İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KONVOLÜSYON ÇEKİRDEKLİ VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ

İSMET ÖZDEMİR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
1998

" Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne "

İşbu çalışma jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Rifat ÇOLAK
Başkan

Prof. Dr. Feyzi BAŞAR
Üye

Yrd. Doç. Dr. Ö. Faruk TEMİZER
Üye

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..../..../....

Prof. Dr. Eşref YÜKSEL
Enstitü Müdürü

ÖZET

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümü üç kısma ayrılmış olup, birinci kısımda çalışmamız için gerekli olan tanımlar verildi. İkinci kısımda ikinci tip lineer Volterra integral denkleminin ardışık çekirdeklerinin sağladığı bazı özellikler ; "Ardışık yaklaştırma" ve "Çözücü çekirdek" adıyla bilinen çözüm metodları, çekirdek ile çözücü çekirdek arasındaki bağıntı verilip bazı sonuçlar sunuldu. Üçüncü kısımda ise konvolüsyon çekirdekli ikinci tip lineer olmayan Volterra integral denkleminin çözümüne ilişkin varlık ve teklik teoremleri verilerek, konvolüsyon çekirdekli ikinci tip lineer Volterra integral denkleminin çözümünü birim kaynaklı yardımcı bir denklemin çözümü yardımıyla vermeye ilişkin Konvolüsyon Teoremi verildi.

İkinci bölümde Özdeşlik Teoreminin kullanılmasıyla birim kaynaklı, konvolüsyon çekirdekli ikinci tip lineer Volterra integral denkleminin çözümünü elde etmeksizin çözümün bir takım özellikleri elde edildi. Daha sonra birim kaynaklı olmayan konvolüsyon çekirdekli ikinci tip lineer ve lineer olmayan Volterra integral denkleminin çözümüne ilişkin bazı özellikler elde edildi.

Tezin orijinal kısmını oluşturan üçüncü bölümde ise çözülemeyen ya da çözümü zor ve uzun olan konvolüsyon çekirdekli ikinci tip lineer ve lineer olmayan Volterra integral denkleminin çözümünü elde etmeden çözümün işareti ve monotonluğu hakkında bilgi elde edilerek çözüm için sınır bulundu.

ANAHTAR KELİMELER : İntegral denklemler, Volterra integral denklemleri, konvolüsyon çekirdek, ardışık çekirdek

ABSTRACT

The first chapter of this study consisting of three chapters has three sections. In the first section, necessary definitions for the study are given, in the second section, some properties supplied by iterated kernels of second type linear Volterra integral equations are given; using the methods of "Succesive approximation" and "Resolvent kernel", the relation between the kernel and resolvent kernel is given and some results are presented. In the third section, existence and uniqueness theorems related to the solution of second type non-linear Volterra integral equation with convolution kernel are given, the solution of second type linear Volterra integral equation with convolution kernel was given by using an auxiliary equation with unit source. Also the Convolution Theorem was given.

In the second chapter by using Equivalence Theorem, some properties of the solution are taken without getting the solution of second type linear Volterra integral equation with convolution kernel and with unit source. Afterwards some properties related to the solution of second type linear and non-linear Volterra integral equation with non-unit source and with convolution kernel are taken.

In the third chapter which forms the original parts of the thesis, without getting the solution of second type linear and non-linear Volterra integral equation with convolution kernel, whose solution is long and difficult or not possible the knowledge about sign and monotonicity of the solution was taken and the bound for the solution was found.

KEY WORDS : Integral equations, Volterra integral equations,
convolution kernel, iterated kernels

GÖSTERİMLER

$\lvert . \rvert$	: Mutlak Değer
L_2	: Karesi integrallenebilen fonksiyonlar sınıfı.
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi.
$C^n[0,\infty)$	: $[0,\infty)$ da n. ($n\in\mathbb{N}$) mertebeden türevi mevcut ve sürekli olan fonksiyonlar sınıfı.
$*$	: Konvolüsyon işlemi.
$K(x,y)$	: Çekirdek fonksiyonu.
$K_n(x,y)$	: n. ($n\in\mathbb{N}$) ardışık çekirdek.
$R(x,y;\lambda)$	: λ parametresine karşılık gelen çözücü çekirdek.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmayı bana vererek çalışmalarım süresince yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen hocam, sayın Yrd. Doç. Dr. Ö. Faruk TEMİZER'e teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İsmet ÖZDEMİR

İÇİNDEKİLER

ÖZET

ABSTRACT

GÖSTERİMLER

TEŞEKKÜR

İÇİNDEKİLER

1. BÖLÜM

GİRİŞ

TEMEL TANIM ve TEOREMLER

1.1. Temel Tanımlar 1

1.2. Volterra İntegral Denklemleri 4

1.3. Konvolüsyon Çekirdekli Volterra İntegral Denklemleri 7

2. BÖLÜM

KONVOLÜSYON ÇEKİRDEKLİ VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ

2.1. Özdeşlik Denklemi 11

2.2. Konvolüsyon Çekirdekli Lineer Volterra İntegral Denklemleri 16

2.3. Konvolüsyon Çekirdekli Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemleri 39

3. BÖLÜM

KONVOLÜSYON ÇEKİRDEKLİ İKİNCİ TİP VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ

3.1. Konvolüsyon Çekirdekli İkinci Tip Lineer OlmayanVolterra İntegral Denklemleri 52

3.2. Konvolüsyon Çekirdekli İkinci Tip Lineer Volterra İntegral Denklemleri 56

KAYNAKLAR

ÖZGEÇMİŞ

1. BÖLÜM

GİRİŞ

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümleri anlayabilmek için integral denklemlere ilişkin bazı temel kavramlar verildi.

1.1. Temel Tanımlar

Tanım 1.1.1. İntegral işareti altında bilinmeyen bir fonksiyonu ihtiva eden denklemlere **integral denklemler** adı verilir.

Tanım 1.1.2.

$$\psi(x)f(x)=\phi(x)+\lambda\int_a^b K(x,y)f(y)dy$$

formunda verilen bir integral denklemde a ve b birer sabit sayı, λ bir parametre ψ, ϕ ve K tanım bölgesi $a \leq x \leq b$ ve $a \leq y \leq b$ olmak üzere bilinen fonksiyonlar, f ise **bilinmeyen fonksiyondur.** Özel olarak ϕ'ye integral denklemin **kaynak terimi**, K'ya da integral denklemin **çekirdeği** denir (Lovitt, 1950).

Tanım 1.1.3. Bir integral denklemde bilinmeyen fonksiyon; integralin sadece içinde ise denkleme **birinci tip integral denklem,** hem içinde hem de dışında ise denkleme **ikinci tip integral denklem** adı verilir. Ayrıca ikinci tip bir integral denklemde integralin dışında kalan bilinmeyen fonksiyon herhangi bir fonksiyonla çarpılmışsa bu denkleme de **üçüncü tip integral denklem** denir (Lovitt, 1950). Bu tip denklemlere örnek olarak sırasıyla;

$$\phi(x)=\int_a^x K(x,y)f(y)dy\,,$$

$$f(x) = \phi(x) + \int_a^x K(x,y)f(y)dy,$$

$$f(x)\psi(x) = \phi(x) + \int_a^x K(x,y)f(y)dy.$$

denklemlerini verebiliriz.

Tanım 1.1.4. Bir integral denklemde bilinmeyen fonksiyonun sadece birinci kuvveti ihtiva ediliyorsa bu integral denkleme **lineer,** aksi halde **lineer olmayan integral denklem** adı verilir.

Tanım 1.1.5. Bir integral denklemde, K(x, y) çekirdeği sadece (x-y) farkına bağlı yani (x-y)'yi değişken kabul eden tek değişkenli bir fonksiyon ise bu integral denkleme **konvolüsyon çekirdekli integral denklem** denir (Zabreyko, 1975).

Tanım 1.1.6. Aşağıda verilen

$$f(x)=\int_a^x K(x,y)f(y)dy$$

$$f(x)=\phi(x) + \int_a^x K(x,y)f(y)dy$$

integral denklemlerinde olduğu gibi, integralin dışında ve bilinmeyen f fonksiyonunun haricinde ϕ gibi bir fonksiyonu bulunduran denkleme **homojen olmayan,** böyle bir ϕ fonksiyonunu bulundurmayan denkleme de **homojen integral denklem** adı verilir (Moiseiwitsch, 1977).

Tanım 1.1.7. Bir integral denklemde integralin sınırlarından biri x gibi bir değişkense bu denkleme **Volterra integral denklemi** adı verilir. İntegral sınırlarından her ikisi birden sabit olabileceği gibi biri sabitken diğerinin sonsuz ya da her iki sınırı sonsuz olan denklemlere de **Fredholm integral denklemi** adı verilir. Örneğin,

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^x K(x,y) f(y) dy ,$$

bir Volterra integral denklemi ve

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^b K(x,y) f(y) dy$$

ise bir Fredholm integral denklemidir. Her iki denklemde de f bilinmeyen, K çekirdek, ϕ ise kaynak terimdir.

Bu tanıma göre Fredholm integral denklemine ait çekirdek; $\{(x, y): a \le x \le b, a \le y \le b\}$ karesel bölge üzerinde, Volterra integral denklemine ait çekirdek ise $\{(x, y): a \le y \le x \le b\}$ üçgensel bölgede tanımlanmıştır. Dolayısıyla Volterra integral denklemi tanıtılırken;
" Çekirdeği $y > x$ iken $K(x, y) \equiv 0$ şartını sağlayan denklem " olarak da verilmektedir (Zabreyko, 1975).

Tanım 1.1.8. Bir f fonksiyonunun

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx < \infty$$

eşitsizliğini sağlaması halinde (yani integral değeri mevcut ve sonlu ise) f fonksiyonuna bir **L_2 fonksiyonu** denir (Kanwal, 1971).

Tanım 1.1.9. $\{(x, y): a \le x \le b, a \le y \le b\}$ karesel bölgesinde tanımlı K fonksiyonunun,

i) $\forall$ x, y $\in [a, b]$ için $\int_a^b \int_a^b |K(x,y)|^2 dx dy < \infty$,

ii) $\forall$ y $\in [a, b]$ için $\int_a^b |K(x,y)|^2 dx < \infty$ ve

iii) $\forall\ x \in [a, b]$ için $\int_a^b |K(x, y)|^2 dy < \infty$

şartlarını sağlaması halinde K fonksiyonuna bir **L_2 çekirdeği** denir, bu şartlara da **regülerlik şartları** adı verilir (Kanwal, 1971).

Tanım 1.1.10. Bir f fonksiyonu ölçülebilir ve $\mathbb{R}$'nin her K kompakt alt cümlesi için $\int_K |f| < \infty$ ise bu f fonksiyonuna **lokal integrallenebilirdir** denir (Rudin, 1973).

Tanım 1.1.11. Herhangi iki lineer Volterra integral denkleminin çözümü aynı ise bu iki denkleme **özdeştir** denir.

1.2. Volterra İntegral Denklemleri

Çekirdeği $y > x$ için $K(x, y) \equiv 0$ şartını sağlayan

$$\int_a^x K(x,y) f(y) dy = \phi(x),$$

$$f(x) = \phi(x) + \lambda \int_a^x K(x,y) f(y) dy$$

denklemlerine, sırasıyla, birinci ve ikinci tipten lineer Volterra integral denklemleri adı verilir.

$K_1(x, y) = K(x, y)$ olmak üzere;

$$K_{n+1}(x, y) = \int_a^x K(x,z) K_n(z,y) dz, \ (n=1, 2, 3, ...)$$

şeklindeki bağıntıyla elde edilen K_1, K_2, K_3, ... çekirdeklerine **ardışık çekirdekler** adı verilir. Ele aldığımız Volterra integral denkleminin çekirdeği $y > x$ iken $K(x,y) \equiv 0$ şartını sağlayan karesi integrallenebilen bir çekirdek olsun. Bu temel hipotez altında ardışık çekirdekler aşağıdaki özellikleri sağlar :

1) $y > x$ ise $K(x, y) \equiv 0$

2) $\int_a^x K(x,z)K_n(z,y)dz = \int_y^x K(x,z)K_n(z,y)dz$, $(n=1, 2, 3, ...)$

3) $\int_a^x K(x,z)K_n(z,y)dz = \int_a^x K_n(x,z)K(z,y)dz$, $(n=1, 2, 3, ...)$

4) $K_{n+1}(x, y) = \int_a^x K_r(x,z)K_s(z,y)dz$, $(r=1, 2, 3, ..., n;\ s+r = n+1)$

5) $\int_a^x K_r(x,z)K_s(z,y)dz = \int_a^x K_s(x,z)K_r(z,y)dz$,$(r=1, 2, 3, ..., n;\ s+r = n+1)$

6) $\psi_0(x)=\phi(x)$ olsun. Bu taktirde;

$$\psi_n(x)=\int_a^x K_n(x,y)\phi(y)dy, \quad (n=1, 2, 3, ...) \tag{1.1}$$

eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\psi_n(x)=\int_a^x K(x,y)\,\psi_{n-1}(y)dy, \quad (n=1, 2, 3, ...) \tag{1.2}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 1.2.1. İkinci tip lineer Volterra integral denklemi olarak bilinen

$$f(x) = \phi(x) + \lambda\int_a^x K(x,y)f(y)dy \tag{1.3}$$

denkleminde ϕ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında, K fonksiyonu da $a \le y \le x \le b$ üçgensel bölgede sürekli olsunlar. Bu taktirde ;

$$\psi_0(x) = \phi(x),\ \psi_n(x)=\int_a^x K(x,y)\,\psi_{n-1}(y)dy, \quad (n=1, 2, 3,...) \tag{1.4}$$

olmak üzere (1.3) denkleminin düzgün (ve mutlak) yakınsak

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\psi_n(x) \tag{1.5}$$

serisi ile verilen birtek f sürekli çözümü vardır (Bu seriye **Neumann Serisi** ve çözümün bu şekilde bulunmasına da **ardışık yaklaştırma metodu** adı verilir) (Davis, 1930).

Teorem 1.2.2. Eğer ϕ fonksiyonu [a,b] aralığında K fonksiyonu da $a \leq y \leq x \leq b$ üçgensel bölgesi üzerinde sürekli ise

$$f(x) = \phi(x) + \lambda\int_a^x K(x,y)f(y)dy$$

denkleminin f(x) çözümü birtek ve sürekli olup bu çözüm :

$R(x, y; \lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K_n(x,y)$ olmak üzere;

$f(x) = \phi(x) + \int_a^x R(x,y;\lambda)\,\phi(y)dy$ formunda verilebilir.

Buradaki R(x, y; λ)'ya **çözücü çekirdek** ve çözümün bu şekilde verilmesine ise **çözücü çekirdek metodu** adı verilir (Tricomi, 1957).

Teorem 1.2.3. K çekirdeği ve ϕ fonksiyonu L_2 sınıfından olsun. Bu taktirde

$$R(x, y; \lambda)=\sum_{n=1}^{\infty}\lambda^n K_n(x,y),$$

ardışık çekirdeklerin oluşturduğu çözücü çekirdek olmak üzere ;

1) Bu seri hemen hemen heryerde yakınsaktır.

2) Çözücü çekirdek

$$R(x, y; \lambda) = \lambda K(x,y) + \lambda\int_a^x K(x,z)R(z,y;\lambda)dz$$

$$= \lambda K(x,y) + \lambda\int_a^x R(x,z;\lambda)K(z,y)dz$$

integral denklemini sağlar.

$$3)\ f(x)=\phi(x)+\lambda\int_a^x K(x,y)f(y)dy \quad (a \le x \le b)$$

ikinci tip lineer Volterra integral denkleminin yine L_2 sınıfından olan bir ve yalnız bir çözümü vardır ve bu çözüm

$$f(x)=\phi(x)+\int_a^x R(x,y;\lambda)\phi(y)dy$$

formülüyle verilir (Çözücü çekirdek metodu) (Tricomi, 1957).

4) Söz konusu olan integral denklemin çözümünü

$$\psi_0(x) = \phi(x)\,,\ \psi_n(x)=\int_a^x K(x,y)\,\psi_{n-1}(y)dy\,,\ (n=1,\,2,\,3,\,...) \qquad (1.6)$$

olmak üzere

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n\psi_n(x) \qquad (1.7)$$

biçiminde de yazabiliriz (Ardışık yaklaştırma metodu) (Tricomi, 1957).

Sonuç 1.2.1. İkinci tip lineer Volterra integral denkleminde, paremetre ve çekirdek aynı işaretliyken; kaynak terim pozitif ise çözüm pozitif, kaynak terim negatif ise çözüm negatiftir (Ling, 1978).

1.3. Konvolüsyon Çekirdekli Volterra İntegral Denklemleri

Bu kısımda

$$f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)G\left[f(\tau),\tau\right]d\tau \qquad (1.8)$$

formunda verilen konvolüsyon çekirdekli ikinci tip lineer olmayan Volterra integral denkleminin çözümü için varlık ve teklik teoremleri verildi. Daha sonra ikinci tip lineer Volterra integral denkleminin çözümü Konvolüsyon Teoremi yardımıyla verildi.

Teorem 1.3.1.

a) Eğer

1) $0 \le t < \infty$ için $\phi(t)$ sürekli,

2) $-\infty < x < \infty$, $0 \le t < \infty$ için $G(x, t)$ sürekli,

3) $0 < t < \infty$ için $K(t)$ sürekli ve $K \in L(0,1)$ yani $\int_0^1 |K(t)| dt < \infty$

şartları sağlanıyorsa o zaman (1.8)'in bazı $T > 0$ ve $0 \le t \le T$ için bir sürekli çözümü vardır.

b) Yukarıdaki şartlara ilâveten eğer $G(x,t)$, sınırlı cümlelerde, t'ye göre düzgün ve x'e göre lokal Lipschitz sürekli ise o zaman (1.8)'in çözümü tektir (Ling, 1978).

Teorem 1.3.2. Teorem 1.3.1.'deki şartlara ilâveten herhangi bir $T > 0$ ve $0 \le t \le T$ aralığında (1.8)'in herhangi bir f(t) çözümü için, $|f(t)| \le M$ (Burada M, f(t) özel çözümünden ve T'den bağımsızdır) eşitsizliği sağlanırsa o zaman (1.8)'in $0 \le t < \infty$ da birtek çözümü vardır (Ling, 1978).

Konvolüsyon çekirdekli ikinci tip lineer Volterra integral denklemi olarak bilinen

$$f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau) f(\tau) d\tau = \phi(t) - K * f \qquad (1.9)$$

denkleminin çözümü olan f fonksiyonu birim kaynaklı

$$g(t) = 1 - \int_0^t K(t-\tau) g(\tau) d\tau = 1 - K * g \qquad (1.10)$$

integral denkleminin çözümü olan g fonksiyonu yardımıyla verilebilir (Burada $*$'a **konvolüsyon işlemi** adı verilir). Şimdi buna ilişkin aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 1.3.3. (Konvolüsyon Teoremi) $0 < T < \infty$ olmak üzere eğer $[0,T]$ aralığında:

1) $\phi'(t)$ mevcut, $\int_0^T |\phi'(t)| dt < \infty$ ve

2) $\int_0^T |K(t)| dt < \infty$

oluyorsa bu taktirde (1.9) denkleminin çözümü (1.10)'daki g fonksiyonu yardımıyla

$$f(t) = g(t)\,\phi(0) + \int_0^t g(t-\tau)\phi'(\tau)d\tau = g(t)\phi(0) + g * \phi' \tag{1.11}$$

şeklinde verilebilir (Bellman, 1963).

İspat. (1.11)'den elde edilen

$$\int_0^t f(t-\tau)K(\tau)d\tau = \phi(0)\int_0^t g(t-\tau)K(\tau)d\tau + \int_0^t \left[\int_0^{t-\tau} g(t-\tau-\tau_1)\phi'(\tau_1)d\tau_1\right]K(\tau)d\tau$$

bağıntısının son terimi

$$\int_0^t \left[\int_0^{t-\tau} g(t-\tau-\tau_1)\phi'(\tau_1)\,d\tau_1\right]K(\tau)d\tau = \int_0^t \left[\int_0^{t-\tau_1} g(t-\tau_1-\tau)K(\tau)d\tau\right]\phi'(\tau_1)d\tau_1$$

şeklindedir. Bunu yerine yazıp (1.10) kullanılırsa

$$\int_0^t f(t-\tau)K(\tau)d\tau = \phi(0)\int_0^t g(t-\tau)K(\tau)d\tau + \int_0^t \left[\int_0^{t-\tau_1} g(t-\tau_1-\tau)K(\tau)d\tau\right]\phi'(\tau_1)d\tau_1$$

$$= \phi(0)[1-g(t)] + \int_0^t [1-g(t-\tau_1)]\phi'(\tau_1)d\tau_1$$

$$= \phi(0) - \phi(0)g(t) + \int_0^t \phi'(\tau)d\tau - \int_0^t g(t-\tau_1)\phi'(\tau_1)d\tau_1$$

$$= \phi(0) - \phi(0)g(t) + \phi(t) - \phi(0) - \int_0^t g(t-\tau_1)\phi'(\tau_1)d\tau_1$$

$$= \phi(t) - \left[g(t)\phi(0) + \int_0^t g(t-\tau_1)\phi'(\tau_1)d\tau_1\right]$$

$$= \phi(t) - f(t)$$

$$\Rightarrow \int_0^t f(t-\tau)K(\tau)d\tau = \phi(t) - f(t)$$

$$\Rightarrow \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau = \phi(t) - f(t)$$

veya

$$f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

(1.9) denklemi elde edilir. O halde (1.10) yardımıyla verilen (1.11), (1.9)'un çözümüdür.

2. BÖLÜM

KONVOLÜSYON ÇEKİRDEKLİ VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ

Bu bölümde bilinmeyeni f olan $f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau$ denklemiyle özdeş (aynı çözüme sahip) olan yeni bir denklem elde etmenin yolu Özdeşlik Teoremi yardımıyla verildi. Daha sonra $f(t)=1-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau$ formundaki denklemin çözümü olan f fonksiyonunun bazı özellikleri elde edildi.

2.1. Özdeşlik Denklemi

Teorem 2.1.1. (Özdeşlik Teoremi)

1) $K\in C^1[0,\infty)$

2) $[0,\infty)$ aralığında ϕ lokal integrallenebilir olsun.

Ayrıca g fonksiyonu; $g\in C^1[0,\infty)$, g(0)=1 olacak şekilde herhangi bir fonksiyon ve K(0)=a ise

$$\psi(t)=\phi(t)+\int_0^t g'(t-\tau)\phi(\tau)d\tau \tag{2.1}$$

$$L(t)=g'(t)+ag(t)+\int_0^t g(t-\tau)K'(\tau)d\tau \tag{2.2}$$

olmak üzere aşağıdaki iki integral denklem özdeştir :

$$f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{2.3}$$

$$f(t)=\psi(t)-\int_0^t L(t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{2.4}$$

(Ling, 1978).

İspat. f(t)'nin (2.4)'ü sağladığını kabul edelim. g(t)=1 alındığında

$\psi(t) = \phi(t)$

$L(t) = a + \int_0^t K'(\tau)d\tau = a + K(t) - K(0) = K(t)$ bulunur ki bu durum f(t)'nin (2.3)'ü de sağladığını gösterir.

Aksine bu defa f(t), (2.3)'ü sağlasın. Öncelikle

$$L(t) = g'(t) + a\,g(t) + \int_0^t g(t-\tau)K'(\tau)d\tau$$

$$= g'(t) + ag(t) + g(t-\tau)K(\tau)\Big|_0^t + \int_0^t g'(t-\tau)K(\tau)d\tau$$

$$= g'(t) + ag(t) + g(0)K(t) - g(t)K(0) + \int_0^t g'(t-\tau)K(\tau)d\tau$$

$$= g'(t) + K(t) + \int_0^t g'(t-\tau)K(\tau)d\tau$$

dır. Buna göre

$$\int_0^t L(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t g'(t-\tau)f(\tau)d\tau + \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

$$+ \int_0^t \left[\int_0^{t-\tau} g'(t-\tau-s)K(s)ds\right] f(\tau)d\tau$$

olup (2.3)'den;

$$\int_0^t L(t-\tau)f(\tau)d\tau = \int_0^t g'(t-\tau)\,f(\tau)d\tau + \phi(t) - f(t) + \int_0^t \left[\int_0^{t-\tau} g'(t-\tau-s)K(s)ds\right] f(\tau)d\tau$$

olur. Buradaki son terimde $\tau + s = r$ dönüşümü yapılırsa;

$$\int_0^t \left[\int_0^{t-\tau} g'(t-\tau-s)K(s)ds\right] f(\tau)d\tau = \int_0^t \left[\int_\tau^t g'(t-r)K(r-\tau)dr\right] f(\tau)d\tau$$

$$= \int_0^t \left[\int_0^r K(r-\tau)f(\tau)d\tau\right] g'(t-r)dr$$

$$= \int_0^t \left[\phi(r) - f(r)\right] g'(t-r)dr$$

$$=\int_0^t g'(t-r)\phi(r)dr-\int_0^t g'(t-r)f(r)dr$$

$$=\int_0^t g'(t-\tau)\phi(\tau)d\tau-\int_0^t g'(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

olur. Bu ifade yerine yazılırsa;

$$\int_0^t L(t-\tau)f(\tau)d\tau=\int_0^t g'(t-\tau)f(\tau)d\tau+\phi(t)-f(t)+\int_0^t g'(t-\tau)\phi(\tau)d\tau$$

$$-\int_0^t g'(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

$$=\phi(t)-f(t)+\int_0^t g'(t-\tau)\phi(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow f(t)=\phi(t)+\int_0^t g'(t-\tau)\phi(\tau)d\tau-\int_0^t L(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow f(t)=\psi(t)-\int_0^t L(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

elde edilir ki bu da f(t)'nin (2.4)'ü sağladığını gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Lemma 2.1.1. Teorem 2.1.1'deki $g(t)=\exp\left(-\int_0^t K(\tau)d\tau\right)$ olsun. Eğer $K(t)>0$ ve $\int_0^\infty K(t)dt<\infty$ ise o zaman $\left|\int_0^\infty L(t)dt\right|<1$ dir.

İspat. $\int_0^\infty K(t)dt=A$ diyelim. Bu durumda; $g(\infty)=e^{-A}$ dır.

Teorem 2.1.1'den;

$$L(t)=g'(t)+a\,g(t)+\int_0^t g(t-\tau)K'(\tau)d\tau$$

$$=g'(t)+K(t)+\int_0^t g'(t-\tau)K(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow\int_0^T L(t)dt=g(T)-g(0)+\int_0^T K(\tau)d\tau+\int_0^T\left[\int_0^t g'(t-\tau)K(\tau)d\tau\right]dt$$

olur. Buradaki son terim

$$\int_0^T\left[\int_0^t g'(t-\tau)K(\tau)d\tau\right]dt=\int_0^T\left[\int_\tau^T g'(t-\tau)dt\right]K(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^T\left(g(t-\tau)\Big|_{t=\tau}^T\right)K(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^T\left[g(T-\tau)-g(0)\right]K(\tau)d\tau$$

$$=\int_0^T\left[g(T-\tau)-1\right]K(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow\int_0^T L(t)dt=g(T)-1+\int_0^T K(\tau)d\tau+\int_0^T\left[g(T-\tau)-1\right]K(\tau)d\tau$$

$$=g(T)-1+\int_0^T g(T-\tau)K(\tau)d\tau$$

olur. $g(\infty)=e^{-A}$ olduğu gözönünde tutularak

$$\Rightarrow\int_0^\infty L(t)dt=e^{-A}-1+\int_0^\infty g(\infty)K(\tau)d\tau$$

$$=e^{-A}-1+e^{-A}\int_0^\infty K(\tau)d\tau$$

$$\Rightarrow\int_0^\infty L(t)dt=(1+A)e^{-A}-1.$$

$\forall\ A\in\mathbb{R}$ için $e^A>1+A$ ve dolayısıyla $0<\frac{1+A}{e^A}<1$ olduğundan $\left|\int_0^\infty L(t)dt\right|<1$

sonucu elde edilir.

Teorem 2.1.2. Eğer

1) $(0,\infty)$ aralığında $K(t) > 0$ ve $K(0)$ sonlu,

2) $(0,\infty)$ aralığında $K'(t) < 0$

şartları sağlanıyorsa, bu taktirde;

$$f(t) = 1 - \int_0^t K(t-\tau) f(\tau) d\tau \tag{2.5}$$

denkleminin çözümü olan f fonksiyonu $0 \leq t < \infty$ için $0 < f(t) \leq 1$ bağıntısını sağlar (Ling, 1978).

İspat. Bir önceki özdeşlik teoremine göre g keyfi fonksiyonunu $g(t) = e^{-\int_0^t K(\tau)d\tau}$ şeklinde seçelim. Buna göre (2.5)'in özdeşi olan denklem

$$\begin{aligned}\psi(t) = \phi(t) + \int_0^t g'(t-\tau)\phi(\tau)d\tau &= 1 + \int_0^t g'(t-\tau)d\tau \\ &= 1 + \int_0^t g'(u)du \\ &= 1 + g(t) - g(0) \\ &= g(t)\end{aligned}$$

ve

$$L(t) = g'(t) + a\,g(t) + \int_0^t g(t-\tau)K'(\tau)d\tau = g'(t) + a\,g(t) + K' * g$$

olmak üzere;

$$f(t) = g(t) - \int_0^t L(t-\tau)f(\tau)d\tau = g(t) - L * f \tag{2.6}$$

olur. Diğer taraftan $g(t) > 0, g'(t) = -g(t)K(t) < 0$ olduğundan $0 < \tau < t$ için $0 < g(t) < g(\tau) < 1$ dir. Buna göre $K'(t-\tau) < 0$ olduğu gözönüne alınırsa;

$$K'(t-\tau)g(\tau) < K'(t-\tau)g(t) \Rightarrow \int_0^t K'(t-\tau)g(\tau)d\tau < \int_0^t K'(t-\tau)g(t)d\tau$$

$$\Rightarrow K'*g = \int_0^t K'(t-\tau)g(\tau)d\tau < \int_0^t K'(t-\tau)g(t)d\tau$$

$$= g(t)\int_0^t K'(t-\tau)d\tau$$

$$= g(t)\left[K(t)-K(0)\right]$$

olur. O halde

$$L(t) = g'(t) + a\,g(t) + K'*g < -K(t)g(t) + ag(t) + g(t)\left[K(t)-a\right] = 0$$

$\Rightarrow L(t) < 0$ dır. Böylece Sonuç 1.2.1'den;

$$f(t) = g(t) - \int_0^t L(t-\tau)f(\tau)d\tau > 0$$

dır. Buna göre

$$f(t) = 1 - \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau > 0$$

olur. Şu halde; $0 < f(t) \leq 1$ sonucu elde edilir.

2.2. Konvolüsyon Çekirdekli Lineer Volterra İntegral Denklemleri

Bu kısımda Özdeşlik Teoremi adı verilen Teorem 2.1.1'in kullanılmasıyla

$$f(t) = 1 - \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau = 1 - K*f \tag{2.7}$$

formundaki konvolüsyon çekirdekli birim kaynaklı ikinci tip lineer Volterra integral denkleminin çözümü olan f fonksiyonuna ilişkin bazı özellikler elde edildi.

Teorem 2.2.1. $t\in[0,\infty)$ olmak üzere eğer

1) K(0)=a<0,

2) $K'(0)=b$,

3) $K\in C^2[0,\infty)$, $K''(t)<0$ ve

4) $a^2\geq 4b$ oluyorsa bu taktirde (2.7)'nin çözümü olan f fonksiyonu $f^{(n)}(t)>0$ $(n=0,1,2,3)$ bağıntısını sağlar.

İspat. İspatı b'nin durumuna göre iki aşamada yapacağız.

1) $b\leq 0$ olduğunu kabul edelim.Yani $K'(0)\leq 0$ olsun. O zaman; hipotez (3)'ten K' azalan olduğundan $K'(t)\leq 0$ olur. Yani K artmayandır. K(0)=a < 0 ve K artmayan olduğundan K(t)<0 dır. Şu halde; (2.7) denkleminde parametre ve çekirdek aynı işaretli olduğundan Sonuç 1.2.1'den f(t)>0 dır. Ayrıca

$$f(t)=1-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau=1-K*f$$

denkleminde $f(t)>0$ iken :

$$f'(t)=-K'*f-K(0)f(t)>0,$$

$$f''(t)=-K''*f-K'(0)f(t)-K(0)f'(t)>0$$

olup $*$ konvolüsyon işleminin değişme özelliğinden

$$f''(t)=-f*K''-K'(0)f(t)-K(0)f'(t)>0$$

ve böylece

$$f'''(t)=-f'*K''-f(0)K''(t)-K'(0)f'(t)-K(0)f''(t)>0$$

olur. Şu halde; $b\leq 0$ iken ispat tamamdır.

2) Şimdide $b>0$ olsun. Teorem 2.1.1'den $f(t)=1-K*f$ integral denkleminin özdeşi olan denklem;

$g(t)=e^{-\gamma t}(\gamma\in\mathbb{R})$ olarak seçilirse (zira, bu durumda g(0)=1 ve $g\in C^1[0,\infty)$ dir)

$$\psi(t)=\phi(t)+\int_0^t g'(t-\tau)\phi(\tau)d\tau=1+\int_0^t g'(t-\tau)d\tau=1+\int_0^t g'(\tau)d\tau=g(t)=e^{-\gamma t}$$

$$L(t)=g'(t)+ag(t)+K'*g=-\gamma e^{-\gamma t}+ae^{-\gamma t}+K'*e^{-\gamma t}=(a-\gamma)e^{-\gamma t}+K'*e^{-\gamma t}$$

olacağından

$$f(t)=\psi(t)-\int_0^t L(t-\tau)f(\tau)d\tau=\psi(t)-L*f$$

yani

$$f(t)=e^{-\gamma t}-L*f$$

olarak elde edilir. Burada

$$L(t)=(a-\gamma)e^{-\gamma t}+K'*e^{-\gamma t}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}L'(t)&=-\gamma(a-\gamma)e^{-\gamma t}+K''*e^{-\gamma t}+K'(0)e^{-\gamma t}\\&=(\gamma^2-a\gamma+b)e^{-\gamma t}+K''*e^{-\gamma t}\end{aligned}$$

olur. Şimdi $\gamma\in\mathbb{R}$'yi $\gamma^2-a\gamma+b=0$ denkleminin bir kökü olarak

$\gamma=\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right)$ şeklinde seçelim. Bu durumda $L'(t)=K''*e^{-\gamma t}\le 0$ olur. Şu halde L artmayandır. Ayrıca;

$$a-\gamma<0\Leftrightarrow a<\gamma\Leftrightarrow a<\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right)\Leftrightarrow a<\sqrt{a^2-4b}$$

olduğundan $L(0)=a-\gamma<0$ dır. Böylece, $L(0)<0$ ve L artmayan olduğundan $L(t)<0$ dır. Demek ki $f(t)=e^{-\gamma t}-L*f$ denkleminde parametre ve çekirdek aynı işaretlidir. O halde Sonuç 1.2.1'den $f(t)>0$ dır. Diğer taraftan $*$'ın değişme özelliği kullanılarak;

$$f'(t)=-\gamma e^{-\gamma t}-f(0)L(t)-f'*L=-\gamma e^{-\gamma t}-L(t)-f'*L$$

$$f'(t)=-\gamma e^{-\gamma t}-L(t)-L*f' \tag{2.8}$$

denklemi elde edilir. Benzer şekilde (2.8)'den;

$$\begin{aligned}f''(t)&=\gamma^2e^{-\gamma t}-L'(t)-f''*L-f'(0)L(t)\\&=\gamma^2e^{-\gamma t}-L'(t)-f'(0)L(t)-f''*L\\&=\gamma^2e^{-\gamma t}-L'(t)-\left(-\gamma-L(0)\right)L(t)-f''*L\end{aligned}$$

olacağından;

$$f''(t)=\gamma^2e^{-\gamma t}-L'(t)+aL(t)-L*f'' \tag{2.9}$$

ve (2.9)'dan;

$$f'''(t)=-\gamma^3e^{-\gamma t}-L''(t)+aL'(t)-f''(0)L(t)-f'''*L$$

$$= -\gamma^3 e^{-\gamma t} - L''(t) + aL'(t) - \left[\gamma^2 - \left(\gamma^2 - a\gamma + b\right) + a(a-\gamma)\right] L(t) - f''' * L$$

olup

$$f'''(t) = -\gamma^3 e^{-\gamma t} - L''(t) + aL'(t) - \left(a^2 - b\right) L(t) - L * f''' \qquad (2.10)$$

denklemleri elde edilir. Bilinmeyenleri, sırasıyla; f', f'', f''' olan (2.8), (2.9), (2.10) denklemlerinin herbirinde parametre $-1 < 0$ ve çekirdek $L(t) < 0$ dır. Şu halde, Sonuç 1.2.1'den bu denklemlerin f', f'', f''' çözümlerinin işareti kaynak terimlerin işaretine bağlıdır.

$$-\gamma > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2 - 4b}\right) < 0 \Leftrightarrow a + \sqrt{a^2 - 4b} < 0 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 4b} < -a \Leftrightarrow b > 0$$

olduğundan (2.8) denkleminde kaynak terim $-\gamma e^{-\gamma t} - L(t) > 0$ dır.

Bunun gibi $L'(t) = e^{-\gamma t} * K'' \leq 0$ olup (2.9) denkleminin kaynak terimi $\gamma^2 e^{-\gamma t} - L'(t) + aL(t) > 0$ dır. Son olarak; $L''(t) = -\gamma e^{-\gamma t} * K'' + K''(t) < 0$ ve $a^2 - b > 0 \Leftrightarrow a^2 > b \Leftarrow a^2 \geq 4b$ olduğundan (2.10) denkleminin kaynak terimi

$$-\gamma^3 e^{-\gamma t} - L''(t) + aL'(t) - \left(a^2 - b\right) L(t) > 0$$

dır. Sonuç olarak, bu üç denklemin kaynak terimi pozitif olduğundan, $f'(t), f''(t), f'''(t) > 0$ dır. Demek ki $f(t) = 1 - K * f$ denkleminin çözümü olan f fonksiyonu $b > 0$ iken de $f^{(n)}(t) > 0$ (n = 0, 1, 2, 3) bağıntısını sağlar ki bu da ispatı tamamlar.

Örnek. $K(t) = ct^2 + bt + a$ $\left(a < 0,\ c < 0 \text{ ve } a^2 \geq 4b\right)$ şeklinde verilen K fonksiyonu Teorem 2.2.1'in bütün şartlarını sağlayacağından ,

$$f(t) = 1 - \int_0^t K(t-\tau) f(\tau) d\tau = 1 - K * f$$

denkleminin çözümü olan f fonksiyonu $f^{(n)}(t) > 0$ (n = 0, 1, 2, 3)bağıntısını sağlar.

Teorem 2.2.2. $t\in[0,\infty)$ olmak üzere eğer

1) $K(t)>0, K(0)=a$,

2) $K'(t)<0, K'(0)=b$,

3) $K''(t)>0, K''(0)=c$,

4) $K\in C^3[0,\infty)$, $K'''(t)<0$ ve

5) $\gamma_0=\frac{1}{3}\left(a+2\sqrt{a^2-3b}\right)$ olmak üzere; $c\le\gamma_0\frac{(a-\gamma_0)^2}{4}$ oluyorsa bu taktir-

de; (2.7) denkleminin çözümü olan f fonksiyonu

1) $0<f(t)\le 1$ ve

2) $f''(t)>0$ eşitsizliğini sağlar.

3) f' fonksiyonu en fazla bir köke sahiptir.

İspat. Denklem $f(t)=1-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau=1-K*f$

olup Teorem 2.1.1'de $g(t)=e^{-\gamma t}$ $(\gamma\in\mathbb{R})$ olarak alındığında Teorem 2.2.1'deki gibi $\psi(t)=e^{-\gamma t}$ ve $L(t)=(a-\gamma)e^{-\gamma t}+K'*e^{-\gamma t}$ olacağından bu denklemin özdeşi olan denklem $f(t)=e^{-\gamma t}-L*f$ olur. Şimdi, bilinmeyeni h ve çekirdeği L olan birim kaynaklı

$$h(t)=1-\int_0^t L(t-\tau)h(\tau)d\tau=1-L*h$$

denklemini gözönüne alalım. Teorem 1.3.3'den (2.7) denkleminin çözümü olan f fonksiyonu h cinsinden

$$f(t)=h(t)e^{-\gamma.0}+\int_0^t h(t-\tau)(e^{-\gamma\tau})'d\tau$$

$$=h(t)-\gamma\int_0^t h(t-\tau)(e^{-\gamma\tau})d\tau$$

$$=h(t)-\gamma e^{-\gamma t}*h$$

şeklinde yazılabilir. Böylece;

$$f'(t)=h'(t)-\gamma\left[-\gamma e^{-\gamma t}*h+h(t)\right]$$

$$=h'(t)-\gamma h(t)+\gamma^2 e^{-\gamma t}*h$$

olup buradan

$$h'(t)=f'(t)+\gamma h(t)-\gamma^2 e^{-\gamma t}*h$$
$$=f'(t)+\gamma\,(h(t)-\gamma e^{-\gamma t}*h)$$
$$=f'(t)+\gamma f(t)$$

ya da kısaca

$$h'=f'+\gamma f$$

olarak elde edilir.

Şimdi, bilinmeyeni h olan

$$h(t)=1-\int_0^t L(t-\tau)h(\tau)d\tau=1-L*h$$

denklemine dönelim. Teorem 2.2.1'den;

$L(t)=(a-\gamma)e^{-\gamma t}+K'*e^{-\gamma t}$ ve $L'(t)=\left(\gamma^2-a\gamma+b\right)e^{-\gamma t}+K''*e^{-\gamma t}$ olduğundan

$$L''(t)=-\gamma\left(\gamma^2-a\gamma+b\right)e^{-\gamma t}+K'''*e^{-\gamma t}+K''(0)e^{-\gamma t}$$
$$=-\gamma\left(\gamma^2-a\gamma+b\right)e^{-\gamma t}+c\,e^{-\gamma t}+K'''*e^{-\gamma t}$$
$$=\left[-\gamma\left(\gamma^2-a\gamma+b\right)+c\right]e^{-\gamma t}+K'''*e^{-\gamma t}$$

olur.

Şimdi γ 'yı $(a-\gamma)^2=4\left(\gamma^2-a\gamma+b\right)$ denkleminin bir kökü olarak $\gamma=\frac{1}{3}\left(a+2\sqrt{a^2-3b}\right)$ şeklinde seçelim. O zaman $L^2(0)=4L'(0)$ olur. Burada $L(0)=a-\gamma<0$ dır. Gerçekten;

$$a-\gamma<0\Leftrightarrow a<\gamma\Leftrightarrow a<\frac{1}{3}\left(a+2\sqrt{a^2-3b}\right)\Leftrightarrow a<\sqrt{a^2-3b}\Leftrightarrow b<0$$

olduğundan $L(0)<0$ dır. Böylece ;

$L''(t)=\left[-\gamma\frac{(a-\gamma)^2}{4}+c\right]e^{-\gamma t}+K'''*e^{-\gamma t}$ olup hipotezden $c\le\gamma\frac{(a-\gamma)^2}{4}$ ve $K'''(t)<0$ olduğundan $L''(t)<0$ olur. Şu halde,

$$h(t)=1-\int_0^t L(t-\tau)h(\tau)d\tau=1-L*h$$

denkleminde; $L(0)<0$, $L''(t)<0$, $L^2(0)=4L'(0)$ şartları sağlandığından bu denklemin çözümü olan h fonksiyonu Teorem 2.2.1'den $h^n(t)>0$ (n=0,1,2,3) bağıntısını sağlar. Böylece, $h'(t)=f'(t)+\gamma f(t)>0$ ve $h''(t)=f''(t)+\gamma f'(t)>0$ olur. Birinci eşitsizlikten $f'(t)>-\gamma f(t)$ ve ikinci eşitsizlikten $f''(t)>-\gamma f'(t)$ olduğundan $f''(t)>\gamma^2 f(t)$ olur. Halbuki bilinmeyeni f olan $f(t)=e^{-\gamma t}-L*f$ denkleminde parametre $-1<0$ ve çekirdek $L(t)=(a-\gamma)e^{-\gamma t}+K'*e^{-\gamma t}<0$ dır. O halde Sonuç 1.2.1'den $f(t)>0$ dır. Yine f bilinmeyenli

$$f(t)=1-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau=1-K*f$$

denkleminde $K(t)>0$ ve $f(t)>0$ olduğundan $0<f(t)\le 1$ olur. Demek ki $f''(t)>\gamma^2 f(t)>0$ olup buradan $f''(t)>0$ elde edilir. Yani f' artandır. Ayrıca $f'(t)=-K'*f-K(0)f(t)$ olduğundan $f'(0)=-K(0)f(0)=-a<0$ olur. Böylece; f', orijinde negatif ve artan olduğundan en fazla bir köke sahiptir.

Teorem 2.2.3. $t\in[0,\infty)$ olmak üzere

1) $K(t)>0, K(0)=a$,

2) $K'(t)>0, K'(0)=b$,

3) $K''(t)<0, K''(0)=c$,

4) $K'''(t)>0, K'''(0)=d$,

5) $K\in C^4[0,\infty)$, $K^{(4)}(t)<0$ ve

6) $a^3\ge 4ab-8c+16\dfrac{d}{a}$ ve $\gamma'_0=\dfrac{a}{6}+\dfrac{2}{3}\sqrt{a^2-3b}$ olmak üzere,

$$a^3\le 4ab-8c+2\gamma'_0\left(\frac{a}{2}-\gamma'_0\right)^2 \text{ olsun.}$$

Bu taktirde; (2.7) denkleminin çözümü olan f fonksiyonu

1) $|f(t)|\le 1$ eşitsizliğini sağlar,

2) En fazla iki köke sahiptir ve

3) f' fonksiyonu en fazla bir köke sahiptir.

İspat. Verilen denklem

$$f(t)=1-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau=1-K*f$$

olup yine Teorem 2.1.1'de $g(t)=e^{-\gamma t}(\gamma\in\mathbb{R})$ alındığında $\psi(t)=e^{-\gamma t}$ ve

$$L(t)=(a-\gamma)e^{-\gamma t}+K'*e^{-\gamma t}$$

olacağından bu denklemin özdeşi olan denklem

$$f(t)=e^{-\gamma t}-L*f$$

olarak elde edilir. Şimdi $\gamma\in\mathbb{R}$'yi $\gamma=\frac{a}{2}$ olarak alalım. O zaman;

$$L(t)=\frac{a}{2}e^{-\gamma t}+K'*e^{-\gamma t}>0 \text{ ve}$$

$$L'(t)=\frac{a}{2}(-\gamma)e^{-\gamma t}+K''*e^{-\gamma t}+K'(0)e^{-\gamma t}=\left(b-\frac{a^2}{4}\right)e^{-\gamma t}+K''*e^{-\gamma t}<0$$

olur. Gerçekten;

$$a^3\geq 4ab-8c+16\frac{d}{a}\Rightarrow a^2\geq 4b-8\frac{c}{a}+16\frac{d}{a^2}\Rightarrow a^2>4b\Rightarrow b-\frac{a^2}{4}<0$$

ve $K''(t)<0$ olduğundan $L'(t)<0$ dır. Böylece; pozitif azalan çekirdekli

$$h(t)=1-\int_0^t L(t-\tau)h(\tau)d\tau=1-L*h$$

denkleminin çözümü olan h fonksiyonu Teorem 2.1.2'den $0<h(t)\leq 1$ bağıntısını sağlar. Ayrıca Teorem 1.3.3'den

$$f(t)=e^{-\gamma t}-L*f$$

denkleminin çözümü h cinsinden

$$f(t)=h(t)-\gamma e^{-\gamma t}*h$$

olduğundan $|f(t)|\leq 1$ dir. Çünkü;

$$|f(t)|\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq f(t)\leq 1 \Leftrightarrow -1\leq h(t)-\gamma e^{-\gamma t}*h\leq 1$$

$$\Leftrightarrow -1\leq h(t)-\gamma e^{-\gamma t}*h \text{ ve } h(t)-\gamma e^{-\gamma t}*h\leq 1$$

dır. Halbuki $h(t)-\gamma e^{-\gamma t}*h\leq 1\Leftrightarrow h(t)\leq 1+\gamma e^{-\gamma t}*h$ olup $0<h(t)\leq 1$ ve $\gamma=\frac{a}{2}>0$ olduğundan $h(t)\leq 1+\gamma e^{-\gamma t}*h$ önermesi doğrudur. Şu halde,

$h(t)-\gamma e^{-\gamma t} * h \le 1$ dir. Şimdi $-1 \le h(t)-\gamma e^{-\gamma t} * h$ önermesinin doğru olduğunu gösterelim.

$$-1 \le h(t)-\gamma e^{-\gamma t} * h \Leftrightarrow h(t)+1 \ge \gamma e^{-\gamma t} * h$$

$$\gamma e^{-\gamma t} * h = \gamma \int_0^t h(t-\tau) e^{-\gamma\tau} d\tau \le \gamma \int_0^t e^{-\gamma\tau} d\tau = 1-e^{-\gamma t} < 1+h(t)$$

olduğundan $-1 \le h(t)-\gamma e^{-\gamma t} * h$ önermesi doğrudur. Şu halde, $|f(t)| \le 1$ olur.

Şimdi

$$h(t)=1-\int_0^t L(t-\tau) h(\tau) d\tau = 1-L*h$$

denkleminin çekirdeği olan L'nin Teorem 2.2.2'nin şartlarını sağladığını gösterelim.

$$L'(t) = \left(b-\frac{a^2}{4}\right) e^{-\gamma t} + K'' * e^{-\gamma t}$$

olduğundan;

$$L''(t) = \left(b-\frac{a^2}{4}\right)(-\gamma) e^{-\gamma t} + K''' * e^{-\gamma t} + K''(0) e^{-\gamma t}$$

olup buradan

$$L''(t) = \left(\frac{a^3}{8}-\frac{ab}{2}+c\right) e^{-\gamma t} + K''' * e^{-\gamma t} > 0$$

dır. Çünkü;

$$\left(\frac{a^3}{8}-\frac{ab}{2}+c\right) \ge 0 \Leftrightarrow a^3 \ge 4ab-8c \Leftarrow a^3 \ge 4ab-8c+16\frac{d}{a}$$

dır. Böylece;

$$L'''(t) = \left(\frac{a^3}{8}-\frac{ab}{2}+c\right)(-\gamma) e^{-\gamma t} + K^{(4)} * e^{-\gamma t} + K'''(0) e^{-\gamma t}$$

$$= \left(-\frac{a^4}{16}+\frac{a^2 b}{4}-\frac{ac}{2}+d\right) e^{-\gamma t} + K^{(4)} * e^{-\gamma t} < 0$$

dır. Gerçekten;

$$-\frac{a^4}{16}+\frac{a^2 b}{4}-\frac{ac}{2}+d \le 0 \Leftrightarrow \frac{a^4}{16} \ge \frac{a^2 b}{4}-\frac{ac}{2}+d \Leftrightarrow a^3 \ge 4ab-8c+16\frac{d}{a}$$

olup son eşitsizlik hipotezde mevcut bulunduğundan $L'''(t) < 0$ dır.

Yine Teorem 2.2.2 de tanımlandığı gibi;

$$\gamma'_0 = \frac{a}{6} + \frac{2}{3}\sqrt{a^2 - 3b} = \frac{\frac{a}{2} + 2\sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 - 3\left(-\frac{a^2}{4} + b\right)}}{3} = \frac{L(0) + 2\sqrt{L^2(0) - 3L'(0)}}{3}$$

olmak üzere;

$$L''(0) = \frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c \le \gamma'_0 \frac{\left(\frac{a}{2} - \gamma'_0\right)^2}{4} = \gamma'_0 \frac{\left(L(0) - \gamma'_0\right)^2}{4}$$

eşitsizliği sağlanır. Gerçekten,

$$\frac{a^3}{8} - \frac{ab}{2} + c \le \frac{\gamma'_0\left(\frac{a}{2} - \gamma'_0\right)^2}{4} \Leftrightarrow a^3 \le 4ab - 8c + 2\gamma'_0\left(\frac{a}{2} - \gamma'_0\right)^2$$

olur ki bu son eşitsizlik zaten hipotezde mevcuttur. Demek ki; yukarıdaki eşitsizlik geçerlidir. Böylece,

$$h(t) = 1 - \int_0^t L(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

denkleminin çekirdeği olan L fonksiyonu Teorem 2.2.2'nin bütün şartlarını sağlar. Şu halde; bu denklemin çözümü olan h fonksiyonu için $h'(t)$ 'nin en fazla bir köke sahip olduğunu ve $h''(t) > 0$ olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi f'nin diğer özelliklerini elde etmek için daha önce elde edilen

$h' = f' + \gamma f$

$h'' = f'' + \gamma f'$

eşitliklerinden faydalanalım. Burada;

$$h'(0) = f'(0) + \gamma f(0) = -a + \frac{a}{2} = -\frac{a}{2} < 0$$

ve h' artan olduğundan h' için iki durum söz konusudur :

1. durum : h' 'nün kökü yoksa o zaman $h'(t) < 0$ dır.

2. durum : h' 'nün bir kökü varsa o zaman h' kök noktasına kadar negatif daha sonra pozitiftir.

İddia ediyoruz ki her iki durumda da f en fazla iki köke sahiptir. Şimdi bunu görelim :

1. durumda; f, x_1 gibi bir ilk köke sahipse o zaman $f'(x_1) < 0$ olacağından f, x_1 civarında azalandır. Böylece ; f(0)=1 ve f, x_1 civarında azalan olduğundan f'nin x_1 den farklı x_2 gibi ikinci bir kökü yoktur. Aksi halde f, x_2 civarında da azalan olur ki bu geometrik olarak mümkün değildir. Şu halde; f, en fazla bir köke sahiptir.

2. durumda; h' 'nün kökü x olsun. Ayrıca, f, z_1 ve z_2 gibi farklı ilk iki köke ilâveten üçüncü bir köke daha sahip bulunsun. O zaman; x, z_1 ve z_2 'nin her ikisinden ne küçük ne de büyük olmalıdır. Aksi halde :

a) z_1 ve z_2, x den küçükse o zaman $f'(z_1) < 0$ ve $f'(z_2) < 0$ olur ki buradan f'nin hem z_1 hem de z_2 civarında azalan olduğu anlaşılır. Oysa bu durum geometrik olarak mümkün değildir.

b) z_1 ve z_2, x den büyükse o zaman $f'(z_1) > 0$ ve $f'(z_2) > 0$ olur ki buradan f'nin hem z_1 hem de z_2 civarında artan olduğu ve bunun da geometrik olarak mümkün olmadığı anlaşılır.

Demek ki f, farklı ilk iki köke sahipse bu kökler (a) ve (b)'deki özellikleri sağlamayan kökler olmalıdır. Bu durumda; z_1 ve z_2, x ile karşılaştırılıp yukarıdaki birinci eşitlik ve f(0)=1 in kullanılmasıyla f'nin üçüncü bir köke sahip olmasının geometrik olarak mümkün olmadığı görülebilir. Sonuç olarak; her iki durumda da f en fazla iki köke sahiptir.

Diğer taraftan; f' 'nün, t_1 gibi bir ilk kökü mevcut olsun. O zaman yukarıdaki ikinci eşitlikten $f''(t_1) > 0$ olduğu yani f' 'nün t_1 civarında artan olduğu görülür. Şu halde; f' kök noktası civarında artandır. Bu da f' 'nün t_1 den farklı ikinci bir t_2 köküne sahib olmasının geometrik olarak mümkün olmadığını gösterir. Sonuç olarak; f' en fazla bir köke sahiptir.

Şimdi Teorem 2.2.4'ün ispatında kullanacağımız bir lemma verelim.

Lemma 2.2.1. Eğer ;

1) $K \in C^2(0,\infty)$, $K \in L(0,1)$ ve $0 < t < \infty$ için $K(t) > 0$

2) $-\infty < x < \infty$, $0 \le t < \infty$ için $G(x,t)$ sürekli, sınırlı cümlelerde, t'ye göre düzgün ve x'e göre lokal Lipschitz sürekli, ayrıca $x \neq 0$, $0 \le t < \infty$ ise $xG(x,t) > 0$,

$-\infty < x < \infty$, $0 \le t < \infty$ için $G_x(x,t)$, $G_t(x,t)$ sürekli ve ≥ 0

3) $\phi \in C^2[0,\infty)$ ve $0 \le t < \infty$ için $\phi(t) > 0$,

4) $0 < a \le b < \infty$ ve $\phi(b) > 0$ olmak üzere ; $\dfrac{K'(a)}{K(a)} \le \dfrac{\phi'(b)}{\phi(b)}$,

$0 \le t < \infty$ için $\phi'(t) < G[\phi(0),0]K(t)$, $0 < a \le b < \infty$ için $\dfrac{K'(a)}{K(a)} \le \dfrac{K'(b)}{K(b)}$ ve

$0 < t < \infty$ için $\dfrac{K'(t)}{K(t)} \le \dfrac{G[\phi(0),0]K'(t) - \phi''(t)}{G[\phi(0),0]K(t) - \phi'(t)}$

şartları sağlanıyorsa o zaman

$$f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau)G[f(\tau),\tau]d\tau$$

denkleminin $0 \le t < \infty$ da monoton artmayan (yani $f'(t) < 0$ olan) ve $0 \le f(t) \le \phi(t)$ eşitsizliğini sağlayan bir tek sürekli f(t) çözümü vardır (Friedman, 1963).

Teorem 2.2.4. $t \in [0,\infty)$ olmak üzere eğer

1) $K(t) > 0, K(0) = a$,

2) $K'(t) > 0, K'(0) = b$,

3) $K \in C^2[0,\infty)$, $K''(t) < 0, K''(0) = c$,

4) $\dfrac{K''}{K'}$ azalmayan ve

5) $a + \dfrac{c}{b} \ge 2\sqrt{b}$

şartları sağlanıyorsa bu taktirde; (2.7) denkleminin çözümü olan f fonksiyonu,

1) $|f(t)| \le 1$ eşitsizliğini sağlar,

2) En fazla bir köke sahiptir.

İspat. Denklem $f(t) = 1 - K*f$ olup Teorem 2.1.1'de $g(t) = e^{-\gamma t}(\gamma \in \mathbb{R})$ olarak alındığında $\psi(t) = e^{-\gamma t}$ ve $L(t) = (a-\gamma)e^{-\gamma t} + K'*e^{-\gamma t}$ olacağından bu denklemin özdeşi olan denklem $f(t) = e^{-\gamma t} - L * f$ olur. Şimdi, bilinmeyeni h ve çekirdeği L olan birim kaynaklı $h(t) = 1 - L * h$ denklemini gözönüne alalım.

L'nin 1) $L(t) > 0$, 2) $L'(t) < 0$ ve 3) $\log L(t)$ konveks

şartlarını sağlaması halinde Lemma 2.2.1'den bu denklemin çözümü olan h fonksiyonunun $h'(t) < 0$ özelliğine sahip olduğunu söyleyebiliriz. Şimdi bu şartları sağlayalım.

Daha önce elde edildiği gibi

$$L(t) = (a-\gamma)e^{-\gamma t} + K' * e^{-\gamma t} = (a-\gamma)e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} * K'$$

olduğundan;

$$L'(t) = -\gamma\,(a-\gamma)e^{-\gamma t} + (-\gamma)e^{-\gamma t} * K' + K'(t) = (-\gamma)\left[(a-\gamma)e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} * K'\right] + K'(t)$$

$$= K'(t) - \gamma L(t)$$

$$L''(t) = K''(t) - \gamma L'(t) = K''(t) - \gamma\left[K'(t) - \gamma L(t)\right] = K''(t) - \gamma K'(t) + \gamma^2 L(t)$$

olur.

$$y = \log L(t) \text{ konvekstir} \Leftrightarrow y''(t) = \frac{L''(t)L(t) - [L'(t)]^2}{L^2(t)} \geq 0 \Leftrightarrow L''(t)L(t) - \left[L'(t)\right]^2 \geq 0$$

Şu halde; $N(t) = L''(t)L(t) - \left[L'(t)\right]^2$ olduğunu gösterirsek (3) şartını sağlatmış oluruz.

$$N = LL'' - L'^2 = L(K'' - \gamma K' + \gamma^2 L) - (K' - \gamma L)^2$$

$$= LK'' - \gamma LK' + \gamma^2 L^2 - (K'^2 - 2K'\gamma L + \gamma^2 L^2)$$

$$= LK'' - K'^2 + \gamma LK'$$

$$= (K'' + \gamma K')L - K'^2$$

olup $N(t) \geq 0 \Leftrightarrow \dfrac{e^{\gamma t} N(t)}{K'(t)} \geq 0$ olduğundan $\dfrac{e^{\gamma t} N(t)}{K'(t)} \geq 0$ olduğunu görmeye çalışalım.

$$N(t) = \left[K''(t) + \gamma K'(t)\right]L(t) - \left[K'(t)\right]^2$$

$$= \left[K''(t) + \gamma K'(t)\right]\left[(a-\gamma)e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} * K'\right] - \left[K'(t)\right]^2$$

olduğundan;

$$e^{\gamma t} N(t) = \left[K''(t) + \gamma K'(t)\right]\left[(a-\gamma) + e^{\gamma t}\int_0^t e^{-\gamma(t-\tau)} K'(\tau)\,d\tau\right] - \left[K'(t)\right]^2 e^{\gamma t}$$

$$=\left[K''(t)+\gamma K'(t)\right]\left[(a-\gamma)+\int_0^t e^{\gamma\tau}K'(\tau)d\tau\right]-\left[K'(t)\right]^2 e^{\gamma t}$$

$$=K''(t)(a-\gamma)+\gamma K'(t)(a-\gamma)+K''(t)\int_0^t e^{\gamma\tau}K'(\tau)d\tau$$

$$+\gamma K'(t)\int_0^t e^{\gamma\tau}K'(\tau)d\tau-\left[K'(t)\right]^2 e^{\gamma t}$$

$$=\gamma(a-\gamma)K'(t)+\gamma K'(t)\int_0^t e^{\gamma\tau}K'(\tau)d\tau+(a-\gamma)K''(t)$$

$$+K''(t)\int_0^t e^{\gamma\tau}K'(\tau)d\tau-\left[K'(t)\right]^2 e^{\gamma t}$$

ve $\int_0^t e^{\gamma\tau}K'(\tau)d\tau$ integralinde $u=K'(\tau)$, $dv=e^{\gamma\tau}d\tau$ alınıp kısmî integrasyon metodu kullanılırsa o zaman;

$$\int_0^t e^{\gamma\tau}K'(\tau)d\tau=\frac{1}{\gamma}\left(e^{\gamma\tau}K'(\tau)\Big|_0^t\right)-\frac{1}{\gamma}\int_0^t e^{\gamma\tau}K''(\tau)d\tau$$

$$=\frac{1}{\gamma}e^{\gamma t}K'(t)-\frac{1}{\gamma}b-\frac{1}{\gamma}\int_0^t e^{\gamma\tau}K''(\tau)d\tau$$

olacağından

$$e^{\gamma t}N(t)=\gamma(a-\gamma)K'(t)+(a-\gamma)K''(t)+\gamma K'(t)\left[\frac{1}{\gamma}e^{\gamma t}K'(t)-\frac{1}{\gamma}b-\frac{1}{\gamma}\int_0^t e^{\gamma\tau}K''(\tau)d\tau\right]$$

$$-\left[K'(t)\right]^2 e^{\gamma t}+K''(t)\int_0^t e^{\gamma\tau}K'(\tau)d\tau$$

$$=\gamma(a-\gamma)K'(t)+(a-\gamma)K''(t)-K'(t)b+\int_0^t e^{\gamma\tau}\left[K''(t)K'(\tau)-K'(t)K''(\tau)\right]d\tau$$

olur. Böylece;

$$\frac{e^{\gamma t}N(t)}{K'(t)}=\gamma\left(a-\gamma\right)+(a-\gamma)\frac{K''(t)}{K'(t)}-b+\int_0^t e^{\gamma\tau}\,\frac{K''(t)K'(\tau)-K'(t)K''(\tau)}{K'(t)}d\tau$$

olur. Şimdi $\gamma\in\mathbb{R}$'yi $\gamma\left(a-\gamma\right)\frac{c}{b}=\gamma^2-a\gamma+b$ denkleminin bir kökü olarak

$$\gamma=\frac{1}{2}\left[a-\frac{c}{b}-\sqrt{\left(a+\frac{c}{b}\right)^2-4b}\,\right]$$ şeklinde seçelim.

(Hipotezde $a+\frac{c}{b}\geq 2\sqrt{b}$ olduğundan bu seçime hakkımız vardır). Bu taktirde;

$0<\gamma<a$ dır. Gerçekten;

$$\gamma=\frac{1}{2}\left[a-\frac{c}{b}-\sqrt{\left(a+\frac{c}{b}\right)^2-4b}\,\right]>0\Leftrightarrow a-\frac{c}{b}>\sqrt{\left(a+\frac{c}{b}\right)^2-4b}$$

$$\Leftrightarrow a^2-\frac{2ac}{b}+\frac{c^2}{b^2}>a^2+\frac{2ac}{b}+\frac{c^2}{b^2}-4b$$

$$\Leftrightarrow b^2>ac$$

elde edilir ki bu son eşitsizlik doğru olduğundan $\gamma>0$ dır.

$$\gamma=\frac{1}{2}\left[a-\frac{c}{b}-\sqrt{\left(a+\frac{c}{b}\right)^2-4b}\,\right]<a\Leftrightarrow a-\frac{c}{b}-\sqrt{\left(a+\frac{c}{b}\right)^2-4b}<2a$$

$$\Leftrightarrow -\sqrt{\left(a+\frac{c}{b}\right)^2-4b}<a+\frac{c}{b}$$

olup hipotezden $a+\frac{c}{b}>0$ olduğundan son eşitsizlik doğrudur. Şu halde, $\gamma<a$ dır.

Böylece $0<\gamma<a$ dır.

Diğer taraftan hipotezde $\frac{K''}{K'}$ azalmayan olduğundan; $\forall t\in\left[0,\infty\right)$ için

$$\frac{K''(0)}{K'(0)}=\frac{c}{b}\leq\frac{K''(t)}{K'(t)}$$ ve $0<\tau<t$ için

$$\frac{K''(t)}{K'(t)}\geq\frac{K''(\tau)}{K'(\tau)}\Rightarrow K''(t)K'(\tau)\geq K''(\tau)K'(t)\Rightarrow K''(t)K'(\tau)-K''(\tau)K'(t)\geq 0$$

dır. Böylece;

$$\frac{e^{\gamma t}N(t)}{K'(t)}=\gamma\left(a-\gamma\right)+\left(a-\gamma\right)\frac{K''(t)}{K'(t)}-b+\int_0^t e^{\gamma\tau}\,\frac{K''(t)K'(\tau)-K'(t)K''(\tau)}{K'(t)}d\tau$$

$$\geq \gamma\left(a-\gamma\right)+\left(a-\gamma\right)\frac{c}{b}-b$$

$$=\gamma\left(a-\gamma\right)+\left(\gamma^2-a\gamma+b\right)-b=0$$

olur ki buradan $N(t)\geq 0$ elde edilir. Demek ki $\log L(t)$ konvekstir. Ayrıca;

$\gamma\left(a-\gamma\right)\frac{c}{b}=\gamma^2-a\gamma+b$ olup bu eşitliğin sol tarafı negatif olduğundan

$\gamma^2-a\gamma+b<0$ dır. Diğer taraftan $L(t)=\left(a-\gamma\right)e^{-\gamma t}+K'*e^{-\gamma t}>0$ ve

$L'(t)=-\gamma\left(a-\gamma\right)e^{-\gamma t}+K''*e^{-\gamma t}+K'(0)e^{-\gamma t}=\left(\gamma^2-a\gamma+b\right)e^{-\gamma t}+K''*e^{-\gamma t}<0$

olup böylece Lemma 2.2.1'in bütün şartları sağlanmaktadır. Şu halde;

$h(t)=1-L*h$ denkleminin çözümü olan h fonksiyonu $h'(t)<0$ özelliğine sahiptir. Yine, bu denklem pozitif azalan çekirdeğe sahip olduğundan h fonksiyonu Teorem 2.1.2'den $0<h(t)\leq 1$ bağıntısını da sağlar. Ayrıca daha önce elde edildiği gibi;

$$f(t)=1-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau=1-K*f$$

denkleminin çözümü h cinsinden $f(t)=h(t)-\gamma e^{-\gamma t}*h$ olup $h'(t)=f'(t)+\gamma f(t)<0$ ve $\left|f(t)\right|\leq 1$ olduğu aynen Teorem 2.3.3'deki gibi gösterilebilir.

Şimdide f'nin en fazla bir köke sahip olduğunu görelim.

$h'(t)=f'(t)+\gamma f(t)<0$ ve $f(0)=1$ olduğundan iki durum söz konusudur :

1. durum : f daima pozitif ise o zaman f hiçbir köke sahip değildir.

2. durum : f daima pozitif değilse o zaman; $f(x_0)=0$ olacak şekilde bir ilk $x_0\in\left[0,\infty\right)$ noktası vardır. Bu ise $f'\left(x_0\right)<0$ olmasını yani f'nin x_0 civarında azalan olmasını gerektirir. Şimdi f'nin x_0 dan farklı y_0 gibi ikinci bir kökünün olduğunu kabul edelim. O zaman f'nin y_0 civarında da azalan olması gerekir ki bu geometrik olarak mümkün değildir. Sonuç olarak ; her iki durumda da f en fazla bir köke sahiptir.

Örnek. $K(t)=\ln\left(e^2+t\right)$ şeklinde tanımlanan K fonksiyonu Teorem 2.2.4'ün bütün şartlarını sağlar. Şu halde ;

$$f(t)=1-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau=1-K*f$$

denkleminin çözümü olan f fonksiyonunun;

1) $|f(t)|\leq 1$ eşitsizliğini sağladığını ve

2) En fazla bir köke sahip olduğunu söyleyebiliriz.

Teorem 2.2.5. $t\in[0,\infty)$ olmak üzere eğer

1) $K(t)>0, K(0)=a$,

2) $K'(t)<0$ ve

3) $K\in C^1[0,\infty)$, $-K'(t)>a^2\exp\left(-\int_0^t K(\tau)d\tau\right)$

şartları sağlanıyor ise bu taktirde (2.7)'nin çözümü olan f fonksiyonu:

1) $0<f(t)\leq 1$ eşitsizliğini sağlar,

2) f' fonksiyonu en fazla bir köke sahiptir ve

3) $|f'(t)|\leq 2a$ eşitsizliğini sağlar.

İspat. Denklem

$$f(t)=1-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau=1-K*f$$

olup Teorem 2.1.1'de $g(t)=\exp\left(-\int_0^t K(\tau)d\tau\right)=e^{-\int_0^t K(\tau)d\tau}$ olarak alındığında;

$$\psi(t)=\phi(t)+g'*\phi=\phi(t)+\int_0^t g'(t-\tau)\phi(\tau)d\tau$$

$$=1+\int_0^t \phi(t-\tau)g'(\tau)d\tau$$

$$=1+g(\tau)\Big|_0^t$$

$$= 1 + g(t) - g(0)$$

$$= g(t)$$

ve

$$L(t) = g'(t) + ag(t) + K' * g$$

olacağından verilen denklemin özdeşi

$$f(t) = \psi(t) - \int_0^t L(t-\tau)f(\tau)d\tau = \psi(t) - L * f$$

yani $f(t) = g(t) - L * f$ olarak elde edilir.

Burada $L(t) = g'(t) + ag(t) + K' * g$ olup $g(t) = \exp\left(-\int_0^t K(\tau)d\tau\right) = e^{-\int_0^t K(\tau)d\tau}$

$\Rightarrow g'(t) = -e^{-\int_0^t K(\tau)d\tau} K(t) = -g(t)K(t) < 0$ olduğundan g azalandır. Ayrıca $0 < g(t) \leq 1$ olduğundan $0 < \tau < t$ için $0 < g(t) < g(\tau) < 1$ olur. Buradan da $K'(t-\tau)g(\tau) < K'(t-\tau)g(t)$ elde edilir.

Böylece;

$$K' * g = \int_0^t K'(t-\tau)g(\tau)d\tau < \int_0^t K'(t-\tau)g(t)d\tau = g(t)\int_0^t K'(t-\tau)d\tau = g(t)\int_0^t K'(\tau)d\tau$$

$$= g(t)\left[K(t) - a\right]$$

olacağından $K' * g < g(t)\left[K(t) - a\right]$ olur. Diğer taraftan;

$$L(t) = g'(t) + ag(t) + K' * g < -K(t)g(t) + ag(t) + g(t)\left[K(t) - a\right]$$

$$= -K(t)g(t) + ag(t) + g(t)K(t) - g(t)a = 0$$

olduğundan $L(t) < 0$ sonucuna ulaşılır. Şu halde;

$f(t) = g(t) - L * f = \exp\left(-\int_0^t K(\tau)d\tau\right) - L * f$ denkleminde parametre ve çekirdek aynı işaretli olduğundan Sonuç 1.2.1'den $f(t) > 0$ dır. Halbuki $f(t) = 1 - K * f$ denkleminde $K(t) > 0$ ve $f(t) > 0$ olduğundan $0 < f(t) \leq 1$ elde edilir.

Şimdi $f'(t)$ 'nin en fazla bir köke sahip olacağını gösterelim.

$$f(t) = g(t) - L * f = g(t) - f * L = g(t) - \int_0^t f(t-\tau)L(\tau)d\tau$$

olduğundan

$$f'(t) = g'(t) - L(t) - f' * L = g'(t) - L(t) - L * f'$$

olur. Diğer taraftan;

$$L(t) = g'(t) + ag(t) + K' * g \Rightarrow g'(t) - L(t) = -ag(t) - K' * g \text{ ve}$$

$$f'(0) = g'(0) - L(0) = g'(0) - \left[g'(0) + ag(0)\right] = -ag(0) = -a$$

olduğundan

$$f'(t) = g'(t) - L(t) - L * f' = -ag(t) - K' * g - L * f' = -ag(t) - g * K' - f' * L \text{ o}$$

ve

$$\begin{aligned} f''(t) &= -ag'(t) - (g * K')' - (f' * L)' \\ &= -ag'(t) - \left[g' * K' + g(0)K'(t)\right] - \left[f'' * L + f'(0)L(t)\right] \\ &= -ag'(t) - K'(t) - g' * K' + aL(t) - f'' * L \\ &= -ag'(t) - K'(t) - K' * g' + aL(t) - L * f'' \\ &= -ag'(t) - K'(t) - K' * g' + a\left[g'(t) + ag(t) + K' * g\right] - L * f'' \\ &= -ag'(t) - K'(t) - K' * g' + ag'(t) + a^2 g(t) + aK' * g - L * f'' \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Buna göre;

$$\begin{aligned} 2af'(t) + f''(t) = {} & -2a^2 g(t) - 2aK' * g - 2aL * f' - K'(t) - K' * g' + a^2 g(t) + aK' * g \\ & - L * f'' \end{aligned}$$

olup

$$-2aL * f' - L * f'' = -L * (2af') - L * f'' = -L * (2af' + f'')$$

olduğu gözönüne alınırsa; bilinmeyeni $2af' + f''$ ve çekirdeği L olan

$$2af'(t) + f''(t) = -a^2 g(t) - aK' * g - K'(t) - K' * g' - L * (2af' + f'')$$

denklemi elde edilir.

Ayrıca $g'(t) = -g(t)K(t)$ olduğundan,

$$\begin{aligned} -aK' * g - K' * g' &= K' * (-ag) + K' * (-g') \\ &= K' * (-ag - g') \\ &= K' * (-ag + Kg) \\ &= K' * (K - a)g \end{aligned}$$

olup buradan

$$2af'(t)+f''(t)=-a^2g(t)-K'(t)+K'*(K-a)g-L*(2af'+f'')$$

olur. Elde edilen bu son denklemde parametre ve çekirdek aynı işaretli olup; $g(t)>0$ ve hipotezden $K(t)>0, K'(t)<0, -K'(t)>a^2g(t)$ olduğundan $-a^2g(t)-K'(t)+K'*(K-a)g$ kaynak terimi pozitiftir. Şu halde; Sonuç 1.2.1'den $2af'+f''$ bilinmeyeni pozitiftir. Yani $2af'(t)+f''(t)>0$ dır. Böylece; $f'(0)=-a<0$ ve $2af'(t)+f''(t)>0$ olduğundan f', en fazla bir köke sahiptir. Gerçekten; x_0 f''nün bir ilk kökü ise o zaman $2af'(x_0)+f''(x_0)>0 \Rightarrow f''(x_0)>0$ olacağından f', x_0 civarında artandır. Bunun gibi; x_1, f''nün ikinci bir kökü ise o zaman f', x_1 civarında da artan olur ki bu geometrik olarak mümkün değildir. Demek ki f' en fazla bir köke sahiptir.

Şimdide $K(t)>0, K'(t)<0$ ve $0<f(t)\leq 1$ olduğunu aklımızda tutarak f''nün sınırlı olduğunu gösterelim.

$$f(t)=1-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau=1-K*f$$

$$\Rightarrow f'(t)=-\left[K'*f+K(0)f(t)\right]=-K'*f-af(t)$$

$$\Rightarrow |f'(t)|=|-K'*f-af(t)|=|K'*f+af(t)|$$

$$\leq |af(t)|+|K'*f|$$

$$\leq |a||f(t)|+\int_0^t |K'(t-\tau)||f(\tau)|d\tau$$

$$\leq a+\int_0^t |K'(t-\tau)|d\tau$$

$$=a-\int_0^t K'(t-\tau)d\tau=2a-K(t)\leq 2a$$

olduğundan $|f'(t)|\leq 2a$ dır yani f' sınırlıdır.

Teorem 2.2.6. $t\in[0,\infty)$ olmak üzere eğer;

1) $K(t)>0, K(0)=a$,

2) $K\in C^1[0,\infty), K'(t)<0$ ve

3) $m=K(\infty)=\lim\limits_{t\to\infty}K(t)$ olmak üzere; $-K'(t)<am\exp\left(-\int_0^t K(\tau)d\tau\right)$

oluyorsa bu taktirde (2.7) denkleminin çözümü olan f fonksiyonu;

1) $0<f(t)\le 1$,

2) $f'(t)<0$ ve

3) $|f'(t)|\le 2a$

eşitsizliklerini sağlar.

İspat. Verilen denklem $f(t)=1-K*f$ olup Teorem 2.1.1'de $g(t)=\exp\left(-\int_0^t K(\tau)d\tau\right)$ seçildiğinde bu denklemin özdeşi Teorem 2 2.5'deki gibi $f(t)=g(t)-L*f$ olarak elde edilir.Yine Teorem 2.2.5'de olduğu gibi özdeş denklemin çekirdeği L(t) negatif olacağından Sonuç 1.2.1'den $f(t)>0$ olur. Şu halde; $f(t)=1-K*f$ orijinal denkleminde $K(t)>0$ ve $f(t)>0$ olduğundan $0<f(t)\le 1$ olur. Ayrıca;

$f(t)=g(t)-L*f$ olup Teorem 2.2.5'den; $f'(t)=-a\,g(t)-K'*g-L*f'$ ve

$f''(t)=-K'(t)-K'*g'+a^2g(t)+aK'*g-L*f''$

olduğundan

$$\begin{aligned}(a+m)f'(t)+f''(t)&=-a(a+m)g(t)-(a+m)K'*g-(a+m)L*f'-K'(t)-K'*g'\\&\quad+a^2g(t)+aK'*g-L*f''\\&=-a^2g(t)-amg(t)-aK'*g-mK'*g-(a+m)L*f'-K'(t)\\&\quad-K'*g'+a^2g(t)+aK'*g-L*f''\\&=-a^2g(t)-amg(t)-aK'*g+K'*(-mg)-L*[(a+m)f']\\&\quad-K'(t)+K'*(-g')+a^2g(t)+aK'*g-L*f''\end{aligned}$$

olur ki buradan da $g'=-Kg$ yazılarak bilinmeyeni $(a+m)f'(t)+f''(t)$ olan

$(a+m)f'(t)+f''(t)=-amg(t)-K'(t)+K'*(K-m)g-L*[(a+m)f'+f'']$

denklemi elde edilir. Bu denklemde parametre ve çekirdek aynı işaretli olup; $g(t) > 0$ ve hipotezde $K'(t) < 0$, $-K'(t) < amg(t)$ olduğundan $-amg(t) - K'(t) + K' * (K - m)g$ kaynak terimi negatiftir. Şu halde; Sonuç 1.2.1'den $(a+m)f'(t) + f''(t)$ çözümü negatiftir. Yani; $(a+m)f'(t) + f''(t) < 0$ dir. Diğer taraftan; $f'(0) = -a < 0$ olduğundan f''nün hiçbir kökü yoktur. Aksi halde; yani f''nün $x_0 \in [0,\infty)$ olmak üzere bir ilk kökünün x_0 olması halinde yani f''nün $f'(x_0) = 0$ eşitliğini sağlaması halinde

$$(a+m)f'(x_0) + f''(x_0) < 0 \Rightarrow f''(x_0) = (f')'(x_0) < 0$$

olur ki bu da f''nün x_0 civarında azalan olması demektir halbuki bu durum geometrik olarak mümkün değildir. Şu halde; f''nün hiçbir kökü yoktur. Böylece f' orijinde negatif ve hiç bir köke sahip olmadığından $f'(t) < 0$ dır.

Ayrıca f''nün sınırlı olduğu yani $|f'(t)| \leq 2a$ olduğu aynen Teorem 2.2.5'deki gibi gösterilebilir.

Şimdi ϕ gibi daha genel bir kaynak terime sahip olan

$$f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau = \phi(t) - K * f \tag{2.11}$$

denklemini gözönüne alalım.

Teorem 2.2.7. $t \in [0,\infty)$ olmak üzere eğer;

1) $K(t) > 0$, $K \in C^1[0,\infty)$, $K'(t) < 0$ ve $K(0) = a$, $m = K(\infty) = \lim_{t \to \infty} K(t)$ olmak üzere, $-K'(t) < am\exp\left(-\int_0^t K(\tau)d\tau\right)$ ve

2) ϕ sınırlı olsun.

Bu taktirde (2.11) denkleminin çözümü olan f fonksiyonu

1) Sınırlıdır,

2) $f(t) \leq \phi(t)$ eşitsizliğini sağlar ve

3) L_1 sınıfına aittir

İspat. Ele alınan denklem

$$f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau=\phi(t)-K*f$$

olup Teorem 1.3.3'den bu denklemin çözümü olan f fonksiyonu

$$h(t)=1-\int_0^t K(t-\tau)h(\tau)d\tau=1-K*h$$

denkleminin çözümü olan h fonksiyonu yardımıyla

$$f(t)=h(t)\phi(0)+\int_0^t h(t-\tau)\,\phi'(\tau)d\tau=h(t)\phi(0)+h*\phi'$$

şeklinde verilebilir. Böylece; $h(t-\tau)=u$ ve $\phi'(\tau)d\tau=dv$ alınıp kısmî integrasyon metodu kullanılırsa,

$$f(t)=h(t)\,\phi(0)+h(0)\phi(t)-h(t)\phi(0)+\int_0^t h'(t-\tau)\,\phi(\tau)d\tau\;=\phi(t)+h'*\phi$$

olarak elde edilir.Diğer taraftan ; Teorem 2.2.6'nın şartları (1) hipotezinde mevcut bulunduğundan $h(t)=1-K*h$ denkleminin çözümü olan h fonksiyonu $0<h(t)\le 1$ ve $h'(t)<0$ şartlarını sağlar. Yine hipotezde ϕ sınırlı olduğundan $|\phi(t)|\le C_1$ olacak şekilde bir $C_1\ge 0$ sayısı vardır. Böylece;

$$\begin{aligned}|f(t)|=|\phi(t)+h'*\phi|&\le|\phi(t)|+\int_0^t|h'(t-\tau)||\phi(\tau)|d\tau\\&\le C_1-C_1\int_0^t h'(t-\tau)d\tau\\&=C_1-C_1[h(t)-h(0)]<2C_1\end{aligned}$$

olur ki bu da f'nin sınırlı olması demektir.

f'nin diğer iki özelliğini göstermek için yeni bir F fonksiyonunu, $F(t)=\int_0^t|f(s)|ds$ şeklinde tanımlayalım.O zaman $K*f=\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau$ olup kısmî integrasyonla

$$\begin{aligned}K*f&=\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau\\&=K(t-\tau)F(\tau)\Big|_0^t+\int_0^t K'(t-\tau)F(\tau)d\tau\end{aligned}$$

$$= K(0)F(t) - K(t)F(0) + K' * F$$

$$= aF(t) + K' * F$$

olur. Ayrıca F pozitif artan olduğundan;

$$f(t) = \phi(t) - K * f = \phi(t) - aF(t) - \int_0^t K'(t-\tau)F(\tau)d\tau$$

$$\leq \phi(t) - aF(t) - \int_0^t K'(t-\tau)F(t)d\tau$$

$$= \phi(t) - aF(t) - F(t)\int_0^t K'(t-\tau)d\tau$$

$$= \phi(t) - F(t)K(t)$$

$$\Rightarrow f(t) \leq \phi(t) - F(t)K(t)$$

elde edilir. Ayrıca

$$f(t) \leq \phi(t) - F(t)K(t) \Leftrightarrow F(t)K(t) \leq \phi(t) - f(t) \Leftrightarrow F(t) \leq \frac{\phi(t) - f(t)}{K(t)}$$

olup $F(t) \geq 0$ olduğundan $\phi(t) - f(t) \geq 0$ ve şu halde $f(t) \leq \phi(t)$ dir. Yani f sınırlıdır. Diğer taraftan; ϕ, f sınırlı ve K pozitif azalan olduğundan,

$$F(t) \leq \frac{\phi(t) - f(t)}{K(t)} = \frac{|\phi(t) - f(t)|}{K(t)} \leq \frac{|\phi(t)| + |f(t)|}{K(\infty)}$$

yani F sınırlıdır. F sınırlı ve pozitif artan olduğundan $F(\infty)$ mevcut ve böylece $F \in L_1$ dir.

2.3. Konvolüsyon Çekirdekli Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemleri

Bu kısımda

$$f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau)G[f(\tau),\tau]d\tau \tag{2.12}$$

formunda verilen konvolüsyon çekirdekli ikinci tip lineer olmayan Volterra integral denkleminin çözümü olan f fonksiyonunun bazı özellikleri elde edilmiştir.

Teorem 2.3.1. $t\in[0,\infty)$ olmak üzere eğer;

1) $K\in C^1[0,\infty)$, $K(t)>0$ ve $K'(t)<0$,

2) $-\infty<x<\infty$, $0\le y<\infty$ için $G(x,y)$ sürekli,

$x>0$ için $G(x,y)\ge 0$ ve $G(0,y)=0$,

3) $\phi\in C^1[0,\infty)$, $\phi(0)>0$ ve $\phi'(t)\ge 0$

şartları mevcutsa o zaman (2.12)'nin çözümü olan f fonksiyonu $0<f(t)\le\phi(t)$ eşitsizliğini sağlar.

İspat. (2.12)'de Leibnitz formülüne göre türev alındığında;

$$f'(t)=\phi'(t)-K(0)G[f(t),t]-\int_0^t K'(t-\tau)G[f(\tau),\tau]d\tau$$

ve $f(0)=\phi(0)>0$ olup f'nin hiçbir kökü yoktur. Bunu görelim:

$\exists z\in(0,\infty)$ için f'nin bir ilk kökünün z olduğunu kabul edelim. Bu durumda;

$$f(z)=0,\ f'(z)=\phi'(z)-K(0)G[f(z),z]-\int_0^z K'(z-\tau)G[f(\tau),\tau]d\tau$$

$$=\phi'(z)-\int_0^z K'(z-\tau)G[f(\tau),\tau]d\tau$$

olur. Diğer taraftan $f(0)=\phi(0)>0$ ve böylece $\tau\in[0,z]$ için $f(\tau)\ge 0$ olacağından hipotezden $f'(z)\ge 0$ olduğu sonucuna ulaşılır. Burada iki durum sözkonusudur:

1) $f'(z)>0$ olması durumunda f, z noktası civarında artan olur ki bu, $f(0)>0$ olduğundan geometrik olarak mümkün değildir. Şu halde; f, hiçbir köke sahip olamaz.

2) $f'(z)=0$ olması durumunda ise

$$f'(z)=\phi'(z)-\int_0^z K'(z-\tau)G[f(\tau),\tau]d\tau=0\Leftrightarrow\phi'(z)=0,\int_0^z K'(z-\tau)G[f(\tau),\tau]\,d\tau=0$$

Ayrıca;

$\int_0^z K'(z-\tau)G[f(\tau),\tau]\,d\tau=0\Leftrightarrow\tau\in[0,z]$ olmak üzere h.h.τ için $G[f(\tau),\tau]=0$

olacağından

$$f(z) = \phi(z) - \int_0^z K(z-\tau)G[f(\tau),\tau]d\tau = \phi(z)$$

ve (3) hipotezinden $\phi(z) > 0$ olup buradan $f(z) > 0$ olur ki bu f(z)=0 kabulüyle çelişir. Demek ki bu durumda da f hiçbir köke sahip değildir. Sonuç olarak; f'nin hiçbir kökü yoktur. f(0)=$\phi(0) > 0$ ve f'nin kökü olmadığından f(t) > 0 dır. Diğer taraftan; (2.12)'de $K(t) > 0$ ve $G[f(\tau),\tau] \geq 0$ olacağından $f(t) \leq \phi(t)$ olduğu görülür. Böylece $0 < f(t) \leq \phi(t)$ elde edilir.

Not 2.3.1. Teorem 2.3.1'deki şartları aşağıdaki şekilde değiştirirsek yani; $t \in [0,\infty)$ olmak üzere eğer;

1) $K \in C^1[0,\infty)$, $K(t) > 0$ ve $K'(t) < 0$

2) $-\infty < x < \infty$, $0 \leq y < \infty$ için G(x,y) sürekli, $x < 0$ için $G(x,y) \leq 0$ ve $G(0,y) = 0$

3) $\phi \in C^1[0,\infty)$, $\phi(0) < 0$ ve $\phi'(t) \leq 0$

ise o zaman (2.12)'nin çözümü olan f fonksiyonu $\phi(t) \leq f(t) < 0$ eşitsizliğini sağlar.

İspat. (2.12)'de Leibnitz formülüne göre türev alındığında;

$$f'(t) = \phi'(t) - K(0)G[f(t),t] - \int_0^t K'(t-\tau)G[f(\tau),\tau]d\tau$$

ve f(0)=$\phi(0) < 0$ olup f'nin hiçbir kökü yoktur.Bunun aksini yani $\exists z \in (0,\infty)$ için f'nin bir ilk kökünün z olduğunu kabul edelim. Bu durumda;

$$f(z)=0,\ f'(z) = \phi'(z) - K(0)G[f(z),z] - \int_0^z K'(z-\tau)G[f(\tau),\tau]d\tau$$

$$= \phi'(z) - \int_0^z K'(z-\tau)G[f(\tau),\tau]d\tau$$

olur. Diğer taraftan f(0)=$\phi(0) < 0$ ve böylece $\tau \in [0,z]$ için $f(\tau) \leq 0$ olacağından hipotezden $f'(z) \leq 0$ olduğu sonucuna ulaşılır. Şu halde; iki durum sözkonusudur:

1) $f'(z) < 0$ iken f z noktası civarında azalan olur bu ise $f(0) < 0$ olduğundan geometrik olarak mümkün değildir. Yani; bu durumda f hiçbir köke sahip değildir.

2) $f'(z)=0$ iken de

$$f'(z)=\phi'(z)-\int_0^z K'(z-\tau)G\left[f(\tau),\tau\right]d\tau=0 \Leftrightarrow \phi'(z)=0,\int_0^z K'(z-\tau)G\left[f(\tau),\tau\right]d\tau=0$$

ve

$\int_0^z K'(z-\tau)G\left[f(\tau),\tau\right]d\tau=0 \Leftrightarrow \tau\in\left[0,z\right]$ olmak üzere h.h.τ için $G\left[f(\tau),\tau\right]=0$

olacağından

$$f(z)=\phi(z)-\int_0^z K(z-\tau)G\left[f(\tau),\tau\right]d\tau=\phi(z)$$

ve (3) hipotezinden $\phi(z)<0$ olup buradan $f(z)<0$ elde edilir ki bu da $f(z)=0$ kabulüyle çelişir. Demek ki bu durumda da f'nin hiçbir kökü yoktur. Sonuç olarak; f hiçbir köke sahip değildir. $f(0)=\phi(0)<0$ ve f'nin kökü olmadığından $f(t)<0$ dır. Ayrıca; (2.12)'de $K(t)>0$ ve $G\left[f(\tau),\tau\right]\leq 0$ olacağından $f(t)\geq\phi(t)$ olur. Böylece $\phi(t)\leq f(t)<0$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 2.3.2. $t\in\left[0,\infty\right)$ olmak üzere eğer;

1) $K\in C^1\left[0,\infty\right)$, $K(t)>0$ ve $K'(t)<0$

2) $-\infty<x<\infty$ için $G(x,y)=G(x)$, $G\in C^1(-\infty,\infty)$ ve $G'(x)\geq 0$

3) $\phi\in C^2\left[0,\infty\right)$ ve

$\phi'(0)<G\left[\phi(0)\right]a,\ a=K(0)$

$\phi''(t)\leq G\left[\phi(0)\right]K'(t)$

şartları sağlanıyorsa o zaman $f'(t)<0$ dır. Yani (2.12)'nin çözümü monoton azalandır.

Bu teoremin şartlarına Teorem 2.3.1'deki ek şartlarda ilâve edilirse yani (1),(2) ve (3)'e ilâveten

4) $x>0$ için $G(x,y)=G(x)\geq 0$ ve $G(0,y)=G(0)=0$

5) $\phi(0)>0,\phi'(t)\geq 0$

şartları da sağlanırsa o zaman (2.12)'nin çözümü olan f fonksiyonu hem monoton azalan hem de $0<f(t)\leq\phi(0)$ eşitsizliğini sağlar.

İspat. Verilen denklem

$$f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)G[f(\tau)]d\tau$$

olup $t-\tau=u$ değişken değiştirmesiyle;

$$f(t)=\phi(t)-\int_t^0 K(u)G[f(t-u)](-du)$$

$$=\phi(t)-\int_0^t K(u)G[f(t-u)]du=\phi(t)-\int_0^t G[f(t-\tau)]\,K(\tau)d\tau$$

olacağından

$$f'(t)=\phi'(t)-G[f(0)]K(t)-\int_0^t G'[f(t-\tau)]f'(t-\tau)K(\tau)d\tau$$

olur. Yine $t-\tau=u$ alınırsa

$$f'(t)=\phi'(t)-G[f(0)]K(t)-\int_0^t K(t-\tau)G'[f(\tau)]f'(\tau)d\tau$$

ve $f(0)=\phi(0)$ olduğundan;

$$f'(t)=\phi'(t)-G[\phi(0)]K(t)-\int_0^t K(t-\tau)G'[f(\tau)]f'(\tau)d\tau$$

olarak elde edilir. Böylece;

$$f'(0)=\phi'(0)-G[\phi(0)]K(0)=\phi'(0)-G[\phi(0)]a<0$$

ve

$$f''(t)=\phi''(t)-G[\phi(0)]K'(t)-G'[f(t)]f'(t)K(0)-\int_0^t K'(t-\tau)G'[f(\tau)]f'(\tau)d\tau$$

olacağından f''nün hiçbir kökü yoktur. Bunun aksini yani $x_0\in[0,\infty)$ olmak üzere f''nün x_0 gibi bir ilk kökünün olduğunu kabul edelim. Bu taktirde; $f'(0)<0$ olduğundan $\tau\in[0,x_0]$ için $f'(\tau)\le 0$ dır. Ayrıca; hipotezden $K'(t)<0$, $G'(x)\ge 0$ ve $\phi''(t)\le G[\phi(0)]K'(t)$ olduğundan

$$f''(x_0)=\phi''(x_0)-G[\phi(0)]K'(x_0)-G'[f(x_0)]f'(x_0)K(0)$$
$$-\int_0^{x_0} K'(x_0-\tau)\,G'[f(\tau)]f'(\tau)d\tau$$

$$= \phi''(x_0) - G[\phi(0)]K'(x_0) - \int_0^{x_0} K'(x_0 - \tau)G'[f(\tau)]f'(\tau)d\tau \leq 0$$

olur.

Şu halde iki durum söz konusudur :

1) $f''(x_0) < 0$ ise o zaman f', x_0 noktası civarında azalandır ki bu, $f'(0) < 0$ olduğundan geometrik olarak mümkün değildir.

2) $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow \phi''(x_0) - G[\phi(0)]K'(x_0) - \int_0^{x_0} K'(x_0 - \tau)G'[f(\tau)]f'(\tau)d\tau = 0$

$$\Leftrightarrow \phi''(x_0) - G[\phi(0)]K'(x_0) = 0, \int_0^{x_0} K'(x_0 - \tau)G'[f(\tau)]f'(\tau)d\tau = 0$$

Diğer taraftan;

$\int_0^{x_0} K'(x_0 - \tau)G'[f(\tau)]f'(\tau)d\tau = 0 \Leftrightarrow \tau \in [0, x_0]$ olmak üzere h.h.τ için

$$G'[f(\tau)]f'(\tau) = 0$$

olacağından;

$$f'(x_0) = \phi'(x_0) - G[\phi(0)]K(x_0) - \int_0^{x_0} K(x_0 - \tau)G'[f(\tau)]f'(\tau)d\tau$$

$$= \phi'(x_0) - G[\phi(0)]K(x_0) = 0$$

olur. Ayrıca; hipotezden $\phi''(t) \leq G[\phi(0)]K'(t)$ ve $\phi \in C^2[0,\infty)$, $K \in C^1[0,\infty)$ olduğundan; $\int_0^{x_0} \phi''(t)dt \leq \int_0^{x_0} G[\phi(0)]K'(t)dt$ olur. Halbuki;

$$\int_0^{x_0} \phi''(t)dt \leq \int_0^{x_0} G[\phi(0)]K'(t)dt \Rightarrow \phi'(x_0) - \phi'(0) \leq G[\phi(0)][K(x_0) - a]$$

$$\Rightarrow \phi'(x_0) - G[\phi(0)]K(x_0) \leq \phi'(0) - G[\phi(0)]a$$

$$\Rightarrow 0 \leq \phi'(0) - G[\phi(0)]a$$

olup elde edilen bu son eşitsizlik $\phi'(0) < G[\phi(0)]a$ hipotezi ile çelişir. Sonuç olarak f''nün x_0 gibi bir ilk köke sahip olması her iki durumda da mümkün değildir. Şu halde f''nün hiçbir kökü yoktur. $f'(0) < 0$ ve f''nün hiçbir kökü olmadığından $f'(t) < 0$ dır. Yani f monoton azalandır. Böylece; $f(0) = \phi(0)$ ve f monoton azalan olduğundan $f(t) \leq \phi(0)$ dır. Diğer taraftan ilk üç şarta ilâve olarak; (4), (5)'de sağlanırsa o zaman Teorem 2.3.1'den $0 < f(t)$ olur ki bu iki sonucun birleştirilmesiyle de $0 < f(t) \leq \phi(0)$ elde edilir.

Örnek. $G(x) = x^3$, $\phi(t) = \ln(e+t)$ ve $K(t) = \dfrac{1}{e+t} + C \ (C > 0)$

şeklinde tanımlanan G, ϕ ve K fonksiyonları Teorem 2.3.1 ve Teorem 2.3.2'nin hipotez şartlarını sağlar. Şu halde,

$$f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau)G[f(\tau)]d\tau$$

denkleminin çözümü olan f fonksiyonu $0 < f(t) \leq \phi(0)$ eşitsizliğini sağlayan monoton azalan bir fonksiyondur.

Özellik 2.3.1. Eğer Teorem 2.3.2'de $G(x) = x$ alınırsa o zaman (2.12)'nin çözümü olan f fonksiyonu $f(t) \leq \dfrac{\phi(t)}{1 + \int_0^t K(\tau)d\tau}$ eşitsizliğini sağlar.

İspat. Denklem ; $f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau)G[f(\tau)]d\tau$ olup $G[f(\tau)] = f(\tau)$ olduğundan; $f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau$ lineer halini alır. Ayrıca Teorem 2.3.2-den f pozitif azalan olacağından ; $0 \leq \tau \leq t$ için $f(\tau) \geq f(t) > 0$ dır.

Böylece;

$$\begin{aligned} f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau \leq \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau)f(t)d\tau \\ = \phi(t) - f(t)\int_0^t K(t-\tau)d\tau \\ = \phi(t) - f(t)\int_0^t K(\tau)d\tau \end{aligned}$$

$\Rightarrow f(t) \leq \phi(t) - f(t)\int_0^t K(\tau)d\tau$ olup buradan $f(t) \leq \dfrac{\phi(t)}{1 + \int_0^t K(\tau)d\tau}$ elde edilir.

Örnekler.

1) $G(x)=x$, $\phi(t)=\ln(e+t)$ ve $K(t)=\dfrac{1}{e+t}+C$ $(C>0)$

2) $G(x)=x$, $\phi(t)=2-e^{-t}$ ve $K(t)=e^{-t}+C$ $(C>0)$

3) $G(x)=x$, $\phi(t)=3\ln(1+t)+\dfrac{1}{1+t}$ ve $K(t)=\dfrac{3}{1+t}-\dfrac{1}{(1+t)^2}+C$ $(C>0)$

(1), (2), (3)'te tanımlanan G, ϕ ve K fonksiyonları Teorem 2.3.1 ve Teorem 2.3.2'nin bütün şartlarını sağlayacağından $f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau$ lineer denkleminin çözümü olan f fonksiyonu hem monoton azalandır hem de $0<f(t)\leq\phi(0)$ eşitsizliğini sağlar. Diğer taraftan (1), (2) ve (3)'te $G(x)=x$ olduğundan Özellik 2.3.1'den; $f(t)\leq\dfrac{\phi(t)}{1+\int_0^t K(\tau)d\tau}$ dir.

Uyarı. (3) nolu örnek $K(t)K''(t)-[K'(t)]^2\geq 0$ konvekslik şartını sağlamayacağından Lemma 2.2.1'i kullanarak $f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau$ denkleminin çözümü olan f fonksiyonu için bir sınır bulamayız. Halbuki Özellik 2.3.1'de f için bir sınır bulunabilmektedir.

Teorem 2.3.1, Teorem 2.3.2 ve Teorem 2.1.1 (Özdeşlik Teoremi)'in kullanılmasıyla

$$f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{2.13}$$

formundaki lineer integral denklemin çözümü olan f fonksiyonunun bazı özelliklerini elde etmek mümkündür.

Teorem 2.3.3. $t\in[0,\infty)$ olmak üzere eğer;

1) $K\in C^2[0,\infty)$, $K(t)>0$, $K'(t)>0$ ve $K''(t)<0$,

2) $K(0)=a$, $K'(0)=b$ olmak üzere; $a^2\geq 4b$,

3) $\phi\in C^2[0,\infty)$, $\phi(0)>0$ ve $\phi''(t)\geq 0$ ve

4) γ, $\frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2-4b}\right)$ pozitif sayıları arasında olmak üzere; $\phi'(0) \geq \gamma\, \phi(0)$ sağlansın. Bu taktirde; (2.13) denkleminin çözümü olan f fonksiyonu $0 < f(t) \leq \phi(t)$ eşitsizliğini sağlar.

İspat. Verilen denklem

$$f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau) f(\tau) d\tau = \phi(t) - K * f$$

olup Teorem 2.1.1'de $g(t) = e^{-\gamma t}(\gamma \in \mathbb{R})$ seçilirse;

$$\psi(t) = \phi(t) + \int_0^t g'(t-\tau)\phi(\tau)d\tau = \phi(t) + g' * \phi = \phi(t) - \gamma\, e^{-\gamma t} * \phi \quad \text{ve}$$

$$L(t) = g'(t) + a g(t) + \int_0^t K'(t-\tau) g(\tau) d\tau = (a-\gamma)e^{-\gamma t} + K' * e^{-\gamma t}$$

olacağından bu denklemin özdeşi

$$f(t) = \psi(t) - L * f$$

şeklindedir. Özdeş denklemin çekirdeği $L(t) = (a-\gamma)e^{-\gamma t} + K' * e^{-\gamma t}$ olduğundan

$L'(t) = -\gamma\,(a-\gamma)e^{-\gamma t} + K'(0)e^{-\gamma t} + K'' * e^{-\gamma t} = \left(\gamma^2 - a\gamma + b\right)e^{-\gamma t} + K'' * e^{-\gamma t}$ olur.

Şimdi $\gamma \in \mathbb{R}$'yi $\left(\gamma^2 - a\gamma + b\right) = 0$ denkleminin kökleri olan

$\gamma_{1,2} = \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2-4b}\right)$ sayıları arasında seçelim. Bu durumda;

$$\gamma_{1,2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2-4b}\right) > 0 \Leftrightarrow a - \sqrt{a^2-4b} > 0 \Leftrightarrow 0 > -4b \Leftrightarrow b > 0$$

olduğundan $\gamma_{1,2} > 0$ dır. Yine seçilen $\gamma \in \mathbb{R}$ için $\left(\gamma^2 - a\gamma + b\right) < 0$ olacağından $L'(t) < 0$ olur. Diğer taraftan; $L(t) = (a-\gamma)e^{-\gamma t} + K' * e^{-\gamma t} > 0$ dır. Çünkü;

$$(a-\gamma) > 0 \Leftarrow a - \gamma_2 > 0 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}\left(a + \sqrt{a^2-4b}\right) \Leftrightarrow 0 > -4b \Leftrightarrow b > 0$$

dır. Ayrıca $K \in C^2[0,\infty)$ olduğundan $L \in C^1[0,\infty)$ dır. Şu halde; $f(t) = \psi(t) - L * f$ özdeş denklemi bakımından Teorem 2.3.1'in (1) şartı sağlanır. Yine özdeş denklemde $G(x)=x$ olduğundan Teorem 2.3.1'in (2) şartı açık olarak sağlanır. Şimdi Teorem 2.3.1'in (3) şartına karşılık gelen $\psi \in C^1[0,\infty)$, $\psi(0)>0$ ve $\psi'(t)\geq 0$ şartlarını sağlayalım. $\psi(0)=\phi(0)>0$ olduğundan ikinci şart sağlanır.

$$\psi(t)=\phi(t)+\int_0^t g'(t-\tau)\phi(\tau)d\tau=\phi(t)+g'*\phi=\phi(t)-\gamma\, e^{-\gamma t}*\phi=\phi(t)-\gamma\,\phi*e^{-\gamma t}$$

ve böylece;

$$\psi'(t)=\phi'(t)-\gamma\left[e^{-\gamma t}\phi(0)+\phi'*e^{-\gamma t}\right]=\phi'(t)-\gamma\, e^{-\gamma t}\phi(0)-\gamma\, e^{-\gamma t}*\phi'$$

olup $\phi\in C^2[0,\infty)$ verildiğinden $\psi\in C^1[0,\infty)$ dir. $\psi'(t)$ de

$$e^{-\gamma t}*\phi'=\phi'*e^{-\gamma t}=\int_0^t \phi'(t-\tau)e^{-\gamma\tau}d\tau \text{ ifadesinde}$$

$u=\phi'(t-\tau)$ ve $dv=e^{-\gamma\tau}d\tau$ alınıp kısmî integrasyon metodu kullanılırsa;

$$\int_0^t \phi'(t-\tau)e^{-\gamma\tau}d\tau=-\frac{1}{\gamma}\left(\phi'(t-\tau)e^{-\gamma\tau}\Big|_0^t\right)-\frac{1}{\gamma}\int_0^t \phi''(t-\tau)e^{-\gamma\tau}d\tau$$

$$=-\frac{1}{\gamma}\phi'(0)e^{-\gamma t}+\frac{\phi'(t)}{\gamma}-\frac{1}{\gamma}e^{-\gamma t}*\phi''$$

olacağından $\psi'(t)=\left[\phi'(0)-\gamma\,\phi(0)\right]e^{-\gamma t}+e^{-\gamma t}*\phi''\geq 0$ elde edilir. Demek ki $f(t)=\psi(t)-L*f$ denklemi Teorem 2.3.1'in bütün şartlarını sağlar. Şu halde, bu denklemin çözümü olan f fonksiyonu $0<f(t)\leq\psi(t)$ eşitsizliğini sağlar. Halbuki orijinal denklemle onun özdeşi olan denklemin çözümleri aynı olacağından $f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau=\phi(t)-K*f$ denkleminin çözümü olan f fonksiyonu da yukarıdaki eşitsizliği sağlar. Diğer taraftan hipotezde $K(t)>0$ olduğundan $f(t)\leq\phi(t)$ olduğunu söyleyebiliriz. Buradan da $0<f(t)\leq\phi(t)$ olduğu sonucuna ulaşırız.

Örnekler.

1) $K(t)=\ln\left(e^2+t\right)$, $\phi(t)=t^2+2t+1$ ve $\gamma=\frac{a}{2}=1$

2) $K(t)=\ln\left(e^2+t\right)$, $\phi(t)=\sqrt{(1+t)^3}$ ve $\gamma=\frac{a}{2}=1$

3) $K(t)=\sqrt{(4+t)}$, $\phi(t)=t^2+2t+1$ (veya $\phi(t)=\sqrt{(1+t)^3}$) ve $\gamma=\frac{a}{2}=1$

(1), (2) ve (3)'te tanımlanan K ve ϕ fonksiyonları ile $\gamma\in\mathbb{R}$ sayısı Teorem 2.3.3'teki şartları sağlayacağından $f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau$ denkleminin çözümü olan f fonksiyonu $0<f(t)\le\phi(t)$ eşitsizliğini sağlar.

Teorem 2.3.4. $t\in[0,\infty)$ olmak üzere eğer;

1) $K\in C^2[0,\infty)$, $K(t)>0$, $K'(t)>0$ ve $K''(t)<0$,

2) $K(0)=a$, $K'(0)=b$ olmak üzere; $a^2\ge 4b$,

3) $\phi\in C^3[0,\infty)$, $\phi'(0)<\phi(0)a$ ve $\phi'''(t)\le\phi(0)K''(t)$,

4) γ, $\frac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{a^2-4b}\right)$ pozitif sayıları arasında olmak üzere;

$\phi''(0)-\gamma\,\phi'(0)\le\phi(0)(b-a\gamma)$ sağlansın.

O zaman (2.13) denkleminin çözümü olan f fonksiyonu $f'(t)<0$ eşitsizliğini sağlar.

Eğer; (1), (2), (3) ve (4)'e ilâveten;

5) $\phi(0)>0$ ve $\phi''(t)\ge 0$ ve

6) $\phi'(0)\ge\gamma\,\phi(0)$

şartları da sağlanırsa bu taktirde (2.13) denkleminin çözümü olan f fonksiyonu hem monoton azalandır hem de $0<f(t)\le\phi(0)$ eşitsizliğini sağlar.

İspat. Denklem $f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau=\phi(t)-K*f$ olup

Teorem 2.1.1'de $g(t)=e^{-\gamma t}(\gamma\in\mathbb{R})$ seçilirse Teorem 2.3.3'teki gibi

$\psi(t)=\phi(t)-\gamma e^{-\gamma t}*\phi$ ve $L(t)=(a-\gamma)e^{-\gamma t}+K'*e^{-\gamma t}$ olup bu denklemin özdeşi $f(t)=\psi(t)-L*f$ şeklindedir. Eğer $\gamma\in\mathbb{R}$'yi $\left(\gamma^2-a\gamma+b\right)=0$ denkleminin kökleri olan $\gamma_{1,2}=\frac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{a^2-4b}\right)$ pozitif sayıları arasında seçersek yine Teorem 2.3.3'te-ki gibi

$L'(t)=\left(\gamma^2-a\gamma+b\right)e^{-\gamma t}+K''*e^{-\gamma t}<0$, $L(t)=(a-\gamma)e^{-\gamma t}+K'*e^{-\gamma t}>0$

ve $L\in C^1[0,\infty)$ elde edilir. Şu halde; $f(t)=\psi(t)-L*f$ denklemi Teorem 2.3.2'nin (1) şartını sağlar. Diğer taraftan $G(x)=x$ olduğundan özdeş denklem bakımından

Teorem 2.3.2'nin (2) şartı da sağlanır. Son olarak ; aynı teoremin (3) şartına karşılık gelen $\psi \in C^2[0,\infty)$, $\psi'(0) < \psi(0)L(0)$ ve $\psi''(t) \le \psi(0)L'(t)$ şartlarını sağlayalım.

Bir önceki Teorem 2.3.3'de olduğu gibi

$\psi'(t) = [\phi'(0) - \gamma\,\phi(0)]e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} * \phi''$, $\psi(0) = \phi(0)$ ve $L(0) = a - \gamma$ olduğu gözönüne alınırsa; $\psi'(0) = [\phi'(0) - \gamma\,\phi(0)]$ olup hipotezde $\phi'(0) < \phi(0)a$ olduğundan $[\phi'(0) - \gamma\,\phi(0)] < \phi(0)(a - \gamma)$ elde edilir. Yani $\psi'(0) < \psi(0)L(0)$ dır.

Diğer taraftan;

$$\psi''(t) = -\gamma[\phi'(0) - \gamma\phi(0)]e^{-\gamma t} + (\phi'' * e^{-\gamma t})'$$

$$= [-\gamma\,\phi'(0) + \gamma^2\phi(0)]e^{-\gamma t} + \phi''(0)e^{-\gamma t} + \phi''' * e^{-\gamma t}$$

$$= [-\gamma\,\phi'(0) + \gamma^2\phi(0) + \phi''(0)]e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} * \phi'''$$

olup $\phi \in C^3[0,\infty)$ olduğundan $\psi \in C^2[0,\infty)$ dir. Ayrıca

$L'(t) = (\gamma^2 - a\gamma + b)e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} * K''$ olduğundan

$$\psi(0)L'(t) = \phi(0)L'(t) = \phi(0)(\gamma^2 - a\gamma + b)e^{-\gamma t} + \phi(0)e^{-\gamma t} * K''$$

$$= \phi(0)(\gamma^2 - a\gamma + b)e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} * \phi(0)K''$$

olur. Böylece, $[-\gamma\,\phi'(0) + \gamma^2\phi(0) + \phi''(0)] \le \phi(0)(\gamma^2 - a\gamma + b)$ ve

$\phi'''(t) \le \phi(0)K''(t)$ olduğundan $\psi''(t) \le \psi(0)L'(t)$ dir. Gerçekten ;

$$[-\gamma\,\phi'(0) + \gamma^2\phi(0) + \phi''(0)] \le \phi(0)(\gamma^2 - a\gamma + b) \Leftrightarrow \phi''(0) - \gamma\,\phi'(0) \le \phi(0)(b - \gamma a)$$

olup sağ taraftaki eşitsizlik hipotezde mevcut bulunduğundan sol taraftaki eşitsizlik geçerlidir. Yine $\phi'''(t) \le \phi(0)K''(t)$ eşitsizliği hipotezde mevcut olduğundan $\psi''(t) \le \psi(0)L'(t)$ dir. Sonuç olarak $f(t) = \psi(t) - L * f$ denklemi için Teorem 2.3.2'nin bütün şartları sağlanmaktadır. Şu halde; bu denklemin çözümü olan f fonksiyonu $f'(t) < 0$ eşitsizliğini sağlar. Yani f monoton azalandır. $f(0) = \phi(0)$ ve f monoton azalan olduğundan $f(t) \le \phi(0)$ dır. Ayrıca; ilk dört şarta ilâveten son iki şart da sağlanırsa o zaman Teorem 2.3.3'ten $0 < f(t)$ olur ki bu iki sonuçtan

$0 < f(t) \le \phi(0)$ elde edilir.

Örnek. $\phi(t) = \left(e^2 + t\right)\left[\ln(e^2 + t) - 1\right] - \left(e^2 - 1\right)$, $K(t) = \ln\left(e^2 + t\right) + 2t + 1$ ve $\gamma = \dfrac{3}{2}$ şeklinde tanımlanan K ve ϕ fonksiyonları ile $\gamma \in \mathbb{R}$ sayısı Teorem 2.3.4'deki altı şartı sağlayacağından; $f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau) f(\tau) d\tau = \phi(t) - K * f$ denkleminin çözümü olan f fonksiyonu monoton azalan olup $0 < f(t) \le \phi(0)$ eşitsizliğini sağlar.

3. BÖLÜM

KONVOLÜSYON ÇEKİRDEKLİ İKİNCİ TİP VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİ

3.1. Konvolüsyon Çekirdekli İkinci Tip Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemleri

Bu kısımda

$$f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau)G\left[f(\tau)\right]d\tau \tag{3.1}$$

formunda verilen konvolüsyon çekirdekli ikinci tip lineer olmayan Volterra integral denkleminin negatif artan bir çözüme sahib olmasının yeter şartları verilerek $G\left[f(\tau)\right] = f(\tau)$ özel halinde f için bir sınır elde edilmiştir.

Teorem 3.1.1. $t \in [0,\infty)$ olmak üzere eğer;

1) $K \in C^1[0,\infty)$, $K(t) > 0$ ve $K'(t) < 0$

2) $G \in C^1(-\infty,\infty)$ ve $G'(x) \geq 0$

3) $\phi \in C^2[0,\infty)$ ve

$\phi'(0) > G[\phi(0)]a, a = K(0)$

$\phi''(t) \geq G[\phi(0)]K'(t)$

şartları sağlanıyorsa o zaman (3.1)'in çözümü olan f fonksiyonu $f'(t) > 0$ eşitsizliğini sağlar. Eğer bu teoremin şartlarına Not 2.3.1'in ek şartları da dahil edilirse yani (1), (2) ve (3)'e ilâveten;

4) $x < 0$ için $G(x) \leq 0$ ve $G(0) = 0$

5) $\phi(0) < 0, \phi'(t) \leq 0$

şartları da geçerliyse o zaman (3.1)'in çözümü olan f fonksiyonu monoton artandır üstelik bu çözüm $\phi(0) \leq f(t) < 0$ eşitsizliğini sağlar.

İspat. (3.1) denklemi

$f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)G\left[f(\tau)\right]d\tau$ olup $t-\tau=u$ değişken değiştirmesi yapılırsa o zaman

$$f(t)=\phi(t)-\int_t^0 K(u)G\left[f(t-u)\right](-du)$$

$$=\phi(t)-\int_0^t K(u)G\left[f(t-u)\right]du$$

$$=\phi(t)-\int_0^t G\left[f(t-\tau)\right]K(\tau)d\tau$$

olacağından;

$$f'(t)=\phi'(t)-G\left[f(0)\right]K(t)-\int_0^t G'\left[f(t-\tau)\right]f'(t-\tau)K(\tau)d\tau$$

olur. Yine $t-\tau=u$ alınırsa;

$$f'(t)=\phi'(t)-G\left[f(0)\right]K(t)-\int_0^t K(t-\tau)G'\left[f(\tau)\right]f'(\tau)d\tau$$

ve $f(0)=\phi(0)$ olduğundan

$$f'(t)=\phi'(t)-G\left[\phi(0)\right]K(t)-\int_0^t K(t-\tau)G'\left[f(\tau)\right]f'(\tau)d\tau$$

olarak elde edilir. Böylece;

$$f'(0)=\phi'(0)-G\left[\phi(0)\right]a>0 \text{ ve}$$

$$f''(t)=\phi''(t)-G\left[\phi(0)\right]K'(t)-G'\left[f(t)\right]f'(t)K(0)-\int_0^t K'(t-\tau)G'\left[f(\tau)\right]f'(\tau)d\tau$$

olacağından f' 'nün hiçbir kökü yoktur. Bunun aksini kabul edelim yani $x_0\in\left[0,\infty\right)$ olmak üzere f' 'nün x_0 gibi bir ilk kökü mevcut olsun. Ozaman; $f'(0)>0$ olduğundan $\tau\in\left[0,x_0\right]$ için $f'(\tau)\geq 0$ dır. Ayrıca; hipotezden $K'(t)<0$, $G'(x)\geq 0$ ve $\phi''(t)\geq G\left[\phi(0)\right]K'(t)$ olduğundan

$$f''(x_0)=\phi''(x_0)-G\left[\phi(0)\right]K'(x_0)-G'\left[f(x_0)\right]f'(x_0)K(0)$$
$$-\int_0^{x0} K'(x_0-\tau)G'\left[f(\tau)\right]f'(\tau)d\tau$$

$$= \phi''(x_0) - G[\phi(0)]K'(x_0) - \int_0^{x0} K'(x_0 - \tau)G'[f(\tau)]f'(\tau)d\tau \geq 0$$

olur. Burada iki durum söz konusudur :

1) $f''(x_0) > 0$ ise o zaman f', x_0 noktası civarında artandır. Halbuki bu, $f'(0) > 0$ olduğundan geometrik olarak mümkün değildir.

2) $f''(x_0) = 0 \Leftrightarrow \phi''(x_0) - G[\phi(0)]K'(x_0) - \int_0^{x0} K'(x_0 - \tau)G'[f(\tau)]f'(\tau)d\tau = 0$

$$\Leftrightarrow \phi''(x_0) - G[\phi(0)]K'(x_0) = 0, \int_0^{x0} K'(x_0 - \tau)G'[f(\tau)]f'(\tau)d\tau = 0$$

Ayrıca;

$\int_0^{x0} K'(x_0 - \tau)G'[f(\tau)]f'(\tau)d\tau = 0 \Leftrightarrow \tau \in [0, x_0]$ olmak üzere h.h.τ için

$$G'[f(\tau)]f'(\tau) = 0$$

olacağından

$$f'(x_0) = \phi'(x_0) - G[\phi(0)]K(x_0) - \int_0^{x0} K(x_0 - \tau)G'[f(\tau)]f'(\tau)d\tau$$

$$= \phi'(x_0) - G[\phi(0)]K(x_0) = 0$$

olur. Diğer taraftan; hipotezden $\phi''(t) \geq G[\phi(0)]K'(t)$ ve $\phi \in C^2[0,\infty), K \in C^1[0,\infty)$ olduğundan $\int_0^{x0} \phi''(t)dt \geq \int_0^{x0} G[\phi(0)]K'(t)dt$ olur. Böylece;

$$\int_0^{x0} \phi''(t)dt \geq \int_0^{x0} G[\phi(0)]K'(t)dt \Rightarrow \phi'(x_0) - \phi'(0) \geq G[\phi(0)][K(x_0) - a]$$

$$\Rightarrow \phi'(x_0) - G[\phi(0)]K(x_0) \geq \phi'(0) - G[\phi(0)]a$$

$$\Rightarrow 0 \geq \phi'(0) - G[\phi(0)]a$$

elde edilir ki bu $\phi'(0) > G[\phi(0)]a$ hipotezi ile çelişir.

Sonuç olarak, f' 'nün x_0 gibi bir ilk köke sahip olması mümkün değildir. Şu halde; f' 'nün hiçbir kökü yoktur. $f'(0) > 0$ ve f' hiçbir köke sahip olmadığından $f'(t) > 0$ dır. Yani f, monoton artandır. $f(0) = \phi(0)$ ve f, monoton artan olduğundan $\phi(0) \leq f(t)$ dir. Eğer ilk üç şarta ilâve olarak son iki şart da sağlanırsa o zaman Not 2.3.1'den $f(t) < 0$ olur ki bu iki sonucun birleştirilmesiyle $\phi(0) \leq f(t) < 0$ elde edilir.

Örnek. $G(x)=x^3$, $\phi(t)=-\ln(e+t)$ ve $K(t)=\dfrac{1}{e+t}+C$ $(C>0)$

şeklinde tanımlanan G, ϕ ve K fonksiyonları Teorem 3.1.1 ve Not 2.3.1'in hipotez şartlarını sağlar. Şu halde ; $f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)G[f(\tau)]d\tau$ denkleminin çözümü olan f fonksiyonu $\phi(0)\le f(t)<0$ eşitsizliğini sağlayan monoton artan bir fonksiyondur.

Özellik 3.1.1. Eğer Teorem 3.1.1'de $G(x)=x$ alınırsa o zaman (3.1)'in çözümü olan f fonksiyonu $\dfrac{\phi(t)}{1+\int_0^t K(\tau)d\tau}\le f(t)$ eşitsizliğini sağlar.

İspat. Verilen denklem ; $f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)G[f(\tau)]d\tau$ olup $G(x)=x$ olduğundan $f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau$ olur. Ayrıca Teorem 3.1.1'den f negatif artan olduğundan ; $0\le\tau\le t$ için $f(\tau)\le f(t)<0$ olur. Böylece;

$$f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau\ge\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)f(t)d\tau$$

$$=\phi(t)-f(t)\int_0^t K(t-\tau)d\tau$$

$$=\phi(t)-f(t)\int_0^t K(\tau)d\tau$$

$\Rightarrow f(t)\ge\phi(t)-f(t)\int_0^t K(\tau)d\tau$ olur ki buradan $f(t)\ge\dfrac{\phi(t)}{1+\int_0^t K(\tau)d\tau}$ sonucu elde edilir.

Örnekler.

1) $G(x)=x$, $\phi(t)=-\ln(e+t)$ ve $K(t)=\dfrac{1}{e+t}+C$ $(C>0)$

2) $G(x)=x$, $\phi(t)=-(2-e^{-t})$ ve $K(t)=e^{-t}+C$ $(C>0)$

3) $G(x) = x$, $\phi(t) = -3\ln(1+t) - \dfrac{1}{1+t}$ ve $K(t) = \dfrac{3}{1+t} - \dfrac{1}{(1+t)^2} + C \ (C > 0)$

(1), (2) ve (3)'te tanımlanan G, ϕ ve K fonksiyonları Teorem 3.1.1 ve Not 2.3.1'in hipotez şartlarını sağlayacağından $f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau$ denkleminin çözümü olan f fonksiyonu monoton artan olup $\phi(0) \le f(t) < 0$ eşitsizliğini sağlar.

Ayrıca ; (1), (2) ve (3)'te $G(x) = x$ olduğundan f fonksiyonu $f(t) \ge \dfrac{\phi(t)}{1 + \int_0^t K(\tau)d\tau}$ eşitsizliğini sağlar.

3.2. Konvolüsyon Çekirdekli İkinci Tip Lineer Volterra İntegral Denklemleri

Bu kısımda Teorem 3.1.1, Not 2.3.1 ve Teorem 2.1.1 (Özdeşlik Teoremi)'in kullanılmasıyla

$$f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau \tag{3.2}$$

formundaki lineer integral denklemin çözümü olan f fonksiyonunun bazı özellikleri elde edilmiştir.

Teorem 3.2.1. $t \in [0,\infty)$ olmak üzere eğer;

1) $K \in C^2[0,\infty)$, $K(t) > 0$, $K'(t) > 0$ ve $K''(t) < 0$,

2) $K(0) = a$, $K'(0) = b$ olmak üzere; $a^2 \ge 4b$,

3) $\phi \in C^2[0,\infty)$, $\phi(0) < 0$ ve $\phi''(t) \le 0$,

4) γ, $\frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2 - 4b}\right)$ pozitif sayıları arasında olmak üzere; $\phi'(0) \le \gamma\, \phi(0)$

sağlansın. Bu taktirde, (3.2) denkleminin çözümü olan f fonksiyonu $\phi(t) \le f(t) < 0$ eşitsizliğini sağlar.

İspat. Denklem $f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau = \phi(t) - K * f$ olup Teorem-2.1.1'de $g(t) = e^{-\gamma t}(\gamma \in \mathbb{R})$ şeklinde alınırsa;

$$\psi(t)=\phi(t)+\int_0^t g'(t-\tau)\phi(\tau)d\tau=\phi(t)+g'*\phi=\phi(t)-\gamma\, e^{-\gamma t}*\phi \text{ ve}$$

$$L(t)=g'(t)+a\,g(t)+\int_0^t K'(t-\tau)g(\tau)d\tau=(a-\gamma)e^{-\gamma t}+K'*e^{-\gamma t}$$

olacağından bu denklemin özdeşi $f(t)=\psi(t)-L*f$ olur. Burada özdeş denklemin çekirdeği $L(t)=(a-\gamma)e^{-\gamma t}+K'*e^{-\gamma t}$ olduğundan

$$L'(t)=-\gamma\,(a-\gamma)e^{-\gamma t}+K'(0)e^{-\gamma t}+K''*e^{-\gamma t}=(\gamma^2-a\gamma+b)e^{-\gamma t}+K''*e^{-\gamma t}$$

olur. Şimdi $\gamma\in\mathbb{R}$ sayısını $\left(\gamma^2-a\gamma+b\right)=0$ denkleminin kökleri olan $\gamma_{1,2}=\frac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{a^2-4b}\right)$ sayıları arasında seçelim. O zaman $\gamma_{1,2}>0$ dır. Zira;

$$\gamma_{1,2}>0\Leftrightarrow\frac{1}{2}\left(a\pm\sqrt{a^2-4b}\right)>0\Leftrightarrow a-\sqrt{a^2-4b}>0\Leftrightarrow 0>-4b\Leftrightarrow b>0$$

dır. Ayrıca seçilen bu $\gamma\in\mathbb{R}$ sayısı için $\left(\gamma^2-a\gamma+b\right)<0$ olacağından $L'(t)<0$ olur.

Diğer taraftan;

$(a-\gamma)>0\Leftarrow a-\gamma_2>0\Leftrightarrow a>\frac{1}{2}\left(a+\sqrt{a^2-4b}\right)\Leftrightarrow 0>-4b\Leftrightarrow b>0$ ve hipotezde $K'(t)>0$ olduğundan $L(t)=(a-\gamma)e^{-\gamma t}+K'*e^{-\gamma t}>0$ dır. Ayrıca $K\in C^2[0,\infty)$ olduğundan $L\in C^1[0,\infty)$ dir. Demek ki $f(t)=\psi(t)-L*f$ özdeş denklemi Not 2.3.1'in (1) şartını sağar. Yine özdeş denklemde $G(x)=x$ olduğundan Not 2.3.1'in (2) şartı da açık olarak sağlanır. Şimdi Not 2.3.1'in (3) şartına karşılık gelen $\psi\in C^1[0,\infty)$, $\psi(0)<0$ ve $\psi'(t)\le 0$ şartlarının sağlandığını görelim. $\psi(0)=\phi(0)<0$ olduğundan $\psi(0)<0$ şartı sağlanır.

$$\psi(t)=\phi(t)+\int_0^t g'(t-\tau)\phi(\tau)d\tau=\phi(t)+g'*\phi=\phi(t)-\gamma\, e^{-\gamma t}*\phi$$
$$=\phi(t)-\gamma\phi*e^{-\gamma t}$$

olup böylece;

$$\psi'(t)=\phi'(t)-\gamma\left[e^{-\gamma t}\phi(0)+\phi'*e^{-\gamma t}\right]=\phi'(t)-\gamma\, e^{-\gamma t}\phi(0)-\gamma\, e^{-\gamma t}*\phi'$$

olduğundan ve hipotezde $\phi\in C^2[0,\infty)$ verildiğinden $\psi\in C^1[0,\infty)$ dir. $\psi'(t)$'de

$e^{-\gamma t}*\phi'=\phi'*e^{-\gamma t}=\int_0^t\phi'(t-\tau)e^{-\gamma\tau}d\tau$ ifadesinde $u=\phi'(t-\tau)$ ve $dv=e^{-\gamma\tau}d\tau$

alınıp kısmî integrasyon uygulanırsa o zaman

$$\int_0^t \phi'(t-\tau)e^{-\gamma\tau}d\tau = -\frac{1}{\gamma}\left(\phi'(t-\tau)e^{-\gamma\tau}\Big|_0^t\right) - \frac{1}{\gamma}\int_0^t \phi''(t-\tau)e^{-\gamma\tau}d\tau$$

$$= -\frac{1}{\gamma}\phi'(0)e^{-\gamma t} + \frac{\phi'(t)}{\gamma} - \frac{1}{\gamma}e^{-\gamma t} * \phi''$$

olacağından $\psi'(t) = [\phi'(0) - \gamma\,\phi(0)]e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} * \phi'' \leq 0$ elde edilir. Böylece; $f(t) = \psi(t) - L * f$ denklemi Not 2.3.1'in hipotez şartlarını sağlar. Şu halde, bu denklemin çözümü olan f fonksiyonu $\psi(t) \leq f(t) < 0$ eşitsizliğini sağlar. Bu ise $f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau = \phi(t) - K * f$ denkleminin çözümü olan f fonksiyonu nun $\psi(t) \leq f(t) < 0$ eşitsizliğini sağlaması demektir. Diğer taraftan; hipotezde $K(t) > 0$ olduğundan $\phi(t) \leq f(t)$ olduğunu söyleyebiliriz. Buradan da $\phi(t) \leq f(t) < 0$ sonucunu elde ederiz.

Örnekler.

1) $K(t) = \ln\left(e^2 + t\right)$, $\phi(t) = -\left(t^2 + 2t + 1\right)$ ve $\gamma = \frac{a}{2} = 1$

2) $K(t) = \ln\left(e^2 + t\right)$, $\phi(t) = -\sqrt{(1+t)^3}$ ve $\gamma = \frac{a}{2} = 1$

3) $K(t) = \sqrt{(4+t)}$, $\phi(t) = -\left(t^2 + 2t + 1\right)$ (veya $\phi(t) = -\sqrt{(1+t)^3}$) ve $\gamma = \frac{a}{2} = 1$

(1), (2) ve (3)'te tanımlanan K ve ϕ fonksiyonları ile $\gamma \in \mathbb{R}$ sayısı Teorem 3.2.1'deki şartları sağlayacağından $f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau$ denkleminin çözümü olan f fonksiyonu $\phi(t) \leq f(t) < 0$ eşitsizliğini sağlar.

Teorem 3.2.2. $t \in [0,\infty)$ olmak üzere eğer;

1) $K \in C^2[0,\infty)$, $K(t) > 0$, $K'(t) > 0$ ve $K''(t) < 0$,

2) $K(0) = a$, $K'(0) = b$ olmak üzere; $a^2 \geq 4b$,

3) $\phi \in C^3[0,\infty)$, $\phi'(0) > \phi(0)a$ ve $\phi'''(t) \geq \phi(0)K''(t)$,

4) γ , $\frac{1}{2}\left(a \pm \sqrt{a^2-4b}\right)$ pozitif sayıları arasında olmak üzere;

$\phi''(0) - \gamma\,\phi'(0) \geq \phi(0)(b - a\gamma)$ sağlansın. O zaman (3.2) denkleminin çözümü olan f fonksiyonu $f'(t) > 0$ eşitsizliğini sağlar. Eğer; (1), (2), (3) ve (4)'e ilâve olarak;

5) $\phi(0) < 0$ ve $\phi''(t) \leq 0$ ve

6) $\phi'(0) \leq \gamma\,\phi(0)$

şartları da sağlanırsa bu taktirde (3.2) denkleminin çözümü olan f fonksiyonu hem monoton artandır hem de $\phi(0) \leq f(t) < 0$ eşitsizliğini sağlar.

İspat. Ele alınan denklem

$$f(t) = \phi(t) - \int_0^t K(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = \phi(t) - K * f$$

olup Teorem 2.1.1'de $g(t) = e^{-\gamma t} (\gamma \in \mathbb{R})$ seçilirse Teorem 3.2.1'de elde edildiği gibi $\psi(t) = \phi(t) - \gamma e^{-\gamma t} * \phi$ ve $L(t) = (a-\gamma)e^{-\gamma t} + K' * e^{-\gamma t}$ olacağından bu denklemin özdeşi $f(t) = \psi(t) - L * f$ şeklindedir. Eğer $\gamma \in \mathbb{R}$'yi $\left(\gamma^2 - a\gamma + b\right) = 0$ denkleminin kökleri arasında seçersek Teorem 3.2.1'deki gibi

$$L'(t) = \left(\gamma^2 - a\gamma + b\right)e^{-\gamma t} + K'' * e^{-\gamma t} < 0$$

$L(t) = \left(a-\gamma\right)e^{-\gamma t} + K' * e^{-\gamma t} > 0$ ve $L \in C^1[0,\infty)$ elde edilir. Şu halde;

$f(t) = \psi(t) - L * f$ denklemi Teorem 3.1.1'in (1) şartını sağlar. Diğer taraftan $G(x) = x$ olduğundan özdeş denklem Teorem 3.1.1'in (2) şartını da sağlar. Son olarak ; aynı Teoremin (3) şartına karşılık gelen $\psi \in C^2[0,\infty)$, $\psi'(0) > \psi(0)L(0)$ ve $\psi''(t) \geq \psi(0)L'(t)$ şartlarını sağlayalım. Bir önceki Teorem 3.2.1'de olduğu gibi $\psi'(t) = \left[\phi'(0) - \gamma\,\phi(0)\right]e^{-\gamma t} + e^{-\gamma t} * \phi''$, $\psi(0) = \phi(0)$ ve $L(0) = a - \gamma$ olduğu gözönüne alınırsa, $\psi'(0) = \left[\phi'(0) - \gamma\,\phi(0)\right]$ olup hipotezde $\phi'(0) > \phi(0)a$ olduğundan $\left[\phi'(0) - \gamma\,\phi(0)\right] > \phi(0)(a-\gamma)$ olur. Yani

$\psi'(0) > \psi(0)L(0)$ dır. Diğer taraftan ;

$$\psi''(t) = -\gamma\left[\phi'(0) - \gamma\,\phi(0)\right]e^{-\gamma t} + \left(\phi'' * e^{-\gamma t}\right)'$$

$$=\left[-\gamma\,\phi'(0)+\gamma^2\phi(0)\right]e^{-\gamma t}+\phi''(0)e^{-\gamma t}+\phi'''*e^{-\gamma t}$$

$$=\left[-\gamma\,\phi'(0)+\gamma^2\phi(0)+\phi''(0)\right]e^{-\gamma t}+e^{-\gamma t}*\phi'''$$

olup $\phi\in C^3\left[0,\infty\right)$ olduğundan $\psi\in C^2\left[0,\infty\right)$ dir. Ayrıca

$L'(t)=(\gamma^2-a\gamma+b)e^{-\gamma t}+e^{-\gamma t}*K''$ olduğundan;

$$\psi(0)L'(t)=\phi(0)L'(t)=\phi(0)(\gamma^2-a\gamma+b)e^{-\gamma t}+\phi(0)e^{-\gamma t}*K''$$
$$=\phi(0)(\gamma^2-a\gamma+b)e^{-\gamma t}+e^{-\gamma t}*\phi(0)K''$$

olur.

Böylece ; $\left[-\gamma\,\phi'(0)+\gamma^2\phi(0)+\phi''(0)\right]\geq\phi(0)\left(\gamma^2-a\gamma+b\right)$ ve $\phi'''(t)\geq\phi(0)K''(t)$

eşitsizlikleri geçerli olduğundan $\psi''(t)\geq\psi(0)L'(t)$ dir. Bunu görelim:

$$\left[-\gamma\,\phi'(0)+\gamma^2\phi(0)+\phi''(0)\right]\geq\phi(0)\left(\gamma^2-a\gamma+b\right)\Leftrightarrow\phi''(0)-\gamma\,\phi'(0)\geq\phi(0)\left(b-\gamma a\right)$$

olup $\phi''(0)-\gamma\,\phi'(0)\geq\phi(0)\left(b-a\gamma\right)$ eşitsizliği hipotezde mevcut bulunduğundan sol taraftaki eşitsizlik geçerlidir. Yine $\phi'''(t)\geq\phi(0)K''(t)$ eşitsizliği hipotezde mevcut olduğundan $\psi''(t)\geq\psi(0)L'(t)$ dir. Sonuç olarak ; $f(t)=\psi(t)-L*f$ denklemi için Teorem 3.1.1'in bütün şartları sağlanmaktadır. Şu halde; bu denklemin çözümü olan f fonksiyonu $f'(t)>0$ eşitsizliğini sağlar yani f monoton artandır. $f(0)=\phi(0)$ ve f monoton artan olduğundan $\phi(0)\leq f(t)$ dir. Ayrıca; ilk dört şarta ilâveten son iki şart da sağlanırsa o zaman Teorem 3.2.1'den $f(t)<0$ olur ki bu iki sonuçtan $\phi(0)\leq f(t)<0$ elde edilir.

Örnek. $\phi(t)=\left(e^2+t\right)\left[1-\ln\left(e^2+t\right)\right]+\left(e^2-1\right)$, $K(t)=\ln\left(e^2+t\right)+2t+1$ ve $\gamma=\dfrac{3}{2}$ şeklinde tanımlanan K ve ϕ fonksiyonları ile $\gamma\in\mathbb{R}$ sayısı Teorem 3.2.2'deki altı şartı sağlayacağından ; $f(t)=\phi(t)-\int_0^t K(t-\tau)f(\tau)d\tau=\phi(t)-K*f$ denkleminin çözümü olan f fonksiyonu monoton artandır üstelik bu fonksiyon $\phi(0)\leq f(t)<0$ eşitsizliğini sağlar.

KAYNAKLAR

Bellman, R. ; Cooke, K.L. : Differential - Difference Equations, Acedemic Pres, New York. (1963)

Corduneanu, C. : Principles of Differential and Integral Equations, Allyn and Bacon inc., Boston. (1971)

Davis, H.T. : The Theory of the Volterra Integral Equation of Second Kind, Indiana University Studies, Vol. 17, America. (1930)

Friedman, A. : On Integral Equations of Volterra Type, j. Analyse Math. 11: 381-413 (1963)

Friedman, A. ; Shinbrot, M. : Volterra Integral Equations in Banach Space, Trans. Amer. Math. Soc. 126: 131-179 (1967)

Kanwal, Ram P. : Linear Integral Equations Theory and Technique, Acedemic Pres, New York. (1971)

Ling, R. : Integral Equation of Volterra Type, Journal of Mathemathical Analysis and Applications 64: 381-397.(1978)

Lovitt, W. V. : Linear Integral Equations, Dover Publications Inc., New York. (1950)

Moiseiwitsc, B.L. : Integral Equations, Longman Group Limited, New York. (1977)

Rudin, W. : Functional Analysis, Mc. Grav - Hill Book Company, New York. (1973)

Tricomi, F.G. : Integral Equations, Interscience Publishers Inc., New York. (1957)

Zabreyko, P.P. : Integral Equations, Noordhoff International Publishing, Leyden.(1975)

ÖZGEÇMİŞ

02. 06. 1974 tarihinde Elazığ'da doğdu. Sırasıyla; Elazığ Atatürk İlkokulu, Elazığ Atatürk Ortaokulu ve Elazığ Lisesi'ni bitirdikten sonra 1992 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Eğitimi Bölümü Matematik Anabilim Dalı'na girmeye hak kazandı. 1996 yılında mezun oldu. Aynı yıl İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisansa başladı. 1997 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Eğitimi Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Halen bu görevine devam etmektedir.