan M nin küresel gösterge dönüşümü $n = \vartheta \circ \eta$ şeklinde ayrıştırılabilir.

$$
\det(dn) = \det(d\vartheta)\det(d\eta)
$$

olduğundan

$$
K = -\det(d\vartheta)\det(d\eta) \tag{III.2.11}
$$

olarak elde edilir. Buna göre şu sonuçları verebiliriz.

III.2.2. Sonuç. M reflektörünün Gauss eğriliği K, sadece $\det(d\vartheta) = 0$ olduğu noktalarda sıfırdır.

III.2.3. Sonuç. M nin her P noktasında M nin Gauss eğriliği $K \neq 0$ dır ancak ve ancak $\eta(P)$ noktasında $rank(d\vartheta) = n$ ise.

III.2.4. Teorem. E^{n+1} de bir reflektör M ve M nin karakteristik dönüşümü τ, A dan $\tau(A)$ üzerine bir diffeomorfizm olsun. Bu durumda τ^{-1} dönüşümü, yer vektörü

$$
x' = \frac{x + 2fN}{f^2} \tag{III.2.12}
$$

olan noktalardan oluşan bir M' reflektörünün karakteristik dönüşümüdür.

İspat. $e = \dfrac{x}{r}$ ve $\tau(e) = e + \dfrac{2fN}{r}$ olduğundan M' nün bir noktasının yer vektörünü $x' = \dfrac{r}{f^2}\tau(e)$ olarak ifade edebiliriz. x' yer vektörünün boyu r' olmak üzere

$$
r' = \|x'\| = \frac{r}{f^2}
$$

dir. Buna göre

$$
x' = r'\tau(e)
$$

olarak yazılır. τ bir diffeomorfizm olduğundan

$$x_i' = \frac{\partial x'}{\partial u^i}, \quad 1 \leq i \leq n,$$

vektörleri lineer bağımsızdır, yani M' regüler bir yüzeydir. (III.2.12) den

$$x_i' = \frac{x_i}{f^2} - \frac{2f_i x}{f^3} + \frac{2N_i}{f} - \frac{2f_i N}{f^2}$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\langle x_i', -N \rangle = 0$$

olduğu görülür. Buna göre $N' = -N$ olmak üzere N' vektör alanı M' nün birim normal vektör alanıdır. Bu durumda M' nün destek fonksiyonu

$$\begin{aligned} f' &= -\langle x', N' \rangle \\ &= -\langle \frac{r}{f^2}\tau(e), -N \rangle \\ &= \frac{1}{f} \end{aligned}$$

olur ve $f>0$ olduğundan $f' > 0$ dır. Böylece M' reflektörü O ya göre yıldız-şeklindedir ve $-N$ vektörü M' nün yönlendirmesine tekabül eden birim normaldır. Şimdi $\tau': \tau(A) \to S^n$ dönüşümü M' nün karakteristik dönüşümü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \tau'(\tau(e)) &= \tau(e) + \frac{2f'N'}{r'} \\ &= e + \frac{2fN}{r} + \frac{2\frac{1}{f}(-N)}{\frac{r}{f^2}} \\ &= e + \frac{2fN}{r} - \frac{2fN}{r} \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\tau'(\tau(e)) = e$$

olur ki buna göre de $\tau' = \tau^{-1}$ dir ve ispat tamamlanmış olur.

III.2.5. Teorem. E^{n+1} de bir reflektör M ve O ya göre M nin pedali M_π olsun. $\alpha : I \to M$ diferensiyellenebilir bir eğri olmak üzere her $t \in I$ için $\pi(\alpha(t)) = \alpha(t)$ olsun. Bu durumda α eğrisi M ve M_π de asli eğri ise α boyunca $r\frac{df}{dt} = f\frac{dr}{dt}$ dir.

İspat. $\pi(\alpha(t)) = \alpha(t)$ ve α eğrisi de M ve M_π de asli eğri olsun. Bu durumda $\frac{d\alpha}{dt}\Big|_{\alpha(t)} = \alpha'(t)$ olmak üzere α boyunca

$$\frac{d}{dt}N = -k\alpha'$$

ve

$$\frac{d}{dt}N^\pi = -k^\pi \alpha'$$

olacak şekilde M ve M_π nin, sırasıyla, k ve k^π asli eğrilikleri vardır. α' teğet vektörü N ve N^π ye diktir. Yani $\langle \alpha', N \rangle = 0$ ve $\langle \alpha', N^\pi \rangle = 0$ dır. Böylece

$$\langle \frac{dN}{dt}, N^\pi \rangle = 0, \quad \langle \frac{dN^\pi}{dt}, N \rangle = 0$$

ve buradan da

$$\frac{d}{dt}\langle N, N^\pi \rangle = \langle \frac{dN}{dt}, N^\pi \rangle + \langle \frac{dN^\pi}{dt}, N \rangle = 0$$

olur. $N^\pi = \frac{\operatorname{sgn} K}{r}(x + 2fN)$ olduğundan

$$\langle N, N^\pi \rangle = \operatorname{sgn} K \frac{f}{r}$$

olur. Buna göre

$$\frac{d}{dt}\langle N, N^\pi \rangle = \frac{d}{dt}\left(\frac{f}{r}\right) = 0$$

olduğundan

$$\frac{\frac{df}{dt}r - \frac{dr}{dt}f}{r^2} = 0$$

elde edilir ve

$$r\frac{df}{dt} = f\frac{dr}{dt}$$

sonucuna varılır.

III.3. E^{n+1} de Bir Reflektörün Eşleniği

E^{n+1}de birim hiperküre S^nolmak üzere $\alpha : S^n \to S^n$ antipodal dönüşümü, S^n nin bir noktasının e yer vektörü için

$$\alpha(e) = -e \tag{III.3.1}$$

şelinde tanımlıdır.

E^{n+1} de bir M reflektörünün karakteristik dönüşümü τ olmak üzere $\bar{\tau} = \alpha \circ \tau$ diyelim.

III.3.1. Tanım. E^{n+1} de bir M reflektörünün karakteristik dönüşümü τ olsun. Eğer $\bar{\tau}$ bir $\overline{M}$ reflektörünün karakteristik dönüşümü ise M ve $\overline{M}$ ye eşlenik reflektörler denir.

III.3.1. Sonuç. $\bar{\tau}$ bir $\overline{M}$ reflektörünün karekteristik dönüşümü ise $\bar{\tau}$ sabit noktası olmayan bir dönüşümdür.

Eğer M reflektörü O merkezli yönlendirilmiş (dış normal) birim hiperküre ise, bu durumda $\tau(e) = -e$ olacağından dolayı $\bar{\tau}(e) = e$ olurki bu da $\bar{\tau}$ nin sabit noktasının olması demektir. Ozaman O merkezli S^n hiperküresi bir eşleniğe sahip değildir. Eğer O noktası S^n nin merkezi değil de herhangi bir iç noktası ise bu durumda $\overline{M}$ mevcut olur.

III.3.1. Teorem. E^{n+1} de verilen bir M reflektörü bir $\overline{M}$ eşleniğine sahip olması için gerek ve yeter şart $grad\, r \neq 0$ ve $grad\, r$ ile $grad\, f$ vektör alanlarının lineer bağımlı olmasıdır.

İspat. M reflektörünün eşleniği $\overline{M}$ olsun. Böylece $\overline{M}$ nin karakteristik dönüşümü $\bar{\tau}$ nin sabit noktası olmadığından τ nun tanım bölgesindeki herhangi bir noktanın e yer vektörü için $\tau(e) \neq -e$ dir. Buda M nin her P noktası için P nin yer vektörünün hiçbir zaman M ye dik olmadığı anlamına gelir ve $grad\, r = \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial}{\partial u^i}$, $r_i = \frac{\partial r}{\partial u^i} = \frac{\langle x, x_i \rangle}{r}$ olduğundan $grad\, r \neq 0$ dır. Şimdi τ ve $\bar{\tau}$ nin integrallenebilme şartını yazacak olursak (III.2.7) den τ için

$$\langle \tau_j, e_i \rangle - \langle \tau_i, e_j \rangle = \frac{\langle \tau, e_j \rangle \langle \tau_i, e \rangle - \langle \tau, e_i \rangle \langle \tau_j, e \rangle}{1 - \langle \tau, e \rangle}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n,$$

ve $\bar{\tau}$ için

$$\langle \bar{\tau}_j, e_i \rangle - \langle \bar{\tau}_i, e_j \rangle = \frac{\langle \bar{\tau}, e_j \rangle \langle \bar{\tau}_i, e \rangle - \langle \bar{\tau}, e_i \rangle \langle \bar{\tau}_j, e \rangle}{1 - \langle \bar{\tau}, e \rangle}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n,$$

olur. $\bar{\tau}(e) = -\tau(e)$ olduğu gözönüne alınarak bunlar karşılaştırılırsa

$$\langle \tau_j, e_i \rangle = \langle \tau_i, e_j \rangle$$

olarak elde edilir. Burada

$$\tau_i = e_i + \frac{2f_i N + 2f N_i}{r} - \frac{2r_i f N}{r^2}$$

ve

$$e_i = \frac{x_i}{r} - \frac{r_i x}{r^2}$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\langle \tau_i, e_j \rangle = \frac{4 f f_i r_j}{r^3} - \frac{2f}{r^2} b_{ij} - \frac{2 f^2 r_i r_j}{r^4}$$

olarak hesaplanır. Buradan da

$$\langle \tau_i, e_j \rangle - \langle \tau_j, e_i \rangle = \frac{4f}{r^3}\left(f_i r_j - f_j r_i\right) = 0$$

olur. Buna göre

$$f_i r_j = f_j r_i, \quad 1 \leq i, j \leq n, \tag{III.3.2}$$

olur. $grad\, f = \sum_{i=1}^{n} f_i \frac{\partial}{\partial u^i}$ ve $grad\, r = \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial}{\partial u^i}$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} r_j\, grad\, f &= \sum_{i=1}^{n} r_j f_i \frac{\partial}{\partial u^i} \\ &= \sum_{i=1}^{n} f_j r_i \frac{\partial}{\partial u^i} \\ &= f_j \sum_{i=1}^{n} r_i \frac{\partial}{\partial u^i} \end{aligned}$$

$$= f_j \, grad\, r$$

olur. Burada $c = \dfrac{f_j}{r_j}$ denilirse

$$grad\, f = c\, grad\, r$$

elde edilir ki bu da $grad\, r$ ile $grad\, f$ vektör alanlarının lineer bağımlı olması demektir.

Tersine $grad\, r \neq 0$ ve $grad\, r$ ile $grad\, f$ vektör alanlarının lineer bağımlı olsunlar. $grad\, r \neq 0$ olduğundan $\bar{\tau} = \alpha \circ \tau$ dönüşümü sabit noktalara sahip değildir. $grad\, r$ ile $grad\, f$ vektör alanları lineer bağımlı olduklarından

$$\langle \tau_j, e_i \rangle = \langle \tau_i, e_j \rangle$$

dir. Böylece τ için integrallenebilme şartından (III.2.7) nin sol tarafi sıfır olur. Böylece

$$\langle \tau, e_j \rangle \langle \tau_i, e \rangle - \langle \tau, e_i \rangle \langle \tau_j, e \rangle = 0$$

dır. Burada $\tau(e) = -\bar{\tau}(e)$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\frac{\langle \bar{\tau}, e_j \rangle \langle \bar{\tau}_i, e \rangle - \langle \bar{\tau}, e_i \rangle \langle \bar{\tau}_j, e \rangle}{1 - \langle \bar{\tau}, e \rangle} = 0$$

demektir. $\langle \tau_j, e_i \rangle = \langle \tau_i, e_j \rangle$ olduğundan

$$\langle \bar{\tau}_j, e_i \rangle = \langle \bar{\tau}_i, e_j \rangle$$

olur ve buradan da

$$\langle \bar{\tau}_j, e_i \rangle - \langle \bar{\tau}_i, e_j \rangle = \frac{\langle \bar{\tau}, e_j \rangle \langle \bar{\tau}_i, e \rangle - \langle \bar{\tau}, e_i \rangle \langle \bar{\tau}_j, e \rangle}{1 - \langle \bar{\tau}, e \rangle}, \quad 1 \leq i \neq j \leq n,$$

olduğu görülür ve buna göre de, $\bar{\tau}$ bir reflektörün karekteristik dönüşümüdür ki bu reflektör M nin eşleniği $\overline{M}$ den başkası değildir.

E^{n+1} de bir hiperyüzey M olmak üzere M nin bir noktasının yer vektörü x, teğetsel ve normal bileşenlerine

$$x = x_T - f N \qquad \text{(III.3.3)}$$

olarak ayrılabilir. E^{n+1} in standart konneksiyonu $\overline{\nabla}$ ve M üzerine indirgenen konneksiyon da ∇ olmak üzere Gauss denklemi

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle S(X), Y\rangle N$$

ve Weingarten denklemi

$$\overline{\nabla}_X N = -S(X)$$

dir, burada X ve Y M üzerindeki vektör alanlarıdır. Buna göre

$$X = \overline{\nabla}_X x = \overline{\nabla}_X \left(x_T - fN\right) = \overline{\nabla}_X x_T - \left(X(f)\right)N - f\,\overline{\nabla}_X N$$

dir. Gauss ve Weingarten denklemleri kullanılırsa

$$X = \nabla_X x_T + \langle S(X), x_T\rangle N - \left(X(f)\right)N + f\,S(X)$$

olur. Bu denklemin teğetsel bileşenini alırsak

$$\nabla_X x_T = \left(1 - fS\right)X \tag{III.3.4}$$

ve normal bileşenini alırsak

$$\langle S(X), x_T\rangle N = X(f)N$$

veya

$$\langle X, S(x_T)\rangle = \langle X, grad\, f\rangle$$

olduğundan dolayı

$$S(x_T) = grad\, f$$

olarak elde edilir ve

$$\begin{aligned} X(r^2) &= X(\langle x, x\rangle) \\ &= 2\langle \overline{\nabla}_X x, x\rangle \\ &= 2\langle X, x\rangle \\ &= 2\langle X, x_T\rangle \end{aligned}$$

olur veya

$$\begin{aligned} X(r^2) &= 2rX(r) \\ &= 2r\langle X, grad\, r\rangle \end{aligned}$$

olduğundan

$$grad\, r = \frac{x_T}{r} \tag{III.3.5}$$

elde edilir.

Şimdi kabul edelimki (III.3.1.Teorem) in şartları sağlansın. Teoreme göre $grad\, r \neq 0$ dır ve $grad\, f = c\, grad\, r$ olduğundan

$$S(x_T) = grad\, f = c\, grad\, r = \frac{c}{r} x_T$$

olur ki bu da x_T vektörünün S nin karakteristik vektörü olması demektir. Buna göre (III.3.1.Teorem)' i farklı bir şekilde ifade edebiliriz: E^{n+1} deki bir M reflektörü bir $\overline{M}$ eşleniğine sahiptir ancak ve ancak M nin her P noktası için yer vektörünün dik izdüşümü olan x_T vektörü S nin karakteristik vektörü ise. Bu durumda eşleniğe sahip olan bir M reflektörü için x_T vektörü S nin karakteristik vektörü olduğundan (III.3.4) den

$$\nabla_{x_T} x_T = (1 - f k_1) x_T$$

olarak elde edilir, burada k_1 eğriliği x_T ye arşılık gelen asli eğriliktir.

$\overline{M}$ eşleniğinin yer vektörü $\overline{x} = \overline{r} e$ ve M nin yer vektörü $x = re$ olarak yazılabildiğinden $\frac{x}{r} = \frac{\overline{x}}{\overline{r}}$ olur ve $\overline{\tau}(e) = -\tau(e)$ olduğundan

$$\frac{x}{r} + \frac{2fN}{r} = -\frac{x}{r} - \frac{2\bar{f}\,\overline{N}}{\overline{r}} \tag{III.3.6}$$

dir. Bu da $\overline{N}$ nin x ile N tarafından gerilen hiperdüzlemde yattığını gösterir. (III.3.6) dan $\langle \overline{N}, N \rangle = 0$ olur ki buradan $\overline{N}$ vektörü x_T ye pareleldir. $\overline{M}$ nin bir noktasının yer vektörü için

$$\overline{x} = \frac{\overline{r}}{r} x = \frac{\overline{r}}{r}(x_T - fN)$$

veya

$$\overline{x} = \overline{x}_T - \bar{f}\,\overline{N}$$

olarak yazılabilir. Buradan da $\overline{M}$ nin destek fonksiyonu

$$\bar{f} = -\langle \overline{x}, \overline{N} \rangle = -\frac{\overline{r}}{r} \langle x_T, \overline{N} \rangle$$

olarak elde edilir. $\bar{N}$ vektörü x_T ye parelel olduğundan $\bar{N}=\frac{-x_T}{\|x_T\|}$ olarak alınırsa $\bar{f}$ pozitif olur ve

$$\bar{f}=\frac{\bar{r}}{r}\|x_T\| \tag{III.3.7}$$

olur ki bu da $\bar{N}$ nin istenilen yönlendirme olduğunu gösterir.

III.3.2. Teorem. E^{n+1} deki bir M reflektörü bir $\bar{M}$ eşleniğine sahip olsun. Bu durumda $M \to \bar{M}$ doğal diffeomorfizmi asli doğrultuları korur. Ayrıca asli eğrilik fonksiyonları arasında

$$\bar{k}_1=\frac{\bar{f}r^2}{f\bar{r}^2}k_1,\quad \bar{k}_i=\frac{1-fk_i}{\bar{f}},\quad 2\le i\le n, \tag{III.3.8}$$

bağıntıları vardır, burada k_1 eğrilik fonksiyonu x_T ye karşılık gelen asli eğrilik fonksiyonudur.

İspat. M üzerinde umblik olmayan bir noktanın komşuluğunda lokal koordinat sistemi $(u^1,u^2,\cdots,u^n)$ ve bu koordinat sistemine göre M nin parametre eğrileri eğrilik çizgileri olsun. M reflektörü $\bar{M}$ eşleniğine sahip olduğundan $u^j=sbt.$ $2\le j\le n$, eğrileri x_T vektör alanının integral eğrileridir. M nin parametre eğrileri eğrilik çizgileri olduğundan $i\neq j$ için $g_{ij}=b_{ij}=0$ ve $k_i=\frac{b_{ii}}{g_{ii}}$ dir. Aynı zamanda bu eğriler üzerinde $r=r(u^1)$, $f=f(u^1)$ ve x_T vektörü x_1 e paraleldir. E^{n+1} in $\{x_1,\cdots,x_n,N\}$ ortonormal bazına göre M nin bir noktasının yer vektörü

$$x=\sum_{i=1}^{n}c_i\,x_i+c_{n+1}N$$

olarak ifade edilebilir. Buradan $1\le i\le n$, için $c_i=\frac{\langle x,x_i\rangle}{g_{ii}}=\frac{rr_i}{g_{ii}}$ ve $c_{n+1}=-f$ olur.

$i\neq 1$ için r_i=0 olduğundan

$$x=\frac{rr_1}{g_{11}}x_1-fN \tag{III.3.9}$$

yazılabilir. $x=x_T-fN$ ile (III.3.9) denklemi birlikte düşünülürse

$$x_T = \frac{rr_1}{g_{11}} x_1, \quad rr_1 = \sqrt{g_{11}}\,\|x_T\| \tag{III.3.10}$$

olarak elde edilir. $\|x_T\|^2 = r^2 - f^2$ olduğundan g_{11} sadece u^1 e bağlıdır. (III.3.9) da $i \neq 1$ için u^i ye göre kısmi türev alınırsa

$$x_i = \frac{rr_1}{g_{11}} x_{1i} - f N_i\,, \quad 2 \le i \le n,$$

olur ve (III.3.10) dan

$$x_i = \frac{\|x_T\|}{\sqrt{g_{11}}} x_{1i} - f N_i$$

olur. Rodrigues formülüne göre $N_i = -k_i\, x_i$ olduğundan

$$\frac{(1 - f k_i)}{\|x_T\|} x_i = \frac{1}{\sqrt{g_{11}}} x_{1i}$$

olarak elde edilir. Bu son eşitlikte her iki tarafı x_i ile skalar çarparsak

$$\frac{(1 - f k_i)}{\|x_T\|} = \frac{1}{2\sqrt{g_{11}}} \frac{2\langle x_{1i}, x_i \rangle}{g_{ii}}, \quad 2 \le i \le n,$$

veya

$$\frac{(1 - f k_i)}{\|x_T\|} = \frac{1}{2\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial}{\partial u^1}(\log g_{ii}), \quad 2 \le i \le n, \tag{III.3.11}$$

olur. $\overline{N} = \frac{-x_T}{\|x_T\|}$ olduğundan (III.3.10) dan

$$\overline{N} = \frac{-x_1}{\sqrt{g_{11}}}$$

yazılabilir. $h = \frac{\overline{r}}{r}$ dersek $\overline{x} = h x$ olur ve buna göre

$$h_1 = -h\left(\frac{r_1}{r} - \frac{\overline{r}_1}{\overline{r}}\right) \tag{III.3.12}$$

olur. $\frac{x}{r} = \frac{\overline{x}}{\overline{r}}$ den

$$\frac{x_1}{r} - \frac{r_1 x}{r^2} = \frac{\overline{x}_1}{\overline{r}} - \frac{\overline{r}_1 \overline{x}}{\overline{r}^2}$$

veya

$$\frac{x_1}{r} - \frac{\overline{x}_1}{\overline{r}} = \frac{x}{r}\left(\frac{r_1}{r} - \frac{\overline{r}_1}{\overline{r}}\right)$$

dir. Her iki tarafı x_1 ile skalar çarparsak

$$\frac{\langle x_1 , x_1 \rangle}{r} - \frac{\langle \bar{x}_1 , \bar{x}_1 \rangle}{\bar{r}} = \frac{\langle x , x_1 \rangle}{r}\left(\frac{r_1}{r} - \frac{\bar{r}_1}{\bar{r}}\right)$$

elde edilir ve burada x_1 vektörü x_T ye paralel, x_T de $\bar{N}$ ye parelel olduğundan $\langle x_1 , \bar{x}_1 \rangle = 0$ ve böylece

$$\frac{r_1}{r} - \frac{\bar{r}_1}{\bar{r}} = \frac{g_{11}}{r r_1}$$

olur. Bu (III.3.12) de yerine yazılırsa

$$h_1 = \frac{-h\sqrt{g_{11}}}{\|x_T\|}$$

olur. Benzer şekilde hesaplanırsa

$$h_i = 0, \quad 2 \le i \le n,$$

elde edilir. Ayrıca

$$\bar{x}_1 = h_1 x + h x_1 , \quad \bar{x}_i = h x_i , \quad 2 \le i \le n,$$

olduğundan bunlara göre

$$\bar{g}_{11} = \frac{h^2 f^2}{\|x_T\|} g_{11} , \quad \bar{g}_{ij} = 0, \; i \ne j, \quad \bar{g}_{ii} = h^2 g_{ii} , \; 2 \le i \le n,$$

olarak bulunur. (III.3.6) dan

$$\bar{N} = \frac{1}{\|x_T\|}\left(-x - f N\right) = \frac{1}{\sqrt{r^2 - f^2}}\left(-x - f N\right)$$

olarak yazılabilir. Burada $\bar{N}_1$ hesaplanıp, $\bar{b}_{11} = -\langle \bar{x}_1 , \bar{N}_1 \rangle$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\bar{b}_{11} = \frac{hf}{\|x_T\|} b_{11}$$

olur. $i \ne j$ için $\bar{b}_{ij} = 0$ olur ve $2 \le i \le n$, için de

$$\bar{b}_{ii} = \frac{h}{2\sqrt{g_{11}}} \frac{\partial g_{ii}}{\partial u^1}$$

dir. $i \ne j$ için $\bar{g}_{ij} = 0$ ve $\bar{b}_{ij} = 0$ olduğundan $\bar{M}$ nin parametre eğrileri eğrilik çizgileridir, dolaysıyla $M \to \bar{M}$ doğal diffeomorfizmi asli doğrultuları.

$\bar{M}$ nin asli eğrilik fonksiyonları için

$$\bar{k}_1 = \frac{\bar{b}_{11}}{\bar{g}_{11}} = \frac{\bar{f} r^2}{f \bar{r}^2} k_1$$

ve $2 \le i \le n$, için de

$$\bar{k}_i = \frac{\bar{b}_{ii}}{\bar{g}_{ii}} = \frac{1}{2h\sqrt{g_{11}}}\frac{\partial}{\partial u^1}\left(\log g_{ii}\right) = \frac{1-f\,k_i}{\bar{f}}, \quad 2 \le i \le n,$$

olur ve böylece ispat tamamlanmış olur.

IV. BÖLÜM

BİR SABİT DESTEK FONKSİYONLU HİPERYÜZEYİN PEDALİ

Bu bölümde sabit destek fonksiyonlu herhangi bir hiperyüzey ele alınarak, bu tip hiperyüzeyin pedali tanımlanmış ve sabit destek fonksiyonlu hiperyüzeyin pedalinin şekil operatörü elde edilerek bazı karakteristik özelikleri incelenmiştir. T.Hasanis ve D.Koutroufiotis [11] deki çalışmalarında sabit destek fonksiyonlu hiperyüzeylerin non-negatif kesit eğriliğine sahip olduğunu ve $f = 1$ olması halinde de bu hiperyüzeyin E^{n+1} de E^n veya S^n ya da genelleştirilmiş bir silindir olduğunu göstermişlerdir.

IV.1. Sabit Destek Fonksiyonlu Hiperyüzey Örnekleri

E^{n+1} de yönlendirilmiş bir hiperyüzey M olsun. M nin birim normal vektör alanı N olmak üzere M nin destek fonksiyonunun $f = -\langle x, N \rangle$ olarak tanımlandığını biliyoruz, burada x vektörü M nin bir noktasının yer vektörüdür.

Eğer M hiperyüzeyi r yarıçaplı, O orijin merkezli ve iç normale göre yönlendirilmiş bir hiperküre ise bu durumda M nin destek fonksiyonu $f=r$ dir.

(n+1)-boyutlu Öklid uzayı E^{n+1} de genelleştirilmiş silindirler $S^k \times E^{n-k}$ şeklindedir, burada S^k, E^{k+1} de O merkezli birim hiperküredir. Genelleştirilmiş silindirler de $f=1$ ile sabit destek fonksiyonlu hiperyüzeylerdir.

Bu tür örnekler çoğaltılabilir.

Daha genel bir örneği E^3 de verelim. O merkezli S^2 birim küresi üzerinde s yay parametresi ile verilmiş diferensiyellenebilir bir eğri α olsun. M yüzeyini de

$$x(s,t) = \alpha(s) + t\alpha(s) \wedge \alpha'(s)$$

olarak tanımlayalım, burada $\wedge$ ile E^3 deki vektörel çarpım gösterilmektedir ve $\alpha'(s) = \dfrac{d\alpha(s)}{ds}$ dir. s ve t ye göre kısmi türevler alınırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial s} &= \alpha'(s) + t\alpha'(s) \wedge \alpha'(s) + t\alpha(s) \wedge \alpha''(s)\\ &= \alpha'(s) + t\alpha(s) \wedge \alpha''(s)\end{aligned}$$

ve

$$\frac{\partial x}{\partial t} = \alpha(s) \wedge \alpha'(s)$$

bulunur. Elde edilen bu vektörler vektörel olarak çarpılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial s} \wedge \frac{\partial x}{\partial t} &= \alpha'(s) \wedge (\alpha(s) \wedge \alpha'(s)) + t(\alpha(s) \wedge \alpha''(s)) \wedge (\alpha(s) \wedge \alpha'(s))\\ &= \langle \alpha'(s), \alpha'(s)\rangle \alpha(s) - \langle \alpha(s), \alpha'(s)\rangle \alpha'(s)\\ &\quad + t\left[\langle \alpha(s) \wedge \alpha''(s), \alpha'(s)\rangle \alpha(s) - \langle \alpha(s) \wedge \alpha''(s), \alpha(s)\rangle \alpha'(s)\right]\\ &= \left(1 - t\det\left(\alpha(s), \alpha'(s), \alpha''(s)\right)\right)\alpha(s)\end{aligned}$$

elde edilir. α nın geodezik eğriliği

$$k_g = \det\left(\alpha(s), \alpha'(s), \alpha''(s)\right)$$

olduğundan

$$\frac{\partial x}{\partial s} \wedge \frac{\partial x}{\partial t} = \left(1 - t\,k_g\right)\alpha(s)$$

elde edilir. Bu durumda M yüzeyinin birim normali

$$N = \frac{\left(1 - t\,k_g\right)\alpha(s)}{\left\|\left(1 - t\,k_g\right)\alpha(s)\right\|} = \mp\alpha(s)$$

olur. t parametresi $t\,k_g < 1$ olacak şekilde seçilirse $N = \alpha(s)$ olur. Böylece S^2 nin yönlendirmesi iç normale göre ise M=S^2 nin destek fonksiyonu f=1 olarak elde edilir.

IV.2. E^{n+1} de Bir Sabit Destek Fonksiyonlu Hiperyüzeyin Pedali

E^{n+1} deki bir M hiperyüzeyinin O ya göre pedalinin

$$x^{\pi} = -f N \tag{IV.2.1}$$

yer vektörü ile tanımlandığını biliyoruz. Burada da (III.1.1.Teorem) in sağlandığını kabul edeceğiz.

IV.2.1. Teorem. E^{n+1} de diferensiyellenebilir, bağlantılı, yönlendirilmiş ve sabit destek fonksiyonlu bir hiperyüzey M olsun. M nin pedali M_{π} olmak üzere $P \in M$ noktası için $\pi(P)$ noktasında M_{π} nin birim normali

$$N^{\pi}_{\pi(P)} = (\operatorname{sgn} K)\, N_P$$

dir, burada N ve K, sırasıyla, M nin birim normali ve Gauss eğriliği dır.

İspat. M üzerinde lokal koordinat sistemi $(u^1, \cdots, u^n)$ olsun. $x_i^{\pi} = \dfrac{\partial x^{\pi}}{\partial u^i}$, $1 \le i \le n$, olmak üzere (IV.2.1) den

$$x_i^{\pi} = -f N_i, \quad 1 \le i \le n, \tag{IV.2.2}$$

olur. M nin parametre eğrilerinin eğrilik çizgileri oldukları kabul edilirse, Rodrigues formülünden $N_i = -k_i x_i$ olur, burada k_i, M nin i-yinci asli eğriliğidir. Böylece

$$x_1^{\pi} \wedge x_2^{\pi} \wedge \cdots \wedge x_n^{\pi} = f^n K x_1 \wedge x_2 \wedge \cdots \wedge x_n$$

olur. Bu durumda $\pi(P)$ noktasında M_{π} nin birim normali

$$N^{\pi}_{\pi(P)} = (\operatorname{sgn} K)\, N_P$$

elde edilir.

IV.2.2. Teorem. E^{n+1} de diferensiyellenebilir, bağlantılı, yönlendirilmiş ve sabit destek fonksiyonlu bir hiperyüzey M olsun. M nin pedali M_{π} olmak üzere

i) $d\pi(X) = f S(X)$ (IV.2.3)

$$ii)\;\; S^{\pi}(d\pi(X)) = (\operatorname{sgn} K)S(X) \tag{IV.2.4}$$

dir. Burada M üzerindeki bir vektör alanı X ve S ile S^{π} de, sırasıyla, M ve M_{π} nin şekil operatörleridir.

İspat. $\alpha : I \to M$ bir diferensiyellenebilir eğri olmak üzere $\alpha(0) = p$ ve $\left.\frac{d\alpha}{dt}\right|_{t=0} = X_p$ olsun. $\alpha^{\pi} = \pi \circ \alpha : I \to M_{\pi}$ de bir diferensiyellenebilir eğridir ve

$$\alpha^{\pi}(t) = \pi(\alpha(t)) = -f\, N_{\alpha(t)}$$

dir.

Böylece (i) için

$$\begin{aligned} d\pi(X) &= \frac{d}{dt}\left(\pi(\alpha(t))\right) \\ &= -f\frac{d}{dt}N_{\alpha(t)} \\ &= f\,S(X) \end{aligned}$$

olur. (ii) için M_{π} nin şekil operatörü S^{π} olmak üzere

$$S^{\pi}(d\pi(X)) = -\frac{d}{dt}N^{\pi}_{\alpha^{\pi}(t)}$$

dir. $N^{\pi}_{\alpha^{\pi}(t)} = (\operatorname{sgn} K)\,N_{\alpha(t)}$ olduğundan

$$\frac{d}{dt}N^{\pi}_{\alpha^{\pi}(t)} = (\operatorname{sgn} K)\frac{d}{dt}N_{\alpha(t)}$$

dir. Dolaysıyla

$$S^{\pi}(d\pi(X)) = (\operatorname{sgn} K)S(X)$$

olması demektir.

Bu teoreme göre eğer M üzerinde bir asli doğrultu X ve bu asli doğrultuya karşılık gelen asli eğrilik k ise $S(X)=kX$ olacağından (IV.2.4) den

$$S^{\pi}(d\pi(X)) = (\operatorname{sgn} K)kX \tag{IV.2.5}$$

olur. (IV.2.3) den ise

$$d\pi(X) = f\,k\,X$$

olur ve bu (IV.2.5) de gözönüne alınırsa

$$S^{\pi}(d\pi(X)) = \frac{\operatorname{sgn} K}{f} d\pi(X) \tag{IV.2.6}$$

elde edilir.

IV.2.1. Sonuç. M hiperyüzeyinin parametre eğrileri eğrilik çizgileri olsun. Bu durumda $\{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$ asli doğrultularına karşılık gelen asli eğrilikler k_i ler olmak üzere M_π nin asli eğrilikleri

$$k_i^{\pi} = \frac{\operatorname{sgn} K}{f}, \quad 1 \le i \le n, \tag{IV.2.7}$$

dir.

İspatı (IV.2.6) dan açıktır.

IV.2.2. Sonuç. E^{n+1} de sabit destek fonksiyonlu bir hiperyüzey M ve M nin pedali M_π nin bütün noktaları umbiliktir.

İspatı (IV.2.7) den kolayca görülür.

IV.2.3. Sonuç. E^{n+1} de sabit destek fonksiyonlu bir hiperyüzey M ve M nin O ya göre pedali M_π olsun. Bu durumda M_π nin Gauss eğriliği

$$K^{\pi} = \frac{(\operatorname{sgn} K)^n}{f^n}$$

dir.

İspat. M_π nin Gauss eğriliğinin $K^{\pi} = \prod_{i=1}^{n} k_i^{\pi}$ olduğu gözönüne alınırsa (IV.2.7) den eşitliğin doğruluğu görülür.

IV.2.4. Sonuç. E^{n+1} de sabit destek fonksiyonlu bir hiperyüzey M ve M nin O ya göre pedali M_π olmak üzere M_π nin ortalama eğriliği

$$H^{\pi} = \frac{\operatorname{sgn} K}{f}$$

dir.

İspat. M_{π} nin ortalama eğriliğinin $H^{\pi} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} k_i^{\pi}$ olduğu gözönüne alınırsa, (IV.2.7) den ifadenin doğruluğu görülür.

IV.2.2. Teorem. E^{n+1} de sabit destek fonksiyonlu bir hiperyüzey M ve M nin O ya göre pedali M_{π} olsun. Bu durumda

i) M_{π} nin birinci temel formu $|^{\pi} = f^2 \; |||$,

ii) M_{π} nin ikinci temel formu $\|^{\pi} = (\operatorname{sgn} K) f \; |||$,

iii) π üçüncü temel formu korur.

Burada $|$, $\|$ ve $|||$, sırasıyla, M nin birinci, ikinci ve üçüncü temel formlarıdır.

İspat. *i*) $d\pi(X)$ ve $d\pi(Y)$, M_{π} nin teğet vektör alanları olmak üzere M_{π} nin birinci temel formu

$$|^{\pi}\left(d\pi(X), d\pi(Y)\right) = \langle d\pi(X), d\pi(Y)\rangle$$

dir. (IV.2.3) den

$$\langle d\pi(X), d\pi(Y)\rangle = f^2 \langle S(X), S(Y)\rangle = f^2 \; |||(X, Y)$$

olarak elde edilir ve böylece $|^{\pi} = f^2 \; |||$ dir.

ii) $d\pi(X)$ ve $d\pi(Y)$, M_{π} nin teğet vektöt alanları olmak üzere M_{π} nin ikinci temel formu

$$\|^{\pi}\left(d\pi(X), d\pi(Y)\right) = \langle S^{\pi}\left(d\pi(X)\right), d\pi(Y)\rangle$$

dir. (IV.2.3) ve (IV.2.4) den

$$\langle S^{\pi}\left(d\pi(X)\right), d\pi(Y)\rangle = (\operatorname{sgn} K) f \langle S(X), S(Y)\rangle = (\operatorname{sgn} K) f \; |||(X, Y)$$

olur ve bu da ispatı tamamlar.

iii) M_{π} nin üçüncü temel formu

$$\langle\!\langle\;\rangle\!\rangle^{\pi}\big(d\pi(X),d\pi(Y)\big)=\langle S^{\pi}(d\pi(X)),S^{\pi}(d\pi(Y))\rangle$$

dir. (IV.2.4) den

$$\langle S^{\pi}(d\pi(X)),S^{\pi}(d\pi(Y))\rangle=\langle S(X),S(Y)\rangle=\langle\!\langle\;\rangle\!\rangle(X,Y)$$

ve böylece $\langle\!\langle\;\rangle\!\rangle^{\pi}=\langle\!\langle\;\rangle\!\rangle$ elde edilir.

E^{n+1} de sabit destek fonksiyonlu bir hiperyüzey M ve $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ M nin asli vektörleri olsun. Bir X_P vektörü

$$X_P=\sum_{i=1}^{n}\cos\theta_i\,x_i$$

şeklinde yazılabilir ve X_P nin birim vektör alınması genelliği bozmaz. Burada θ_i ler X_P vektörü ile x_i vektörleri arasındaki açılardır. M nin şekil operatörü S olmak üzere

$$S(X_P)=\sum_{i=1}^{n}k_i\cos\theta_i\,x_i \tag{IV.2.8}$$

olur, burada k_i eğrilikleri x_i lere karşılık gelen asli eğriliklerdir.

Böylece aşağıdaki şu teoremi verebiliriz.

IV.2.3. Teorem. E^{n+1} de sabit destek fonksiyonlu bir hiperyüzey M ve M nin O ya göre pedali M_π olsun. M üzerinde tanjant vektörler X ve Y olmak üzere X ve Y nin $\{x_1,x_2,\cdots,x_n\}$ vektörleri ile yaptıkları açılar, sırasıyla, $\theta_1,\theta_2,\cdots,\theta_n$ ve $\theta_1',\theta_2',\cdots,\theta_n'$ olsun. Bu durumda $d\pi(X)$ ve $d\pi(Y)$ nin M_π üzerinde eşlenik vektörler olması için gerek ve yeter şart

$$\sum_{i=1}^{n}k_i^2\cos\theta_i\cos\theta_i'=0$$

olmasıdır.

İspat. $d\pi(X)$ ve $d\pi(Y)$, M_π üzerinde eşlenik vektörler olsunlar. Bu durumda

$$\langle S^{\pi}(d\pi(X)),d\pi(Y)\rangle=0$$

dır. (IV.2.3) ve (IV.2.4) den $d\pi(X)=fS(X)$ ve $S^{\pi}(d\pi(X))=(\operatorname{sgn}K)S(X)$ olduğundan (IV.2.8) den

$$S^{\pi}\left(d\pi(X)\right) = \operatorname{sgn} K \sum_{i=1}^{n} k_i \cos\theta_i \, x_i$$

ve

$$d\pi(Y) = f \sum_{i=1}^{n} k_i \cos\theta'_i x_i$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned} \langle S^{\pi}\left(d\pi(X)\right), d\pi(Y)\rangle &= \left(\operatorname{sgn} K\right) f \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} k_i \, k_j \cos\theta_i \cos\theta'_j \langle x_i \, , x_j \rangle \\ &= \left(\operatorname{sgn} K\right) f \sum_{i=1}^{n} k_i^2 \cos\theta_i \cos\theta'_j = 0 \end{aligned}$$

olarak elde edilir ve böylece

$$\sum_{i=1}^{n} k_i^2 \cos\theta_i \cos\theta'_i = 0$$

olur.

Diğer yöndeki ispat ise benzer şekilde kolayca gösterilebilir.

KAYNAKLAR

[1] MATSUSHIMA, Y., Differentiable Manifolds. Marcel Dekker, Inc. New York, (1972).

[2] HICKS, N.J., Notes On Differential Geometry. Van Nostrand Reinhold Company, London, (1971).

[3] CHEEGER, J., EBIN, D.G., Comparison Theorems in Riemannian Geometry. Nort-Holland Publishing, Amsterdam, (1975).

[4] HACISALİHOĞLU, H.H., Diferensiyel Geometri. İnönü Üniv. Fen-ed. Fak. Yay. Mat. No.2, (1982).

[5] PRAKASH, N., Differential Geometry, An Integrated Approach. Tata Mc Graw-Hill Publishing Company Limitet, New Delhi, (1981).

[6] O'NEILL, B., Elementary Differential Geometry. Academic Press. New York, (1966).

[7] HASANIS, T., KOUTROUFIOTIS, D., The Characteristic Mapping of a Reflector. Journal of Geometry. Vol.24, 131-167, (1985).

[8] SCHERRER, W., Stützfunktion und Radius II. Comm. Math. Helv. 25, (1951).

[9] BRUCE, J.W., GIBLIN, P.J., GIBSON, C.G., On Caustics of Plane Curves. Math. Monthly 88, 651-667, (1981).

[10] GEORGIOU, C., HASANIS.T., KOUTROUFIOTIS, D., On The Caustic of a Convex Mirror. Geometriae Dedicata 28, 153-169, (1988).

[11] HASANIS, T., KOUTROUFIOTIS, D., Hypersurfaces With a Constant Support Function. Arch. Math. Vol.57, 189-192, (1991).

ÖZGEÇMİŞ

01.01.1960 yılında Kahramanmaraş'ın Elbistan ilçesinin Kandil köyünde doğdu. İlk ve orta öğrenimini Elbistan da bitirdi ve 1984 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümüne girmeye hak kazandı. 1988 yılında bu bölümden mezun olduktan sonra 1989 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde araştırma görevlisi olarak işe başladı. 1992 yılında "Holditch Teoremi ve Kutupsal Atalet Momenti" adlı tezi ile yüksek lisansını bitirdi. Halen bu görevi yürütmekte olup evli ve iki çocuk babasıdır.