

T.C.  
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KORTEWEG-de VRIES (KdV) DENKLEMİNİN  
SPLINE BAZ FONKSİYONLARI YARDIMIYLA  
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

MUHARREM ÖZLÜK

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA  
Haziran 2005

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,  
Bu çalışma Jürimiz tarafından Matematik Anabilim dalında YÜKSEK LİSANS  
TEZİ olarak kabul edilmiştir.

---

Prof. Dr. Sadık KELEŞ  
Başkan

---

Yrd. Doç. Dr. Turabi GEYİKLİ  
Üye

---

Doç. Dr. A. Refik BAHADIR  
Üye

---

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..../..../.....

Prof. Dr. Ali ŞAHİN  
Enstitü Müdürü

## ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

# KORTEWEG-de VRIES (KdV) DENKLEMİNİN SPLINE BAZ FONKSİYONLARI YARDIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Muharrem ÖZLÜK  
İnönü Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı  
64 + ix sayfa  
2005

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Turabi GEYİKLİ

Korteweg-de Vries (KdV) denklemi farklı fiziksel sistemlerde karşılaşılan önemli bir nonlinear kısmi diferansiyel denklemdir.

Bu yüksek lisans tezinde KdV denkleminin B-spline fonksiyonları yardımıyla sonlu eleman yöntemleri kullanılarak nümerik çözümleri incelendi.

Tezin birinci bölümünde KdV denkleminin teorik altyapısı ele alındı. İkinci bölümde sonlu eleman yöntemleri, spline ve B-spline fonksiyonları, Galerkin ve Collocation yöntemleri ile KdV denkleminin korunum ilkeleri verildi. Sonraki bölümlerde KdV denkleminin Kuadratik ve Kübik B-spline fonksiyonları kullanılarak Galerkin yöntemiyle, Kuartik ve Kuintik B-spline fonksiyonları kullanılarak Collocation yöntemiyle nümerik çözümleri elde edildi. Sonuçlar

önceki araştırmacıların elde ettiği nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Uygulanan yöntemlerin kararlılık analizleri von Neumann yöntemi ile yapıldı.

Sonuç olarak B-spline fonksiyonları kullanılarak uygulanan Galerkin ve Collocation yöntemlerinin yeterince iyi sonuçlar verdiği görüldü. Bu nedenle diğer nonlinear kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde B-spline fonksiyonlarının kullanılması önerilmektedir.

Anahtar Kelimeler : Korteweg-de Vries, KdV, Sonlu Eleman Yöntemi, B-Spline, Galerkin, Collocation.

ABSTRACT  
Master Thesis

**NUMERICAL SOLUTIONS OF THE KORTEWEG-de  
VRIES (KdV) EQUATION USING SPLINE BASE  
FUNCTIONS**

Muharrem ÖZLÜK,  
İnönü University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics  
64 + ix pages  
2005

Supervisor : Assist.Prof. Turabi GEYİKLİ

The Korteweg-de Vries (KdV) equation is an important partial differential equation which arises in the study of many physical systems.

In this MSc. Thesis, numerical solutions of the KdV equation based on finite element methods using B-spline functions are investigated.

In the first chapter of this thesis, theoretical background of the KdV equation is discussed. In the second chapter, finite element methods, spline and B-spline functions, Galerkin and Collocation methods and the conservation laws for the KdV equation are given. In the following chapters, numerical solutions of KdV equation are obtained with Galerkin and Collocation methods using Quadratic, Cubic, Quartic and Quintic B-spline functions. Computed results are compared with the numerical results given by previous authors.

The stability analysis of the numerical techniques based on von Neumann theory is given.

As a result, Galerkin and Collocation methods with B-spline functions give adequately good results. So it is recommended that B-spline functions can be used for solving other nonlinear partial differential equations.

Keywords: Korteweg-de Vries, KdV, Finite Element Method, B-Spline, Galerkin, Collocation.

## TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması ve algoritmik çalışmaların yapılması sırasında her türlü destek ve yardımlarını esirgemeyen başta sayın danışmanım Yrd.Doç.Dr. Turabi GEYİKLİ'ye olmak üzere Matematik bölüm başkanı Prof.Dr. Sadık KELEŞ'e, Doç.Dr. Selçuk KUTLUAY'a, Arş.Gör.Dr. Alaattin ESEN'e ve Öğr.Gör. Yusuf UÇAR'a teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

# İçindekiler

<b>Özet</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>v</b>
<b>TEŞEKKÜR</b>	<b>vii</b>
<b>Bölüm 1. GİRİŞ</b>	<b>1</b>
1.1 Korteweg-de Vries (KdV) Denklemi . . . . .	1
<b>Bölüm 2. TEMEL KAVRAMLAR</b>	<b>4</b>
2.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi . . . . .	4
2.2 Spline Fonksiyonlar . . . . .	6
2.3 B-Spline Fonksiyonlar . . . . .	7
2.3.1 Lineer B-Spline Fonksiyonlar . . . . .	7
2.3.2 Quadratic B-Spline Fonksiyonlar . . . . .	8
2.3.3 Cubic B-Spline Fonksiyonlar . . . . .	8
2.3.4 Quartic B-Spline Fonksiyonlar . . . . .	9
2.3.5 Quintic B-Spline Fonksiyonlar . . . . .	9
2.4 Galerkin ve Collocation Yöntemleri . . . . .	10
2.4.1 Galerkin Yöntemi . . . . .	10
2.4.2 Collocation Yöntemi . . . . .	10
2.5 KdV Denklemine İncelenmesi . . . . .	11
2.5.1 Analitik Çözüm . . . . .	11
2.5.2 Korunum İlkeleri . . . . .	12
<b>Bölüm 3. QUADRATIC B-SPLINE FONKSİYONLARI İLE GALERKİN YÖNTEMİ</b>	<b>14</b>
3.1 Giriş: . . . . .	14
3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Denklem Çözümü: . . . . .	14
3.3 Kararlılık Analizi: . . . . .	19
3.4 Test Problemler: . . . . .	20



<b>Bölüm 4. CUBIC B-SPLINE FONKSİYONLARI İLE GALERKİN YÖNTEMİ</b>	<b>22</b>
4.1 Giriş: . . . . .	22
4.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Denklemin Çözümü: . . . . .	22
4.3 Kararlılık Analizi: . . . . .	27
4.4 Test Problemler: . . . . .	28
<b>Bölüm 5. QUADRATIC B-SPLINE FONKSİYONLARI İLE GALERKİN YÖNTEMİNDE FARKLI BİR ALGORİTMA</b>	<b>31</b>
5.1 Giriş: . . . . .	31
5.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Denklemin Çözümü: . . . . .	31
5.3 Kararlılık Analizi: . . . . .	35
5.4 Test Problemler: . . . . .	36
<b>Bölüm 6. QUARTIC B-SPLINE FONKSİYONLARI İLE COLLOCATION YÖNTEMİ</b>	<b>39</b>
6.1 Giriş: . . . . .	39
6.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Denklemin Çözümü: . . . . .	39
6.3 Kararlılık Analizi: . . . . .	44
6.4 Test Problemler: . . . . .	45
<b>Bölüm 7. QUINTIC B-SPLINE FONKSİYONLARI İLE COLLOCATION YÖNTEMİ</b>	<b>50</b>
7.1 Giriş: . . . . .	50
7.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Denklemin Çözümü: . . . . .	50
7.3 Kararlılık Analizi: . . . . .	56
7.4 Test Problemler: . . . . .	57
<b>Bölüm 8. SONUÇ ve ÖNERİLER</b>	<b>59</b>
<b>Bölüm 9. Kaynaklar</b>	<b>60</b>
<b>Özgeçmiş</b>	<b>64</b>

# Bölüm 1

## GİRİŞ

### 1.1 Korteweg-de Vries (KdV) Denklemi

Bağımsız dalgalar (solitary waves) ilk defa 1834 yılında durgun bir teknenin ön tarafından kopan yuvarlak, düzgün ve oldukça belirgin bir su kümesinin, şeklinde bir değişiklik veya hızında en ufak bir azalma olmaksızın yaklaşık 3 kilometrelik bir kanal boyunca ilerlediğinin Scott Russell [1] tarafından gözlemlenmesiyle kayda geçmiştir. Salınım yapan diğer dalga türlerinden farklı hareket biçimi nedeniyle yine Russell tarafından bunlara "bağımsız dalga" adı verilmiştir. 1847 yılında Stokes [2] ve 1872 yılında Boussinesq [3] gibi birçok matematikçi kısaca bu konudan bahsetmiş olsa da sığ sulardaki bağımsız dalgaların profilini gözlemleyen Scott Russell'dan sonraki ilk teorik çalışmalar 1895 yılında Korteweg ve de Vries'e aittir. Korteweg ve de Vries [4] sığ bir kanalda tek yönde ilerleyen dalgaların oluşumuna dair günümüzde oldukça ilgi çeken denklemi bulmuşlardır.

$l$ : kanalın derinliği

$l + \eta$ : ( $\eta$  küçük olmak üzere ) yüzeyin dipten itibaren yüksekliği

$\alpha$ : sıvının düzgün hareketi ile ilgili küçük bir sabit

$\sigma$ :  $\frac{l^3}{3} - \frac{Tl}{\rho g}$  bir parametre

$T$ : yüzey gerilimi

$g$ : yerçekimi ivmesi

$\rho$ : sıvının yoğunluğu

olmak üzere dalganın hareketi ile ilgili kısmi diferansiyel denklem

$$\eta_\tau = \frac{3}{2} \sqrt{\frac{g}{l}} \frac{\partial}{\partial x} \left[ \frac{2}{3} \alpha \eta + \frac{1}{2} \eta^2 + \frac{1}{3} \sigma \frac{\partial^2 \eta}{\partial^2 x} \right] \quad (1.1)$$

biçimindedir.

$$\eta = \beta \alpha u, \quad \xi = -\sqrt{\frac{2\alpha\mu}{\sigma}} x, \quad \tau = \sqrt{\frac{2g\mu\alpha}{\sigma l}} t$$

dönüşümleriyle (1.1) denklemi

$$u_\tau + u_\xi + \varepsilon u u_\xi + \mu u_{\xi\xi\xi} = 0 \quad (1.2)$$

halini alır. Burada  $\varepsilon = \frac{3}{2}\beta$  ve  $\mu$  bilinen parametrelerdir. (1.2) denkleminde  $x = \xi - \tau$  dönüşümü yapılır ve  $\tau$  yerine  $t$  yazılırsa

$$u_t + \varepsilon u u_x + \mu u_{xxx} = 0$$

KdV denklemi elde edilir [5].

KdV denklemi inverse scattering yöntemiyle [7] analitik olarak çözülebilir olmasına rağmen bu yöntemin zamandan bağımsız Schrödinger denkleminde bağı olarak sadece birkaç özel potansiyel için sonuç veriyor olması sebebiyle nümerik çözümleri önemini korumaktadır. KdV denkleminin nümerik çözümünü ilk olarak Zabusky ve Kruskal [8] sonlu farklar yöntemini kullanarak elde etmişlerdir. O çalışmada iki bağımsız dalganın etkileşiminin özellikleri ortaya konulmuştur. Zabusky ve Kruskal, ikinci bir dalgayla karşılaştığında geçiş aşaması hariç, şeklini koruyarak düzgün hızla ilerleyen dalgalar için soliton kavramını tanımlamışlardır. Sonlu elemanlar yöntemini ise ilk olarak uygulayan Wahibin [10] olmuştur. Trial ve test fonksiyonlarını aynı seçerek uyguladığı dissipative Galerkin yönteminde kullandığı baz fonksiyonlar üç veya daha yüksek dereceli polinomlardan elde edilen düzgün spline fonksiyonlar

olup aralıklar aynı  $h$  uzunluğunda seçilmiştir. Bu yöntemin nümerik hesapları Alexander ve Morris [11] tarafından 0 ile 1 aralığında seçilen dissipation katsayıları ile kübik spline fonksiyonları kullanılarak yapılmıştır [31].

KdV denklemi çok farklı fiziksel sistemlerde ortaya çıktığından önemli bir nonlinear kısmi diferansiyel denklemdir. Analitik çözümleri sınırlı birkaç başlangıç değeri için bulunabildiğinden başlangıç değerinin çok çeşitli seçilebildiği nümerik çözümler gerekli olmaktadır. Bu tezin 2.bölümünde sonlu elemanlar yöntemi, ağırlıklı kalan yöntemlerinden Galerkin ve Collocation yöntemleri ile B-spline fonksiyonları hakkında temel bilgiler verilmekte ardından KdV denkleminin analitik çözümü ile korunum ilkeleri verilmektedir. 3.,4. ve 5. bölümlerde KdV denkleminin Quadratic ve Cubic B-spline fonksiyonları kullanılarak galerkin yöntemiyle sonlu elemanlar çözümü yapılmış elde edilen değerler tablo ve grafiklerle gösterilmiştir. 6. ve 7. bölümlerde KdV denkleminin Quartic ve Quintic B-spline fonksiyonları kullanılarak collocation yöntemiyle sonlu elemanlar çözümü yapılmış elde edilen değerler tablo ve grafiklerle gösterilmiştir.

## Bölüm 2

### TEMEL KAVRAMLAR

#### 2.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu eleman terimi ilk olarak 1960 yılında Clough [12] tarafından kullanıldı. Sonlu eleman yöntemleri; uzay bilimleri, nükleer enerji endüstrisi ve diğer mühendislik alanlarında ortaya çıkan problemler ile birlikte akışkanlar mekaniği, gelgit hareketleri, kimyasal taşıma ve difüzyon problemlerine de başarılı bir şekilde uygulanmaktadır. Bir sonlu eleman yönteminin bir probleme uygulanmasında genellikle aşağıdaki yol izlenir:

- Çözüm bölgesi sonlu sayıda alt bölge veya aralığa ayrılır,
- Genelleştirilen bir aralık üzerinde verilen denklem türetilir,
- Çözüm bölgesinde tüm aralıklar birleştirilir,
- Elde edilen denklem sistemi çözülür.

Sonlu eleman yöntemlerinin integral formülasyonları temelde varyasyonel ve ağırlıklı kalan yöntemleri olarak iki farklı yoldan elde edilir. Varyasyonel yöntemler genellikle fonksiyonel olarak bilinen özel bir integral bağıntısının maksimum veya minimumunu oluşturan noktasal parametreleri bulmayı amaçlar. Fonksiyonelin ekstremumunu üreten çözüm, sınır şartlarını sağlar ve Euler denklemi olarak bilinen bir diferansiyel denklem sistemine dönüşür. Dolayısıyla fonksiyonelin bilinmesi durumunda fonksiyonele karşılık gelen Euler

denklemini bulmak da kolaylaşır. Ancak bu fonksiyonelin bulunması bazen oldukça zor olmakta bazen de mümkün olmamaktadır. Bu nedenle orijinal diferansiyel denklemden integral formülasyonun yapıldığı değişik ağırlıklı kalan yöntemleri geliştirilmiştir.

Ağırlıklı kalan yöntemlerini ifade edebilmek için,  $\Omega$  çözüm bölgesini göstermek üzere;

$$AU = f, \quad \Omega = (a, b) \quad (2.1)$$

operatör denklemini gözönüne alalım. Burada  $A$  lineer veya lineer olmayan bir diferansiyel operatör ve  $f$  bağımsız değişkenlerin bilinen bir fonksiyonudur. Ağırlıklı kalan yöntemlerinde  $U_N$  yaklaşık çözüm,  $\delta_j$  belirlenmesi gereken serbest parametreler olmak üzere;

$$U_N = \sum_{j=1}^N \phi_j \delta_j \quad (2.2)$$

olarak seçilir. Burada  $\phi_j$  trial baz fonksiyonlarıdır. (2.2) yaklaşık çözümü (2.1) operatör denkleminde yerine yazılırsa

$$R_N = AU_N - f \quad (2.3)$$

olarak tanımlanan  $R_N$  kalanı elde edilir. Ağırlıklı kalan yöntemlerinde  $R_N$  kalanı, seçilen  $\phi_j$  fonksiyonları ve  $\delta_j$  bilinmeyen parametrelerinin bir fonksiyonudur. Bu yöntemler yardımı ile  $\delta_j$  parametrelerinin belirlenmesinde,  $R_N$  kalanı ile bir  $\psi_j$  ağırlık fonksiyonunun çarpımının  $\Omega$  bölgesindeki integralinin sıfır olması istenir:

$$\int_{\Omega} \psi_j R_N dx = 0, \quad j = 1, 2, \dots, N \quad (2.4)$$

(2.3) ile verilen  $R_N$  kalanı (2.4) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\sum_{j=1}^N \left( \int_{\Omega} \psi_i A \phi_j dx \right) \delta_j = \int_{\Omega} \psi_i f dx$$

ve

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \psi_i A \phi_j dx, \quad f_i = \int_{\Omega} \psi_i f dx$$

olarak alınırsa

$$\sum_{j=1}^N A_{ij} \delta_j = f_i \quad (2.5)$$

bulunur. (2.5) denklem sistemi çözülerek  $\delta_j$  parametreleri bulunur ve  $u_N$  yaklaşık çözümüne ulaşılır.

## 2.2 Spline Fonksiyonlar

İlk olarak Schoenberg [13] tarafından tanıtılan spline fonksiyonlar ve bu fonksiyonların uygulamaları son dönemlerde gelişme göstermiştir. Spline fonksiyonlar yapısal özellikleri ve bilgisayarlarla yapılan hesaplamalarda kolaylıklar sağlaması nedeniyle de bir çok alanda yaygın bir şekilde kullanılmaktadır. İnterpolasyon formüllerinin  $[a, b]$  aralığının tamamına uygulanması her zaman istenilen sonucu vermeyebilir. Öyle ki yüksek dereceden polinomlar kullanılarak yapılan interpolasyonlardaki işlem hatalarının artmasıyla gerçek anlamda kararsız algoritmalarla karşılaşılır. Birçok durumda kullanılan noktaların sayısının artması çözümün iraksaması anlamına gelir. Ayrıca istenilen fonksiyon  $[a, b]$  aralığının değişik kısımlarında değişik özelliklere sahip ise örneğin, bölgenin bir kısmında hızlı diğer kısmında yavaş değişiyorsa fonksiyona tek bir eğri ile yaklaşmak uygun sonuçlara götürmez. Bu nedenlerden dolayı yüksek derecesi olmayan birinci, ikinci veya üçüncü dereceden fonksiyonlar ile yaklaşımların yapıldığı spline interpolasyon yöntemini kullanmak daha uygundur. Spline interpolasyon parçalı polinom yaklaşımıdır. Yani verilen çözüm aralığı sonlu sayıda alt aralıklara bölünerek her bir alt aralıkta daha küçük dereceden polinomlar yardımı ile yaklaşımlar elde edilir. Spline fonksiyonlar,

$a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  sonlu parçalanışının her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığında  $k$ . dereceden uygun bir polinomlar olup, tanımlanan her alt aralıkta  $(k - 1)$ . mertebeden türevlenebilen sürekli fonksiyonlardır. Spline fonksiyonların temel özellikleri aşağıda verilmiştir [14].

- Spline fonksiyonlar uygun bazlara sahip sonlu boyutlu lineer uzaylardır,
- Spline fonksiyonlar düzgün (*smooth*) fonksiyonlardır,
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri kolay hesaplanabilir,
- Spline fonksiyonların türevleri ve integralleri yine spline fonksiyonlardır,
- Nümerik analizde ve yaklaşım teorilerinde spline fonksiyonların kullanılması durumunda matrisler ortaya çıkar. Bu matrisler uygun determinant özelliklerine sahiptir,
- Yeterince parçalara ayrılmış  $[a, b]$  aralığı üzerinde her sürekli fonksiyona  $k$ . dereceden spline fonksiyonlar yardımı ile iyi yaklaşımlar elde edilebilir,
- Spline fonksiyonlar yardımı ile sadece fonksiyonlara değil aynı zamanda onların türevlerine de ulaşılabilir,
- Düşük dereceden spline fonksiyonlar polinomlarda ortaya çıkan salınımları sergilemezler.

## 2.3 B-Spline Fonksiyonlar

### 2.3.1 Linear B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığının bir düzgün parçalanışı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olmak üzere  $x_m$  noktalarında  $L_m(x)$  Linear B-spline fonksiyonları;

$$L_m(x) = \frac{1}{h} \begin{cases} (x_{m+1} - x) - 2(x_m - x) & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+1} - x) & [x_m, x_{m+1}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (2.6)$$



olarak tanımlanır. Burada  $h = x_{m+1} - x_m$  dir. (2.6) daki Linear B-spline fonksiyonlarıyla bir  $[x_{m-1}, x_m]$  aralığı  $L_m$  ve  $L_{m+1}$  biçimindeki iki spline tarafından örtülür.

### 2.3.2 Quadratic B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığının bir düzgün parçalanışı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olmak üzere  $x_m$  noktalarında  $Q_m(x)$  Quadratic B-spline fonksiyonları;

$$Q_m(x) = \frac{1}{h^2} \begin{cases} [x_{m+2} - x]^2 - 3[x_{m+1} - x]^2 + 3[x_m - x]^2 & [x_{m-1}, x_m] \\ [x_{m+2} - x]^2 - 3[x_{m+1} - x]^2 & [x_m, x_{m+1}] \\ [x_{m+2} - x]^2 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (2.7)$$

olarak tanımlanır. Burada  $h = x_{m+1} - x_m$  dir. Quadratic B-spline fonksiyonları ve onun birinci mertebeden türevleri  $[x_{m-1}, x_{m+2}]$  aralığı dışında sıfırdır. Sadece aralıktaki elemanlar göz önüne alındığında (2.7) deki Quadratic B-spline fonksiyonlarıyla her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı  $Q_{m-1}, Q_m, Q_{m+1}$  gibi üç spline tarafından örtülür.

### 2.3.3 Cubic B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığının bir düzgün parçalanışı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olmak üzere  $x_m$  noktalarında  $\Psi_m(x)$  Cubic B-spline fonksiyonları;

$$\Psi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m+2})^3 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3 & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (2.8)$$

olarak tanımlanır. Burada  $h = x_{m+1} - x_m$  dir. Cubic B-spline fonksiyonları ile onun birinci ve ikinci mertebeden türevleri  $x_{m-2} \leq x \leq x_{m+2}$  aralığı dışında sıfırdır. (2.8) deki Cubic B-spline fonksiyonları her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı  $\Psi_{m-1}, \Psi_m, \Psi_{m+1}$  ve  $\Psi_{m+2}$  gibi dört spline tarafından örtülür.

### 2.3.4 Quartic B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığının bir düzgün parçalanışı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olmak üzere  $x_m$  noktalarında  $\Phi_m(x)$  Quartic B-spline fonksiyonları;

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4 + 10(x_{m+1} - x)^4 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ -10(x_m - x)^4 + 5(x_{m-1} - x)^4 & [x_{m-1}, x_m] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4 + 10(x_{m+1} - x)^4 & [x_m, x_{m+1}] \\ -10(x_m - x)^4 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x_{m+3} - x)^4 - 5(x_{m+2} - x)^4 + 10(x_{m+1} - x)^4 & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ (x_{m+3} - x)^4 & \text{diğer} \\ 0 & \end{cases} \quad (2.9)$$

olarak tanımlanır. Burada  $h = x_{m+1} - x_m$  dir. Quartic B-spline fonksiyonları ile birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri  $x_{m-2} \leq x \leq x_{m+3}$  aralığı dışında sıfırdır. (2.9) daki fonksiyonlar her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı  $\Phi_{m-2}, \Phi_{m-1}, \Phi_m$  ve  $\Phi_{m+1}$  gibi dört spline tarafından örtülür.

### 2.3.5 Quintic B-Spline Fonksiyonlar

$[a, b]$  aralığının bir düzgün parçalanışı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olmak üzere  $x_m$  noktalarında  $\Phi_m(x)$  Quintic B-spline fonksiyonları;

$$\Phi_m(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{m-3})^5 & [x_{m-3}, x_{m-2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 & [x_{m-1}, x_m] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 & [x_m, x_{m+1}] \\ -20(x - x_m)^5 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 & [x_{m+2}, x_{m+3}] \\ -20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 & \\ (x - x_{m-3})^5 - 6(x - x_{m-2})^5 + 15(x - x_{m-1})^5 & \\ -20(x - x_m)^5 + 15(x - x_{m+1})^5 - 6(x - x_{m+2})^5 & \\ 0 & \text{diğer} \end{cases} \quad (2.10)$$

olarak tanımlanır. Burada  $h = x_{m+1} - x_m$  dir. Quintic B-spline fonksiyonları ile birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden türevleri  $x_{m-2} \leq x \leq x_{m+3}$  aralığı dışında sıfırdır. (2.10) daki fonksiyonlar her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı  $\Phi_{m-2}, \Phi_{m-1}, \Phi_m, \Phi_{m+1}$  ve  $\Phi_{m+2}$  gibi beş spline tarafından örtülür.

## 2.4 Galerkin ve Collocation Yöntemleri

### 2.4.1 Galerkin Yöntemi

Ağırlıklı kalan yöntemlerinin en önemlilerinden olan Galerkin yöntemi Rus matematikçi Boris Grigoryevich Galerkin (10 Şubat 1871-12 Temmuz 1945) tarafından geliştirilmiştir. Galerkin yönteminde  $\psi_i$  ağırlık fonksiyonları  $\phi_j$  baz fonksiyonlarından seçilmektedir. Dolayısıyla (2.5) denkleminde

$$A_{ij} = \int_{\Omega} \phi_i A \phi_j dx$$

ve

$$f_i = \int_{\Omega} \phi_i f dx$$

olur. Yöntemin uygulanabilmesi için  $\delta_j$  parametrelerinin elde edilen  $n$  tane denklem çözülerek belirlenmesi gerekir.

### 2.4.2 Collocation Yöntemi

Bu yöntemde (2.3) ile verilen  $R_N$  kalanı seçilen collocation noktalarında sıfır kabul edilmektedir. Böylece;

$$\sum_{j=1}^N A \phi_j \delta_j = f(x_i) \quad , i = 1, \dots, N$$

denklem sistemi elde edilir. Denklem sistemi çözülerek  $\delta_j$  parametrelerine ulaşılır.

## 2.5 KdV Denkleminin İncelenmesi

### 2.5.1 Analitik Çözüm

KdV denklemi

$$u_t + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx} = 0$$

şeklindedir.  $x$ – ekseninde pozitif doğrultuda hareket eden dalganın hız sabiti  $c$  olmak üzere KdV denkleminde,  $u(x, t) = U(\chi)$ ,  $\chi = x - ct$  dönüşümü yapılır;

$$-cU' + \varepsilon UU' + \mu U''' = 0$$

ve bir kez integral alınır,  $a_1$  integral sabiti olmak üzere

$$-cU + \frac{\varepsilon}{2}U^2 + \mu U'' + a_1 = 0$$

denklemi elde edilir. Denklem düzenlenir ise

$$\mu U'' = cU - \frac{\varepsilon}{2}U^2 + a_1$$

ve  $U'$  ile çarpılırsa

$$\mu U' U'' = cU' U - \frac{\varepsilon}{2}U' U^2 + a_1 U'$$

denklemi elde edilir. Elde edilen denklemin bir kez daha integrali alındığında

$$\frac{\mu}{2}(U')^2 = \frac{c}{2}U^2 - \frac{\varepsilon}{6}U^3 + a_1 U + a_2$$

denklemine ulaşılır. Bu denklemde  $|x| \rightarrow \infty$ ,  $U, U'$  ve  $U'' \rightarrow 0$  olarak kabul edilirse integral sabitleri  $a_1 = a_2 = 0$  olur. Böylece denklem

$$U' = U \sqrt{\frac{1}{\mu} \left( c - \frac{\varepsilon}{3} U \right)}$$

şeklini alır.  $U = \frac{3c}{\varepsilon}(1 - y^2)$  dönüşümü yapıldığında denklem

$$\frac{1}{1 - y^2} = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{c}{\mu}}$$

şeklinde elde edilir. Bu denklemin integrali alındığında,  $c_1$  integral sabiti olmak üzere

$$\frac{-1}{2} \ln\left(\frac{1-y}{1+y}\right) = \frac{-1}{2} \sqrt{\frac{c}{\mu}} (\chi - c_1) \quad (2.11)$$

denkleminde ulaşılır.  $\chi = \hat{\chi} + c_1$  dönüşümü yapılarak denklem düzenlendiğinde  $y$  değeri

$$y = \frac{1 - e^{\sqrt{\frac{c}{\mu}} \hat{\chi}}}{1 + e^{\sqrt{\frac{c}{\mu}} \hat{\chi}}}$$

olarak bulunur.  $x$  ve  $y$  değeri (2.11)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} U &= \frac{3c}{\varepsilon} \left(1 - \left(\frac{1 - e^{\sqrt{\frac{c}{\mu}} \hat{\chi}}}{1 + e^{\sqrt{\frac{c}{\mu}} \hat{\chi}}}\right)^2\right) = \frac{3c}{\varepsilon} \frac{4}{\left(e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\mu}} \hat{\chi}} + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\mu}} \hat{\chi}}\right)^2} \\ &= \frac{3c}{\varepsilon} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\mu}} \hat{\chi}\right) \end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Yapılan dönüşümlerin tersi uygulandığında KdV denkleminin analitik çözümü olarak

$$u(x, t) = \frac{3c}{\varepsilon} \operatorname{sech}^2\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{c}{\mu}} (x - ct - c_1)\right)$$

bulunur.

Analitik çözüme göre KdV denkleminin  $\frac{3c}{\varepsilon}$  genliğinde hızı ile doğru orantılı bir dalga(soliton) oluşturmaktadır. Dolayısıyla daha büyük dalgalar daha hızlı hareket etmektedir. Dalganın genişliği ise  $\frac{\mu}{c}$  ile orantılı olup  $c_1$  sabiti faz değişiminde rol oynamaktadır [5].

## 2.5.2 Korunum İlkeleri

KdV denkleminin

$$u_t + \left(\varepsilon \frac{u^2}{2} + \mu u_{xx}\right)_x = 0$$

biçiminde yazılmasıyla momentumun korunumu ilkesinin

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} u dx$$

olduğu görülür. KdV denkleminin  $u$  ile çarpılıp

$$\left(\frac{u^2}{2}\right)_t + \left[\varepsilon \frac{u^3}{3} + \mu(uu_{xx} - \frac{\mu^2}{\varepsilon}u_{xx}^2)\right]_x = 0$$

biçiminde yazılmasıyla enerjinin korunumu ilkesinin

$$I_2 = \int_{-\infty}^{\infty} u^2 dx$$

olduğu görülür. KdV denkleminin  $u^2$  ile çarpılıp

$$\left(\frac{u^3}{3} - \frac{\mu}{\varepsilon}u_x^2\right)_t + \left[\varepsilon \frac{u^4}{4} + \mu(u^2u_{xx} + \frac{2}{\varepsilon}u_tu_x) + \frac{\mu^2}{\varepsilon}u_{xx}^2\right]_x = 0$$

biçiminde yazılmasıyla

$$I_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{u^3}{3} - \frac{\mu}{\varepsilon}u_x^2\right) dx$$

elde edilir [9].

## Bölüm 3

### QUADRATIC B-SPLINE FONKSİYONLARI İLE GALERKİN YÖNTEMİ

#### 3.1 Giriş :

Bu bölümde Quadratic B-spline fonksiyonları kullanılarak KdV denkleminin çözümü Galerkin yöntemiyle elde edilecektir. İnterpolasyon fonksiyonları ile ağırlık fonksiyonları aynı seçilerek uygulanan Galerkin yöntemiyle elde edilen denklem sistemi Thomas algoritması kullanılarak çözülmüş sonuçlar tablo ve grafikler halinde verilmiştir. von Neumann yöntemi temelinde yapılan kararlılık analizleriyle sonuçların kararlı olduğu sonucuna varılmıştır. [15–18]

#### 3.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Denklemin Çözümü :

KdV denklemi

$$u_t + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx} = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (3.1)$$

şeklindedir, burada  $\varepsilon$  ve  $\mu$  pozitif parametreler olmak üzere KdV denklemini

$$\begin{aligned} u(a, t) = 0 & \quad u_x(a, t) = 0 \\ u(b, t) = 0 & \quad u_x(b, t) = 0 \end{aligned}$$

sınır şartlarıyla beraber göz önüne alalım. KdV denkleminin

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^N \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (3.2)$$

yaklaşık çözümüne  $[a, b]$  aralığı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olacak şekilde eşit  $h = x_{m+1} - x_m$  uzunluğundaki parçalara ayrılmasıyla bu aralıkta tanımlanan;

$$\phi_m = \frac{1}{h^2} \begin{cases} [x_{m+2} - x]^2 - 3[x_{m+1} - x]^2 + 3[x_m - x]^2 & [x_{m-1}, x_m] \\ [x_{m+2} - x]^2 - 3[x_{m+1} - x]^2 & [x_m, x_{m+1}] \\ [x_{m+2} - x]^2 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

Quadratic B-spline fonksiyonları kullanılarak ulaşılabacaktır. Quadratic B-spline fonksiyonları için  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığında  $\xi = x - x_m$ ,  $0 \leq \xi \leq h$  dönüşümü yapıldığında;

$$(\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}) = \frac{1}{h^2} [(h - \xi)^2, h^2 + 2h\xi - 2\xi^2, \xi^2]$$

elde edilir. Buradan  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı için

$$\phi_{m-1}(x_m) = 0, \quad \phi'_{m-1}(x_m) = 0$$

$$\phi_m(x_m) = 1, \quad \phi'_m(x_m) = \frac{2}{h}$$

$$\phi_{m+1}(x_m) = 1, \quad \phi'_{m+1}(x_m) = -\frac{2}{h}$$

$$\phi_{m+2}(x_m) = 0, \quad \phi'_{m+2}(x_m) = 0$$

değerlerine ulaşılır. Dolayısıyla (3.2) ifadesinden

$$u_m(x_m) = \delta_{m-1} + \delta_m$$

$$u'_m(x_m) = \frac{2}{h}(\delta_{m-1} + \delta_m)$$

olarak elde edilir.

Şimdi KdV denkleminde Galerkin yöntemi uygulanırsa

$$\int_a^b \psi(u_t + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx}) = 0$$

integrali karşımıza çıkacaktır. Bu integral

$$\int_a^b \psi u_t + \int_a^b \psi \varepsilon uu_x + \int_a^b \psi \mu u_{xxx} = 0$$



şeklinde yazılıp ve kısmi integrasyon uygulandığında sınır şartları gereği;

$$\int_a^b \psi u_t + \varepsilon \int_a^b \psi u u_x - \mu \int_a^b \psi_x u_{xx} = 0$$

elde edilir. Galerkin yöntemine göre  $\psi = \phi_i$  seçilir ve  $u$  yerine  $u_N$  yaklaşık çözümü alındığında

$$\sum_{j=-1}^N \int_a^b \phi_i \delta_j \phi_j dx + \varepsilon \sum_{j=-1}^N \sum_{k=-1}^N \int_a^b \phi_i \delta_k \phi_k \delta_j \phi_j' dx - \mu \sum_{j=-1}^N \int_a^b \phi_i' \delta_j \phi_j'' dx = 0$$

denklem sistemine ulaşılır. Denklem sistemi her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı için ayrı ayrı yazılacaktır ancak  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı içerisinde  $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$  hariç diğer fonksiyonlar sıfır olmaktadır. Dolayısıyla denklem sistemini

$$\sum_{j=m-1}^{m+1} \left( \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi \right) \delta_j + \varepsilon \sum_{j=m-1}^{m+1} \sum_{k=m-1}^{m+1} \left( \int_0^h \phi_i \phi_k \phi_j' d\xi \right) \delta_k \delta_j - \mu \sum_{j=m-1}^{m+1} \left( \int_0^h \phi_i' \phi_j'' d\xi \right) \delta_j = 0$$

olarak yazmak mümkün olmaktadır. Buradan

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^e &= (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})^T \\ A_{ij} &= \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi \\ L_{ijk} &= \int_0^h \phi_i \phi_k \phi_j' d\xi \\ C_{ij} &= \int_0^h \phi_i' \phi_j'' d\xi \quad i, j, k = m-1, m, m+1 \end{aligned}$$

olarak alınırsa denklem sistemi

$$A^e \mathbf{d}^e + \varepsilon \mathbf{d}^{eT} L^e \mathbf{d}^e - \mu C^e \mathbf{d}^e = 0$$

matris biçiminde yazılabilir.  $A^e$  ve  $C^e$  matrisleri  $3 \times 3$  boyutludur ancak  $L^e$  matrisi ise  $3 \times 3 \times 3$  boyutludur. Dolayısıyla  $L^e$  matrisi yerine

$$B_{ij}^e = \sum_{k=m-1}^{m+1} L_{ijk} \delta_k^e$$

tanımlanan  $3 \times 3$  boyutundaki  $B^e$  matrisini kullanmak uygun olacaktır.

Quadratic B-spline fonksiyonları kullanılarak integraller hesaplandığında;

$$A^e = \frac{h}{30} \begin{pmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{pmatrix}$$

$$C^e = \frac{2}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B_{m-1,m-1}^e = \frac{1}{30}(-10\delta_{m-1} - 19\delta_m - 1\delta_{m+1})$$

$$B_{m-1,m}^e = \frac{1}{30}(8\delta_{m-1} + 12\delta_m + 0\delta_{m+1})$$

$$B_{m-1,m+1}^e = \frac{1}{30}(2\delta_{m-1} + 7\delta_m + \delta_{m+1})$$

$$B_{m,m-1}^e = \frac{1}{30}(-19\delta_{m-1} - 54\delta_m - 7\delta_{m+1})$$

$$B_{m,m}^e = \frac{1}{30}(12\delta_{m-1} + 0\delta_m - 12\delta_{m+1})$$

$$B_{m,m+1}^e = \frac{1}{30}(7\delta_{m-1} + 54\delta_m + 19\delta_{m+1})$$

$$B_{m+1,m-1}^e = \frac{1}{30}(-\delta_{m-1} - 7\delta_m - 2\delta_{m+1})$$

$$B_{m+1,m}^e = \frac{1}{30}(0\delta_{m-1} - 12\delta_m - 8\delta_{m+1})$$

$$B_{m+1,m+1}^e = \frac{1}{30}(\delta_{m-1} + 19\delta_m + 10\delta_{m+1})$$

matrisleri elde edilir. Bu matrisler kullanılarak her bir aralıkla ilgili ifadeler bir araya getirildiğinde  $\mathbf{d} = [\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N]^T$  olmak üzere  $\delta_i$  parametrelerinin belirlenmesinde kullanılacak olan

$$A \dot{\mathbf{d}} + \varepsilon B \mathbf{d} - \mu C \mathbf{d} = 0 \quad (3.3)$$

matris formundaki nihai denkleme ulaşılır ki bu matrisler beş bant matrisleri olup  $i$ . satırları aşağıdaki gibidir.

$$A : \frac{h}{30}(1, 26, 66, 26, 1)$$

$$C : \frac{2}{h^2}(1, -2, 0, 2, -1)$$

$$B : \frac{1}{30}(-\delta_{m-2} - 7\delta_{m-1} - 2\delta_m, -31\delta_{m-1} - 62\delta_m - 7\delta_{m+1}, \delta_{m-2} + 31\delta_{m-1} \\ -31\delta_{m+1} - \delta_{m+2}, 7\delta_{m-1} + 62\delta_m + 31\delta_{m+1}, 2\delta_m + 7\delta_{m+1} + \delta_{m+2})$$

(3.3) denkleminde  $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\delta^{n+1} + \delta^n)$  ve  $\dot{\mathbf{d}} = \frac{1}{\Delta t}(\delta^{n+1} - \delta^n)$  Crank-Nicolson dönüşümleri yapıldığında;

$$[A + \frac{\Delta t}{2}\varepsilon B(\delta^n) - \frac{\Delta t}{2}\mu C]\delta^{n+1} = [A - \frac{\Delta t}{2}\varepsilon B(\delta^n) + \frac{\Delta t}{2}\mu C]\delta^n \quad (3.4)$$



### 3.3 Kararlılık Analizi :

Kararlılık analizi von Neumann yöntemiyle yapılacaktır. KdV denklemindeki lineer olmayan  $uu_x$  ifadesini lineerleştirebilmek için  $u$  yerel sabit olarak alınırsa  $B^e$  matrisindeki  $\delta_i$  değerleri bir  $\lambda$  sabitine eşit alınmış olur. Böylece  $B^e$  matrisi

$$B^e = \frac{\lambda}{30} \begin{pmatrix} -30 & 20 & 10 \\ -80 & 0 & 80 \\ -10 & -20 & 30 \end{pmatrix}$$

halini alır.  $i$ . satırı ise  $\frac{1}{3}(-1, -10, 0, 10, 1)$  olur. (3.3) denkleminde ait genel bir ifadeyi göz önüne alırsak;  $\alpha = \frac{h}{30}$ ,  $\beta = \frac{k}{6}\varepsilon\lambda$  ve  $\gamma = \frac{k}{h^2}\mu$  olmak üzere

$$\alpha_1 = \alpha - \beta - \gamma$$

$$\alpha_2 = 26\alpha - 10\beta + 2\gamma$$

$$\alpha_3 = 66\alpha$$

$$\alpha_4 = 26\alpha + 10\beta - 2\gamma$$

$$\alpha_5 = \alpha + \beta + \gamma$$

için;

$$\alpha_1\delta_{i-2}^{n+1} + \alpha_2\delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_3\delta_i^{n+1} + \alpha_4\delta_{i+1}^{n+1} + \alpha_5\delta_{i+2}^{n+1} = \alpha_5\delta_{i-2}^n + \alpha_4\delta_{i-1}^n + \alpha_3\delta_i^n + \alpha_2\delta_{i+1}^n + \alpha_1\delta_{i+2}^n$$

olduğu görülür. Bu ifadeye  $\delta_j^n = \xi^n e^{ijkh}$  ile Fourier yöntemi uygulanırsa;

$$\xi^{n+1}[\alpha_1 e^{-2ikh} + \alpha_2 e^{-ikh} + \alpha_3 + \alpha_4 e^{ikh} + \alpha_5 e^{2ikh}] = \xi^n[\alpha_5 e^{-2ikh} + \alpha_4 e^{-ikh} + \alpha_3 + \alpha_2 e^{ikh} + \alpha_1 e^{2ikh}]$$

Buradan  $\xi^{n+1} = g\xi^n$  için,

$$a = \alpha(33 + \cos 2kh + 26 \cos kh)$$

$$b = (\beta + \gamma) \sin 2kh + (10\beta - 2\gamma) \sin kh$$

olmak üzere,

$$g = \frac{a - ib}{a + ib}$$

olarak elde edilir. Buradan

$$|g| = \left| \frac{a - ib}{a + ib} \right| = \frac{|a - ib|}{|a + ib|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1$$

olarak bulunur. Dolayısıyla lineerleştirilmiş denklemin şartsız kararlı olduğu sonucuna varılır.

### 3.4 Test Problemler :

İlk olarak

$$u(x, 0) = 3c^2(A_1x + D_1)$$

başlangıç şartıyla hareket eden bir bağımsız dalganın hareketini ele alalım.

$$A_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c}{\mu}}, \varepsilon = 1, \mu = 0.000484, c = 0.3, D_1 = -6$$

ve sınır şartları;

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(2, t) = 0 \\ u_x(0, t) &= u_x(2, t) = 0 \end{aligned}$$

olarak alındığında  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.00	0.144598	0.086759	0.046850	0.0	0.0
0.50	0.144598	0.086761	0.046735	0.04	0.10
1.00	0.144602	0.086763	0.046737	0.06	0.15
1.50	0.144604	0.086765	0.046739	0.08	0.19
2.00	0.144606	0.086767	0.046740	0.09	0.22
2.50	0.144607	0.086769	0.046742	0.10	0.27
3.00	0.144610	0.086771	0.046744	0.11	0.30

Tablo 3.1:  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar hesaplanan invaryantlar

$h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için hesaplanan invaryantların değişmediği, hata normlarının ise oldukça küçük kaldığı görülmektedir [15].

İkinci olarak

$$u(x, 0) = 3c_1^2(A_1x + D_1) + 3c_2^2(A_2x + D_2)$$

başlangıç şartıyla hareket eden bir çift dalganın hareketini ele alalım.

$$A_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c_1}{\mu}}, A_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c_2}{\mu}}$$

$$\varepsilon = 1, \mu = 0.000484, c_1 = 0.3, c_2 = 0.1, D_1 = D_2 = -6$$

ve sınır şartları;

$$u(0, t) = u(2, t) = 0$$

$$u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$$

olarak alındığında  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar değerler aşağıdaki gibi olmaktadır.

$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.00	0.228081	0.107062	0.053316
0.50	0.228124	0.107065	0.053253
1.00	0.227949	0.107068	0.053309
1.50	0.227740	0.107070	0.053262
2.00	0.227689	0.107073	0.053213
2.50	0.227732	0.107075	0.053198
3.00	0.227880	0.107078	0.053195

Tablo 3.2:  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar hesaplanan invaryantlar

$h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için hesaplanan invaryantların değişmediği görülmektedir. Aşağıdaki tabloda tek dalga için  $L_2 \times 10^3$  normunun  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  değerleri için karşılaştırılması verilmiştir [5].

$t$	Zabusky-Kruskal [8]	Hopscotch [11]	Petrov-Galerkin [16]	Modified P-G [16]	Galerkin Quadratic
0.25	5.94	3.79	4.46	0.21	0.02
0.50	13.17	9.28	7.01	0.38	0.04
0.75	21.08	14.14	10.08	0.57	0.05
1.00	28.66	18.72	13.26	0.74	0.06

Tablo 3.3:  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için  $t = 0$ 'dan  $t = 1$ 'e kadar  $L_2 \times 10^3$  normunun karşılaştırılması

Buna göre Quadratic B-spline fonksiyonları kullanılarak Galerkin yöntemiyle yapılan çözümün daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir [15].

## Bölüm 4

### CUBIC B-SPLINE FONKSİYONLARI İLE GALERKİN YÖNTEMİ

#### 4.1 Giriş :

Bu bölümde Cubic B-spline fonksiyonları kullanılarak KdV denkleminin çözümü Galerkin yöntemiyle elde edilecektir. İnterpolasyon fonksiyonları ile ağırlık fonksiyonları aynı seçilerek uygulanan Galerkin yöntemiyle elde edilen denklem sistemi Thomas algoritması kullanılarak çözülmüş sonuçlar tablo ve grafikler halinde verilmiştir. von Neumann yöntemi temelinde yapılan kararlılık analizleriyle sonuçların kararlı olduğu sonucuna varılmıştır.

#### 4.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Denklemin Çözümü :

KdV denklemi

$$u_t + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx} = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (4.1)$$

şeklindedir, burada  $\varepsilon$  ve  $\mu$  pozitif parametreler olmak üzere KdV denklemini

$$u(a, t) = 0 \quad u_x(a, t) = 0 \quad u_{xx}(a, t) = 0$$

$$u(b, t) = 0 \quad u_x(b, t) = 0 \quad u_{xx}(b, t) = 0$$

sınır şartlarıyla beraber göz önüne alalım. KdV denkleminin

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^{N+1} \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (4.2)$$

yaklaşık çözümüne  $[a, b]$  aralığı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olacak şekilde eşit  $h = x_{m+1} - x_m$  uzunluğundaki parçalara ayrılmasıyla bu aralıkta

tanımlanan;

$$\phi_m(x) = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (x - x_{m+2})^3 & [x_{m-2}, x_{m-1}] \\ h^3 + 3h^2(x - x_{m-1}) + 3h(x - x_{m-1})^2 - 3(x - x_{m-1})^3 & [x_{m-1}, x_m] \\ h^3 + 3h^2(x_{m+1} - x) + 3h(x_{m+1} - x)^2 - 3(x_{m+1} - x)^3 & [x_m, x_{m+1}] \\ (x_{m+2} - x)^3 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

Cubic B-spline fonksiyonları kullanılarak ulaşılabacaktır. Cubic B-spline fonksiyonları için  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığında  $\xi = x - x_m, 0 \leq \xi \leq h$  dönüşümü yapıldığında;

$$\begin{cases} \phi_{i-1}(x) \\ \phi_i(x) \\ \phi_{i+1}(x) \\ \phi_{i+2}(x) \end{cases} = \frac{1}{h^3} \begin{cases} (h - \xi)^3 \\ h^3 + 3h^2(h - \xi) + 3h(h - \xi)^2 - 3(h - \xi)^3 \\ h^3 + 3h^2\xi + 3h\xi^2 - 3\xi^3 \\ \xi^3 \end{cases} \quad 0 \leq \xi \leq h$$

elde edilir. Buradan  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı için

$$\begin{aligned} \phi_{m-2}(x_m) &= 0, & \phi'_{m-2}(x_m) &= 0, & \phi''_{m-2}(x_m) &= 0 \\ \phi_{m-1}(x_m) &= 1, & \phi'_{m-1}(x_m) &= \frac{3}{h}, & \phi''_{m-1}(x_m) &= \frac{6}{h^2} \\ \phi_m(x_m) &= 4, & \phi'_m(x_m) &= 0, & \phi''_m(x_m) &= -\frac{12}{h^2} \\ \phi_{m+1}(x_m) &= 1, & \phi'_{m+1}(x_m) &= -\frac{3}{h}, & \phi''_{m+1}(x_m) &= \frac{6}{h^2} \\ \phi_{m+2}(x_m) &= 0, & \phi'_{m+2}(x_m) &= 0, & \phi''_{m+2}(x_m) &= 0 \end{aligned}$$

değerlerine ulaşılır. Dolayısıyla (4.2) ifadesinden

$$\begin{aligned} u_m(x_m) &= \delta_{m-1} + 4\delta_m + \delta_{m+1} \\ u'_m(x_m) &= \frac{3}{h}(\delta_{m+1} - \delta_{m-1}) \\ u''_m(x_m) &= \frac{6}{h^2}(\delta_{m-1} - 2\delta_m + \delta_{m+1}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir.

Şimdi KdV denkleminde Galerkin yöntemi uygulanırsa

$$\int_a^b \psi(u_t + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx}) = 0$$

integrali karşımıza çıkacaktır. Bu integral

$$\int_a^b \psi u_t + \int_a^b \psi \varepsilon uu_x + \int_a^b \psi \mu u_{xxx} = 0$$



şeklinde yazılır ve kısmi integrasyon uygulanırsa sınır şartları gereği;

$$\int_a^b \psi u_t + \varepsilon \int_a^b \psi u u_x - \mu \int_a^b \psi_x u_{xx} = 0$$

elde edilir. Galerkin yöntemine göre  $\psi = \phi_i$  seçilir ve  $u$  yerine  $u_N$  yaklaşık çözümü alındığında

$$\sum_{j=-1}^{N+1} \int_a^b \phi_i \delta_j' \phi_j dx + \varepsilon \sum_{j=-1}^{N+1} \sum_{k=-1}^{N+1} \int_a^b \phi_i \delta_k \phi_k \delta_j' \phi_j' dx - \mu \sum_{j=-1}^{N+1} \int_a^b \phi_i' \delta_j \phi_j'' dx = 0$$

denklem sistemine ulaşılır. Denklemler her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı için ayrı ayrı yazılacaktır ancak  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı içerisinde  $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}, \phi_{m+2}$  hariç diğer fonksiyonlar sıfır olmaktadır. Dolayısıyla denklem sistemi

$$\sum_{j=m-1}^{m+2} \left( \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi \right) \delta_j' + \varepsilon \sum_{j=m-1}^{m+2} \sum_{k=m-1}^{m+2} \left( \int_0^h \phi_i \phi_k \phi_j' d\xi \right) \delta_k \delta_j' - \mu \sum_{j=m-1}^{m+2} \left( \int_0^h \phi_i' \phi_j'' d\xi \right) \delta_j = 0$$

olarak yazılabilir. Burada

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^e &= (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2})^T \\ A_{ij} &= \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi \\ L_{ijk} &= \int_0^h \phi_i \phi_k \phi_j' d\xi \\ C_{ij} &= \int_0^h \phi_i' \phi_j'' d\xi \quad i, j, k = m-1, m, m+1 \end{aligned}$$

olarak alınırsa denklem sistemi

$$A^e \mathbf{d}^e + \varepsilon \mathbf{d}^{eT} L^e \mathbf{d}^e - \mu C^e \mathbf{d}^e = 0$$

matris biçiminde yazılabilir.  $A^e$  ve  $C^e$  matrisleri  $4 \times 4$  boyutludur ancak  $L^e$  matrisi ise  $4 \times 4 \times 4$  boyutundadır. Dolayısıyla  $L^e$  matrisi yerine

$$B_{ij}^e = \sum_{k=m-1}^{m+2} L_{ijk} \delta_k^e$$

şeklinde tanımlanan  $4 \times 4$  boyutundaki  $B^e$  matrisini kullanmak uygundur.

Cubic B-spline fonksiyonları kullanılarak integraller hesaplandığında;

$$A^e = \frac{h}{140} \begin{pmatrix} 20 & 129 & 60 & 1 \\ 129 & 1188 & 933 & 60 \\ 60 & 933 & 1188 & 129 \\ 1 & 60 & 129 & 20 \end{pmatrix}$$

$$C^e = \frac{1}{2h^2} \begin{pmatrix} -9 & 15 & -3 & -3 \\ -15 & 9 & 27 & -21 \\ 21 & -27 & -9 & 15 \\ 3 & 3 & -15 & 9 \end{pmatrix}$$

$$B_{m-1,m-1}^e = \frac{1}{168}(-56, -321, -126, -1)\mathbf{d}^e$$

$$B_{m-1,m}^e = \frac{1}{280}(-50, -435, -264, -7)\mathbf{d}^e$$

$$B_{m-1,m+1}^e = \frac{1}{280}(140, 927, 438, 7)\mathbf{d}^e$$

$$B_{m-1,m+2}^e = \frac{1}{840}(10, 129, 108, 5)\mathbf{d}^e$$

$$B_{m,m-1}^e = \frac{1}{280}(-535, -3610, -1783, -36)\mathbf{d}^e$$

$$B_{m,m}^e = \frac{1}{280}(-435, -5880, -5847, -438)\mathbf{d}^e$$

$$B_{m,m+1}^e = \frac{1}{280}(927, 8334, 5847, 264)\mathbf{d}^e$$

$$B_{m,m+2}^e = \frac{1}{280}(43, 1156, 1783, 210)\mathbf{d}^e$$

$$B_{m+1,m-1}^e = \frac{1}{280}(-210, -1783, -1156, -43)\mathbf{d}^e$$

$$B_{m+1,m}^e = \frac{1}{280}(-264, -5847, -8334, -927)\mathbf{d}^e$$

$$B_{m+1,m+1}^e = \frac{1}{280}(438, 5847, 5880, 435)\mathbf{d}^e$$

$$B_{m+1,m+2}^e = \frac{1}{280}(36, 1783, 3610, 535)\mathbf{d}^e$$

$$B_{m+2,m-1}^e = \frac{1}{840}(-5, -108, -129, -10)\mathbf{d}^e$$

$$B_{m+2,m}^e = \frac{1}{280}(-7, -438, -927, -140)\mathbf{d}^e$$

$$B_{m+2,m+1}^e = \frac{1}{280}(7, 264, 435, 50)\mathbf{d}^e$$

$$B_{m+2,m+2}^e = \frac{1}{168}(1, 126, 321, 56)\mathbf{d}^e$$

matrisleri elde edilir. Bu matrisler kulanılarak her bir elemanla ilgili ifadeler bir araya getirildiğinde  $\mathbf{d} = [\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_{N+1}]^T$  olmak üzere  $\delta_i$  parametrelerinin belirlenmesinde kullanılacak olan

$$A \dot{\mathbf{d}} + \varepsilon B \mathbf{d} - \mu C \mathbf{d} = 0 \quad (4.3)$$

matris formundaki nihai denkleme ulaşılır ki bu matrisler yedi bant matrisleri olup  $i$ . satırları aşağıdaki gibidir.

$$A : \frac{h}{140}[1, 120, 1191, 2416, 1191, 120, 1]$$

$$C : \frac{1}{2h^2}[3, 24, -57, 0, 57, -24, -3]$$

$$B : \frac{1}{840}[(-5, -108, -129, -10, 0, 0, 0)\mathbf{d}, (-21, -1944, -8130, -3888, -129, 0, 0)\mathbf{d}, (21, 0, -17841, -35682, -8130, -108, 0)\mathbf{d}, (15, 5832, 53523, 0, -53523, -5832, -15)\mathbf{d}, (0, 108, 8130, 35682, 17841, 0, -21)\mathbf{d}, (0, 0, 129, 3888, 8130, 1944, 21)\mathbf{d}, (0, 0, 0, 10, 129, 180, 5)\mathbf{d}]$$

$$\mathbf{d} = (\delta_{m-3}, \delta_{m-2}, \delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1}, \delta_{m+2}, \delta_{m+3})$$

(4.3) denkleminde  $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\delta^{n+1} + \delta^n)$  ve  $\hat{\mathbf{d}} = \frac{1}{\Delta t}(\delta^{n+1} - \delta^n)$  Crank-Nicolson dönüşümleri yapıldığında;

$$[A + \frac{\Delta t}{2}\varepsilon B(\delta^n) - \frac{\Delta t}{2}\mu C]\delta^{n+1} = [A - \frac{\Delta t}{2}\varepsilon B(\delta^n) + \frac{\Delta t}{2}\mu C]\delta^n \quad (4.4)$$

denkleme ulaşılır. (4.4) denklemi  $B(\delta)$  matrisinden dolayı lineer değildir. Bu sebeple buna eşdeğer olan aşağıdaki sistem çözülecektir.

$$[A + \frac{\Delta t}{2}\varepsilon B(\delta^n) - \frac{\Delta t}{2}\mu C]\hat{\delta}^{n+1} = [A - \frac{\Delta t}{2}\varepsilon B(\delta^n) + \frac{\Delta t}{2}\mu C]\delta^n$$

$$[A + \frac{\Delta t}{2}\varepsilon B(\frac{\hat{\delta}^{n+1} + \delta^n}{2}) - \frac{\Delta t}{2}\mu C]\delta^{n+1} = [A - \frac{\Delta t}{2}\varepsilon B(\frac{\hat{\delta}^{n+1} + \delta^n}{2}) + \frac{\Delta t}{2}\mu C]\delta^n$$

İlk denklemden elde edilen  $\hat{\delta}^{n+1}$  yaklaşımı ikinci denklemden iterasyonla geliştirilmektedir. İterasyona başlanabilmesi için  $\delta^0$  başlangıç vektörü gerekmektedir.  $\delta^0$  başlangıç vektörü;  $u(x, 0)$  başlangıç şartı ve sınır değerleri kullanılarak hesaplandıktan sonra matris formundaki denklem sistemi kullanılarak istenen zamandaki yaklaşık çözüme ulaşılır.

Başlangıç vektörünün hesaplanması :

$$U_N(x, 0) = \sum_{j=-1}^{N+1} \delta_j^0(t) \phi_j(x) \quad (4.5)$$



üzere

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \alpha - 6\beta - \gamma \\ \alpha_2 &= 120\alpha - 336\beta - 8\gamma \\ \alpha_3 &= 1191\alpha - 1470\beta + 19\gamma \\ \alpha_4 &= 2416\alpha \\ \alpha_5 &= 1191\alpha + 1470\beta - 19\gamma \\ \alpha_6 &= 120\alpha + \beta + 8\gamma \\ \alpha_7 &= \alpha + 6\beta + \gamma\end{aligned}$$

için;

$$\begin{aligned}\alpha_1\delta_{i-3}^{n+1} + \alpha_2\delta_{i-2}^{n+1} + \alpha_3\delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_4\delta_i^{n+1} + \alpha_5\delta_{i+1}^{n+1} + \alpha_6\delta_{i+2}^{n+1} + \alpha_7\delta_{i+3}^{n+1} \\ = \alpha_7\delta_{i-3}^n + \alpha_6\delta_{i-2}^n + \alpha_5\delta_{i-1}^n + \alpha_4\delta_i^n + \alpha_3\delta_{i+1}^n + \alpha_2\delta_{i+2}^n + \alpha_1\delta_{i+3}^n\end{aligned}$$

olduğu görülür. Bu ifadede  $\delta_j^n = \xi^n e^{ijkh}$  ile Fourier yöntemi uygulandığında  $\xi^{n+1} = g\xi^n$  için,

$$\begin{aligned}a &= \alpha(1208 + \cos 3kh + 120 \cos 2kh + 1191 \cos kh) \\ b &= (6\beta + \gamma) \sin 3kh + (336\beta + 8\gamma) \sin 2kh + (1470\beta - 19\gamma) \sin kh\end{aligned}$$

olmak üzere,

$$g = \frac{a - ib}{a + ib}$$

olarak elde edilir ki bu değerın mutlak değeri de birdir. Dolayısıyla Crank-Nicolson yaklaşımının şartsız kararlı olduğu sonucuna varılır.

#### 4.4 Test Problemler :

İlk olarak

$$u(x, 0) = 3c^2(A_1x + D_1)$$

başlangıç şartıyla hareket eden bir bağımsız dalganın hareketini ele alalım.

$$A_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c}{\mu}}, \varepsilon = 1, \mu = 0.000484, c = 0.3, D_1 = -6$$

ve sınır şartları;

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(2, t) = 0 \\ u_x(0, t) &= u_x(2, t) = 0 \end{aligned}$$

olarak alındığında  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar değerler aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.00	0.144598	0.086759	0.046850	0.0	0.0
0.50	0.144599	0.086761	0.046852	0.04	0.11
1.00	0.144601	0.086762	0.046853	0.08	0.20
1.50	0.144602	0.086764	0.046855	0.10	0.26
2.00	0.144604	0.086765	0.046856	0.12	0.32
2.50	0.144605	0.086767	0.046858	0.14	0.39
3.00	0.144606	0.086768	0.046859	0.16	0.44

Tablo 4.1:  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar hesaplanan invaryantlar

$h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için hesaplanan invaryantların değişmediği, hata normlarının ise oldukça küçük kaldığı görülmektedir [5, 18].

İkinci olarak

$$u(x, 0) = 3c_1^2(A_1x + D_1) + 3c_2^2(A_2x + D_2)$$

başlangıç şartıyla hareket eden bir çift dalganın hareketini ele alalım.

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c_1}{\mu}}, A_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c_2}{\mu}} \\ \varepsilon &= 1, \mu = 0.000484, c_1 = 0.3, c_2 = 0.1, D_1 = D_2 = -6 \end{aligned}$$

ve sınır şartları;

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(2, t) = 0 \\ u_x(0, t) &= u_x(2, t) = 0 \end{aligned}$$

olarak alındığında  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar değerler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.00	0.228081	0.107062	0.053316
0.50	0.228085	0.107064	0.053317
1.00	0.228082	0.107066	0.053318
1.50	0.228085	0.107068	0.053321
2.00	0.228089	0.107071	0.053323
2.50	0.228093	0.107073	0.053325
3.00	0.228094	0.107074	0.053327

Tablo 4.2:  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar hesaplanan invaryantlar

$h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için hesaplanan invaryantların değişmediği görülmektedir [5, 18]. Aşağıdaki tabloda tek dalga için  $L_2 \times 10^3$  normunun  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  değerleri için karşılaştırılması verilmiştir.

$t$	Zabusky-Kruskal [8]	Hopscotch [11]	Petrov-Galerkin [16]	Modified P-G [16]	Galerkin Cubic
0.25	5.94	3.79	4.46	0.21	0.02
0.50	13.17	9.28	7.01	0.38	0.04
0.75	21.08	14.14	10.08	0.57	0.06
1.00	28.66	18.72	13.26	0.74	0.08

Tablo 4.3:  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için  $t = 0$ 'dan  $t = 1$ 'e kadar  $L_2 \times 10^3$  normunun karşılaştırılması

Buna göre Cubic B-spline fonksiyonları kullanılarak Galerkin yöntemiyle yapılan çözümün daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir [5, 18].

## Bölüm 5

### QUADRATIC B-SPLINE FONKSİYONLARI İLE GALERKİN YÖNTEMİNDE FARKLI BİR ALGORİTMA

#### 5.1 Giriş :

Bu bölümde Quadratic B-spline fonksiyonları kullanılarak KdV denkleminin çözümü Galerkin yöntemiyle elde edilecektir. İnterpolasyon fonksiyonları ile ağırlık fonksiyonları aynı seçilerek uygulanan Galerkin yöntemiyle elde edilen denklem sistemi Thomas algoritması kullanılarak çözülmüş sonuçlar tablo ve grafikler halinde verilmiştir. von Neumann yöntemi temelinde yapılan kararlılık analizleriyle sonuçların kararlı olduğu sonucuna varılmıştır.

#### 5.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Denklemin Çözümü :

KdV denklemi

$$u_t + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx} = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (5.1)$$

şeklindedir, burada  $\varepsilon$  ve  $\mu$  pozitif parametreler olmak üzere KdV denklemini

$$\begin{aligned} u(a, t) &= 0 & u_x(a, t) &= 0 \\ u(b, t) &= 0 & u_x(b, t) &= 0 \end{aligned}$$

sınır şartlarıyla beraber göz önüne alalım. KdV denkleminin

$$U_N(x, t) = \sum_{j=-1}^N \delta_j(t) \phi_j(x) \quad (5.2)$$



yaklaşık çözümüne  $[a, b]$  aralığı  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$  olacak şekilde eşit  $h = x_{m+1} - x_m$  uzunluğundaki parçalara ayrılmasıyla bu aralıkta tanımlanan;

$$\phi_m = \frac{1}{h^2} \begin{cases} [x_{m+2} - x]^2 - 3[x_{m+1} - x]^2 + 3[x_m - x]^2 & [x_{m-1}, x_m] \\ [x_{m+2} - x]^2 - 3[x_{m+1} - x]^2 & [x_m, x_{m+1}] \\ [x_{m+2} - x]^2 & [x_{m+1}, x_{m+2}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

Quadratic B-spline fonksiyonları kullanılarak ulaşılabacaktır. Quadratic B-spline fonksiyonları için  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığında  $\xi = x - x_m$ ,  $0 \leq \xi \leq h$  dönüşümü yapıldığında;

$$(\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}) = \frac{1}{h^2} [(h - \xi)^2, h^2 + 2h\xi - 2\xi^2, \xi^2]$$

elde edilir. Buradan  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı için

$$\phi_{m-1}(x_m) = 0, \quad \phi'_{m-1}(x_m) = 0$$

$$\phi_m(x_m) = 1, \quad \phi'_m(x_m) = \frac{2}{h}$$

$$\phi_{m+1}(x_m) = 1, \quad \phi'_{m+1}(x_m) = -\frac{2}{h}$$

$$\phi_{m+2}(x_m) = 0, \quad \phi'_{m+2}(x_m) = 0$$

değerlerine ulaşılır. Dolayısıyla (5.2) ifadesinden

$$u_m(x_m) = \delta_{m-1} + \delta_m$$

$$u'_m(x_m) = \frac{2}{h}(\delta_{m-1} + \delta_m)$$

olarak elde edilir.

Şimdi KdV denkleminde Galerkin yöntemi uygulanırsa

$$\int_a^b \psi(u_t + \varepsilon u u_x + \mu u_{xxx}) = 0$$

integrali karşımıza çıkacaktır. Bu integral  $\lambda = \varepsilon u$  alınarak

$$\int_a^b \psi u_t + \int_a^b \psi \lambda u_x + \int_a^b \psi \mu u_{xxx} = 0$$

şeklinde yazılır ve kısmi integrasyon uygulanırsa sınır şartları gereği;

$$\int_a^b \psi u_t + \lambda \int_a^b \psi u_x - \mu \int_a^b \psi_x u_{xx} = 0$$

elde edilir. Galerkin yöntemine göre  $\psi = \phi_i$  seçilir ve  $u$  yerine  $u_N$  yaklaşık çözümü alındığında

$$\sum_{j=-1}^N \int_a^b \phi_i \delta_j \phi_j dx + \lambda \sum_{j=-1}^N \int_a^b \phi_i \delta_j \phi_j' dx - \mu \sum_{j=-1}^N \int_a^b \phi_i' \delta_j \phi_j'' dx = 0$$

denklem sistemine ulaşılır. Denklem sistemi her bir  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı için ayrı ayrı yazılacaktır ancak  $[x_m, x_{m+1}]$  aralığı içerisinde  $\phi_{m-1}, \phi_m, \phi_{m+1}$  hariç diğer fonksiyonlar sıfır olmaktadır. Dolayısıyla denklem sistemini

$$\sum_{j=m-1}^{m+1} \left( \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi \right) \delta_j + \lambda \sum_{j=m-1}^{m+1} \left( \int_0^h \phi_i \phi_j' d\xi \right) \delta_j - \mu \sum_{j=m-1}^{m+1} \left( \int_0^h \phi_i' \phi_j'' d\xi \right) \delta_j = 0$$

olarak yazmak mümkün olmaktadır. Burada

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^e &= (\delta_{m-1}, \delta_m, \delta_{m+1})^T \\ A_{ij} &= \int_0^h \phi_i \phi_j d\xi \\ B_{ij} &= \int_0^h \phi_i \phi_j' d\xi \\ C_{ij} &= \int_0^h \phi_i' \phi_j'' d\xi \quad i, j = m-1, m, m+1 \end{aligned}$$

olarak alınır ve  $\lambda$  değeri  $u$ 'nun aritmetik ortalaması  $\frac{1}{2}(u_m + u_{m+1})$  kullanılarak  $\lambda = \frac{\varepsilon}{2}(\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1})$  şeklinde ifade edilirse denklem sistemi

$$A^e \mathbf{d}^e + \lambda B^e \mathbf{d}^e - \mu C^e \mathbf{d}^e = 0$$

matris biçiminde yazılabilir.  $A^e, B^e$  ve  $C^e$  matrisleri  $3 \times 3$  boyutundadır. Quadratic B-spline fonksiyonları kullanılarak integraller hesaplandığında;

$$A^e = \frac{h}{30} \begin{pmatrix} 6 & 13 & 1 \\ 13 & 54 & 13 \\ 1 & 13 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\lambda B^e = \frac{\lambda}{6} \begin{pmatrix} -3 & 2 & 1 \\ -8 & 0 & 8 \\ -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$C^e = \frac{2}{h^2} \begin{pmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

matrisleri elde edilir. Bu matrisler kullanılarak her bir elemanla ilgili ifadeler bir araya getirildiğinde  $\mathbf{d} = [\delta_{-1}, \delta_0, \dots, \delta_N]^T$  olmak üzere  $\delta_i$  parametrelerinin belirlenmesinde kullanılacak olan

$$A \dot{\mathbf{d}} + B(\lambda) \mathbf{d} - \mu C \mathbf{d} = 0 \quad (5.3)$$

matris formundaki nihai denkleme ulaşılır ki bu matrisler beş bant matrisleri olup  $i$ . satırları aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned} A & : \frac{h}{30}(1, 26, 66, 26, 1) \\ C & : \frac{2}{h^2}(1, -2, 0, 2, -1) \\ B(\lambda) & : \frac{1}{6}(-\lambda_1, -2\lambda_1 - 8\lambda_2, -3\lambda_1 - 3\lambda_3, 8\lambda_2 + 2\lambda_3, \lambda_3) \\ \lambda_1 & = \frac{\varepsilon}{2}(\delta_{m-2} + 2\delta_{m-1} + \delta_m), \\ \lambda_2 & = \frac{\varepsilon}{2}(\delta_{m-1} + 2\delta_m + \delta_{m+1}), \\ \lambda_3 & = \frac{\varepsilon}{2}(\delta_m + 2\delta_{m+1} + \delta_{m+2}), \quad m = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

(5.3) denkleminde  $\mathbf{d} = \frac{1}{2}(\delta^{n+1} + \delta^n)$  ve  $\dot{\mathbf{d}} = \frac{1}{\Delta t}(\delta^{n+1} - \delta^n)$  ile Crank-Nicolson dönüşümleri yapıldığında;

$$\left[ A + \frac{\Delta t}{2} \varepsilon B(\delta^n) - \frac{\Delta t}{2} \mu C \right] \delta^{n+1} = \left[ A - \frac{\Delta t}{2} \varepsilon B(\delta^n) + \frac{\Delta t}{2} \mu C \right] \delta^n \quad (5.4)$$

denkleminde ulaşılır. İstenilen zamandaki çözüme ulaşabilmek için  $\delta^0$  başlangıç vektörü gerekmektedir.  $\delta^0$  başlangıç vektörü;  $u(x, 0)$  başlangıç şartı ve sınır değerleri kullanılarak hesaplandıktan sonra matris formundaki denklem sistemi kullanılarak yaklaşık çözüme ulaşılır.



olduğu görülür. Bu ifadede  $\delta_j^n = \xi^n e^{ijkh}$  ile Fourier yöntemi uygulanırsa;

$$\xi^{n+1}[\alpha_1 e^{-2ikh} + \alpha_2 e^{-ikh} + \alpha_3 + \alpha_4 e^{ikh} + \alpha_5 e^{2ikh}] = \xi^n[\alpha_5 e^{-2ikh} + \alpha_4 e^{-ikh} + \alpha_3 + \alpha_2 e^{ikh} + \alpha_1 e^{2ikh}]$$

denklemi elde edilir. Buradan  $\xi^{n+1} = g\xi^n$  için,

$$a = \alpha(33 + \cos 2kh + 26 \cos kh)$$

$$b = (\beta + \gamma) \sin 2kh + (10\beta - 2\gamma) \sin kh$$

olmak üzere,

$$g = \frac{a - ib}{a + ib}$$

olarak elde edilir ki bu değer in mutlak değeri de birdir. Dolayısıyla Crank-Nicolson yaklaşımının şartsız kararlı olduğu sonucuna varılır.

#### 5.4 Test Problemler :

İlk olarak

$$u(x, 0) = 3c^2(A_1x + D_1)$$

başlangıç şartıyla hareket eden bir bağımsız dalganın hareketini ele alalım.

$$A_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c}{\mu}}, \varepsilon = 1, \mu = 0.000484, c = 0.3, D_1 = -6$$

ve sınır şartları;

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(2, t) = 0 \\ u_x(0, t) &= u_x(2, t) = 0 \end{aligned}$$

olarak alındığında  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar değerler aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^3$
0.00	0.144598	0.086759	0.046733	0.0
0.50	0.144633	0.086759	0.046734	0.04
1.00	0.144574	0.086759	0.046734	0.06
1.50	0.144535	0.086758	0.046733	0.08
2.00	0.144541	0.086757	0.046733	0.09
2.50	0.144529	0.086757	0.046732	0.10
3.00	0.144553	0.086756	0.046732	0.11

Tablo 5.1:  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar hesaplanan invaryantlar

$h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için hesaplanan invaryantların değişmediği, hata normlarının ise oldukça küçük kaldığı görülmektedir [23].

İkinci olarak

$$u(x, 0) = 3c_1^2(A_1x + D_1) + 3c_2^2(A_2x + D_2)$$

başlangıç şartıyla hareket eden bir çift dalganın hareketini ele alalım.

$$A_1 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon c_1}{\mu}}, A_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\varepsilon c_2}{\mu}}$$

$$\varepsilon = 1, \mu = 0.000484, c_1 = 0.3, c_2 = 0.1, D_1 = D_2 = -6$$

ve sınır şartları;

$$u(0, t) = u(2, t) = 0$$

$$u_x(0, t) = u_x(2, t) = 0$$

olarak alındığında  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar değerler aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.00	0.228082	0.107062	0.053196
0.50	0.228159	0.107130	0.053310
1.00	0.227916	0.107194	0.053421
1.50	0.227669	0.107137	0.053321
2.00	0.227613	0.107070	0.053211
2.50	0.227655	0.107044	0.053172
3.00	0.227826	0.107036	0.053161

Tablo 5.2:  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar hesaplanan invaryantlar

$h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için hesaplanan invaryantların değişmediği görülmektedir [23]. Aşağıdaki tabloda tek dalga için  $L_2 \times 10^3$  normunun  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  değerleri için karşılaştırılması verilmiştir.

$t$	Zabusky-Kruskal [8]	Hopscotch [11]	Petrov-Galerkin [16]	Modified P-G [16]	Galerkin Quad.(Yeni)
0.25	5.94	3.79	4.46	0.21	0.020
0.50	13.17	9.28	7.01	0.38	0.037
0.75	21.08	14.14	10.08	0.57	0.056
1.00	28.66	18.72	13.26	0.74	0.077

Tablo 5.3:  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için  $t = 0$ 'dan  $t = 1$ 'e kadar  $L_2 \times 10^3$  normunun karşılaştırılması

Buna göre Quadratic B-spline fonksiyonları kullanılarak Galerkin yöntemiyle uygulanan yeni algoritmanın daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir [23].

## Bölüm 6

### QUARTIC B-SPLINE FONKSİYONLARI İLE COLLOCATION YÖNTEMİ

#### 6.1 Giriş :

Bu bölümde Quartic B-spline fonksiyonları kullanılarak KdV denkleminin çözümü Collocation yöntemiyle elde edilecektir. Collocation yöntemiyle elde edilen denklem sistemi Thomas algoritması kullanılarak çözülmüş sonuçlar tablo ve grafikler halinde verilmiştir. von Neumann yöntemi temelinde yapılan kararlılık analizleriyle sonuçların kararlı olduğu sonucuna varılmıştır.

#### 6.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Denklemin Çözümü :

KdV denklemi

$$u_t + \varepsilon uu_x + \mu u_{xxx} = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (6.1)$$

şeklindedir, burada  $\varepsilon$  ve  $\mu$  pozitif parametreler olmak üzere KdV denklemini

$$\begin{aligned} u(a, t) = 0 & \quad u_x(a, t) = 0 & \quad u_{xx}(a, t) = 0 \\ u(b, t) = 0 & \quad u_x(b, t) = 0 & \quad u_{xx}(b, t) = 0 \end{aligned}$$

sınır şartlarıyla beraber göz önüne alalım.  $u(x, t)$  çözümüne yaklaşmak için Quartic B-spline fonksiyonları kullanılacaktır.  $[a, b]$  aralığı ;

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$



şeklinde  $x_i$  noktalarında eş parçalara ayrılışın.  $\phi_i(x)$  ise  $\pi$ 'nin noktalarındaki Quartic B-spline fonksiyonları olsun.

$$u_N = \text{span}\{\phi_{-2}, \phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}\} \quad (6.2)$$

kümesi  $[a, b]$  üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturduğundan;

$$u_N(x, t) = \sum_{i=-2}^{N+1} \delta_i(t) \phi_i(x) \quad (6.3)$$

şeklinde  $u(x, t)$  çözümüne yaklaşan bir  $u_N(x, t)$  çözümü bulunacaktır. Burada  $\delta_i(t)$  zamana bağlı parametreler olup

$$\begin{aligned} u_N(a, t) &= 0 & u_{Nx}(a, t) &= 0 \\ u_N(b, t) &= 0 & u_{Nx}(b, t) &= 0 \end{aligned}$$

sınır şartları yardımıyla belirlenecektir.

$u_N(x, t)$  yaklaşık çözümü KdV denkleminde uygulandığında;

$$\begin{aligned} u_{Nt}(x_j, t) + \varepsilon u_N(x_j, t) u_{Nx}(x_j, t) + \mu u_{Nxxx}(x_j, t) &= 0, \quad j = 0, 1, \dots, N \\ \sum_{i=-2}^{N+1} \delta_i(t) \phi_i(x_j) + \varepsilon \sum_{k=-2}^{N+1} \delta_k(t) \phi_k(x_j) \sum_{i=-2}^{N+1} \delta_i(t) \phi_i'(x_j) + \mu \sum_{i=-2}^{N+1} \delta_i(t) \phi_i'''(x_j) &= 0 \end{aligned}$$

denklemlerle collocation şartları elde edilir.

$\phi_i(x)$  Quartic B-spline fonksiyonları

$$\phi_i(x) = \frac{1}{h^4} \begin{cases} (x_{i+3} - x)^4 - 5(x_{i+2} - x)^4 + 10(x_{i+1} - x)^4 - 10(x_i - x)^4 + 5(x_{i-1} - x)^4 & [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ (x_{i+3} - x)^4 - 5(x_{i+2} - x)^4 + 10(x_{i+1} - x)^4 - 10(x_i - x)^4 & [x_{i-1}, x_i] \\ (x_{i+3} - x)^4 - 5(x_{i+2} - x)^4 + 10(x_{i+1} - x)^4 & [x_i, x_{i+1}] \\ (x_{i+3} - x)^4 - 5(x_{i+2} - x)^4 & [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ (x_{i+3} - x)^4 & [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.  $\phi_i(x)$  Quartic B-spline fonksiyonları ve bu fonksiyonların birinci, ikinci ve üçüncü türevleri  $[x_{i-2}, x_{i+3}]$  aralığı dışında sıfırdır. Aşağıdaki tabloda  $\phi_i(x)$  ve türevlerinin ilgili noktalarda değerleri verilmiştir.

$x$	$x_{i-2}$	$x_{i-1}$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_{i+2}$	$x_{i+3}$
$\phi_i(x)$	0	1	11	11	1	0
$\phi_i'(x)$	0	$\frac{4}{h}$	$\frac{12}{h}$	$\frac{-12}{h}$	$\frac{-4}{h}$	0
$\phi_i''(x)$	0	$\frac{12}{h^2}$	$\frac{-12}{h^2}$	$\frac{-12}{h^2}$	$\frac{12}{h^2}$	0
$\phi_i'''(x)$	0	$\frac{24}{h^3}$	$\frac{-72}{h^3}$	$\frac{72}{h^3}$	$\frac{-24}{h^3}$	0

Her Quartic B-spline beş aralık içermektedir. Dolayısıyla her  $[x_i, x_{i+1}]$  aralığını beş spline kapsamaktadır.  $[x_i, x_{i+1}]$  aralığı üzerinde  $u(x, t)$  fonksiyonunun değişimi

$$u(x, t) = \phi^e \cdot \mathbf{d}^e = (\phi_{i-2}, \phi_{i-1}, \phi_i, \phi_{i+1}, \phi_{i+2}) \cdot (\delta_{i-2}, \delta_{i-1}, \delta_i, \delta_{i+1}, \delta_{i+2})^T$$

şeklinde olur. Buradan  $x_i$  noktasındaki  $u_N(x, t)$  nümerik çözümü

$$\begin{aligned} u_i &= \delta_{i-2} + 11\delta_{i-1} + 11\delta_i + \delta_{i+1} \\ u_i' &= \frac{4}{h}(-\delta_{i-2} - 3\delta_{i-1} + 3\delta_i + \delta_{i+1}) \\ u_i'' &= \frac{12}{h^2}(\delta_{i-2} - \delta_{i-1} - \delta_i + \delta_{i+1}) \\ u_i''' &= \frac{24}{h^3}(-\delta_{i-2} + 3\delta_{i-1} - 3\delta_i + \delta_{i+1}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu ifadeler KdV denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} &(\delta_{i-2} + 11\delta_{i-1} + 11\delta_i + \delta_{i+1}) + \varepsilon(\delta_{i-2} + 11\delta_{i-1} + 11\delta_i + \delta_{i+1}) \\ &\left[\frac{4}{h}(-\delta_{i-2} - 3\delta_{i-1} + 3\delta_i + \delta_{i+1})\right] + \mu\left[\frac{24}{h^3}(-\delta_{i-2} + 3\delta_{i-1} - 3\delta_i + \delta_{i+1})\right] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.  $n\Delta t$  zamanındaki parametreler  $\delta_i^n$  olmak üzere  $n$  ve  $n+1$  zamanları arasında

$$\delta_i = \frac{1}{2}(\delta_i^{n+1} + \delta_i^n)$$

diskretize edilirse Crank-Nicolson dönüşümleri elde edilir.

$$r_1 = \frac{2}{h}\varepsilon\Delta t, \quad r_2 = \frac{12}{h^3}\mu\Delta t \quad \text{ve} \quad Z_i = \delta_{i-2} + 11\delta_{i-1} + 11\delta_i + \delta_{i+1}$$

olmak üzere KdV denkleminde her nokta için

$$\begin{aligned} (1 - r_1 Z_i - r_2) \delta_{i-2}^{n+1} + (11 - 3r_1 Z_i + 3r_2) \delta_{i-1}^{n+1} + (11 + 3r_1 Z_i - 3r_2) \delta_i^{n+1} + \\ (1 + r_1 Z_i + r_2) \delta_{i+1}^{n+1} &= (1 + r_1 Z_i + r_2) \delta_{i-2}^n + (11 + 3r_1 Z_i - 3r_2) \delta_{i-1}^n + \\ (11 - 3r_1 Z_i + 3r_2) \delta_i^n + (1 - r_1 Z_i - r_2) \delta_{i+1}^n, & \quad i = 0, 1, \dots, N \end{aligned}$$

denklemleri bulunur. Bu sistem  $N + 1$  lineer denklem,  $N + 4$  bilinmeyenden oluşmaktadır. Tek çözümün elde edilebilmesi için 3 denkleme daha ihtiyaç vardır. Bunun için sınır şartları kullanılacaktır:

$$\begin{aligned} u_0 &\longrightarrow \delta_{-2} + 11\delta_{-1} + 11\delta_0 + \delta_1 = u_0 \\ u_N &\longrightarrow \delta_{N-2} + 11\delta_{N-1} + 11\delta_N + \delta_{N+1} = u_N \\ u'_N = 0 &\longrightarrow \delta_{N-2} + 3\delta_{N-1} - 3\delta_N - \delta_{N+1} = 0 . \end{aligned}$$

Bunların kullanılmasıyla genel denklemde  $i = 0$ ,  $N - 1$  ve  $N$  değerleri için ortaya çıkan  $\delta_{-2}$ ,  $\delta_N$  ve  $\delta_{N+1}$  parametreleri elimine edilerek  $N + 1$  lineer denklem ve  $N + 1$  bilinmeyenden oluşan sistem elde edilir.

$$\begin{aligned} \delta_{-2} &= -11\delta_{-1} - 11\delta_0 - \delta_1 \\ \delta_N &= \frac{1}{8}(-2\delta_{N-2} - 14\delta_{N-1}) \\ \delta_{N+1} &= \frac{1}{8}(14\delta_{N-2} + 66\delta_{N-1}) \end{aligned}$$

Sistemin matris gösterimi

$$\begin{aligned} a1 &= 8r_1Z_0 + 14r_2, & a2 &= 14r_1Z_0 + 8r_2, & a3 &= 2r_1Z_0 + 2r_2, \\ a4 &= 1 - r_1Z_{N-1} - r_2, & a5 &= (86 - 26r_1Z_{N-1} + 22r_2)/8, \\ a6 &= (74 + 10r_1Z_{N-1} - 38r_2)/8, & a7 &= -12/8r_2, & a8 &= -132/8r_2, \\ b_{i1} &= 1 - r_1Z_i - r_2, & b_{i2} &= 11 - 3r_1Z_i + 3r_2, \\ b_{i3} &= 11 + 3r_1Z_i - 3r_2, & b_{i4} &= 1 + r_1Z_i + r_2, \\ c1 &= -8r_1Z_0 - 14r_2, & c2 &= -14r_1Z_0 - 8r_2, \\ c3 &= -2r_1Z_0 - 2r_2, & c4 &= 1 + r_1Z_{N-1} + r_2, \\ c5 &= (8 + 26r_1Z_{N-1} - 22r_2)/8, & c6 &= (74 - 10r_1Z_{N-1} + 38r_2)/8, \\ c7 &= 12/8r_2, & c8 &= 132/8r_2, \end{aligned}$$

olmak üzere

$$A(\delta^n)\delta^{n+1} = B(\delta^n)\delta^n$$

biçimindedir. Burada

$$A = \begin{bmatrix} a1 & a2 & a3 & & & & & & & \\ b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & & & & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & b_{(N-2)1} & b_{(N-2)2} & b_{(N-2)3} & b_{(N-2)4} & \\ & & & & & & a4 & a5 & a6 & \\ & & & & & & & a7 & a8 & \\ & & & & & & & & & \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} c1 & c2 & c3 & & & & & & & \\ b_{14} & b_{13} & b_{12} & b_{11} & & & & & & \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & & & & b_{(N-2)4} & b_{(N-2)3} & b_{(N-2)2} & b_{(N-2)1} & \\ & & & & & & c4 & c5 & c6 & \\ & & & & & & & c7 & c8 & \end{bmatrix}$$

biçimindedir.  $A$  ve  $B$  matrisleri  $\delta$ 'lara bağlı olduklarından bu denklem sistemi lineer değildir. Bu sebeple buna eşdeğer olan aşağıdaki sistem çözülecektir.

$$A(\delta^n)\hat{\delta}^{n+1} = B(\delta^n)\delta^n$$

$$A\left(\frac{\hat{\delta}^{n+1} + \delta^n}{2}\right)\delta^{n+1} = B\left(\frac{\hat{\delta}^{n+1} + \delta^n}{2}\right)\delta^n.$$

İlk denklemden elde edilen  $\hat{\delta}^{n+1}$  yaklaşımı ikinci denklemdeki iterasyonla geliştirilmektedir.  $u_N(x, t)$  yaklaşık çözümünün zaman içerisindeki değişimi  $\mathbf{d}^n = (\delta_{i-2}^n, \delta_{i-1}^n, \delta_i^n, \delta_{i+1}^n)$  vektörünün zaman içerisindeki bağlı olarak hesaplanacaktır. Bu da ancak  $\mathbf{d}^0$  başlangıç vektörünün belirlenerek tekrarlama bağıntısının çözülmesiyle mümkündür.

Başlangıç vektörünün hesaplanması :

$$u_N(x, 0) = \sum_{i=-2}^{N+1} \delta_i(0)\phi_i(x)$$

$$u_i^0 = \delta_{i-2}^0 + 11\delta_{i-1}^0 + 11\delta_i^0 + \delta_{i+1}^0, \quad i = 0, 1, \dots, N.$$

Bu sistem  $N + 1$  lineer denklem,  $N + 4$  bilinmeyenden oluşmaktadır. Tek çözümün elde edilebilmesi için 3 denkleme daha ihtiyaç vardır. Bunun için



$$\begin{aligned}
e^{ikh} &= \cos(kh) + i \sin(kh) \\
a &= 2 \cos\left(\frac{3}{2}kh\right) + 22 \cos\left(\frac{1}{2}kh\right) \\
b &= [2r_1\lambda + 2r_2] \sin\left(\frac{3}{2}kh\right) + [6r_1\lambda - 6r_2] \sin\left(\frac{1}{2}kh\right)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\xi = \frac{a - ib}{a + ib}$$

olarak bulunur.

$$|\xi| = \left| \frac{a - ib}{a + ib} \right| = \frac{|a - ib|}{|a + ib|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1 .$$

Dolayısıyla lineerleştirilmiş denklemin şartsız kararlı olduğu sonucuna varılır.

#### 6.4 Test Problemler :

İlk olarak

$$u(x, 0) = 3c^2(A_1x + D_1)$$

başlangıç şartıyla hareket eden bir bağımsız dalganın hareketini ele alalım.

$$A_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c}{\mu}}, \varepsilon = 1, \mu = 0.000484, c = 0.3, D_1 = -6$$

ve sınır şartları;

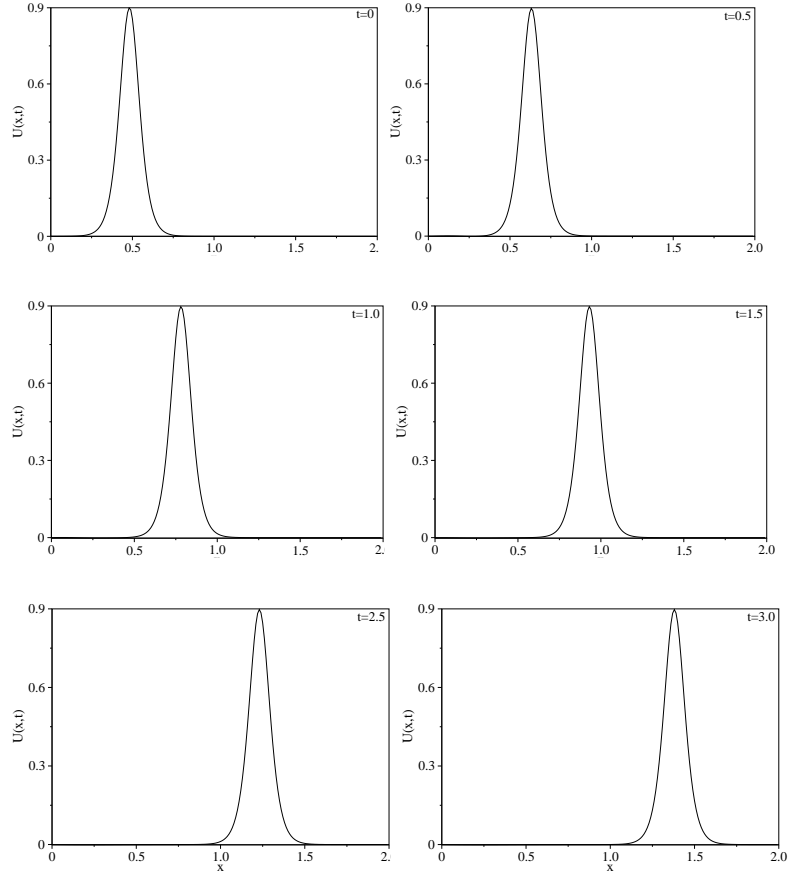
$$\begin{aligned}
u(0, t) &= u(2, t) = 0 \\
u_x(0, t) &= u_x(2, t) = 0
\end{aligned}$$

olarak alındığında  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar değerler aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.00	0.144598	0.086759	0.046850	0.0	0.0
0.50	0.144645	0.086758	0.046847	0.04	0.12
1.00	0.144594	0.086756	0.046846	0.08	0.21
1.50	0.144524	0.086755	0.046845	0.10	0.25
2.00	0.144497	0.086753	0.046844	0.12	0.30
2.50	0.144492	0.086752	0.046842	0.14	0.36
3.00	0.144496	0.086751	0.046841	0.16	0.42

Tablo 6.1:  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar hesaplanan invaryantlar

$h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için hesaplanan invaryantların değişmediği, hata normlarının ise oldukça küçük kaldığı görölmektedir.



Şekil 6.1:  $t = 0.0 - 3.0$  zaman aralığında  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.005$  değerleri için bir bağımsız dalganın hareketi

Sağa doğru hareket eden dalganın genliğini koruyarak zaman içerisinde ilerlediği görülmektedir.

İkinci olarak

$$u(x, 0) = 3c_1^2(A_1x + D_1) + 3c_2^2(A_2x + D_2)$$

başlangıç şartıyla hareket eden bir çift dalganın hareketini ele alalım.

$$A_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c_1}{\mu}}, A_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c_2}{\mu}}$$

$$\varepsilon = 1, \mu = 0.000484, c_1 = 0.3, c_2 = 0.1, D_1 = D_2 = -6$$

ve sınır şartları;

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(2, t) = 0 \\ u_x(0, t) &= u_x(2, t) = 0 \end{aligned}$$



olarak alındığında  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar değerler aşağıdaki gibi elde edilmiştir.

$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.00	0.228082	0.107062	0.053316
0.50	0.228162	0.107060	0.053287
1.00	0.228012	0.107059	0.053258
1.50	0.227807	0.107059	0.053284
2.00	0.227703	0.107057	0.053308
2.50	0.227675	0.107054	0.053313
3.00	0.227690	0.107050	0.053311

Tablo 6.2:  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar hesaplanan invariantlar

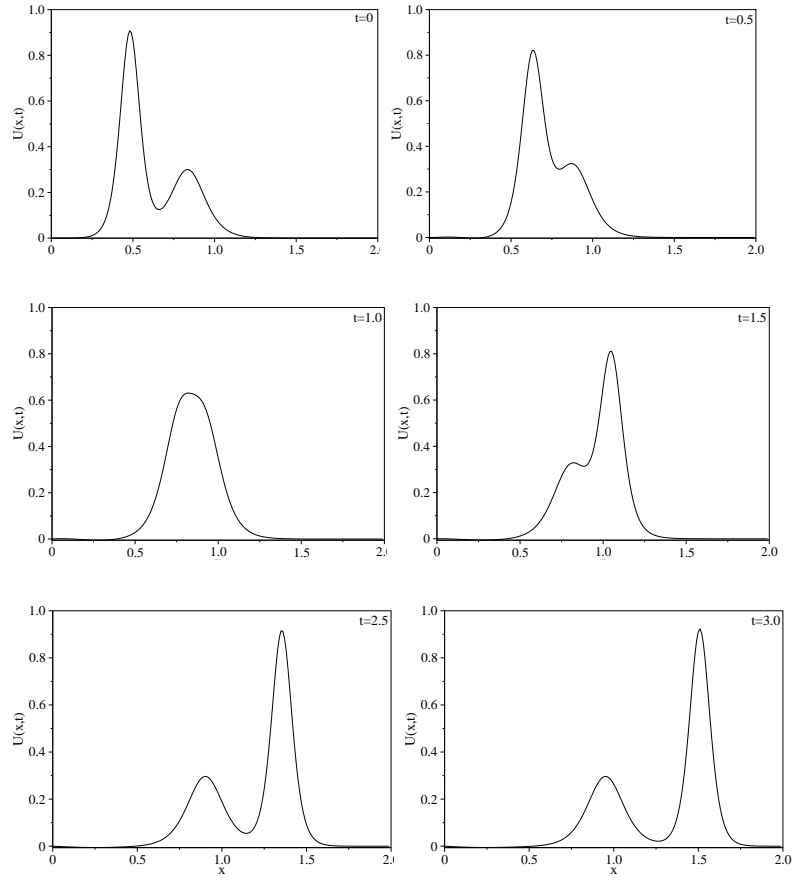
$h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için hesaplanan invariantların değişmediği görülmektedir. Aşağıdaki tabloda tek dalga için  $L_2 \times 10^3$  normunun  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  değerleri için karşılaştırılması verilmiştir.

$t$	Zabusky-Kruskal [8]	Hopscotch [11]	Petrov-Galerkin [16]	Modified P-G [16]	Collocation Quartic
0.25	5.94	3.79	4.46	0.21	0.02
0.50	13.17	9.28	7.01	0.38	0.04
0.75	21.08	14.14	10.08	0.57	0.06
1.00	28.66	18.72	13.26	0.74	0.08

Tablo 6.3:  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için  $t = 0$ 'dan  $t = 1$ 'e kadar  $L_2 \times 10^3$  normunun karşılaştırılması

Buna göre Quartic B-spline fonksiyonları kullanılarak Collocation yöntemiyle yapılan çözümün iyi sonuçlar verdiği söylenebilir.

İki dalganın etkileşiminin gösterildiği Şekil(6.2)'deki grafiğe göre büyük dalga küçük dalgayı  $t = 1.0$  zamanında yakalamakta ve geçiş sürecinin sonunda ise genliğinde ve hızında bir değişiklik olmadan hareketine devam etmektedir.



Şekil 6.2:  $t = 0.0 - 3.0$  zaman aralığında  $h = 0.01$ ,  $\Delta t = 0.005$  değerleri için bir çift dalganın hareketi

## Bölüm 7

### QUINTIC B-SPLINE FONKSİYONLARI İLE COLLOCATION YÖNTEMİ

#### 7.1 Giriş :

Bu bölümde Quintic B-spline fonksiyonları kullanılarak KdV denkleminin çözümü Collocation yöntemiyle elde edilecektir. Collocation yöntemiyle elde edilen denklem sistemi Thomas algoritması kullanılarak çözülmüş sonuçlar tablo ve grafikler halinde verilmiştir. von Neumann yöntemi temelinde yapılan kararlılık analizleriyle sonuçların kararlı olduğu sonucuna varılmıştır.

#### 7.2 Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Denklemin Çözümü :

KdV denklemini

$$u_t + \varepsilon u u_x + \mu u_{xxx} = 0, \quad a \leq x \leq b \quad (7.1)$$

şeklindedir, burada  $\varepsilon$  ve  $\mu$  pozitif parametreler olmak üzere KdV denklemini

$$\begin{aligned} u(a, t) = 0 & \quad u_x(a, t) = 0 & \quad u_{xx}(a, t) = 0 \\ u(b, t) = 0 & \quad u_x(b, t) = 0 & \quad u_{xx}(b, t) = 0 \end{aligned}$$

sınır şartlarıyla beraber göz önüne alalım.  $u(x, t)$  çözümüne yaklaşmak için Quintic B-spline fonksiyonları kullanılacaktır.  $[a, b]$  aralığı;

$$\pi : a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$$

şeklinde  $x_i$  noktalarında eş parçalara ayrılışın.  $\phi_i(x)$  ise  $\pi$ 'nin noktalarındaki Quintic B-spline fonksiyonları olsun.

$$x_N = \text{span}\{\phi_{-2}, \phi_{-1}, \phi_0, \dots, \phi_N, \phi_{N+1}, \phi_{N+2}\}$$

kümesi  $[a, b]$  üzerinde tanımlı fonksiyonlar için bir baz oluşturduğundan;

$$u_N(x, t) = \sum_{i=-2}^{N+2} \delta_i(t) \phi_i(x)$$

şeklinde  $u(x, t)$  çözümüne yaklaşan bir  $u_N(x, t)$  çözümü bulunacaktır. Burada  $\delta_i(t)$  zamana bağlı parametreler olup

$$\begin{aligned} u_N(a, t) &= 0 & u_{Nx}(a, t) &= 0 \\ u_N(b, t) &= 0 & u_{Nx}(b, t) &= 0 \end{aligned}$$

sınır şartları ve collocation şartları yardımıyla belirlenecektir.  $u_N(x, t)$  yaklaşık çözümü KdV denkleminde uygulandığında;

$$\begin{aligned} u_{Nt}(x_j, t) + \varepsilon u_N(x_j, t) u_{Nx}(x_j, t) + \mu u_{Nxxx}(x_j, t) &= 0, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N \\ \sum_{i=-2}^{N+2} \delta_i(t) \phi_i(x_j) + \varepsilon \sum_{k=-2}^{N+2} \delta_k(t) \phi_k(x_j) \sum_{i=-2}^{N+2} \delta_i(t) \phi_i'(x_j) + \mu \sum_{i=-2}^{N+2} \delta_i(t) \phi_i'''(x_j) &= 0 \end{aligned}$$

denklemlerle collocation şartları elde edilir.  $\phi_i(x)$  Quintic B-spline fonksiyonları

$$\phi_i(x) = \frac{1}{h^5} \begin{cases} (x - x_{i-3})^5 & [x_{i-3}, x_{i-2}] \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5 & [x_{i-2}, x_{i-1}] \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5 + 15(x - x_{i-1})^5 & [x_{i-1}, x_i] \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5 + 15(x - x_{i-1})^5 - 20(x - x_i)^5 & [x_i, x_{i+1}] \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5 + 15(x - x_{i-1})^5 - 20(x - x_i)^5 + 15(x - x_{i+1})^5 & [x_{i+1}, x_{i+2}] \\ (x - x_{i-3})^5 - 6(x - x_{i-2})^5 + 15(x - x_{i-1})^5 - 20(x - x_i)^5 + 15(x - x_{i+1})^5 - 6(x - x_{i+2})^5 & [x_{i+2}, x_{i+3}] \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak tanımlanır.  $\phi_i(x)$  Quintic B-spline fonksiyonları ve bu fonksiyonların birinci, ikinci ve üçüncü türevleri  $[x_{i-3}, x_{i+3}]$  aralığı dışında sıfırdır. Aşağıdaki tabloda  $\phi_i(x)$  ve türevlerinin ilgili noktalarda değerleri verilmiştir.

$x$	$x_{i-3}$	$x_{i-2}$	$x_{i-1}$	$x_i$	$x_{i+1}$	$x_{i+2}$	$x_{i+3}$
$\phi_i(x)$	0	1	26	66	26	1	0
$\phi'_i(x)$	0	$\frac{5}{h}$	$\frac{50}{h}$	0	$\frac{-50}{h}$	$\frac{-5}{h}$	0
$\phi''_i(x)$	0	$\frac{20}{h^2}$	$\frac{40}{h^2}$	$\frac{-120}{h^2}$	$\frac{40}{h^2}$	$\frac{20}{h^2}$	0
$\phi'''_i(x)$	0	$\frac{60}{h^3}$	$\frac{-120}{h^3}$	0	$\frac{120}{h^3}$	$\frac{-60}{h^3}$	0

Her Quintic B-spline beş aralık içermektedir. Dolayısıyla her  $[x_i, x_{i+1}]$  aralığını beş spline kapsamaktadır.  $[x_i, x_{i+1}]$  aralığı üzerinde  $u(x, t)$  fonksiyonunun değişimi

$$u(x, t) = \phi^e \cdot \mathbf{d}^e = (\phi_{i-2}, \phi_{i-1}, \phi_i, \phi_{i+1}, \phi_{i+2}) \cdot (\delta_{i-2}, \delta_{i-1}, \delta_i, \delta_{i+1}, \delta_{i+2})^T,$$

şeklinde olur. Buradan  $x_i$  noktasındaki  $u_N(x, t)$  nümerik çözümü

$$\begin{aligned} u_i &= \delta_{i-2} + 26\delta_{i-1} + 66\delta_i + 26\delta_{i+1} + \delta_{i+2} \\ u'_i &= \frac{-5}{h}(\delta_{i-2} + 10\delta_{i-1} - 10\delta_{i+1} - \delta_{i+2}) \\ u''_i &= \frac{20}{h^2}(\delta_{i-2} + 2\delta_{i-1} - 6\delta_i + 2\delta_{i+1} + \delta_{i+2}) \\ u'''_i &= \frac{-60}{h^3}(\delta_{i-2} - 2\delta_{i-1} + 2\delta_{i+1} - \delta_{i+2}) \end{aligned}$$

olarak elde edilir. Bu ifadeler KdV denkleminde yerine yazıldığında

$$\begin{aligned} &(\delta'_{i-2} + 26\delta'_{i-1} + 66\delta'_i + 26\delta'_{i+1} + \delta'_{i+2}) + \varepsilon(\delta_{i-2} + 26\delta_{i-1} + 66\delta_i + 26\delta_{i+1} + \delta_{i+2}) \\ &\left[ \frac{-5}{h}(\delta_{i-2} + 10\delta_{i-1} - 10\delta_{i+1} - \delta_{i+2}) \right] + \mu \left[ \frac{-60}{h^3}(\delta_{i-2} - 2\delta_{i-1} + 2\delta_{i+1} - \delta_{i+2}) \right] = 0 \end{aligned}$$

elde edilir.  $n\Delta t$  zamanındaki parametreler  $\delta_i^n$  olmak üzere  $n$  ve  $n+1$  zamanları arasında

$$\delta_i = \frac{1}{2}(\delta_i^{n+1} + \delta_i^n)$$

diskretize edilirse Crank-Nicolson dönüşümleri elde edilir.

$$r_1 = \frac{5}{2h}\varepsilon\Delta t, \quad r_2 = \frac{30}{h^3}\mu\Delta t \quad \text{ve} \quad Z_i = \delta_{i-2} + 26\delta_{i-1} + 66\delta_i + 26\delta_{i+1} + \delta_{i+2}$$

olmak üzere KdV denkleminde her nokta için

$$\begin{aligned} (1 - r_1 Z_i - r_2)\delta_{i-2}^{n+1} + (26 - 10r_1 Z_i + 2r_2)\delta_{i-1}^{n+1} + 66\delta_i^{n+1} + (26 + 10r_1 Z_i - 2r_2)\delta_{i+1}^{n+1} + \\ (1 + r_1 Z_i + r_2)\delta_{i+2}^{n+1} = (1 + r_1 Z_i + r_2)\delta_{i-2}^n + (26 + 10r_1 Z_i - 2r_2)\delta_{i-1}^n + 66\delta_i^n + \\ (26 - 10r_1 Z_i + 2r_2)\delta_{i+1}^n + (1 - r_1 Z_i - r_2)\delta_{i+2}^n, \quad i = 0, 1, \dots, N \end{aligned}$$

denklemleri bulunur. Bu sistem  $N + 1$  lineer denklem,  $N + 5$  bilinmeyenden oluşmaktadır. Tek çözümün elde edilebilmesi için 4 denkleme daha ihtiyaç vardır. Bunun için sınır şartları kullanılacaktır:

$$\begin{aligned}
u_N(a, t) &= 0 \longrightarrow \delta_{-2} + 26\delta_{-1} + 66\delta_0 + 26\delta_1 + \delta_2 = 0 \\
u_{Nx}(a, t) &= 0 \longrightarrow \frac{-5}{h}(\delta_{-2} + 10\delta_{-1} - 10\delta_1 - \delta_2) = 0 \\
u_N(b, t) &= 0 \longrightarrow \delta_{N-2} + 26\delta_{N-1} + 66\delta_N + 26\delta_{N+1} + \delta_{N+2} = 0 \\
u_{Nx}(b, t) &= 0 \longrightarrow \frac{-5}{h}(\delta_{N-2} + 10\delta_{N-1} - 10\delta_{N+1} - \delta_{N+2}) = 0
\end{aligned}$$

Bunların kullanılmasıyla genel denklemde  $i = 0, 1, N-1$  ve  $N$  değerleri için ortaya çıkan  $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}$  ve  $\delta_{N+2}$  parametreleri elimine edilerek  $N + 1$  lineer denklem ve  $N + 1$  bilinmeyenden oluşan sistem elde edilir.

$$\begin{aligned}
\delta_{-2} &= \frac{165}{4}\delta_0 + \frac{65}{2}\delta_1 + \frac{9}{4}\delta_2, \\
\delta_{-1} &= -\frac{33}{8}\delta_0 - \frac{9}{4}\delta_1 - \frac{1}{8}\delta_2, \\
\delta_{N+1} &= -\frac{33}{8}\delta_N - \frac{9}{4}\delta_{N-1} - \frac{1}{8}\delta_{N-2}, \\
\delta_{N+2} &= \frac{165}{4}\delta_N + \frac{65}{2}\delta_{N-1} + \frac{9}{4}\delta_{N-2},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
a1 &= 175 - 47r_1Z_1 + 49r_2, & a2 &= 510 + 18r_1Z_1 + 18r_2, \\
a3 &= 207 + 81r_1Z_1 - 15r_2, & a4 &= 8 + 8r_1Z_1 + 8r_2, \\
a5 &= 8 - 8r_1Z_{N-1} - 8r_2, & a6 &= 207 - 81r_1Z_{N-1} + 15r_2, \\
a7 &= 510 - 18r_1Z_{N-1} - 18r_2, & a8 &= 175 + 47r_1Z_{N-1} - 49r_2, \\
b_{i1} &= 1 - r_1Z_i - r_2, & b_{i2} &= 26 - 10r_1Z_i + 2r_2, & b_{i3} &= 66, \\
b_{i4} &= 26 + 10r_1Z_i - 2r_2, & b_{i5} &= 1 + r_1Z_i + r_2, \\
c1 &= 175 + 47r_1Z_1 - 49r_2, & c2 &= 510 - 18r_1Z_1 - 18r_2, \\
c3 &= 207 - 81r_1Z_1 + 15r_2, & c4 &= 8 - 8r_1Z_1 - 8r_2, \\
c5 &= 8 + 8r_1Z_{N-1} + 8r_2, & c6 &= 207 + 81r_1Z_{N-1} - 15r_2, \\
c7 &= 510 + 18r_1Z_{N-1} + 18r_2, & c8 &= 175 - 47r_1Z_{N-1} + 49r_2, \\
d_{i1} &= 1 + r_1Z_i + r_2, & d_{i2} &= 26 + 10r_1Z_i - 2r_2, & d_{i3} &= 66,
\end{aligned}$$







### 7.3 Kararlılık Analizi :

KdV denkleminin kararlılık analizi Von Neumann teorisi temelinde incelenecektir. Fourier seri yönteminde  $i = \sqrt{-1}$  olmak üzere  $\delta_j^n = \xi^n e^{ijkh}$  şeklinde seçilen büyüme faktörü (amplification factor ) genel denklemde yazılarak belirlenecektir.

$$(1 - r_1 Z_j - r_2) \delta_{j-2}^{n+1} + (26 - 10r_1 Z_j + 2r_2) \delta_{j-1}^{n+1} + 66 \delta_j^{n+1} + (26 + 10r_1 Z_j - 2r_2) \delta_{j+1}^{n+1} + (1 + r_1 Z_j + r_2) \delta_{j+2}^{n+1} = (1 + r_1 Z_j + r_2) \delta_{j-2}^n + (26 + 10r_1 Z_j - 2r_2) \delta_{j-1}^n + 66 \delta_j^n + (26 - 10r_1 Z_j + 2r_2) \delta_{j+1}^n + (1 - r_1 Z_j - r_2) \delta_{j+2}^n, \quad j = 0, 1, \dots, N$$

Bu yöntemde KdV denklemindeki  $uu_x$  nonlineer terimi içerisindeki  $u$  terimi yerel olarak sabit kabul edilecektir. Buna da  $\lambda$  diyelim.

$$\xi[(1 - r_1 \lambda - r_2) e^{-2ikh} + (26 - 10r_1 \lambda + 2r_2) e^{-ikh} + 66 + (26 + 10r_1 \lambda - 2r_2) e^{ikh} + (1 + r_1 \lambda + r_2) e^{2ikh}] = (1 + r_1 \lambda + r_2) e^{-2ikh} + (26 + 10r_1 \lambda - 2r_2) e^{-ikh} + 66 + (26 - 10r_1 \lambda + 2r_2) e^{ikh} + (1 - r_1 \lambda - r_2) e^{2ikh}$$

Burada

$$\begin{aligned} e^{ikh} &= \cos kh + i \sin kh, \\ a &= 66 + 2 \cos 2kh + 52 \cos kh, \\ b &= \sin 2kh[2r_1 \lambda + 2r_2] + \sin kh[20r_1 \lambda - 4r_2], \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\xi = \frac{a - ib}{a + ib},$$

olarak elde edilir. Buradan

$$|\xi| = \left| \frac{a - ib}{a + ib} \right| = \frac{|a - ib|}{|a + ib|} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{\sqrt{a^2 + b^2}} = 1.$$

olarak bulunur. Dolayısıyla lineerleştirilmiş denklemin şartsız kararlı olduğu sonucuna varılır.

#### 7.4 Test Problemler :

İlk olarak

$$u(x, 0) = 3c^2(A_1x + D_1)$$

başlangıç şartıyla hareket eden bir bağımsız dalganın hareketini ele alalım.

$$A_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c}{\mu}}, \varepsilon = 1, \mu = 0.000484, c = 0.3, D_1 = -6$$

ve sınır şartları;

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(2, t) = 0 \\ u_x(0, t) &= u_x(2, t) = 0 \end{aligned}$$

olarak alındığında  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar değerler aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.00	0.144598	0.086759	0.046850	0.0	0.0
0.50	0.144602	0.086761	0.046851	0.04	0.11
1.00	0.144601	0.086762	0.046853	0.07	0.20
1.50	0.144603	0.086764	0.046854	0.09	0.24
2.00	0.144604	0.086765	0.046855	0.10	0.28
2.50	0.144605	0.086767	0.046857	0.13	0.33
3.00	0.144606	0.086768	0.046858	0.15	0.41

Tablo 7.1:  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar hesaplanan invaryantlar

$h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için hesaplanan invaryantların değişmediği, hata normlarının ise oldukça küçük kaldığı görülmektedir [18].

İkinci olarak

$$u(x, 0) = 3c_1^2(A_1x + D_1) + 3c_2^2(A_2x + D_2)$$

başlangıç şartıyla hareket eden bir çift dalganın hareketini ele alalım.

$$A_1 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c_1}{\mu}}, A_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon c_2}{\mu}},$$

$$\varepsilon = 1, \mu = 0.000484, c_1 = 0.3, c_2 = 0.1, D_1 = D_2 = -6,$$

ve sınır şartları;

$$\begin{aligned} u(0, t) &= u(2, t) = 0, \\ u_x(0, t) &= u_x(2, t) = 0, \end{aligned}$$

olarak alındığında  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar değerler aşağıdaki gibi elde edilmektedir.

$t$	$I_1$	$I_2$	$I_3$
0.00	0.228081	0.107062	0.053316
0.50	0.228081	0.107064	0.053317
1.00	0.228062	0.107074	0.053321
1.50	0.228222	0.107075	0.053323
2.00	0.228037	0.107070	0.053323
2.50	0.227816	0.107073	0.053325
3.00	0.227658	0.107079	0.053328

Tablo 7.2:  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için  $t = 0$ 'dan  $t = 3$ 'e kadar hesaplanan invaryantlar

$h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için hesaplanan invaryantların değişmediği görülmektedir [18]. Aşağıdaki tabloda tek dalga için  $L_2 \times 10^3$  normunun  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  değerleri için karşılaştırılması verilmiştir.

$t$	Zabusky-Kruskal [8]	Hopscotch [11]	Petrov-Galerkin [16]	Modified P-G [16]	Collocation Quintic
0.25	5.94	3.79	4.46	0.21	0.022
0.50	13.17	9.28	7.01	0.38	0.041
0.75	21.08	14.14	10.08	0.57	0.054
1.00	28.66	18.72	13.26	0.74	0.067

Tablo 7.3:  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için  $t = 0$ 'dan  $t = 1$ 'e kadar  $L_2 \times 10^3$  normunun karşılaştırılması

Buna göre Quintic B-spline fonksiyonları kullanılarak Collocation yöntemiyle yapılan çözümün daha iyi sonuçlar verdiği görülmektedir [18].

## Bölüm 8

### SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu tezde KdV denkleminin Quadratic ve Cubic B-spline fonksiyonları kullanılarak ağırlıklı kalan yöntemlerinden Galerkin yöntemiyle, Quartic ve Quintic B-spline fonksiyonları kullanılarak Collocation yöntemiyle sonlu elemanlar çözümleri verilmiştir. Sonsuz sayıda korunum ilkesi bulunan KdV denkleminin ilk üçü verilmiş ve yapılan çözümlerde bu korunum ilkeleri hesaplanmıştır. Bunun yanında  $L_2$  ve  $L_\infty$  normları verilerek önceki sonuçlarla karşılaştırmaları yapılmıştır. Aşağıdaki tabloda tek dalga için  $L_2 \times 10^3$  normunun  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  değerleri için karşılaştırılması verilmiştir.

$t$	Galerkin Quadratic	Galerkin Cubic	Galerkin Yeni Algor.	Collocation Quartic	Collocation Quintic
0.25	0.02	0.02	0.02	0.02	0.02
0.50	0.04	0.04	0.04	0.04	0.04
0.75	0.05	0.06	0.06	0.05	0.05
1.00	0.06	0.08	0.07	0.07	0.06

Tablo 8.1 :  $h = 0.01$  ve  $\Delta t = 0.005$  için  $t = 0$ 'dan  $t = 1$ 'e kadar  $L_2 \times 10^3$  normunun karşılaştırılması

Tablodan da anlaşılacağı gibi KdV denkleminin çözümünde kullanılan B-spline fonksiyonlar oldukça iyi sonuçlar vermektedir.

## Bölüm 9

### Kaynaklar

- [1] J.S.Russell, "*Report on Waves, Rep. 14th Meeting of the British Assoc. for the Advancement of Science*", John Murray , Londra , s.311-390+11 levha, (1844).
- [2] G.G.Stokes, "*On the Theory of Oscillatory Waves*", Camb. Trans.8, 441-473, (1847).
- [3] J.Boussinesq, "*Theorie des Ondes et des Remous Quise Propagent le long d'un Canal Rectangulaire Horizontal, en Communiquant au Liquide Continu Dans ce Canal des Vitesses Sensiblement Parilles de la Surface au fond*", J.Math.Pures. Appl. , Ser 2 , 17, 55-108, (1872).
- [4] D.J.Korteweg ve G.de Vries, "*On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal, and on a new type of Long Stationary Waves*", Philos. Mag., 39, 422-443, (1895).
- [5] A.H.A.Ali, "*Finite Element Studies of Korteweg de Vries Equation*", Ph.D.Thesis, University College of North Wales,Bangor,UK,1-2, (1989).
- [6] T.Geyikli, "*Finite Element Studies of the MKdV Equation*", Ph.D.Thesis, University College of North Wales,Bangor,UK,1-2, (1994).
- [7] C.S.Gardner, J.M.Greene, M.D.Kruskal ve R.M.Miura, "*Method for solving the Korteweg de Vries Equation*",Phys. Rev. Lett. 19,1095-1097, (1967).

- [8] N.J.Zabusky ve M.D.Kruskal, "*Interaction of Solitons in a Collisionless Plasma and the Recurrence of Initial States*", *Phys. Rev. Lett.*, 15, 240-243, (1965).
- [9] B.Fornberg ve G.B.Whitham, "*A Numerical and Theoretical Study of certain nonlinear wave phenomena*", *Phil. Trans. Roy. Soc.* , 289, 373-404, (1978).
- [10] L.B.Wahibin, "*A Dissipative Galerkin Method for the Numerical Solution of First Order Hyperbolic Equation. In Mathematical Aspects of Finite Elements in Partial Differential Equations (C.de Boor, Ed.)*" New York, Academic Press, 147-169, (1974).
- [11] M.E.Alexander ve J.LI Morris, "*Galerkin Methods for some Model Equations for Nonlinear Dispersive Waves*", *J. Comp. Phys.*, 39, 94-102, (1981).
- [12] R.W.Clough, "*The Finite Element Method in Plane Stress Analysis*", *J. Struct. Div., ASCE, Proc. 2nd Conf. Electronic Computation*, 345-378, (1960).
- [13] I.J.Schoenberg, "*Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions*", *Quart.Appl.Math.*, 4, 45-99, (1946).
- [14] İ.Dağ, "*Studies of B-Spline Finite Elements*",*Ph.D.Thesis, University College of North Wales,Bangor,UK*,5-11, (1994).
- [15] L.R.T.Gardner, G.A.Gardner ve A.H.A.Ali, "*Simulations of solitons using quadratic spline finite elements*",*Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*,92,231-243, (1991).
- [16] J.M.Sanz, I.Christie, "*Petrov-Galerkin Methods for Nonlinear Dispersive Waves*", *Journal of Computational Physics*,39,94-102, (1981).

- [17] T.R.Taha, M.J.Ablowitz, "*Analytical and Numerical Aspects of Certain Nonlinear Evolution Equations*", *Journal of Computational Physics*, 55, 231-253, (1984).
- [18] G.A.Gardner, L.R.T.Gardner ve A.H.A.Ali, "*Numerical Solution to the Korteweg de Vries Equation*", *U.C.N.W. Maths Preprint* , 88.9, (1988).
- [19] P.C.Jain, R.Shankar ve D.Bhardwaj, "*Numerical Solution of the Korteweg de Vries Equation*", *Chaos,Solitons Fractals*, 8,6,943-951, (1997).
- [20] A.C.Scott, "*Korteweg de Vries Equation*", *An article prepared for Encyclopedia on Nonlinear Science*
- [21] Tuncay Aktosun, "*Inverse Scattering Transform, KdV, and Solitons*" *A review paper prepared at Department of Mathematics and Statistics, Mississippi State University, (2000).*
- [22] A.H.A Ali,L.R.T. Gardner,G.A. Gardner, "*A Galerkin Approach To The Solution Of Burgers Equation*", *U C N W Maths Preprint 90.04 1-12*
- [23] L.R.T. Gardner,G.A. Gardner, T. Geyikli, "*A New B-Spline Finite Element Algorithm For The Kdv Equation*", *U C N W Maths Preprint 91.28*
- [24] L.R.T. Gardner,G.A. Gardner, T. Geyikli, "*The Boundary Forced MKdV Equation*", *U C N W Maths Preprint 93.05*
- [25] P.M.Prenter, "*Splines and Variational Methods*", *A Wiley-Interscience Publication*
- [26] A.R.Mitchell ve D.F.Griffiths, "*The Finite Difference Method in Partial Differential Equations*", *A Wiley-Interscience Publication*
- [27] J.N.Reddy, "*An Introduction to the Finite Element Method*", *Mc Graw-Hill International Editions*

- [28] Alan J.Davies, "*The Finite Element Method A First Approach*", Clarendon Press Oxford
- [29] Richard L.Burden ve J.Douglas Faires, "*Numerical Analysis*" Fifth Edition, PWS Publishing Company
- [30] Aslak Tveito ve Ragnar Winther, "*Introduction to Partial Differential Equations A Computational Approach*" , Springer
- [31] A.Esen, "*Termistör Probleminin B-Spline Sonlu Elemanlar Yöntemi ile Çözümü* ", Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, TR, (2003).
- [32] A.Doğan, "*Petrov-Galerkin Finite Element Methods*", Ph.D.Thesis, University College of North Wales, Bangor, UK, 1-2, (1997).
- [33] B.Saka, "*RLW ve K-S denklemlerinin B-Spline :Kolokeyşin Metodları ile Çözümü* ", Doktora Tezi, Osmangazi Üniversitesi, TR, (2003).
- [34] Klaus Brauer, "*The Korteweg de Vries Equation: History, exact solutions and Graphical Representation*", (2000).
- [35] E.M.de Jager, "*The Korteweg de Vries Equation, The Theory of Solitons and its Impact on Science*", (1999).
- [36] Eugene Isaacson, Herbert Bishop Keller, "*Analysis of Numerical Methods*" John Wiley and Sons Inc.
- [37] K.R.Raslan, "*Collocation method using quartic B-spline for the equal width (EW) equation*", Applied Mathematics and Computation, (2004)



## Özgeçmiş

1978 yılı Kayseri doğumlu olan Muharrem ÖZLÜK ilkokulu Batman'da, ortaokul ve liseyi Diyarbakır'da okumuştur. 1996 yılında "Orta Doğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Eğitimi Matematik Öğretmenliği" bölümüne kayıt yaptırmaya hak kazanmış 2001 yılında bu bölümden mezun olmuştur. Malatya ili Gündüzbey Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

Sürekli Adres: İnönü Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi,  
Matematik Bölümü, m\_özlük@inonu.edu.tr