İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI LİMİTLEME METODLARININ MUHTELİF DİZİ UZAYLARI ÜZERİNDEKİ SPEKTRUMU

ERDİNÇ DÜNDAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2006

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜNE

İş bu tez çalışması Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Prof.Dr. İhsan SOLAK

Üye

Prof.Dr. Feyzi BAŞAR

Üye

Doç.Dr. A. Refik BAHADIR

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

Prof.Dr.Ali ŞAHİN
Enstitü Müdürü
……/……./2006

ÖZET

Üç bölümden oluşan bu çalışma; dizi uzaylarında tanımlı bazı dönüşümlerin spektrumu ile ilgilidir.

Birinci bölümde; sonraki bölümlerde kullanacağımız, bazı kavramlar ve ilgili teoremler verildi.

İkinci bölümde; bazı dizi uzayları üzerinde ağırlıklı ortalama, Cesàro ve fark dönüşümlerinin spektrum ve Goldberg sınıflandırmasına göre ince spektrumları ile ilgili çalışmalar incelendi.

Üçüncü bölümde, c_0 ve c uzayında fark matrisinin Goldberg sınıflandırmasına göre ince spektrumu belirlendi. Ayrıca fark matrisinin transpoze temsiline sahip dönüşümünün c_0 uzayı üzerindeki spektrum ve ince spektrumu incelendi.

ABSTRACT

In this study, we deal with spectrum of some operators defined on sequence spaces.

In the first chapter, the fundamental concepts and theorems related on subject which are needed in the next chapters were given.

In the second chapter, spectrum and fine spectrum of weighted mean, Cesàro and difference operators defined on some sequence spaces were examined.

In the last chapter, we determined the fine spectrum of difference operator defined on sequence space c_0 and c. Also, fine spectrum of the operator represented by transpose of difference matrix was examined.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimimden beri danışmanlığımı üstlenen, bu tezin hazırlanmasında gerekli maddi ve manevi imkânları sağlayarak bana yardımcı olan, hiç bir zaman yakın ilgi ve alakalarını esirgemeyen, değerli hocam sayın Prof Dr. Feyzi BAŞAR'a ; her türlü problemimde kıymetli fikirleriyle yardımını esirgemeyen ve tezin yazımında yardımcı olan değerli hocalarım sayın Doç. Dr. Bilal ALTAY' a , Dr. Celal ÇAKAN'a ve Dr. İsmet ÖZDEMİR'e minnet ve şükranla teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

İçindekiler

GÖSTERİMLER

$\mathbb{R}$: Reel sayıların cümlesi

$\mathbb{N}$: Doğal sayıların cümlesi

$\mathbb{K}$: Reel sayılar cümlesi üzerindeki kapalı aralıkların cümlesi

l_∞: Reel terimli sınırlı dizilerin uzayı

c: Reel terimli yakınsak dizilerin uzayı

c_0: Reel terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı

l_p: p-mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı

w: Tüm reel ve kompleks değerli dizilerin uzayı

X^*: X uzayının duali

$R(T)$: T operatörünün görüntüsü

$\overline{R(T)}$: T operatörünün görüntüsünün kapanışı

$\rho(T)$: T operatörünün regüler değerler cümlesi

$R(\lambda; A)$: A operatörünün rezolvantası

T_λ: T operatörünün λ özdeğerine karşılık gelen operatörü

$\sigma(T, X)$: X uzayında T' nin spektrum cümlesi

$\sigma_p(T, X)$: X uzayında T'nin point (nokta) spektrumu

$\sigma_c(T, X)$: X uzayında T'nin countinuos (sürekli) spektrumu

$\sigma_r(T, X)$: X uzayında T'nin residual (artan) spektrumu

C_1: Cesàro operatörü

$\|.\|_{(,)}$: Bir dizi uzayında bir operatörün normu

bv_p: p sınırlı salınımlı dizi uzayı

$\tilde{c}_o, \tilde{c}$: Cesàro dizi uzayları

Δ: Fark operatörü

Δ^t: Fark operatörünün transpozu

Δ^*: Fark operatörünün duali

$N(T)$: T' nin sıfır uzayı

GİRİŞ

$\mathbb{C}^n$ uzayında tanımlı bir T lineer dönüşümünün karakteristik değerleri, $\det(\lambda I - T)$ determinantını sıfır yapan λ kompleks sayılarıdır. Bu tür λ değerlerine T dönüşümünün spektrum cümlesi denir. $\det(\lambda I - T)$, n.dereceden bir polinom olduğundan, spektrum cümlesi en fazla n değerden oluşur. Eğer λ karakteristik kök değil ise $\det(\lambda I - T) \neq 0$ olacağından $\lambda I - T$ bir terse sahip bulunacaktır.

Sonsuz boyutlu uzaylar üzerindeki dönüşümlerin spektrum tartışmaları oldukça karmaşık, ilginç ve dönüşümleri anlamada çok önemlidir. Dönüşümlerin spektral analizi, matematiksel fizikte önemli bir yere sahiptir. Meselâ; kuantum mekaniğindeki Hamilton dönüşümü, Hilbert uzayında sınırlı olmayan bir self-adjoint dönüşümdür. Hamilton dönüşümünün nokta spektrumu, sistemin sınır durumundaki enerji seviyesine karşılık gelir. Diğer spektrum çeşitleri, sistemin dağılım teorisinde önemli rol oynar, [**18**].

Dizi uzayları üzerindeki dönüşümlerin spektrumu ile ilgili ilk çalışma, 1965 yılında Brown, Halmos ve Shields [**6**] tarafından birinci mertebeden Cesàro dönüşümünün, ℓ_2 Hilbert uzayı üzerindeki karakteristik değerlerini ve spektrum cümlesini belirleyen çalışmasıdır. Daha sonra, Wenger [**32**], Rhoades [**21**], Reade [**17**], Gonzalez [**11**], Akhmedov ve Başar [**1**] gibi yazarlar çeşitli dönüşümlerin spektrumu ile ilgilendiler. Bu yazarlardan farklı olarak, Sharma [**25**] ve [**26**] künyeli çalışmalarında matris sınıflarıyla ilgilenmiştir.

Son yıllarda fark matrisinin bazı dizi uzayları üzerinde çalışmalar yapılmaktadır. de Malofesse [**14**], fark matrisini

$$\|x\|_{s_r} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k|}{r^k}\ , \quad (r > 0).$$

normlu dizilerin s_r uzayında ele aldı. Altay ve Başar **[4]** ve Akhmedov ve Başar **[2]**[**3**], fark matrisinin sırasıyla c_0, c, ℓ_p ve Başar ve Altay **[5]** tarafından inşa edilen bv_p uzayları üzerindeki spektrumu ile ilgilendiler.

Bu çalımamızda, yukarıda zikrettiğimiz bazı makaleleri inceleyerek fark matrisinin c_0 uzayı üzerindeki ince spektrumu ile ilgileneceğiz.

BÖLÜM 1

Temel Kavramlar

Bu bölümde, sonraki bölümlere temel teşkil edecek olan konu ve kavramlar verilmiştir. Vektör uzayı, normlu uzay, alt uzay, Banach uzayı gibi bazı kavramların bilindiği kabul edilmektedir. Vektör uzaylarının skalar cismi, $\mathbb{C}$ kompleks veya $\mathbb{R}$ reel sayılar cisim ve doğal sayılar cümlesi, $\mathbb{N} = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ olarak alınmıştır.

1.1. Lineer Dönüşümler

X ve Y, aynı skalar cisim üzerinde iki vektör uzay olsun. $T : X \to Y$ dönüşümü; eğer her $x, y \in X$ vektörü ve her α, β skaları için

$$T(\alpha x + \beta y) = \alpha Tx + \beta Ty$$

eşitliği olması hâlinde bir *lineer dönüşüm* olarak adlandırılır.

Çalışmamızda, çok kullanılan ve uygulamalarda önemli yere sahip olan, lineer dönüşümlerin karakteristik uzaylarını verelim.

T lineer operatörünün tanım cümlesi $\mathcal{D}(T)$, görüntü cümlesi $\mathcal{R}(T)$ ve çekirdeği $\mathcal{N}(T)$ ile gösterilen uzayları,

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}(T) &= \{x \in X : Tx \in Y\} \\
\mathcal{R}(T) &= \{y \in Y : y = Tx, x \in X\} \\
\mathcal{N}(T) &= \{x \in \mathcal{D}(T) : Tx = \theta\}
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanırlar. $\mathcal{D}(T)$ uzayındaki farklı elemanları, $\mathcal{R}(T)$ uzayındaki farklı elemanlara taşıyan T dönüşümüne birebir dönüşüm denir. Bir T lineer dönüşümü, $T\theta = \theta$ özelliğine sahip olduğundan, aşikârdır ki dönüşümün birebir olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{N}(T) = \{\theta\}$ bulunmasıdır.

X ve Y normlu uzaylar olamak üzere $T : X \to Y$ lineer dönüşümü için aşağıdaki önermeler denktir.

(a) T, bir noktada süreklidir.

(b) T, X uzayı üzerinde düzgün süreklidir.

(c) T sınırlıdır, yani her $x \in X$ için

$$\|Tx\| \leq M\|x\|$$

eşitsizliğini sağlayan pozitif bir M reel sayısı mevcuttur.

T dönüşümünün normu,

$$\|T\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\| = \sup_{x\neq\theta} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} \tag{1.1.1}$$

ile tanımlanır.

X normlu uzayından Y normlu uzayına tanımlı lineer dönüşümlerinin uzayını $L(X,Y)$ ve sınırlı lineer dönüşümlerin uzayını $B(X,Y)$ ile göstereceğiz. $X = Y$ ise $B(X,Y)$ yerine $B(X)$ yazacağız. $B(X,Y)$ uzayı, (1.1.1) ile normlu uzaydır. Y uzayı tam yani Banach uzay ise $B(X,Y)$ uzayı da Banach uzaydır. Y uzayı, X normlu uzayın skalar cismi alınırsa, bu durumda, X uzayı üzerindeki $B(X,\mathbb{K}) = X'$ ile gösterilen sınırlı lineer fonksiyonellerin uzayı (veya *sürekli duali*) elde edilir.

Lineer fonksiyoneller konusunda önemli bir yere sahip olan Hahn-Banach Teoremi ve bir sonucunu verelim.

Teorem 1.1.1. [**13**, shf. 221] *X, bir normlu uzay ve $Z \subset X$ altuzay olsun. Bu durumda $f \in Z'$ ise f fonksiyonelinin*

$$f(z) = F(z) \quad (z \in Z) \text{ ve } \|f\| = \|F\|$$

eşitliklerini sağlayan bir $F \in X'$ genişlemesi vardır.

Özel olarak $Z = \{\alpha x_0; x_0 \neq \theta, x_0 \in X\}$ ve $f(z) = f(\alpha x_0) = \alpha\|x_0\|$ şeklinde alınırsa, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 1.1.2. [**13**, shf. 223] *$x_0 \neq \theta$, X normlu uzayının bir elemanı olsun. Bu durumda*

$$\|F\| = 1, \qquad F(x_0) = \|x_0\|$$

şartlarını sağlayan bir $F \in X'$ fonksiyoneli vardır.

Bu teoremin, bir cümlenin yoğunluğu tartışmalarında kullanılan sonucu aşağıdaki gibidir.

Sonuç 1.1.3. *X normlu uzayı ve $S \subset X$ bir altuzay olsun. Her $f \in X'$ için $f(S) = \{\theta\}$ olması f 'nin sıfır fonksiyoneli olmasını gerektiriyorsa S altuzayı X uzayında yoğundur, yani $\overline{S} = X$ eşitliği mevcuttur.*

Tanım 1.1.1. [**13**, shf. 87] X ve Y normlu uzaylar, $\mathcal{D}(T) \subset X$ ve $\mathcal{R}(T) \subset Y$ olmak üzere $T : \mathcal{D}(T) \to Y$ birebir bir lineer dönüşüm olsun. $\mathcal{R}(T)$ uzayından $\mathcal{D}(T)$ uzayına tanımlı ve her $Tx_0 = y_0$ şeklindeki $y_0 \in \mathcal{R}(T)$ elemanını $\mathcal{D}(T)$ uzayında x_0 elemanına taşıyan $T^{-1} : \mathcal{R}(T) \to \mathcal{D}(T)$ dönüşümüne, T *dönüşümünün tersi* denir. T^{-1} dönüşümünün lineerliği aşikârdır.

Teorem 1.1.4. [**13**, shf. 88] *X ve Y normlu uzaylar ve $T \in L(X, Y)$ olsun. T^{-1} operatörünün mevcut olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{N}(T)$ uzayının sıfır vektöründen ibaret bulunmasıdır.*

Teorem 1.1.5. [**10**, shf. 12, Teorem I.3.7] *X ve Y normlu uzaylar ve $T \in B(X, Y)$ olsun. T^{-1} operatörünün mevcut ve sürekli olması için gerek ve yeter şart her $x \in X$ için*

$$\|Tx\| \geq m\|x\|$$

eşitsizliğini sağlayan bir $m > 0$ sayısının mevcut bulunmasıdır.

Lineer dönüşümler üzerine önemli araştırmalar yapan Goldberg, dönüşümleri sınıflandırmıştır. Goldberg [**10**, shf. 58], $T : X \to Y$ lineer dönüşümü için

$$\begin{aligned} I &: \mathcal{R}(T) = Y \\ II &: \mathcal{R}(T) \neq \overline{\mathcal{R}(T)} = Y \\ III &: \overline{\mathcal{R}(T)} \neq Y \\ 1 &: T^{-1} \text{ mevcut ve sürekli} \\ 2 &: T^{-1} \text{ mevcut ve süreksiz(sınırlı değil)} \\ 3 &: T^{-1} \text{ mevcut değil} \end{aligned}$$

durumlarını gözönüne almıştır. Eğer, $\mathcal{R}(T) = Y$ ise bu durumda T, I durumundadır veya örtendir deriz ve $T \in I$ şeklinde yazacağız. Benzer şekilde, eğer T hem III ve hem de 2 durumunu sağlıyorsa bunu $T \in III_2$ şeklinde yazacağız. Yukarıda verdiğimiz, lineer dönüşümlerin durumlarını ifade eden sınıflandırma için, literatürde *Goldberg sınıflandırması* tabiri kullanılır.

Bir lineer dönüşümünün adjointi, dönüşümün tersi ve değer uzayı hakkında verdiği bilgiler bakımından önemlidir.

Tanım 1.1.2. [**13**, shf. 232] X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ sınırlı lineer dönüşüm olsun. T nin $T^* : Y' \to X'$ adjoint dönüşümü her $x \in X$ ve her $\phi \in Y'$ için

$$(T^*\phi)(x) = \phi(Tx)$$

ile tanımlanır.

Şimdi, $T : X \to Y$ lineer dönüşümü ile $T^* : Y' \to X'$ adjoint dönüşümü arasındaki bazı ilişkileri veren teoremleri sunalım.

Teorem 1.1.6. [**10**, shf. 54, Teorem II.2.8] *T^* dönüşümünün $\mathcal{D}(T^*)$ tanım uzayının Y' uzayına eşit olması için gerek ve yeter şart, T dönüşümünün sürekli bulunmasıdır. Bu durumda, T^* dönüşümü de sürekli ve $\|T^*\| = \|T\|$ eşitliği geçerlidir.*

TEOREM 1.1.7. [**17**, Lemma 5] *T dönüşümünün yoğun görüntüye sahip olması için gerek ve yeter şart, T^* dönüşümünün çekirdeğinin aşikâr uzay bulunmasıdır.*

İSPAT. Eğer $T^*\phi = 0$ olacak şekilde $\phi \neq 0$ mevcut ise o zaman her $x \in X$ için $\phi(Tx) = 0$ olur ve dolayısıyla X uzayının kapalı öz alt uzayı olan ϕ'nin çekirdeği T dönüşümünün görüntüsünü içerir.

Eğer T dönüşümünün görüntüsü yoğun değilse o zaman Hanh-Banach teoreminden her $x \in X$ için $\phi(Tx) = 0$ ve $\phi \neq 0$ olan $\phi \in X^*$ vardır. Bu sebepten dolayı $T^*\phi = 0$. $\square$

TEOREM 1.1.8. [**17**, Lemma 6] *Eğer T^* yoğun görüntüye sahip ise o zaman T dönüşümünün çekirdeği aşikâr uzaydır.*

İSPAT. Eğer $Tx = \theta$ ve $x \neq \theta$ olacak şekilde $x \in X$ mevcut ise o zaman her $\phi \in X^*$ için $(T^*\phi)(x) = \phi(Tx) = 0$ olur. Buradan, X^* uzayının kapalı özalt uzayı olan x'in sıfırlayıcısı, T^* dönüşümünün görüntüsünü içerir. $\square$

TEOREM 1.1.9. [**10**, Teorem II 3.11] *T dönüşümünün sınırlı bir terse sahip olması için T^* dönüşümünün örten bulunması gerek ve yeterdir.*

1.2. Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri

Bütün reel veya kompleks terimli dizilerin cümlesini w ile göstereceğiz. w, dizilerin koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleri ile bir vektör uzayı teşkil eder. w uzayının herbir alt uzayı, bir *dizi uzayı* olarak adlandırılır. Çalışmamızda kullanacağımız dizi uzayları, *standard dizi uzayları* olarak adlandırılan sınırlı dizilerin ℓ_∞, yakınsak dizilerin c, sıfıra yakınsak dizilerin c_0 ve p-mutlak toplanabilen dizilerin ℓ_p $(1 \leq p < \infty)$ uzaylarıdır. ℓ_∞, c ve c_0 uzayları

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

normu ile ve ℓ_p uzayı

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

normu ile Banach uzaylardır. Bu uzaylardan, literatürde çok kullanılan bazı dizi uzayları türetilmiştir. Meselâ; bs, cs, bv, bv_p, ces_p, $\ell_\infty(\Delta)$, ... gibi.

c, c_0 uzaylarının sürekli duali ℓ_1 ve ℓ_p uzayının duali de ℓ_q uzayına izomorftur.

TANIM 1.2.1. $A = (a_{nk})$ reel veya kompleks terimli bir sonsuz matris ve $x = (x_k)$ herhangi bir dizi olsun. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için

$$(Ax)_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k$$

serileri yakınsak ise $Ax = ((Ax)_n)$ dizisine x dizisinin A matrisi ile elde edilen *dönüşüm dizisi* denir. λ ve μ herhangi iki dizi uzayı ve A bir sonsuz matris olsun. Eğer her $x \in \lambda$ için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve μ uzayına ait ise A matrisi, λ uzayından μ uzayına bir *matris dönüşümü* tanımlar denir. λ uzayından μ dizi uzayına tanımlı bütün matris dönüşümlerinin cümlesi, $(\lambda; \mu)$ ile gösterilir.

$k > n$ için $a_{nk} = 0$ ve $a_{nn} \neq 0$ terimlerinden oluşan $A = (a_{nk})$ matrisine üçgen matris denir. Üçgen matris dönüşümleri birebirdir.

Dizi uzayları arasındaki bir lineer dönüşüme daima bir matris karşılık gelmeyebilir. Meselâ; $\lim : c \to \mathbb{R}$ lineer dönüşümünün bir matris temsili tanımlı değildir. Fakat, koordinat fonksiyonellerini sürekli kılan norma sahip ve e^j ile temsil edilen j. terimi 1 diğer terimleri sıfır olan standard birim dizilerinin $\{e^0, e^1, e^2, \ldots\}$ cümlesini baz kabul eden uzayda tanımlı lineer dönüşümler, bir matris gösterimine sahiptirler. Dizi uzaylar teorisinde daha çok, matris temsile sahip lineer dönüşümlerle ilgilenilir.

Burada gerekli bazı matris dönüşümlerinin sınıflarını vereceğiz.

TEOREM 1.2.1. [**27**, shf. 218] *$A = (a_{ij})$ matrisinin c uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer bir $T \in B(c)$ dönüşümünü vermesi için gerek ve yeter şartlar;*

i) A matrisinin bütün satırları ℓ_1 uzayında ve ℓ_1 normları sınırlı,

ii) A matrisinin bütün sütunları c uzayında,

iii) A matrisinin $e = (1, 1, 1, \ldots)$ disini yine c uzayına taşımasıdır.

Bu tür dönüşümlere, yakınsaklığı koruyan dönüşüm ve limiti koruyan dönüşümlere de regüler dönüşüm adı verilir. T dönüşümünün normu, satırların ℓ_1 normlarının supremumudur.

TEOREM 1.2.2. [**27**, shf. 217] *$A = (a_{ij})$ matrisinin c_0 uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer bir $T \in B(c_0)$ dönüşümünü vermesi için gerek ve yeter şartlar;*

i) A matrisinin bütün satırları ℓ_1 uzayında ve ℓ_1 normları sınırlıdır,

ii) A matrisinin bütün sütunları c_0 uzayındadır.

T dönüşümünün normu, satırların ℓ_1 normlarının supremumudur.

TEOREM 1.2.3. [**27**, shf. 220] *$A = (a_{ij})$ matrisinin ℓ_1 uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer bir $T \in B(\ell_1)$ dönüşümüne karşılık gelmesi için gerek ve yeter şart, A matrisinin bütün sütunları ℓ_1 uzayında ve onların ℓ_1 normları sınırlı olmasıdır.*

T dönüşümünün normu, sütunların ℓ_1 normlarının supremumudur.

TEOREM 1.2.4. [**27**, shf. 220] *$A = (a_{ij})$ matrisinin ℓ_∞ uzayından yine bu uzaya tanımlı sınırlı lineer bir $T \in B(\ell_\infty)$ dönüşümüne karşılık gelmesi için gerek ve yeter şart, A matrisinin bütün satırları ℓ_1 uzayında ve onların ℓ_1 normları sınırlı olmasıdır.*

T dönüşümünün normu, satırların ℓ_1 normlarının supremumudur.

1.3. Bir Dönüşümün Spektrumu

Bazı özelliklere sahip dönüşümlerin terslerini, ters dönüşümlerin özellikleri ve dönüşümle olan ilişkilerini inceleyen spektral teori, fonksiyonel analiz ve uygulamalarında temel konulardan biridir. Ters dönüşümler, denklemlerin (meselâ, cebirsel lineer denklem sistemleri, diferansiyel denklemler, integral denklemler) çözüm problemlerinde hemen karşımıza çıkar. Bu alanın gelişmesine, Sturm-Liouville ve Fredholm'un meşhur integral denklemler teorisinden çıkan sınır değerlerinin araştırılması problemi, önemli katkıda bulunmuştur.

X, n-boyutlu bir normlu uzay ve $T : X \to X$ bir lineer dönüşüm olsun. T lineer olduğundan dönüşüme bir n-kare matris karşılık gelir. Dönüşüme dair spektrum tartışmaları, dönüşüme karşılık gelen matrisin karakteristik köklerinin bulunması problemine dönüşür. Sonsuz boyutlu uzaylarda bir dönüşümün spektrum tartışmaları oldukça ilginç ve karmaşıktır.

Şimdi spektrum tatışmalarında kullanacağımız kavramları verelim.

Tanım 1.3.1. [**18**, shf. 188](Rezolvent ve spektrum cümleleri) $X \neq \{\theta\}$ bir normlu uzay ve $T : X \to X$ bir lineer dönüşüm ve I da X üzerindeki birim dönüşüm olsun. λ bir skalar olmak üzere, eğer $\lambda I - T$ dönüşümünün görüntü uzayı yoğun ve sınırlı bir terse sahip ise bu durumda λ skalarına T dönüşümünün bir regüler değeri denir. T dönüşümünün bütün regüler değerlerinin oluşturduğu skalarların cümlesine T'nin *rezolvent cümlesi* denir ve $\rho(T, X)$ ile gösterilir. Buna göre;

$$\rho(T, X) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \overline{\mathcal{R}(\lambda I - T)} = X \text{ ve } (\lambda I - T)^{-1} \text{ mevcut ve sürekli}\}$$

şeklindedir. Yani, $\lambda \in \mathbb{C}$'nin T lineer dönüşümünün bir regüler değeri olması için gerek ve yeter şart, $T - \lambda I \in I_1 \cup II_1$ bulunmasıdır.

T'nin bir regüler değeri olmayan λ skalarına T dönüşümünün bir spektrum değeri denir. T dönüşümünün bütün spektrum değerlerinin oluşturduğu cümleye T'nin *spektrumu* denir ve $\sigma(T, X)$ ile gösterilir. Buna göre;

$$\sigma(T, X) = \mathbb{C} \setminus \rho(T, X)$$

şeklindedir.

T lineer dönüşümünün spektrum cümlesi; nokta spektrum, artık spektrum ve sürekli spektrum şeklinde ayrık üç alt cümleye ayrılır.

Tanım 1.3.2. [**10**, shf. 71] $T - \lambda I$ dönüşümünün tersi mevcut olmadığı yani $T_\lambda \in 3$ olduğu $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayılarının cümlesine, T dönüşümünün *nokta spektrum* cümlesi denir ve $\sigma_p(T, X)$ ile gösterilir.

$T - \lambda I$ dönüşümünün tersi mevcut olduğu fakat görüntü uzayının yoğun olmadığı $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayılarının cümlesine, T dönüşümünün *artık spektrum* cümlesi denir ve $\sigma_r(T, X)$ ile gösterilir.

$T - \lambda I$ dönüşümünün görüntü uzayının yoğun olduğu ve tersi mevcut fakat sınırlı olmadığı $\lambda \in \mathbb{C}$ kompleks sayılarının cümlesine, T dönüşümünün *sürekli spektrum* cümlesi denir ve $\sigma_c(T, X)$ ile gösterilir.

$T : X \to X$ ve $T^* : X' \to X'$ dönüşümlerinin spektrumları arasında,

$$
\begin{aligned}
\sigma(T, X) &= \sigma(T^*, X') \\
\sigma_p(T, X) &\subset \sigma_r(T^*, X') \cup \sigma_p(T^*, X') \\
\sigma_p(T^*, X') &\subset \sigma_r(T, X) \cup \sigma_p(T, X) \\
\sigma_c(T, X) &\subset \sigma_r(T^*, X') \cup \sigma_c(T^*, X') \qquad (1.3.1) \\
\sigma_c(T^*, X') &\subset \sigma_c(T, X) \\
\sigma_r(T, X) &\subset \sigma_p(T^*, X') \\
\sigma_r(T^*, X') &\subset \sigma_c(T, X) \cup \sigma_p(T, X)
\end{aligned}
$$

bağıntıları mevcuttur.

BÖLÜM 2

Dizi Uzaylarında Spektrum

Bu bölümde, dizi uzayları arasındaki dönüşümlerin spektrumu ile ilgili yapılmış çalışmalar hakkında bilgi vererek, çalışmalarımıza temel oluşturan bazı makaleleri not edeceğiz.

Dizi uzayları arasındaki dönüşümlerden Cesàro matrisinin spektrumu üzerinde bir çok çalışma yapılmıştır. Bu alanda ilk çalışma, 1965 yılında Brown, Halmos ve Shields [**6**] tarafından birinci mertebeden Cesàro dönüşümünün, ℓ_2 Hilbert uzayı üzerindeki karakteristik değerlerini ve spektrum cümlesini belirleyen çalışmasıdır. Daha sonra, 1975 yılında, Wenger [**32**], c uzayı üzerinde ince spektrumunu ve Reade [**17**] ve Gonzalez [**11**] 1985'de sırasıyla c uzayı üzerindeki spektrumu ve ℓ_p $(1 < p < \infty)$ uzayı üzerindeki ince spektrumunu inceledi. Okutoyi [**15**],[**16**] künyeli çalışmalarında, bv ve bv_0 uzayları üzerindeki spektrumu ile ilgilendi. Sharma [**25**], [**26**] konzervatif matris sınıfındaki koersif üçgen matrislerin köşegen elemanlarının spektrum cümlesinin ayrık noktaları olduğunu ve Euler matrisi hakkındaki Mercerian teoremi ile bu matrisin spektrum cümlesini veren makalesi bu alanda farklı bir çalışmadır.

Cass ve Rhoades [**8**] çalışmalarında, ağılıklı ortalama metodlarının spektrumu ve spektrum yardımıyla Mercerian teoremleri ile ilgilendiler. Rhoades [**21**], [**22**] ve [**23**], bir önceki paragrafta zikredilen yazarların Cesàro dönüşümüyle ilgili spektrum tartışmalarını, c, c_0 ve ℓ_p üzerindeki ağırlıklı ortalama dönüşümlerine genişleterek, ince spektrumlarını araştırdı.

Rhaly [**19**], (r_n) bir dizi olmak üzere, $k \leq n$ için $a_{nk} = r_n$ ve $k > n$ için $a_{nk} = 0$ ile tanımlı $A = (a_{nk})$ biçiminde matris gösterimine sahip Rhaly metodunun belirli şartlar altında ℓ_2 Hilbert uzayı üzerinde sınırlı dönüşüm ve kompakt oluşu hakkında incelemeler yaparak, matrisin uzay üzerinde spektrumunu ve adjoint dönüşümünün nokta spektrum cümlesini belirledi. Bu çalışmanın ışığında, Yıldırım

[**28**]- [**31**], Rhaly matrislerinin c ve c_0, ℓ_p ve bv_0 uzaylarında özelliklerini ve ince spektrumu ile ilgilendi. Yine Rhaly [**20**] çalışmasında, terimleri $a_{nk} = (n+1)^{-p}$ şeklinde olan p-Cesàro matrisinin $p > 1$ için ℓ_2 uzayı üzerindeki özelliklerini ve spektrumunu inceledi. Buna Parelel olarak Coşkun [**9**], c_0 uzayı üzerinde p-Cesàro matrisinin spektrum ve ince spektrumunu verdi.

Fark matrisi de dizi uzayları teorisinde önemli bir yere sahiptir. Son zamanlarda bu metod ile ilgili çok sayıda çalışma literatüre girmektedir. Metodun spektrumu ile ilk olarak de Malafosse ilgilendi. de Malafosse [**14**], fark matrisini,

$$\|x\|_{s_r} = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{|x_k|}{r^k}\ , \quad (r > 0).$$

normu ile normlu dizilerin s_r uzayında ele aldı. Altay ve Başar [**4**] ve Akhmedov ve Başar [**2**][**3**], fark matrisinin sırasıyla c_0, c, ℓ_p ve Başar ve Altay [**5**] tarafından inşa edilen bv_p uzayları üzerindeki spektrumu ile ilgilendiler.

Rhoades ve Yıldırım [**24**] çalışmalarında, (a_k) ve (b_k) gibi iki dizinin çarpımı şeklinde tanımlı $a_{nk} = a_n b_k$ terimli üçgen $A = (a_{nk})$ matrisinin belirli şartlar altında c uzayı üzerindeki özelliklerini ve ince spektrumlarını inceledi. Dizilerin özel seçimiyle daha önce yapılmış olan bazı çalışmaların, meselâ, $a_n = \sum_{k=0}^{n} b_k$ alınmasıyla birinci yazarın üzerinde çalıştığı ağırlıklı ortalama matrisi ve her $k \in \mathbb{N}$ için $b_k = 1$ ile ikinci yazarın ilgilendiği Rhaly matrisi, $a_n = (n+1)^{-p}$, $b_k = 1$ ile Coşkun [**9**] tarafından incelenen p-Cesaro ve $a_n = (n+1)^{-1}$, $b_k = 1$ ile Reade [**17**] tarafından çalışılan Cesaro matrisi gibi, sonuçlarını ihtiva ettiğinden dikkate değer bir çalışmadır.

Şimdi, sırasıyla Rhoades [**21**], Reade [**17**], Rhaodes [**22**] ve Altay ve Başar [**4**] tarafından verilen ağırlıklı ortalama, Cesaro ve fark metodlarının çeşitli dizi uzayları üzerindeki spektrum incelemelerini vereceğiz.

2.1. c Uzayında Ağırlıklı Ortalama Dönüşümünün İnce Spektrumu

Bu kısımda, Rhoades [**19**] tarafından verilen ağırlıklı ortalama dönüşümünün c uzayı üzerindeki ince spektrum çalışmasını vereceğiz.

Bir ağırlıklı ortalama matrisi, $p_0 > 0$ ve $n > 0$ için $p_n \geq 0$, $P_n = \sum_{k=0}^{n} p_k$ olmak üzere terimleri $a_{nk} = p_k/P_n$ olan bir alt üçgen $A = (a_{nk})$ matrisi ile tanımlanır. A matrisinin regüler olması için $\lim_n P_n = \infty$ şartının sağlanması gerek ve yeterdir.

$\delta = \limsup p_n/P_n$, $\gamma = \liminf p_n/P_n$ ve $S = \overline{\{p_n/P_n : n \geq 0\}}$ olmak üzere, bir regüler ağırlıklı ortalama $A = (a_{nk})$ matrisi için

$$\{\lambda : |\lambda - (2-\delta)^{-1}| \leq (1-\delta)/(2-\delta)\} \cup S \subseteq \sigma(A, c) \subseteq \{\lambda : |\lambda - (2-\gamma)^{-1}| \leq (1-\gamma)/(2-\gamma)\} \cup S$$

kapsamalarının geçerli olduğu Cass ve Rhoades **[8]** tarafından verildi.

Önce, $\delta = \gamma$ eşitliğini sağlayan regüler ağırlıklı ortalama matrislerini gözönüne alacağız.

Teorem 2.1.1. *$\delta = \limsup p_n/P_n$ mevcut olan regüler ağırlıklı ortalama matrisi $A = (a_{nk})$ olsun. Eğer $\lambda \notin S$ skaları, $|\lambda - (2-\delta)^{-1}| < (1-\delta)/(2-\delta)$ eşitsizliğini sağlıyor ise o zaman $\lambda \in III_1\sigma(A, c)$ yani λ, $\sigma(A, c)$ cümlesinin $\overline{R(\lambda I - A)} \neq X$ ve $(\lambda I - A)^{-1}$ mevcut ve sürekli şartlarını sağlayan değeridir.*

İspat. Hipotezdeki şartları sağlayan λ değerleri için $\lambda I - A$ bir üçgen matris olacağından birebir bir dönüşümdür. Bu nedenle, $\lambda I - A \in 1 \cup 2$ bulunur.

$T^* = \lambda I - A^*$ adjoint matrisini gözönüne alalım. A regüler olduğundan $e = (1, 1, 1, ...)$ olmak üzere ; $n > 0$ için $a^*_{00} = \chi(A) = \lim_n Ae - \sum_k \lim_n a_{nk} = 1$, $a^*_{n0} = a^*_{0n} = 0$ ve $n, k > 0$ için $a^*_{nk} = a_{k-1,n-1}$ ile $A^* = (a^*_{nk})$ dönüşümü $B(\ell_1)$ uzayına aittir.

$T^*x = \theta$ olsun. O zaman

$$(\lambda - 1)x_0 = 0$$

ve $n > 0$ için

$$\left(\lambda - \frac{p_{n-1}}{P_{n-1}}\right) x_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} a^*_{nk} x_k = 0 \tag{2.1.1}$$

eşitliklerini elde ederiz. Buradan $x_0 = 0$, x_1 keyfi skalar ve $c_n = p_n/P_n$ alınmasıyla (2.1.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} x_n &= \frac{p_{n-1}x_1}{p_0\lambda^{n-1}}\prod_{j=o}^{n-2}(\lambda - c_j) \\ &= \frac{p_{n-1}}{p_0}x_1\prod_{j=0}^{n-2}\left(1-\frac{c_j}{\lambda}\right) \qquad (2.1.2) \\ &= \left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_{n-1}x_1}{P_{n-2}}\prod_{j=1}^{n-2}\left[1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_j}{P_{j-1}}\right] \end{aligned}$$

bulunur.

"$-\dfrac{1}{\lambda} = \alpha + i\beta$ olmak üzere, yeterince büyük tüm j 'ler için

$$\left|1+\left(1-\frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_j}{P_{j-1}}\right| < 1$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\left[1+(1+\alpha)\frac{p_j}{P_{j-1}}\right]^2 + \left(\beta\frac{p_j}{P_{j-1}}\right)^2 < 1$$

bulunmasıdır" önermesinin geçerli olduğunu dikkate alarak aşağıdaki tartışmaları yapalım.

I.Durum: (p_k) dizisinin en çok sonlu sayıda terimi sıfır olsun. O zaman üstteki eşitsizlik, yeterince büyük bütün j 'ler için

$$2(1+\alpha) + \left[(1+\alpha)^2 + \beta^2\right]\frac{p_j}{P_{j-1}} < 0$$

eşitsizliğine denk olur.

Yine, yukarıdaki eşitsizlik, yeterince büyük bütün j 'ler için, eğer

$$2(1+\alpha) + \left[(1+\alpha)^2 + \beta^2\right]\frac{\delta}{1-\delta} < 0$$

ise doğru olacaktır, ki bu eşitsizlik

$$|\lambda - (2-\delta)^{-1}| < \frac{1-\delta}{2-\delta}$$

ifadesine denktir.

$z_n = \prod_{j=1}^{n-2}\left[1 + (1-1/\lambda)p_j/P_{j-1}\right]$ alınırsa, o zaman

$$\left|\frac{z_{n+1}}{z_n}\right| = \left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_{n-1}}{P_{n-2}}\right|$$

eşitliği geçerli olacaktır.

λ üzerindeki şartları dikkate alarak, bundan önceki paragraftaki tartışmadan, yeterince büyük bütün n 'ler için,

(2.1.3) $$\left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)\frac{p_{n-1}}{P_{n-2}}\right| \leq \xi < 1$$

ifadesinin doğru ve $\sum |z_n|$ serisinin yakınsak olduğu görülür.

$|(1 - 1/\lambda)p_{n-1}x_1/P_{n-2}|$ sınırlı olduğundan, $(\lambda I - A^*)x = 0$ denkleminin aşikâr olmayan çözüme sahip olduğu, $\sum |x_n|$ serisinin yakınsaklığından elde edilir.

$\lambda I - A$ dönüşümünün yoğun görüntüye sahip olmadığı Teorem 1.1.7'den hemen görülür. Buradan $\lambda I - A \in III$ ve böylece $\lambda I - A \in III_1 \cup III_2$ olduğunu söyleriz.

$\lambda I - A \in III_1$ olduğunu doğrulamak için Teorem 1.1.9'dan $\lambda I - A^*$ dönüşümünün örten olduğunu göstermek yeterlidir.

$x, y \in \ell_1$ için $y = (\lambda I - A^*)x$ olsun. O zaman $(\lambda - 1)x_0 = y_0$ ve $n > 0$ için,

(2.1.4) $$(\lambda - c_{n-1})x_n - \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{p_{n-1}x_k}{P_{k-1}} = y_n$$

olup $x_1 = 0$ seçerek y 'ye göre x 'i çözersek

(2.1.5) $$-p_o \sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{P_{k-1}} = y_1$$

ve

(2.1.6) $$(\lambda - c_{n-1})x_n = y_n + p_{n-1} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{x_k}{P_{k-1}}$$

denklemlerini elde ederiz. Meselâ; $n = 2$ için (2.1.6)'da (2.1.5)' i yerine yazarsak

$$(\lambda - c_1)x_2 = y_2 + p_1 \sum_{k=3}^{\infty} \frac{x_k}{P_{k-1}} = y_2 + p_1 \left(\sum_{k=2}^{\infty} \frac{x_k}{P_{k-1}} - \frac{x_2}{P_1}\right)$$

elde ederiz ki

$$x_2 = \frac{\left(y_2 - \dfrac{p_1 y_1}{p_0}\right)}{\lambda}$$

bulunur.

Bu şekilde devam ederek, eğer $By = x$ eşitliğini sağlayan B bir alt üçgen matris ise o zaman $B = (b_{nk})$ matrisinin terimleri

$$\begin{aligned}
b_{00} &= \frac{1}{\lambda - 1}, \qquad b_{nn} = \frac{1}{\lambda}, \quad (n > 1), \\
b_{21} &= -\frac{p_1}{\lambda p_0}, \qquad b_{n,n-1} = -\frac{p_{n-1}}{P_{n-2}\lambda^2}, \quad (n > 2), \\
b_{n1} &= -\frac{p_{n-1}}{\lambda p_0} \prod_{j=1}^{n-2} \left(1 - \frac{c_j}{\lambda}\right), \quad (n > 2), \\
b_{nk} &= -\frac{p_{n-1}}{\lambda P_{k-1}} \prod_{j=k}^{n-2} \left(1 - \frac{c_j}{\lambda}\right), \quad (1 < k < n-1)
\end{aligned}$$

ve diğer durumlarda $b_{nk} = 0$ şeklinde bulunur.

$B \in B(\ell)$ olduğunu göstermek için, k indisinden bağımsız olarak $\sum_n |b_{nk}|$ serisinin sonlu olduğunu göstermek yeterdir.

B matrisinin ilk sütunu için,

$$\sum_n |b_{n0}| = \frac{1}{|\lambda - 1|}$$

olduğu açıktır. Diğer taraftan,

$$1 - \frac{c_j}{\lambda} = 1 - \frac{p_j}{\lambda P_j} = \left(\frac{P_{j-1}}{P_j}\right) \left[1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{p_j}{P_{j-1}}\right]$$

eşitliğini yazabilir ve ayrıca

$$\sup_{n>1} \left|\frac{p_{n-1}}{P_{n-2}}\right| \leq M < \infty$$

olduğu dikkate alınırsa,

$$\sum_n |b_{n1}| \leq \frac{1}{|\lambda|} \left[M + M \sum_{n=3}^{\infty} \prod_{j=1}^{n-2} \left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{p_j}{P_{j-1}}\right|\right]$$

ve $k > 1$ için

$$\sum_n |b_{nk}| \leq \frac{1}{|\lambda|} + \frac{M}{|\lambda|^2} + \frac{M}{|\lambda|^2} \sum_{n=k+2}^{} \left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{p_j}{P_{j-1}}\right|$$

eşitsizliklerinin geçerli olduğu görülür. $k > 1$ olduğundan, ilk eşitlikteki diziler, ikinci eşitlikteki dizilerden daha büyük olduğundan, (2.1.3)' den mutlak yakınsaktır. Buradan, $\|B\|_1 < \infty$ bulunur.

$(\lambda I - A)^{-1}$ sınırlı olduğundan süreklidir ve $\lambda \in III_1\sigma(A, c)$ bulunur.

<u>2.Durum:</u> (p_k) dizisinin sonsuz sayıda terimi sıfır olsun. $\lim_n P_n = \infty$ olduğundan sıfır olmayan sonsuz sayıda p_k terimi vardır. Bunları $\{p_{n_k}\}$ ile gösterelim.

$n \neq 1 + n_k$ için (2.1.2)'den $x_n = 0$ olur. Diğer durumda,

$$x_{1+n_k} = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{p_{n_k}}{P_{n_k - 1}} \prod_{j=1}^{r} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) \frac{p_{n_j}}{P_{n_j - 1}}\right]$$

dir.

Durum 1'deki gibi tartışmalarla $\sum_n |z_n|$ serisinin yakınsak ve $(\lambda I - A^*)x = \theta$ aşikâr olmayan çözümlere sahip olduğu görülür.

$p_k = 0$ olan sonsuz sayıda terimin varlığı sadece B matrisinin sıfır olan terimlerini arttırdığından, sıfır olmayan terimler için tartışma 1.Durumdaki gibi olacağından $\lambda I - A^*$ dönüşümünün örten olduğu görülür. □

TEOREM 2.1.2. *Köşegen elemanları sonsuz defa tekrarlanmayan, $\delta = \lim p_n/P_n$ mecut ve $\delta < 1$ özelliğine sahip regüler ağırlıklı ortalama matris A olsun. Eğer $\lambda = \delta$ veya $\lambda = a_{nn}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ ve $\delta/(2-\delta) < \lambda < 1$ ise o zaman $\lambda \in III_1\sigma(A, c)$' dir.*

İSPAT. $j > 1$ ve A matrisinin köşegen elemanları farklı olsun. $(a_{jj} I_A)x = \theta$ eşitliğinden, $k < j$ için $x_k = 0$ ve $n > j$ için

$$(a_{jj} - a_{nn})x_n - \sum_{k=0}^{n-1} a_{nk} x_k = 0$$

denklemlerini elde ederiz. Bu sistem

$$x_{n+1} = \frac{p_j P_n x_n}{p_j P_{n+1}}(c_j - c_{j+1})$$

indirgeme denklemine sahip olacağından, x_n terimine göre denklemi çözersek,

$$x_{j+m} = \frac{P_j x_j c_j^m}{P_{j+m} \prod_{i=1}^{m}(c_j - c_{j+i})} = x_j \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1 - c_{j+i}}{1 - c_{j+i}/c_j}\right) \tag{2.1.7}$$

bulunur. Burada, $(1-c_{j+i})(1-c_{j+i}/c_j) = (P_{j+i}-p_{j+i})/(P_{j+i}-p_{j+i}/c_j) = P_{j+i-1}/(P_{j+i-1}+(1-1/c_j)p_{j+i}) = (1+(1-1/c_j)p_{j+i}/P_{j+i-1})_{-1}$ olduğu dikkate alınırsa,

$$x_{j+m} = \frac{x_j}{\prod_{i=1}^{m}\left[1+\left(1-\frac{1}{c_j}\right)\frac{p_{j+i}}{P_{j+i-1}}\right]}$$

elde edilir. $0 < c_j < 1$ olduğundan, Teorem 2.1.1'deki tartışmalar, yeterince büyük i için

$$1+\frac{\left(1-\frac{1}{c_j}\right)p_{j+i}}{P_{j+i-1}} \leq \xi < 1$$

eşitsizliğinin geçerliliğini gerektirir. x dizisinin c uzayına ait olması $x=\theta$ bulunmasını gerektirdiğinden, $a_{jj}I-A$ dönüşümü birebirdir. Şu hâlde, $c_jI-A \in 1\cup 2$ bulunur.

$c_jI-A \in III$ bulunacağı açıktır. Şimdi, c_jI-A^* dönüşümünün örten olduğunu gösterelim.

$x, y \in \ell_1$ için $(\lambda I - A^*)x = y$ olsun. $x_{j+1}=0$ seçerek, $x_0, x_1, \ldots, x_j$ terimlerini $y_0, y_1, \ldots, y_{j+1}$ terimleri cinsinden ifade edebiliriz. x dizisinin diğer terimleri, Teorem 2.1.1'deki gibi, $x = By$ denkleminden elde ederiz. Bu denklemi sağlayan $B=(b_{nk})$ matrisinin sıfır olmayan elemanları

(2.1.8) $$b_{j+m,j+m} = \frac{1}{c_j}, \quad (m>1)$$

$$b_{j+2,j+1} = -\frac{p_{j+1}}{c_jp_j},\ b_{j+m,j+m-1} = -\frac{p_{j+m-1}}{c_j^2P_{j+m-2}}, \quad (m>2),$$

$$b_{j+m,j+k} = -\frac{p_{j+m-1}}{c_j^2P_{j+k-1}}\prod_{i=j+k}^{j+m-2}\left(1-\frac{c_i}{c_j}\right), (1<k<m-1,\ m>2)$$

$$b_{j+m,j+1} = -\frac{p_{j+m-1}}{c_jP_j}\prod_{i=j+1}^{j+m-2}\left(1-\frac{c_i}{c_j}\right), (m>2)$$

şeklindedir. (2.1.8)'den

(2.1.9) $$\sum_{n=j+1}^{\infty}|b_{n,j+1}| = \frac{p_{j+1}}{c_jp_j}+\frac{1}{c_jp_j}\sum_{n=j+3}^{\infty}p_{n-1}\prod_{i=j+1}^{n-2}\left|1-\frac{c_i}{c_j}\right|$$

yazabiliriz. $m > 1$ için

$$\sum_{n=m+j}^{\infty} |b_{n,m+j}| = \frac{1}{c_j} + \frac{p_{j+m}}{c_j^2 P_{j+m-1}} + \frac{1}{c_j^2} \sum_{n=m+j+2}^{\infty} \frac{p_{n-1}}{P_{j+m-1}} \prod_{i=j+m}^{n-2} \left| 1 - \frac{c_i}{c_j} \right|$$

eşitliği geçerli olup, p_{j+m}/P_{j+m-1} sınırlı ve $m > 1$ için $p_j/P_{j+m-1} \leq 1$ olduğundan $\|B\|_1 < \infty$ göstermek için (2.1.9) serisinin yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\frac{p_{n-1}}{p_j} = \frac{P_{n-1}P_{n-2}P_{n-3}\cdots P_j}{P_{n-2}P_{n-3}\cdots P_j p_j} \frac{1}{(1-c_{n-2})\cdots(1-c_{n-2})c_j}$$

eşitliğini (2.1.9) serisinde yerine yazarsak,

$$\frac{1}{c_j^2} \sum_{n=j+3}^{\infty} \frac{p_{n-1}}{P_{n-2}} \prod_{i=j+1}^{n-2} \left| \frac{1 - c_i/c_j}{1 - c_i} \right|$$

bulunur.

$$\begin{aligned} \frac{1 - c_i/c_j}{1 - c_i} &= \frac{P_i - p_i/c_j}{P_i - p_i} = \frac{p_i}{P_{i-1}} + 1 - \frac{p_i}{c_j P_{i-1}} \\ &= 1 + \left(1 - \frac{1}{c_j}\right) \frac{p_i}{P_{i-1}} \end{aligned} \tag{2.1.10}$$

olduğunu dikkate alalım. λ üzerindeki şartlardan, yeterince büyük i'ler için (2.1.3) sağlanır ve (2.1.9) serisi mutlak yakınsaktır.

A matrisinin köşegen elemanları farklı olmasın. λ üzerindeki kısıtlamalar, köşegen elemanlarının sıfır olmadığını garanti eder. k ve r sayıları, sırasıyla birden fazla köşegende bulunun $c_j \neq 0$ saylarının en küçük ve en büyük indisini göstersin. (2.1.7)'den $n > r$ ve $0 < n < k$ için $x_n = 0$ bulunur. Bu durumda, $(c_j I - A)x = \theta$ eşitliği

$$(c_i - c_n)x_n - \sum_{i=j}^{n-1} a_{ni} x_i = 0, \quad (k < n \leq r) \tag{2.1.11}$$

hâlini alır.

<u>1.Durum.</u> $r = k + 1$ ise (2.1.11)'i

$$(c_i - c_{k+1})x_{j+1} - a_{k+1,k} x_k = 0$$

birtek eşitliğe indirgenir ki bu ise, $c_j = c_r = c_{k+1}$ ve $p_j \neq 0$ ifadelerinden $x_k = 0$ olduğunu gösterir. O hâlde, $x = \theta$.

2.Durum. $r > k+1$ ise (2.1.11)'den $x_n = P_{n+1}(c_j - c_{n+1})x_{n+1}/c_jP_n$, $(k < n < r)$ indirgeme formülünü elde ederiz. $x_r = 0$ olduğundan $k < n < r$ için $x_n = 0$ bulunur. $n = k+1$ alınarak (2.1.11)'den $x_k = 0$ elde edilir. Buradan $x = \theta$ olduğu görülür.

$c_jI - A^*$ dönüşümünün örten olduğunu gösterelim. $x, y \in \ell_1$ için $(\lambda I - A^*)x = y$ olsun. $x_{j+1} = 0$ seçerek $x_0, x_1, \ldots, x_j$ terimlerini $y_0, y_1, \ldots, y_{j+1}$ terimleri cinsinden çözebiliriz. x dizisinin diğer terimlerini veren Teorem 2.1.1'deki gibi, $x = By$ denklemindeki B matrisinin terimleri (2.1.8)'deki gibi olup diğer terimleri sıfırdır.

$k \leq j \leq r$ olduğundan iki durum sözkonusudur.

1.Durum. $j = r$ ise (2.1.11)'den sonraki tartışmaların aynısı geçerlidir.

2.Durum. $j < r$ ise (2.1.11)'den en az bir $m \geq r - j + 2$ için $b_{j+m,j+k} = b_{j+m,j+1} = 0$ bulunur. Eğer $j < n < r$ için $c_n = c_j$ olan n değeri varsa, B matrisinin başka terimleri de sıfır olacaktır. Bu sıfır terimleri tartışmanın geçerliliğine etki etmeyeceğinden (2.1.9) serisi yine yakınsak olacaktır.

$\delta = 0$ ise 0, yuvarın içinde bulunmayacağından teoremde gözönüne alınmaz.

$\lambda = \delta > 0$ olsun. Eğer yeterince büyük i'ler ve $n \geq 1$ için $a_{nn} \neq \delta$ ise Teorem 2.1.1'deki tartışmaları uygulamakla, $\delta I - A \in III_1$ elde ederiz. Eğer bazı n indisleri için $a_{nn} = \delta$ ise c_j yerine δ alınarak Teorem 2.1.2'deki tartışmaları uygulamakla yine $\delta I - A \in III_1$ elde ederiz.

Böylece, bütün durumlarda, $c_jI - A \in 1 \cup 2$ buluruz. □

Teorem 2.1.3. *$\delta = \lim p_n/P_n$ mevcut ve yeterince büyük bütün n'ler için $p_n/P_n \geq \delta$ olan regüler ağırlıklı ortalama metodu A olsun. Eğer $\lambda \notin \{1, \delta/(2-\delta)\}$ skaları $|\lambda - (2-\delta)^{-1}| = (1-\delta)/(2-\delta)$ eşitliğini sağlıyor ise o zaman $\lambda \in II_2\sigma(A, c)$'dır.*

İspat. $\lambda \notin \{1, \delta/(2-\delta)\}$ skaları $|\lambda - (2-\delta)^{-1}| = (1-\delta)/(2-\delta)$ eşitliğini sağlasın. Bu durumda, $\lambda I - A$ üçgen ve dolayısıyla birebir dönüşüm olacağından $\lambda I - A \in 1 \cup 2$ elde edilir. $(\lambda I - A^*)x = \theta$ eşitliğini gözönüne alalım. Teorem 2.1.1'deki gibi, $x_0 = 0$, x_1 keyfi ve $n > 0$ için (x_n) dizisi (2.1.2) ifadesini sağlar. Hipotezden, $n \geq N$ olduğundan $c_n \geq \delta$ eşitliğini sağlayan bir N pozitif tamsayısı mevcuttur.

Buradan, $n \geq N$ için $\left|1 + \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right) p_n/P_{n-1}\right| \geq 1$ bulunur. Böylece, c sabiti, $n \geq N$ için n'den bağımsız olmak üzere, $|x_n| \geq cp_{n-1}/P_{n-2}$ eşitsizliği sağlanır. Şu hâlde,

$$\begin{aligned} \frac{p_{n-1}}{P_{n-2}} &= \frac{p_{n-1}^2}{P_{n-1}P_{n-2}} \\ &\geq \frac{p_{n-1}}{P_{n-1}} \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşırız.

$\sum_n p_n/P_n$ serisi, [**12**, shf. 290]'dan ıraksak olup, $x = (x_n) \in \ell_1$ ise $x = \theta$ olmasını gerektirir ki bu da $\lambda I - A^* \in 1 \cup 2$ olduğunu gösterir. $\lambda \notin \{1, \delta/(2-\delta)\}$ ve $\lambda \in \sigma(A, c)$ olduğundan $\lambda \in II_2\sigma(A, c)$ bulunur. $\square$

TEOREM 2.1.4. *A regüler ağırlıklı ortalama metod ise $1 \in III_3\sigma(A, c)$'dır.*

İSPAT. $(\lambda I - A)e = \theta$ olduğundan $\lambda I - A$ dönüşümü, birebir değildir. Şu hâlde, $\lambda - A \in 3$'dir. $z \in c$ ve $z_0 \neq 0$ olsun. Bu durumda, her $x \in c$ için $\|(I - A)x - z\| \geq |z_0| > |z_0|/2$ eşitsizliği sağlanacağından, $z \notin \overline{\mathcal{R}(I - A)}$ dir. Buradan $\overline{\mathcal{R}(I - A)} \neq c$ bulunur. Bu ise, $1 \in III_3\sigma(A, c)$ olduğunu gösterir. $\square$

TEOREM 2.1.5. *$\gamma = \liminf p_n/P_n$ ve $0 \leq c_n \leq \gamma/(2-\gamma)$ eşitsizliğini sağlayan c_n elemanlara sahip regüler ağırlıklı ortalama metodu A olsun. $\lambda = c_n$ ise $\lambda \in III_3\sigma(A, c)$' dir.*

İSPAT. c_k, $0 < c_k \leq \gamma/(2-\gamma)$ eşitsizliğini sağlayan köşegen eleman ve j de $c_j = c_k$ eşitliğini sağlayan en küçük indis olsun. $c_0 = 1$ için $j > 0$'dır. $x_0 = 0$ ve $n > j + 1$ için $x_n = 0$ alınarak $(c_j I - A^*)x = \theta$ sistemi, $j + 1$ bilinmeyenli j denklemden oluşan homojen lineer sistemine indirgenir ki bu sistem aşikâr olmayan çözümlere sahip olacağından $c_j I - A \in III$ bulunur.

Eğer $c_j = \gamma/(2-\gamma)$ ise $c_j I - A \in 3$ olacağı açıktır. $0 < c_k < \gamma/(2-\gamma)$ ve r de $c_r = c_k$ eşitliğini sağlayan en büyük indis olsun. $(c_r I - A)x = \theta$ sistemini çözersek

$$x_{r+m} = x_r \prod_{i=1}^{m} \left(\frac{1 - c_{r+i}}{1 - c_{r+i}/c_r} \right) \tag{2.1.12}$$

elde ederiz.

$\varepsilon = \min\{\gamma(1-\gamma)/(2-\gamma)2, \gamma/2-1/(1+1/c_j)\}$ alalım. $m \geq N$ için $c_{j+m+1} > \gamma-\varepsilon$ olacak şekilde yeterince büyük N seçelim. $\varepsilon < \gamma(1-\gamma)/(2-\gamma)$ ve $c_j < \gamma/(2-\gamma)$ eşitsizliklerinden

$$\frac{c_{j+m+1}}{c_j - 1} > \frac{2-\gamma}{\gamma} c_{j+m+1} - 1 > \frac{2-\gamma}{\gamma}(\gamma - \varepsilon) - 1 > 0$$

eşitsizliği elde edilir.

(2.1.12) eşitliği ve $\varepsilon < \gamma - 2/(1+1/c_j)$ eşitsizliğinden, $m \geq N$ için,

$$\frac{|x_{j+m+1}|}{|x_{j+m}|} = \left| \frac{1 - c_{j+m+1}}{1 - \frac{c_{j+m+1}}{c_j}} \right| = \frac{1 - c_{j+m+1}}{\frac{c_{j+m+1}}{c_j} - 1} < \frac{1 - \gamma + \varepsilon}{\frac{\gamma - \varepsilon}{c_j} - 1} < 1$$

elde edilir. Buradan $(x_n) \in \ell_1$ olduğu görülür. Şu hâlde, $x = (x_n) \in c$ ve $c_j I - A$ dönüşümünün birebir olmadığı anlaşılır. $\square$

Köşegen elemanlarından biri sıfır ve $\gamma > 0$ olan regüler ağırlıklı ortalama metodu A olsun. $c_j = 0$ olan en büyük indis j olsun. e^j standard birim diziler olmak üzere, $Ae^j = \theta$ ve $c_j I - A = -A$ olduğundan $c_j I - A$ dönüşümü birebir değildir. $x_0 = 0$ ve $n > j+1$ için $x_n = 0$ alınarak, $(c_j I - A^*)x = \theta$ sistemi, $j+1$ bilinmeyenli j denklemden oluşan homojen lineer sistemine indirgenir.

A matrisinin köşegen elemanları dizisi yakınsak değil ise Cass ve Rhoades [**8**] gösterdikleri gibi spektrum cümlesi bir yuvarın içinde kalır. Buna örnek olarak, köşegen elemanları, $c_0 = 1$ ve $1 < p < q$ olmak üzere $n > 0$ için $c_{2n} = 1/p$, $c_{2n-1} = 1/q$ olan ağırlıklı ortalama metodunu gözönüne alalım. Bu şartlar altında $\sigma(A,c) = \{\gamma : (p-1)(q-1)|\lambda|^2 \geq |1-p\lambda||1-q\lambda|\}$' dir.

TEOREM 2.1.6. *Köşegen elemanları, $1 < p < q$ olmak üzere $c_0 = 1$ ve $n > 0$ için $c_{2n} = 1/p, c_{2n-1} = 1/q$ olan regüler ağırlıklı ortalama metodu A olsun. Eğer $\lambda \notin \{1, 1/p, 1/q\}$ skaları $(p-1)(q-1)|\lambda|^2 > |1-p\lambda||1-q\lambda|$ eşitsizliğini sağlıyor ise $\lambda \in III_1\sigma(A,c)$'dır.*

İSPAT. $\lambda \notin \{1, 1/p, 1/q\}$ olduğundan, $\lambda I - A$ üçgen olup birebir bir dönüşümdür. O hâlde, $\lambda I - A \in 1 \cup 2$ olacaktır.

$(\lambda I - A^*)x = 0$ olsun. Teorem 2.1.1'de kullanılan metod ile $x_0 = 0$, x_1 keyfi seçilerek, (2.1.2)'den,

$$x_{2n} = \frac{p_{2n-1}}{p_0} x_1 (1 - \frac{1}{\lambda})(1 - \frac{1}{p\lambda})^{n-1}(1 - \frac{1}{q\lambda})^{n-1},$$
$$x_{2n+1} = \frac{p_{2n}}{p_0} x_1 (1 - \frac{1}{\lambda})(1 - \frac{1}{p\lambda})^{n-1}(1 - \frac{1}{q\lambda})^{n}$$

eşitlikleri elde edilir. A matrisi üzerindeki şartlardan,

$$p_{2n} = \frac{p_0 p^{n-1} q^n}{(p-1)^n (q-1)^n}, \quad p_{2n-1} = \frac{p_0 (pq)^{n-1}}{(p-1)^{n-1}(q-1)^n}$$

olup, buradan

$$\begin{aligned} \frac{|x_{2n+2}|}{|x_{2n}|} &= \frac{|x_{2n+1}|}{|x_{2n-1}|} = \frac{pq}{(p-1)(q-1)} \left|1 - \frac{1}{p\lambda}\right| \left|1 - \frac{1}{q\lambda}\right| \\ &= \frac{pq|1 - p\lambda||1 - q\lambda|}{(p-1)(q-1)pq|\lambda|^2} \\ &= \frac{pq|\lambda|^2 (p-1)(q-1)}{(p-1)(q-1)pq|\lambda|^2} = 1 \end{aligned}$$

bulunur. Şu hâlde, $(\lambda I - A^*)x = \theta$ denklemini sağlayan $x \in \ell_1$ dizisi olmadığından, $\lambda I - A^*$ dönüşümü birebir değildir. Şu hâlde $\lambda I - A \in III$dir.

Şimdi, $\lambda I - A^*$ dönüşümünün örten olduğunu gösterelim. $x, y \in \ell_1$ için $(\lambda I - A^*)x = y$ olsun. Bu durumda, $(\lambda - 1)x_0 = y_0$ ve (2.1.4) eşitlikleri sağlanır. (2.1.4) denklemini, x dizisini y dizisi cinsinden veren $x = By$ denklemindeki B matrisinin terimleri (2.1.6)'daki gibi olur. Burada $\sum_n |b_{n0}| = 1/|\lambda - 1| < \infty$ ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} |b_{n1}| = \frac{p_1}{p_0|\lambda|} + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{p_{n-1}}{p_0|\lambda|} \prod_{j=1}^{n-2} \left|1 - \frac{c_j}{\lambda}\right| \tag{2.1.13}$$

olup, serinin sağındaki ifade,

$$\sum_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{p_{2n}}{p_0|\lambda|} \prod_{j=1}^{2n-1} \left|1 - \frac{c_j}{\lambda}\right|,$$

ve

$$\sum_2 = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{p_{2n-1}}{p_0|\lambda|} \prod_{j=1}^{2n-2} \left|1 - \frac{c_j}{\lambda}\right|$$

şeklinde iki serinin toplamı olarak yazılabilir. $R = |p\lambda - 1||q\lambda - 1|/(p-1)(q-1)|\lambda|^2$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\sum_1 &= \frac{1}{p_0|\lambda|}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{p_0 p^{n-1}q^n}{(p-1)^n(q-1)^n}\left|1-\frac{1}{p\lambda}\right|^{n-1}\left|1-\frac{1}{q\lambda}\right|^n \\ &= \frac{|q\lambda - 1|}{(p-1)(q-1)|\lambda|^2}\sum_{n=1}^{\infty}R^{n-1}\end{aligned}$$

ve benzer şekilde,

$$\sum_2 = \frac{1}{(q-1)|\lambda|}\sum_{n=2}^{\infty}R^{n-1}$$

eşitlikleri mevcuttur. λ üzerindeki şartlar dikkate alındığında, bu iki serinin de yakınsak geometrik seri teşkil ettiği görülür. $k > 1$ için

$$\sum_{n=k}^{\infty}|b_{nk}| = \frac{1}{|\lambda|}\left(1+\frac{p_k}{|\lambda|P_{k-1}}\right) + \sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{p_{n-1}}{P_{k-1}|\lambda|}\prod_{j=k}^{n-2}\left|1-\frac{c_j}{\lambda}\right|$$

serisi (2.1.13) serisinden küçük olduğundan, $\|B\|_1 < \infty$ bulunur. □

TEOREM 2.1.7. *A metodu, Teorem 2.1.6'daki gibi olsun. Eğer $\lambda = 1/p$ veya $1/q$ ise $\lambda \in III_1\sigma(A,c)$' dır.*

İSPAT. $\lambda = 1/p$ olsun. Bu takdirde $\lambda I - A$ dönüşümü $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ dizisini $\{(1/p-1)x_0, -a_{10}x_0 + (1/p-1/q)x_1, -a_{20}x_0 - a_{21}x_1, -a_{30}x_0 - a_{31}x_1 - a_{32}x_2 + (1/p-1/q)x_3, \ldots\}$ dizisine taşır. $(\lambda I - A)x = \theta$ denklemi $x_0 = x_1 = 0$ olmasını gerektirir. Tümevarım yoluyla, ardışık gelen

$$-a_{2n+1,2n}x_{2n} + (1/p - 1/q)x_{2n+1} = 0$$

$$-a_{2n+2,2n}x_{2n} - a_{2n+2,2n+1}x_{2n+1} = 0$$

denklem ikililerinden, katsayılar determinantı $p_{2n}/pP_{2n+2} \neq 0$ olduğundan, sadece $x_{2n} = x_{2n+1} = 0$ bulunur.

$\lambda = 1/q$ ise $\lambda I - A$ dönüşümü $x = (x_0, x_1, x_2, \ldots)$ dizisini $\{(1/q-1)x_0, -a_{10}x_0, -a_{20}x_0 - a_{21}x_1 + (1/q-1/q)x_2, \ldots\}$ dizisine taşır. $(\lambda I - A)x = \theta$ denklemi $x_0 = 0$ olmasını gerektirir. Yine,

$$-a_{2n+2,2n+1}x_{2n+1} + (1/q - 1/p)x_{2n+2} = 0$$

$$-a_{2n+3,2n+1}x_{2n+1} - a_{2n+3,2n+2}x_{2n+2} = 0$$

ardışık denklem ikililerinden, katsayılar determinantı $p_{2n+1}/qP_{2n+3} \neq 0$ olduğundan, sadece $x_{2n+1} = x_{2n+2} = 0$ bulunur. Buradan $x = \theta$ elde edilir ki bu ise $\lambda I - A$ dönüşümünün birebir olduğunu gösterir. $\lambda I - A \in III$ olduğu açıktır ve geriye $\lambda I - A^*$ dönüşümünün örten olduğunu göstermek kalır.

$x, y \in \ell_1$ için $(\lambda I - A^*)x = y$ olsun. Teorem 2.1.2'deki gibi $x_{j+1} = 0$ seçerek, $x_0, x_1, \ldots, x_j$ terimlerini $y_0, y_1, \ldots, y_{j+1}$ terimleri cinsinden çözebilir ve x dizisinin diğer terimleri, B matrisi Teorem 2.1.2'deki gibi olmak üzere, $x = By$ denleminden elde edilir. Herbir $j > 0$ için $c_{j+2} = c_j$ olduğundan, $k \geq 3$ ve $m \geq 4$ için $b_{j+m,j+m-k} = b_{j+m,j+1} = 0$ ve çift m sayıları için $b_{j+m,j+m-2} = 0$ bulunur. Şu hâlde B matrisinin sıfır olmayan en fazla üç köşegen elemanı vardır. Bu ise $B \in B(\ell_1)$ olduğunu gösterir. □

TEOREM 2.1.8. *A metodu, Teorem 2.1.6'daki gibi olsun. Eğer λ skaları $(p-1)(q-1)|\lambda|^2 = |1-p\lambda||1-q\lambda|$ eşitliğini sağlıyor ve $\lambda \neq 1$ ise o zaman $\lambda \in II_2\sigma(A,c)$' dır.*

İSPAT. $\lambda I - A$ üçgen olduğundan birebir dönüşümdür. Dolayısıyla $\lambda I - A \in 1 \cup 2$'dir. $(\lambda I - A^*)x = \theta$ denklemi Teorem 2.1.1'deki gibi çözülürse, $x_0 = 0$ ve $n > 0$ için x_n terimleri (2.1.2)'yi sağlar. Böylece

$$|x_{2n}| = \frac{|x_1|}{q-1}\left|1 - \frac{1}{\lambda}\right|$$

ve

$$|x_{2n+1}| = \frac{|x_1||\lambda - 1|}{|p\lambda - 1|}$$

bulunur. x dizisinin ℓ_1 uzayına ait bulunması için $x = \theta$ olması gerektiğinden $\lambda I - A^* \in 1 \cup 2$'dir. Bu ise, $\lambda \in II_2\sigma(A,c)$ olduğunu gösterir. □

Cartlidge **[7]**, $p \geq 1$ için bazı ağırlıklı ortalama metodların $B(\ell^p)$ uzayına ait olduğunu göstererek, onların spektrumlarını hesapladı. Meselâ; eğer $\delta = \lim p_n/P_n >$

0 ise o zaman $A \in B(\ell^p)$ ve $\sigma(A) = \{\lambda : |\lambda - (2-\delta)^{-1}| \leq (1-\delta)/(2-\delta)\} \cup S$ olduğunu gösterdi.

Teorem 2.1.1-2.1.5'in bu tür A matrisleri için doğru olduğu gösterilebilir.

Bu çalışmanın sonuçlarına dayanarak aşağıda vereceğimiz ifade makul bir beklentidir.

$1 \leq p \leq \infty$ eşitsizliğini sağlayan bazı p sayıları için $B(\ell_p)$ uzayına ait ağırlıklı ortalama metodu A olsun. Bu durumda $\sigma(A, \ell_p)$ cümlesinin bütün iç noktaları III_1'e, 1 ve belki $\gamma/(2-\gamma)$ hariç bütün sınır noktalar II_2'ye, 1 ve bütün ayrık noktalar III_3'e aittir. Eğer $\gamma/(2-\gamma)$, A' nın bir köşegen elemanı ise o zaman $\gamma/(2-\gamma) \in III_3$'tür. Aksi halde, $\gamma/(2-\gamma) \in II_2$'dir.

2.2. Cesàro Dönüşümünün Spektrumu Üzerine

Burada, J. B. Reade [**17**] çalışmasının bazı sonuçlarını vereceğiz.

1965 yılında Brown, Holmes ve Shields [**6**], ℓ_2 Hilbert uzayı üzerinde bir (x_n) dizisini $\{(x_1+x_2+\cdots+x_n)/n\}$ dizisine taşıyan C_1 Cesàro sınırlı lineer dönüşümünün spektrumunu ve karakteristik köklerini hesapladılar.

C_1 dönüşümünün matris temsili,

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & \dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \dots \\ \dots & & & \dots \end{bmatrix}$$

şeklindedir. C_1 dönüşümünün C_1^* adjointi de

$$\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \dots \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} & \dots \\ \vdots & \vdots & & \end{bmatrix}$$

şeklinde matris gösterimine sahip ve D köşegen matris olmak üzere, C_1 dönüşümünün $\sigma(C_1, c_0)$ spektrumunu belirlemenin anahtarı $(I - C_1)(I - C_1^*) = I - D$ eşitliğidir.

Buradan $\| C_1 - I \|=1$ ve $|\lambda - 1| < 1$ eşitsizliğini sağlayan λ değerlerinin C_1^* dönüşümünün karakteristik kökleri olduğunu göstermek kolaydır. Dolayısıyla

$$\sigma(C_1, c_0) = \{\lambda : |\lambda - 1| \leq 1\}.$$

Bu makalede, C_1 dönüşümünü, sıfır dizilerinin c_0 Banach uzayı üzerideki bir dönüşüm alarak spekturumunu belirleyeceğiz. C_1^* adjoint dönüşümü c_0 dual uzayının izometrik izomorf olduğu

$$\| x \|_1 = \sum_1^{\infty} |x_n|$$

normuyla Banach uzayı teşkil eden mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin ℓ_1 uzayı üzerinde bir dönüşümdür. C_1^* matrisi C_1 matrisinin transpozudur. C_1 dönüşümünün ikinci C_1^{**} adjointi yine C_1 dönüşümü olup fakat bu dönüşüm ℓ_1 dual uzayının izometrik izomorf olduğu

$$\| x \|_\infty = \sup_{n \geq 1} |x_n|$$

normuyla Banach uzayı teşkil eden sınırlı dizilerin ℓ_∞ uzayı üzerinde bir dönüşümdür. C_1 dönüşümünün c_0 uzayı üzerindeki spekturumunu $|\lambda - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}$ eşitsizliğini sağlayan λ skalarları olduğunu gösterdik. Öncelikle Browm, Holmes ve Shields'i [**6**] takip ederek benzer tartışmalarla C_1'nin hiçbir karakteristik köke sahip olmadığını ve C_1^* dönüşümünün bütün karakteristik köklerinin $|\lambda - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ eşitsizliğini sağlayan λ skalarları olduğunu göstereceğiz. Raabe testini kullanan Rhaly'nin [**19**, shf. 557] tekniğini kullanacağız. $\| C_1 - \frac{1}{2}I \| = \frac{3}{2}$ gerçeği bizi, C_1 dönüşümünün kalan spektrumlarını belirlememiz için farklı bir yöntem aramağa zorlar. Aslında, doğrudan doğruya $|\lambda - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ eşitsizliğini sağlayan λ skalarları için $C_1 - \lambda I$ dönüşümünün tersinin mevcut olduğunu gösterdik.

Şimdi C_1, C_1^* ve C_1^{**} dönüşümlerinin sırasıyla c_0, ℓ_1 ve ℓ_∞ uzayları üzarinde sınırlı lineer dönüşümler olduğunu veren ve normlarını belirleyen yardımcı teoremleri verelim.

Teorem 2.2.1. *$C_1 \in B(c_0)$ ve $\| C_1 \| = 1$.*

Teorem 2.2.2. *$C_1^* \in B(\ell_1)$ ve $\| C_1^* \| = 1$.*

Teorem 2.2.3. *$C_1^{**} \in B(\ell_\infty)$ ve $\| C_1^{**} \| = 1$.*

C_1 dönüşümünün spektrum cümlesini karakterize edecek olan ilk teoremi verelim.

Theorem 2.2.4. *$C_1 \in B(c_0)$ karakteristik köklere sahip değildir.*

İspat. [**6**, sf. 130] Kabul edelim ki c_0 uzayındaki $x \neq \theta$ elemanı için $C_1 x = \lambda x$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda x_1 \\ \frac{1}{2}(x_1 + x_2) &= \lambda x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sisteminden, eğer x dizisinin ilk sıfır olmayan bileşeni x_N ise o zaman $\lambda = 1/N$ bulunur. Bu durumda her $n \geq N$ için

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n}{n+1-N} \geq 1$$

elde edilir ki, bu ise, $x = (x_n)$ dizisinin sıfıra yakınsamadığını gösteririr. Şu hâlde, $C_1 x = \lambda x$ eşitliğini sağlayacak $x \neq \theta$ dizisi c_0 da mevcut değildir. □

Bununla beraber, $C_1^{**} \in B(\ell_\infty)$ dönüşümü, sabit dizileri ihtiva eden karakteristik uzaya ilişkin $\lambda = 1$ karakteristik köke sahip olduğunu müşahade edebiliyoruz.

Teorem 2.2.5. *Teorem 1.1.8 'nın tersi daima doğru değildir.*

İspat. Teorem 1.1.7'den $C_1 - I$ dönüşümünün çekirdeği aşikâr olmasına rağmen $C_1^* - I$ yoğun olmayan görüntüye sahiptir. □

Theorem 2.2.6. *$C_1^* \in B(\ell_1)$ dönüşümünün karakteristik kökleri, $|\lambda - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ eşitsiliğini sağlayan λ değerlerinin cümlesidir.*

İSPAT. Kabul edelim ki ℓ_1 uzayındaki $x \neq \theta$ elemanı için $C_1^* x = \lambda x$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}x_2 + \cdots &= \lambda x_1 \\ \frac{1}{2}x_2 + \cdots &= \lambda x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sisteminden

$$x_N = \prod_1^{N-1} (1 - \frac{1}{n\lambda}) x_1$$

elde ederiz. Raabe testinden, $x \in \ell_1$ olması için gerek ve yeter şart Re $1/\lambda > 1$ olduğundan $|\lambda - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ buluruz.(veya aşağıdaki Teorem 2.2.9 kullanılabilir.) □

TEOREM 2.2.7. $C_1 \in B(c_0)$ *yoğun görüntüye sahiptir.*

İSPAT. Teorem 1.1.7 kullanılarak gösterilir. □

TEOREM 2.2.8. $\sigma(C_1, c_0) = \{\lambda : |\lambda - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2}\}$.

İSPAT. Teorem 2.2.6 ve (1.3.1) eşitliğinden $|\lambda - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ eşitsizliğini sağlayan λ skalarları için $(C_1 - \lambda I)^{-1} \in B(c_0)$ olduğunu ispatlamak yeterlidir.

$(C_1 - \lambda I)x = y$ sistemini x'e göre çözersek $(C_1 - \lambda I)^{-1}$ matrisini verecektir. N. satırın $M < N$ için M. yerde

$$-\frac{1}{N\lambda^2 \prod_M^N (1 - \frac{1}{n\lambda})}$$

ve N. yerde

$$\frac{N}{1 - N\lambda}$$

olup diğer durumlarda sıfır olacaktır. Diğer taraftan önce

$$\frac{1 + |1 - \frac{1}{\lambda}| + \cdots + \prod_1^{N-1} |1 - \frac{1}{n\lambda}|}{N\lambda^2 \prod_M^N |1 - \frac{1}{n\lambda}|} + |\frac{N}{1 - N\lambda}|$$

ifadesinin N üzerinden sınırlı ve daha sonra herbir M için

$$-\frac{1}{N\lambda^2 \prod_M^N (1-\frac{1}{n\lambda})}$$

ifadesinin $N \to \infty$ için sıfıra yakınsadığını, $|\lambda - \frac{1}{2}| > \frac{1}{2}$ kabulu altında göstereceğiz. Bu sonuçlar aşağıdaki Teoremden kolaylıkla elde edilir: □

TEOREM 2.2.9. *Eğer Re* $1/\lambda = \alpha < 1$ *ise* $N \to \infty$ *için*

$$\prod_{n=1}^{N} |1 - \frac{1}{n\lambda}| \sim \frac{1}{N^\alpha}$$

olur. Burada $a_n \sim b_n$ *notasyonunu,* (a_n/b_n) *ve* (b_n/a_n) *dizilerinin her ikisi de sınırlı anlamında kullanıyoruz.*

İSPAT. Eğer $1/\lambda = \alpha + i\beta$ ise bu durumda x reel sayıları için $e^x \geq 1+x$ eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{N} \left|1 - \frac{1}{n\lambda}\right| &= \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{2\alpha}{n} + \frac{\alpha^2+\beta^2}{n^2}\right)^{1/2} \\
&\leq e^{\sum_{n=1}^{N}\left[-\frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right]} \\
&\leq e^{(-\alpha \log N + O(1))} \\
&= \frac{O(1)}{N^\alpha}.
\end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}
\prod_{n=1}^{N} \left|1 - \frac{1}{n\lambda}\right|^{-1} &= \prod_{n=1}^{N} \left(1 - \frac{2\alpha}{n} + \frac{\alpha^2+\beta^2}{n^2}\right)^{-1/2} \\
&= \prod_{n=1}^{N} \left[1 + \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right] \\
&\leq e^{\sum_{n=1}^{N}\left[\frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})\right]} \\
&\leq e^{(\alpha \log N + O(1))} \\
&= O(1)N^\alpha.
\end{aligned}$$

□

2.3. c_0 Uzayında Ağırlıklı Ortalama Operatörünün Spektrumu

Şimdi de, Rhoades'in [**22**] künyeli ağırlıklı ortamala metodlarının c_0 uzayı üzerindeki ince spektrumunu inceleyen çalışmasını vereceğiz.

TEOREM 2.3.1. *$A = (a_{nk})$ regüler ağırlıklı ortalama metodu için*

$$\sigma(A, c_0) \subset \left\{ \lambda : |\lambda - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

kapsaması geçerlidir.

TEOREM 2.3.2. *$A = (a_{nk})$, bir regüler ağırlıklı ortalama metodu ise $S = \overline{\{\frac{p_n}{P_n} : n \geq 0\}}$ olmak üzere ;*

$$\sigma(A, c_0) \supset \left\{ \lambda : |\lambda - (2 - \delta)^{-1}| \leq \frac{(1 - \delta)}{(2 - \delta)} \right\} \cup S$$

kapsaması geçerlidir.

TEOREM 2.3.3. *$A = (a_{nk})$ regüler ağılıklı ortalama metodunda $\delta = 0$ ise*

$$\sigma(A, c_0) = \left\{ \lambda : |\lambda - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

eşitliği mevcuttur.

İSPAT. Teorem 2.3.1 ve Teorem 2.3.2'nin birleştirilmesiyle eşitlik elde edilir. □

TEOREM 2.3.4. [**17**, Teorem 3] *Cesàro dönüşümünün c_0 uzayı üzerindeki spektrum cümlesi*

$$\sigma(C_1, c_0) = \left\{ \lambda : |\lambda - \frac{1}{2}| \leq \frac{1}{2} \right\}$$

şeklindedir.

İSPAT. Her bir $p_n = 1$ için C_1 bir ağırlıklı ortalama matrisidir. □

Aşağıda vereceğimiz teoremler, [**21**]'de c için verilen teoremlerin benzeri olup c_0 uzayında benzer olarak elde edilebileceğinden, sadece ifade edileceklerdir.

TEOREM 2.3.5. *Regüler A ağırlıklı ortalama metodunda* $\gamma > 0$ *ise*

$$\sigma(A) \subseteq \left\{\lambda : |\lambda - (2-\gamma)^{-1}| \leq (1-\gamma)/(2-\gamma)\right\} \cup S$$

kapsaması geçerlidir.

TEOREM 2.3.6. *Regüler A ağırlıklı ortalama metodunda* $\delta = \gamma > 0$ *ise* $E = \{p_n/P_n : p_n/P_n < \gamma/(2-\gamma)\}$ *olmak üzere;*

$$\sigma(A) = \{\lambda : |\lambda - (2-\gamma)^{-1}| \leq (1-\gamma)/(2-\gamma)\} \cup E$$

eşitliği geçerlidir.

TEOREM 2.3.7. *Regüler ağırlıklı ortalama metod A olsun. Bu takdirde,* $c_{0_A} = c_0$ *olması için* $\theta = \underline{\lim} p_{n+1}/P_n > 0$ *bulunması gerek ve yeterdir.*

TEOREM 2.3.8. $\gamma = \delta$ *olan regüler ağırlıklı ortalama matrisi* $A = (a_{nk})$ *olsun. Eğer* $\lambda \notin S$ *skaları,* $|\lambda - (2-\delta)^{-1}| < (1-\delta)/(2-\delta)$ *eşitsizliğini sağlıyor ise o zaman* $\lambda \in III_1\sigma(A, c_0)$*, yani* λ*,* $\sigma(A, c_0)$ *cümlesinin* $\overline{R(\lambda I - A)} \neq X$ *ve* $(\lambda I - A)^{-1}$ *var ve sürekli şartlarını sağlayan değeridir.*

TEOREM 2.3.9. *Köşegen elemanları sonsuz defa tekrarlanmayan,* $\delta = \lim p_n/P_n$ *mecut ve* $\gamma = \delta < 1$ *özelliğine sahip regüler ağırlıklı ortalama matris A olsun. Eğer* $\lambda = \delta$ *veya* $\lambda = a_{nn}$, $(n = 1, 2, \ldots)$ *ve* $\delta/(2-\delta) < \lambda < 1$ *ise o zaman* $\lambda \in III_1\sigma(A, c_0)$*'dir.*

TEOREM 2.3.10. $\delta = \lim p_n/P_n$ *mevcut ve yeterince büyük bütün n'ler için* $p_n/P_n \geq \delta$ *olan regüler ağırlıklı ortalama metodu A olsun. Eğer* $\lambda \notin \{1, \delta/(2-\delta)\}$ *skaları,* $|\lambda - (2-\delta)^{-1}| = (1-\delta)/(2-\delta)$ *eşitliğini sağlıyor ise o zaman* $\lambda \in II_2\sigma(A, c_0)$*'dır.*

TEOREM 2.3.11. *A regüler ağırlıklı ortalama metod ise* $1 \in III_3\sigma(A, c_0)$*'dır.*

TEOREM 2.3.12. $\gamma = \liminf p_n/P_n$ *ve* $0 \leq c_n \leq \gamma/(2-\gamma)$ *eşitsizliğini sağlayan* c_n *elemanlara sahip regüler ağırlıklı ortalama metodu A olsun.* $\lambda = c_n$ *ise* $\lambda \in III_3\sigma(A, c_0)$*'dir.*

TEOREM 2.3.13. *Köşegen elemanları,* $1 < p < q$ *olmak üzere* $c_0 = 1$ *ve* $n > 0$ *için* $c_{2n} = 1/p, c_{2n-1} = 1/q$ *olan regüler ağırlıklı ortalama metodu* A *olsun. Eğer* $\lambda \notin \{1, 1/p, 1/q\}$ *skaları* $(p-1)(q-1)|\lambda|^2 > |1-p\lambda||1-q\lambda|$ *eşitsizliğini sağlıyor ise* $\lambda \in III_1\sigma(A, c_0)$*'dır.*

TEOREM 2.3.14. A *metodu, Teorem 2.3.13'deki gibi olsun. Eğer* $\lambda \in \{1/p, 1/q\}$ *ise* $\lambda \in III_1\sigma(A, c_0)$*'dır.*

TEOREM 2.3.15. A *metodu, Teorem 2.3.13'deki gibi olsun. Eğer* λ *skaları* $(p-1)(q-1)|\lambda|^2 = |1-p\lambda||1-q\lambda|$ *eşitliğini sağlıyor ve* $\lambda \neq 1$ *ise o zaman* $\lambda \in II_2\sigma(A, c_0)$*'dır.*

Bu teoremin ispatında, Teorem 2.3.11'deki karşılığından farklı bir ispat yapılır.

$T = I - A$ olsun. O zaman T bir terse sahip değildir. Ayrıca, e^i standard birim diziler olmak üzere, $\mathcal{R}(T) \subseteq \{e^1, e^2, ...\}$ ve buradan $\overline{\mathcal{R}(T)} \neq c_0$ ve $1 \in III_3\sigma(A)$ elde edilir.

2.4. Fark Dönüşümünün c_0 ve c üzerinde Spektrumu

Son olarak Altay ve Başar [**4**] tarafından verilen c_0 ve c üzerindeki Δ fark dönüşümünün spektrumunu inceleyeceğiz.

TEOREM 2.4.1. Δ*,* c_0 *ve* c *uzayları üzerinde sınırlı bir lineer dönüşüm olup* $\|\Delta\|_{(c_0;c_0)} = \|\Delta\|_{(c;c)} = 2$.

TEOREM 2.4.2. $\sigma(\Delta, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leq 1\}$.

İSPAT. Bunu için, $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| > 1\}$ olmak üzere, $\lambda \in D$ için $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ dönüşümünün mevcut ve $(c_0 : c_0)$ sınıfına ait ve $\lambda \notin D$ için $(\Delta - \lambda I)^{-1} \notin (c_0 : c_0)$ olduğunu göstermek yeterdir.

$\lambda \in D$ olsun. $\Delta - \lambda I$ üçgen olduğundan $(\Delta - \lambda I)^{-1}$ mevcut ve $(\Delta - \lambda I)x = y$ denkleminden, x dizisinin terimlerini y dizisinin terimleri cinsinden veren $x = By$

denklemindeki $B = (b_{nk})$ matrisinin terimleri,

$$b_{nk} = \begin{cases} (1-\lambda)^{k-n-1} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

şeklindedir. Buradan,

$$\begin{aligned} \|(\Delta - \lambda I)^{-1}\|_{(c_0:c_0)} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \frac{|1-\lambda|^k}{|1-\lambda|^{n+1}} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{|1-\lambda|^{k+1}} < \infty \qquad (2.4.1) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise, $(\Delta - \lambda I)^{-1} \in (c_0 : c_0)$ olduğunu gösterir. Ayrıca (2.4.1) eşitliğinden $\lambda \notin D$ için

$$\|(\Delta - \lambda I)^{-1}\|_{(c_0:c_0)} = \infty$$

olduğunu görebiliriz. Bu da ispatı tamamlar. □

TEOREM 2.4.3. $\sigma_p(\Delta, c_0) = \emptyset$.

İSPAT. c_0 uzayında $x \neq \theta = (0, 0, 0, ...)$ için $\Delta x = \lambda x$ denklemini gözönüne alalım. Bu denklemden,

$$\begin{aligned} x_0 &= \lambda x_0 \\ x_1 - x_0 &= \lambda x_1 \\ x_2 - x_1 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz. Sistemin çözümü olacak x dizisinin sıfır olmayan ilk terimi x_{n_0} olsun. Bu durumda $\lambda = 1$ bulunur. $n_0 + 1$.denklemde bu veriler dikkate alınırsa $x_{n_0} = 0$ bulunur ki bu $x_{n_0} \neq 0$ oluşu ile çelişir. Şu hâlde, $x \neq \theta$ için $\Delta x = \lambda x$ denklemini sağlayan λ değeri mevcut değildir. □

$T : c_0 \to c_0$ sınırlı linner dönüşümünün matris temsili $A = (a_{nk})$ ise $T^* : c_0^* \to c_0^*$ adjoint dönüşümünün matris temsili A matrisinin tranpozudur.

TEOREM 2.4.4. $\sigma_p(\Delta^*, c_0^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| < 1\}$.

İSPAT. ℓ_1 uzayında $x \neq \theta = (0,0,0,...)$ için $\Delta^* x = \lambda x$ denklemini gözönüne alalım. Bu denklemden,

$$\begin{aligned} x_0 - x_1 &= \lambda x_0 \\ x_1 - x_2 &= \lambda x_1 \\ x_2 - x_3 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemi sağlayacak x dizisinin genel terimi

$$x_n = (1-\lambda)^n x_0, \quad (n > 0)$$

şeklindedir. Bu durumda, $x \in \ell_1$ olması için $|1-\lambda| < 1$ bulunması gerek ve yeter olduğu görülür. □

TEOREM 2.4.5. $\sigma_r(\Delta, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| < 1\}$.

İSPAT. $|\lambda - 1| < 1$ için $\lambda I - \Delta$ dönüşümü birebir olduğundan tersi mevcuttur. Teorem 2.4.4 'den $\lambda I - \Delta^*$ birebir olmadığından ve Lemma 1.1.7 'den $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - \Delta)} \neq c_0$ elde edilir. □

TEOREM 2.4.6. $\sigma_c(\Delta, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| = 1\}$.

İSPAT. $\lambda \neq 1$ olduğundan $\lambda I - \Delta$ dönüşümü birebirdir, dolayısıyla tersi mevcuttur. Yine Teorem 2.4.4 'den $\lambda I - \Delta^*$ birebir olup ve Lemma 1.1.7 'den $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - \Delta)} = c_0$ elde edilir. □

Fark matrisinin c uzayı üzerindeki spektrum tartışmaları, Teorem 2.4.2-2.4.6'dekilere benzer olup, farklı olan tartışmayı vererek diğerlerini ispatsız olarak not edelim.

$T : c \to c$ sınırlı lineer dönüşümünün matris temsili $A = (a_{nk})$ ise ise $\mathbb{C} \oplus \ell_1$ üzerinde $T^* : c^* \to c^*$ dönüşümünün matris temsili, $\chi = \lim_n \sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} - \sum_{k=0}^{\infty} \lim_n a_{nk}$, $b_k = \lim_n a_{nk}$ olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} \chi & 0 \\ b & A^t \end{bmatrix}$$

şeklindedir, [**33**, shf.267]. $A = \Delta$ için Δ^*,

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & \dots \\ & & \dots & & & \dots \end{bmatrix}$$

matrisidir.

Teorem 2.4.7. $\sigma_p(\Delta^*, c^*) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| < 1\} \cup \{0\}$.

İspat. ℓ_1 uzayında $x \neq \theta = (0,0,0,...)$ için $\Delta^* x = \lambda x$ denklemini gözönüne alalım. Bu denklemden,

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda x_0 \\ x_1 - x_2 &= \lambda x_1 \\ x_2 - x_3 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu sistemi sağlayacak x dizisinin genel terimi

(2.4.2) $$x_n = (1-\lambda)^n x_1, \quad (n > 1)$$

şeklindedir. $x_0 \neq 0$ ise $\lambda = 0$ ve bu karakteristik köke karşılık $x = (x_0, 0, 0, \dots) \in \ell_1$ karkakteristik vektörüne sahip oluruz. $x_0 = 0$ ise (2.4.2) ifadesinden $x \in \ell_1$ olması için $|1 - \lambda| < 1$ bulunması gerek ve yeter olduğu görülür. □

Şimdi, c üzerindeki fark matrisinin spektrumları ile ilgili teoremleri ispatsız verelim.

Teorem 2.4.8. *(a)* $\sigma(\Delta, c) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leq 1\}$,

(b) $\sigma_p(\Delta, c_0) = \emptyset$.

(c) $\sigma_r(\Delta, c) = \sigma_p(\Delta^*, c^*)$.

(d) $\sigma_c(\Delta, c) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| = 1\} \backslash \{0\}$.

TEOREM 2.4.9. $\sigma(\Delta, \ell_\infty) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leq 1\}$ *dir.*

İSPAT. Carlidge [**7**], tarafından verilen $B(c)$ uzayındaki bir $A = (a_{nk})$ dönüşümü için $\sigma(A, c) = \sigma(A, \ell_\infty)$ eşitliğinden istenilen sonuca ulaşılır. $\square$

Fark dönüşümü için Mercerian teoremi ile spektrum arasındaki ilişkiyi gösteren teoremi verelim.

TEOREM 2.4.10. $|\lambda - 1| < 1$ *olsun. O zaman* $A = \lambda I + (1-\lambda)\Delta$*' nın yakınsaklık alanı* c *dir.*

İSPAT. Eğer $\lambda = 1$ ise $A = I$ olacağından ispat için bir şey gerekmez. $\lambda \neq 1$, $|\lambda - 1| < 1$ eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda, Teorem 2.4.8(a) gereğince, $\Delta - \frac{\lambda}{\lambda - 1} I$ bir terse sahip ve ters dönüşüm $B(c)$ uzayına aittir. Şu hâlde, $c_A = c$ eşitliği geçerlidir, [**33**, shf. 14, Teorem 14]. $\square$

BÖLÜM 3

Fark Dönüşümünün Bazı Uzaylar Üzerindeki İnce Spektrumu

Bu bölümde, fark matrisi ve transpozesinin c_0 ve c uzayları üzerindeki Goldberg sınıflandırmasına göre ince spektrumunu inceleyeceğiz.

3.1. Fark Matrisinin Goldberg Sınıflandırmasına Göre Spektrumu

Kısım 2.4'de fark matrisinin c_0 ve c uzayları üzerindeki spektrumu verilmişti. Bu kısımda, Fark dönüşümünün c_0 ve c uzayları üzerindeki Goldberg sınıflandırmasına göre ince spektrumunu inceleyeceğiz.

TEOREM 3.1.1. $|\lambda - 1| < 1$ *eşitsizliğini sağlayan* $\lambda \neq 1$ *skaları için* $\lambda I - \Delta \in III_2\sigma(\Delta, c_0)$.

İSPAT. Teorem 2.4.5 gereğince $\lambda I - \Delta \in III_{1\cup 2}$. (2.4.1) ifadesinden $(\lambda I - \Delta)^{-1}$ dönüşümünün sınırlı olmadığı görülür. Şu hâlde, $|\lambda - 1| < 1$ eşitsizliğini sağlayan $\lambda \neq 1$ skaları için $\lambda I - \Delta \in III_2\sigma(\Delta, c_0)$ elde edilir. □

TEOREM 3.1.2. $I - \Delta \in III_1\sigma(\Delta, c_0)$.

İSPAT. $\lambda = 1$ için $\lambda I - \Delta = I - \Delta$ olup matris temsili

$$\lambda I - \Delta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ & & \dots & & \dots \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Teorem 2.4.5 gereğince $I - \Delta \in III$ olduğu açıktır.

$I-\Delta \in 1$ olduğunu göstermek için Teorem 1.1.9 gereğince $I-\Delta^*$ dönüşümünün örtenliğini araştıralım. $x, y \in \ell_1$ için $(I-\Delta^*)x = y$ denkleminden

$$\begin{aligned} x_0 &= y_1 \\ x_1 &= y_2 \\ x_2 &= y_3 \\ &\cdots \end{aligned}$$

elde edilir ki bu, her $y \in \ell_1$ için bir $x \in \ell_1$ dizisinin varlığını yani $I-\Delta^*$ dönüşümünün örtenliğini gösterir. Bu da istenendir. $\square$

TEOREM 3.1.3. $|\lambda-1| = 1$ *eşitliğini sağlayan* λ *skaları için* $\lambda I-\Delta \in II_2\sigma(\Delta, c_0)$.

İSPAT. $|\lambda-1| = 1$ olsun. Teorem 2.4.3 gereğince $\lambda I-\Delta$ dönüşümünün tersi mevcut, Teorem 2.4.2'den $(\lambda I-\Delta)^{-1}$ dönüşümü süreksiz ve Teorem 2.4.6 gereğince $\overline{\mathcal{R}(\lambda I-\Delta)} = c_0$ olduğundan $\lambda I-\Delta \in I_2 \cup II_2\sigma(\Delta, c_0)$. Şimdi, $\lambda I-\Delta$ dönüşümünün örten olmadığını gösterelim. $e^0 \in c_0$ dizisi için, $(\lambda I-\Delta)x = e^0$ eşitliğinden

$$x_n = \frac{1}{(1-\lambda)^{n+1}} \quad (n \in \mathbb{N})$$

elde edilir. Bulunan $x = (x_n)$ dizisi c_0 uzayının bir elemanı değildir. O hâlde, $\lambda I-\Delta$ dönüşümü örten değildir. Bu ise istenendir. $\square$

c_0 uzayındaki tartışmalara benzer olarak, c uzayı üzerinde fark dönüşümünün Golberg sınıflandırmasına göre spektrumu, aşağıda ispatsız vereceğimiz teorem elde edilebilir.

TEOREM 3.1.4. *(a)* $1 \in III_1\sigma(\Delta, c)$.

(b) $|\lambda-1| < 1$ *ve* $\lambda \neq 1$ *ise* $\lambda I-\Delta \in III_2\sigma(\Delta, c)$.

(c) $|\lambda-1| = 1$ *ise* $\lambda I-\Delta \in II_2\sigma(\Delta, c)$.

3.2. c_0 Dizi Uzayında Δ^+ Dönüşümünün Spektrum ve İnce Spektrumu

Bu kısımda, fark matrisinin transpoze temsiline sahip Δ^+ dönüşümünün c_0 uzayı üzerindeki spektrum ve ince spektrumu ile ilgileneceğiz.

Önce $\Delta^+ - \lambda I$ dönşümünün c_0 uzayındaki $\mathcal{N}(\Delta^+ - \lambda I)$ çekirdek uzayını bulalım. $\Delta^+ x = \lambda x$ denklemini gözönüne alalım. Bu denklemden,

$$\begin{aligned} x_0 - x_1 &= \lambda x_0 \\ x_1 - x_2 &= \lambda x_1 \\ x_2 - x_3 &= \lambda x_2 \\ &\vdots \end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz. Sistemin x çözüm dizisinin sıfır olmayan ilk terimi x_{n_0} olsun. Bu durumda

$$x_n = (1-\lambda)^{n-n_0} x_{n_0}, \ (n > n_0)$$

bulunur. Buna göre

$$\mathcal{N}(\Delta^+ - \lambda I) = \{x = (x_n) \in c_0 : x_n = (1-\lambda)^{n-n_0} x_{n_0}, \ (n > n_0)\}$$

elde edilir. Burada, $\Delta^+ - \lambda I$ dönşümünün c_0 uzayındaki $\mathcal{N}(\Delta^+ - \lambda I)$ çekirdek uzayının, $|\lambda - 1| \geq 1$ için aşikar olduğu aksi takdirde aşikâr uzaydan farklı olduğu görülür.

Teorem 3.2.1. $\sigma(\Delta^+, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| \leq 1\}$.

İspat. Bunu için, $D = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| > 1\}$ olmak üzere, $\lambda \in D$ için $(\Delta^+ - \lambda I)^{-1}$ dönüşümünün mevcut ve $(c_0 : c_0)$ sınıfına ait ve $\lambda \notin D$ için $(\Delta^+ - \lambda I)^{-1} \notin (c_0 : c_0)$ olduğunu göstermek yeterdir.

$\lambda \in D$ olsun. Bu durumda, $\Delta^+ - \lambda I$ dönüşümünün çekirdeği aşikâr uzay olduğundan $(\Delta^+ - \lambda I)^{-1}$ mevcut ve $(\Delta^+ - \lambda I)x = y$ denkleminden, x dizisinin terimlerini y dizisinin terimleri cinsinden veren $x = By$ denklemindeki $B = (b_{nk})$ matrisinin terimleri,

$$b_{nk} = \begin{cases} (1-\lambda)^{n-k-1} & , \ k \geq n \\ 0 & , \ k < n \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Buradan,

$$\begin{aligned}
\|(\Delta^+ - \lambda I)^{-1}\|_{(c_0:c_0)} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|1-\lambda|^n}{|1-\lambda|^{k+1}} \\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{|1-\lambda|^{k+1}} < \infty \qquad (3.2.1)
\end{aligned}$$

elde ederiz. Bu ise, $(\Delta^+ - \lambda I)^{-1} \in (c_0 : c_0)$ olduğunu gösterir. Ayrıca (3.2.1) eşitliğinden $\lambda \notin D$ için

$$\|(\Delta^+ - \lambda I)^{-1}\|_{(c_0:c_0)} = \infty$$

olduğunu görebiliriz. Bu da ispatı tamamlar. □

TEOREM 3.2.2. $\sigma_p(\Delta^+, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| < 1\}$.

İSPAT. c_0 uzayında $x \neq \theta = (0, 0, 0, ...)$ için $\Delta^+ x = \lambda x$ denklemini gözönüne alalım. Bu denklemden,

$$\begin{aligned}
x_0 - x_1 &= \lambda x_0 \\
x_1 - x_2 &= \lambda x_1 \\
x_2 - x_3 &= \lambda x_2 \\
&\vdots
\end{aligned}$$

denklem sistemini elde ederiz. Sistemin x çözüm dizisinin sıfır olmayan ilk terimi x_{n_0} olsun. Bu durumda

$$x_n = (1-\lambda)^{n-n_0} x_{n_0}, \ (n > n_0)$$

bulunur. Bu durumda $x \in c_0$ olması için $|1-\lambda| < 1$ bulunması gerek ve yeter olduğu görülür. □

c_0 uzayı üzerindeki matris dönüşümünün, adjoint dönüşümü matrisin transpozu olduğundan; Teorem 2.4.4 gereğince

TEOREM 3.2.3. $\sigma_p(\Delta^{+^*}, c_0^*) = \emptyset$.

TEOREM 3.2.4. $\sigma_c(\Delta^+, c_0) = \{\lambda \in \mathbb{C} : |\lambda - 1| = 1\}$.

İSPAT. Teorem 3.2.2'den, $\lambda \notin \sigma_p(\Delta^+, c_0)$ olduğundan $\lambda I - \Delta^+$ dönüşümü birebirdir, dolayısıyla tersi mevcuttur. Yine Teorem 3.2.3 'den $\lambda I - \Delta^{+^*}$ birebir olup ve Lemma 1.1.7 'den $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - \Delta^+)} = c_0$ elde edilir. □

TEOREM 3.2.5. $\sigma_r(\Delta^+, c_0) = \emptyset$.

İSPAT. Spektrum cümlesi, ayrık olan nokta, sürekli ve artık spektrum cümlelerinin birleşimi olduğu dikkate alındığında, Teorem 3.2.1, 3.2.2 ve Teorem 3.2.4'den artık spektrum cümlesinin boş cümle olduğu görülür. □

TEOREM 3.2.6. $|\lambda - 1| < 1$ *eşitsizliğini sağlayan* $\lambda \neq 1$ *skaları için* $\lambda I - \Delta^+ \in II_3\sigma(\Delta^+, c_0)$.

İSPAT. Teorem 3.2.2 gereğince $\lambda I - \Delta^+ \in II_3 \cup I_3$. Şimdi, $\lambda I - \Delta^+$ dönüşümünün örten olmadığını gösterelim. $y = \{(1-\lambda)^n\} \in c_0$ dizisi için, $(\lambda I - \Delta^+)x = y$ eşitliğini sağlayan $x \in c_0$ mevcut olmadığından, $\lambda I - \Delta$ dönüşümü örten değildir. Bu ise istenendir. □

TEOREM 3.2.7. $I - \Delta \in I_3\sigma(\Delta^+, c_0)$.

İSPAT. $\lambda = 1$ için $\lambda I - \Delta^+ = I - \Delta^+$ olup matris temsili

$$\lambda I - \Delta^+ = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots \\ & & \dots & & \dots \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Teorem 3.2.2 gereğince $I - \Delta \in 3$ olduğu açıktır.

$I - \Delta \in I$ olduğunu göstermek için $I - \Delta^+$ dönüşümünün örtenliğini araştıralım. $x, y \in c_0$ için $(I - \Delta^*)x = y$ denkleminden

$$x_1 = y_0$$
$$x_2 = y_1$$
$$x_3 = y_2$$
$$\dots$$

elde edilir ki bu, her $y \in c_0$ için bir $x \in c_0$ dizisinin varlığını yani $I - \Delta^+$ dönüşümünün örtenliğini gösterir. Bu da istenendir. $\square$

TEOREM 3.2.8. $|\lambda - 1| = 1$ *eşitliğini sağlayan* λ *skaları için* $\lambda I - \Delta \in II_2\sigma(\Delta, c_0)$.

İSPAT. $|\lambda - 1| = 1$ olsun. Teorem 3.2.2 gereğince $\lambda I - \Delta^+$ dönüşümünün tersi mevcut, Teorem 3.2.1'den $(\lambda I - \Delta^+)^{-1}$ dönüşümü süreksiz ve Teorem 2.4.6 gereğince $\overline{\mathcal{R}(\lambda I - \Delta^+)} = c_0$ olduğundan $\lambda I - \Delta^+ \in I_2 \cup II_2\sigma(\Delta^+, c_0)$. $\lambda I - \Delta^+$ dönüşümünün örten olmadığı Teorem 3.2.6'dan elde edilebilir. $\square$

Kaynakça

[1] A. M. Akhmedov & F. Başar, *On the fine spectrum of the Cesàro operator in c_0*, Math. J. Ibaraki Univ., **36**(2004), 25–32.

[2] A. M. Akhmedov & F. Başar, *The fine spectra of the difference operator Δ over the sequence space ℓ_p,* $(1 \leq p < \infty)$, Demonstratio Math. 39 (2006)(çıkacak)

[3] A. M. Akhmedov & F. Başar, *The fine spectra of the difference operator Δ over the sequence space bv_p,* $(1 \leq p < \infty)$, Acta Math. Sin. Eng. Ser. (çıkacak)

[4] B. Altay & F. Başar, *On the fine spectrum of the difference operator Δ on c_0 and c*, *Inform. Sci.,* **168**(2004), 217–224.

[5] F. Başar & B. Altay, *On the space of sequences of p-bounded variation and related matrix mappings*, Ukrainian Math. J. **55**(1)(2003), 136–147.

[6] A. Brown, P. R. Halmos & A. L. Shields,*Cesàro operators* , Acta Sci.Math.(Szeged), **26**(1965), 125–137.

[7] J.P. Cartlidge , *Weighted Mean Matrices as Operators on ℓ^p*, Ph.D. Dissertation, Indiana University, 1978.

[8] F. P. Cass & B.E. Rhoades , *Mercerian teorems via spectral theory*, Pacific J. Math. **73**(1977), 63–71.

[9] C. Coşkun, *The spectra and fine spectra for p-Cesàro operators*, *Turkish J. Math.,* **21**(1997), 207–212.

[10] S. Goldberg, Unbounded Linear Operators, Dover Publications, Inc. New York, 1985.

[11] M. Gonzàlez, *The fine spectrum of the Cesàro operator in ℓ_p* $(1 < p < \infty)$, Arch. Math.,**44**(1985), 355–358.

[12] K. Knopp, Theory and Application of Infinite Series, Hafner Publishing Co., New York, 1971.

[13] E. Kreyszig, Introductory Functional Analysis with Applications, John Wiley & Sons Inc. New York-Chichester-Brisbane-Toronto, 1978.

[14] B. de Malafosse, *Properties of some sets of sequences and application to the spaces of bounded difference sequences of order μ*, Hokkaido Math. J., **31**(2002), 283–299.

[15] J. I. Okutoyi, *On the spectrum of C_1 as an operator on bv_0*, J. Austral. Math. Soc. Ser. A,**48**(1990), 79–86.

[16] J.I. Okutoyi, *On the spectrum of C_1 as an operator on bv*, Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A_1, **41**(1992), 197–207.

[17] J. B. Reade, *On the spectrum of the Cesàro operator*, Bull. Lond. Math. Soc., **17**(1985), 263-267.

[18] M. Reed & B. Simon, Methods of Modern Mathematical Physics, Volume I Functional Analysis, Revised and Enlarged Edition, Academic Press, Inc., Boston-san Diego-New York-London-Sydney-Tokyo-Toronto, 1980.

[19] JR. H. C. Rhaly, *Terraced matrices*, Bull. London Math. Soc.,**21**(4)(1989), 399–406.

[20] Jr. H. C. Rhaly, *p-Cesàro matrices*, Houston J. Math.,**15**(1)(1989), 137–146.

[21] B. E. Rhoades, *The fine spectra for weighted mean operators*, Pacific J. Math., **104**(1)(1983), 219–230.

[22] B. E. Rhoades, *The spectrum of weighted mean operators*, Canad. Math. Bull., **30**(4)(1987), 446–449.

[23] B. E. Rhoades, *The fine spectra of some weighted mean operators in $B(\ell_p)$*, Integral Equat. Operator Theory **12**(1989), 82–98.

[24] B. E. Rhoades & M. Yıldırım, *Spectra and fine spectra for factorable matrices*, Integral Equations Operator Theory,**53**(1)(2005), 127–144.

[25] N. K. Sharma, *Spectra of conservative matrices*, Proc. Amer. Math. Soc., **35**(2),(1972), 515–518.

[26] N. K. Sharma, *Isolated points of the spectra of conservative matrices*, Proc. Amer. Math. Soc., **51**(1),(1975), 74–78.

[27] A. E. Taylor, Introduction to functional analysis, Wiley, New York, 1958.

[28] M. Yıldırım, *On the spectrum and fine spectrum of the compact Rhally operators*, Indian J. Pure Appl. Math., **27**(8)(1996), 779–784.

[29] M. Yıldırım, *The fine spectra of the Rhaly operators on c_0*, Turkish J. Math.,**26**(2002), 273–282.

[30] M. Yıldırım, *On the spectrum of the Rhaly operators on l_p*, Indian J. Pure Appl. Math., **32**(2)(2001), 191–198.

[31] M. Yıldırım,*On the spectrum of the Rhaly operators on bv_0*, Commun. Korean Math. Soc. **18**(4)(2003), 669–676.

[32] R. B. Wenger, *The fine spectra of Hölder summability operators*, Indian J. Pure Appl. Math., **6**(1975), 695–712.

[33] A. Wilansky, Summability through Functional Analysis, North-Holland Mathematics Studies 85, Amsterdam, New York, Oxford, 1984.

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Hatay ilinin Reyhanlı ilçesinde doğdu. İlköğrenimini ve ortaöğrenimini Reyhanlı' da tamamladı. 1998 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü kazandı. Beş yıllık üniversite eğitimini 2003 yılında başarıyla tamamlayarak, mezun oldu. Aynı yıl Adıyaman ilinin Besni ilçesinin Kızılin köyüne matematik öğretmeni olarak atandı. İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında 2003 yılının güz döneminde yüksek lisans eğitimine başladı. Hâlen Milli Eğitim Bakanlığı'nda matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.