T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT DİZİLERİN $\mathcal{I}$-YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Erdinç DÜNDAR

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2010

Tezin Başlığı	:	Çift Dizilerin $\mathcal{I}$-Yakınsaklığı Üzerine
Tezi Hazırlayan	:	Erdinç DÜNDAR
Sınav Tarihi	:	02.12.2010

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Rıfat ÇOLAK	(Fırat Üniversitesi)	______________
Doç. Dr. Bilal ALTAY (Danışman)	(İnönü Üniversitesi)	______________
Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN	(İnönü Üniversitesi)	______________
Doç. Dr. Recep ASLANER	(İnönü Üniversitesi)	______________
Doç. Dr. Yılmaz YILMAZ	(İnönü Üniversitesi)	______________

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Asım KÜNKÜL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Çift Dizilerin $\mathcal{I}$-Yakınsaklığı Üzerine" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Erdinç DÜNDAR

ÖZET

Doktora Tezi
Çift Dizilerin $\mathcal{I}$-Yakınsaklığı Üzerine
Erdinç DÜNDAR
İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
60+vi sayfa
2010
Danışman: Doç. Dr. Bilal ALTAY

Beş bölümden oluşan bu çalışmada; çift indisli dizilerin ideal yakınsaklığı incelenmiştir.

Birinci bölümde; çift dizi ve ideal yakınsaklık kavramlarının tarihsel gelişimi verilmiştir.

İkinci bölümde; sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım, teoremler ve ideal yakınsak ile ilgili bazı özellikler verilmiştir.

Tezimizin üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümleri orijinal sonuçları ihtiva etmektedir.

Üçüncü bölümde; çift dizilerde Pringsheim anlamında ideal yakınsaklık ve ideal Cauchy ile ilgili tanım ve teoremler ifade edilmiştir. Ayrıca, çift dizilerde regüler anlamda ideal yakınsaklık ve ideal Cauchy tanımları verilmiş ve aralarındaki ilişkiler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde; sınırlı ve ideal yakınsak olan çift diziler için çarpan (multiplier) dizi uzayları ele alınmıştır.

Beşinci bölümde; fonksiyonların çift dizileri için noktasal ideal yakınsaklık ve düzgün ideal yakınsaklık ile ilgili tanım ve teoremler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Çift dizi, İdeal yakınsaklık, Çarpım dizi uzayları, Fonksiyonların çift dizileri.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis
On $\mathcal{I}$-Convergence of Double Sequences
Erdinç DÜNDAR
İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
60+vi pages
2010
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Bilal ALTAY

The present thesis consists of five chapters, which investigate the ideal convergence of double sequences.

In the first chapter, brief history of double sequences and ideal convergence are given.

In the second chapter, some basic concepts and theorems and properties of ideal convergence which are used in later chapters are presented.

The third, fourth and fifth chapters of this thesis involve the original results.

In the third chapter, ideal convergence and ideal Cauchy of double sequences in Pringsheim sense are expressed. Also, ideal convergence and ideal Cauchy of double sequence in regular sense are given and relationship between these concepts are examined.

In the fourth chapter, multiplier sequence spaces for bounded and ideal convergence of double sequence are discussed.

In the fifth chapter, definitions and theorems about pointwise and uniformly ideal convergence for double sequences of functions are given.

KEYWORDS: Double sequence, Ideal convergence, Multiplier sequence spaces, Double sequences of functions.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimimde danışmanlığımı üstlenen ve bu tezin hazırlanmasında gerekli maddi ve manevi imkânları sağlayarak bana yardımcı olan, yüksek lisans eğitimimden beri hiç bir zaman yakın ilgi ve alâkalarını esirgemeyen, bilimselliğinin yanında karakter ve şahsiyetiyle de bana örnek olan hocam sayın Doç. Dr. Bilâl Altay' a minnet ve şükranlarımı sunarım.

Lisans eğitimimden bu yana gerekli maddi ve manevi imkânları ile bana yardımcı olan, yüksek lisans eğitimimde danışmanlığımı üstlenen, ilim ve irfan sahasında değerli fikirlerinden etkilendiğim Fatih Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi hocam sayın Prof. Dr. Feyzi Başar' a ve her zaman ilgi ve alakaları ile çalışmalarımda bana feyz veren hocalarım sayın Doç. Dr. Celal Çakan' a ve sayın Doç. Dr. İsmet Özdemir' e teşekkürlerimi sunmayı bir görev bilirim.

Hayatımın her aşamasında, değerli şefkat ve merhametlerini esirgemeyen sevgili anneme, karşılaştığım güçlüklerde her zaman destek olan eşim ile sabır ve sevgilerinden dolayı sevgili kızlarıma teşekkür ediyorum.

Ayrıca, bu tezin hazırlanmasında yardımlarını ve ilgilerini esirgemeyen, sözleriyle bana cesaret veren yakın arkadaşlarım Özer Talo' ya ve Yurdal Sever' e teşekkür ederim.

Erdinç DÜNDAR

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar cümlesi
c : Reel terimli yakınsak dizilerin uzayı
c_0 : Reel terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı
$c^2(b)$: Yakınsak ve sınırlı olan çift dizilerin uzayı
$c_0^2(b)$: Sıfıra yakınsak ve sınırlı olan çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_p$: Pringsheim anlamında yakınsak olan kompleks terimli çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_r$: Regüler yakınsak kompleks terimli çift dizilerin uzayı
$\mathcal{F}(\mathcal{I})$: $\mathbb{N}$ üzerinde $\mathcal{I}$ idealine karşılık gelen süzgeç
$\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde $\mathcal{I}_2$ idealine karşılık gelen süzgeç
$F_{\mathcal{I}_2}$: $\mathcal{I}_2$ -yakınsak olan çift dizilerin uzayı
$F_{\mathcal{I}_2}(b)$: $\mathcal{I}_2$ -yakınsak ve sınırlı olan çift dizilerin uzayı
$F^0_{\mathcal{I}_2}(b)$: Sıfıra $\mathcal{I}_2$ -yakınsak ve sınırlı olan çift dizilerin uzayı
$f_{mn} \rightarrow_{\mathcal{I}_2} f$: Fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin f fonksiyonuna $\mathcal{I}_2$ -yakınsaklığı
$f_{mn} \rightrightarrows_{\mathcal{I}_2} f$: Fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin f fonksiyonuna düzgün $\mathcal{I}_2$ -yakınsaklığı
$\mathcal{I}$: $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlanan ideal
$\mathcal{I}_2$: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde tanımlanan ideal
ℓ_∞ : Reel terimli sınırlı dizilerin uzayı
ℓ^2_∞ : Sınırlı olan çift dizilerin uzayı
$\mathcal{M}_u$: Kompleks terimli sınırlı çift dizilerin uzayı
$M(E,F)$: E dizi uzayından F dizi uzayına sınırlı tüm çarpan dizilerin uzayı
$m(E,F)$: E dizi uzayından F dizi uzayına tüm çarpan dizilerin uzayı
$\mathbb{N}$: Doğal sayıların cümlesi
$\mathbb{R}$: Reel sayılar cümlesi
$r(\mathcal{I}_2,\mathcal{I})$: Regüler anlamda $(\mathcal{I}_2,\mathcal{I})$-yakınsaklık
ω : Reel terimli dizilerin uzayı
Ω : $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı çift dizilerin uzayı

1. GİRİŞ

Çift diziler üzerinde Pringsheim [1] anlamında yakınsaklık, tabii sıralanmış $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesi üzerindeki ağların yakınsaklığı olarak tanımlanır. Bu yakınsaklıktaki eksiklik, yakınsak olan bir dizinin sınırlı olmak zorunda olmamasıdır. Hardy [2], Pringsheim anlamında yakınsaklığa ilâve olarak çift dizinin satır ve sütunlarının yakınsaklığını gerektiren regüler yakınsaklığı tanımlayarak bu eksikliği gidermiştir. Robison [3], Kojima [4] ve Hamilton [5] bu önemli iki yakınsaklık çeşidi ile ilgili çift dizi uzayları arasındaki matris dönüşümleriyle önemli çalışmalar yapmışlardır.

Boos, Leiger ve Zeller tarafından [6] tanımlanan e-, be- ve c-yakınsak çift dizilerin bazı topolojik özellikleri, Zeltser [7] tarafından doktora çalışması olarak verildi. Çift dizilerle ilgili bazı önemli çalışmalar Moricz [8], Gökhan, Güngör ve Et [9], Hill [10], T. Kojima [4], Mursaleen ve Edely [11] tarafından yapıldı. Ayrıca, Altay [12] bazı yeni çift dizi uzayları tanımlayarak, bu uzayların bazı özelliklerini, duallerini ve matris karakterizasyonlarını inceledi.

Reel sayıların bir dizisi için yakınsaklık kavramı bağımsız olarak Fast [13] ve Schoenberg [14] tarafından istatistiksel yakınsaklığa genişletildi. Bu kavram Mursaleen ve Edely [11] tarafından çift dizilerde çalışıldı. Bu alanda Šalát [15] ve Fridy [16, 17] gibi yazarların çalışmalarından sonra bir çok gelişmeler oldu. Genel olarak istatistiksel yakınsaklık, metrik uzaylarda bir dizinin alışılmış yakınsaklığının özelliklerini sağlar [13, 16, 17, 18].

Çakan ve Altay [19], Fridy ve Orhan [20] tarafından verilen sonuçların çift indisli dizilerdeki karşılıkları olan istatistiksel infimum ve supremum kavramlarını vererek, istatistiksel çekirdeği incelediler. Connor, Demirci ve Orhan [21] sınırlı ve istatistiksel yakınsak olan diziler için multiplier (çarpan) ve factorization (dizinin çarpanları) kavramlarını ölçüye göre inceleyip önemli sonuçlar verdiler.

Savaş ve Mursaleen [22] fuzzy sayıları üzerinde çift dizilerin istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy çift dizisini incelediler. Gökhan, Güngör ve Et [9] reel değerli fonksiyonların çift dizileri için noktasal ve düzgün olarak istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizisinin tanımlarını verip, istatistiksel yakınsak ile istatistiksel Cauchy dizi arasındaki ilişkiyi veren teoremler üzerinde çalıştılar. [23, 24, 25, 26] numaralı çalışmalarda istatistiksel yakınsaklık ve uygulamalarıyla ilgili sonuçlar verildi.

İstatistiksel yakınsaklığın genelleştirilmiş hali olan ideal yakınsaklık ilk olarak tek indisli dizilerde Kostyrko, Šalát ve Sleziak [27] tarafından tanımlanarak bazı özellikleri verilmiştir. Bu çalışmada $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık tanımı yapılarak $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile ilişkisi incelenmiştir. Bu incelemelerde ideal için (AP) özelliği tanımlanmıştır.

Yine Kostyrko, Mačaj, Šalát ve Sleziak [**28**] tarafından ideal yakınsaklık ile ilgili bazı özellikler ile $\mathcal{I} - \limsup$, $\mathcal{I} - \liminf$ noktaları ve limit noktaları incelenmiştir.

Dems [**29**] ve Nabiev, Pehlivan, Gürdal [**30**] tek dizilerde $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi ve $\mathcal{I}$-Cauchy dizisi ile $\mathcal{I}$-yakınsaklık arasındaki ilişkileri incelediler. Yardımcı [**31**] sınırlı ve $\mathcal{I}$-yakınsak olan dizilerde multiplier (çarpan) ve factorization (dizinin çarpanları) kavramları üzerinde çalışmıştır. Gezer ve Karakuş [**32**] tek indisli fonksiyon dizilerinde noktasal $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve düzgün $\mathcal{I}$-yakınsaklık tanım ve teoremlerini vererek bu iki yakınsaklık ile ilgili bazı uygulamaları vermişlerdir. Balcerzak, Dems ve Komisarski [**23**] tek indisli fonksiyon dizilerinde istatistiksel ve $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve düzgün $\mathcal{I}$-yakınsaklık tartışmaları yapmışlardır. Ayrıca [**33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40**] numaralı çalışmalarda $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile ilgili faydalı çalışmalar yapılmıştır.

Çift indisli dizilerde, Das, Kostyrko, Wilczyński ve Malik [**41**] $\mathcal{I}$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık tanımlarını, bazı ideal çeşitlerini ve (AP2) özelliğini tanımlayarak, bunlar ile ilgili teoremler vermiştir. Das, Malik [**42**] ve Gürdal, Şahiner [**43**] numaralı çalışmalarında tek diziler için Kostyrko, Mačaj, Šalát ve Sleziak tarafından [**28**] yapılan çalışmaları çift dizilere taşımışlardır. Yine benzer tartışmalar Kumar [**44**] ve Tripathy, Tripathy [**45**] tarafından incelenmiştir. Ayrıca Tripathy ve Tripathy [**45**] ideal yakınsaklık yardımıyla bazı dizi uzayları tanımlayarak özelliklerini incelemişlerdir.

Bu çalışmada, ideal ve istatistiksel yakınsaklık ile ilgili yapılan çalışmalardaki teknik ve yöntemler kullanılarak, tek indisli dizilerde yapılan ideal yakınsaklık tartışmaları çift indisli dizilere taşındı.

Çift dizilerde, $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}_2$-Cauchy kavramlarını Pringsheim anlamının yanında regüler anlamda da incelendi. Daha sonra, sınırlı $\mathcal{I}_2$-yakınsak çift dizilerin çarpan uzaylarını ve ilgili teoremleri ispatları ile birlikte verildi. Son olarak fonksiyonların çift dizileri için $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık ve $\mathcal{I}_2$-Cauchy kavramları noktasal ve düzgün olarak incelendi.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlere temel teşkil edecek bazı bilgiler verilmiştir. Vektör uzayı, topolojik uzay ve altuzay gibi bazı kavramların bilindiği kabul edilmiştir.

2.1. Temel Kavramlar

Tanım 2.1.1. **(Metrik ve Metrik Uzay,** [**46**, shf. 24, 27]**)**. X boş olmayan bir cümle ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y, z \in X$ için

(M1) $d(x, x) = 0$,

(M2) $d(x, y) = d(y, x)$,

(M3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$

şartları sağlanırsa, d fonksiyonuna, X üzerinde *yarı metrik fonksiyonu* ve (X, d) ikilisine de *yarı metrik uzay* denir.

(M1) $d(x, x) = 0$ şartı yerine (M1)$'$ $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ şartını alırsak d fonksiyonuna, *metrik fonksiyonu* ve (X, d) ikilisine bir *metrik uzay* denir.

Bir lineer (X, d) metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına tam metrik uzay veya Fréchet uzay denir.

Bu çalışmamızda, $\mathbb{R}$ reel uzay üzerinde

$$d(x, y) = |x - y|$$

şeklinde tanımlanan *alışılmış mutlak değer metriğini* gözönüne alacağız. Burada $\mathbb{R}$ yerine $\mathbb{C}$ kompleks sayıların cismi de alınabilir.

Tanım 2.1.2. **(Dizi Uzayı,** [**47**]**)**. Reel veya kompleks terimli bütün dizilerin ω uzayının boş olmayan her alt vektör uzayına *dizi uzayı* denir.

ℓ_∞ , c , c_0 , ℓ_1 dizi uzayları sırasıyla sınırlı, yakınsak, sıfıra yakınsak ve mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayıdır.

Tanım 2.1.3. **(Yarı Norm ve Norm,** [**46**, shf. 83, 103]**)**. X bir lineer uzay ve $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in \mathbb{C}$ için

(N1) $\|x\| \geq 0$,

(N2) $\|\theta\| = 0$,

(N3) $\|\alpha x\| = |\alpha|\|x\|$,

(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyor ise, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *yarı norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir *yarı normlu uzay* denir.

Burada (N2) şartı yerine (N2)$'$ $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ şartı sağlanırsa, $\|\cdot\|$ yarı normuna bir *norm* ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de *bir normlu uzay* denir.

Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X uzayına *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* denir.

Tanım 2.1.4. **(Açık ve Kapalı Yuvar,** [**48**, shf. 35]**).** (X, d) metrik uzayında, x_0 noktası ve pozitif bir r sayısı için;

$$B_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < r\},$$

$$\overline{B}_r(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq r\},$$

cümlelerine, sırasıyla, x_0 merkezli, r yarıçaplı *açık yuvar* ve *kapalı yuvar* denir.

Tanım 2.1.5. **(Süreklilik ve Düzgün Süreklilik,** [**46**, shf. 48, 49]**).** (X, d_x), (Y, d_y) yarı metrik uzaylar, $x_0 \in X$ ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$d_x(x, x_0) < \delta$$

olduğunda,

$$d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu $x_0 \in X$ noktasında *süreklidir* denir. X uzayının her noktasında sürekli olan fonksiyona X üzerinde *sürekli fonsiyon* adı verilir.

Bir $f : X \to Y$ fonksiyonu için, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $x, x_0 \in X$ için

$$d_x(x, x_0) < \delta$$

olduğunda,

$$d_y(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$$

olacak şekilde en az bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı varsa, f fonksiyonu X üzerinde *düzgün süreklidir* denir.

Tanım 2.1.6. **(Eş Süreklilik,** [**49**, shf. 289]**).** (X, d_x), (Y, d_y) yarı metrik uzayları arasındaki fonksiyonların bir Φ ailesi,

$$\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists \delta > 0 \;\; \forall f \in \Phi : d_x(x_0, y) < \delta \Rightarrow d_y(f(x_0), f(y)) < \varepsilon$$

şartını sağlıyor ise, $x_0 \in X$ noktasında *noktasal eş-süreklidir* denir.

TANIM 2.1.7. **(Kompakt Uzay, Dizisel Kompaktlık, [46, shf. 60, 62])**. Bir topolojik uzayın her açık örtüsü bir sonlu alt örtüye sahip ise uzaya *kompakt uzay* denir.

Bir metrik uzayındaki her dizinin yakınsak bir alt dizisi mevcut ise metrik uzaya *dizisel kompakttır* denir.

TANIM 2.1.8. **(Fonksiyon Dizisi, [50, shf. 42])**. $A \subset \mathbb{R}$ ve A üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların cümlesi $F(A)$ olsun.

$$s : \mathbb{N} \to F(A)$$

fonksiyonuna bir *fonksiyon dizisi* denir.

2.2. Çift Diziler

Bu kısımda, çift dizi uzayları ile çift dizilerdeki yakınsaklık kavramları hakkında bilgiler verilecektir. Çift dizilerde birden fazla yakınsaklık çeşidi vardır. Biz, bu çalışmada çift dizilerde en önemli yakınsaklık kavramlarından olan Pringsheim ve regüler yakınsaklık ile ilgileneceğiz.

TANIM 2.2.1 (**Çift Dizi**, [**12**]). X boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere,

$$\begin{aligned} f \quad : \quad & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X \\ & (m, n) \longrightarrow f(m, n) = x_{mn} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna bir *çift indisli dizi* denir. Bundan sonraki kısımlarda çift indisli dizi yerine kısaca çift dizi veya sadece dizi ifadesi kullanılacaktır.

Herhangi bir $x = (x_{mn})$ çift dizisinin x_{mn} elemanlarını,

$$\begin{bmatrix} x_{00} & x_{01} & x_{02} & \cdots & x_{0n} & \cdots \\ x_{10} & x_{11} & x_{12} & \cdots & x_{1n} & \cdots \\ x_{20} & x_{21} & x_{22} & \cdots & x_{2n} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_{m0} & x_{m1} & x_{m2} & \cdots & x_{mn} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

şeklinde bir tablo olarak düşünebiliriz. Ω ile kompleks veya reel terimli bütün çift dizilerin cümlesini göstereceğiz. Buna göre;

$$\Omega = \{x = (x_{mn}) : \forall m, n \in \mathbb{N} \text{ için } x_{mn} \in \mathbb{C}\}$$

olup, bu cümle $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ ve $\forall x,\, y \in \Omega$ için,

$$x + y = (x_{mn} + y_{mn}) \text{ ve } \alpha x = (\alpha x_{mn})$$

işlemleri altında bir lineer uzaydır.

TANIM 2.2.2 (**Sınırlılık**, [**12**]). $x = (x_{mn})$ kompleks terimli bir çift dizi olmak üzere,

$$\sup_{m,n\geq 0} |x_{mn}| < \infty$$

oluyorsa, x dizisine *sınırlıdır* denir. Bütün sınırlı çift dizilerin cümlesi,

$$\mathcal{M}_u = \left\{ x = (x_{mn}) \in \Omega \;:\; \|x\|_\infty = \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty \right\}$$

şeklinde olup, bu uzay $\|\cdot\|_\infty$ normu ile bir Banach uzayı teşkil eder.

TANIM 2.2.3 (**P-Yakınsaklık**, [**12**]). $x = (x_{mn})$ kompleks terimli bir çift dizi ve $l \in \mathbb{C}$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $m, n > k_0$ olduğunda,

$$|x_{mn} - l| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabiliyorsa, $x = (x_{mn})$ dizisi, l sayısına *Pringsheim anlamında yakınsak* ve l değerine de x dizisinin *Pringsheim limiti* denir. Pringsheim anlamında yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizisine kısaca P-yakınsak dizi diyeceğiz ve limitini de

$$P - \lim x_{mn} = l$$

ile göstereceğiz. Pringsheim anlamında yakınsak dizilerin cümlesini,

$$\mathcal{C}_p = \{x = (x_{mn}) \in \Omega \mid \exists l \in \mathbb{C} \;\; \forall\varepsilon > 0 \;\; \exists k_0 \in \mathbb{N} \;\; \forall m, n \geq k_0 \ni |x_{mn} - l| < \varepsilon\}$$

biçiminde ifade edeceğiz. $\mathcal{C}_p$ cümlesi çift dizilerin koordinatsal toplama ve skalarla çarpma işlemleri altında bir lineer uzay olup,

$$\|x\|_{\mathcal{C}_p} = \lim_{k_0\to\infty} \sup_{m,n\geq k_0} |x_{mn}|$$

yarı normu ile bir tam uzay teşkil ettiği Mòricz [**8**] tarafından gösterildi.

Pringsheim anlamında yakınsak bir çift dizi, sınırlı olmak zorunda değildir. Pringsheim anlamında l noktasına yakınsak ve sınırlı bir $x = (x_{mn})$ dizisine, l noktasına Pringsheim anlamında sınırlı yakınsak dizi denir. Bu şekildeki dizilerin cümlesini,

$$\mathcal{C}_{bp} = \left\{ x = (x_{mn}) \in \mathcal{C}_p : \|x\|_\infty = \sup_{m,n\geq 0} |x_{mn}| < \infty \right\} = \mathcal{C}_p \cap \mathcal{M}_u$$

şeklinde göstereceğiz. Bu uzayın da $\|\cdot\|_\infty$ normu ile bir Banach uzayı olduğu Moricz [**8**] tarafından gösterildi.

Tanım 2.2.4 (**Regüler Yakınsaklık**, [**12**]). Pringsheim anlamında l noktasına yakınsak ve $\lim_m x_{mn},\ (n \in \mathbb{N})$ ile $\lim_n x_{mn},\ (m \in \mathbb{N})$ limitleri mevcut olan x dizisine, l noktasına *regüler yakınsaktır* denir. Regüler yakınsak bir $x = (x_{mn})$ dizisi için $\lim_n \lim_m x_{mn}$ ve $\lim_m \lim_n x_{mn}$ limitleri mevcut ve Pringsheim limitine eşittirler. Regüler yakınsak dizilerin cümlesi,

$$\mathcal{C}_r = \left\{ x = (x_{mn}) \in \mathcal{C}_p \mid \forall m \in \mathbb{N} \ni (x_{mn})_m \in c \text{ ve } \forall n \in \mathbb{N} \ni (x_{mn})_n \in c \right\}$$

şeklindedir. Regüler yakınsaklığın Pringsheim anlamında yakınsaklıktan farkı, bir çift dizinin yakınsaklığının dizinin sınırlılığını gerektirmesidir.

Tanım 2.2.5 (**P-Cauchy**, [**12**]). Verilen her $\varepsilon > 0$ için $m, n, p, q > k_0$ olduğunda,

$$|x_{mn} - x_{pq}| < \varepsilon$$

kalacak şekilde bir $k_0 = k_0(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa, $x = (x_{mn})$ kompleks terimli dizisine bir *P-Cauchy dizisi* denir.

Teorem 2.2.1. [**12**] *Kompleks terimli bir $x = (x_{mn})$ dizisinin P-yakınsak olması için gerek ve yeter şart P-Cauchy dizisi bulunmasıdır.*

Tanım 2.2.6 (**Alt Dizi**, [**12**]).

$$\begin{aligned} f &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X \\ &(m, n) \longrightarrow f(m, n) = x_{mn} \end{aligned}$$

dizisi verilmiş olsun.

$$\begin{aligned} i &: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ &m \longrightarrow i(m) = i_m \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} j &: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \\ &n \longrightarrow j(n) = j_n \end{aligned}$$

artan fonksiyonlar (diziler) olmak üzere,

$$\begin{aligned} h &: \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} \\ &(m, n) \longrightarrow h(m, n) = (i_m, j_n) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
f \circ h \quad : \quad & \mathbb{N} \times \mathbb{N} \longrightarrow X \\
& (m, n) \longrightarrow f \circ h(m, n) = x_{i_m j_n}
\end{aligned}
$$

bileşke fonksiyonuna (x_{mn}) dizisinin bir *alt dizisi* denir.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinin sonsuz çoklukta $(i_m j_n)$ dizisi bulunabileceğinden, bir (x_{mn}) dizisinin sonsuz çoklukta alt dizisi vardır. Burada alt diziyi, orjinal diziden satır ve sütunlar atmakla elde ediyoruz. $(x_{i_m j_n})$ alt dizisinin her teriminin (x_{mn}) dizisinin bir terimi olduğu açıktır.

Teorem 2.2.2. *Yakınsak bir çift dizinin her alt dizisi de yakınsaktır.*

Tanim 2.2.7 (**Monoton Dizi**, [**51**]). $m \leq m'$ ve $n \leq n'$ olduğunda $s_{mn} \leq s_{m'n'}$ oluyorsa, (s_{mn}) dizisine *monoton artan*, $m \geq m'$ ve $n \geq n'$ olduğunda $s_{mn} \leq s_{m'n'}$ oluyorsa, (s_{mn}) dizisine *monoton azalandır* denir.

Monoton çift diziler hakkındaki teoremler, monoton tek diziler hakkındaki teoremlerle aynı yapıya sahiptir.

Teorem 2.2.3. *Artan bir çift dizi üstten sınırlı ise limiti supremumuna, azalan bir çift dizi alttan sınırlı ise limiti infimumuna eşittir.*

Tanim 2.2.8 (**Çift Seri**, [**12**]). (x_{mn}) çift dizisi verilmiş olsun. Şimdi,

$$
s_{mn} = \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij}
$$

şeklinde tanımlanan (s_{mn}) dizisini gözönüne alalım. Bu durumda; $((x_{mn}), (s_{mn}))$ ikilisine bir *çift seri* denir. x_{mn} terimine serinin *genel terimi*, (s_{mn}) dizisine de serinin *kısmi toplamlar dizisi* denir. Eğer, (s_{mn}) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına υ-yakınsak $(\upsilon \in \{P, r\})$, yani

$$
\upsilon - \lim_{mn} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{n} x_{ij} = s
$$

ise, $((x_{mn}), (s_{mn}))$ serisi υ-yakınsak ve serinin υ-toplamı s' dir denir.

Yakınsak olmayan seriye *ıraksak seri* denir.

Genel terimi x_{mn} ve toplamı s olan yakınsak seri,

$$
\sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} x_{mn} = s
$$

şeklinde gösterilir. Seri ister yakınsak ister ıraksak olsun, genel terimi x_{mn} olan seri

$$\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} x_{mn}$$

ile gösterilir.

2.3. Fonksiyonların Çift Dizilerinin Noktasal ve Düzgün Yakınsaklığı

Şimdi reel değerli fonksiyonların bir çift dizisi için yakınsaklık tanımlarını verelim. $S \subset \mathbb{R}$ ve S üzerinde reel değerli fonksiyonların bir çift dizisini $\{f_{mn}\}$ olarak alalım.

Tanım 2.3.1 ([**9**]). $S \subset \mathbb{R}$ cümlesi üzerindeki fonksiyonların bir $\{f_{mn}\}$ çift dizisi, her bir $x \in S$ noktası ve her $\varepsilon > 0$ için $m, n > k_0$ olduğunda,

$$|f_{mn}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir pozitif $k_0 = k_0(\varepsilon, x)$ doğal sayısı varsa, S cümlesi üzerinde f fonksiyonuna *noktasal yakınsaktır* denir ve

$$\lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x) = f(x) \text{ veya } f_{mn} \to f$$

şeklinde gösterilir. S üzerindeki fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin S üzerinde f fonksiyonuna noktasal yakınsaklığı, fonksiyonların çift dizisinin fonksiyon çift limiti (Pringsheim fonksiyon limiti)' dir.

Tanım 2.3.2 ([**9**]). $S \subset \mathbb{R}$ cümlesi üzerindeki fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisi, her $\varepsilon > 0$ için $m, n > k_0$ olduğunda, tüm $x \in S$ noktaları bakımından

$$|f_{mn}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir pozitif $k_0 = k_0(\varepsilon)$ tam sayısı varsa, S cümlesi üzerinde f fonksiyonuna *düzgün yakınsaktır* denir ve

$$f_{mn} \rightrightarrows f$$

şeklinde gösterilir

2.4. İdeal Kavramı ve İdeal Yakınsaklık

Bu kısımda, tek dizilerde ve çift dizilerde yoğunluk kavramını, istatistiksel ve ideal yakınsaklık tanımlarını vereceğiz.

TANIM 2.4.1 (**Doğal Yoğunluk**, [**52**]). $K \subset \mathbb{N}$ ve $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ cümlelerini alalım. $|K| = card\, K$ (K cümlesinin kardinalitesi) olmak üzere,

$$\underline{\delta}(K) = \liminf_{n \to \infty} \frac{|K_n|}{n}$$

ve

$$\overline{\delta}(K) = \limsup_{n \to \infty} \frac{|K_n|}{n}$$

limitlerine, sırasıyla, K cümlesinin alt ve üst yoğunlukları denir. $\underline{\delta}(K) = \overline{\delta}(K)$ ise $\left(\frac{|K_n|}{n}\right)$ dizisinin limiti mevcuttur denir. Bu limit $\delta(K)$ ile gösterilir ve K cümlesinin *doğal yoğunluğu* denir. $K \subset \mathbb{N}$ cümlesinin doğal yoğunluğu,

$$\delta(K) = \lim_{n \to \infty} \frac{|K_n|}{n} = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} |\{k \leq n : k \in K\}|$$

ile gösterilir.

TANIM 2.4.2 (**Asimptotik Yoğunluk**, [**27**]). $A \subset \mathbb{N}$ cümlesinin karakteristik fonksiyonu χ_A olmak üzere,

$$d_n(A) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_A(k)$$

alalım.

$$\underline{d}(A) = \liminf_{n \to \infty} d_n(A)$$

ve

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n \to \infty} d_n(A)$$

limitlerine, sırasıyla, K cümlesinin alt ve üst asimptotik yoğunlukları denir.

$\underline{d}(A) = \overline{d}(A) = d(A)$ ise, $d(A)$ sayısına $A \subset \mathbb{N}$ cümlesinin *asimptotik yoğunluğu* denir. Buna göre A cümlesinin asimptotik yoğunluğu

$$d(A) = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_A(k)$$

şeklindedir.

TANIM 2.4.3 (**İstatistiksel Yakınsaklık**, [**13**]). Reel sayıların bir $x = (x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi, her $\varepsilon > 0$ için

$$d\left(\{n \in \mathbb{N} : |x_n - L| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

ise, $L \in \mathbb{R}$ sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir.

Tanım 2.4.4 (**Çift Doğal Yoğunluk**, [**41**]). $K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ alt cümlesi için $K(m,n) = \{(i,j) \in K : i \leq m, j \leq n\}$ olsun. $\left\{\frac{|K(m,n)|}{mn}\right\}$ dizisi Pringsheim anlamında bir limite sahip ise, bu durumda $K \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesi bir *çift doğal yoğunluğa* sahiptir denir ve

$$\delta_2(K) = \lim_{m,n\to\infty} \frac{|K(m,n)|}{mn}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.4.5 (**Çift Diziler için İstatistiksel Yakınsaklık**, [**11**]). Reel sayıların bir $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$ dizisi, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_2\left(\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{mn} - L| \geq \varepsilon\}\right) = 0$$

ise $L \in \mathbb{R}$ sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir.

Tanım 2.4.6 (**İdeal**, [**27**]). X boş olmayan bir cümle olsun. $\mathcal{I} \subset 2^X$ sınıfı,

i) $\emptyset \in \mathcal{I}$

ii) $A, B \in \mathcal{I}$ ise $A \cup B \in \mathcal{I}$

iii) $A \in \mathcal{I}$ ve $B \subset A$ için $B \in \mathcal{I}$

şartlarını sağlarsa, X üzerinde bir *idealdir* denir.

Eğer, $X \notin \mathcal{I}$ ise $\mathcal{I}$' ya bir gerçek (aşikar olmayan) ideal adı verilir.

Bundan sonraki kısımlarda geçen idealleri gerçek (aşikar olmayan) ideal olarak gözönüne alacağız.

Tanım 2.4.7 (**Süzgeç**, [**27**]). $X \neq \emptyset$ olsun. $\emptyset \neq \mathcal{F} \subset 2^X$ sınıfı,

i) $\emptyset \notin \mathcal{F}$

ii) $A, B \in \mathcal{F}$ ise $A \cap B \in \mathcal{F}$

iii) $A \in \mathcal{F}$ ve $A \subset B$ için $B \in \mathcal{F}$

şartlarını sağlarsa, X üzerinde bir *süzgeçtir (filtre)* denir.

$\mathcal{I}$, X üzerinde bir gerçek ideal ise,

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{M \subset X : \exists A \in \mathcal{I}, M = X \backslash A\}$$

sınıfı X üzerinde bir süzgeç olup, $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ süzgecine $\mathcal{I}$ idealine karşılık gelen süzgeç denir.

Tanım 2.4.8 (**Uygun İdeal**, [**27**]). X üzerinde $\mathcal{I}$ gerçek ideali, her bir $x \in X$ için $\{x\} \in \mathcal{I}$ şartını sağlıyorsa, bir uygun ideal denir.

Tanım 2.4.9 (**$\mathcal{I}$-Yakınsaklık**, [**27**]). (X, ρ) bir metrik uzay ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek ideal olsun. X uzayının bir $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi, her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_n, L) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$$

şartını sağlıyorsa, x dizisi $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir ve

$$\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} x_n = L$$

ile gösterilir.

$\mathcal{I}$ uygun bir ideal ise adi yakınsaklık $\mathcal{I}$-yakınsaklığı gerektirir.

Şimdi $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile ilgili iki örnek verelim.

1) $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesinin tüm sonlu alt cümlelerinin sınıfı $\mathcal{I}_f$ olsun. Bu durumda $\mathcal{I}_f$ gerçek uygun idealdir ve $\mathcal{I}_f$ -yakınsaklık, X uzayındaki ρ metriğine göre adi yakınsaklık ile çakışır.

2) $\mathcal{I}_\delta = \{A \subset \mathbb{N} : \delta(A) = 0\}$ sınıfını tanımlayalım. Bu durumda $\mathcal{I}_\delta$ bir gerçek uygun idealdir ve $\mathcal{I}_\delta$ -yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile çakışır.

Tanım 2.4.10 (**$\mathcal{I}^*$-Yakınsaklık**, [**27**]). (X,ρ) bir metrik uzay, (x_n), X uzayında bir dizi ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek ideal olsun. Bir $M = \{m_1 < m_2 < ... < m_k < ...\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ cümlesi için

$$\lim_{k\to\infty} \rho(x_{m_k}, L) = 0$$

sağlanıyorsa, (x_n) dizisi $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}^*$-yakınsaktır denir ve

$$\mathcal{I}^* - \lim_{k\to\infty} x_{m_k} = L$$

ile gösterilir.

Tanım 2.4.11 (**(AP) Şartı**, [**27**]). $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. $\mathcal{I}$ idealine ait karşılıklı ayrık ve sayılabilir her $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cümleler ailesi için, $A_n \triangle B_n$ $(n \in \mathbb{N})$ sonlu cümle ve

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{I}$$

şartlarını sağlayan sayılabilir $\{B_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cümleler ailesi varsa, $\mathcal{I}$ ideali (AP) şartını sağlar denir.

Şimdi tek indisli fonksiyon dizilerinde ideal yakınsaklık tanımını vereceğiz.

Tanım 2.4.12 ([**23**]). $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir uygun ideal, $X \neq \emptyset$ bir cümle, (Y,ρ) bir metrik uzay, $f : X \to Y$ ve $f_n : X \to Y$, $(n \in \mathbb{N})$ fonksiyonlar olsun. Her bir $x \in X$ için

$$\mathcal{I} - \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$$

ise $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna noktasal $\mathcal{I}$-yakınsaktır denir ve

$$f_n(x) \to_{\mathcal{I}} f(x)$$

ile gösterilir. Buna göre, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisi f fonksiyonuna noktasal $\mathcal{I}$-yakınsak ise,

$$(\forall x \in X)\ (\forall \varepsilon > 0)\ (\exists H \in \mathcal{I})\ (\forall n \notin H)\ \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

önermesi sağlanır.

$(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyon dizisinin f fonksiyonuna düzgün $\mathcal{I}$-yakınsaklığı

$$(\forall \varepsilon > 0)\ (\exists H \in \mathcal{I})\ (\forall n \notin H)\ (\forall x \in X)\ \rho(f_n(x), f(x)) < \varepsilon$$

şeklinde tanımlanır ve

$$f_n(x) \rightrightarrows_{\mathcal{I}} f(x)$$

ile gösterilir.

2.5. Çift Dizilerde İdeal ve İdeal Yakınsaklık

Bu kısımda, çift dizilerde ideal yakınsaklık ile ilgili temel kavramlar ve tanımlar verilecektir. Biz burada, çift dizilerin ideal yakınsaklığını genel olarak metrik uzaylar üzerinde inceleyeceğiz.

Çift dizilerde çalışacağımız için, $\mathbb{N}$ üzerindeki $\mathcal{I}$ ideali ile karıştırılmaması amacıyla $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerindeki bir ideali $\mathcal{I}_2$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.5.1 (**Uygun ve Kuvvetli Uygun İdeal**, [**41**]). $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek $\mathcal{I}_2$ ideali, her bir $i, j \in \mathbb{N}$ için

$$\{i, j\} \in \mathcal{I}_2$$

oluyorsa uygun ideal,

$$\{i\} \times \mathbb{N} \in \mathcal{I}_2 \text{ ve } \mathbb{N} \times \{i\} \in \mathcal{I}_2$$

oluyorsa kuvvetli uygun ideal denir. Bir kuvvetli uygun ideal uygun idealdir.

Biz bu çalışmamızda $\mathcal{I}_2$ idealini kuvvetli uygun ideal olarak gözönüne alacağız. $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde,

$$\mathcal{I}_2^0 = \{A \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (\exists m(A) \in \mathbb{N})(i, j \geq m(A) \Rightarrow (i, j) \notin A)\}$$

idealini alalım. $\mathcal{I}_2^0$ bir kuvvetli uygun idealdir.

Bir $\mathcal{I}_2$ idealinin kuvvetli uygun ideal olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{I}_2^0 \subset \mathcal{I}_2$ kapsamasının geçerli bulunmasıdır [**41**].

Tanım 2.5.2 ($\mathcal{I}_2$- **Yakınsaklık**, [**41**]). (X, ρ) bir metrik uzay, $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ve $x = (x_{mn})_{m,n\in\mathbb{N}}$, X uzayında bir çift dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, L) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

önermesi sağlanıyorsa $x = (x_{mn})$ çift dizisi $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}_2$-yakınsaktır denir ve

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$$

ile gösterilir.

Eğer, $\mathcal{I}_2$ ideali $\mathcal{I}_2^0$ alınırsa, açık olarak ideal yakınsaklık Pringsheim anlamında adi yakınsaklık ile,

$$\mathcal{I}_2^{\delta_2} = \{A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \delta_2(A) = 0\}$$

alınırsa, $\mathcal{I}_2^{\delta_2}$-yakınsaklık istatistiksel yakınsaklık ile çakışır.

Tanım 2.5.3 ($\mathcal{I}_2^*$**- Yakınsaklık**, [**41**]). (X, ρ) bir metrik uzay, $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir gerçek ideal ve $x = (x_{mn})$, X uzayında bir çift dizi olsun. Bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ (yani $H = \mathbb{N} \times \mathbb{N}/M \in \mathcal{I}_2$) için

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in M}} x_{mn} = L$$

oluyorsa, $x = (x_{mn})$ dizisi $L \in X$ noktasına $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaktır denir ve

$$\mathcal{I}_2^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$$

ile gösterilir.

Teorem 2.5.1. [**41**, Teorem 1] $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *bir kuvvetli uygun ideal ve* (X, ρ) *bir metrik uzay olsun. Eğer,* X *uzayında bir* $x = (x_{mn})$ *çift dizisi için*

$$\mathcal{I}_2^* - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L \textit{ ise o zaman } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$$

dir.

Teorem 2.5.2. [**41**, Teorem 6] $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *bir kuvvetli uygun ideal ve* (X, ρ) *bir metrik uzay olsun.* X *uzayında bir* $x = (x_{mn})$ *çift dizisini alalım.*

(a) *Eğer,* $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ *ise o zaman* $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ *dir.*

(b) *Eğer,* $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ *ve* $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = K$ *ise o zaman,*

  (i) $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty}(x_{mn} + y_{mn}) = (L + K)$ *ve*

  (ii) $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty}(x_{mn} y_{mn}) = LK$

eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 2.5.4 (**(AP2) Şartı**, [**41**]). $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir uygun ideal olsun. $\mathcal{I}_2$ idealine ait karşılıklı ayrık ve sayılabilir her $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ cümleler ailesi için,

$$A_n \triangle B_n \in \mathcal{I}_2^0 \ \ (n \in \mathbb{N})$$

(yani her bir $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \triangle B_n$ cümlesi, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinde satır ve sütunların sonlu bir birleşimi tarafından kapsanır) ve

$$B = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathcal{I}_2$$

şartlarını sağlayan sayılabilir $\{B_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ cümleler ailesi varsa, $\mathcal{I}_2$ ideali (AP2) şartını sağlar denir.

TEOREM 2.5.3. [**41**, Teorem 3] *Eğer, $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ (AP2) şartını sağlayan bir uygun ideal ve (X, ρ) bir metrik uzay ise o zaman X uzayının bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi için*

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n \to \infty} x_{mn} = L \textit{ ise } \mathcal{I}_2^* - \lim_{m,n \to \infty} x_{mn} = L$$

önermesi geçerlidir.

$\mathcal{I}_2$-yakınsak olan bir çift dizi sınırlı olmak zorunda değildir. Örneğin, $\mathcal{I}_2$ idealini $\mathcal{I}_2^0$ ideali olarak alalım. $x = (x_{mn})$ çift dizisini,

$$x_{mn} = \begin{cases} m & , \quad n = 1 \\ 1 & , \quad n \neq 1 \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak, açık olarak $x = (x_{mn})$ dizisi sınırsız, fakat

$$\mathcal{I}_2^0 - \lim_{m,n \to \infty} x_{mn} = 1$$

dir.

TANIM 2.5.5 ($\mathcal{I}_2$-**Sınırlılık**, [**42**]). Bir reel veya kompleks $x = (x_{mn})$ çift dizisi, bir reel $M > 0$ sayısı için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{mn}| > M\} \in \mathcal{I}_2$$

önermesini sağlıyorsa, $\mathcal{I}_2$-sınırlıdır denir.

UYARI 2.5.1 ([**43**]). $\mathcal{I}_2$-yakınsak olan her çift dizi $\mathcal{I}_2$-sınırlıdır.

TANIM 2.5.6 ($\mathcal{I}_2$-**Cauchy**, [**45**]). $x = (x_{mn})$ bir çift dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |x_{mn} - x_{st}| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

olacak şekilde $s = s(\varepsilon)$, $t = t(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayıları varsa, $x = (x_{mn})$ çift dizisine $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizi denir.

Tanım 2.5.7 (**Regüler İdeal Yakınsaklık**, [**45**]). $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ ve $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ birer gerçek ideal olsun. Bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi, eğer l noktasına $\mathcal{I}_2$-yakınsak ve her $\varepsilon > 0$ için,

i) Herbir $n \in \mathbb{N}$ ve bazı $L_n \in \mathbb{C}$ için $\{m \in \mathbb{N} : |x_{mn} - L_n| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$ ve

ii) Herbir $m \in \mathbb{N}$ ve bazı $K_m \in \mathbb{C}$ için $\{n \in \mathbb{N} : |x_{mn} - K_m| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}$

şartları sağlanıyor ise, o zaman $x = (x_{mn})$ dizisi regüler ideal yakınsaktır denir ve

$$r(\mathcal{I}_2, \mathcal{I}) - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = l$$

ile gösterilir.

Tanım 2.5.8 (**İdeal Limit Noktası**, [**42**]). $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir kuvvetli uygun ideal, (X, ρ) bir metrik uzay ve $x = (x_{mn})$, X uzayında bir çift dizi ve $L \in X$ olsun. Bir $M \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve $M \notin \mathcal{I}_2$ için

$$P - \lim_{\substack{i,j\to\infty \\ i,j\in M}} x_{i,j} = L$$

oluyorsa, L noktasına $x = (x_{mn})$ çift dizisinin bir $\mathcal{I}_2$-limit noktasıdır denir.

3. ÇİFT DİZİLERDE $\mathcal{I}_2$-YAKINSAKLIK VE $\mathcal{I}_2$-CAUCHY

Bu bölümde, çift dizilerde Pringsheim ve regüler anlamda $\mathcal{I}_2$, $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaklık ve Cauchy ile ilgili kavramlarla ilgileneceğiz. [**30**] numaralı çalışmada yapılan tartışmaları çift diziler bakımından ele alacağız.

3.1. İdeal Yakınsaklık

Bu kısımda, bir çift dizinin $\mathcal{I}_2$-yakınsaklığı ile ilgili ayrışma teoremini vereceğiz.

TEOREM 3.1.1. *(X, ρ) bir lineer metrik uzay, $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, (AP2) şartını sağlayan bir kuvvetli uygun ideal, $x = (x_{mn})$, X uzayında bir çift dizi ve $L \in X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:*

(i) $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$,

(ii) $x = y + z$ olacak şekilde

$$suppz = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : z_{mn} \neq \theta\} \in \mathcal{I}_2$$

ve

$$\lim_{m,n\to\infty} \rho(y_{mn}, L) = 0$$

şartlarını sağlayan $y = (y_{mn})$ ve $z = (z_{mn})$ dizileri X uzayında mevcuttur. Burada, θ, X uzayının sıfır vektörünü göstermektedir.

İSPAT. $(i) \Rightarrow (ii)$: $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ olsun. Bu durumda, $\mathcal{I}_2$ ideali (AP2) şartını sağlayan bir kuvvetli uygun ideal olduğundan, Teorem 2.5.3 gereği bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ (yani, $H = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash M \in \mathcal{I}_2$) için,

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in M}} \rho(x_{mn}, L) = 0$$

olur.

Her $m, n \in \mathbb{N}$ için,

$$y_{mn} = \begin{cases} x_{mn} & , \quad (m, n) \in M \\ L & , \quad (m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash M. \end{cases} \tag{3.1.1}$$

ve

$$z_{mn} = x_{mn} - y_{mn}, \quad m, n \in \mathbb{N}. \tag{3.1.2}$$

olmak üzere, $y = (y_{mn})$ ve $z = (z_{mn})$ dizilerini tanımlayalım. Bu durumda, (3.1.1) eşitliğinden,

$$\lim_{m,n\to\infty} \rho(y_{mn}, L) = 0$$

ve

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : x_{mn} \neq y_{mn}\} \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash M \in \mathcal{I}_2$$

olduğundan, (3.1.2) eşitliği gereği,

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : z_{mn} \neq \theta\} \in \mathcal{I}_2$$

önermesi sağlanır. Yine (3.1.2) eşitliğinden,

$$x = y + z$$

elde edilir. Bu da istenendir.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $x = y + z$ olacak şekilde,

$$suppz = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : z_{mn} \neq \theta\} \in \mathcal{I}_2$$

ve

$$\lim_{m,n \to \infty} \rho(y_{mn}, L) = 0$$

şartlarını sağlayan $y = (y_{mn})$ ve $z = (z_{mn})$ dizileri X uzayında mevcut olsun.

$\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ çarpımının bir M alt cümlesini,

$$M = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : z_{mn} = \theta\}$$

olarak tanımlayalım.

$$supp \text{ z } = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : z_{mn} \neq \theta\} \in \mathcal{I}_2$$

olduğundan, $M \in F(\mathcal{I}_2)$ ve $(m,n) \in M$ için $x_{mn} = y_{mn}$ olup,

$$\lim_{\substack{m,n \to \infty \\ (m,n) \in M}} \rho(x_{mn}, L) = 0$$

bulunur ki, bu ise

$$\mathcal{I}^*{}_2 - \lim_{m,n \to \infty} x_{mn} = L$$

olduğunu gösterir. Teorem 2.5.1 gereği,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n \to \infty} x_{mn} = L$$

elde edilir. Bu da, ispatı tamamlar. □

Sonuç 3.1.1. $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N} \times \mathbb{N}}$ *bir kuvvetli uygun ideal ve* (X, ρ) *bir metrik uzay olsun.* X *uzayında bir* $x = (x_{mn})$ *çift dizisini ve* $L \in X$ *alalım.*

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n \to \infty} x_{mn} = L$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{m,n \to \infty} \rho(y_{mn}, L) = 0 \text{ ve } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n \to \infty} z_{mn} = \theta$$

olmak üzere,

$$x_{mn} = y_{mn} + z_{mn} \tag{3.1.3}$$

eşitliğini sağlayan, $y = (y_{mn})$, $z = (z_{mn})$ çift dizilerinin X uzayında bulunmasıdır.

İSPAT. $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$ olduğunu kabul edelim. $z = (z_{mn})$ dizisi (3.1.2) eşitliği ve $y = (y_{mn})$ dizisi (3.1.1) eşitliği ile tanımlansın. O zaman,

$$\lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = L$$

ve dolayısıyla da $\mathcal{I}_2$ bir kuvvetli uygun ideal olduğundan,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = L$$

olduğu açık olarak görülür. Teorem 2.5.2 gereği ve (3.1.2) eşitliğinden

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} z_{mn} = \theta$$

elde edilir.

Tersine,

$$\lim_{mn\to\infty} \rho(y_{mn}, L) = 0 \text{ ve } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} z_{mn} = \theta$$

olmak üzere, (3.1.3) eşitliğini alalım. $\mathcal{I}_2$ bir kuvvetli uygun ideal olduğundan,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = L$$

olup, Teorem 2.5.2 gereği ve (3.1.3) eşitliğinden,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$$

bulunur. □

UYARI 3.1.1. Teorem 3.1.1' in ispatında, eğer (ii) sağlanırsa , o zaman $\mathcal{I}_2$ idealinin (AP2) özelliğini sağlamasına ihtiyaç duyulmaz. Gerçekten de; $\mathcal{I}_2$, (AP2) özelliğine sahip olmayan bir kuvvetli uygun ideal olmak üzere,

$$x_{mn} = y_{mn} + z_{mn}\ ,\ \lim_{m,n\to\infty} \rho(y_{mn}, L) = 0 \text{ ve } supp\ \mathrm{z}\ \in \mathcal{I}_2 \tag{3.1.4}$$

olsun. $\mathcal{I}_2$ bir kuvvetli uygun ideal olduğundan,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = L$$

ve $\forall\varepsilon > 0$ için,

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \rho(z_{mn}, 0) \geq \varepsilon\} \subset \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : z_{mn} \neq \theta\} \in \mathcal{I}_2$$

olduğundan,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} z_{mn} = \theta$$

olup, (3.1.4) eşitliğinden,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = L$$

elde edilir.

3.2. İdeal Cauchy

Bu kısımda, $\mathcal{I}_2$-Cauchy ve $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizi kavramlarını inceleyeceğiz.

Tanım 3.2.1. (X,ρ) bir lineer metrik uzay ve $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ kuvvetli uygun ideal olsun. X uzayında bir $x = (x_{mn})$ çift dizisini alalım. Her $\varepsilon > 0$ sayısı için $(m,n),(s,t) \in M$ ve $m,n,s,t > k_0 = k_0(\varepsilon)$ olduğunda,

$$\rho(x_{mn}, x_{st}) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ (yani $H = \mathbb{N}\times\mathbb{N}\backslash M \in \mathcal{I}_2$) cümlesi ve $k_0 = k_0(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa, $x = (x_{mn})$ çift dizisi X uzayında $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizisidir denir.

Teorem 3.2.1. *(X,ρ) bir lineer metrik uzay ve $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir kuvvetli uygun ideal olsun. Eğer, X uzayında bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizi ise $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisidir.*

İspat. $x = (x_{mn})$ çift dizisi $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizi olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ ve $(m,n),(s,t) \in M$ için $m,n,s,t > k_0 = k_0(\varepsilon)$ olduğunda,

$$\rho(x_{mn}, x_{st}) < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayan bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ (yani $H = \mathbb{N}\times\mathbb{N}\backslash M \in \mathcal{I}_2$) cümlesi vardır. Buradan,

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : \rho(x_{mn}, x_{st}) \geq \varepsilon\} \\ &\subset H \cup \left[M \cap \left((\{1,2,3,...,(k_0-1)\} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \{1,2,3,...,(k_0-1)\})\right)\right] \end{aligned}$$

elde edilir. $\mathcal{I}_2$ bir kuvvetli uygun ideal olduğundan,

$$H \cup \left[M \cap \left((\{1,2,3,...,(k_0-1)\} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \{1,2,3,...,(k_0-1)\})\right)\right] \in \mathcal{I}_2$$

olup, idealin tanımından $A(\varepsilon) \in \mathcal{I}_2$ olduğu görülür. Bu da, $x = (x_{mn})$ çift dizisinin $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizi olması demektir. □

Teorem 3.2.2. *(X,ρ) bir lineer metrik uzay ve $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ bir kuvvetli uygun ideal olsun. X uzayında bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi $\mathcal{I}_2$-yakınsak ise $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisidir.*

İSPAT. $x=(x_{mn})$ çift dizisi L noktasına $\mathcal{I}_2$-yakınsak olsun. Bu durumda $\varepsilon>0$ için

$$A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\rho(x_{mn},L)\geq\frac{\varepsilon}{2}\right\}\in\mathcal{I}_2$$

olur. $\mathcal{I}_2$ bir kuvvetli uygun ideal olduğundan,

$$A^c\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)=\left\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\rho(x_{mn},L)<\frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

cümlesi boştan farklıdır ve $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ sınıfına aittir. $A(\frac{\varepsilon}{2})$ cümlesine ait olmayan pozitif k,l sayıları için,

$$\rho(x_{kl},L)<\frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Şimdi,

$$B(\varepsilon)=\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}:\rho(x_{mn},x_{kl})\geq\varepsilon\}$$

cümlesini tanımlayarak,

$$B(\varepsilon)\subset A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

olduğunu ispatlayalım.

$(m,n)\in B(\varepsilon)$ alalım. Bu durumda $(k,l)\notin A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ için

$$\begin{aligned}\varepsilon\leq\rho(x_{mn},x_{kl}) &\leq \rho(x_{mn},L)+\rho(x_{kl},L)\\ &< \rho(x_{mn},L)+\frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise,

$$\frac{\varepsilon}{2}<\rho(x_{mn},L)$$

ve dolayısıyla $(m,n)\in A(\frac{\varepsilon}{2})$ olduğunu gösterir. Buna göre,

$$B(\varepsilon)\subset A(\frac{\varepsilon}{2})$$

kapsaması geçerlidir.

$A(\frac{\varepsilon}{2})\in\mathcal{I}_2$ olduğundan ve idealin tanımından $B(\varepsilon)\in\mathcal{I}_2$ olup, bu ise $x=(x_{mn})$ çift dizisinin $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizi olduğunu gösterir. □

TEOREM 3.2.3. *$\mathcal{I}_2\subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, (AP2) şartını sağlayan bir kuvvetli uygun ideal, $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$, $\mathcal{I}_2$ idealine karşılık gelen süzgeç ve $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cümlesinin alt cümlelerinin bir sayılabilir ailesi olmak üzere, $\{P_i\}_{i=1}^{\infty}\in\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ olsun. O zaman tüm i' ler için $P\backslash P_i$ cümleleri sonlu adette satır ve sütunlardan oluşan ve $P\in\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ olan bir $P\subset\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cümlesi vardır.*

İSPAT. $A_1=\mathbb{N}\times\mathbb{N}\backslash P_1$ ve $A_m=(\mathbb{N}\times\mathbb{N}\backslash P_m)\backslash(A_1\cup A_2\cup...\cup A_{m-1})$, $(m=2,3,...)$ alalım. Her i için $A_i\in\mathcal{I}_2$ ve $i\neq j$ için $A_i\cap A_j=\emptyset$ olduğu açıktır. (AP2) şartından, $A_j\triangle B_j\in\mathcal{I}_2^0$, yani her bir $j\in\mathbb{N}$ için $A_j\triangle B_j$ cümlesi, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cümlesinde satır ve sütunların sonlu bir birleşimi tarafından kapsanan ve $B=\bigcup_{j=1}^{\infty}B_j\in\mathcal{I}_2$ olan sayılabilir bir $\{B_1,B_2,...\}$ cümleler ailesi vardır. Eğer, $P=\mathbb{N}\times\mathbb{N}\backslash B$ alınırsa o zaman $P\in\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ olur.

Şimdi de her bir i için $P\backslash P_i$ cümlelerinin sonlu adette satır ve sütunlardan oluştuğunu gösterelim. Bir $j_0 \in \mathbb{N}$ için $P\backslash P_{j_0}$ cümlesinin sonlu adette satır ve sütunlardan ibaret olmadığını kabul edelim. $A_j \triangle B_j$, $(j = 1, 2, 3, ..., j_0)$ satır ve sütunların sonlu bir birleşimi tarafından kapsandığından,

$$C_{m_0 n_0} = \{(m,n) : m \geq m_0 \wedge n \geq n_0\}$$

olmak üzere,

$$\left(\bigcup_{j=1}^{j_0} B_j\right) \cap C_{m_0 n_0} = \left(\bigcup_{j=1}^{j_0} A_j\right) \cap C_{m_0 n_0} \tag{3.2.1}$$

eşitliğini sağlayan $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ sayıları vardır. Eğer, $m \geq m_0 \wedge n \geq n_0$ ve $(m,n) \notin B$ ise o zaman,

$$(m,n) \notin \bigcup_{j=1}^{j_0} B_j$$

ve (3.2.1) eşitliğinden

$$(m,n) \notin \bigcup_{j=1}^{j_0} A_j$$

olur. $A_{j_0} = (\mathbb{N} \times \mathbb{N}\backslash P_{j_0})\backslash \bigcup_{j=1}^{j_0-1} A_j$ ve $(m,n) \notin A_{j_0}$, $(m,n) \notin \bigcup_{j=1}^{j_0-1} A_j$ olduğundan, $m \geq m_0, n \geq n_0$ için $(m,n) \in P_{j_0}$ bulunur. Böylece, tüm $m \geq m_0, n \geq n_0$ için $(m,n) \in P$ ve $(m,n) \in P_{j_0}$ elde edilir. Bu ise, $P\backslash P_{j_0}$ cümlesinin sonlu satır ve sütundan oluştuğunu gösterir ki, bu da kabulümüzle çelişir. □

TEOREM 3.2.4. *(X, ρ) bir lineer metrik uzay olsun. $\mathcal{I}_2 \subset 2^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$, (AP2) şartına sahip bir kuvvetli uygun ideal ise $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizi ile $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizi kavramları çakışır.*

İSPAT. (AP2) şartına ihtiyaç duymadan Teorem 3.2.1 gereği bir çift dizi, $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizi ise $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizi olduğunu gösterdik.

Şimdi, X uzayındaki $\mathcal{I}_2$-Cauchy olan bir çift dizinin $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizi olduğunu gösterelim. $x = (x_{mn})$, $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizi olsun. Tanımdan, her $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, x_{st}) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

önermesini sağlayan $s = s(\varepsilon), t = t(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayıları vardır. $s_i = s(1\backslash i), t_i = t(1\backslash i)$ olmak üzere,

$$P_i = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, x_{s_i t_i}) < 1\backslash i\}, \ \ (i = 1, 2, ...)$$

alalım. $i = 1, 2, ...$ için $P_i \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ olduğu aşikardır. $\mathcal{I}_2$, (AP2) şartını sağlayan kuvvetli uygun ideal olduğundan, Teorem 3.2.3 gereğince her bir $i = 1, 2, ...$ için $P\backslash P_i$ cümleleri sonlu adette satır ve sütunlardan oluşan ve $P \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ olan bir $P \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesi vardır.

$\varepsilon > 0$ ve $j > \frac{2}{\varepsilon}$ olacak şekilde $j \in \mathbb{N}$ alalım. Eğer, $(m,n),(s,t) \in P$ ise o zaman, $P \backslash P_i$ sonlu satır ve sütundan ibaret olan bir cümle olduğundan, $m,n,s,t > k(j)$ iken $(m,n),(s,t) \in P_j$ olacak şekilde $k = k(j)$ sayısı vardır. Bu durumda, tüm $m,n,s,t > k(j)$ için,

$$\rho(x_{mn}, x_{s_j t_j}) < \frac{1}{j} \text{ ve } \rho(x_{st}, x_{s_j t_j}) < \frac{1}{j}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Böylece, $m,n,s,t > k(j)$ için,

$$\begin{aligned} \rho(x_{mn}, x_{st}) &\leq \rho(x_{mn}, x_{s_j t_j}) + \rho(x_{st}, x_{s_j t_j}) \\ &< \frac{1}{j} + \frac{1}{j} = \frac{2}{j} < \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan, her $\varepsilon > 0$ için $(m,n),(s,t) \in P$ ve $m,n,s,t > k(\varepsilon)$ olduğunda

$$\rho(x_{mn}, x_{st}) < \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $k = k(\varepsilon)$ sayısı mevcuttur. Bu ise $x = (x_{mn}) \in X$ dizisinin $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizisi olduğunu gösterir. □

3.3. Regüler Anlamda İdeal Yakınsaklık ve İdeal Cauchy

Bu kısımda, çift dizilerde $r(\mathcal{I}_2^*, \mathcal{I}^*)$-yakınsaklık, $r(\mathcal{I}_2, \mathcal{I})$-Cauchy dizi ve $r(\mathcal{I}_2^*, \mathcal{I}^*)$-Cauchy dizi tanımları ve ilgili teoremler verilecektir.

Tanım 3.3.1. $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinde ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ cümlesinde birer gerçek ideal ve (X, ρ) bir lineer metrik uzay olsun. X uzayında bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi için

$$\lim_{\substack{m,n \to \infty \\ (m,n) \in M}} x_{mn},$$

her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ m \in M_1}} x_{mn}$$

ve her bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in M_2}} x_{mn}$$

limitleri mevcut olacak şekilde $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ ve M_1, $M_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ cümleleri varsa, $x = (x_{mn})$ çift dizisi $r(\mathcal{I}_2^*, \mathcal{I}^*)$-yakınsaktır (regüler anlamda $\mathcal{I}_2^*$-yakınsak) denir.

Teorem 3.3.1. *(X, ρ) bir lineer metrik uzay ve $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinde kuvvetli uygun ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ cümlesinde uygun ideal olsun. X uzayında bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi $r(\mathcal{I}_2^*, \mathcal{I}^*)$-yakınsak ise $r(\mathcal{I}_2, \mathcal{I})$-yakınsaktır.*

İspat. X uzayında bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi L noktasına $r(\mathcal{I}_2^*, \mathcal{I}^*)$-yakınsak olsun. Bu durumda, $x = (x_{mn})$ çift dizisi L noktasına $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaktır. Teorem 2.5.1 gereği $x = (x_{mn})$ çift dizisi $\mathcal{I}_2$-yakınsaktır.

$x = (x_{mn})$ çift dizisi $r(\mathcal{I}_2^*, \mathcal{I}^*)$-yakınsak olduğundan, her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{\substack{m\to\infty \\ m\in M_1}} x_{mn}$$

ve her bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ n\in M_2}} x_{mn}$$

limitleri mevcut olacak şekilde $M_1, M_2 \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ cümleleri vardır. Bu durumda, $\varepsilon > 0$ için $m \in M_1$ olduğunda, her $m \geq m_0$ için $\rho(x_{mn}, L_n) < \varepsilon$, $(n \in \mathbb{N})$ ve $n \in M_2$ olduğunda, $n \geq n_0$ için $\rho(x_{mn}, K_m) < \varepsilon$, $(m \in \mathbb{N})$ olacak şekilde $m_0, n_0 \in \mathbb{N}$ ve L_n, $K_m \in X$ elemanları vardır. Buradan, $H_1 = \mathbb{N} \setminus M_1, H_2 = \mathbb{N} \setminus M_2 \in \mathcal{I}$ için,

$$A_1(\varepsilon) = \{m \in \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, L_n) \geq \varepsilon\} \subset H_1 \cup \{1, 2, ..., (m_0 - 1)\},\ \ (n \in \mathbb{N})$$

ve

$$A_2(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, K_m) \geq \varepsilon\} \subset H_2 \cup \{1, 2, ..., (n_0 - 1)\},\ \ (m \in \mathbb{N})$$

kapsamaları geçerlidir. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olduğundan,

$$H_1 \cup \{1, 2, ..., (m_0 - 1)\} \in \mathcal{I} \text{ ve } H_2 \cup \{1, 2, ..., (n_0 - 1)\} \in \mathcal{I}$$

ve dolayısıyla,

$$A_1(\varepsilon) \in \mathcal{I} \text{ ve } A_2(\varepsilon) \in \mathcal{I}$$

elde edilir ki, bu da ispatı tamamlar. □

Tanım 3.3.2. (X, ρ) bir lineer metrik uzay ve $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinde ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ cümlesinde birer gerçek ideal olsun. X uzayında bir $x = (x_{mn})$ çift dizisini alalım. Eğer, $x = (x_{mn})$ dizisi $\mathcal{I}_2$-Cauchy ve her $\varepsilon > 0$ için,

$$A_1(\varepsilon) = \{m \in \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, x_{k_n n}) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I},\ \ (n \in \mathbb{N})$$

ve

$$A_2(\varepsilon) = \{n \in \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, x_{ml_m}) \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I},\ \ (m \in \mathbb{N})$$

önermelerini sağlayan $k_n = k_n(\varepsilon)$, $l_m = l_m(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayıları varsa, $x = (x_{mn})$ çift dizisine $r(\mathcal{I}_2, \mathcal{I})$-Cauchy (regüler anlamda $\mathcal{I}_2$-Cauchy) dizi denir.

TANIM 3.3.3. (X,ρ) bir lineer metrik uzay ve $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cümlesinde ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ cümlesinde birer gerçek ideal olsun. X uzayında bir $x=(x_{mn})$ çift dizisini alalım. Her $\varepsilon>0$ için $(m,n),(s,t)\in M$ ve $m,n,s,t>N=N(\varepsilon)$ olduğunda,

$$\rho(x_{mn},x_{st})<\varepsilon,$$

$m\in M_1$ olan m sayıları için

$$\rho(x_{mn},x_{k_n n})<\varepsilon,\ (n\in\mathbb{N})$$

ve $n\in M_2$ olan n sayıları için

$$\rho(x_{mn},x_{ml_m})<\varepsilon,\ (m\in\mathbb{N})$$

eşitsizliklerini sağlayan $M\in\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ ve $M_1,M_2\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ cümleleri mevcut ve $s=s(\varepsilon)$, $t=t(\varepsilon)$, $k_n=k_n(\varepsilon)$, $l_m=l_m(\varepsilon)$ ve $N(\varepsilon)$ sayıları varsa, $x=(x_{mn})$ çift dizisine $r(\mathcal{I}_2^*,\mathcal{I}^*)$-Cauchy (regüler anlamda $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy) dizi denir.

TEOREM 3.3.2. *(X,ρ) bir lineer metrik uzay ve $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cümlesinde kuvvetli uygun ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ cümlesinde uygun ideal olsun. X uzayında bir $x=(x_{mn})$ çift dizisi $r(\mathcal{I}_2^*,\mathcal{I}^*)$-Cauchy dizi ise $r(\mathcal{I}_2,\mathcal{I})$-Cauchy dizisidir.*

İSPAT. $x=(x_{mn})$ çift dizisi $r(\mathcal{I}_2^*,\mathcal{I}^*)$-Cauchy dizi olsun. Bu durumda, $x=(x_{mn})$ çift dizisi $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizisidir. Teorem 3.2.1 gereği $x=(x_{mn})$ çift dizisinin $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizi olduğunu gösterdik.

$x=(x_{mn})$ çift dizisi $r(\mathcal{I}_2^*,\mathcal{I}^*)$-Cauchy dizi olduğundan $\varepsilon>0$ için $m\in M_1$, $n\in M_2$ ve $m,n>N=N(\varepsilon)$ olduğunda,

$$\rho(x_{mn},x_{k_n n})<\varepsilon,\ (n\in\mathbb{N})$$

ve

$$\rho(x_{mn},x_{ml_m})<\varepsilon,\ (m\in\mathbb{N})$$

eşitsizliklerini sağlayan $M_1,M_2\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ cümleleri mevcut ve $k_n=k_n(\varepsilon)$, $l_m=l_m(\varepsilon)$, $N(\varepsilon)$ sayıları vardır.

Buradan, $H_1=\mathbb{N}\setminus M_1, H_2=\mathbb{N}\setminus M_2\in\mathcal{I}$ için,

$$A_1(\varepsilon)=\{m\in\mathbb{N}:\rho(x_{mn},x_{k_n n})\geq\varepsilon\}\subset H_1\cup\{1,2,...,(N-1)\},\ (n\in\mathbb{N})$$

ve

$$A_2(\varepsilon)=\{n\in\mathbb{N}:\rho(x_{mn},x_{ml_m})\geq\varepsilon\}\subset H_2\cup\{1,2,...,(N-1)\},\ (m\in\mathbb{N})$$

kapsamaları geçerlidir. $\mathcal{I}$ bir uygun ideal olduğundan,

$$H_1\cup\{1,2,...,(N-1)\}\in\mathcal{I} \text{ ve } H_2\cup\{1,2,...,(N-1)\}\in\mathcal{I}$$

ve dolayısıyla

$$A_1(\varepsilon) \in \mathcal{I} \text{ ve } A_2(\varepsilon) \in \mathcal{I}$$

elde edilir ki, bu da $x = (x_{mn})$ çift dizisinin $r(\mathcal{I}_2, \mathcal{I})$-Cauchy dizi olduğunu gösterir.

□

TEOREM 3.3.3. *(X, ρ) bir lineer metrik uzay ve $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinde kuvvetli uygun ve $\mathcal{I}$, $\mathbb{N}$ cümlesinde uygun ideal olsun. X uzayında bir $x = (x_{mn})$ çift dizisi $r(\mathcal{I}_2, \mathcal{I})$-yakınsak ise $r(\mathcal{I}_2, \mathcal{I})$-Cauchy dizisidir.*

İSPAT. $x = (x_{mn})$ çift dizisi $r(\mathcal{I}_2, \mathcal{I})$-yakınsak olsun. Teorem 3.2.2 gereği $x = (x_{mn})$ çift dizisinin $\mathcal{I}_2$-yakınsak iken $\mathcal{I}_2$-Cauchy olduğunu gösterdik.

$x = (x_{mn})$ çift dizisi $r(\mathcal{I}_2, \mathcal{I})$-yakınsak olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için,

i) Herbir $n \in \mathbb{N}$ ve bazı $L_n \in X$ için

$$A_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{m \in \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, L_n) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in \mathcal{I},$$

ii) Herbir $m \in \mathbb{N}$ ve bazı $K_m \in X$ için

$$A_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{n \in \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, K_m) \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in \mathcal{I}$$

önermeleri geçerlidir. $\mathcal{I}$ uygun ideal olduğundan,

$$A_1^c\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{m \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, L_n) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \ \ (n \in \mathbb{N})$$

ve

$$A_2^c\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{n \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, K_m) < \frac{\varepsilon}{2}\right\}, \ \ (m \in \mathbb{N})$$

cümleleri boştan farklıdır ve $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ sınıfına aittir. $n \in \mathbb{N}$ için $A_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ cümlesine ait olmayan pozitif k_n sayısı için,

$$\rho(x_{k_n n}, L_n) < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad (n \in \mathbb{N})$$

olur. Şimdi $k_n = k_n(\varepsilon)$ olmak üzere, her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_1(\varepsilon) = \{m \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, x_{k_n n}) \geq \varepsilon\}$$

cümlesini tanımlayarak,

$$B_1(\varepsilon) \subset A_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

olduğunu ispatlayalım. $m \in B_1(\varepsilon)$ alalım. Bu durumda, $k_n \notin A_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ için

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq \rho(x_{mn}, x_{k_n n}) &\leq \rho(x_{mn}, L_n) + \rho(x_{k_n n}, L_n) \\ &< \rho(x_{mn}, L_n) + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise,

$$\frac{\varepsilon}{2} < \rho(x_{mn}, L_n)$$

ve dolayısıyla $m \in A_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ olduğunu gösterir. Buna göre,

$$B_1(\varepsilon) \subset A_1\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

kapsaması geçerlidir.

Benzer şekilde, $m \in \mathbb{N}$ için $A_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ cümlesine ait olmayan pozitif l_m sayısı için

$$\rho(x_{ml_m}, K_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad , \quad (m \in \mathbb{N})$$

elde edilir. Buradan, $l_m = l_m(\varepsilon)$ olmak üzere her bir $m \in \mathbb{N}$ için

$$B_2(\varepsilon) = \{m \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \rho(x_{mn}, x_{ml_m}) \geq \varepsilon\}$$

cümlesini tanımlayarak,

$$B_2(\varepsilon) \subset A_2\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

kapsamasının geçerli olduğu gösterilebilir. Bu ise ispatı tamamlar.

□

4. SINIRLI $\mathcal{I}_2$-YAKINSAK ÇİFT DİZİLERİN ÇARPAN UZAYLARI

Bu bölümde, tek dizilerdeki istatistiksel yakınsaklık ve $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile ilgili [**21**] ve [**31**] numaralı çalışmalarda yapılan tartışmaları çift dizilerde $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık bakımından ele alacağız.

$\mathbb{N}$ doğal sayıların bir A alt cümlesinin karakteristik fonksiyonu χ_A ile gösterilir. $(x_{mn}) = \chi_A(m,n)$ olmak üzere, χ_A ile (x_{mn}) dizisini tanımlayacağız. $c_0^2(b)$, $c^2(b)$ ve ℓ_∞^2 ile, sırasıyla, tüm sıfıra yakınsak ve sınırlı, yakınsak ve sınırlı ile sınırlı çift dizilerin cümlesini göstereceğiz. Ayrıca, $F_{\mathcal{I}_2}$, $F_{\mathcal{I}_2}(b)$ ve $F_{\mathcal{I}_2}^0(b)$ ile, sırasıyla, tüm $\mathcal{I}_2$-yakınsak, $\mathcal{I}_2$-yakınsak ve sınırlı ve sıfıra $\mathcal{I}_2$-yakınsak ve sınırlı çift dizilerin cümlesini göstereceğiz.

4.1. Çarpan Uzayları

Bu kısımda, iki çift dizi uzayları için çarpan dizi uzayları ile ilgileneceğiz.

Tanım 4.1.1. E ve F iki çift dizi uzayı olsun. Her $x = (x_{mn}) \in E$ için $ux = (u_{mn}x_{mn}) \in F$ şartını sağlayan $u = (u_{mn})$ dizisine E uzayından F uzayına bir çarpan dizisi denir.

Böyle tüm çarpanların lineer uzayını $m(E,F)$ ve tüm sınırlı çarpanları ise $M(E,F)$ ile tanımlayalım. Bu durumda, açık olarak

$$M(E,F) = \ell_\infty^2 \cap m(E,F)$$

eşitliği sağlanır. Eğer $E = F$ ise bu durumda, $m(E,F)$ ve $M(E,F)$ yerine, sırasıyla, $m(E)$ ve $M(E)$ cümlelerini alacağız. Burada biz, $F_{\mathcal{I}_2}(b)$ ve $F_{\mathcal{I}_2}^0(b)$ uzaylarını ihtiva eden çarpan uzaylarıyla ilgileneceğiz.

Teorem 4.1.1. *$c_0^2(b)$ uzayını kapsayan ve ℓ_∞^2 uzayının alt cümleleri olan E ve F çift dizi uzayları için,*

$$c_0^2(b) \subset m(E,F) \subset \ell_\infty^2$$

kapsamaları geçerlidir.

İspat. Önce ilk kapsamanın doğruluğunu gösterelim. $u \in c_0^2(b) \subset E$ ve $x \in \ell_\infty^2$ alırsak,

$$ux \in c_0^2(b) \subset F$$

elde edilir. Bu ise,

$$c_0^2(b) \subset m(E,F)$$

kapsamasının geçerli olduğunu gösterir.

Şimdi de ikinci kapsamanın geçerli olduğunu gösterelim. $u = (u_{mn}) \notin \ell^2_\infty$ olsun. Bu durumda,

$$|u_{m_i,n_j}| > (ij)^2$$

olacak şekilde $(m_i), (n_j)$ artan dizileri mevcuttur.

$$x_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{ij} & , \quad i = m_i, j = j_n \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases} \tag{4.1.1}$$

çift dizisini tanımlayalım. Bu durumda,

$$x \in c^2_0(b) \subset E$$

olup, $i = m_i, j = n_j$ için

$$|u_{ij}x_{ij}| > ij \tag{4.1.2}$$

olacağından

$$ux \notin \ell^2_\infty$$

bulunur. $F \subset \ell^2_\infty$ kapsaması geçerli olduğundan, $ux \notin F$ ve böylece,

$$u \notin m(E, F)$$

elde edilir. Bu ise,

$$m(E, F) \subset \ell^2_\infty$$

kapsamasının geçerli olduğunu gösterir. □

Teorem 4.1.2. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinde bir kuvvetli uygun ideal olsun. Bu durumda,*

(i) $m(F^0_{\mathcal{I}_2}(b)) = M(F^0_{\mathcal{I}_2}(b)) = \ell^2_\infty$ ve

(ii) $m(F_{\mathcal{I}_2}(b)) = F_{\mathcal{I}_2}(b)$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. (i) $m(F^0_{\mathcal{I}_2}(b)) = \ell^2_\infty$ olduğunu göstereceğiz. Teorem 4.1.1 gereği,

$$m(F^0_{\mathcal{I}_2}(b)) \subset \ell^2_\infty$$

olduğu açıktır.

$\ell^2_\infty \subset m(F^0_{\mathcal{I}_2}(b))$ kapsamanın geçerli olduğunu gösterelim. $u \in \ell^2_\infty$ ve $z \in F^0_{\mathcal{I}_2}(b)$ alalım. Bu durumda,

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |u_{mn}z_{mn}| \geq \varepsilon\} \subseteq \left\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |z_{mn}| \geq \frac{\varepsilon}{\|u\|_\infty + 1}\right\}$$

kapsaması geçerlidir. $z \in F^0_{\mathcal{I}_2}(b)$ olduğundan,

$$\left\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |z_{mn}| \geq \frac{\varepsilon}{\|u\|_\infty + 1}\right\} \in \mathcal{I}_2$$

olup, ideal özelliğinden

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |u_{mn} z_{mn}| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

elde edilir. $u, z \in \ell^2_\infty$ olduğundan uz çarpım dizisi sınırlıdır ve böylece

$$\ell^2_\infty \subset m(F^0_{\mathcal{I}_2}(b))$$

kapsaması geçerlidir.

(ii) Bütün terimleri 1 olan $e = (1)$ çift dizisi $F_{\mathcal{I}_2}(b)$ uzayının elemanıdır. $u \in m(F_{\mathcal{I}_2}(b))$ için $ue = u \in F_{\mathcal{I}_2}(b)$ olacağından

$$m(F_{\mathcal{I}_2}(b)) \subset F_{\mathcal{I}_2}(b)$$

kapsamasının geçerli olduğu görülür.

$u \in F_{\mathcal{I}_2}(b)$ ise o zaman her $x \in F_{\mathcal{I}_2}(b)$ için Teorem 2.5.2 gereği,

$$ux \in F_{\mathcal{I}_2}(b)$$

elde edilir. Bu ise $u \in m(F_{\mathcal{I}_2}(b))$ demektir. Böylece,

$$F_{\mathcal{I}_2}(b) \subset m(F_{\mathcal{I}_2}(b))$$

kapsamasının geçerli olduğu görülür. □

LEMMA 4.1.1.

$$\ell^2_\infty = m(c^2_0(b))$$

eşitliği geçerlidir.

İSPAT. $x \in c^2_0(b)$ ve $\theta \neq u \in \ell^2_\infty$ alalım. Bu durumda,

$$\|u\| = \sup_{m,n \in \mathbb{N}} |u_{mn}| < \infty,$$
$$\|x\| = \sup_{m,n \in \mathbb{N}} |x_{mn}| < \infty$$

ve her $\varepsilon > 0$ için $m, n > k_0$ olduğunda

$$|x_{mn}| < \frac{\varepsilon}{\|u\|}$$

eşitsizliği sağlayan bir $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır. $z = ux$ olsun.

$$\begin{aligned} \|z\| &= \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |z_{mn}| \\ &= \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |u_{mn}x_{mn}| \\ &\leq \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |u_{mn}| \sup_{m,n\in\mathbb{N}} |x_{mn}| \\ &< \infty \end{aligned}$$

olduğundan z sınırlı ve $m, n > k_0$ için

$$\begin{aligned} |u_{mn}x_{mn}| &= |u_{mn}||x_{mn}| \\ &< \|u\|\frac{\varepsilon}{\|u\|} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olacağından $z \in c_0^2(b)$ bulunur. Buradan,

$$\ell_\infty^2 \subset m(c_0^2(b))$$

kapsaması geçerlidir.

$u = (u_{mn}) \notin \ell_\infty^2$ olsun. Bu durumda,

$$|u_{m_i,n_j}| > (ij)^2$$

olacak şekilde $(m_i), (n_j)$ artan dizileri mevcuttur. $x = (x_{ij})$ çift dizisini (4.1.1) eşitliğinde olduğu gibi tanımlayalım. $x \in c_0^2(b)$ olup, (4.1.2) gereği,

$$ux \notin c_0^2(b)$$

bulunur. Böylece,

$$u \notin m(c_0^2(b))$$

elde edilir. Bu ise,

$$m(c_0^2(b)) \subset \ell_\infty^2$$

kapsamasının geçerli olduğunu gösterir. □

Teorem 4.1.3. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinde bir kuvvetli uygun ideal olsun. Bu durumda,*

$$c_0^2(b) \subset m(F_{\mathcal{I}_2}(b), c^2(b)) \subseteq c^2(b)$$

kapsamaları geçerlidir.

İspat. $u \in c_0^2(b)$ ve $x \in F_{\mathcal{I}_2}(b) \subset \ell_\infty^2$ için Lemma 4.1.1 gereği benzer tartışmalarla,

$$ux \in c_0^2(b) \subset c^2(b)$$

kapsaması geçerli olduğundan

$$c_0^2(b) \subset m(F_{\mathcal{I}_2}(b), c^2(b))$$

kapsaması elde edilir.

$e = (1) \in F_{\mathcal{I}_2}(b)$ olup, $u \in m(F_{\mathcal{I}_2}(b), c^2(b))$ için

$$ue = u \in c^2(b)$$

olacağından,

$$m(F_{\mathcal{I}_2}(b), c^2(b)) \subseteq c^2(b)$$

kapsaması geçerlidir. □

Teorem 4.1.4. $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ *cümlesinde bir kuvvetli uygun ideal olsun. Bu durumda,*

(i) $c^2(b)$, $F_{\mathcal{I}_2}(b)$ *uzayının bir öz alt cümlesi ise* $m(F_{\mathcal{I}_2}(b), c^2(b)) = c_0^2(b)$,

(ii) $m(c^2(b), F_{\mathcal{I}_2}(b)) = F_{\mathcal{I}_2}(b)$

önermeleri geçerlidir.

İspat. (i) Teorem 4.1.3 gereği,

$$c_0^2(b) \subset m(F_{\mathcal{I}_2}(b), c^2(b))$$

olduğunu biliyoruz. $u \in c^2(b) \backslash c_0^2(b)$ için,

$$u \notin m(F_{\mathcal{I}_2}(b), c^2(b))$$

olduğunu gösterelim. Bu durumda,

$$\lim_{m,n\to\infty} u_{mn} = l \neq 0$$

olacak şekilde l sayısı mevcuttur. $z \in F_{\mathcal{I}_2}(b) \setminus c^2(b)$ için

$$z \to_{\mathcal{I}_2} 1$$

olsun. Böylece, $\varepsilon > 0$ için

$$A = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |z_{mn} - 1| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

olur. $x = (x_{mn})$ dizisini,

$$x_{mn} = \chi_{A^c}(m,n)$$

olarak tanımlayalım. x dizisi sınırlı ve 1 noktasına $\mathcal{I}_2$-yakınsak olduğundan,

$$x \in F_{\mathcal{I}_2}(b)$$

elde edilir. Ayrıca, xu çarpım dizisi, A^c boyunca $\ell \neq 0$ noktasına ve A boyunca 0 naktasına yakınsak olduğundan, $xu \notin c^2(b)$ olup,

$$u \notin m(F_{\mathcal{I}_2}(b), c^2(b))$$

elde edilir. Buradan

$$m(F_{\mathcal{I}_2}(b), c^2(b)) \subset c_0^2(b)$$

kapsamasının geçerli olduğu görülür.

(ii) $e = (1) \in c^2(b)$ olduğundan, $u \in m(c^2(b), F_{\mathcal{I}_2}(b))$ için

$$ue = u \in F_{\mathcal{I}_2}(b)$$

olup,

$$m(c^2(b), F_{\mathcal{I}_2}(b)) \subseteq F_{\mathcal{I}_2}(b)$$

kapsaması geçerlidir.

$u \in F_{\mathcal{I}_2}(b)$ ve $x \in c^2(b) \subseteq F_{\mathcal{I}_2}(b)$ ise ux çarpım dizisi sınırlı ve Teorem 2.5.2 gereği $\mathcal{I}_2$-yakınsaktır. Bu ise,

$$F_{\mathcal{I}_2}(b) \subset m(c^2(b), F_{\mathcal{I}_2}(b))$$

kapsamasının geçerliliğini gösterir. □

TEOREM 4.1.5. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ 'de bir kuvvetli uygun ideal olsun. Bu durumda,*

$$m(c_0^2(b), F^0_{\mathcal{I}_2}(b)) = \ell^2_\infty$$

eşitliği geçerlidir.

İSPAT. Lemma 4.1.1 gereği,

$$\ell^2_\infty = m(c_0^2(b)) = \{u = (u_{mn}) : \text{ tüm } x = (x_{mn}) \in c_0^2(b) \text{ için } ux \in c_0^2(b)\}$$

ve $c_0^2(b) \subset F^0_{\mathcal{I}_2}(b)$ olduğundan, Teorem 4.1.1 gereği,

$$\ell^2_\infty = m(c_0^2(b)) \subseteq m(c_0^2(b), F^0_{\mathcal{I}_2}(b)) \subset \ell^2_\infty$$

elde edilir. Buradan,

$$m(c_0^2(b), F^0_{\mathcal{I}_2}(b)) = \ell^2_\infty$$

eşitliğinin geçerli olduğu görülür. □

TEOREM 4.1.6. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinde (AP2) şartını sağlayan bir kuvvetli uygun ideal olsun. Bu durumda,*

$$m(F^0_{\mathcal{I}_2}(b), c_0^2(b)) = \{u \in \ell^2_\infty : E \in \mathcal{I}_2 \textit{ olan tüm } E'\textit{ler için } u\chi_E \in c_0^2(b)\}$$

eşitliği sağlanır.

İSPAT. Kolaylık olması bakımından,

$$D = \{u \in \ell_\infty^2 : E \in \mathcal{I}_2 \text{ olan } \text{ tüm } E'ler \text{ için } u\chi_E \in c_0^2(b)\}$$

olarak alalım. $E \in \mathcal{I}_2$ ise o zaman $\chi_E \in F_{\mathcal{I}_2}^0(b)$ ve $u \in m(F_{\mathcal{I}_2}^0(b), c_0^2(b))$ ise $u\chi_E \in c_0^2(b)$ veya u, E boyunca 0 noktasına gider. Bu durumda,

$$m(F_{\mathcal{I}_2}^0(b), c_0^2(b)) \subseteq D$$

elde edilir.

Şimdi, sınırlı ve 0 noktasına $\mathcal{I}_2$-yakınsak olan $u = (u_{mn})$ çift dizisi ile sınırlı ve 0 noktasına $\mathcal{I}_2^*$-yakınsak olan $x = (x_{mn})$ çift dizisini alalım. Bu durumda, (AP2) şartından

$$x\chi_{A^c} \in c_0^2(b) \text{ ve } A \in \mathcal{I}_2$$

önermelerini sağlayan bir $A \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ vardır. Buradan, (AP2) şartından

$$ux = ux\chi_{A^c} + ux\chi_A$$

ve sağ taraftaki her terim sıfır(0) dizisi olduğundan $ux \in c_0^2(b)$ elde edilir.

Şimdi de, $x \in F_{\mathcal{I}_2}^0(b)$ alalım. Bu durumda, (AP2) şartından 0 noktasına $\mathcal{I}_2^*$-yakınsak olan ve ℓ_∞^2 uzayında x noktasına yakınsayan bir (x^{kl}) dizisi vardır. ℓ_∞^2 uzayında

$$ux^{kl} \to ux$$

ve tüm k, l' ler için $ux^{kl} \in c_0^2(b)$ ve $c_0^2(b)$ kapalı olduğundan

$$ux \in c_0^2(b)$$

olur. Böylece,

$$D \subseteq m(F_{\mathcal{I}_2}^0(b), c_0^2(b))$$

elde edilir. Bu da ispatı tamamlar. □

5. FONKSİYONLARIN ÇİFT DİZİLERİNİN İDEAL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, fonksiyonların çift dizilerinin $\mathcal{I}_2$-yakınsaklığını inceleyeceğiz. [**23**] ve [**32**] numaralı çalışmalarda, fonksiyon dizilerinin (tek dizilerde) ideal yakınsaklıkları noktasal ve düzgün olarak ele alındı. Tek fonksiyon dizilerinde olduğu gibi elemanları reel değerli fonksiyonlar olan çift diziler üzerinde çalışma yapacağız.

5.1. Fonksiyonların Çift Dizilerinin $\mathcal{I}_2$-Yakınsaklığı

Bu kısımda, fonksiyonların çift dizileri için ideal yakınsaklık tanımlarını ve elde ettiğimiz teoremleri ispatlarıyla vereceğiz.

Önce, fonksiyonların çift dizilerinin düzgün ideal yakınsaklığında kullanılacak olan ve [**9**] numaralı çalışmada ifade edilen teoremi yeniden ispat edeceğiz.

Teorem 5.1.1. *f ve f_{mn} , $m, n = 1, 2, ...,$ $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlar olsun. O zaman, $D = [a, b]$ üzerindeki fonksiyonların bir $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin $D = [a, b]$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart*

$$c_{mn} = \underset{x \in D}{maks} |f_{mn}(x) - f(x)|$$

olmak üzere,

$$\lim_{m,n \to \infty} c_{mn} = 0$$

bulunmasıdır.

İspat. $D = [a, b]$ üzerindeki fonksiyonların bir$\{f_{mn}\}$ çift dizisinin $D = [a, b]$ üzerinde f fonksiyonuna düzgün olarak yakınsak olduğunu kabul edelim. f ve f_{mn}, $D = [a, b]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar olduğundan, her $x \in D$ için

$$|f_{mn}(x) - f(x)|$$

fonksiyonu her $m, n \in \mathbb{N}$ için $D = [a, b]$ üzerinde sürekli olup ve yakınsaklık düzgün olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için $m, n > k_0$ olduğunda tüm $x \in D$ için

$$|f_{mn}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $k = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı mevcuttur. Buradan, her $m, n > k_0$ olduğunda tüm $x \in D = [a, b]$ için

$$c_{mn} = \underset{x \in D}{\text{maks}} |f_{mn}(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

elde edilir. Bu ise,

$$\lim_{m,n\to\infty} c_{mn} = 0$$

olduğunu gösterir.

Tersine

$$\lim_{m,n} c_{mn} = 0$$

olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için $m, n > k_0$ olduğunda tüm $x \in D$ için

$$0 \leq c_{mn} = \operatorname*{maks}_{x\in D} |f_{mn}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde $k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Böylece $m, n > k_0$ olduğunda tüm $x \in D$ için $|f_{mn}(x) - f(x)| < \varepsilon$ olup,

$$\lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x) = f(x)$$

yakınsaklığı düzgündür. □

Tanım 5.1.1. $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cümlesinde kuvvetli uygun ideal olsun. $S \subset \mathbb{R}$ cümlesi üzerindeki fonksiyonların bir $\{f_{mn}\}$ çift dizisi, her $\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in S$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

önermesini sağlıyorsa, S üzerinde f fonksiyonuna noktasal $\mathcal{I}_2$-yakınsaktır denir. Bu,

$$(\forall x \in S) \ \ (\forall\varepsilon > 0) \ \ (\exists H \in \mathcal{I}_2) \ \ (\forall (m,n) \notin H) \ \ |f_{mn}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

şeklinde de ifade edilebilir. Bu $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık

$$f_{mn} \to_{\mathcal{I}_2} f$$

ile gösterilir. Burada f fonksiyonuna, fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin S üzerinde çift $\mathcal{I}_2$-limit (veya Pringsheim $\mathcal{I}_2$-limit) fonksiyonudur denir.

Bundan sonraki tartışmalarda, S cümlesi, $\mathbb{R}$ uzayının bir alt cümlesi olarak göz önüne alınacaktır.

Teorem 5.1.2. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cümlesinde kuvvetli uygun ideal olsun. S üzerindeki fonksiyonların bir $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin $\mathcal{I}_2$-limiti varsa tektir.*

İspat. S üzerindeki fonksiyonların bir $\{f_{mn}\}$ çift dizisini alalım. Bir $x_0 \in S$ için, S üzerinde $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$ olmak üzere,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x_0) = f_1(x_0) \text{ ve } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x_0) = f_2(x_0)$$

olduğunu kabul edelim. $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$ olduğundan, $f_1(x_0) > f_2(x_0)$ alabiliriz. $f_1(x_0)$ ve $f_2(x_0)$ noktalarının, sırasıyla,

$$(f_1(x_0) - \varepsilon, f_1(x_0) + \varepsilon) \text{ ve } (f_2(x_0) - \varepsilon, f_2(x_0) + \varepsilon)$$

komşulukları ayrık olacak şekilde

$$\varepsilon = \frac{f_1(x_0) - f_2(x_0)}{3}$$

seçelim.

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x_0) = f_1(x_0) \text{ ve } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x_0) = f_2(x_0)$$

olduğundan,

$$A(\varepsilon) \quad = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : |f_{mn}(x_0) - f_1(x_0)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

ve

$$B(\varepsilon) \quad = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : |f_{mn}(x_0) - f_2(x_0)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

önermeleri geçerlidir. Bu durumda,

$$A^c(\varepsilon) \quad = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : |f_{mn}(x_0) - f_1(x_0)| < \varepsilon\}$$

ve

$$B^c(\varepsilon) \quad = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : |f_{mn}(x_0) - f_2(x_0)| < \varepsilon\}$$

olmak üzere, $A^c(\varepsilon)$, $B^c(\varepsilon)$ ve $A^c(\varepsilon)\cap B^c(\varepsilon)$ cümleleri $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ süzgecine aittir. $A^c(\varepsilon)\cap B^c(\varepsilon) \neq \emptyset$ olması, $(f_1(x_0)-\varepsilon, f_1(x_0)+\varepsilon)$ ve $(f_2(x_0)-\varepsilon, f_2(x_0)+\varepsilon)$ komşuluklarının ayrık olması ile çelişir. Bu ise,

$$f_1(x_0) = f_2(x_0)$$

olduğunu gösterir. Buna göre, her $x \in S$ için

$$f_1(x) = f_2(x)$$

(yani $f_1 = f_2$) olur. □

Teorem 5.1.3. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal, $\{f_{mn}\}$, S üzerindeki fonksiyonların bir çift dizisi ve f, S üzerinde bir fonksiyon olsun. Bu durumda, her $x \in S$ için,*

$$P - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x) = f(x) \textit{ ise } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x) = f(x)$$

önermesi geçerlidir.

İspat. $\varepsilon > 0$ alalım. Her $x \in S$ için, S üzerindeki fonksiyonların bir $\{f_{mn}\}$ çift dizisi S üzerinde f fonksiyonuna P-yakınsak olduğundan, her $m,n > k_0$ olduğunda,

$$|f_{mn}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir pozitif $k_0 = k_0(\varepsilon)$ sayısı vardır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \\ &\subset \big((\mathbb{N} \times \{1,2,...,(k_0-1)\}) \cup (\{1,2,...,(k_0-1)\} \times \mathbb{N})\big) \end{aligned}$$

kapsaması geçerli olup $\mathcal{I}_2$, kuvvetli uygun ideal olduğundan,

$$\big((\mathbb{N} \times \{1,2,...,(k_0-1)\}) \cup (\{1,2,...,(k_0-1)\} \times \mathbb{N})\big) \in \mathcal{I}_2$$

olur. Bu ise $A(\varepsilon) \in \mathcal{I}_2$ ve dolayısıyla

$$f_{mn} \to_{\mathcal{I}_2} f$$

olduğunu gösterir. □

Teorem 5.1.4. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal, $\{f_{mn}\}$ ve $\{g_{mn}\}$, S üzerindeki fonksiyonların çift dizileri, f ve g, S üzerinde iki fonksiyon ve her $x \in S$ için*

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x) = f(x) \text{ ve } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} g_{mn}(x) = g(x)$$

olsun. Bu durumda, her $x \in S$ için

(i) $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty}(f_{mn} + g_{mn})(x) = f(x) + g(x)$,

(ii) $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty}(f_{mn}g_{mn})(x) = f(x)g(x)$

eşitlikleri geçerlidir.

İspat. Bu teoremin ispatı, Proposition 3.3 [**44**]' deki çift diziler için verilen ispata benzer şekilde yapılabilir. □

Teorem 5.1.5. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal, $\{f_{mn}\}$ ve $\{g_{mn}\}$ S cümlesi üzerindeki fonksiyonların çift dizileri, f ve g, S üzerinde iki fonksiyon ve*

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x) = f(x) \text{ ve } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} g_{mn}(x) = g(x)$$

olsun. Bu durumda, bir $K \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$, her $(m,n) \in K$ ve her $x \in S$ için

(i) $f_{mn}(x) \geq 0$ ise $f(x) \geq 0$,

(ii) $f_{mn}(x) \leq g_{mn}(x)$ ise $f(x) \leq g(x)$

önermeleri geçerlidir.

İspat. (i) $f(x) < 0$ olduğunu kabul edelim. Her bir $x \in S$ için $\varepsilon = -\frac{f(x)}{2}$ alalım.

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x) = f(x)$$

olduğundan,

$$M = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f(x)| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

olacak şekilde M cümlesi mevcuttur. M, K cümleleri $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ süzgecinin elemanları olduğundan $M \cap K$ cümlesi de $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ süzgecine ait ve boştan farklıdır. Bu durumda, K cümlesinde bir (m_0, n_0) sayı çifti bulabiliriz ki,

$$|f_{m_0n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre, herbir $x \in S$ için $f(x) < 0$ ve $\varepsilon = -\frac{f(x)}{2}$ olduğundan,

$$f_{m_0n_0}(x) < 0$$

elde edilir ki, bu ise her $(m, n) \in K$ için $f_{mn}(x) > 0$ kabulümüzle çelişir. Buna göre her bir $x \in S$ için

$$f(x) > 0$$

eşitsizliği geçerlidir.

(ii) $f(x) > g(x)$ olduğunu kabul edelim. Her $x \in S$ için $f(x)$ ve $g(x)$ noktalarının, sırasıyla,

$$(f(x) - \varepsilon, f(x) + \varepsilon) \text{ ve } (g(x) - \varepsilon, g(x) + \varepsilon)$$

komşulukları ayrık olacak şekilde

$$\varepsilon = \frac{f(x) - g(x)}{3}$$

seçelim.

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x) = f(x) \text{ ve } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} g_{mn}(x) = g(x)$$

ve $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir süzgeç olduğundan,

$$A = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f(x)| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

ve

$$B = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |g_{mn}(x) - g(x)| < \varepsilon\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

önermeleri geçerli olup, süzgeç özelliğinden $A \cap B \cap K \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ ve dolayısıyla da $A \cap B \cap K \neq \emptyset$' dir. Bu durumda, K cümlesinde bir (m_0, n_0) sayı çifti bulabiliriz ki,

$$|f_{m_0n_0}(x) - f(x)| < \varepsilon \;\; ve \;\; |g_{m_0n_0}(x) - g(x)| < \varepsilon$$

eşitsizlikleri sağlanır. Buna göre, her $x \in S$ için $f(x) > g(x)$ ve $\varepsilon = \frac{f(x)-g(x)}{3}$ olduğundan,

$$f_{m_0n_0}(x) > g_{m_0n_0}(x)$$

elde edilir. Bu ise, her $(m, n) \in K$ için $f_{mn}(x) \leq g_{mn}(x)$ kabulümüzle çelişir. Böylece, her $x \in S$ için

$$f(x) \leq g(x)$$

eşitsizliği geçerlidir. □

Teorem 5.1.6. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal, $\{f_{mn}\}$, $\{g_{mn}\}$ ve $\{h_{mn}\}$, S üzerindeki fonksiyonların çift dizileri ve k, S üzerinde bir fonksiyon olsun. Bir $K \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ cümlesi üzerinde her $x \in S$ için*

$$f_{mn}(x) \leq g_{mn}(x) \leq h_{mn}(x) \tag{5.1.1}$$

ve

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x) = k(x) \text{ ve } \mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} h_{mn}(x) = k(x) \tag{5.1.2}$$

ise

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} g_{mn}(x) = k(x) \tag{5.1.3}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\varepsilon > 0$ alalım. (5.1.2) gereğince her $x \in S$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : |f_{mn}(x) - k(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

ve

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : |h_{mn}(x) - k(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

önermeleri geçerlidir. Bu durumda süzgeç özelliğinden, her $x \in S$ için

$$P = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : |f_{mn}(x) - k(x)| < \varepsilon\}$$

ve

$$R = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : |h_{mn}(x) - k(x)| < \varepsilon\}$$

cümleleri $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ sınıfına aittir. Şimdi, her $x \in S$ için

$$Q = \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : |g_{mn}(x) - k(x)| < \varepsilon\}$$

cümlesini tanımlayalım. (5.1.1) eşitsizliğinden $P \cap R \cap K$ cümlesinin Q' nun bir alt cümlesi olduğu açıktır. Süzgeç özelliğinden $P \cap R \cap K \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ ve dolayısıyla $P \cap R \cap K \subset Q$ olduğundan $Q \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ elde edilir. Bu durumda, her $x \in S$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : |g_{mn}(x) - k(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

önermesi geçerli olup buradan, (5.1.3) eşitliği elde edilir. □

5.2. Fonksiyonların Çift Dizilerinin $\mathcal{I}_2^*$-Yakınsaklığı

Şimdi fonksiyonların çift dizileri için $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaklık tanımını ve ilgili teoremleri verelim.

Tanım 5.2.1. $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek ideal, $\{f_{mn}\}$, S üzerindeki fonksiyonların bir çift dizisi ve f, S üzerinde bir fonksiyon olsun. Bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ (yani $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\backslash M \in \mathcal{I}_2$) ve her $x \in S$ için

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in M}} f_{mn}(x) = f(x)$$

oluyorsa, S üzerindeki fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisi S üzerinde f fonksiyonuna noktasal $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaktır denir ve

$$\mathcal{I}_2^* - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn} = f \text{ veya } f_{mn} \to_{\mathcal{I}_2^*} f$$

ile gösterilir.

Teorem 5.2.1. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal olsun. S üzerindeki fonksiyonların bir $\{f_{mn}\}$ çift dizisini ve S üzerinde bir f fonksiyonunu alalım. Her $x \in S$ için,*

$$\mathcal{I}_2^* - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x) = f(x)$$

oluyorsa,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x) = f(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal olsun. S üzerindeki fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin S üzerinde bir f fonksiyonuna noktasal $\mathcal{I}_2^*$-yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in M}} f_{mn}(x) = f(x)$$

olacak şekilde bir $M = \mathbb{N}\times\mathbb{N} \setminus H \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ cümlesi mevcuttur. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in S$ için $m, n > k_0$ olduğunda,

$$|f_{mn}(x) - f(x)| < \varepsilon, \ ((m,n) \in M)$$

eşitsizliğini sağlayan bir $k_0 = k_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ vardır. Buradan

$$\begin{aligned} A(\varepsilon) &= \{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\} \\ &\subset H \cup \left[M \cap \left((\{1,2,3,...,(k_0-1)\} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \{1,2,3,...,(k_0-1)\})\right)\right] \end{aligned}$$

kapsaması elde edilir. $\mathcal{I}_2$ bir kuvvetli uygun ideal olduğundan,

$$H \cup \left[M \cap \left((\{1,2,3,...,(k_0-1)\} \times \mathbb{N}) \cup (\mathbb{N} \times \{1,2,3,...,(k_0-1)\})\right)\right] \in \mathcal{I}_2$$

ve dolayısıyla $A(\varepsilon) \in \mathcal{I}_2$ bulunur. Bu da, S üzerindeki fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin $\mathcal{I}_2$-yakınsak olduğunu gösterir. □

Şimdi de metrik uzaylarda fonksiyonların çift dizileri için $\mathcal{I}_2$ ve $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaklık arasındaki ilişkiyi ifade eden teoremleri vereceğiz.

Teorem 5.2.2. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal, (X,d_x) ve (Y,d_y) metrik uzaylar, $f_{mn}: X\to Y$, fonksiyonların bir çift dizisi ve $f: X\to Y$ bir fonksiyon olsun. Y metrik uzayı bir yığılma noktasına sahip değilse bu durumda, fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin f fonksiyonuna $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaklığı ile $\mathcal{I}_2$-yakınsaklığı çakışır.*

İspat. Teorem 5.2.1 gereği, fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin $\mathcal{I}_2$-yakınsak iken $\mathcal{I}_2^*$-yakınsak olduğunu göstermemiz yeterli olacaktır. $x\in X$ ve $f(x)\in Y$ için

$$\mathcal{I}_2-\lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x)=f(x)$$

olduğunu kabul edelim. Y metrik uzayı bir yığılma noktasına sahip olmadığından, her $x\in X$ için

$$B_\delta(f(x))=\{f_{mn}(x): d_y(f_{mn}(x),f(x))<\delta\}=\{f(x)\}$$

eşitliğini sağlayan bir $\delta>0$ sayısı vardır. $\mathcal{I}_2-\lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x)=f(x)$ olduğundan, her $x\in X$ için

$$\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: d_y(f_{mn}(x),f(x))\geq\delta\}\in\mathcal{I}_2$$

önermesi sağlanır. Buradan,

$$\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: d_y(f_{mn}(x),f(x))<\delta\}=\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: f_{mn}(x)=f(x)\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

önermesi geçerli olup,

$$\mathcal{I}_2^*-\lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x)=f(x)$$

eşitliği elde edilir. □

Teorem 5.2.3. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde $(AP2)$ şartını sağlayan bir kuvvetli uygun ideal, (X,d_x) ve (Y,d_y) metrik uzaylar, $f_{mn}: X\to Y$, fonksiyonların bir çift dizisi ve $f: X\to Y$ bir fonksiyon olsun. Fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisi f fonksiyonuna $\mathcal{I}_2$-yakınsak ise $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaktır.*

İspat. $\mathcal{I}_2$ ideali (AP2) şartına sahip ve her $x\in X$ için

$$\mathcal{I}_2-\lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x)=f(x)$$

olsun. Bu durumda, her $\varepsilon>0$ ve her $x\in X$ için

$$A(\varepsilon)=\{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}: d_y(f_{mn}(x),f(x))\geq\varepsilon\}\in\mathcal{I}_2$$

olur. Şimdi $k \geq 2$ için

$$A_1 = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : d_y(f_{mn}(x), f(x)) \geq 1\}$$

ve

$$A_k = \left\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \frac{1}{k} \leq d_y(f_{mn}(x), f(x)) < \frac{1}{k-1}\right\}$$

cümlelerini tanımlayalım. $i \neq j$ için $A_i \cap A_j = \emptyset$ ve her bir $i \in \mathbb{N}$ için $A_i \in \mathcal{I}_2$ olduğu açık olarak görülür. (AP2) şartı gereği, her bir $j \in \mathbb{N}$ için $A_j \triangle B_j$ satır ve sütunların sonlu bir birleşimi tarafından kapsanacak ve

$$B = \bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{I}_2$$

olacak şekilde, cümlelerin bir $\{B_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ dizisi vardır. Burada $M = \mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash B \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ aldığımızda,

$$\lim_{\substack{m,n \to \infty \\ (m,n) \in M}} f_{mn}(x) = f(x)$$

olduğunu göstermeliyiz.

$\frac{1}{k} < \delta$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısını ve $k \in \mathbb{N}$ alalım. Bu durumda,

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f(x)| \geq \delta\} \subset \bigcup_{j=1}^{k} A_j$$

kapsaması geçerli olur. $A_j \triangle B_j$, $(j = 1, 2, ..., k)$, satır ve sütunların sonlu bir birleşimi tarafından kapsandığından,

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{j=1}^{k} B_j\right) \quad & \cap \quad \{(m,n) : m \geq n_0 \wedge n \geq n_0\} \\ & = \quad \left(\bigcup_{j=1}^{k} A_j\right) \cap \{(m,n) : m \geq n_0 \wedge n \geq n_0\} \end{aligned}$$

eşitliğini sağlayan bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Eğer $m, n \geq n_0$ ve $(m,n) \notin B$ ise

$$(m,n) \notin \bigcup_{j=1}^{k} B_j \text{ ve } (m,n) \notin \bigcup_{j=1}^{k} A_j$$

elde edilir. Bu ise

$$|f_{mn}(x) - f(x)| < \frac{1}{k} < \delta$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu gösterir. Böylece ispat tamam olur. □

Şimdi de bu teoremin tersi olan aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 5.2.4. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal, (X, d_x) ve (Y, d_y) metrik uzaylar, $f_{mn} : X \to Y$ fonksiyonların bir çift dizisi ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olsun. Eğer Y uzayı en az bir yığılma noktasına sahip ve fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin f fonksiyonuna $\mathcal{I}_2$-yakınsak olması $\mathcal{I}_2^*$-yakınsak olmasını sağlıyor ise, $\mathcal{I}_2$ ideali, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde (AP2) şartına sahiptir.*

İspat. $x \in X$ için $f(x)$, Y metrik uzayının bir yığılma noktası olsun. Her bir $k \in \mathbb{N}$ için $h_k \neq f$, $f(x) = \lim_{k\to\infty} h_k(x)$ ve $\{d_y(h_k(x), f(x))\}_{k\in\mathbb{N}}$ azalarak sıfıra yakınsayan bir dizi olacak şekilde farklı fonksiyonların bir $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır. Her $k \in \mathbb{N}$ için

$$g_k(x) = d_y(h_k(x), f(x))$$

dizisini tanımlayalım. $\mathcal{I}_2$ sınıfına ait boş olmayan cümlelerin bir ayrık $\{A_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ cümleler ailesini alalım. Fonksiyonların bir $\{f_{mn}\}$ çift dizisini, her $x \in X$ ve her bir j için eğer $(m, n) \in A_j$ ise $f_{mn}(x) = h_j(x)$ ve eğer $(m, n) \notin A_j$ ise $f_{mn}(x) = f(x)$ şeklinde tanımlayalım.

$\delta > 0$ verilsin. Her $x \in X$ için $g_k(x) < \delta$ eşitsizliğini sağlayan $k \in \mathbb{N}$ seçelim. Bu durumda,

$$A(\delta) = \{(m, n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : d_y(f_{mn}(x), f(x)) \geq \delta\} \subset A_1 \subset A_1 \subset ... \subset A_k$$

kapsaması elde edilir. Böylece $A(\delta) \in \mathcal{I}_2$ olup, her $x \in X$ için

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x) = f(x)$$

olur. Kabulümüz gereği, her $x \in X$ için

$$\mathcal{I}_2^* - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x) = f(x)$$

dir. Bu durumda, her $x \in X$ için

$$\lim_{\substack{m,n\to\infty \\ (m,n)\in M}} f_{mn}(x) = f(x) \tag{5.2.1}$$

eşitliğini sağlayan bir $M = \mathbb{N}\times\mathbb{N}\backslash B \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ cümlesi vardır. $j \in \mathbb{N}$ için $B_j = A_j \cap B$ olsun. Bu durumda, her bir $j \in \mathbb{N}$ için $B_j \in \mathcal{I}_2$ olup,

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j = B \cap \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j \subset B$$

ve böylece

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} B_j \in \mathcal{I}_2$$

elde edilir. $j \in \mathbb{N}$ için eğer $A_j \cap M$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cümlesinde satır ve sütunların sonlu bir birleşimi tarafından kapsanmaz ise bu durumda, tüm $k \in \mathbb{N}$ için $m_k, n_k \to \infty$ iken

M cümlesi, $\{(m_k, n_k)\}$ elemanlarının bir sonsuz dizisini kapsamalıdır ve her $x \in S$ için

$$f_{m_k n_k}(x) = h_j(x) \neq f(x)$$

elde edilir ki bu (5.2.1) ile çelişir. Böylece $A_j \cap M$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinde satır ve sütunların sonlu bir birleşimi tarafından kapsanmalıdır. Bu durumda,

$$A_j \vartriangle B_j = A_j \backslash B_j = A_j \backslash B = A_j \cap M$$

cümleleri de satır ve sütunların sonlu bir birleşimi tarafından kapsanır. Bu da $\mathcal{I}_2$ idealinin (AP2) şartına sahip olması demektir. $\square$

5.3. Fonksiyonların Çift Dizileri İçin İdeal Cauchy Kavramı

Bu kısımda fonksiyonların çift dizileri için $\mathcal{I}_2$-Cauchy ve $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizi tanım ve teoremlerini vereceğiz.

Tanım 5.3.1. $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal ve $\{f_{mn}\}$, $S \subset \mathbb{R}$ cümlesi üzerindeki fonksiyonların bir çift dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ ve her $x \in S$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f_{st}(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

olacak şekilde $s = s(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ ve $t = t(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ sayıları varsa, fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisi noktasal $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisidir denir.

Teorem 5.3.1. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal olsun. $S \subset \mathbb{R}$ üzerindeki fonksiyonların bir $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin $S \subset \mathbb{R}$ üzerinde f fonksiyonuna noktasal $\mathcal{I}_2$-yakınsak olması için gerek ve yeter şart noktasal $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizi olmasıdır.*

İspat. S üzerindeki fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisi f fonksiyonuna noktasal $\mathcal{I}_2$-yakınsak olsun. Bu durumda, $\varepsilon > 0$ ve her $x \in S$ için

$$A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\} \in \mathcal{I}_2$$

önermesi sağlanır. Süzgeç özelliğinden her $x \in S$ için

$$A^c\left(\frac{\varepsilon}{2}\right) = \left\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

cümlesi boştan farklı olup, $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ sınıfına aittir. $A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ cümlesine ait olmayan pozitif k, l sayıları için,

$$|f_{kl}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

olur. Şimdi, her $x \in S$ için

$$B(\varepsilon) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f_{kl}(x)| \geq \varepsilon\}$$

cümlesini tanımlayarak

$$B(\varepsilon) \subset A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

olduğunu gösterelim. $(m,n) \in B(\varepsilon)$ alalım. Bu durumda, $(k,l) \in A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ ve her $x \in S$ için

$$\begin{aligned}\varepsilon \leq |f_{mn}(x) - f_{kl}(x)| &\leq |f_{mn}(x) - f(x)| + |f_{kl}(x) - f(x)| \\ &< |f_{mn}(x) - f(x)| + \frac{\varepsilon}{2}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise,

$$\frac{\varepsilon}{2} < |f_{mn}(x) - f(x)|$$

ve dolayısıyla $(m,n) \in A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$ olduğunu gösterir. Böylece

$$B(\varepsilon) \subset A\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

kapsaması geçerlidir. Bu da, fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin her $x \in S$ için $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizi olduğunu gösterir.

Şimdi de fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin, her $x \in S$ için $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizisi ve ε_{pq} dizisinin sıfıra yakınsayan sayıların kesin azalan bir dizisi olduğunu kabul edelim. Fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisi $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizi olduğundan, her $x \in S$ için

$$A_{pq} = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f_{k_p l_q}(x)| \geq \varepsilon_{pq}\} \in \mathcal{I}_2, \text{ (p, q= 1, 2,...)}$$

önermesini sağlayan pozitif sayıların kesin artan k_p ve l_q dizileri vardır. Bu ise, her $x \in S$ için

(5.3.1) $\emptyset \neq \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f_{k_p l_q}(x)| < \varepsilon_{pq}\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2), \text{ (p, q= 1, 2,...)}$

olması demektir. Şimdi $p \neq q$ ve $s \neq t$ olan p, q, s ve t tam sayılarını alalım. (5.3.1) gereği her $x \in S$ için,

$$C(\varepsilon_{pq}) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f_{k_p l_q}(x)| < \varepsilon_{pq}\}$$

ve

$$D(\varepsilon_{st}) = \{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f_{k_s l_t}(x)| < \varepsilon_{st}\}$$

cümleleri $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ süzgecine ait boş olmayan iki cümle olur. $\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir süzgeç olduğundan,

$$C(\varepsilon_{pq}) \cap D(\varepsilon_{st}) \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$$

olur. Böylece, her $x \in S$ için

$$|f_{m_{pqst} n_{pqst}}(x) - f_{k_p l_q}(x)| < \varepsilon_{pq} \text{ ve } |f_{m_{pqst} n_{pqst}}(x) - f_{k_s l_t}(x)| < \varepsilon_{st}$$

eşitsizliklerini sağlayan $p \neq q$ ve $s \neq t$ olmak üzere pozitif tam sayıların her (p,q) ve (s,t) çiftleri için $(m_{(p,q),(s,t)}, n_{(p,q),(s,t)}) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ çiftini seçebiliriz. Bu durumda,

$p, q, s, t \to \infty$ için ε_{pq} sıfıra yakınsayan sayıların kesin azalan bir dizisi olduğundan, her $x \in S$ için

$$\begin{aligned} |f_{k_p l_q}(x) - f_{k_s l_t}(x)| &\leq |f_{m_{pqst} n_{pqst}}(x) - f_{k_p l_q}(x)| + |f_{m_{pqst} n_{pqst}}(x) - f_{k_s l_t}(x)| \\ &\leq \varepsilon_{pq} + \varepsilon_{st} \to 0 \end{aligned}$$

önermesi sağlanır. Bu ise, fonksiyonların $\{f_{k_p l_q}\}$ $(p, q = 1, 2, ...)$ çift dizisinin bir Cauchy dizisi olmasını gerektirir ve böylece Cauchy yakınsaklık kriteri sağlanıp, fonksiyonların $\{f_{k_p l_q}\}$ çift dizisi S üzerinde bir reel değerli f fonksiyona yakınsar. Yani,

$$\lim_{p,q\to\infty} f_{k_p l_q}(x) = f(x)$$

olur. Ayrıca $p, q \to \infty$ için $\varepsilon_{pq} \to 0$ olup, böylece her $\varepsilon > 0$ için

$$\varepsilon_{p_0 q_0} < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } |f_{k_p l_p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ (p > p_0 \text{ ve } q > q_0) \tag{5.3.2}$$

eşitsizliklerini sağlayan p_0, q_0 pozitif tam sayılarını seçebiliriz. Her $x \in S$ için

$$A = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

cümlesini tanımlayarak

$$A \subset A_{p_0 q_0}$$

olduğunu gösterelim. $(m, n) \in A$ olsun. Bu durumda (5.3.2) eşitliğindeki ifadenin ikinci kısmını dikkate alarak,

$$\begin{aligned} \varepsilon \leq |f_{mn}(x) - f(x)| &\leq |f_{mn}(x) - f_{k_{p_0} l_{q_0}}(x)| + |f_{k_{p_0} l_{q_0}}(x) - f(x)| \\ &< |f_{mn}(x) - f_{k_{p_0} l_{q_0}}(x)| + \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Buradan, (5.3.2) eşitliğindeki ifadenin birinci kısmı da dikkate alınarak, her $x \in S$ için

$$\frac{\varepsilon}{2} < |f_{mn}(x) - f_{k_{p_0} l_{q_0}}(x)| \text{ ve } \varepsilon_{p_0 q_0} < |f_{mn}(x) - f_{k_{p_0} l_{q_0}}(x)|$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece $(m, n) \in A_{p_0 q_0}$ olup,

$$A \subset A_{p_0 q_0}$$

kapsaması sağlanır. $A_{p_0 q_0} \in \mathcal{I}_2$ olduğundan ve ideal özelliğinden $A \in \mathcal{I}_2$ bulunur ki, bu da fonksiyonların $\{f_{k_p l_q}\}$ çift dizisinin $\mathcal{I}_2$-yakınsak olduğunu gösterir. □

Tanım 5.3.2. $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal ve $\{f_{mn}\}$, $S \subset \mathbb{R}$ üzerindeki fonksiyonların bir çift dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $x \in S$ için $(m, n), (s, t) \in M$ ve $m, n, s, t > k_0$ olduğunda,

$$|f_{mn}(x) - f_{st}(x)| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ (yani $H = \mathbb{N}\times\mathbb{N}\backslash M \in \mathcal{I}_2$) cümlesi ve $k_0 = k_0(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ varsa, fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisine S üzerinde noktasal $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizi denir.

TEOREM 5.3.2. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal olsun. S üzerindeki fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisi noktasal $\mathcal{I}_2^*$-Cauchy dizi ise noktasal $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizidir.*

İSPAT. İspat, Teorem 3.2.1 gereği benzer şekilde kolayca yapılır. □

5.4. Fonksiyonların Çift Dizilerinde Düzgün İdeal Yakınsaklık

Bu kısımda, fonksiyonların çift dizileri için düzgün ideal yakınsaklık tanımı ve ilgili teoremleri ispatlarıyla vereceğiz.

TANIM 5.4.1. $S \subset \mathbb{R}$ üzerindeki fonksiyonların bir $\{f_{mn}\}$ çift dizisini ve $S \subset \mathbb{R}$ üzerinde f fonksiyonunu alalım. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

cümlesi tüm $x \in S$ için $\mathcal{I}_2$ sınıfına ait ise fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisi f fonksiyonuna düzgün $\mathcal{I}_2$-yakınsaktır denir ve bu

$$(\forall\varepsilon > 0) \;\; (\exists H \in \mathcal{I}_2) \;\; (\forall(m,n) \notin H) \;\; (\forall x \in S) \;\; |f_{mn}(x) - f(x)| < \varepsilon$$

ile ifade edilebilir. Düzgün $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık

$$f_{mn} \rightrightarrows_{\mathcal{I}_2} f$$

şeklinde de gösterilir.

TEOREM 5.4.1. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal ve $(m,n = 1,2,...)$ için $\{f_{mn}\}$ ve f, $D = [a,b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sürekli fonksiyonlar olsunlar. $D = [a,b]$ üzerinde,*

$$f_{mn} \rightrightarrows_{\mathcal{I}_2} f$$

olması için gerek ve yeter şart

$$c_{mn} = \underset{x \in D}{maks}\,|f_{mn}(x) - f(x)|$$

olmak üzere,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n} c_{mn} = 0$$

bulunmasıdır.

İSPAT. $D = [a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde

$$f_{mn} \rightrightarrows_{\mathcal{I}_2} f$$

olsun. $\{f_{mn}\}$ ve f, $D = [a, b]$ üzerinde sürekli fonksiyonlar olduğundan,

$$|f_{mn}(x) - f(x)|$$

$D = [a, b]$ üzerinde her $m, n \in \mathbb{N}$ için sürekli olup, düzgün $\mathcal{I}_2$-yakınsaklık gereği, her $\varepsilon > 0$ için

$$\left\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}\right\}$$

cümlesi tüm $x \in D$ için $\mathcal{I}_2$ sınıfına aittir. Buradan, her $\varepsilon > 0$ için

$$c_{mn} = \operatorname*{maks}_{x \in D} |f_{mn}(x) - f(x)| \geq |f_{mn}(x) - f(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2}$$

eşitsizliği tüm $x \in D$ için sağlanır. Böylece,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n \to \infty} c_{mn} = 0$$

eşitliği elde edilir.

Şimdi $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n} c_{mn} = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\varepsilon > 0$ için

$$A(\varepsilon) = \left\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : \operatorname*{maks}_{x \in D} |f_{mn}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\right\}$$

cümlesi tüm $x \in D$ için $\mathcal{I}_2$ sınıfına aittir. $\varepsilon > 0$ için

$$B(\varepsilon) = \{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}$$

cümlesini tanımlayarak,

$$B(\varepsilon) \subset A(\varepsilon)$$

kapsamasının geçerli olduğunu gösterelim. Her $(m, n) \in B(\varepsilon)$ için

$$\operatorname*{maks}_{x \in D} |f_{mn}(x) - f(x)| \geq |f_{mn}(x) - f(x)| \geq \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece, her $(m, n) \in B(\varepsilon)$ için $(m, n) \in A(\varepsilon)$ yani $B(\varepsilon) \subset A(\varepsilon)$ kapsaması elde edilir. Bu ise, $B(\varepsilon)$ cümlesinin $\mathcal{I}_2$ sınıfına ait olduğunu gösterir. □

TANIM 5.4.2. $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir gerçek ideal, $\{f_{mn}\}$, S üzerindeki fonksiyonların bir çift dizisi ve f, S üzerinde bir fonksiyon olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{\substack{m,n \to \infty \\ (m,n) \in M}} f_{mn}(x) = f(x)$$

eşitliğini tüm $x \in S$ için sağlayan bir $M \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ (yani $\mathbb{N} \times \mathbb{N} \backslash M \in \mathcal{I}_2$) cümlesi varsa, S üzerindeki fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisi S üzerinde f fonksiyonuna düzgün $\mathcal{I}_2^*$-yakınsaktır denir ve

$$f_{mn} \rightrightarrows_{\mathcal{I}_2^*} f$$

ile gösterilir.

TEOREM 5.4.2. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal ve $(m,n=1,2,...)$ için $\{f_{mn}\}$, S üzerindeki sürekli fonksiyonların bir çift dizisi ve f, S üzerinde bir fonksiyon olsun. Her $x\in S$ için*

$$f_{mn} \rightrightarrows_{\mathcal{I}_2^*} f$$

ise f fonksiyonu S üzerinde süreklidir.

İSPAT. S üzerinde $f_{mn} \rightrightarrows_{\mathcal{I}_2^*} f$ olsun. Bu durumda, her $\varepsilon>0$ için tüm $m>k_0$ ve $n>l_0$ olduğunda,

$$|f_{mn}(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{3},\ (m,n)\in M$$

eşitsizliğini tüm $x\in S$ için sağlayan bir $M\in\mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ (yani $H=\mathbb{N}\times\mathbb{N}\backslash M\in\mathcal{I}_2$) cümlesi ve $k_0=k_0(\varepsilon)$, $l_0=l_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ sayıları vardır. Şimdi keyfi $x_0\in S$ alalım. $\{f_{k_0l_0}\}$, $x_0\in S$ noktasında sürekli olduğundan, her $x\in S$ için,

$$|x-x_0|<\delta$$

iken,

$$|f_{k_0l_0}(x)-f_{k_0l_0}(x_0)|<\frac{\varepsilon}{3}$$

eşitsizliğini sağlayan bir $\delta>0$ sayısı vardır. Böylece, tüm $x\in S$ için

$$|x-x_0|<\delta$$

olduğunda,

$$\begin{aligned}|f(x)-f(x_0)| &\leq |f(x)-f_{k_0l_0}(x)|+|f_{k_0l_0}(x)-f_{k_0l_0}(x_0)|+|f_{k_0l_0}(x_0)-f(x_0)|\\ &< \frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $x_0\in S$ keyfi olduğundan f, S üzerinde süreklidir. □

TEOREM 5.4.3. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde (AP2) şartını sağlayan bir kuvvetli uygun ideal, S cümlesi $\mathbb{R}$' nin bir kompakt alt cümlesi ve $\{f_{mn}\}$, S üzerindeki fonksiyonların bir çift dizisi olsun. S üzerinde, f fonksiyonunun sürekli ve*

$$\mathcal{I}_2-\lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x)=f(x)$$

olduğunu kabul edelim. Fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisi S üzerinde monoton azalan, yani her $x\in S$ için

$$f_{(m+1),(n+1)}(x)\leq f_{mn}(x),\ (m,n=1,2,...)$$

ise, S üzerinde

$$f_{mn}\rightrightarrows_{\mathcal{I}_2} f$$

önermesi geçerlidir.

İSPAT. S üzerindeki fonksiyonların bir

$$g_{mn} = f_{mn} - f \tag{5.4.1}$$

çift dizisini alalım. S üzerindeki fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisi sürekli ve monoton azalan ve f fonksiyonu da sürekli olduğundan, $\{g_{mn}\}$, S üzerinde sürekli ve monoton azalan fonksiyonların bir çift dizidir.

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x) = f(x)$$

olduğundan, (5.4.1) eşitliği gereği S üzerinde

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} g_{mn}(x) = 0$$

olup ve $\mathcal{I}_2$ ideali (AP2) şartını sağladığından, S üzerinde

$$\mathcal{I}_2^* - \lim_{m,n\to\infty} g_{mn}(x) = 0$$

eşitliği geçerli olur. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için $m \geq m(x)$ ve $n \geq n(x)$ olduğunda,

$$0 \leq g_{mn}(x) < \frac{\varepsilon}{2}, \ \ ((m,n),(m(x),n(x)) \in K_x)$$

eşitsizliğini tüm $x \in S$ için sağlayan bir $K_x \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ cümlesi vardır. Fonksiyonların $\{g_{mn}\}$ çift dizisi $x \in S$ noktasında sürekli olduğundan, her $\varepsilon > 0$ için x noktasını eleman kabul eden ve

$$|g_{m(x)n(x)}(t) - g_{m(x)n(x)}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}, \ (t \in A(x))$$

eşitsizliğini sağlayan bir $A(x)$ açık cümlesi vardır. Böylece $\varepsilon > 0$ verildiğinde, monotonluktan dolayı her $t \in A(x)$ için $m \geq m(x)$, $n \geq n(x)$ olduğunda,

$$\begin{aligned}
0 \leq g_{mn}(t) &\leq g_{m(x)n(x)}(t) \\
&= g_{m(x)n(x)}(t) - g_{m(x)n(x)}(x) + g_{m(x)n(x)}(x) \\
&\leq |g_{m(x)n(x)}(t) - g_{m(x)n(x)}(x)| + g_{m(x)n(x)}(x), \ \ ((m,n) \in K_x)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $S \subset \bigcup_{x\in S} A(x)$ ve S kompakt olduğundan, Heine - Borel Teoremi gereğince,

$$S \subset A(x_1) \cup A(x_2) \cup A(x_3) \cup ... \cup A(x_i)$$

kapsaması geçerli olacak şekilde S, sonlu bir açık örtüye sahiptir. Şimdi,

$$K = K_{x_1} \cap K_{x_2} \cap K_{x_3} \cap ... \cap K_{x_i}$$

cümlesini ve

$$M = \text{maks}\left\{m(x_1), m(x_2), m(x_3), ..., m(x_i)\right\},$$

$$N = \text{maks}\left\{n(x_1), n(x_2), n(x_3), ..., n(x_i)\right\}$$

sayılarını tanımlayalım. Her $K_{x_i} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ olduğundan $K \in \mathcal{F}(\mathcal{I}_2)$ elde edilir. Bu durumda, her $t \in A(x)$ için $(m,n) \geq (M,N)$ olduğunda,

$$0 \leq g_{mn}(t) < \varepsilon, \ (m,n) \in K$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece, S üzerinde

$$g_{mn} \rightrightarrows_{\mathcal{I}_2^*} 0$$

olup, Teorem 5.2.1 gereği, S üzerinde

$$g_{mn} \rightrightarrows_{\mathcal{I}_2} 0$$

elde edilir ki, bu da (5.4.1) eşitliği gereği S üzerinde

$$f_{mn} \rightrightarrows_{\mathcal{I}_2} f$$

olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Şimdi fonksiyonların çift dizileri için, kompakt metrik uzaylar üzerinde süreklilik, eş süreklilik ve $\mathcal{I}_2$ -yakınsaklık ile ilgili aşağıdaki teoremi vereceğiz.

TEOREM 5.4.4. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal, (X, d_x) ve (Y, d_y) metrik uzaylar, $f_{mn} : X \to Y$, $(m, n \in \mathbb{N})$, fonksiyonları eş sürekli ve $f : X \to Y$ bir fonksiyon olmak üzere,*

$$f_{mn} \rightarrow_{\mathcal{I}_2} f$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda f, X üzerinde süreklidir. X kompakt ise

$$f_{mn} \rightrightarrows_{\mathcal{I}_2} f$$

önermesi geçerlidir.

İSPAT. Önce f fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterelim. $x_0 \in X$ ve $\varepsilon > 0$ alalım. f_{mn}' ler eş sürekli olduğundan, her $m, n \in \mathbb{N}$ ve $x \in B_\delta(x_0)$ için

$$d_y\big(f_{mn}(x), f_{mn}(x_0)\big) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. $x \in B_\delta(x_0)$ keyfi olsun. $f_{mn} \rightarrow_{\mathcal{I}_2} f$ olduğundan,

$$\Big\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : d_y(f_{mn}(x_0), f(x_0)) \geq \frac{\varepsilon}{3}\Big\} \cup \Big\{(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : d_y(f_{mn}(x), f(x)) \geq \frac{\varepsilon}{3}\Big\}$$

cümlesi $\mathcal{I}_2$ idealine aittir ve $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesinden farklıdır. Buradan, $(m,n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ için

$$d_y\big(f_{mn}(x_0), f(x_0)\big) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ ve } d_y\big(f_{mn}(x), f(x)\big) < \frac{\varepsilon}{3}$$

eşitsizlikleri geçerlidir. Bu durumda,

$$\begin{aligned} d_y\big(f(x_0), f(x)\big) &\leq d_y\big(f(x_0), f_{mn}(x_0)\big) + d_y\big(f_{mn}(x_0), f_{mn}(x)\big) + d_y\big(f_{mn}(x), f(x)\big) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ki, bu da f fonksiyonunun sürekli olduğunu gösterir.

Şimdi X uzayını kompakt alıp,

$$f_{mn} \rightrightarrows_{\mathcal{I}_2} f$$

olduğunu gösterelim. $\varepsilon > 0$ olsun. X kompakt olduğundan f düzgün süreklidir ve f_{mn}' ler X üzerinde eş - düzgün süreklidir. Bu nedenle, $x, x' \in X$ için

$$d_x(x, x') < \delta$$

iken

$$d_y\big(f_{mn}(x), f_{mn}(x')\big) < \frac{\varepsilon}{3} \text{ ve } d_y\big(f(x), f(x')\big) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı vardır. X uzayının kompaktlığından, X uzayının $\{B_x(\delta)\}_{x\in X}$ örtüsünden sonlu bir

$$B_{x_1}(\delta), B_{x_2}(\delta), ..., B_{x_k}(\delta)$$

alt örtüsü seçilebilir. $f_{mn} \rightarrow_{\mathcal{I}_2} f$ olduğundan bütün $(m, n) \notin M$ ve $i \in \{1, 2, ..., k\}$ için

$$d_y\big(f_{mn}(x_i), f(x_i)\big) < \frac{\varepsilon}{3}$$

olacak şekilde bir $M \in \mathcal{I}_2$ cümlesi vardır. $(m, n) \notin M$ ve $x \in X$ olsun. Böylece bazı $i \in \{1, 2, ..., k\}$ için $x \in B_{x_i}(\delta)$ olur. Buradan,

$$\begin{aligned} d_y\big(f_{mn}(x), f(x)\big) &\leq d_y\big(f_{mn}(x), f_{mn}(x_i)\big) + d_y\big(f_{mn}(x_i), f(x_i)\big) + d_y\big(f(x_i), f(x)\big) \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

elde edilir ki, bu da

$$f_{mn} \rightrightarrows_{\mathcal{I}_2} f$$

önermesini sağlar. □

Buraya kadar olan incelemelerimizden ve düzgün yakınsaklık ile yakınsaklık hakkındaki temel bilgilerimizden aşağıdaki teoremi bir sonuç olarak ispatsız verebiliriz.

TEOREM 5.4.5. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal, $\{f_{mn}\}$, S üzerindeki fonksiyonların bir çift dizisi ve f, S üzerinde bir fonksiyon olsun. Bu durumda S üzerinde;*

$$
\begin{aligned}
(i) f_{mn} \rightrightarrows f \quad &\Rightarrow \quad f_{mn} \to f \\
&\Rightarrow \quad f_{mn} \to_{\mathcal{I}_2} f
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
(ii) f_{mn} \rightrightarrows f \quad &\Rightarrow \quad f_{mn} \rightrightarrows_{\mathcal{I}_2} f \\
&\Rightarrow \quad f_{mn} \to_{\mathcal{I}_2} f
\end{aligned}
$$

olur.

TANIM 5.4.3. $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal ve $\{f_{mn}\}$, $S \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyonların bir çift dizisi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f_{st}(x)| \geq \varepsilon\} \in \mathcal{I}_2$$

önermesini tüm $x \in S$ için sağlayan $s = s(\varepsilon)$ ve $t = t(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayıları varsa, fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisine düzgün $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizi denir.

Şimdi düzgün $\mathcal{I}_2$-yakınsaklik için $\mathcal{I}_2$-Cauchy kriterini verelim.

TEOREM 5.4.6. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde $(AP2)$ şartını sağlayan bir kuvvetli uygun ideal olsun. Terimleri $S \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı fonksiyonların bir $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin düzgün $\mathcal{I}_2$-yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için*

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f_{st}(x)| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}_2 \tag{5.4.2}$$

önermesini her $x \in S$ için sağlayan $s = s(\varepsilon)$ ve $t = t(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayılarının bulunmasıdır.

İSPAT. Teoremin gereklilik kısmının ispatı, Teorem 5.3.1'deki tartışmalara benzer şekilde yapılır.

Tersine, fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisi S üzerinde düzgün $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizi olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için

$$\{(m,n) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f_{st}(x)| < \varepsilon\} \notin \mathcal{I}_2$$

önermesini tüm $x \in S$ için sağlayan $s = s(\varepsilon)$ ve $t = t(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayıları vardır. Fonksiyonların bir $\{f_{mn}\}$ çift dizisinin S üzerinde $\mathcal{I}_2$-Cauchy dizi iken $\mathcal{I}_2$-yakınsak olduğunu Teorem 5.3.1' de göstermiştik. S üzerinde $\mathcal{I}_2 - \lim_{m,n\to\infty} f_{mn}(x) = f(x)$ olsun. Şimdi bu yakınsaklığın düzgün olduğunu gösterelim.

$\mathcal{I}_2$, $(AP2)$ şartını sağladığından, (5.4.2) gereği, her $\varepsilon > 0$ için $m, n, s, t \geq N$ olduğunda,

$$|f_{mn}(x) - f_{st}(x)| < \varepsilon, \ (m, n, s, t \in M) \tag{5.4.3}$$

eşitsizliğini tüm $x \in S$ için sağlayan bir $M \notin \mathcal{I}_2$ cümlesi ve $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. (5.4.3) eşitsizliğinde, $s, t \to \infty$ için limit aldığımızda,

$$\mathcal{I}_2 - \lim_{s,t\to\infty} f_{st}(x) = f(x)$$

olacağından, her $\varepsilon > 0$ için $m, n > N$ olduğunda

$$|f_{mn}(x) - f(x)| < \varepsilon, \ (m, n \in M)$$

eşitsizliğini tüm $x \in S$ için sağlanır. Böylece S üzerinde,

$$f_{mn} \rightrightarrows_{\mathcal{I}^*_2} f$$

elde edilir. $\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal olduğundan

$$f_{mn} \rightrightarrows_{\mathcal{I}_2} f$$

önermesi geçerlidir. $\square$

Fonksiyonların çift dizileri için $\mathcal{I}_2$-Cauchy kriterini aşağıdaki teorem ile de ifade edebiliriz.

Teorem 5.4.7. *$\mathcal{I}_2$, $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ üzerinde bir kuvvetli uygun ideal olsun. Terimleri $S \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı ve reel değerli fonksiyonların $\{f_{mn}\}$ çift dizisi düzgün $\mathcal{I}_2$-yakınsak değildir gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için*

$$\{(m, n) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : |f_{mn}(x) - f_{st}(x)| \geq \varepsilon\} \notin \mathcal{I}_2$$

önermesini her $x \in S$ için sağlayan $s = s(\varepsilon)$ ve $t = t(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır.

KAYNAKLAR

[1] A. PRINGSHEIM, *Elementare Theorie der unendliche Doppelreihen*, Sitsungs berichte der Math. Akad. der Wissenschafftenzu Münch. Ber. **7** (1898), 101–153.

[2] G. H. HARDY, *On the convergence of certain multiple series*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **19** (1917), 86–95.

[3] G. M. ROBISON, *Divergent double sequences and series*, Trans. Amer. Math. Soc. **28** (1) (1926), 50–73.

[4] T. KOJIMA, *On the theory of double sequence*, Tôhoku Math. J. **21** (1922), 3–14.

[5] H. J. HAMILTON, *Transformations of multiple sequences*, Duke Math. J. **2** (1936), 29–60.

[6] J. BOOS, T. LEIGER, K. ZELLER, *Consistency theory for SM-methods*, Acta Math. Hungar. **76** (1997), 83–116.

[7] M. ZELTSER, *Investigation of Double Sequences Spaces by Soft and Hard Analytical Methods*, Dissertationes Mathematicae Universitatis Tartuensis, Tartu (2001).

[8] F. MÓRICZ, *Extensions of the spaces c and c_0 from single to double sequences*, Acta Math. Hungar. **57** (1-2) (1991), 129–136.

[9] A. GÖKHAN, M. GÜNGÖR and M. ET, *Statistical convergence of double sequences of real-valued functions*, Int. Math. Form **2** (8) (2007), 365–374.

[10] J. D. HILL, *On perfect summability of double sequences*, Bull. Amer. Math. Soc. **46** (1940), 327–331.

[11] MURSALEEN, O. H. H. EDELY, *Statistical convergence of double sequences*, J. Math. Anal. Appl. **288** (2003), 223–231.

[12] B. ALTAY, *Bazı Yeni Çift Dizi Uzayları*, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Malatya **(2002).**

[13] H. FAST, *Sur la convergenc statistique*, Colloq. Math. **2** (1951), 241–244.

[14] I. J. SCHOENBERG, *The integrability of certain functions and related summability methods*, Amer. Math. Monthly **66** (1959), 361–375.

[15] T. ŠALÁT, *On statistically convergent sequences of real numbers*, Math. Slovaca **30** (1980), 139–150.

[16] J. A. FRIDY, *On statistical convergence*, Analysis **5** (1985), 301–313.

[17] J. A. FRIDY, *Statistical limit points*, Poc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 1187–1192.

[18] D. RATH, B. C. TRIPATY, *On statistically convergence and statistically Cauchy sequences*, Indian J. Pure Appl. Math. **25** (4) (1994) 381–386.

[19] C. ÇAKAN, B. ALTAY, *Statistically boundedness and statistical core of double sequences*, J. Math. Anal. Appl. **317** (2006), 690–697.

[20] J. A. FRIDY, C. ORHAN, *Statistical limit superior and limit inferior*, Proc. Amer. Math. Soc. **125** (1997), 3625–3631.

[21] J. CONNOR, K. DEMİRCİ, C. ORHAN, *Multipliers and factorizations for bounded statistically convergent sequences*, Analysis **22** (2002), 321–333.

[22] E. SAVAS, M. MURSALEEN, *On statistically convergent double sequences of fuzzy numbers*, Inform. Sci. **162** (2004), 183–192.

[23] M. BALCERZAK, K. DEMS, A. KOMİSARSKİ, *Statistical convergence and ideal convergence for sequences of functions*, J. Math. Anal. Appl. **328** (2007), 715–729.

[24] J. CONNOR, *On strong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence*, Canad. Math. Bull. **32** (1989), 194–198.

[25] F. MÓRICZ, *Statistical convergence of multiple sequences*, Arch. Math. (Basel) **81** (2003), 82–89.

[26] F. NURAY, W. H. RUCKLE, *Generalized statistical convergence and convergence free spaces*, J. Math. Anal. Appl. **245** (2000), 513–527.

[27] P. KOSTYRKO, T. ŠALÁT and W. WILCZYŃSKI, *I-convergence*, Real Anal. Exchange **26(2)** (2000), 669–686.

[28] P. KOSTYRKO, M. MAČAJ, T. ŠALÁT and M. SLEZIAK, *I-convergence and extremal I-limit points*, Math. Slovaca **55** (2005), 443–464.

[29] K. DEMS, *On I-Cauchy sequence*, Real Anal. Exchange **30** (2004/2005), 123–128.

[30] A. NABİEV, S. PEHLİVAN and M. GÜRDAL,*On I-Cauchy sequence*, Taiwanese J. Math. **11** (2) (2007), 569–576.

[31] Ş. YARDIMCI, *Multipliers and factorizations for bounded I-convergent sequences*, Math. Commun. **11** (2006), 181–185.

[32] F. GEZER, S. KARAKUŞ, *$\mathcal{I}$ and $\mathcal{I}^*$ convergent function sequences*, Math. Commun. **10** (2005), 71–80.

[33] V. BALÁZ, J. ČERVEŇANSKÝ, P. KOSTYRKO, T. ŠALÁT, *I-convergence and I-continuity of real functions*, Acta Mathematica 5, Faculty of Natural Sciences, Constantine the Philosopher University, Nitra (2004), 43–50.

[34] C. ÇAKAN, H. ÇOŞKUN, *A class of I-conservative matrices*, Int. J. Math. and Math. Sci. **21** (2005), 3443–3452.

[35] K. DEMİRCİ, *I-limit superior and limit inferior*, Math. Commun. **6** (2001), 165–172.

[36] B. K. LAHIRI, P. DAS, *Further remarks on I-limit superior and I-limit inferior*, Math. Commun. **8** (2003), 151–156.

[37] B. K. LAHIRI, P. DAS, *I and I*-convergence in topological spaces*, Math. Bohem. **130** (2005), 153–160.

[38] T. ŠALÁT, B. C. TRIPATHY, M. ZIMAN, *On I-convergence field*, Ital. J. Pure Appl. Math. **17** (2005), 45–54.

[39] B. C. TRIPATHY, B. HAZARIKA, *I-convergent sequence spaces associated with multiplier sequences*, Math. Ineq. and Appl. **11** (3) (2008), 543–548.

[40] L. ZAJCEK, *Porosity and I-porosity*, Real Anal. Exchange **13** (1987-88), 314–350.

[41] P. DAS, P. KOSTYRKO, W. WILCZYŃSKI, P. MALIK *I and I^*-convergence of double sequences*, Math. Slovaca **58** (5) (2008), 605–620.

[42] P. DAS, P. MALIK *On extremal I-limit points of double sequences*, Tatra Mt. Math. Publ. **40** (2008), 91–102.

[43] M. GÜRDAL, A. ŞAHİNER, *Extremal $\mathcal{I}_2$-limit points of double sequences*, Appl. Math. E-Notes **2** (2008), 131–137.

[44] V. KUMAR, *On I and I^*-convergence of double sequences*, Math. Commun. **12** (2007), 171–181.

[45] B. TRIPATHY, B. C. TRIPATHY, *On I-convergent double sequences*, Soochow J. Math. **31** (2005), 549–560.

[46] I. J. MADDOX, *Elements of Functional Analysis* Cambridge University Press, Cambridge (1970).

[47] B. CHOUDHARY, S. NANDA, *Functional Analysis with Applications*, John wiley-Sons, New York (1989).

[48] B. MUSAYEV, M. ALP, *Fonksiyonel Analiz*, Kütahya (2000).

[49] J. BOOS, *Classical and Modern Methods in Summability*, Oxford University Press, Newyork (2000).

[50] M. BALCI, *Matematik Analiz cilt 2*, Ankara (1997).

[51] V.G. IYER, *Mathematical Analysis,* 3^{rd} *ed.*. Tata McGraw- Hill Publihing Company Ltd. New Delhi (1985).

[52] I. NIVEN, H. ZUCKERMANN, H. L. MONTGOMERY, *A Introduction to the Theory of Numbers*, John Willey and Jons, Inc. 529 Fifth Ed. (1991).

ÖZGEÇMİŞ

1979 yılında Hatay ilinin Reyhanlı ilçesinde doğdu. İlk ve Ortaöğrenimini Reyhanlı' da tamamladı. 1998 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünü kazandı. Beş yıllık üniversite eğitimini 2003 yılında başarıyla tamamlayarak, mezun oldu. Aynı yıl Adıyaman iline matematik öğretmeni olarak atandı. İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında 2003 yılının güz döneminde yüksek lisans eğitimine başladı ve Temmuz 2006 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2006 güz döneminde yine aynı üniversitede ve aynı alanda doktora eğitimine başladı. Hâlen Malatya ilinde Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı Fethi Gemuhluoğlu Anadolu Öğretmen Lisesi' nde matematik öğretmeni olarak görev yapan Erdinç Dündar evli ve iki kız çocuğu babasıdır.