İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

REEL TERİMLİ SINIRLI BİR DİZİNİN σ-ÇEKİRDEĞİ

Celâl ÇAKAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
1997

Fen - Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İş bu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Feyzi BAŞAR

Başkan

Prof. Dr. İhsan SOLAK

Üye

Yrd. Doç. Dr. Hüsamettin COŞKUN

Üye

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

.../.../1997

Prof. Dr. Eşref YÜKSEL

Enstitü Müdürü

ÖZET

Üç bölüm olarak hazırlanan bu çalışmanın birinci bölümünde, bir dizinin bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi yardımıyla elde edilen dönüşüm dizisi tarif edildi. Ayrıca; regülerlik, hemen hemen regülerlik, kuvvetli regülerlik, σ-regülerlik ve V_σ-regülerlik hakkında yapılmış tanım ve teoremler verildi.

İkinci bölümde; bir dizinin K, B ve σ-çekirdek tanımları yapılarak bu dizi ile onun dönüşüm dizisinin K, B ve σ-çekirdekleri arasındaki ilişkileri veren ve daha önceden yapılmış teorem ve sonuçlar yer aldı.

Son kısımda da; Chaudhary ' nin [7] ' de çalıştığı fikir kullanılarak, K ve B çekirdek hakkında yapılan ve ikinci kısımda verilen sonuçlar σ -çekirdek bakımından normal matrisler yardımıyla genelleştirildi.

ABSTRACT

This thesis consists of three chapters.

In the first chapter, the consept of a transform of a sequense obtained by an infinite matrix $A = (a_{nk})$ has been explained. Moreover, the bacis definitions and theorems related to regular matrix, almost reguler matrix, strongly regular matrix, σ-regular matrix, V_σ- regular matrix have been given as well as the concepts of Banach limit and invariant mean.

In the second chapter, the definitions of K- core, B- core and σ-core of a sequence have been given and then some known inclusion theorems related to K- core, B- core and σ-core of a sequence and its transform obtained by some matrices.

In the final chapter, using the idea that used Chaudhary in [7], some inequalities given in chapter two have been extended to normal matrices.

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunu bana verdikten sonra , çalışmalar boyunca hiçbir maddi ve manevi desteğini esirgemeyen hocam SayınYrd.Doç.Dr.Hüsamettin Coşkun ' a ve her türlü problemlerimizde bize yol gösteren hocam sayın Prof. Dr. Feyzi BAŞAR ' a teşekkür eder, saygılar sunarım.

Celâl ÇAKAN

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER

$\in$: Eleman

$\subset$: Alt cümle

$\cap$: Kesişim

s : Reel terimli bütün dizilerin uzayı

m : Reel terimli sınırlı bütün dizilerin uzayı

c : Reel terimli yakınsak bütün dizilerin uzayı

m_A : $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisinin m' ye götürdüğü dizilerin uzayı

V_σ : σ- yakınsak bütün dizilerin uzayı

K-çek : Reel terimli sınırlı bir dizinin K- çekirdeği

B-çek : Reel terimli sınırlı bir dizinin B- çekirdeği

σ-çek : Reel terimli sınırlı bir dizinin σ-çekirdeği

I. BÖLÜM

1. MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

1. 1. Matris Dönüşümleri:

A= (a_{nk}) kompleks terimli bir sonsuz matris ve x = (x_n) bir dizi olsun. Eğer her n için,

$$A_n(x)=\sum_k a_{nk}x_k$$

serisi yakınsak ise, $(A_n(x))$ dizine (x_n) dizisinin A matrisi ile elde edilen dönüşüm dizisi denir.

E ve F reel ya da kompleks terimli dizilerin uzayları ve A= (a_{nk}) da reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris olsun. Eğer, her x∈E için $(A_n(x))$ dizisi mevcut ve $(A_n(x))$∈F ise, A matrisi E'den F'ye tanımlıdır denir ve A∈(E, F) yazılır. E'den F'ye tanımlı bütün matrislerin sınıfı (E, F) ile gösterilir.

Eğer E ve F üzerinde limit ya da toplam mevcut ise, $(E, F)_{reg}$ ile toplam veya limiti koruyan matrislerin sınıfı gösterilir. Meselâ ; c reel terimli bütün yakınsak dizilerin uzayı olmak üzere, A∈$(c, c)_{reg}$ ise A∈ (c, c) ve $x_n \to \ell$ olacak şekildeki her (x_n) ∈ c için $A_n(x) \to \ell$ 'dir. Bu tip matrislere "regüler matrisler" denir.

A = (a_{nk}) sonsuz matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartları Silverman-Toeplitz teoremi aşağıdaki gibi vermiştir :

Teorem 1.1.1 (Silverman-Toeplitz): A∈$(c, c)_{reg}$ olması için gerek ve yeter şart

$$\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \qquad (1.1)$$

$$\lim_n a_{nk} = 0 \quad , \text{her } k \text{ için} \qquad (1.2)$$

$$\lim_n \sum_k a_{nk} = 1 \qquad (1.3)$$

olmasıdır, ([2], 1970, s. 165).

Tanım 1.1.2: A= (a_{nk}) bir sonsuz matris olsun. Eğer, k > n için $a_{nk} = 0$ ise , A'ya üçgensel matris denir. A üçgensel olduğunda, her n için $a_{nn} \neq 0$ ise, A'ya normal matris denir, ([1], 1950, s. 254).

Teorem 1.1.3: Bir A= (a_{nk}) matrisinin A^{-1} tersinin mevcut olabilmesi için gerek ve yeter şart A'nın normal olmasıdır, ([1], 1950, s. 176).

Tanım 1.1.4: Eğer bir sonsuz A matrisinin her bir satırında sıfırdan farklı sonlu sayıda eleman varsa, A'ya satır-sonlu matris denir, ([1], 1950, s. 6).

Tanım 1.1.5: Bir regüler A matrisi için,

$$\lim_{n} \sum_{k} |a_{nk}| = 1 \tag{1.4}$$

oluyorsa, A'ya "hemen hemen pozitif matris" denir, ([12], 1969).

Tanım 1.1.6: A= (a_{nk}) ve B= (b_{nk}) iki regüler matris ve

$$z_n = \sum_{k} a_{nk} x_k \ , \ z_n^* = \sum_{k} b_{nk} x_k \quad (n = 1, 2, 3, ..)$$

olsun. Eğer (z_k) dizilerinin verilen herbir sınıfı için $\lim_{n}(z_n - z_n^*) = 0$ ise (yani ; ya z_n ve z_n^* 'ın her ikisi de aynı limite gitsin ya da limitlerinin farkı sıfır olsun), A ve B matrislerine " mutlak denktirler " denir.

Teorem 1.1.7: A ve B regüler matrislerinin, bütün sınırlı dizilerin uzayı olan m üzerinde mutlak denk olmaları için gerek ve yeter şart,

$$\lim_{n} \sum_{k} |a_{nk} - b_{nk}| = 0 \tag{1.5}$$

olmasıdır, ([1], 1950, s. 105).

Teonem 1.1.8: A∈(m, m) olması için gerek ve yeter şart, (1.1)' in sağlanmasıdır, ([2], 1970, s. 164).

1.2. Hemen Hemen Yakınsaklık

Bu bölümde, hemen hemen yakınsaklığın tanımını yaparak bununla ilgili; çeşitli matris sınıflarını karakterize eden teoremleri vereceğiz.

Tanım 1.2.1: X bir lineer uzay olmak üzere, f: $X \to \mathbb{R}$ dönüşümüne bir fonksiyonel denir. Her x, y $\in$ X için,

$$f(x+y) \leq f(x) + f(y)$$

oluyorsa, f fonksiyoneli " alttoplamsal ";

$$f(x+y) = f(x)+f(y)$$

eşitliği varsa "toplamsal" olarak tarif edilir. Eğer, $t \geq 0$ skaleri için her $x \in X$ alındığında $f(t\, x) = t\, f(x)$ oluyorsa, f fonksiyoneline "homojendir " denir.

Alttoplamsal ve homojen bir fonksiyonele altlineer, toplamsal ve her t için homojen olan fonksiyonele de lineer fonksiyonel denir, ([2], 1970, s. 102).

Tanım 1.2.2: L: $m \to \mathbb{R}$ lineer olsun. Bu durumda, eğer L fonksiyoneli

$$\text{Her n için } x = x_n \geq 0 \text{ ise } L(x) \geq 0, \tag{2.1}$$

$$e = (1, 1, ..., 1, ...) \text{ için } L(e)=1, \tag{2.2}$$

$$(Sx)_n = x_{n+1} \text{ olmak üzere } L[(Sx)_n] = L(x) \tag{2.3}$$

şartlarını sağlıyorsa, L'ye bir Banach limiti denir.

m üzerinde,

$$q(x) = \inf_{n_1, n_2, \dots, n_r} \limsup_k \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} x_{k+n_i}$$

ile tanımlanan q fonksiyoneli altlineerdir. Bu q yardımıyla Banach limitlerinin değişik bir tanımı aşağıdaki gibi verilir :

Tanım 1.2.3 : L, m üzerinde bir lineer fonsiyonel olsun. Eğer her x $\in$ m için

$$L(x) \leq q(x)$$

ise, L' ye bir Banach limiti denir, ([3], 1966).

Tanım 1.2.4: Bütün L Banach limitleri için L(x) = s oluyorsa, x=(x_n)∈m dizisine s ' ye hemen hemen yakınsaktır denir, ([15], 1948).

Hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı F, sıfıra hemen hemen yakınsak olan dizilerin uzayı da F_0 ile gösterilir. Bir x dizisi bir s değerine hemen hemen yakınsak ise, F-limx = s yazılır.

Şimdi de hemen hemen yakınsak dizileri karakterize edecek bir teorem verelim :

Teorem 1.2.5: Sınırlı bir x *dizisinin bir s değerine hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart ; n ' ye göre düzgün olarak*

$$\lim_{k} \frac{x_n + x_{n+1} + \ldots + x_{n+k-1}}{k} = s$$

olmasıdır, ([15], 1948).

Tanım 1.2.6: Bir A= (a_{nk}) matrisi bütün hemen hemen yakınsak dizileri, yakınsak dizilere dönüştürüyor ve limAx = F-limx oluyorsa, A'ya "KUVVETLİ REGÜLER" matris denir ve A∈$(F, c)_{reg}$ yazılır, ([15], 1948).

Lorentz tarafından verilen aşağıdaki teorem, kuvvetli regüler matrisleri karakterize etmektedir :

Teorem 1.2.7: Bir regüler A= (a_{nk}) matrisinin kuvvetli regüler olması için gerek ve yeter şart ;

$$\lim_{n} \sum_{k} \left| a_{nk} - a_{nk+1} \right| = 0 \qquad (2.4)$$

olmasıdır.

Tanım 1.2.8: Yakınsak dizileri , hemen hemen yakınsak dizilere dönüştüren ve F-limAx = limx olan A= (a_{nk}) matrisine, "HEMEN HEMEN REGÜLER" matris denir ve $A \in (c, F)_{reg}$ yazılır, ([16], 1966).

Hemen hemen regüler matrislerin sınıfı King tarafından aşağıdaki teoremle karakterize edildi :

Teorem 1.2.9: Bir A matrisinin hemen hemen regüler olması için gerek ve yeter şart ;

$$\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \tag{2.5}$$

$$F\text{-}\lim a_{nk} = 0 \text{, (her } k \text{ için)} \tag{2.6}$$

$$\lim_n \sum_k a_{nk} = 1 \text{, (} n' \text{ e göre düzgün)} \tag{2.7}$$

şartlarının sağlanmasıdır, ([16], 1966).

Tanım 1.2.10: Hemen hemen yakınsak dizileri, hemen hemen yakınsak dizilere limitini koruyarak taşıyan A matrisine, "F-REGÜLER" matris denir. $A \in (F, F)_{reg}$ yazılır.

F- regüler matrisler, aşağıdaki teoremle karakterize edilmişlerdir :

Teorem 1.2.11: Bir A matrisinin F- regüler olması için gerek ve yeter şart ; (2.5) ile birlikte

$$F\text{-}\lim a_{nk} = 0 \text{, (her } k \text{ için)} \tag{2.8}$$

$$F\text{-} \lim_n \sum_k a_{nk} = 1 \text{, (} n' \text{ e göre düzgün)} \tag{2.9}$$

$$\lim_q \sum_k \frac{1}{q+1} \left| \sum_{i=0}^{q} (a_{n+i,k} - a_{n+i,k+1} \right| = 0, \text{ (} n' \text{ egöredüzgün)} \tag{2.10}$$

şartlarının sağlanmasıdır, ([10] 1972)

Tanım 1.2.12: Eğer A matrisi sınırlı dizileri hemen hemen yakınsak dizilere dönüştürüyorsa, A' ya hemen hemen Schur matrisi denir, ([10], 1972).

Yine Duran tarafından verilen aşağıdaki teorem hemen hemen Schur matrislerini karakterize eder :

Teorem 1.2.13: A' nın hemen hemen Schur matrisi olması için gerek ve yeter şart; (2.5) ile birlikte

$$\lim a_{nk} = \alpha_k \text{ (her } k \text{ için)} \tag{2.11}$$

$$\lim_q \sum_n \left| \frac{1}{q+1} \sum_{i=0}^{\infty} a_{n+i,k} - \alpha_k \right| = 0 \text{ , (n'e göre düzgün)} \tag{2.12}$$

şartlarının sağlanmasıdır, ([10], 1972).

Bu teoremde F yerine F_0 alınırsa, aşağıdaki teorem elde edilir :

Teorem 1.2.14: $A \in (m, F_0)$ olması için gerek ve yeter şart, (2.5) ve

$$\lim_q \sum_k \left| \frac{1}{q+1} \sum_{i=0}^{q} a_{n+i,k} \right| = 0, \text{ (n'egöredüzgün)} \tag{2.13}$$

şartlarının sağlanmasıdır, ([10], 1972).

Teorem 1.2.15: Hiçbir matris aynı zamanda hemen hemen Schur ve hemen hemen regüler olamaz , ([10], 1972).

1.3. İNVARYANT LİMİT

Tanım 1.3.1: σ: ℕ → ℕ dönüşümü, her m, n∈ℕ için $\sigma^m(n) \neq n$ olacak şekilde bire-bir bir fonksiyon olsun. Bu durumda; ϕ:m → ℝ lineer-sürekli fonksiyoneli,

$$\text{Her n için } x_n \geq 0 \text{ ise } \phi(x) \geq 0, \tag{3.1}$$

$$e = (1,1, ..., 1,...) \text{ için } \phi(e) = 1, \tag{3.2}$$

$$\text{Her } x_n \in m \text{ için } \phi(\{x_{\sigma(n)}\}) = \phi(x), \tag{3.3}$$

şartlarını sağlıyorsa, ϕ' ye "İnvaryant limit" veya "σ-limit" denir. Özel olarak, σ(n) = n+1 alınırsa ; Banach limiti elde edilir.

Tanım 1.3.2 (İnvaryant Yakınsak Dizi): Bütün invaryant limitleri eşit olan sınırlı bir diziye, "invaryant yakınsak" veya "σ-yakınsak dizi" denir. σ-yakınsak dizilerin uzayı V_σ ile gösterilir. 0' a σ-yakınsak olan dizilerin uzayı $V_{0\sigma}$ ile gösterilir. Bir x dizisinin σ-limiti s ise, σ-limit $x = s$ yazılır.

Aşağıdaki teorem bir dizinin ne zaman σ-yakınsak olacağını ifade etmektedir :

Teorem 1.3.3: Sınırlı bir $x = (x_n)$ dizisinin s'ye σ-yakınsak olması için gerek ve yeter şart ;

$$t_{pn}(x) = \frac{x_n + x_{\sigma(n)} + x_{\sigma^2(n)} + \ldots + x_{\sigma^p(n)}}{p+1}$$

olmak üzere , n' ye göre düzgün olarak

$$\lim_p t_{pn}(x) = s$$

limitinin mevcut olmasıdır, ([17], 1972).

Şimdi, σ-yakınsak dizilerin uzayı V_σ ile diğer bazı dizi uzayları arasındaki dönüşümleri karakterize eden tanım ve teoremleri verelim:

Tanım 1.3.4: Bir A matrisi sınırlı dizileri σ-yakınsak dizilere taşıyorsa, A' ya "σ-coersive matris " denir.

Tanım 1.3.5: $A \in (c, V_\sigma)$ ve lim x = σ-limit Ax oluyorsa, A' ya "σ-regüler matris" denir. $(c, V_\sigma)_{reg}$ yazılır.

Tanım 1.3.6: A matrisi, σ-yakınsak dizileri yine σ-yakınsak dizilere limitini koruyarak taşıyorsa, A'ya " V_σ-regüler matris " denir. $(V_\sigma, V_\sigma)_{reg}$ yazılır.

Tanım 1.3.7: Bir A matrisi için, $a^-(p,n,k) = \dfrac{1}{p+1}\sum_{j=1}^{p} a^-_{\sigma^j(n),k}$ olmak üzere

$$\lim_p \sum_k a^-(p,n,k) = 0$$

oluyorsa, A' ya σ-düzgün pozitif matris denir (Burada, reel bir λ için $\lambda^- =$max(-

λ, 0) olarak tanımlanır.), ([5], 1994).

Teorem 1.3.8: Bir A matrisinin σ-regüler olması için gerek ve yeter şart ;

$$\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty \ , \tag{3.4}$$

$$\sigma - \lim_n a_{nk} = 0 \ \textit{her k için,} \tag{3.5}$$

$$\sigma - \lim_n \sum_k a_{nk} = 1, \tag{3.6}$$

şartlarının sağlanmasıdır, ([17], 1972).

Teorem 1.3.9: $A \in (m, V_\sigma)$ olması için gerek ve yeter şart ; (3.4) ' ün sağlanması ve

$$\sigma - \lim_n a_{nk} = \alpha_k \ , \textit{her k için} \tag{3.7}$$

$$\lim_q \sum_k \frac{1}{q+1} \left| \sum_{i=0}^{q} (a_{\sigma^i(n),k} - \alpha_k) \right| = 0 \ , n' \textit{ e görедüzgün,} \tag{3.8}$$

olmasıdır, ([17], 1972).

Teorem 1.3.10: $A \in (m, V_{0\sigma})$ olması için gerek ve yeter şart ; (3.4) ve

$$\lim_q \sum_k \frac{1}{q+1} \left| \sum_{i=0}^{q} a_{\sigma^i(n),k} \right| = 0 \ , n' \textit{ e göre düzgün,} \tag{3.10}$$

şartlarının sağlanmasıdır, ([17], 1972)

Teorem 1.3.11: Bir A matrisinin V_σ-regüler olması için gerek ve yeter şart ; (3.4) , (3.5) , (3.6) ' nın sağlanması ve n' ye göre düzgün olarak

$$\lim_q \sum_k \frac{1}{q+1} \left| \sum_{i=0}^{q} \left[a_{\sigma^i(n)k} - \alpha_k - a_{\sigma^i(n)\sigma(k)} + \alpha_{\sigma(k)} \right] \right| = 0 \tag{3.9}$$

olmasıdır, ([6], 1996).

II. BÖLÜM

2.1. BİR DİZİNİN ÇEKİRDEĞİ

'Bir dizinin çekirdeği' tanımı, ilk olarak 1920' li yıllarda K. KNOPP tarafından yapılmış ve bununla ilgili daha sonraki yıllarda çokca başvurulan bir teorem verilmiştir. Bu ilk tanımdan farklı olarak tanımları yapıldığı için, buna K-çekirdek denilmiştir. K-çekirdekten farklı olarak, bir dizinin "B-çekirdek" ve "σ -çekirdek" kavramları da mevcuttur.

2.1. Bir Dizinin K- Çekirdeği

İlk olarak, tanımda kullanılan konveks cümle kavramını verelim:

Tanım 2.1.1: E, bir nokta cümlesi ve $a \geq 0$, $b \geq 0$, $a+b = 1$ olsun. Eğer her x, y $\in$E için a x+b y $\in$ E oluyorsa, E' ye "konvekstir" denir, ([2] 1970, s. 80).

Teorem 2.1.2: Konveks cümlelerin herhangi sayıdaki kesişimleri konvekstir.

Şimdi K- çekirdeğin tanımını yapabiliriz :

Tanım 2.1.3 (K- çekirdek) : $(s_n)\in\mathbb{C}$ bir dizi ve R_n de, her n$\in$N için s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, ... noktalarını içeren sonlu kompleks düzlemin en küçük kapalı-konveks bir bölgesi olsun (Bu durumda, $R_1 \supset R_2 \supset R_3 \supset \ldots$ olacağı açıktır). Buna göre, R = $\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$ cümlesine (s_n) dizisinin çekirdeği denir.

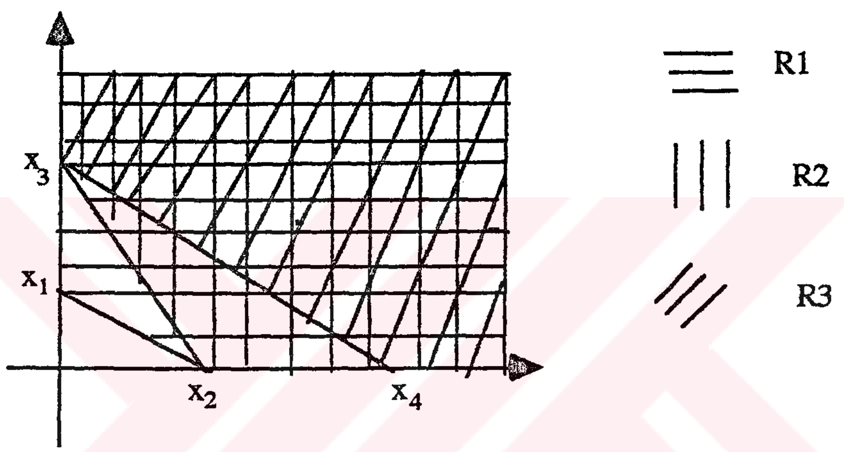
Sonsuz sayıdaki kapalı cümlenin kesişimi kapalı olduğundan ve Teorem 2.1.2)' den, (s_n) 'nin R çekirdeği kapalı - konveks bir cümledir. O hâlde ; kapalılığın tanımından, (s_n) dizisinin limit noktalarının cümlesi D ise D$\subset$R ' dir.

Eğer R cümlesi tek noktadan ibaretse, (s_n) dizisi yakınsaktır (Tersi de doğrudur). R boş (yani, sonlu nokta ihtivâ etmez) ise, (s_n) dizisine "belirli ıraksak" denir ve $s_n \approx \infty$ ile gösterelir.

Şimdi, K- çekirdek ile ilgili bazı örnekler verelim :

Örnek 2.1.4 : $x_n = \begin{cases} n, n \text{ çift} \\ n.i, n \text{ tek} \end{cases}$ olarak tanımlansın. O zaman, aranan R_n kapalı-kapalı konveks cümleleri - aşağıdaki şekilde görüldüğü gibi - orijinde dik açılı üçgensel bir bölgenin çıkarılması ile kalan kompleks düzlemin birinci bölgesinden ibarettir.

$$x_1 = i, x_2 = 2, x_3 = 3i, x_4 = 4, \ldots$$



O hâlde ; $R = R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap \ldots = \varnothing$ olduğundan, (x_n) dizisi belirli ıraksaktır.

Örnek 2.1.5: $x_n = (-1)^n$ alalım. Bu durumda ; $x_1 = -1, x_2 = 1, x_3 = -1, x_4 = 1$, ... olacağından,

$$R = R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap \ldots = [-1, 1]$$

kapalı aralığıdır. O hâlde , (x_n)' nin K- çekirdeği $[-1, 1]$ ' dir.

Bu örnekten de görüldüğü gibi, reel terimli bir (x_n) dizisinin K-çekirdeği $\ell(x) = \liminf x_n$, $L(x) = \limsup x_n$ olmak üzere ;

$$[\ell(x), L(x)]$$

kapalı aralığıdır.

Şimdi, K. KNOPP' un çekirdek teoremini verelim :

Teorem 2.1.6 : A= (a_{nk}) non-negatif bir regüler matris olsun. Bu durumda ; her (x_n) dizisinin K- çekirdeği,

$$t_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

dönüşüm dizisinin çekirdeğini ihtivâ eder.

İspat: Kompleks terimli diziler bakımından ispat biraz daha karmaşıt olduğundan, sadece reel terimli diziler bakımından ispatı verelim :

(x_n), reel terimli bir dizi ve (x_n)' nin K- çekirdeği $[a, b]$, (t_n)' nin K- çerikdeği $[a', b']$ olsun.Eğer

$$b' \le b \, , a \le a'$$

olduğu gösterilirse, ispat tamamlanmış olur.

$b = \infty$ olması halinde ispatlanacak bir şey yoktur. $b < \infty$ olsun. Bu durumda, limsup' un tanımından k > m olduğunda,

$$x_k < b + \varepsilon$$

olacak şekilde bir m∈IN vardır.

$$x_n^* = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

yazılırsa, $\lim_n a_{nk} = 0$ olduğundan (x_n^*) ile $x_n^{**} = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} x_k$ dizileri aynı limit değerine sahiptirler. Ayrıca A' nın non- negatif olduğu da dikkate alınırsa,

$$x_n^{**} \le (b+\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}$$

olur ki, $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$ olmasından $x_n^{**} \le b + \varepsilon$ elde edilir. Böylece, (x_n^{**}) dizisinin her bir noktası $b + \varepsilon$'dan küçüktür. ε keyfi olduğundan, $b' \le b$ ' dir.

Altlimit tanımından $a \le a'$ olduğu da gösterilebilir.

Çekirdeğin son yapılan tanımından aşağıdaki sonucu verebiliriz :

Eğer iki dizinin limit noktalarının cümlesi aynı ise, bunların çekirdekleri de aynıdır. Fakat, aynı çekirdeğe sahip dizilerin limit noktaları aynı olmak zorunda değildir. Meselâ ;

(1, 0, 1, 0, ...) ve (1, 1/2, 0, 1, 1/2, 0, ...)

dizilerinin K-çekirdekleri aynı olduğu hâlde, limit noktalarının farklı olduğu görülmektedir.

2.2. B- Çekirdek

P, m üzerinde bir alt lineer fonksiyonel olsun. Eğer m üzerindeki lineer - sürekli ϕ fonksiyoneli için , $\phi \leq P$ (Yani her $x \in m$ için $\phi(x) \leq P(x)$' dir)iken ϕ bir Banach limiti oluyorsa P' ye ; Banach limitlerini "üretir" denir. Eğer her ϕ Banach limiti için $\phi(x) \leq P(x)$ oluyorsa, P Banach limitlerine "baskındır" denir.

m üzerinde,

$$q(x) = \inf_{n_1, n_2, \ldots, n_r} \limsup_{k} \frac{1}{r} \sum_{i=1}^{r} x_{k+n_i}$$

ile tanımlanmak üzere, q(x)' in hem Banach limitlerini ürettiği ve hem de onlara baskın olduğu biliniyor, ([3], 1966).

Buna göre, bir dizinin B- çekirdeği

[-q(-x), q(x)]

kapalı aralığı olarak tanımlanır, ([18], 1987).

m üzerinde,

$$l^*(x) = \liminf_{n} \sup_{i} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{i+n} x_i$$

$$L^*(x) = \limsup_{n} \sup_{i} \frac{1}{n+1} \sum_{i=1}^{i+n} x_i$$

olarak tanımlanırsa, her $x \in m$ için $q(x) = L^*(x)$ olduğundan bir x dizisinin B-çekirdeği

$[-\ell^*(-x), L^*(x)]$

kapalı aralığı olarak da tanımlanır.

2.3. σ- Çekirdek

P, m üzerinde bir alt lineer fonksiyonel olsun. Her $x \in m$ için $Q(x) \leq P(x)$ iken Q bir σ- mean oluyorsa, P σ- meanleri üretir denir. Ayrıca, her Q σ- meani alındığında $Q(x) \leq P(x)$ oluyorsa, P σ- meanlere baskındır denir.

Eğer P, σ- meanleri hem üretir hem de σ- meanlere baskın ise, sınırlı bir x dizisinin σ- çekirdeği $[-P(-x), P(x)]$ kapalı aralığı ile tanımlanır, ([5], 1994).

m üzerinde, $t_{pn}(x)$ Tanım 1.2.2' deki gibi olmak üzere,

$$V(x) = \sup_n \limsup_p t_{pn}(x)$$

ile verilen alt lineer fonksiyoneli hem σ- meanleri üretir ve hem de σ- meanlere baskındır. Buna göre, bir x dizisinin σ- çekirdeği

$$[-V(-x), V(x)]$$

ile verilir, ([5], 1994).

III. BÖLÜM

ÇEKİRDEK İLİŞKİLERİ

Bu bölümde, bir x dizisi ile onun dönüşüm dizisinin K, B ve σ-çekirdeği arasındaki ilişkileri karakterize eden teoremler verilecektir.

3.1. Knopp Çekirdek Teoreminin Genelleştirilmesi

Burada, Knopp Çekirdek Teoremi olarak bilinen Teorem 2.1.6.' nın bir genelleştirilmesi verilecektir.

Teorem 3.1.1: $B=(b_{nk})$ bir normal matris, $A=(a_{nk})$ herhangibir matris olsun. Bx sınırlı olduğunda Ax mevcut, sınırlı ve

$$L(Ax) \leq L(Bx)$$

olması için gerek ve yeter şart,

$$C = AB^{-1} \text{ mevcut ve regüler,} \tag{1.1}$$

$$\lim_n \sum_k \left|c_{nk}\right| = 1, \tag{1.2}$$

$$\lim_i \sum_{k=0}^{i} \left| \sum_{v=i+1}^{\infty} a_{nv} b_{vk}^{-1} \right| = 0 \text{ (herhangibir } n \text{ için)} \tag{1.3}$$

olmasıdır, ([7], 1988).

Şimdi; Chaudhary' nin, bu teoremin ispatında kullandığı iki lemmayı ispatsız olarak verelim :

Lemma 3.1.2: Bir $D = (d_{nk})$ matrisinin sınırlı bütün dizileri yakınsak bir diziye taşıyabilmesi için gerek ve yeter şart ;

$$\sum_k \left|d_{nk}\right| < \infty \text{ , her sabit } n \text{ için}$$

$$\lim_n d_{nk} = \delta_k \text{, her sabit } k \text{ için}$$

$$\lim_n \sum_k \left|d_{nk} - \delta_k\right| = 0$$

şartlarının sağlanmasıdır, ([7], 1988).

Lemma 3.1.3 : n, sabit bir sayı olsun. Bx sınırlı olduğunda, bu n için $A_n(x)$' in mevcut olabilmesi için gerek ve yeter şart,

$$c_{nk} = \sum_{v=k}^{\infty} a_{nv} b_{vk}^{-1} \text{ mevcut, (her } k \text{ için)} \tag{1.4}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left| c_{nk} \right| < \infty \tag{1.5}$$

şartları ile birlikte her n için (1.3)' ün sağlanmasıdır.

Bu şartlar sağlandığında, sınırlı Bx dizisi için $A_n x = C_n y$' dir, ([7], 1988).

Şimdi, Teorem (3.1.1)' in ispatını verelim :

İspat (Teorem 3.1.1): Sadece her n için Bx sınırlı olduğunda $(Ax)_n$' nin mevcut olduğunu düşünürsek, o zaman, Lemma 3.1.3)' ün şartları sağlanacağından, Teoremin (1.1) ve (1.3) şartları elde edilir. Üstelik her sınırlı Bx için $(Ax)_n = (Cy)_n$' dir.

Tersine; eğer teoremin şartları sağlanıyorsa, (1.2) her n için (1.5)' i verir. Böylece her n için Lemma' nın şartları sağlanır ve $(Ax)_n = (Cy)_n$ ' dir. Buradan, Knopp' un çekirdek teoreminin bir sonucu olarak gereklilik ve yeterlilik elde edilir.

Choudhary, A matrisini satır-sonlu alarak aşağıdaki teoremi verdi :

Teorem 3.1.4: B normal, A satır- sonlu bir matris olsun. O zaman, her $x \in m$ için

$$L(Ax) \leq L(Bx)$$

olması için gerek ve yeter şart AB^{-1} ' in regüler ve hemen hemen pozitif olmasıdır.

Teorem 3.1.5 : m üzerinde,

$$w(Bx) = \inf_{t \in m_0} L(Bx + t)$$

altlineer fonksiyonelini tanımlıyalım. O zaman; B bir normal matris olmak üzere, Bx sınırlı olduğunda Ax' in mevcut olması ve

$$L(Ax) \leq w(Bx)$$

sağlanması için gerek ve yeter şart $C = AB^{-1}$' in mevcut ve kuvvetli regüler olması ve (1.2) ile (1.3)' ün sağlanmasıdır, ([7] , 1988).

Buradaki A matrisi satır-sonlu olursa aşağıdaki teorem elde edilir :

Teorem 3.1.6: B normal, A satır-sonlu bir matris olsun. O zaman, her $x \in m_0$ alındığında

$$L(Ax) \leq w(Bx)$$

sağlanması için gerek ve yeter şart, AB^{-1}' in hemen hemen pozitif ve kuvvetli regüler olmasıdır, ([7] 1988).

B = I (birim matris) alınırsa, aşağıdaki teoreme sahip oluruz :

Teorem 3.1.7 : w, m üzerinde $w(x) = \inf_{z \in m_0} L(x+z)$ ile tanımlanan bir altlineer fonksiyonel olmak üzere, her $x \in m_0$ alındığında

$$L(Ax) \leq w(x)$$

sağlanması için gerek ve yeter şart A' nın hemen hemen pozitif ve kuvvetli regüler olmasıdır, ([7], 1988).

3.2. K-Çekirdek ve B- Çekirdek İlişkileri

Burada, K- çekirdek ile B- çekirdek arasındaki ilişkileri veren sonuç ve teoremler verilecektir :

m sınırlı dizilerin uzayı üzerinde,

$$l \leq l^* \leq L^* \leq L$$

eşitsizliği herzaman sağlandığından, verilen sınırlı bir x dizisi için daima

$$B\text{- Çek}\, x \subseteq K\text{- çek}\, x$$

olur, ([13], 1990).

Teorem 3.2 .1: $A=(a_{nk})$ *bir sonsuz matris olsun. Her x dizisi için,*

$$L(Ax) \leq L^*(x)$$

olması için gerek ve yeter şart,

$$A \text{ kuvvetli regüler}, \tag{2.1}$$

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| = 1 \tag{2.2}$$

sağlanmasıdır, ([13], 1990).

Teorem 3.2.2 : $A=(a_{nk})$ *bir sonsuz matris olsun.* $L^*(Ax) \leq L^*(x)$ *olması için gerek ve yeter şart,*

$$A \;\; F\text{-regüler}, \tag{2.3}$$

$$\lim_n \sup_i \sum_k \left| \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} a_{rk} \right| = 1 \tag{2.4}$$

olmasıdır, ([13], 1990).

Teorem 3.2.3 : $B=(b_{nk})$ *bir normal matris,* $A=(a_{nk})$ *herhangi bir matris olsun. Bx sınırlı olduğunda Ax mevcut, sınırlı ve*

$$L^*(Ax) \leq L^*(Bx)$$

olması için gerek ve yeter şartlar;

$$AB^{-1} \text{ mevcut}, \tag{2.5}$$

$$AB^{-1} \;\; F\text{-regüler}, \tag{2.6}$$

$$\lim_i \sum_{k=0}^{i} \left| \sum_{v=i+1}^{\infty} a_{nv} b_{vk}^{-1} \right| = 0 \text{ (herhangibir } n \text{ için)}, \tag{2.7}$$

$$\lim_n \sup_i \sum_k \left| \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} c_{rk} \right| = 1 \tag{2.8}$$

şartlarının sağlanmasıdır, ([14], 1993).

Teorem 3.2.4: $B=(b_{nk})$ *bir normal matris,* $A=(a_{nk})$ *bir satır - sonlu matris* *olsun. Her $x \in m_B = \{x : Bx \in m\}$ alındığında,*

$$L^*(Ax) \leq L^*(Bx)$$

olması için gerek ve yeter şart , (2.6) ve (2.8) şartlarının sağlanmasıdır, ([14],1993).

Teorem 3.2.5 : m üzerinde, $L^*(A) \leq l^*(B)$ olması için gerek ve yeter şart, B' nin hemen hemen Schur matrisi olması ve n' e göre düzgün olarak ,

$$\lim_q \sum_k \frac{1}{q+1} \left| \sum_{i=0}^{\infty} (a_{n+i,k} - b_{n+i,k}) \right| = 0$$

sağlanmasıdır, ([14], 1993).

Teorem 3.2.6 : B matrisi F - regüler olsun ve

$$\lim_n \sup_i \sum_k \left| \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} b_{rk} \right| = 1$$

sağlansın. Bu durumda ,

$$L^*(A) \leq l^*(B)$$

olacak şekilde hiçbir A matrisi yoktur, ([14], 1993).

Teorem 3.2.7 : B= (b_{nk}) bir normal matris, A = (a_{nk}) herhangibir matris olsun. Bx sınırlı olduğunda, Ax mevcut, sınırlı ve

$$L(A) \leq L^*(B)$$

olması için gerek ve yeter şart ; (2.5) , her n için (2.7) ve

C kuvvetli regüler , (2.9)

$$\lim_n \sum_k |c_{nk}| = 1, \tag{2.10}$$

sağlanmasıdır, ([14], 1993).

Teorem 3.2.8 : B= (b_{nk}) bir normal matris, A = (a_{nk}) herhangibir matris *olsun. Bx sınırlı olduğunda, Ax mevcut, sınırlı ve*

$$L^*(Ax) \leq L(Bx)$$

olması için gerek ve yeter şart ; (2.5) , her n için (2.7) ve (2.8) ile birlikte

$$C \text{ hemen hemen regüler} \tag{2.11}$$

olmasıdır, ([14], 1993).

Teorem 3.1.10 : A= (a_{nk}) reel terimli bir matris ve x = (x_k) reel terimli sınırlı bir dizi olsun. Bu durumda,

$$K\text{-çek } Ax = B\text{- çek } x$$

olması için gerek ve yeter şart,

$$A \text{ kuvvetli regüler ,} \tag{2.12}$$

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| = 1 \ , \tag{2.13}$$

$$p_i\text{' lerin her sonsuz dizisi için } \lim_i u_n = \lim_i \Big(\sum_k a_{n,p_i}\Big) = 1 \tag{2.14}$$

olmasıdır (Burada i= 1, 2, 3, ...), ([14], 1993).

Teorem 3.2.10 : B= (b_{nk}) ve A= (a_{nk}) birer normal matris olsunlar. Her $x \in m_A \cap m_B$ alındığında,

$$L(Ax) = L(Bx)$$

olması için gerek ve yeter şart ; $C = AB^{-1}$ ve $D = BA^{-1}$ matrislerinin regüler ve hemen hemen pozitif olmalarıdır, ([14], 1993).

Teorem 3.2.11 : B= (b_{nk}) ve A= (a_{nk}) birer normal matris olsunlar. Her x $\in m_A \cap m_B$ alındığında,

$$L^*(Ax) = L^*(Bx)$$

olması için gerek ve yeter şart, (2.8) ve

$$C = AB^{-1} \text{ ve } D = BA^{-1} \text{ matrisleri } F\text{ - regüler ,} \tag{2.15}$$

$$\lim_{n} \sup_{i} \sum_{k} \left| \frac{1}{n+1} \sum_{r=i}^{i+n} d_{rk} \right| = 1 \tag{2.16}$$

sağlanmasıdır, ([14], 1993).

3.3. K - Çekirdek ve σ- Çekirdek İlişkileri

Bu bölümde, K- çekirdek ile σ- çekirdek arasındaki ilişkiyi veren iki teoremin ifade ve ispatı verilecektir.

Teorem 3.3.1 : σ- çek Ax ⊂ K- çek x olması için gerek ve şart A' nın σ-regüler ve σ-düzgün pozitif olmasıdır.

İspat (Yeterlilik): A σ-regüler ve σ-düzgün pozitif olsun.

$V(Ax) = \sup_{n} \limsup_{p} t_{pn}(Ax)$ alalım. Verilen $\varepsilon > 0$ için her $k \geq k_0$ olduğunda $x_k < L(x) + \varepsilon$ sağlandığını biliyoruz. Böylece,

$$\begin{aligned} \sum_{k \geq k_0} a^{+}(p,n,k) &< (L(x) + \varepsilon) \sum_{k \geq k_0} a^{+}(p,n,k) \\ &< (L(x) + \varepsilon) \sum_{k} a^{+}(p,n,k) \end{aligned} \tag{3.1}$$

elde edilir.

$$t_{pn}(x) = \sum_{k} a(p,n,k) x_k \tag{3.2}$$

yazalım. A σ- düzgün pozitif olduğundan, $p \to \infty$, (n ' e göre. düz.) için

$$\left| \sum_{k \geq k_0} a^{-}(p,n,k) x_k \right| \leq \|x\| \sum_{k \geq k_0} \left| a^{-}(p,n,k) \right| \to 0 \ ,$$

dır. Yine, A' nın regülerliğinden ; $p \to \infty$ (n ' e göre. düz) için

$$\left| \sum_{k < k_0} a(p,n,k) x_k \right| \leq \|x\| . \sum_{k < k_0} \left| a(p,n,k) \right| \to 0 ,$$

olur. A' nın σ-regüler ve σ-düzgün pozitif olduğu da dikkate alınarak (3.1) ve (3.2)' den

$$\sup_{n} \limsup_{p} t_{pn} A(x) = \sup_{n} \limsup_{p} \sum_{k \geq k_0} a^{+}(p,n,k)$$

$$< (L(x)+\varepsilon)\sum_k a^+(p,n,k)$$

$$< \; L(x)+\varepsilon$$

elde edilir. Böylece, ε keyfi olduğundan,

$$V(Ax) \leq L(x)\ , \text{ her } x \in m$$

olur. Bu ise, σ-çek Ax ⊂ K- çek x olmasıdır.

(Gereklilik) : $|a(p,n,k)| = a^+(p,n,k) + a^-(p,n,k)$ olduğundan,

$$\lim_n \sum_k a(p,n,k) = \lim_p \sum_k a^+(p,n,k) + \lim_p \sum_k a^-(p,n,k)$$

yazabiliriz. Eğer A σ- regüler ise, σ- düzgün pozitiflik

$$\lim_p \sum_k |a(p,n,k)| = 1 \ \text{, n' e göre düzgün}$$

olmasına denk olur. Her $x \in m$ için

$$V(Ax) \leq L(x)$$

olması,

$$\sup_n \limsup_p t_{pn}(Ax) \leq L(x)$$

demektir. Şimdi, $x \in c$ olsun. O zaman,

$$\inf_n \limsup_p t_{pn}(Ax) = \sup_n \limsup_p t_{pn}(Ax) = \lim x$$

olur. Bu eşitsizlik, her n için

$$\limsup_p t_{pn}(Ax) \leq \lim x \leq \liminf_p t_{pn}(Ax)$$

olduğunu verir. Buradan,

$$\lim_p t_{pn}(Ax) = \lim x \ \text{, n' e göre düzgün}$$

elde edilir ki, $Ax \in V_\sigma$ ve lim x = σ- im Ax ' dir. Bu, A' nın σ- regülerliğini verir.

Şimdi de, $\lim_p \sum_k |a(p,n,k)| = 1$ (n' e göre düzgün) olduğunu gösterelim :

A σ- regüler olduğundan,

$$\liminf_{p} \sum_{k} |a(p,n,k)| \geq \liminf_{p} \sum_{k} a(p,n,k)$$

eşitsizliğinde p→∞ için limit alınırsa (n' e göre düzgün)

$$\liminf_{p} \sum_{k} |a(p,n,k)| \geq 1 \quad . \tag{3.3}$$

elde edilir. (Simons, 1969) daki Teorem12) 'nin benzeri olarak, $y \in m$, $\|y\| \leq 1$ alınırsa ;

$$\sup_{n} \limsup_{p} \sum_{k} a(p,n,k) y_k = \sup_{n} \limsup_{p} \sum_{k} |a(p,n,k)| \tag{3.4}$$

olur. Böylece, $V(Ay) \leq L(y) \leq \|y\| \leq 1$ elde edilir. (***)' dan

$$\sup_{n} \limsup_{p} \sum_{k} a(p,n,k) y_k \leq 1$$

olacağından , her n için

$$\limsup_{p} \sum_{k} |a(p,n,k)| \leq 1 \tag{3.5}$$

olur. (3.3) ve (3.5) ' den $\lim_{p} \sum_{k} |a(p,n,k)| = 1$ (n' e göre düzgün) elde edilir ki, bu da A' nın σ- düzgün pozitif olmasıdır, ([5], 1994).

Teorem 3.3.2 : A= (a_{nk}) bir sonsuz matris olsun. σ-çek Ax ⊂ σ- çek x olması için gerek ve yeter şart, A' nın V_σ- regüler ve σ- düzgün pozitif olmasıdır.

İspat (Gereklilik) : $V(Ax) \leq V(x)$ olsun. Böylece,

$$\sup_{n} \limsup_{p} t_{pn}(Ax) \leq \sup_{n} \limsup_{p} t_{pn}(x)$$

olur. Eğer $x \in V_\sigma$ ise, o zaman $\lim_{p} t_{pn}(x) = s$ denilirse

$$\sup_{n} \limsup_{p} t_{pn}(Ax) = \inf_{n} \liminf_{p} t_{pn}(Ax) = s$$

olur. Bu, her n için

$$\limsup_{p} t_{pn}(Ax) \leq s \leq \liminf_{p} t_{pn}(Ax)$$

olmasını verir. Buradan ,

$$\lim_{p} t_{pn}(Ax) = s \text{ , n' e göre düzgün}$$

olur ki $Ax \in V_\sigma$, yani A kuvvetli σ-regülerdir.

σ-lim x = σ-lim Ax olduğundan ; x = e = (1, 1, 1, ...) alınırsa, σ-lim x = σ-lim Ax=1 olur. Bu, $\sigma-\lim_n \sum_k a_{nk} = 1$ olmasıdır. Eğer x=(0, 0,..., 1, 0,...) (1,k.cı yerde) alınırsa o zaman, $\sigma-\lim x = \sigma-\lim Ax = \sigma-\lim_n a_{nk} = 0$ olur. Böylece, σ-düzgün pozitiflik

$$\lim_p \sum_k |a(p,n,k)| = 1$$

olmasına denk olur. Bir önceki teoremde olduğu gibi ; $y \in m$, $\|y\| \leq 1$ alınırsa,

$$\sup_n \lim_p \sup \sum_k a(p,n,k) y_k = \sup_n \lim_p \sup \sum_k |a(p,n,k)|$$

olur. Fakat bu y için,

$$V(y) = \sup_n \lim_p \sup t_{pn}(y)$$

$$= \sup_n \lim_p \sup \frac{y_n + y_{\sigma(n)} + \dots + y_{\sigma^p(n)}}{p+1}$$

$$\leq 1 \ , (\ \|y\| = \sup_n |y| \leq 1 \text{ olduğundan })$$

olur. Böylece,

$$V(Ay) \leq V(y) \leq 1$$

dir. Bir önceki teoremde olduğu gibi,

$$\lim_p \sum_k |a(p,n,k)| = 1$$

olduğu gösterilir. Böylece, A' nın σ-düzgün pozitif olduğu elde edilir.

(Yeterlilik) : $c \subset V_\sigma$ olduğundan, V_σ -regüler bir matris aynı zamanda σ-regülerdir. Böylece, Teorem 3.1.1) 'den

$$V(Ax) \leq \lim_p \sup x_p$$

olur. $z \in Z$ ($Z = V_{0\sigma}$) için ($z = z_\sigma$) ,

$$V(Ax + Az) \leq \lim_p \sup (x_p + z_p)$$

yazılabilir. Burada $z \in Z$ üzerinden infimum alınırsa,

$$\inf_{z\in Z} V(Ax + Az) \leq \inf_{z\in Z} \limsup_{p} (x_p + z_p) = W(x) \text{ (diyelim)}$$

olur. Bu,

$$\sup_n \limsup_p t_{pn}(Ax) + \inf_{z\in Z} \inf_n \liminf_p t_{pn}(Az) \leq W(x) . \qquad (3.6)$$

olmasını verir.

$Az \in V_\sigma$ ve $V_\sigma = Z + \{e\}$ (Mıshra, S.L. ve Satapathy,B., Communicated to Communication, Türkiye) olduğundan, $Az = \bar{z} + a.e$ yazarız. Böylece,

$$t_{pn}(Az) = t_{pn}(\bar{z}) + t_{pn}(ae)$$

olur. Bu, σ- regülerlikten

$$\liminf_p t_{pn}(Az) = \lim t_{pn}(\bar{z}) + \lim_p \sum_k a(p,n,k)$$

olmasını verir. Fakat, Z' nin tanımından $\lim t_{pn}(\bar{z}) = 0$ (n' e göre düzgün) ve

$$\lim_p \sum_k a(p,n,k) = 1$$

olduğundan,

$$\liminf t_{pn}(Az) = 1, \text{ (n' e göre düzgün)}$$

elde edilir. Bu (3.6)' da kullanılırsa,

$$V(Ax) + 1 \leq W(x)$$

ve böylece

$$V(Ax) \leq W(x)$$

olur. V(x) = W(x) (Devi, 1976) olduğundan, $V(Ax) \leq V(x)$ elde edilir. Bu da teoremin ispatını tamamlar, ([5], 1994).

3.4. σ- Çekirdekle İlgili Teoremlerin Genelleştirilmesi

Bu çalışmanın orijinal kısmı olan bu bölümde, 3.3' de verilen σ- çekirdekle ilgili teoremleri genelleştirdik.

Teorem 3.4.1 : B= (b_{nk}) normal bir matris olsun. A= (a_{nk}) herhangi bir matris olmak üzere ; Bx sınırlı olduğunda Ax mevcut, sınırlı ve

$$V(Ax) \leq L(Bx)$$

olması için gerek ve yeter şart ;

$$AB^{-1} \text{ mevcut}, \tag{4.1}$$

$$C \text{ ; } \sigma\text{-regüler ve } \sigma\text{-düzgün pozitif}, \tag{4.2}$$

$$\text{Her } n \text{ için } \lim_{i} \sum_{k=0}^{i} \left| \sum_{v=j+1}^{\infty} a_{nv}.b_{vk}^{-1} \right| = 0 \tag{4.3}$$

olmasıdır.

İspat : B= (b_{nk}) normal, A= (a_{nk}) herhangibir matris olsun. İspata geçmeden önce, B normal olduğundan her x için $(B_n x)$ dönüşüm dizisinin mevcut olduğunu ve dolayısıyla, y = Bx yazabileceğimizi belirtelim.

(Gereklilik) : y = Bx sınırlı olduğunda Ax mevcut, sınırlı ve V(Ax) ≤ L(Bx) sağlansın. Bx sınırlı olduğundan, her n için Lemma 3.1.3)' ün şartları sağlanır. Bu durumda, (4.1) ve (4.3) şartları sağlanır. Ayrıca, Lemma 3.1.3)' ün şartları sağlandığından $A_n x = C_n y$ yazabiliriz ($C = AB^{-1}$). O zaman,

$$V(Ax) \leq L(Bx) \Rightarrow V(Cy) \leq L(y)$$

olur. O hâlde, Teorem 3.3.1)' den (4.2)' nin gerekliliği de elde edilir.

Böylece, gereklilik ispatlanmış olur.

(Yeterlilik) : (4.1), (4.2) ve (4.3) sağlansın. (4.1)' den Lemma 3.1.3)' ün (1.4)' ü, (4.3)' den de Lemma 3.1.3)' ün (1.3)' ü elde edilir. Ayrıca, C' nin σ-regüler olmasından da Lemma 3.1.3)' ün (1.5)' i elde edilir. Böylece, Lemma 3.1.3)' ün bütün şartları sağlandığından, $A_n(x)$ mevcuttur ve $A_n x = C_n y$' dir. Cy sınırlı olduğundan Ax de sınırlıdır.

C ; σ-regüler ve σ- düzgün pozitif olduğundan, Teorem 3.3.1)' den

$$V(Cy) \leq L(y)$$

olur. O hâlde, yukarıdaki açıklamalardan

$$V(Ax) \leq L(Bx)$$

elde edilir.

Teorem 3.4.2 : $B=(b_{nk})$ normal bir matris olsun. $A=(a_{nk})$ herhangi bir matris olmak üzere ; Bx sınırlı olduğunda Ax mevcut, sınırlı ve

$$V(Ax) \leq V(Bx) \tag{4.4}$$

olması için gerek ve yeter şart ; (4.1), (4.3) ve

$$C\ ;\ V_\sigma\text{-regüler ve } \sigma\text{- düzgün pozitif}, \tag{4.5}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat: $B=(b_{nk})$ normal, $A=(a_{nk})$ herhangibir matris olsun.

(Gereklilik) : y = Bx alalım. Bx sınırlı olduğunda ; Ax mevcut, sınırlı olsun ve $V(Ax) \leq V(Bx)$ sağlansın.

Bx sınırlı iken Ax mevcut olduğundan , her n için Lemma 3.1.3)' ün şartları sağlanır. Bu durumda, $A_n x = C_n y$' dir ve A sınırlı olduğundan C de sınırlıdır. (4.1), Lemma 3.1.3)' ün (1.4)' ünden ; (4.2), Lemma 3.1.3)' ün (1.5)' inden elde edilir.

(4.4)' de y = Bx , Ax = Cy yazılırsa

$$V(Cy) \leq V(y)$$

olur ve böylece Teorem 3.3.2)' den (4.5) elde edilir.

Bu, gerekliliğin ispatını tamamlar.

(Yeterlilik) : (4.1), (4.2) ve (4.5) sağlansın. Bu durumda ; (4.1)' den Lemma 3.1.3)' ün (1.4)' ü, (4.2)' den Lemma 3.1.3)' ün (1.3)' ü elde edilir. C' nin V_σ - regüler olmasından da Lemma 3.1.3)' ün (1.5)' i sağlanır. Böylece, Ax mevcut olup Ax = Cy' dir.

(4.5) yardımıyla Teorem 3.3.2)' den,

$$V(Cy) \leq V(y)$$

olacağından, burada y = Bx , Ax = Cy yazılırsa

$$V(Ax) \leq V(Bx)$$

elde edilir.

Böylece, yeterlilik ispatlanmış olur.

Teorem 3.4.3: B normal, A satır- sonlu bir matris olsun. $\forall x \in m_B$ alındığında, *(4.4)' ün sağlanması için gerek ve yeter şart ; $C = AB^{-1}$ matrisinin V_σ -regüler ve σ- düzgün pozitif olmasıdır.*

İspat : B, normal bir matris olsun.

(Gereklilik) : A, satır- sonlu olmak üzere ; $\forall x \in m_B$ için $V(Ax) \leq V(Bx)$ sağlansın. A, satır- sonlu olduğundan her x için Ax mevcut olup Lemma 3.1.3)' ün şartları sağlanacağından Ax = Cy' dir.

(4.4)' den ,

$$-V(B(-x)) \leq -V(A(-x)) \leq V(Ax) \leq V(Bx)$$

yazarak y = Bx olduğu da dikkate alınırsa,

$$-V(-y) \leq -V(C(-y)) \leq V(Cx) \leq V(y)$$

olur. Teorem 3.3.1) ve Teorem 3.3.2)' de yapıldığı gibi, $\|y\| \leq 1$ alınırsa

$$V(Cy) \leq V(y) \leq 1$$

olacağından, Cy ve dolayısıyla da Ax sınırlıdır.

Böylece, $V(Cy) \leq V(y)$ olduğundan Teorem 3.3.2)' den C matrisi σ-regüler ve σ-düzgün pozitiftir.

(Yeterlilik) : A, satır- sonlu ve $C = AB^{-1}$ matrisi V_σ - regüler ve σ-düzgün pozitif olsun.

A satır- sonlu olduğundan, $\forall x$ için Ax mevcuttur ve böylece Lemma 3.1.3)' ün şartları sağlanır. Bu durumda, Ax = Cy yazılır.Teorem 3.3.2)' den,

$$V(Cy) \leq V(y)$$

olacağından, y = Bx alınarak

$$V(Ax) \leq V(Bx)$$

elde edilir.

Teorem 3.4.4 : A ve B birer normal matris olsunlar. O zaman, $\forall x \in m_A \cap m_B$ alındığında

$$V(Ax) = V(Bx)$$

olması için gerek ve yeter şart, $C = AB^{-1}$ ve $D = BA^{-1}$ matrislerinin V_σ -regüler ve

σ - düzgün pozitif olmalarıdır.

İspat : A ve B birer normal matris olsunlar.

(Gereklilik) : $\forall x \in m_A \cap m_B$ için $V(Ax)=V(Bx)$ olsun. A ve B normal olduklarından, aynı zamanda satır- sonludurlar. Ayrıca

$$V(Ax) = V(Bx)$$

ise,

$$V(Ax) \leq V(Bx) \text{ ve } V(Bx) \leq V(Ax)$$

dir. Buna göre;

B normal, A satır- sonlu ve her $x \in m_B$ için $V(Ax) \leq V(Bx)$ ise , Teorem 3.4.3)' den $C = AB^{-1}$ matrisi V_σ - regüler ve σ - düzgün pozitiftir ,

A normal, B satır- sonlu bir matris ve her $x \in m_A$ için $V(Bx) \leq V(Ax)$ ise , Teorem 3.4.3)' den $D = BA^{-1}$ V_σ -regüler ve σ-düzgün pozitiftir. Böylece, gereklilik ispatlanmış oldu.

(Yeterlilik) : $C = AB^{-1}$ ve $D = BA^{-1}$ matrisleri V_σ - regüler ve σ - düzgün pozitif olsunlar. Bu durumda ;

$C = AB^{-1}$ matrisi V_σ -regüler ve σ -düzgün pozitif ise, Teorem 3.4.3)' den

$$V(Ax) \leq V(Bx) \tag{4.6}$$

dir.

$D = BA^{-1}$matrisi V_σ -regüler ve σ -düzgün pozitif ise, Teorem 3.4.3)' den

$$V(Bx) \leq V(Ax) \tag{4.7}$$

dir.

Böylece, (4.6) ve (4.7)' den

$$V(Ax) = V(Bx)$$

olur ki yeterlilik ispatlanmış olur.

Teorem 3.4.5: m üzerinde, $V(A) \leq v(B)$ olması için gerek ve yeter şart $B \in (m, V_\sigma)$ olması ve n' e göre düzgün olarak,

$$\lim_{q}\sum_{k}\frac{1}{q+1}\left|\sum_{i=0}^{q}(a_{\sigma^i(n)}-b_{\sigma^i(n)})\right|=0$$

sağlanmasıdır (Burada, v(Bx) = - V(B(-x)) ' dir).

İspat (Gereklilik) : m üzerinde, $V(A) \le v(B)$ olsun. O zaman, her $x \in m$ için bu sağlanacağından $-x \in m$ için de sağlanır. Bu durumda,

$$V(A(-x)) \le v(B(-x))$$

olur. Buradan,

$$-v(B(-x)) \le -V(A(-x)) \Rightarrow V(B(x)) \le v(A(x))$$

elde edilir. Herzaman $v(Bx) \le V(B(x))$ olduğundan,

$$VA(x) \le vB(x) \le V(B(x)) \le v(A(x))$$

olur. Yine herzaman $vA(x) \le VA(x)$ sağlandığından,

$$VA(x) = vB(x) = V(B(x)) = v(A(x)) \tag{4.8}$$

olmalıdır. Bu ise, $B \in (m, V_\sigma)$ olmasıdır.

Ayrıca, (4.8)' den σ-lim $(A-B)x = 0$ elde edilir. Her n, k için

$$C=(c_{nk})=(a_{nk}-b_{nk})$$

denilirse, $C \in (m, V_{0\sigma})$ olur ve Teorem 1.3.11)' den

$$\lim_{q}\sum_{k}\frac{1}{q+1}\left|\sum_{i=0}^{q}c_{\sigma^i(n)}\right|=0 \text{ , n' e göre düzgün}$$

elde edilir.

(Yeterlilik) : $B \in (m, V_\sigma)$ olsun ve n' e göre düzgün olarak,

$$\lim_{q}\sum_{k}\frac{1}{q+1}\left|\sum_{i=0}^{q}(a_{\sigma^i(n)}-b_{\sigma^i(n)})\right|=0$$

sağlansın.

Bu durumda, Teorem 1.3.11)' den $(A-B) \in (m, V_{0\sigma})$ olur. Böylece her $x \in m$ için σ-lim $(A-B)x = 0$ olur. $B \in (m, V_{0\sigma})$ olduğundan A da $\in (m, V_{0\sigma})$' dır.

Üstelik, her $x \in m$ için

$$\sigma\text{-lim } Bx = \sigma\text{-lim } Ax$$

dir. Buna göre,

$$v(Bx) = V(Bx) = v(Ax) = V(Ax)$$

olup, dolayısıyla $V(Ax) \leq v(Bx)$ ' dir. Her $x \in m$ için bu sağlanacağından , $V(A) \leq v(B)$' dir.

Teorem 3.4.6 : B matrisi V_σ-regüler ve σ-düzgün pozitif olsun. O zaman,

$$V(A) \leq v(B) \tag{4.9}$$

olacak şekilde hiçbir A matrisi yoktur.

İspat : (4.9)' u gerçekleyen bir A matrisi bulunduğunu kabul edelim.

B' nin V_σ - regüler ve σ-düzgün pozitif olmasından ve Teorem 3.3.2)' den,

$$V(Bx) \leq V(x)$$

olur. (4.9) ile birlikte,

$$V(A) \leq v(B) \leq V(B) \leq V \Rightarrow V(A) \leq V$$

elde edilir ki, Teorem 3.3.2)' den A V_σ - regülerdir.

Ayrıca; $(m,V_\sigma)\cap(c,V_\sigma)_{reg}=\emptyset$ olup, $(V_\sigma,V_\sigma)_{reg} \subset (c,V_\sigma)_{reg}$ olduğundan $(m,V_\sigma)\cap(V_\sigma, V_\sigma)_{reg} = \emptyset$ bulunur. O hâ lde, σ-lim Az mevcut olmayacak şekilde en az bir $z \in m$ vardır. Bu durumda,

$$v(Az) < V(Az)$$

olup,

$$v(Bz) \leq v(Az)$$

elde edilir. Bu iki eşitsizlikten,

$$v(Bz) < V(Az)$$

olur. (4.9) ile birlikte $v(Bz) < v(Bz)$ elde edilir ki bu bir çelişkidir.

O hâ lde, (4.9)' u sağlayan hiçbir A matrisi yoktur.

KAYNAKLAR

[1] COOKE, R. G. Infinite Matrices and Sequence Spaces, Macmil Macmillan and co. limited, (London-1950).

[2] MADDOX, I. J. , Elements of Functional Analysis, Cambridge University Press, (1970).

[3] PETERSEN, G. M., Regular Matrix Transformation Mc.Graw-Hill, New-York-Toronto-Sidney, (1966).

[4] PROTTER, M. H./ MORREY, C. M. , A First Course in Reel Analysis, Berlin, (1977).

[5] MISHRA, S. /SATAPATHY, B. /RATH, N., Invariant Means and σ-Core, Jour. Indian Math. Soci., **60** (1994) 151-158.

[6] COŞKUN, H., Invariant Means and Dual Summability Methods, (yazışmada).

[7] CHOUDHARY, B., An Extension of Knopp's Core Theorem. J. Math. Analy. and Appl., **132**(1988), 226-233.

[8] DAS, G., Sublineer Functionals and a Class of Conservative Matrices, Bull.Inst. Math. Acad. Sinica, **15**(1987), 89-106.

[9] DEVI, S., Banach Limits and Infinite Matrices, J. Lon. Math. Soci., **12**(1976), 397-401.

[10] DURAN, J. E., Infinite Matrices and Almost Convergence, Math. Zeit, **128** (1972), 75-83.

[11] MADDOX, I. J., Some Analogues of Knopp's Core Theorem, İnternet.J.Math. and Math. Sci., vol. **2** No. 4 (1979) 605-614

[12] SIMONS, S., Banach Limits, Infinite Matrices and Sublineer Functionals, J. Math. Anal. and Appl., **26**(1969), 640-655.

[13] ORHAN, C., Sublineer Functional and Knopp's Core Th. Internat. J. Math. and Math. Sci. **3**(1990), 461-468

[14] YARDIMCI, Ş., Reel Terimli Sınırlı Diziler İçin Çekirdek Teoremleri

(Doktora Tezi), Ankara Üniv. Fen Bil. Enst., 1993

[15] LORENTZ, G.G., A Contribution to Theory of Divergent Sequences. Acta Math, **80**(1948), 167-190

[16] KING, J.P., Almost Summable Sequence. Proc. Amer. Math. Soc.., **26**(1972), 75-83

[17] SCHAEFER, P. , Infinite Matrices and Invariant Means, Proc. of the Amer. Math. Soc., **36**(1972), 104-110

ÖZGEÇMİŞ

20. 06. 1974 tarihinde Malatya' nın Kale İlçesi Tepebaşı Köyü ' nde doğdu. İlk ve orta öğrenimini burada tamamladıktan sonra, merkez H. A. Akıncı Lisesi ' nden 1991 yılında mezun oldu. Aynı yıl, İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü ' nde okumaya hak kazandı. 1995 yılında bu bölümden mezun oldu ve aynı bölümde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevini sürdürmektedir.