122542

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

CEBİRSEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ADOMIAN AYRIŞIM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

S.BATTAL GAZİ KARAKOÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Haziran 2006

Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğü'ne,

Bu çalışma Jürimiz tarafından Matematik Anabilim dalında YÜKSEK LİSANS TEZİ olarak kabul edilmiştir.

Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY
Başkan

Doç. Dr. A. Refik BAHADIR
Üye

Yrd. Doç. Dr. Sibel ÖZER
Danışman

Onay

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

13.07.2006

Prof. Dr. Ali ŞAHİN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

CEBİRSEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ADOMIAN AYRIŞIM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

S.BATTAL GAZİ KARAKOÇ
İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

92+viii sayfa
2006

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Sibel ÖZER

Bu Yüksek Lisans tezi yedi bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremler verildi.

İkinci ve üçüncü bölümlerde, sırasıyla lineer ve lineer olmayan cebirsel denklem sistemlerinin literatürde yer alan bazı çözüm yöntemleri incelendi.

Dördüncü bölümde, çeşitli lineer olmayan fonksiyonlar için Adomian polinomları hesaplandı.

Beşinci bölümde, Adomian ayrışım yöntemi ile lineer cebirsel denklem sistemlerinin çözümü verildi. Elde edilen sonuçlar, bu yöntem ile klasik Jacobi iterativ yönteminden elde edilen sonuçların aynı olduğunu gösterdi.

Altıncı bölümde, Adomian ayrışım yöntemi ile lineer olmayan cebirsel denklem sistemlerinin çözümü verildi. Elde edilen sonuçların Basit iterasyon ve Newton-Raphson yöntemleri ile uyumlu olduğu görüldü.

Yedinci bölümde, altıncı bölümde elde edilen nümerik sonuçlar değerlendirildi.

ANAHTAR KELİMELER: Adomian ayrışım yöntemi, Adomian polinomları, lineer cebirsel denklem sistemleri, lineer olmayan cebirsel denklem sistemleri.

ABSTRACT

MSc.Thesis

SOLUTION OF SYSTEMS OF ALGEBRAIC EQUATIONS BY ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

S. BATTAL GAZİ KARAKOÇ
Inönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

92+viii pages
2006

Supervisor : Yrd. Doç. Dr. Sibel ÖZER

This MSc. thesis consists of seven chapters. In the first chapter, some basic definitions and theorems to be used in the later chapter are outlined.

In the second and third chapters, some solution methods of linear and nonlinear algebraic equation systems in literature are examined.

In the fourth chapter, Adomian polinoms are computed for various nonlinear functions.

In the fifth chapter, the solution of linear algebraic equation systems is given by using Adomian decomposition method. The obtained results have showed that this method and the results obtained from classical Jacobi iterativ methods are the same.

In the sixth chapter, the solution of nonlinear algebraic equation systems is given by using Adomian decomposition method. It is understood that the obtained results are agreement with Basic iteration and Newton-Raphson methods.

In the seventh chapter, the numerical results obtained in the sixth chapter are evaluated.

KEYWORDS: Adomian decomposition method, Adomian polynomials, linear algebraic equation systems, nonlinear algebraic equation systems.

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanması sırasında yardımlarını esirgemeyen değerli hocam sayın Yrd. Doç. Dr. Sibel ÖZER'e , Matematik bölüm başkanı sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'in şahsında tüm bölüm hocalarıma ve bana sürekli destek olan Öğrt. Grv. Yusuf UÇAR'a sevgili eşim Meltem ve abim A. Kadir KARAKOÇ'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

TABLOLAR LİSTESİ

GİRİŞ

Amerikan fizikçi G. Adomian 1980'li yılların başında

$$u - N(u) = f$$

şeklindeki fonksiyonel denklemlerin çözümü için bir nümerik yöntem geliştirdi. Burada H, Hilbert uzayı olmak üzere, $N : H \to H$ lineer olmayan bir operatör, $u \in H$ bilinmeyen bir fonksiyon, $f \in H$ bilinen bir fonksiyondur. Adomian ayrışım yöntemi bir fonksiyonel denklemin çözümünü, A_n Adomian polinomları olmak üzere, terimleri

$$\begin{aligned} u_0 &= f \\ u_{n+1} &= A_n(u_0, u_1, \ldots, u_n), \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

şeklinde bir iterasyon formülü yardımıyla hesaplanan

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$$

şeklinde bir seri olarak bulan bir yöntemdir [1,2].

Bu yöntem lineer olmayan fonksiyonel denklemler için analitik çözüme hızlı yakınsayan değerler elde edilmesinde güvenilir sonuçlar verir. Bu yöntemin lineer olmayan fonksiyonel denklemlerin çözümüne uygulanmasında

- Adomian polinomlarının hesaplanması
- Yöntemin farklı fonksiyonel denklemlere nasıl uygulanacağı
- Çözüm serisinin yakınsaklığı

gibi konularda zorluklarla karşılaşıldı.

Prof. Y. Cherruault, bu yöntemin yakınsaklığını inceleyen ve yöntemin genel ilkelerini doğrulayan ilk bilim adamıdır. Onun başkanlığında MEDIMAT laboratuvarında arkadaşları ile yapmış oldukları birçok yayın ve çalışmalar büyük bir ilgi çekti [3]. Bu laboratuvarda yapılan çalışmalarda Adomian polinomlarının hesaplanmasında farklı yöntemler geliştirildi. Fakat bu yöntemler uygulamada pratiklik sağlamadı.

2000 yılında A. M. Wazwaz herhangi bir formüle ihtiyaç duymadan sadece cebirsel işlemler. trigonometrik özdeşlikler veya Taylor seri açılımını kullanarak Adomian polinomlarını hesapladı [4].

Adomian ayrışım yöntemi için ilk düzeltme A. M. Wazwaz tarafından yapıldı ve bazı örneklerde Adomian polinomlarını kullanmadan sadece iki iterasyon kullanılarak çözüme ulaşılabildiği görüldü [5]. Mevcut hesaplamaları geliştirmek veya seri çözümün hızlı yakınsaması için bazı olgular geliştirildi. Adomian ve R. Rach seri çözümünün ilk iki teriminde ortaya çıkan zıt işaretli benzer terimler olarak adlandırılan "noise terms" kavramını geliştirdi [6]. Y. Cherruault ve arkadaşları noise terimleri kullanarak seri çözümün hızlı yakınsadığını gösterdi.

2001 yılında A. M. Wazwaz ve S. M. El-Sayed tarafından ayrışım yöntemine ikinci bir düzeltme yapıldı. Bu düzeltilmiş ayrışım yönteminin bazı test edilen örneklerde oldukça etkili olduğu ve lineer olmayan denklemler için Adomian polinomlarını kullanmadan sadece iki iterasyon kullanarak tam çözümü verdiği görüldü. Böylece düzeltilmiş ayrışım yönteminin bilimsel alanlardaki birçok uygulama için güçlü bir gelişme olduğu öne sürüldü [7].

2003 yılında F. Abdelwahid, herhangi bir mertebedeki Adomian polinomlarını elde etmek için bir matematiksel bir model geliştirdi. Böylece yüksek mertebedeki Adomian polinomlarını içeren problemlerde büyük bir kolaylık sağladı. Bilgisayar programları için bu modelin uygunluğunu gösterdi [8].

2004 yılında E. Babolian ve S. Javadi türeve çok benzeyen bir operator tanımlayıp Adomian polinomlarını bu operator yardımı ile hesapladı ve bazı örneklerle bu yöntemin diğer yöntemlerden daha kolay olduğunu gösterdi [9].

2004 yılında Y. Zhu, Q. Chang, S. Wu, parametrizasyon yardımı ile birçok nonlineerlik için Adomian polinomlarını elde etti . Bu yöntem Adomian tarafından geliştirilen önceki metoda göre daha az formüle ihtiyaç duymaktadır [10].

2004 yılında E. Babolian, J. Biazar, A. R. Vahidi Adomian ayrışım yöntemini lineer denklem sistemine uyguladı ve bu yöntemin Jacobi iterativ yöntemi ile başlangıç değerleri dışında aynı olduğunu gösterdi. Yine Adomian ayrışım yöntemi lineer olmayan denklem sistemlerine uygulandı ve yöntemin çözüm serisine oldukça hızlı bir şekilde yakınsadığı görüldü [11,12].

Adomian ayrışım yöntemi yakın zamanlarda uygulamalı matematikte ve özellikle seri çözümleri alanında büyük bir ilgi çekmiştir. Bu yöntem, adi diferensiyel denklemlere, kısmi diferansiyel denklemlere, integral denklemlere, diferansiyel ve integral denlem sistemlerine, başlangıç ve sınır değer problemlerine ve cebirsel denklem sistemlerine kolaylıkla uygulanabilir. Yöntem çözümlerde hızlı bir yakınsaklık gösterdiği için birçok önemli avantajlara sahiptir.

1.BÖLÜM

TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak bazı tanım ve teoremler verildi.

Tanım 1.1. i. satır ile j. sütununun kesiştiği yerdeki elemanı a_{ij} olan n satır ve m sütundan oluşan bir matris

$$A = [a_{ij}] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

şeklinde tanımlanır ve $n \times m$ ye matrisin tipi veya mertebesi denir [13].

Tanım 1.2. Satır ve sütun sayısı aynı olan matrise kare matris denir. n satır ve sütunlu bir kare matris $n \times n$ tipindedir ve bu matrise n-kare matris denir [14].

Tanım 1.3. $1 \times n$ tipindeki matrislere satır matrisi denir ve $A = [a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n}]$ şeklinde gösterilir [13].

Tanım 1.4. $n \times 1$ tipindeki matrislere sütun matrisi denir ve

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir [13].

Tanım 1.5. A ve B $n \times m$ tipinde iki matris olmak üzere $\forall i = 1,2,\dots,n$ ve $j = 1,2,\dots,m$ için $a_{ij} = b_{ij}$ ise A ve B matrisleri eşittir denir [15].

Tanım 1.6. A ve B $n \times m$ tipinde iki matris olmak üzere $\forall i = 1,2,\dots,n$ ve $j = 1,2,\dots,m$ için $A + B = [a_{ij} + b_{ij}]$ toplamına A ve B matrislerinin toplamı denir [15].

Tanım 1.7. A ve B sırasıyla $n \times m$, $m \times p$ tipinde iki matris olmak üzere,

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik} b_{kj}$$

ifadesine A ve B matrislerinin çarpımı denir ve $AB = C$ şeklinde gösterilir. Burada C matrisi $n \times p$ tipindedir [13].

Tanım 1.8. $\lambda \in IR$ olmak üzere $\lambda A = [\lambda a_{ij}]$, $i = 1,2,...,n$, $j = 1,2,...,m$ çarpımına A matrisinin λ skaleri ile çarpımı denir [13].

Tanım 1.9. Bütün elemanları sıfır olan matrise sıfır matrisi denir ve **O** ile gösterilir [15].

Tanım 1.10. Köşegen üzerindeki elemanları 1 ve köşegen dışındaki elemanları sıfır olan n-kare matrise birim matris denir ve I_n ile gösterilir [16].

Tanım 1.11. Köşegen üzerindeki bileşenleri dışında kalan bileşenleri sıfır olan matrislere köşegen matris denir [13].

Tanım 1.12. Her bir satırında ve her bir sütununda sıfırdan farklı tek bir eleman bulunan ve bu elemanı 1 olan bir P kare matrisine Permütasyon matris denir [16].

Teorem 1.1. A, B ve C matrisleri $n \times m$ tipinde matrisler ve $\lambda, \mu \in IR$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [13].

i) $A + B = B + A$,

ii) $(A + B) + C = A + (B + C)$,

iii) $A + \mathbf{O} = \mathbf{O} + A = A$,

iv) $A + (-A) = -A + A = \mathbf{O}$,

v) $\lambda(A + B) = \lambda A + \lambda B$,

vi) $(\lambda + \mu)A = \lambda A + \mu A$,

vii) $\lambda(\mu A) = (\lambda\mu)A$,

viii) $IA = A$.

Teorem 1.2. A, B ve C matrisleri sırasıyla $n \times m$, $m \times k$, $k \times p$ tipinde matrisler olsun. D, $m \times k$ tipinde bir matris ve $\lambda \in IR$ olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [13].

i) $A(BC) = (AB)C$,

ii) $A(B + D) = AB + AD$,

iii) $\lambda(AB) = (\lambda A)B = A(\lambda B)$,

iv) $I_m B = B$ ve $BI_k = B$.

Tanım 1.13. A ve B n-kare matrisleri için, $A\ B = B\ A = I_n$ eşitliğini sağlayan bir B matrisine A matrisinin tersi denir. A matrisinin tersi A^{-1} ile gösterilir ve bir A matrisinin tersi varsa tektir [14].

Tanım 1.14. Bir *mxn* tipindeki A matrisinin satırlarını aynı numaralı sütunları ile yer değiştirmekle elde edilen matrise, A matrisinin transpozu denir ve A matrisinin transpozu A' ile gösterilir [15].

Teorem 1.3. A ve B toplama ve çarpma işlemi için uygun matrisler olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [13].

i) $(A')' = A$,

ii) $(A+B)' = A' + B'$,

iii) $(AB)' = B'A'$,

iv) $(A^{-1})' = (A')^{-1}$.

Tanım 1.15. A n-kare matris ve A matrisinin i. satır ve j. sütununun silinmesiyle elde edilen $(n-1)$-kare matris M_{ij} olsun. A matrisinin i. satıra göre determinantı

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij},$$

veya j. satıra göre determinantı

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij},$$

şeklinde tanımlanır [13].

Teorem 1.4. A n-kare bir matris olmak üzere aşağıdaki eşitlikler geçerlidir [16].

i) A matrisinin bir satırı veya sütunu sıfır ise $\det A$=0 dır.

ii) $\widetilde{A}$, A matrisinin iki satırının veya iki sütununun yer değiştirilmesi ile elde edilen matris olmak üzere $\det \widetilde{A} = -\det A$ dır.

iii) A matrisinin iki satırı veya sütunu aynı ise $\det A$=0 dır.

iv) $\widetilde{A}$, A matrisinin bir satırının veya sütununun bir $\lambda \in IR$ skaleri ile çarpılması ile elde edilmiş ise $\det \widetilde{A} = \lambda \det A$ dır.

v) $\widetilde{A}$, A matrisinin k. satırının veya sütununun $\lambda \in IR$ katını, j. satırına veya sütununa eklemekle elde edilen matris olmak üzere $\det \widetilde{A} = \det A$ dır.

vi) B, $n \times n$ tipinde bir matris olmak üzere $\det AB = \det A \det B$ dir.

vii) $\det A' = \det A$ dır.

Tanım 1.16. Determinantı sıfır olan matrise singüler (tekil), aksi takdirde ise singüler olmayan (nonsingüler) matris denir [16].

Tanım 1.17. $\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}| \leq |a_{ii}|, \quad i = 1,2,\ldots,n$ ve en azından i nin bir değeri için bu

eşitlik kesin sağlanıyorsa A matrisine köşegen dominant matris denir [16].

Teorem 1.5. Köşegen dominant bir A matrisi nonsingülerdir [13].

Tanım 1.18. A bir n-kare matris olsun. $j > i$ için $a_{ij} = 0$ ise A ya alt üçgensel matris ve $j < i$ için $a_{ij} = 0$ ise A ya üst üçgensel matris denir [15].

Teorem 1.6. $A = [a_{ij}]$, n-kare alt (veya üst) üçgensel veya köşegen matris ise

$$\det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

dir [13].

Tanım 1.19. mxn tipindeki bir A matrisinin r-kare alt matrislerinin en az birinin determinantı sıfırdan farklı ise r sayısına A matrisinin rankı denir [13].

Tanım 1.20. A bir n-kare bir matris olsun. $A' = A$ ise A ya simetrik matris denir [16].

Tanım 1.21. A bir simetrik matris olsun. $\forall X \neq \mathbf{0}$ sütun vektörü için $X'AX > 0$ ise A matrisine pozitif tanımlı matris denir [16].

Tanım 1.22.

$$[A : B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & : & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & : & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & : & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & : & b_n \end{bmatrix}$$

matrisine $AX = B$ sisteminin genişletilmiş matrisi denir.

Tanım 1.23. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\|.\| : IR^n \to IR$ fonksiyonuna IR^n de vektör normu denir [16].

$i)$ $\forall X \in IR^n$ *için* $\|X\| \geq 0$,

$ii)$ $\|X\| = 0 \Leftrightarrow X = \mathbf{0}$,

$iii)$ $\forall \alpha \in IR$ ve $\forall X \in IR^n$ için $\|\alpha X\| = |\alpha| \|X\|$,

$iv)$ $\forall X, Y \in IR^n$ için $\|X + Y\| \leq \|X\| + \|Y\|$.

Tanım 1.24. $X \in IR^n$ olmak üzere X vektörünün l_1, l_2 ve sonsuz normu

$$\|X\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |x_i| \ ,$$

$$\|X\|_2 = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|X\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i|$$

şeklindedir [16] .

Tanım 1.25. X, $Y \in IR^n$ için X ve Y arasındaki uzaklık

$\|X - Y\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2 \right\}^{1/2}$ veya $\|X - Y\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} |x_i - y_i|$ şeklinde tanımlanır [13].

Tanım 1.26. $AX = \lambda X$ eşitliğini sağlayan bir λ sayısı ve $X \neq \mathbf{0}$ vektörü varsa λ ya A nın özdeğeri , X e ise bu özdeğere karşılık gelen özvektör denir [15].

Tanım 1.27. $\rho(A) = \max|\lambda|$ ya A matrisinin spektral yarıçapı denir. Burada λ, A nın öz değeridir [13].

Teorem 1.7. IR^n de $\{X^{(k)}\}$ vektör dizisinin X e yakınsaması için gerek ve yeter şart $\|.\|$ normuna göre $\lim_{k \to \infty} x_i^k = x_i \quad i = 1,2,...,n$ olmasıdır [17].

Teorem 1.8. $\forall X \in IR^n$ için $\|X\|_\infty \le \|X\|_2 \le \sqrt{n}\|X\|_\infty$ dır [13].

Tanım 1.28. Aşağıdaki şartları sağlayan reel değerli $\|.\|$ fonksiyonuna , n- kare matrisler kümesinde tanımlı matris normu denir [16].

i) $\|A\| \ge 0$,
ii) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A = [0]$,
iii) $\forall \alpha \in R$ *için* $\|\alpha A\| = |\alpha|\|A\|$,
iv) $\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|$,
v) $\|AB\| \le \|A\|\|B\|$.

Tanım 1.29. A, n- kare matris olmak üzere A matrisinin 1- normu, 2- normu ve sonsuz normu

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le k \le n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ik}|,$$

$\|A\|_2 = \sqrt{\lambda^*}$, (λ^*, $A'A$ matrisinin en büyük özdeğeridir.)

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le n} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}|$$

şeklindedir [16].

Teorem 1.9. A, n-kare matris olmak üzere

$i)$ $\left[\rho(A'A)\right]^{\frac{1}{2}} = \|A\|_2$,

$ii)$ $\rho(A) \leq \|A\|$ dır [13].

Tanım 1.30. A, n-kare matris olsun. $\lim\limits_{k\to\infty} A^k = 0$ ise A matrisine yakınsak matris denir [13].

Teorem 1.10. Aşağıdaki ifadeler birbirine denktir.

$i)$ A yakınsak matristir,

$ii)$ $\lim\limits_{n\to\infty}\|A^n\| = 0$,

$iii)$ $\rho(A) < 1$,

$iv)$ $\forall x$ için $\lim\limits_{n\to\infty} A^n x = 0$ dır [13].

Tanım 1.31. $f : D \subset IR^n \to IR$ ye bir fonksiyon ve $x \in D$ olsun. $\forall \varepsilon > 0$ sayısı için $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - L| < \delta$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa x, x_0 noktasına yaklaşırken L sayısına f fonksiyonunun limitidir denir ve

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$$

şeklinde gösterilir [13].

Tanım 1.32. $f : D \subset IR^n \to IR$ bir fonksiyon ve $x_0 \in D$ olsun. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ limiti var ve

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

ise, f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu $\forall x \in D$ için sürekli ise, f fonksiyonuna D üzerinde süreklidir denir. $f \in C(D)$ ile gösterilir [13].

Tanım 1.33. $f_i : IR^n \to IR$, $i = 1,2,\ldots,n$ fonksiyon olmak üzere $F : D \subset IR^n \to IR^n$ fonksiyonu

$$F(X) = (f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))'$$

şeklinde verilmiş olsun.

$$\lim_{x\to x_0} F(X) = L = (L_1, L_2, \ldots, L_n)'$$

limitinin var olması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{x\to x_0} f_i(x) = L_i$$

olmasıdır [13].

Tanım 1.34. $F: D \subset IR^n \to IR^n$, $F(X) = (f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x))^t$ şeklinde bir fonksiyon ve $x_0 \in D$ olsun. $\lim_{x \to x_0} F(X)$ limiti var ve

$$\lim_{x \to x_0} F(X) = F(X_0)$$

ise , F fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer F fonksiyonu $\forall x \in D$ için sürekli ise, F fonksiyonuna D üzerinde süreklidir denir. $F \in C(D)$ ile gösterilir [13].

Tanım 1.35. f fonksiyonu a noktasını içeren bir aralıkta her mertebeden türevlenebilir olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$$

serisine f fonksiyonunun a noktası etrafındaki Taylor Serisi denir [18].

Tanım 1.36. X, K cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. $\langle . \rangle : X \times X \to K$ dönüşümü

$i) \forall x, y, z \in X$ için $\langle x+y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$,

$ii) \forall x, y \in X$ ve $a \in K$ için $\langle ax, y \rangle = a\langle x, y \rangle$,

$iii) \forall x, y \in X$ için $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$,

$iv) \langle x, x \rangle \geq 0$, $\langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta$ (θ toplama işlemine göre X de birim eleman).

özelliklerini sağlıyorsa $\langle . \rangle$ dönüşümüne X üzerinde bir iç çarpım ve (X , $\langle . \rangle$) ikilisine de bir iç çarpım uzayı denir [14].

Tanım 1.37. $X \neq \emptyset$ ve $d: X \times X \to IR^+$ dönüşümü

$i) \forall x, y \in X$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

$ii) \forall x, y \in X$ için $d(x, y) = d(y, x)$,

$iii) \forall x, y, z \in X$ için $d(x, y) + d(y, z) \geq d(x, z)$.

koşullarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir metrik, (X , d) ikilisine de metrik uzay denir [19].

Tanım 1.38. X bir iç çarpım uzayı ve $\|.\|$ iç çarpım normu olsun. d ,

$$d(x, y) = \|x - y\| = \sqrt{\langle x - y, x - y \rangle}$$

şeklinde tanımlanırsa (X , d) bir metrik uzay olur. İç çarpım normu ile tanımlanan bu d metriğine göre X iç çarpım uzayı tam ise X e Hilbert uzayı denir [19].

Tanım 1.39. $F: D \subset IR^n \to IR^n$, $F(X) = (f_1(X), f_2(X), \ldots, f_n(X))^t$ fonksiyonu için

$$J(X) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1(X)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_1(X)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_1(X)}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial f_2(X)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2(X)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_2(X)}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \dfrac{\partial f_n(X)}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_n(X)}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n(X)}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

matrisine F fonksiyonunun Jacobian matrisi denir [20].

2. BÖLÜM
LİNEER CEBİRSEL DENKLEM SİSTEMLERİNİN ÇÖZÜMÜ

n. mertebeden bir lineer cebirsel denklem sistemi genel olarak

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{array} \tag{2.1}$$

şeklindedir. Bu denklem sisteminin i. denklemi E_i olmak üzere

$$E_i : a_{i1}x_1 + \ldots + a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \ldots + a_{in}x_n = b_i, \qquad i = 1,2,\ldots,\ n$$

şeklinde veya A katsayılar matrisi, X bilinmeyenler vektörü ve B de sabitler vektörü olmak üzere

$$AX = B$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. $B=\mathbf{0}$ ise sisteme "*homojen lineer denklem sistemi*" denir. Bir homojen denklem sisteminde tüm bilinmeyenlerin sıfır olduğu bir çözüm her zaman vardır ve bu çözüme "*aşikar çözüm*" denir. Aşikar çözüm dışında çözümler de olabilir. $B \neq \mathbf{0}$ ise sisteme "*homojen olmayan lineer denklem sistemi*" denir. Homojen olmayan bir lineer denklem sisteminde bir tek çözüm olabilir, sonsuz çözüm olabilir veya çözüm olmayabilir. Bir ya da birden çok çözüm olması halinde sisteme "*tutarlı*" aksi halde "*tutarsız*" denir [18].

Homojen olmayan bir lineer denklem sistemindeki her bir denklem. Öklid uzayında bir doğru belirttiğinden böyle bir sistemin çözümü ile sistemdeki denklemlere karşılık gelen doğruların ortak noktalarının bulunması anlaşılır. Halbuki iki veya daha çok sayıdaki doğru ya bir noktada kesişirler, ya çakışıktırlar ya da kesişmezler [15].

Homojen olmayan lineer denklem sistemlerinin çözümlerine ait bazı bilgiler aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- n bilinmeyenli n tane denklemden oluşan (2.1) sisteminde A ve $[A:B]$ matrislerinin rankları aynı ise sistem tutarlıdır.
- (2.1) sisteminin tek bir çözümünün olması için katsayılar matrisinin rankının n olması gerekir. Yani det $A \neq 0$ olmalıdır.
- Tutarlı bir $AX = B$ sisteminde rank r olmak üzere $r < n$ ise bilinmeyenlerden $(n-r)$ tanesine keyfi değerler vermek suretiyle geriye kalan r tane bilinmeyen için çözüm elde edilebilir.

Homojen lineer denklem sistemlerinin çözümüne ait bilgileri ise aşağıdaki gibi özetlenebilir:

- Homojen bir sistemde sistemin rankı, $[A:0]$ genişletilmiş matrisinin rankına eşit olacağından homojen sistemler daima tutarlıdır. X=0 böyle sistemler için her zaman bir çözümdür.
- Homojen sistemlerde, sıfırdan farklı en az bir çözümün olabilmesi için gerek ve yeter şart, A matrisinin rankının n den küçük olmasıdır. n bilinmeyenli n denklemden oluşan homojen bir sistemde, sıfırdan farklı en az bir çözümün olabilmesi için gerek ve yeter şart $\det A$ =0 olmasıdır [18].

Bu bölümde $\det A \neq 0$ olmak üzere homojen olmayan denklem sistemlerinin çözümlerinde kullanılan yöntemler incelenecektir. Bu yöntemler direkt ve iterativ yöntemler olmak üzere iki gruba ayrılır.

A) Direkt Yöntemler

1) Cramer yöntemi
2) Eliminasyon Yöntemleri
   a) Gauss Yöntemi
   b) Gauss-Jordan Yöntemi
3) LU Ayrışım Yöntemleri
   a) Doolittle Yöntemi
   b) Crout Yöntemi
   c) Cholesky Yöntemi

B) İterativ Yöntemler

1) Sabit Yöntemler
   a) Jacobi İterativ Yöntemi
   b) Gauss-Seidel Yöntemi
   c) SOR Yöntemi
2) Krylov Altuzay Yöntemler
   a) Conjugate Gradient(CG) Yöntemi
   b) Conjugate Residual(CR) Yöntemi
   c) Generalised Conjugate Residual(GCR) Yöntemi
   d) Orthogonal Minimisation(orthomin) Yöntemi
   e) Biconjugate Gradient (BCG) Yöntemi
   f) Conjugate Gradient Squared (CGS) Yöntemi

2.1. Direkt Yöntemler

Lineer denklem sistemlerinin çözümlerinde çok sık kullanılan ve sonucu sabit bir adım sayısında veren yöntemlerdir.

2.1.1 Cramer Yöntemi

(2.1) ile verilen lineer denklem sisteminin katsayılar matrisinin determinantının sıfırdan farklı olması halinde kullanılan en eski yöntemlerden birisidir. Bu yöntemde determinantlar kullanılarak çözüm elde edilir. Katsayılar matrisinin determinantı D ve katsayılar matrisinde i. sütun yerine B sabitler vektörünün yazılmasıyla elde edilen matrisin determinantı D_i olmak üzere (2.1) denklem sisteminin çözümü

$$x_1 = \frac{D_1}{D}, \quad x_2 = \frac{D_2}{D}, \quad ..., \quad x_n = \frac{D_n}{D}$$

şeklinde bulunur [15].

Cramer yöntemi denklem sisteminin küçük boyutlu olması halinde iyi sonuçlar veren bir analitik çözüm yöntemi olmasına rağmen sistemin boyutları büyüdüğünde hesaplanacak determinantların da boyutları büyüyeceğinden pratik bir yöntem olmaktan çıkar [15].

Örnek 2.1.1.

$$\begin{aligned} 3x_1 - x_2 + 2x_3 &= 12 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 11 \\ 2x_1 - 2x_2 - x_3 &= 2 \end{aligned}$$

denklem sisteminin Cramer yöntemi ile çözümü:

Çözüm: $$D = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix} = -7 \neq 0$$

olduğundan sistemin bir tek çözümü vardır.

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 12 & -1 & 2 \\ 11 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & -1 \end{vmatrix}}{-7} = 3, \quad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 12 & 2 \\ 1 & 11 & 3 \\ 2 & 2 & -1 \end{vmatrix}}{-7} = 1, \quad x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & -1 & 12 \\ 1 & 2 & 11 \\ 2 & -2 & 2 \end{vmatrix}}{-7} = -2$$

olup sistemin çözümü $(x_1, x_2, x_3) = (3, 1, -2)$ olarak bulunur.

2.1.2 Eliminasyon Yöntemleri

Bu yöntemler elemanter satır işlemlerini kullanarak denklem sistemini daha basit bir forma indirgeyerek çözmeyi amaçlayan yöntemlerdir. (2.1) ile verilen denklem sisteminde, elemanter işlem olarak bilinen ve bir lineer denklem sistemini aynı çözüme sahip olan fakat daha basit bir sisteme indirgeyen üç tip elemanter işlemden söz edilebilir. Bunlar:

i) E_i denklemi sıfırdan farklı bir λ sayısı ile çarpılarak elde edilen sonuç, E_i yerine kullanılabilir. Bu işlem $(E_i) \rightarrow (\lambda E_i)$ olarak tanımlanır.

ii) E_j denklemi herhangi bir λ ile çarpılıp, E_i denklemi ile toplanır ve bulunan sonuç E_i yerine kullanılabilir. Bu işlem $(E_i) \rightarrow (E_i + \lambda E_j)$ olarak tanımlanır.

iii) E_i ile E_j denklemleri yer değiştirebilir. Bu işlem $(E_i) \leftrightarrow (E_j)$ olarak tanımlanır [16].

2.1.2.1. Gauss Eliminasyon Yöntemi

Direkt yöntemlerin içinde denklem sistemlerinin çözümü için kullanılan en önemli yöntemlerden biridir. $AX = B$ denklem sistemi elemanter satır işlemleri ile U üst üçgensel matris olmak üzere $UX = G$ sistemine dönüştürülür ve son satırdan itibaren geri yerine koymak suretiyle bilinmeyenler elde edilir. Verilen denklem sisteminin birinci denkleminde x_1 in katsayısı $a_{11} \neq 0$ ise birinci denklem pivot denklem olarak seçilir ve bu denklem yardımıyla ikinci denklemden n . denkleme kadar x_1 bilinmeyeni yok edilir. Bunun için pivot denklem $m_{i1} = a_{i1} / a_{11}$, i=2,..., n sayıları ile sırasıyla çarpılarak $i.$ denklemden çıkarılıp $i.$ denklemde yazılır. Bu işlem $E_i \rightarrow E_i - m_{i1}E_1$ şeklinde ifade edilebilir. Yani

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}a_{ij}^{(1)} \qquad i, j = 2.3.....n$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1}b_1^{(1)} \qquad i = 2.3.....n$$

olur. Bu durumda $A^{(1)}X = B^{(1)}$ sistemi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13}\cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)}\cdots & a_{2n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(1)} & a_{n3}^{(1)}\cdots & a_{nn}^{(1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(1)} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

İkinci adımda, ikinci denklemin köşegen üzerindeki elemanı yani $a_{22}^{(1)} \neq 0$ ise ikinci denklem pivot denklem olarak seçilir ve bu denklem yardımıyla üçüncü denklemden n. denkleme kadar x_2 bilinmeyenleri yok edilir. Bunun için pivot denklem $m_{i2} = a_{i2}^{(1)} / a_{22}^{(1)}$ sayıları ile sırasıyla çarpılarak i. denklemden çıkarılır ve i. denklemde yerine yazılır. Bunu $E_i \to E_i - m_{i2}E_2$ şeklinde ifade edebiliriz. Yani,

$$a_{ij}^{(3)} = a_{ij}^{(2)} - m_{i2}a_{2j}^{(2)} \qquad i,j = 3,4,\ldots,n$$
$$b_i^{(3)} = b_i^{(2)} - m_{i2}b_2^{(2)} \qquad i = 3,4,\ldots,n$$

olur. O zaman $A^{(2)}X = B^{(2)}$ sistemi

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & a_{n3}^{(2)} & \ldots & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

şeklini alır. Bu şekilde devam ederek (n-1). adımdan sonra

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots & a_{1n} \\ 0 & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & \ldots & a_{2n}^{(1)} \\ 0 & 0 & a_{33}^{(2)} & \ldots & a_{3n}^{(2)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_{nn}^{(n-1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2^{(1)} \\ b_3^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

$A^{(n-1)}X = B^{(n-1)}$ elde edilir. $U = A^{(n-1)}$ ve $G = B^{(n-1)}$ olsun. $UX = G$ lineer denklem sisteminin katsayılar matrisi üst üçgensel matristir ve çözüm,

$$x_n = \frac{1}{u_{nn}} g_n$$

$$x_k = \frac{1}{u_{kk}} \left(g_k - \sum_{j=k+1}^{n} u_{kj} x_j \right), \qquad k = n-1,\ n-2,\ldots,2,1$$

şeklinde kolayca elde edilir [21].

Örnek 2.1.2.

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0$$
$$2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 3$$
$$-x_1 - 3x_2 = 0$$

denklem sisteminin Gauss-eleme yöntemi ile çözümü:

Çözüm: **1.Adım:** $m_{i1} = a_{i1} / a_{11}, \quad i = 2,3$

$m_{21} = a_{21} / a_{11} = 2/1 = 2 \Rightarrow E_2 \rightarrow E_2 - 2E_1$
$m_{31} = a_{31} / a_{11} = -1/1 = -1 \Rightarrow E_3 \rightarrow E_3 + E_1$

elemanter satır işlemleri uygulanırsa

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_2 + x_3 &= 3 \\ -x_2 + x_3 &= 2 \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir.

2.Adım: $m_{i2} = a_{12} / a_{22} \quad , i = 3$

$$m_{32} = a_{32} / a_{22} = 1/2 \Rightarrow E_3 \rightarrow E_3 - m_{32}E_2 = E_3 - 1/2E_2$$

elemanter satır işlemi uygulanırsa

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_2 + x_3 &= 3 \\ \frac{1}{2}x_3 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

denklem sistemi elde edilir. Bu denklem sisteminin katsayılar matrisi üst üçgensel matristir, dolayısıyla çözüm kolayca elde edilir.

$$\frac{1}{2}x_3 = \frac{1}{2} \Rightarrow x_3 = 1$$

olarak bulunur. Bu ikinci denklemde yerine yazılırsa

$-2x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow -2x_2 + 1 = 3 \Rightarrow \quad -2x_2 = 2 \Rightarrow x_2 = -1$

olup x_2 ve x_3 bilinmeyenleri birinci denklemde yerine yazılırsa

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + 2(-1) + 1 = 0 \Rightarrow x_1 = 1$$

olarak bulunur. O halde sistemin çözümü $(x_1, x_2, x_3) = (1,-1,1)$ bulunur [21].

Eliminasyon yönteminin her adımında pivot denklemin esas köşegeni üzerindeki elemanının yani $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ olduğu kabul edildi. Bu varsayımdan hareket ederek eliminasyon yönteminin her adımına başlarken pivot elemanın sıfırdan farklı bir eleman olması için gerekirse denklemlerin yerleri değiştirilebilir. Fakat tam çözümü elde etmek için sadece pivot elemanın sıfırdan farklı olması yeterli değildir. Aynı zamanda pivot elemanın mutlak değerce diğer elemanlardan çok küçük olması da tam çözümden uzaklaşılmasına sebep olur. Bu durumda kısmi veya tam pivotlama yapılarak çözüm bulunabilir [21].

i) Kısmi Pivotlama: Sadece pivot elemanın büyük yapılması durumudur.

ii) Tam Pivotlama: $a_{ij}^{(k)}$ elemanlarının tamamının mutlak değerce en büyüğünün seçilmesidir

Örnek 2.1.3.

$$\begin{aligned} 0.729x_1 + 0.81x_2 + 0.9x_3 &= 0.6867 \\ x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= 0.8338 \\ 1.331\,x_1 + 1.21\,x_2 + 1.1\,x_3 &= 1.0000 \end{aligned}$$

sisteminin Gauss eleme yöntemi ile çözümü:

Çözüm: Pivotlama yapmadan Gauss eleme yöntemi uygulanırsa

1.Adım: $m_{i1} = a_{i1} / a_{11}, \quad i = 2.3$

$$m_{21} = a_{21} / a_{11} = 1/0.729 = 1.372 \Rightarrow E_2 \rightarrow E_2 - 1.372E_1$$
$$m_{31} = a_{31} / a_{11} = 1.331/0.729 = 1.826 \Rightarrow E_3 \rightarrow E_3 - 1.826E_1$$

olup sistem

$$\begin{aligned} 0.729x_1 + 0.81x_2 + \quad 0.9x_3 &= \quad 0.6867 \\ -0.1110x_2 - \quad 0.235x_3 &= -0.1084 \\ -0.2690x_2 - \quad 0.543x_3 &= -0.254 \end{aligned}$$

şeklinde olur.

2.Adım: $m_{i2} = a_{i2} / a_{22}, \quad i = 3$

$$m_{32} = a_{32} / a_{22} = -0.2690/-0.1110 = 2.423 \Rightarrow E_3 \rightarrow E_3 - 2.423E_2$$

olduğundan denklem sistemi,

$$\begin{aligned} 0.729x_1 + 0.81x_2 + \quad 0.9x_3 &= \quad 0.6867 \\ -0.1110x_2 - 0.235x_3 &= -0.1084 \\ 0.0264\,x_3 &= \quad 0.0087 \end{aligned}$$

şeklinde olup üçüncü denklemden x_3=0.3295 bulunur bu ikinci denklemde yerine yazılırsa x_2=0.2790 bulunur, x_2 ve x_3 ilk denklemde yerine yazılırsa x_1=0.2252 olarak bulunur.

Sistem kısmi pivotlama yapılarak Gauss eleme yöntemi ile çözülürse:

1.Adım: $E_1 \leftrightarrow E_3$ yazılıp çözüme başlanırsa

$$\begin{aligned} 1.331x_1 + 1.21x_2 + 1.1x_3 &= 1.0000 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -0.1084 \\ x_3 &= 0.0087 \end{aligned}$$

olur.

$m_{i1} = a_{i1} / a_{11}, \quad i = 2,3$

$m_{21} = a_{21} / a_{11} = 1/1.331 = 0.7513 \Rightarrow E_2 \to E_2 - 0.7513E_1$

$m_{31} = a_{31} / a_{11} = 0.729/1.331 = 0.5477 \Rightarrow E_3 \to E_3 - 0.5477E_1$

elemanter satır işlemleri ile verilen denklem sistemi

$$\begin{aligned} 1.331x_1 + 1.21x_2 + 1.1x_3 &= 1.0000 \\ 0.0909x_2 + 0.1736x_3 &= 0.0825 \\ 0.1473x_2 + 0.2975x_3 &= 0.1390 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

2.Adım: $E_2 \leftrightarrow E_3$ yapılırsa

$$\begin{aligned} 1.331x_1 + 1.21x_2 + 1.1x_3 &= 1.0000 \\ 0.1473x_2 + 0.2975x_3 &= 0.1390 \\ 0.0909x_2 + 0.1736x_3 &= 0.0825 \end{aligned}$$

olur.

$m_{i2} = a_{i2} / a_{22} = 0.9090/0.1473 = 0.6171 \Rightarrow E_3 \to E_3 - 0.6171E_2$

elemanter satır işlemleri ile denklem sistemi

$$\begin{aligned} 1.331x_1 + 1.21x_2 + 1.1x_3 &= 1.0000 \\ 0.1473x_2 + 0.2975x_3 &= 0.1390 \\ -0.01x_3 &= -0.00328 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Üçüncü denklemden x_3=0.3280 bulunur bu ikinci denklemde yerine yazılırsa x_2=0.2812 , x_2 ve x_3 ilk denklemde yerine yazılırsa x_1=0.2246 olarak bulunur.

Sistem tam pivotlama yapılarak Gauss eleme yöntemi ile çözülürse:

1.Adım: $E_1 \leftrightarrow E_3$ yazılıp çözüme başlanırsa

$$\begin{aligned} 1.331\,x_1 + 1.21\,x_2 + 1.1x_3 &= 1.0000 \\ x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 &= 0.8338 \\ 0.729x_1 + 0.81\,x_2 + 0.9x_3 &= 0.6867 \end{aligned}$$

olur.

$m_{i1} = a_{i1} / a_{11}, \quad i = 2,3$

$m_{21} = a_{21} / a_{11} = 1/1.331 = 0.7513 \Rightarrow E_2 \rightarrow E_2 - 0.7513E_1$

$m_{31} = a_{31} / a_{11} = 0.729/1.331 = 0.5477 \Rightarrow E_3 \rightarrow E_3 - 0.5477E_1$

elemanter satır işlemleri ile verilen denklem sistemi

$$\begin{aligned} 1.331x_1 + 1.21x_2 + \quad 1.1x_3 &= 1.0000 \\ 0.0909x_2 + 0.1736x_3 &= 0.0825 \\ 0.1473x_2 + 0.2975x_3 &= 0.1390 \end{aligned}$$

şeklinde elde edilir.

2.Adım: $E_2 \leftrightarrow E_3$ ve $D_2 \leftrightarrow D_3$ yapılırsa sistem

$$\begin{aligned} 1.331x_1 + \ 1.1x_3 + \quad 1.21x_2 &= 1.0000 \\ 0.2975x_3 + \ 0.1473x_2 &= 0.1390 \\ 0.1736x_3 + \ 0.0909x_2 &= 0.0825 \end{aligned}$$

şeklinde olur. $m_{i2} = a_{i2} / a_{22}, \quad i = 3 \ \ için \quad E_3 \rightarrow E_3 - m_{32}E_2$ yapılarak işlemler tamamlanırsa x_1=0.22455, x_2=0.281345, x_3 =0.3279 sonuçları elde edilir.

Aşağıdaki tabloda Gauss eleme (GE), Kısmi Pivotlama ile Gauss eleme (KPGE), Tam Pivotlama ile Gauss eleme (TPGE) yöntemlerinden elde edilen sonuçlar verildi.

Tablo 2.1. Örnek 2.1.3 için Gauss eleme, kısmi pivotlama ve tam pivotlama ile elde edilen sonuçlar

	GE	KPGE	TPGE	Tam Çözüm
x_1	0.2252	0.2246	0.2245	0.2245
x_2	0.2790	0.2812	0.2813	0.2814
x_3	0.3295	0.3280	0.3279	0.3279

Gauss-Eliminasyon sürecinin pivotlama yapmadan gerçekleşmesi için A katsayılar matrisinin köşegen üzerindeki elemanlarının sıfırdan farklı olması gerekir. Bu şartın sağlanıp sağlanmadığı eliminasyon süreci içinde belli olur. Fakat daha işleme başlamadan eliminasyon sürecinin çalışıp çalışmayacağını veya hangi formda (pivotlamalı veya pivotlamasız) çalışacağını bilmek büyük önem taşır. Aşağıdaki özel durumlarda Gauss-Eliminasyon süreci pivotlamaya ihtiyaç duyulmadan gerçekleşebilir [16].

- A katsayılar matrisi simetrik ve pozitif tanımlıdır.
- A katsayılar matrisi köşegen dominanttır .

2.1.2.2. Gauss – Jordan Yöntemi

Bu yöntem pivotlama işlemini içermesi bakımından eliminasyon yöntemine benzemektedir. Eliminasyon yönteminden farklı olarak bu yöntemde bir takım uygun elemanter satır işlemlerinin kullanımı ile köşegen üzerindeki ve köşegen altındaki bilinmeyenler yok edilerek sistem köşegen sisteme dönüştürülür. Bu dönüştürme işlemi Gauss eleme yöntemine benzer şekilde yapılır. Eliminasyonun k. adımında pivot eleman Gauss eleme yöntemindeki gibi seçilir ve

$$a_{kj}^{(k+1)} = a_{kj}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$$
$$b_k^{(k+1)} = b_k^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \qquad j = k,\dots,n$$

tanımlanır ve k. denklemin alt ve üstündeki denklemlerden x_k bilinmeyeni yok edilir. Daha sonra

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{ik}^{(k)} a_{kj}^{(k-1)}$$
$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - a_{ik}^{(k)} b_k^{(k+1)} \qquad j = k,\dots,n, \qquad i = 1,\dots,n, \qquad i \neq k$$

için tanımlanırsa $[A : B]$ yapısı $[I : B^{(n)}]$ ye dönüşür ve böylece yukarıdaki eliminasyon $X = B^{(n)}$ şeklinde tamamlanmış olur.

Örnek 2.1.4.
$$x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 11$$
$$4x_1 - x_2 + x_3 = 8$$
$$2x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 3$$

denklem sisteminin Gauss-Jordan yöntemi ile çözümü:

Çözüm: **1.Adım:** $m_{i1} = a_{i1} / a_{11}, \quad i = 2.3$

$$m_{21} = a_{21} / a_{11} = 4/1 = 4 \Rightarrow E_2 \to E_2 - 4E_1$$
$$m_{31} = a_{31} / a_{11} = 2/1 = 2 \Rightarrow E_3 \to E_3 - 2E_1$$

olduğuna göre denklem sistemi

$$
\begin{aligned}
x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 11 \\
-9x_2 - 15x_3 &= -36 \\
-x_2 - 6x_3 &= -19
\end{aligned}
$$

olur.

2.Adım: $m_{i2} = a_{i2} / a_{22}, \quad i = 1,3.$

$$
\begin{aligned}
m_{12} &= a_{12} / a_{22} = 2/-9 \Rightarrow E_1 \to E_1 + 2/9E_2 \\
m_{32} &= a_{32} / a_{22} = 1/-9 \Rightarrow E_3 \to E_3 + 1/9E_2
\end{aligned}
$$

olup denklem sistemi

$$
\begin{aligned}
x_1 + \quad \frac{2}{3}x_3 &= 3 \\
-9x_2 - 15x_3 &= -36 \\
-\frac{23}{3}x_3 &= -23
\end{aligned}
$$

şeklinde bulunur.

3.Adım: $m_{i3} = a_{i3} / a_{33}, \quad i = 1,2$

$$
\begin{aligned}
m_{13} &= a_{13} / a_{33} = -2/23 \Rightarrow E_1 \to E_1 + 2/23E_3 \\
m_{23} &= a_{23} / a_{33} = 45/23 \Rightarrow E_2 \to E_2 - 45/23E_3
\end{aligned}
$$

elemanter satır işlemleri uygulanırsa,

$$
\begin{aligned}
x_1 + 0x_2 + 0x_3 &= 1 \\
0x_1 - 9x_2 + 0x_3 &= 9 \\
0x_1 + 0x_2 - \frac{23}{3}x_3 &= -23
\end{aligned}
$$

denklem sistemi elde edilir ve çözüm $x_1 = 1$, $x_2 = -1$, $x_3 = 3$ olarak bulunur.

Gauss- Jordan yöntemi, A katsayılar matrisinin köşegen üzerindeki elemanları sıfırdan farklı olduğu durumlarda çalışır [13].

2.1.3. LU Ayrıştırma Yöntemleri

LU ayrıştırma yöntemleri, katsayılar matrisinin, bir alt üçgensel matris ile bir üst üçgensel matrisin çarpımı olarak yazılabilmesi esasına dayanmaktadır [13].

LU ayrışım yöntemleri katsayılar matrisi aynı fakat lineer denklem sistemlerinin sağ tarafındaki sabitler vektörü farklı olan birden fazla lineer denklem sistemleri için çözümler elde edilmek istendiğinde oldukça pratik bir yöntemdir.

$AX=B$ denklem sisteminde, A katsayılar matrisinin üst üçgensel matrisi U ve alt üçgensel matrisi L olmak üzere $A=LU$ şeklinde yazılabilirse $AX=B$ yerine $LUX=B$ yazılabilir. Bu eşitlikte $UX=Y$ olarak alınırsa denklem sistemi $LY=B$ halini alır. Önce ileri yerine koyma yöntemiyle $LY=B$ denkleminden Y bilinmeyenleri daha sonra da geri yerine koyma yöntemi ile $UX=Y$ denkleminden X bilinmeyenleri elde edilir [22].

Teorem 2.1. A katsayılar matrisi singüler olmayan, U ve L ise (2.2) deki gibi belirlenmiş matrisler olmak üzere eliminasyon süreci pivotlama yapılmaksızın gerçekleşmiş ise bu durumda $LU=A$ olur [16].

2.1.3.1. Doolittle Yöntemi

Doolittle yönteminde A katsayılar matrisi

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & u_{33} & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}}_{U} \qquad (2.2)$$

şeklinde alt ve üst üçgensel iki matrisin çarpımı olarak yazılır [23].

Örnek 2.1.5.

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \; x_4 &= 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \\ -x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4 \end{aligned}$$

denklem sisteminin Doolittle yöntemi ile çözümü:

Çözüm:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} \\ u_{11}l_{21} & u_{12}l_{21}+u_{22} & u_{13}l_{21}+u_{23} & u_{14}l_{21}+u_{24} \\ u_{11}l_{31} & u_{12}l_{31}+u_{22}l_{32} & u_{13}l_{31}+u_{23}l_{32}+u_{33} & u_{14}l_{31}+u_{24}l_{32}+u_{34} \\ u_{11}l_{41} & u_{12}l_{41}+u_{22}l_{42} & u_{13}l_{41}+u_{23}l_{42}+u_{33}l_{43} & u_{14}l_{41}+u_{24}l_{42}+u_{34}l_{43}+u_{44} \end{bmatrix}$$

olup matrislerin eşitliği tanımına göre

$u_{11}=1$ $\quad u_{12}=1$ $\quad u_{13}=0$ $\quad u_{14}=3$

$u_{11}l_{21}=2$ $\quad u_{12}\,l_{21}+u_{22}=1$ $\quad u_{13}\,l_{21}+u_{23}=-1$ $\quad u_{14}\,l_{21}+u_{24}=1$

$u_{11}\,l_{31}=3$ $\quad u_{12}\,l_{31}+u_{22}\,l_{32}=-1$ $\quad u_{13}\,l_{31}+u_{23}\,l_{32}+u_{33}=-1$ $\quad u_{14}l_{31}+u_{24}\,l_{32}+u_{34}=2$

$u_{11}\,l_{41}=1$ $\quad u_{12}\,l_{41}+u_{22}\,l_{42}=2$ $\quad u_{13}\,l_{41}+u_{23}\,l_{42}+u_{33}\,l_{43}=3$ $\quad u_{14}\,l_{41}+u_{24}\,l_{42}+u_{34}\,l_{43}+u_{44}=-1$

eşitlikleri yazılabilir ve bu eşitliklerden L ve U matrisleri

$$L=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 1 & 0\\ -1 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad U=\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 3 & 13\\ 0 & 0 & 0 & -13\end{bmatrix}$$

şeklinde elde edilir. $LY=B$ denklem sistemi

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 4 & 1 & 0\\ -1 & -3 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}y_1\\ y_2\\ y_3\\ y_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ 1\\ -3\\ 4\end{bmatrix}$$

şeklinde olduğuna göre $y_1=4,\quad y_2=-7,\quad y_3=13,\quad y_4=-13$ olarak bulunur.

$UX=Y$ denklem sisteminden

$$\begin{bmatrix}1 & 1 & 0 & 3\\ 0 & -1 & -1 & -5\\ 0 & 0 & 3 & 13\\ 0 & 0 & 0 & -13\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\\ x_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4\\ -7\\ 13\\ -13\end{bmatrix}$$

$x_1=-1,\quad x_2=2,\quad x_3=0,\quad x_4=1$ olarak bulunur.

Teorem 2.2. $n\times n$ tipinde singüler olmayan herhangi bir A matrisi

$$PA=LU$$

şeklinde parçalanabilir. Burada P permütasyon matris, L ve U (2.2) deki gibi matrislerdir [16].

2.1.3.2. Crout Yöntemi

Crout yönteminde A katsayılar matrisi

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & 1 & u_{23} & \cdots & u_{2n} \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & u_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 \end{bmatrix}}_{U}$$

şeklinde alt ve üst üçgensel matrislerin çarpımı olarak yazılır [22].

Örnek 2.1.6. $2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5$

$$x_1 - x_2 - 3x_3 = -9$$

$$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

denklem sisteminin Crout yöntemi ile çözümü:

Çözüm: $A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$= \begin{bmatrix} l_{11} & u_{12}l_{11} & u_{13}l_{11} \\ l_{21} & u_{12}l_{21} + l_{22} & u_{13}l_{21} + u_{23}l_{22} \\ l_{31} & u_{12}l_{31} + l_{32} & u_{13}l_{31} + u_{23}l_{32} + l_{33} \end{bmatrix}$$

matris eşitliği tanımına göre,

l_{11}=2 $u_{12}\,l_{11}$=4 $u_{13}\ l_{11}$=-1

l_{21}=1 $u_{12}\,l_{21}+l_{22}$=1 $u_{13}\,l_{21}+u_{23}\,l_{22}$=-3

l_{31}=4 $u_{12}\ l_{31}+l_{32}$=1 $u_{13}\,l_{31}+u_{23}\,l_{32}+l_{33}$=2

eşitlikleri yazılabilir. Bu durumda L ve U matrisleri ,

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -7 & 43/2 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. $LY = B$ denklem sistemi,

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -7 & 43/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ -9 \\ 9 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre $y_1 = -5/2$, $y_2 = 13/2$, $y_3 = 3$ olarak bulunur. $UX = Y$ denklem sistemi,

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5/2 \\ 13/2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

olduğuna göre $x_1 = 1, \quad x_2 = -1, \quad x_3 = 3$ olarak bulunur.

2.1.3.3. Cholesky Yöntemi

A katsayılar matrisi simetrik ve pozitif tanımlı olsun. Bu yöntemde $U = L'$ olmak üzere $A = LL'$ şeklinde yazılır. Yani A katsayılar matrisi

$$\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & l_{n3} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} & \cdots & l_{n1} \\ 0 & l_{22} & l_{32} & \cdots & l_{n2} \\ 0 & 0 & l_{33} & \cdots & l_{n3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix}}_{L'} \tag{2.3}$$

olacak şekilde alt üçgensel L matrisi ile L matrisinin transpozunun çarpımına eşittir [21].

Örnek 2.1.7.

$$\begin{aligned} 4x_1 - x_2 + x_3 &= 1 \\ -x_1 + 4.25x_2 + 2.75x_3 &= -1 \\ x_1 + 2.75x_2 + 3.5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

denklem sisteminin Cholesky yöntemi ile çözümü:

Çözüm: A matrisi simetrik pozitif tanımlı olduğundan

$$L = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix}, \quad U = L' = \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

olmak üzere katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 & 1 \\ -1 & 4.25 & 2.75 \\ 1 & 2.75 & 3.5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} l_{11} & l_{21} & l_{31} \\ 0 & l_{22} & l_{32} \\ 0 & 0 & l_{33} \end{bmatrix}$$

$$
=\begin{bmatrix} l_{11}^2 & l_{11}l_{21} & l_{11}l_{31} \\ l_{11}l_{21} & l_{21}^2+l_{22}^2 & l_{21}l_{31}+l_{22}l_{32} \\ l_{11}l_{31} & l_{21}l_{31}+l_{22}l_{32} & l_{31}^2+l_{32}^2+l_{33}^2 \end{bmatrix}
$$

şeklinde yazılır. Tanım 1.9 dan

$$
\begin{array}{lll}
l_{11}^2 = 4 & l_{11}l_{21} = -1 & l_{11}l_{31} = 1 \\
l_{11}l_{21} = -1 & l_{21}^2+l_{22}^2 = 4.25 & l_{21}l_{31}+l_{22}l_{32} = 2.75 \\
l_{11}l_{31} = 1 & l_{21}l_{31}+l_{22}l_{32} = 2.75 & l_{31}^2+l_{32}^2+l_{33}^2 = 3.5
\end{array}
$$

eşitlikleri yazılabilir ve bu eşitliklerden L ,U matrisleri

$$
L=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 2 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}, \quad U=L'=\begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}
$$

şeklinde elde edilir. $LY=B$ denklem sistemi,

$$
\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1/2 & 2 & 0 \\ 1/2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

şeklinde yazılırsa çözüm $y_1 = 1/2$, $y_2 = -3/8$, $y_3 = 5/16$ olarak elde edilir. $UX = L'X = Y$ denklem sistemi

$$
\begin{bmatrix} 2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1/2 \\ -3/8 \\ 5/16 \end{bmatrix}
$$

şeklinde yazılarak çözüm $x_1 = 17/256$, $x_2 = -27/64$, $x_3 = 5/16$ olarak bulunur.

Teorem 2.3. Simetrik ve pozitif tanımlı herhangi bir A matrisi

$$
A = LL'
$$

biçiminde parçalanabilir. Burada L (2.3) deki gibi bir matristir [16].

2.2. İterativ Yöntemler

2.2.1. Sabit Yöntemler

İterativ yöntemler, $AX=B$ sistemini T, $n\times n$ tipinde bir matris ve C sabit bir vektör olmak üzere $X=T\ X+C$ eşdeğer sistemine dönüştüren yöntemlerdir. $X^{(0)}$

başlangıç değeri seçildikten sonra $\forall\, k=1,2,3,...$ için $X=TX+C$ denklemi çözülerek yaklaşık çözüm için bir vektör dizisi oluşturulur.

İterativ yöntemler genellikle elemanlarının çoğu sıfır olan yüksek boyutlu denklem sistemlerinin çözümünde, hem bilgisayar hafızasını az kullanması hem de hesaplama süresinin kısa olması bakımından tercih edilen yöntemlerdir.

$AX=B$ denklem sisteminde $X=TX+C$ şeklinde bir vektör sistemi oluşturmak için A matrisinin köşegeni üzerindeki elemanları sıfırdan farklı olmalıdır. Bu şart sağlandıktan sonra T ve C yi elde etmek için birinci denklemden x_1, ikinci denklemden x_2 ve benzer şekilde $n.$ denklemden x_n çözülür . Yani (2.1) ile verilen sistemin köşegeni üzerindeki elemanları sıfırdan farklı ise

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{a_{11}}\,(b_1 - a_{12}x_2 - a_{13}x_3 - \ldots - a_{1n}x_2) \\
x_2 &= \frac{1}{a_{22}}\,(b_2 - a_{21}x_1 - a_{23}x_3 - \ldots - a_{2n}x_n) \\
&\vdots \\
x_n &= \frac{1}{a_{nn}}\,(b_n - a_{n1}x_1 - a_{n2}x_2 - \ldots - a_{n,n-1}x_{n-1})
\end{aligned}
\tag{2.4}
$$

ve bu sistemin $i.$ denklemi

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{1}{a_{ii}}(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{i,i+1}x_{i+1} + \ldots + a_{in}x_n)$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda T ve C

$$T = \begin{bmatrix} 0 & \frac{-a_{12}}{a_{11}} & \cdots & \frac{-a_{1n}}{a_{11}} \\ \frac{-a_{21}}{a_{22}} & 0 & \cdots & \frac{-a_{2n}}{a_{22}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{-a_{n1}}{a_{nn}} & \frac{-a_{n2}}{a_{nn}} & \cdots & 0 \end{bmatrix} \text{ ve } C = \begin{bmatrix} \frac{b_1}{a_{11}} \\ \frac{b_2}{a_{22}} \\ \vdots \\ \frac{b_n}{a_{nn}} \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir [21].

2.2.1.1. Jacobi İterativ Yöntemi

(2.4) denklem sisteminin

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(m)} - a_{13}x_3^{(m)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(m)})$$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(m)} - a_{23}x_3^{(m)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(m)})$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(m+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(m)} - a_{n2}x_2^{(m)} - \cdots - a_{n,n-1}x_n^{(m)})$$

şeklinde yazılarak çözümü bulmayı amaçlayan bir yöntemdir ve

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}) \quad i=1,2,\ldots,\ n$$

şeklinde veya matris formunda

$$X^{(m+1)} = TX^{(m)} + C$$

şeklinde yazılabilir. Bu yöntemde başlangıç değeri $X_i^{(0)}=\mathbf{0}$ seçilerek işlemlere başlanır ve her bir $m = 0,1,2,\ldots$ için ($X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}\ldots$) değerleri sırası ile elde edilir. Bu yöntemde bir önceki adımda elde edilen değerler bir sonraki adımda kullanılarak çözüme gidilmektedir [22].

Örnek 2.2.1.

$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 \quad\quad &= 1 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 \quad &= 2 \\ -x_2 + 2x_3 - x_4 &= 3 \\ -x_3 + 2x_4 &= 4 \end{aligned}$$

sisteminin Jacobi iterativ yöntemi ile çözümü:

Çözüm: Bu denklem sisteminin tam çözümü x_1=4, x_2=7, x_3=8, x_4=6 dır. Verilen denklem sisteminden

$$x_1 = \frac{1}{2}(1+x_2)\ , \qquad x_2=\frac{1}{2}\ (2+x_1+x_3)\ , \qquad x_3=\frac{1}{2}\ (3+x_2+x_4)\ , \qquad x_4=\frac{1}{2}\ (4+x_3)$$

yazılır ve bu denklemlerden

$$
\begin{aligned}
x_1^{(m+1)} &= \frac{1}{2}(1 + x_2^{(m)}) \\
x_2^{(m+1)} &= \frac{1}{2}(2 + x_1^{(m)} + x_3^{(m)}) \\
x_3^{(m+1)} &= \frac{1}{2}(3 + x_2^{(m)} + x_4^{(m)}) \\
x_4^{(m+1)} &= \frac{1}{2}(4 + x_3^{(m)})
\end{aligned}
\qquad m = 0,1,2,... \qquad (2.5)
$$

iterasyon denklemleri elde edilir. Başlangıç değerleri $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0$ olarak alındığında,

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{2}(1+x_2^{(0)}) = 0.500000$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{2}(2+x_1^{(0)}+x_3^{(0)})=1.000000$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{2}(3+x_2^{(0)}+x_4^{(0)})=1.500000$$

$$x_4^{(1)} = \frac{1}{2}(4+x_3^{(0)}) =2.000000$$

elde edilir. $m=1$ için yapılacak iterasyonda bu yeni değerler kullanılmaktadır. Bu şekilde devam edilerek elde edilen sonuçlar Tablo 2.2 de verildi.

Tablo 2.2. Örnek 2.2.1 için Jacobi iterativ yöntemi ile elde edilen sonuçlar

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$	$x_4^{(m)}$	$\lVert x^{(m)} - x^{(m-1)} \rVert$
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
1	0.500000	1.000000	1.500000	2.000000	1.5
2	1.000000	2.000000	3.000000	2.750000	1.8
3	1.500000	3.000000	3.875000	3.500000	8×10^{-1}
4	2.000000	3.690000	4.750000	3.940000	6.8×10^{-1}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
67	3.999997	6.999994	7.999995	5.999997	3.2×10^{-6}
68	3.999997	6.999996	7.999996	5.999997	2.0×10^{-6}
69	3.999998	6.999997	7.999996	5.999998	1.0×10^{-6}
70	3.999999	6.999998	7.999997	5.999998	1.0×10^{-6}

Teorem 2.4. $X^{(m+1)} = TX^{(m)} + C$ iterasyon sürecinin keyfi $X^{(0)}$ ve C için yakınsak olması ancak ve ancak T matrisinin bütün özdeğerlerinin modülce 1 den küçük olmasına

bağlıdır. Bunun için de T matrisinin aşağıdaki şekilde tanımlanan normlarının 1 den küçük olması gerekir. Buna göre

$$\sum_{i=1}^{n} |t_{ij}| < 1, \qquad 1 \le j \le n$$

$$\sum_{j=1}^{n} |t_{ij}| < 1, \qquad 1 \le i \le n \qquad \text{veya}$$

$$\sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} |t_{ij}|^2 < 1$$

olmalıdır [13].

2.2.1.2.Gauss-Seidel Yöntemi

Jacobi yöntemini biraz daha hızlandırmak için geliştirilmiş bir yöntemdir. (2.4) denklem sistemini

$$x_1^{(m+1)} = \frac{1}{a_{11}}(b_1 - a_{12}x_2^{(m)} - a_{13}x_3^{(m)} - \cdots - a_{1n}x_n^{(m)})$$

$$x_2^{(m+1)} = \frac{1}{a_{22}}(b_2 - a_{21}x_1^{(m+1)} - a_{23}x_3^{(m)} - \cdots - a_{2n}x_n^{(m)})$$

$$\vdots$$

$$x_n^{(m+1)} = \frac{1}{a_{nn}}(b_n - a_{n1}x_1^{(m+1)} - a_{n2}x_2^{(m+1)} - \cdots - a_{n,n-1}x_n^{(m+1)})$$

şeklinde düzenleyip çözümü bu iterasyon üzerinden yapmayı amaçlayan bir yöntemdir. Bu yöntem Jacobi yönteminden farklı olarak bir önce bulduğu değeri bir sonraki değeri bulurken kullanır. Jacobi yönteminde olduğu gibi katsayılar matrisinin esas köşegeni üzerindeki elemanlar sıfırdan farklı olursa bu yöntem uygulanabilir.

Yukarıda verilen iterasyon genel olarak

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}), \qquad i = 1.2,....n$$

şeklinde yazılabilir. Yine başlangıç değerleri $X_i^{(0)} = \mathbf{0}$ başlangıç değeri ile işlemlere başlanarak her bir $m = 0,1,2,...$ için ($X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)}...$) değerleri sırası ile elde edilir.

Yöntemin sonuca yakınsaması için Jacobi iterativ yönteminde olduğu gibi T matrisinin bütün özdeğerlerinin 1 den küçük olması veya normlarının 1 den küçük olması gerekir [13].

Örnek 2.2.2. 2.2.1. örneğinin Gauss-Seidel yöntemi ile çözümü:.

Çözüm: Bunun için denklemleri Gauss-Seidel yöntemi ile çözülecek şekilde düzenlersek

$$\begin{aligned} x_1^{(m+1)} &= \frac{1}{2}(1+x_2^{(m)}) \\ x_2^{(m+1)} &= \frac{1}{2}(2+x_1^{(m+1)}+x_3^{(m)}) \\ x_3^{(m+1)} &= \frac{1}{2}(3+x_2^{(m+1)}+x_4^{(m)}) \\ x_4^{(m+1)} &= \frac{1}{2}(4+x_3^{(m+1)}) \end{aligned} \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

iterasyon denklemleri elde edilir. Başlangıç değerleri $x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0$ alınarak

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{2}\ (1+x_2^{(0)})\ =0.5, \qquad x_2^{(1)} = \frac{1}{2}\ (2+x_1^{(1)}+x_3^{(0)})=1.25,$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{2}\ (3+x_2^{(1)}+x_4^{(0)})=2.125, \qquad x_4^{(1)} = \frac{1}{2}\ (4+x_3^{(1)})\ =2.0 \text{ bulunur.}$$

$m = 1,2,\ldots$ için iterasyona devam edilirse Tablo 2.3 de verilen sonuçlar elde edildi.

Tablo 2.3. Örnek 2.2.1 için Gauss-Seidel yöntemi ile elde edilen sonuçlar

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$	$x_4^{(m)}$	$\lVert x^{(m)} - x^{(m-1)} \rVert$
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
1	0.500000	1.250000	2.125000	3.062500	2.2
2	1.125000	2.625000	4.343750	4.171875	1.4
3	1.812500	4.078125	5.625000	4.812500	1.0
4	2.539063	5.082031	6.447266	5.223633	6.6×10^{-1}
5	3.041016	5.744141	6.983887	5.491943	4.3×10^{-1}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
34	3.999996	6.999994	7.999995	5.999998	3.0×10^{-6}
35	3.999997	6.999996	7.999997	5.999999	2.0×10^{-6}
36	3.999998	6.999998	7.999998	5.999999	2.0×10^{-6}
37	3.999999	6.999999	7.999999	6.000000	1.0×10^{-6}

2.2.1.3. Successive- Over Relaxation (SOR) Yöntemi

Gauss-Siedel yöntemini

$$x_i^{(m+1)} = x_i^{(m)} + \frac{w}{a_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}) \ , \qquad i = 1,2,...,n \qquad (2.6)$$

şeklinde bir parametreye bağlı olarak yazılmasını amaçlayan bir yöntemdir. Burada w yakınsamayı hızlandıran bir parametredir.

(2.6) denklemini içeren yöntemlere gevşeme (relaxation) yöntemleri denir. $0<w<1$ şeklinde seçilirse yöntem alt gevşeme (under relaxation) yöntemi olarak adlandırılır ve bu yöntem Gauss-Seidel yöntemi ile yakınsak olmayan bazı sistemlerde yakınsak sonuçlar elde edilmesi için kullanılır. $1<w<2$ şeklinde seçilirse yöntem üst gevşeme (over relaxation) yöntemi olarak adlandırılır ve bu yöntem Gauss-Seidel yöntemi ile yakınsak sonuçlar elde edilen sistemlerde hızlı bir yakınsaklık için kullanılır. Bu yöntemler ard arda üst gevşeme (successive-over relaxation) SOR olarak kısaltılır.

Bu yöntem kısmi differansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde oluşan lineer sistemlerin çözümleri için özel olarak kullanılır.

(2.1) sistemi (2.6) yapısına getirildikten sonra $m = 0,1,2,...$ değerleri için $X_i^{(0)}$=**0** alınarak sırasıyla $X^{(1)}, X^{(2)}, X^{(3)},...$ çözüme yakınsayan değerleri elde edilir [13].

Teorem 2.5. (Ostrowski-Reich): A pozitif tanımlı bir matris ve w, $0<w<2$ ise $X^{(0)}$ yaklaşık başlangıç değerlerinin her seçimi için SOR yöntemi yakınsar [13].

Teorem 2.6. A pozitif tanımlı ve tridiagonal bir matris ise SOR yöntemi için uygun w,

$$w = \frac{2}{1+\sqrt{1-[\rho(T_j)]^2}}$$

denkleminden elde edilen değerdir. D, L, U matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

$$=\underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}}_{D}-\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -a_{21} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ -a_{n1} & \cdots & -a_{n,n-1} & 0 \end{bmatrix}}_{L}-\underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ 0 & 0 & \cdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdots & -a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}}_{U}$$

olmak üzere $T_j = D^{-1}(L+U)$ olarak seçilen matristir [13].

Örnek 2.2.3. 2.2.1. örneğinin SOR metodu ile çözümü:

Çözüm: (2.3) ile verilen denklemler

$$\begin{aligned} x_1^{(m+1)} &= x_1^{(m)} + \frac{1}{2}(1 - 2x_1^{(m)} + x_3^{(m)}) \\ x_2^{(m+1)} &= x_2^{(m)} + \frac{1}{2}(2 + x_1^{(m+1)} - 2x_2^{(m)} + x_3^{(m)}) \\ x_3^{(m+1)} &= x_3^{(m)} + \frac{1}{2}(3 + x_2^{(m+1)} - 2x_3^{(m)} + x_4^{(m)}) \qquad\qquad m = 0,1,2.... \\ x_4^{(m+1)} &= x_4^{(m)} + \frac{1}{2}(4 + x_3^{(m+1)} - 2x_4^{(m)}) \end{aligned}$$

şeklinde yeniden yazılır. Dikkat edilecek olursa sağ taraftaki i. denklemin $x_i^{(m)}$ terimleri sadeleştirilirse Gauss-Seidel yöntemi elde edilir.Böylece SOR yöntemi ile ilgili olarak bu denklem sistemi

$$\begin{aligned} x_1^{(m+1)} &= x_1^{(m)} + \frac{1}{2}w(1 - 2x_1^{(m)} + x_3^{(m)}) \\ x_2^{(m+1)} &= x_2^{(m)} + \frac{1}{2}w(2 + x_1^{(m+1)} - 2x_2^{(m)} + x_3^{(m)}) \\ x_3^{(m+1)} &= x_3^{(m)} + \frac{1}{2}w(3 + x_2^{(m+1)} - 2x_3^{(m)} + x_4^{(m)}) \\ x_4^{(m+1)} &= x_4^{(m)} + \frac{1}{2}w(4 + x_3^{(m+1)} - 2x_4^{(m)}) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır.

$x_1^{(0)} = x_2^{(0)} = x_3^{(0)} = x_4^{(0)} = 0$ olup w=1.2 alınarak çözüme gidilirse Tablo 2.4 te verilen sonuçlar elde edilir.

Tablo 2.4. Örnek 2.2.1 için SOR yöntemi ile elde edilen sonuçlar

m	$x_1^{(m)}$	$x_2^{(m)}$	$x_3^{(m)}$	$x_4^{(m)}$	$\lVert x^{(m)} - x^{(m-1)} \rVert$
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
1	0.600000	1.560000	2.736000	4.041600	2.2
2	1.416000	3.792000	5.705280	5.014848	1.5
3	2.344320	5.359920	6.880205	5.525154	9.9×10^{-1}
4	3.343488	6.263432	7.497110	5.793235	3.4×10^{-1}
5	3.689362	6.659197	7.772037	5.904575	1.8×10^{-1}
6	3.857646	6.845970	7.895920	5.956637	8.4×10^{-2}
7	3.936053	6.929990	7.952792	5.980348	3.8×10^{-2}
8	3.970783	6.968147	7.978539	5.991054	1.5×10^{-2}
9	3.986732	6.985533	7.990244	5.995936	7.8×10^{-3}
10	3.993973	6.993424	7.995567	5.998153	3.5×10^{-3}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	
19	3.999995	6.999995	7.999997	5.999999	4.0×10^{-6}
20	3.999998	6.999998	7.999999	6.000000	3.0×10^{-6}
21	3.999998	6.999999	7.999999	6.000000	1.0×10^{-6}

3.BÖLÜM
LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİNİN YAKLAŞIK ÇÖZÜM YÖNTEMLERİ

Lineer olmayan bir denklem sistemi

$$\begin{aligned} f_1(x_1,x_2,...,x_n) &= 0 \\ f_2(x_1,x_2,...,x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1,x_2,...,x_n) &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

şeklinde n bilinmeyene bağlı n tane lineer olmayan fonksiyondan oluşur. Bu sistem. $F=(f_1,f_2,...,f_n)$ ve **0**=(0,0,...,0) olmak üzere $F(x_1,x_2,...,x_n)=\mathbf{0}$ şeklinde vektörel olarak ifade edilebilir. Bu tür sistemlerin çözümü için Basit İterasyon, Newton-Raphson yöntemleri yaygın olarak kullanılmaktadır [18].

3.1. Basit İterasyon Yöntemi

Lineer olmayan denklem sisteminin basit iterasyon yöntemi ile çözülebilmesi için (3.1) ile verilen denklem sisteminin 1.denkleminden x_1, 2. denkleminden x_2 ve benzer şekilde n. denkleminden x_n çözülürse

$$\begin{aligned} x_1 &= g_1(x_1,x_2,....x_n) \\ x_2 &= g_2(x_1,x_2,....,x_n) \\ &\vdots \\ x_n &= g_n(x_1,x_2,....,x_n) \end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Bu denklemler vektörel olarak $X=G(X)$ şeklinde yazılırsa iterasyon formülü $X^{(k)}=G(X^{(k-1)})$ şeklini alır [20].

Tanım 3.1. $G: D \subset IR^n \to IR^n$ fonksiyonu için $G(P)=P$ olacak şekilde $P \in D$ varsa. P noktasına G fonksiyonunun sabit noktası denir.

Teorem 3.1. $f: D \subset IR^n \to IR$ ye bir fonksiyon olsun. $\forall X \in D$ için $\|X-X_0\| < \delta$ olduğunda

$$\left|\frac{\partial f(X)}{\partial x_j}\right| \le K, \quad j=1,2,...,n$$

olacak şekilde $\delta > 0$ ve $K > 0$ sabitleri varsa f fonksiyonuna $X_0 \in D$ noktasında süreklidir denir [13].

Teorem 3.2. $a_1, a_2, ..., a_n$ ve $b_1, b_2, ..., b_n$ sabitler olmak üzere

$$D = \{(x_1, x_2, ..., x_n) \mid a_i \leq x_i \leq b_i;\ i = 1,2,...,n\} \subset IR^n$$

ve $G : D \subset IR^n \to IR^n$ sürekli bir fonksiyon olsun. $\forall X \in D$ için $G(X) \in D$ ise G fonksiyonunun D de sabit noktası vardır.

Ayrıca $\forall X \in D$ için G nin kısmi türevleri sürekli ve

$$\left|\frac{\partial g_i(X)}{\partial x_j}\right| \leq \frac{K}{n}, \qquad j = 1,2,...,n\ , \qquad i = 1,2,...,n$$

olacak şekilde $K < 1$ sayısı varsa , keyfi bir $X^{(0)} \in D$ elemanı seçilerek

$$X^{(k)} = G(X^{(k-1)}), \qquad k \geq 1$$

ile oluşturulan $\{X^{(k)}\}_{k=0}^{\infty}$ dizisi, bir tek $P \in D$ sabit noktasına yakınsar ve

$$\left\|X^{(k)} - P\right\| \leq \frac{K^k}{1-K}\left\|X^{(1)} - X^{(0)}\right\|_{\infty} \tag{3.2}$$

formülü ile hata için bir sınır belirlenir [13].

Örnek 3.1.1.

$$\begin{aligned}
3x_1 - \cos(x_2 x_3) - \frac{1}{2} &= 0 \\
x_1^2 - 81(x_2 + 0.1)^2 + \sin x_3 + 1.06 &= 0 \\
e^{-x_1 x_2} + 20x_3 + \left(\frac{10\pi - 3}{3}\right) &= 0
\end{aligned}$$

sisteminin basit iterasyon yöntemi ile çözümü:

Çözüm: Verilen denklem sistemini sabit nokta problemine dönüştürmek için i .denklem x_i değişkeni için çözülmelidir. O halde, 1. denklemden x_1 , 2. denklemden x_2 ve 3.denklemden x_3 çözülürse

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{3}\cos(x_2 x_3) + \frac{1}{6} \\
x_2 &= \frac{1}{9}\left(\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06}\right) - 0.1 \\
x_3 &= -\frac{1}{20}e^{-x_1 x_2} - \left(\frac{10\pi - 3}{60}\right)
\end{aligned} \tag{3.3}$$

elde edilir. $G: IR^3 \to IR^3$ fonksiyonu $G(X)=(g_1(X),g_2(X),g_3(X))'$ olmak üzere (3.3) sistemi

$$g_1(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{3}\cos(x_2x_3)+\frac{1}{6}$$

$$g_2(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{9}\sqrt{x_1^2+\sin x_3+1.06}-0.1$$

$$g_3(x_1,x_2,x_3)=-\frac{1}{20}e^{-x_1x_2}-(\frac{10\pi-3}{60})$$

şeklinde yazılabilir.

(3.1) ve (3. 2) teoremleri kullanılarak $D=\{(x_1,x_2,x_3)' \mid -1\le x_i\le 1,\ i=1,2,3\}$ bölgesinde G fonksiyonunun bir tek sabit noktası olduğu gösterilebilir. $X=(x_1,x_2,x_3)'$ olmak üzere $X\in D$ için

$$|g_1(x_1,x_2,x_3)|\le\frac{1}{3}|\cos(x_2x_3)|+\frac{1}{6}\le 0.5$$

$$|g_2(x_1,x_2,x_3)|=\left|\frac{1}{9}\left(\sqrt{x_1^2+\sin x_3+1.06}\right)-0.1\right|\le\frac{1}{9}\left(\sqrt{1+\sin 1+1.06}\right)-0.1<1$$

$$|g_3(x_1,x_2,x_3)|=\frac{1}{20}e^{-x_1x_2}-\frac{10\pi-3}{60}<0.61$$

bulunur. $i=1,2,3$ için $-1\le g_i(x_1,x_2,x_3)\le 1$ elde edilir. Böylece $\forall X\in D$ için $G(X)\in D$ elde edilir.

D de kısmi türevlerin sınırları ise

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_1}\right|=0,\ \left|\frac{\partial g_2}{\partial x_2}\right|=0,\ \left|\frac{\partial g_3}{\partial x_3}\right|=0$$

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_2}\right|=\frac{1}{3}|x_3||\sin x_2x_3|\le\frac{1}{3}\sin 1<0.281$$

$$\left|\frac{\partial g_1}{\partial x_3}\right|=\frac{1}{3}|x_2||\sin x_2x_3|\le\frac{1}{3}\sin 1<0.281$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x_1}\right|=\frac{|x_1|}{9\sqrt{x_1^2+\sin x_3+1.06}}<\frac{1}{9\sqrt{0.218}}<0.238$$

$$\left|\frac{\partial g_2}{\partial x_3}\right|=\frac{|\cos x_3|}{18\sqrt{x_1^2+\sin x_3+1.06}}<\frac{1}{18\sqrt{0.218}}<0.119$$

$$\left|\frac{\partial g_3}{\partial x_1}\right| = \frac{|x_2|}{20}e^{-x_1x_2} \le \frac{1}{20} < 0.14$$

$$\left|\frac{\partial g_3}{\partial x_2}\right| = \frac{x_1}{20}e^{-x_1x_2} \le \frac{1}{20} < 0.14$$

şeklinde bulunur.

g_1, g_2, g_3 fonksiyonları D bölgesinde sınırlı olduklarından (3.1) Teorem gereğince G fonksiyonu da D üzerinde süreklidir. Ayrıca i=1,2,3 için $|\partial g_i(X)/\partial x_j| \le 0.281$ bulunur. Teorem 3.2 göre K=3.(0.281)=0.843 bulunur. Benzer şekilde $\partial g_i/\partial x_j$ G nin de D bölgesinde i=1,2,3 ve j=1,2,3 için sürekli olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak, G fonksiyonu D bölgesinde bir tek sabit noktaya sahiptir ve sistemin D bölgesinde bir çözümü vardır.

P sabit noktasına yaklaşmak için başlangıç vektörü $X^{(0)} = (0.1, 0.1, -0.1)^t$ olarak seçilirse vektör dizisi

$$x_1^{(k)} = \frac{1}{3}\cos x_2^{(k-1)}x_3^{(k-1)} + \frac{1}{6}$$

$$x_2^{(k)} = \frac{1}{9}\sqrt{(x_1^{(k-1)})^2 + \sin x_3^{(k-1)} + 1.06} - 0.1$$

$$x_3^{(k)} = -\frac{1}{20}e^{-x_1^{(k)}x_2^{(k)}} - \frac{10\pi - 3}{60}$$

şeklinde tanımlanır. $\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \|_\infty < 10^{-6}$ olana kadar elde edilen sonuçlar Tablo 3.1 de verildi [13].

Tablo 3.1. Örnek 3.1.1için Basit iterasyon yöntemi ile elde edilen sonuçlar

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\|X^{(k)} - X^{(k-1)}\|_\infty$
0	0.100000	0.100000	-0.100000	-
1	0.499983	0.022230	-0.523046	2.2×10^{-3}
2	0.499977	0.000028	-0.523590	6.0×10^{-6}
3	0.500000	0.000001	-0.523598	8.0×10^{-6}
4	0.500000	0.000000	-0.523598	1.0×10^{-6}

3.2. Newton-Raphson Yöntemi

Bir boyutlu $f(x)=0$ denklemi için Newton-Raphson yöntemi, $f(x)$ in türevinin hesaplanabildiği durumlarda rahatlıkla kullanılabilir. Kökün yaklaşık değeri x_0 ve x_k gerçek kökü arasındaki fark h ise,

$$x_k = x_0 + h$$

yazılabilir. Bu durumda

$$f(x_k) = f(x_0 + h) = 0$$

olacaktır. x_0 civarında Taylor seri açılımı yapılırsa, $0<\theta<1$ olmak üzere,

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0 + \theta h)$$

yazılabilir. O halde

$$f(x_0) + hf'(x_0) + \frac{h^2}{2} f''(x_0 + \theta h) = 0$$

elde edilir. Eğer h yeterince küçük ise h^2yi içeren son terim ihmal edilebilir. Böylece,

$$f(x_0) + hf'(x_0) \cong 0 \text{ ve } h \cong -\frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

elde edilir. h nın bu yaklaşık değeri h_1 ile gösterilirse ilk yaklaşım olarak

$$x_1 = x_0 + h_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)}$$

bulunur. Bu değer gerçek köke x_0 dan daha yakın olacaktır. Bu şekilde işleme devam edilerek

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

elde edilir ve bu kökü bulmak için kullunılacak iterasyon denklemidir [18]. Benzer düşünce nonlineer denklem sistemlerine uygulanabilir. İlk olarak

$$g(x,y)=0$$

$$f(x,y)=0$$

sistemini göz önüne alalım. $f(x,y)$, $g(x,y)$ fonksiyonlarının (x_i,y_i) noktasındaki Taylor açılımının $x = x_{i+1}$, $y = y_{i+1}$ de aldığı yaklaşık değer

$$f(x_{i+1},y_{i+1}) \cong f(x_i,y_i) + (x_{i+1}-x_i)\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_i,y_i)} + (y_{i+1}-y_i)\left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_i,y_i)}$$

$$g(x_{i+1},y_{i+1}) \cong g(x_i,y_i) + (x_{i+1}-x_i)\left.\frac{\partial g}{\partial x}\right|_{(x_i,y_i)} + (y_{i+1}-y_i)\left.\frac{\partial g}{\partial y}\right|_{(x_i,y_i)}$$

olarak yazılabilir. (x_{i+1},y_{i+1}) kök ise

$$f(x_{i+1},y_{i+1}) = 0$$

$$g(x_{i+1},y_{i+1}) = 0$$

olacağına göre

$$0 = f(x_i,y_i) + (x_{i+1}-x_i)\frac{\partial f}{\partial x} + (y_{i+1}-y_i)\frac{\partial f}{\partial y}$$

$$0 = g(x_i,y_i) + (x_{i+1}-x_i)\frac{\partial g}{\partial x} + (y_{i+1}-y_i)\frac{\partial g}{\partial y} \tag{3.4}$$

ve x_{i+1} ve y_{i-1} bilinmeyenlerine göre düzenlenirse,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}x_{i+1} + \frac{\partial f}{\partial y}y_{i+1} &= -f + \frac{\partial f}{\partial x}x_i + \frac{\partial f}{\partial y}y_i \\ \frac{\partial g}{\partial x}x_{i+1} + \frac{\partial g}{\partial y}y_{i+1} &= -g + \frac{\partial g}{\partial x}x_i + \frac{\partial g}{\partial y}y_i\end{aligned} \tag{3.5}$$

elde edilir. Burada f, g ve birinci mertebeden türevleri (x_i, y_i) noktasında alınacaktır. (3.5) sistemi iki bilinmeyenli iki denklemden oluşan sistem olup, Cramer yöntemi ile çözümü yapılacak olursa

$$x_{i+1} = \frac{\begin{vmatrix} -f + \frac{\partial f}{\partial x}x_i + \frac{\partial f}{\partial y}y_i & \frac{\partial f}{\partial y} \\ -g + \frac{\partial g}{\partial x}x_i + \frac{\partial g}{\partial y}y_i & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{vmatrix}} = x_i - \frac{f\frac{\partial g}{\partial y} - g\frac{\partial f}{\partial y}}{\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial g}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial f}{\partial y}} \tag{3.6}$$

olarak elde edilir. Benzer şekilde

$$y_{i+1}=\frac{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & -f+\frac{\partial f}{\partial x}x_i+\frac{\partial f}{\partial y}y_i\\ \frac{\partial g}{\partial x} & -g+\frac{\partial g}{\partial x}x_i+\frac{\partial g}{\partial y}y_i\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{vmatrix}}=y_i-\frac{g\frac{\partial f}{\partial x}-f\frac{\partial g}{\partial x}}{\begin{vmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{vmatrix}} \tag{3.7}$$

olarak elde edilir. Dikkat edilirse (3.6) ve (3.7) da paydadaki ifadeler Jakobiyen olup $J(f,g)$ şeklinde gösterilebilir. (3.4) denklemi

$$\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}f_i\\g_i\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{i+1}-x_i\\ y_{i+1}-y_i\end{bmatrix}$$

şeklinde matris formunda yazılır ve

$$\mathbf{0}=\begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix},\ F(x_i)=\begin{bmatrix}f_i\\g_i\end{bmatrix},\ \Delta x=\begin{bmatrix}x_{i+1}-x_i\\ y_{i+1}-y_i\end{bmatrix},\ J=\begin{bmatrix}\frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y}\\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y}\end{bmatrix}$$

ile gösterilirse,

$\mathbf{0}=F(x_i)+J\Delta x$ olarak yazılabilir. $|J|\neq 0$ ise J^{-1} vardır ve $\Delta x=-J^{-1}F(x_i)$ yazılabilir. Buradan da $X^{(i+1)}=X^{(i)}-J^{-1}F(x_i)$ sonucu elde edilir.

Şimdi de n bilinmeyen ve n denklemden oluşan,

$$\begin{aligned}&f_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\\&f_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\\&\vdots\\&f_n(x_1,x_2,\ldots,x_n)=0\end{aligned}$$

sistemine Newton-Raphson yöntemini uygulayalım. $f_k(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ fonksiyonlarının $(x_{1,i},x_{2,i},\ldots,x_{n,i})$ noktasındaki Taylor açılımının $x_k=x_{k+1}$ de aldığı yaklaşık değerler, $f_k(x_{1,i+1},x_{2,i+1},\ldots,x_{n,i+1})=f_{k,i+1}$, $f_k(x_{1,i},x_{2,i},\ldots,x_{n,i})=f_{k,i}$, $k=1,2,\ldots,n$ olmak üzere

$$f_{1,i+1} \cong f_{1,i} + (x_{1,i+1} - x_{1,i})\frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} + (x_{2,i+1} - x_{2,i})\frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2} + (x_{3,i+1} - x_{3,i})\frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_3} + \ldots + (x_{n,i+1} - x_{n,i})\frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_n}$$

$$f_{2,i+1} \cong f_{2,i} + (x_{1,i+1} - x_{1,i})\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_1} + (x_{2,i+1} - x_{2,i})\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_2} + (x_{3,i+1} - x_{3,i})\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_3} + \ldots + (x_{n,i+1} - x_{n,i})\frac{\partial f_{2,i}}{\partial x_n}$$

$$\vdots$$

$$f_{n,i+1} \cong f_{n,i} + (x_{1,i+1} - x_{1,i})\frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_1} + (x_{2,i+1} - x_{2,i})\frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_2} + (x_{3,i+1} - x_{3,i})\frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_3} + \ldots + (x_{n,i+1} - x_{n,i})\frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_n}$$

şeklinde yazılabilir. $(x_{1i+1}, x_{2i+1}, \ldots, x_{ni+1})$ kök ise $f_{1i+1} = f_{2i+1} = \ldots = f_{ni+1} = 0$ olacağından

$$[F_i]^T = [f_{1,i}, f_{2,i}, \ldots, f_{n,i}]$$
$$[X_i]^T = [x_{1,i}, x_{2,i}, \ldots, x_{n,i}]$$

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_{1,i}}{\partial x_n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_1} & \frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_2} & \ldots & \frac{\partial f_{n,i}}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

yazılarak ,

$$[X_{i+1}] = [X_i] - [J]^{-1}[F_i]$$

elde edilir [18].

Teorem 3.3. $G = (g_1, g_2, \ldots, g_n)^t : IR^n \to IR$ olmak üzere $G(X) = X$ fonksiyonunun bir çözümü P noktası olsun.

i) $\forall\ i = 1,2,\ldots,n$ ve $j = 1,2,\ldots,n$ için $\frac{\partial g_i}{\partial x_j}$ türevi $N_\delta = \{X : \|X - P\| < \delta\}$ üzerinde süreklidir.

ii) $\forall\ i = 1,2,\ldots,n$, $j = 1,2,\ldots,n$ ve $k = 1,2,\ldots,n$ olmak üzere $\forall X \in N_\delta$ için $\frac{\partial^2 g_i(x)}{\partial x_j \partial x_k}$ türevi , sürekli ve bazı M sabiti için $\left|\frac{\partial^2 g_i(X)}{\partial x_j \partial x_k}\right| \le M$ dir.

iii) $\forall\ i = 1,2,\ldots,n$ ve $j = 1,2,\ldots,n$ için $\frac{\partial g_i(P)}{\partial X_j} = 0$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı varsa bu durumda öyle bir $\hat{\delta} < \delta$ sayısı vardır ki, herhangi bir $X^{(0)}$ için $\|X_0 - P\| < \hat{\delta}$ koşulu ile $X^{(k)} = G(X^{(k-1)})$ dizisi P ye ikinci dereceden yakınsar. Ayrıca $k \geq 1$ için

$$\|X^{(k)} - P\|_\infty \leq \frac{n^2 M}{2}\|X^{(k)} - P\|_\infty^2$$

şeklindedir [13].

Bu yöntemin genellikle büyük denklem sistemlerinin çözümünde tercih edilmemesinin nedeni her iterasyonda $J(X)$ ve daha sonrada $J(X)^{-1}$ matrislerinin hesaplanmasıdır. Bu olumsuzluktan kurtulmak için $J(X)^{-1}Y = -F(X^{(k)})$ olacak şekilde Y vektörü bulunur. $X^{(k+1)}$ değerini hesaplamak için bu defa Y vektörü $X^{(k)}$ ile toplanır.

Örnek 3.2.1. 3.1.1 örneğinin Newton-Raphson yöntemi ile çözümü:

Çözüm: Verilen sistem için Jacobian matrisi ;

$$J(x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix} 3 & x_3\sin(x_2x_3) & x_2\sin(x_2x_3) \\ 2x_1 & -162(x_2+0.1) & \cos(x_3) \\ -x_2e^{-x_1x_2} & -x_1e^{-x_1x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

dır. Newton algoritmasına göre istenen iterasyon ,

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

şeklindedir ki burada

$$\begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix} = -(J(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)},x_3^{(k-1)}))^{-1}F(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)},x_3^{(k-1)})$$

olur. Böylece k. adımda $J(X^{(k-1)})Y^{(k-1)} = --F(X^{(k-1)})$ lineer sistemi çözülmelidir. Burada

$$J(X^{(k-1)}) = \begin{bmatrix} 3 & x_3^{(k-1)}\sin(x_2^{(k-1)}x_3^{(k-1)}) & x_2^{(k-1)}\sin(x_2^{(k-1)}x_3^{(k-1)}) \\ 2x_1^{(k-1)} & -162(x_2^{(k-1)}+0.1) & \cos(x_3^{(k-1)}) \\ -x_2^{(k-1)}e^{-x_1^{(k-1)}x_2^{(k-1)}} & -x_1^{(k-1)}e^{-x_1^{(k-1)}x_2^{(k-1)}} & 20 \end{bmatrix},$$

$$Y^{(k-1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

ve

$$F(X^{(k-1)}) = \begin{bmatrix} 3x_1^{(k-1)} - \cos(x_2^{(k-1)} x_3^{(k-1)}) - \dfrac{1}{2} \\ (x_1^{(k-1)})^2 - 81(x_2^{(k-1)} + 0.1)^2 + \sin(x_3^{(k-1)}) + 1.06 \\ e^{-x_1^{(k-1)} x_2^{(k-1)}} + 20x_3^{(k-1)} + \dfrac{10\pi - 3}{3} \end{bmatrix}$$

dir. Bu sistemlerin çözülmesi ile elde edilen değerler Tablo 3.2 de verildi [13].

Tablo 3.2. Örnek 3.2 için Newton-Raphson yöntemi ile elde edilen sonuçlar

k	$x_1^{(k)}$	$x_2^{(k)}$	$x_3^{(k)}$	$\left\| X^{(k)} - X^{(k-1)} \right\|_\infty$
0	0.100000	0.100000	-0.100000	-
1	0.500037	0.019466	-0.521520	4.2×10^{-1}
2	0.500045	0.001588	-0.523557	1.7×10^{-2}
3	0.500000	0.000012	-0.523598	1.5×10^{-3}
4	0.500000	0.000000	-0.523598	1.2×10^{-5}
5	0.500000	0.000000	-0.523598	0

4.BÖLÜM
ADOMIAN POLİNOMLARI

Bu bölümde, daha sonraki bölümlerde karşılaşılacak olan lineer olmayan terimlere ait Adomian polinomlarının hesaplanması incelendi. Adomian polinomlarının hesaplanmasına dair bir çok yöntem olmasına rağmen burada programlanması kolay olduğundan Adomian tarafından geliştirilen yöntem tercih edildi [4].

4.1 Adomian Tarafından Geliştirilen Yöntem

Adomian tarafından geliştirilen yöntem, bazı özel adımlarla temellendirilmiş ve her bir polinom için özel bir formüle ihtiyaç duymaktadır.
$F(x)$ lineer olmayan teriminin x_0 daki Taylor seri açılımı

$$F(x)=F(x_0)+F'(x_0)(x-x_0)+\frac{1}{2!}F''(x_0)(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}F'''(x_0)(x-x_0)^3+\ldots \qquad (4.1.1)$$

şeklindedir.

$$x=x_0+x_1+x_2+x_3+x_4+\ldots \Rightarrow x-x_0=x_1+x_2+x_3+x_4+\ldots \qquad (4.1.2)$$

olup bu değer (4.1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}F(x)&=F(x_0)+F'(x_0)(x_1+x_2+x_3+\ldots)+\frac{1}{2!}F''(x_0)(x_1+x_2+x_3+\ldots)^2\\&+\frac{1}{3!}F'''(x_0)(x_1+x_2+x_3+\ldots)^3+\frac{1}{4!}F^{(4)}(x_0)(x_1+x_2+x_3+\ldots)^4+\ldots\end{aligned} \qquad (4.1.3)$$

bulunur.

$$\begin{aligned}(x_1+x_2+x_3+\ldots)^2&=x_1^2+2x_1x_2+x_2^2+2x_1x_3+x_3^2+2x_2x_3+2x_1x_4+\ldots\\(x_1+x_2+x_3+\ldots)^3&=x_1^3+3x_1^2x_2+3x_1x_2^2+x_2^3+6x_1x_2x_3+3x_1x_3^2+\ldots\end{aligned} \qquad (4.1.4)$$

eşitlikleri (4.1.3) denkleminde yerine yazılır ve gerekli cebirsel işlemler yapılırsa

$$\begin{aligned}F(x)&=F(x_0)+F'(x_0)x_1+F'(x_0)x_2+F'(x_0)x_3+\frac{1}{2!}F''(x_0)x_1^2+\frac{1}{2!}F''(x_0)x_2^2+\frac{1}{3!}F'''(x_0)x_1^3\\&+\frac{1}{3!}F'''(x_0)x_2^3+\frac{1}{3!}F'''(x_0)3x_1^2x_3+\ldots\end{aligned} \qquad (4.1.5)$$

elde edilir. Bu denklemde, indis toplamı 0 olan terimler A_0 polinomu, indis toplamı 1 olan terimler A_1 polinomu, indis toplamı 2 olan terimler A_2 polinomu ve benzer şekilde indis toplamı n olan terimler A_n polinomu olarak gruplandırılırsa

$$
\begin{aligned}
A_0 &= F(x_0)\\
A_1 &= x_1F'(x_0)\\
A_2 &= x_2F'(x_0)+\frac{1}{2!}x_1^2F''(x_0)\\
A_3 &= x_3F'(x_0)+x_1x_2F''(x_0)+\frac{1}{3!}x_1^3F'''(x_0)\\
A_4 &= x_4F'(x_0)+(\frac{1}{2!}x_2^2+x_1x_3)F''(x_0)+\frac{1}{2!}x_1^2x_2F'''(x_0)+\frac{1}{4!}x_1^4F^{(4)}(x_0)\\
A_5 &= x_5F'(x_0)+(x_2x_3+x_1x_4)F''(x_0)+(\frac{1}{2!}x_1x_2^2+\frac{1}{2!}x_1^2x_3)F'''(x_0)+\frac{1}{3!}x_1^3x_2F^{(4)}(x_0)\\
&\quad+\frac{1}{5!}x_1^5F^{(5)}(x_0)\\
&\vdots
\end{aligned}
\tag{4.1.6}
$$

şeklinde Adomian polinomları elde edilir [4].

$\lambda \in IR$ parametre olmak üzere $x=\sum_{n=0}^{\infty}x_n$ çözüm serisi $x=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n x_n$ ve lineer olmayan terim $F(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\lambda^n A_n$ şeklinde parametrik olarak yazılabilir. $\lambda \in IR$ noktasında $F(x)$ fonksiyonu analitik olmak üzere (4.1.6) ile verilen Adomian polinomları

$$A_n=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0},\quad n\geq 0 \tag{4.1.7}$$

formülünden elde edilebilir. Bu formül ile istenildiği kadar Adomian polinomu elde edilebilir. Benzer şekilde, $F(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ şeklindeki bir nonlineerliğin Adomian polinomları

$$A_n=\frac{1}{n!}\left[\frac{d^n}{d\lambda^n}F(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k},\ldots,\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{ik},\ldots,\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{nk})\right]_{\lambda=0},\quad n\geq 0 \tag{4.1.8}$$

formülünden hesaplanabilir [11].

Örnek 4.1.1 $F(x)=x^2$ nonlineer terimi için Adomian polinomlarının hesaplanması:

$x=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k = x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\ldots$ olmak üzere

$$A_0=\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = ((x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\ldots)^2)\big|_{\lambda=0} = x_0^2$$

$$A_1=\left[\frac{d}{d\lambda}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}((x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\ldots)^2)\big|_{\lambda=0} = 2x_0x_1$$

$$A_2=\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}((x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\ldots)^2)\big|_{\lambda=0} = 2x_0x_2+x_1^2$$

$$A_3=\frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}((x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\ldots)^2)\big|_{\lambda=0} = 2x_0x_3+2x_1x_2$$

$$A_4=\frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{d\lambda^4}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{4!}\frac{d^4}{d\lambda^4}((x_{10}+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\ldots)^2)\big|_{\lambda=0} = 2x_0x_4+2x_1x_3+x_2^2$$

$$\vdots$$

elde edilir [24].

$F(x_1,x_2,\ldots x_i,\ldots,x_n)=x_i^m$ Adomian polinomlarının ilk dört tanesi

$$A_0=x_{i0}^m,$$

$$A_1=mx_{i0}^{m-1}x_{i1},$$

$$A_2=\frac{1}{2}m(m-1)x_{i0}^{m-2}x_{i1}^2+mx_{i0}^{m-1}x_{i2},$$

$$A_3=\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)x_{i0}^3x_{i1}^3+m(m-1)x_{i0}^{m-2}x_{i1}x_{i2}+mx_{i0}^{m-1}x_{i3},$$

$$A_4=\frac{1}{24}m(m-1)(m-2)(m-3)x_{i0}^{m-4}x_{i1}^4+\frac{1}{2}m(m-1)(m-2)x_{i0}^{m-3}x_{i1}^2x_{i2}$$
$$+m(m-1)x_{i0}^{n-2}\times\left(\frac{1}{2}x_{i2}^2+x_{i1}x_{i3}\right)+mx_{i0}^{m-1}x_{i4},$$

şeklinde formülüze edilebilir [12].

Örnek 4.1.2 $F(x_1,x_2)=x_1x_2^2$ nonlineer terimi için Adomian polinomlarının hesaplanması:

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\quad x_2=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}$$

olmak üzere

$$A_0=\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$=((x_{10}+\lambda x_{11}+\lambda^2 x_{12}+\ldots)(x_{20}+\lambda x_{21}+\lambda^2 x_{22}+\ldots)^2)\big|_{\lambda=0}=x_{10}x_{20}^2$$

$$A_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k}, \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{d}{d\lambda}((x_{10} + \lambda x_{11} + \lambda^2 x_{12} + \ldots)(x_{20} + \lambda x_{21} + \lambda^2 x_{22} + \ldots)^2)\Big|_{\lambda=0} = x_{11}x_{20}^2 + 2x_{10}x_{20}x_{21}$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k}, \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}((x_{10} + \lambda x_{11} + \lambda^2 x_{12} + \ldots)(x_{20} + \lambda x_{21} + \lambda^2 x_{22} + \ldots)^2)\Big|_{\lambda=0}$$

$$= x_{12}x_{20}^2 + x_{10}x_{21}^2 + 2x_{10}x_{20}x_{22} + 2x_{11}x_{20}x_{21}$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k}, \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{3}\frac{d^3}{d\lambda^3}((x_{10} + \lambda x_{11} + \lambda^2 x_{12} + \ldots)(x_{20} + \lambda x_{21} + \lambda^2 x_{22} + \ldots)^2)\Big|_{\lambda=0}$$

$$= x_{13}x_{20}^2 + x_{11}x_{21}^2 + 2x_{10}x_{20}x_{23} + 2x_{11}x_{20}x_{22} + 2x_{10}x_{21}x_{22} + 2x_{12}x_{20}x_{21}$$

$$A_4 = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{d\lambda^4}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k}, \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$= \frac{1}{4!}\frac{d^4}{d\lambda^4}((x_{10} + \lambda x_{11} + \lambda^2 x_{12} + \ldots)(x_{20} + \lambda x_{21} + \lambda^2 x_{22} + \ldots)^2)\Big|_{\lambda=0}$$

$$= x_{14}x_{20}^2 + (2x_{20}x_{24} + 2x_{21}x_{23} + x_{22}^2)x_{10} + (2x_{20}x_{23} + 2x_{21}x_{22})x_{11} + (x_{21}^2 + 2x_{20}x_{22})x_{12}$$
$$+ 2x_{20}x_{21}x_{13},$$

$$\vdots$$

şeklinde elde edilir [12].

Örnek 4.1.3 $F(x) = e^x$ nonlineer terimi için Adomian polinomlarının hesaplanması:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k = x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \ldots \text{ olmak üzere}$$

$$A_0 = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = (e^{(x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \ldots)})\Big|_{\lambda=0} = e^{x_0}$$

$$A_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}(e^{(x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \ldots)})\Big|_{\lambda=0} = x_1 e^{x_0},$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}(e^{(x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \ldots)})\Big|_{\lambda=0} = (x_2 + \frac{1}{2!}x_1^2)e^{x_0}.$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}(e^{(x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\ldots)})\Big|_{\lambda=0} = (x_3 + x_1 x_2 + \frac{1}{3!}x_1^3)e^{x_0}$$

$$A_4 = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{d\lambda^4}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{4!}\frac{d^4}{d\lambda^4}(e^{(x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\ldots)})\Big|_{\lambda=0}$$

$$= (x_4 + x_1 x_3 + \frac{1}{2!}x_2^2 + \frac{1}{2!}x_1^2 x_2 + \frac{1}{4!}x_1^4)e^{x_0}$$

$\vdots$

şeklinde elde edilir [24].

Benzer şekilde $F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = e^{x_i}$ nonlineer terimi için Adomian polinomları:

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{ik} = x_{i0} + \lambda x_{i1} + \lambda^2 x_{i2} + \ldots \quad i = 1,2,\ldots,n \quad \text{olmak üzere}$$

$$A_0 = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k}, \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0} = (e^{(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)})\Big|_{\lambda=0} = e^{x_{i0}},$$

$$A_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k}, \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}(e^{(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)})\Big|_{\lambda=0} = x_{i1}e^{x_{i0}}.$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k}, \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}(e^{(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)})\Big|_{\lambda=0}$$

$$= (x_{i2} + \frac{1}{2!}x_{i1}^2)e^{x_{i0}},$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k}, \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}(e^{(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)})\Big|_{\lambda=0}$$

$$= (x_{i3} + x_{i1}x_{i2} + \frac{1}{3!}x_{i1}^3)e^{x_{i0}},$$

$$A_4 = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{d\lambda^4}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k}, \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{4!}\frac{d^4}{d\lambda^4}(e^{(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)})\Big|_{\lambda=0}$$

$$= (x_{i4} + x_{i1}x_{i3} + \frac{1}{2!}x_{i2}^2 + \frac{1}{2!}x_i^2 x_2 + \frac{1}{4!}x_i^4)e^{x_{i0}},$$

$\vdots$

şeklinde elde edilir [12].

Örnek 4.1.4 $F(x) = e^{-x}$ nonlineer terimi için Adomian polinomlarının hesaplanması:

$$x = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k = x_0 + \lambda x_1 + \lambda^2 x_2 + \ldots \quad \text{olmak üzere}$$

$$A_0 = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = (e^{-(x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\ldots)})\Big|_{\lambda=0} = e^{-x_0},$$

$$A_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}(e^{-(x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\ldots)})\Big|_{\lambda=0} = -x_1 e^{-x_0},$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}(e^{-(x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\ldots)})\Big|_{\lambda=0} = (-x_2 + \frac{1}{2!}x_1^2)e^{-x_0},$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}(e^{-(x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\ldots)})\Big|_{\lambda=0} = (-x_3 + x_1 x_2 - \frac{1}{3!}x_1^3)e^{-x_0},$$

$$A_4 = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{d\lambda^4} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{4!}\frac{d^4}{d\lambda^4}(e^{-(x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\ldots)})\Big|_{\lambda=0}$$

$$= (-x_4 + x_1 x_3 + \frac{1}{2!}x_2^2 - \frac{1}{2!}x_1^2 x_2 + \frac{1}{4!}x_1^4)e^{-x_0}$$

$$\vdots$$

şeklinde elde edilir [24].

Benzer şekilde $F(x_1, x_2, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = e^{-x_i}$ nonlineer terimi için Adomian polinomları:

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{ik} = x_{i0} + \lambda x_{i1} + \lambda^2 x_{i2} + \ldots \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad \text{olmak üzere}$$

$$A_0 = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{1k}, \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{2k}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0} = (e^{-(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)})\Big|_{\lambda=0} = e^{-x_{i0}},$$

$$A_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{1k}, \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{2k}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}(e^{-(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)})\Big|_{\lambda=0} = -x_{i1} e^{-x_{i0}},$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{1k}, \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{2k}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}(e^{-(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)})\Big|_{\lambda=0}$$

$$= (-x_{i2} + \frac{1}{2!}x_{i1}^2)e^{-x_{i0}},$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{1k}, \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{2k}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}(e^{-(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)})\Big|_{\lambda=0}$$

$$= (-x_{i3} + x_{i1}x_{i2} - \frac{1}{3!}x_{i1}^3)e^{-x_{i0}},$$

$$A_4 = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{d\lambda^4} F\left(\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{1k}, \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{2k}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{4!}\frac{d^4}{d\lambda^4}(e^{-(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)})\Big|_{\lambda=0}$$

$$=(-x_{i4}+x_{i1}x_{i13}+\frac{1}{2!}x_{i2}^2-\frac{1}{2!}x_{i1}^2x_{i2}+\frac{1}{4}x_{i1}^4)e^{-x_{i0}}$$

$\vdots$

şeklinde elde edilir [12].

Örnek 4.1.5 $F(x_1,x_2)=e^{-x_1x_2}$ nonlineer terimi için Adomian polinomlarının hesaplanması:

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k}\ ,\quad x_2=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}\qquad \text{olmak üzere}$$

$$A_0=\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}\right)\right]_{\lambda=0}=(e^{-(x_{10}+\lambda x_{11}+\lambda^2x_{12}+...)(x_{20}+\lambda x_{21}+\lambda^2x_{22}+...)})\Big|_{\lambda=0}$$

$$=e^{-x_{10}x_{20}},$$

$$A_1=\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}\right)\right]_{\lambda=0}=\frac{d}{d\lambda}(e^{-(x_{10}+\lambda x_{11}+\lambda^2x_{12}+...)(x_{20}+\lambda x_{21}+\lambda^2x_{22}+...)})\Big|_{\lambda=0}$$

$$=-(x_{10}x_{21}+x_{11}x_{20})e^{-x_{10}x_{20}}$$

$$A_2=\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}\right)\right]_{\lambda=0}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}(e^{-(x_{10}+\lambda x_{11}+\lambda^2x_{12}+...)(x_{20}+\lambda x_{21}+\lambda^2x_{22}+...)})\Big|_{\lambda=0}$$

$$=-((x_{10}x_{22}+x_{11}x_{21}+x_{12}x_{20})+\frac{1}{2!}(x_{21}^2x_{10}^2+x_{11}^2x_{20}^2))e^{-(x_{10}x_{20})}$$

$\vdots$

şeklinde elde edilir [12].

Örnek 4.1.6 $F(x)=\cos x$ nonlineer terimi için Adomian polinomlarının hesaplanması:

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k=x_0+\lambda x_1+\lambda^2x_2+...\ \text{olmak üzere}$$

$$A_0=\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0}=\cos(x_0+\lambda x_1+\lambda^2x_2+...)\ \Big|_{\lambda=0}\qquad=\cos x_0,$$

$$A_1=\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0}=\frac{d}{d\lambda}(\cos(x_0+\lambda x_1+\lambda^2x_2+...))\Big|_{\lambda=0}=-x_1\sin x_0,$$

$$A_2=\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}(\cos(x_0+\lambda x_1+\lambda^2x_2+...))\Big|_{\lambda=0}$$

$$=-x_2\sin x_0-\frac{1}{2!}x_1^2\cos x_0,$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\left(\cos(x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\ldots)\right)\Big|_{\lambda=0}$$

$$= -x_3\sin x_0 - x_1x_2\cos x_0 + \frac{1}{3!}x_1^3\sin x_0,$$

$$A_4 = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{d\lambda^4}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{4!}\frac{d^4}{d\lambda^4}\left(\cos(x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\ldots)\right)\Big|_{\lambda=0}$$

$$= -x_4\sin x_0 - \left(\frac{1}{2!}x_2^2 + x_1x_3\right)\cos x_0 - \frac{1}{2!}x_1^2x_2\sin x_0 + \frac{1}{4!}x_1^4\cos x_0,$$

$$\vdots$$

şeklinde elde edilir [4].

Benzer şekilde $F(x_1,x_2,\ldots,x_i,\ldots,x_n)=\cos x_i$ nonlineer terimi için Adomian polinomları:

$$x_i = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{ik} = x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots \qquad i=1,2,\ldots,n \qquad \text{olmak üzere}$$

$$A_0 = \frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k},\ldots,\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0} = \cos(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)\Big|_{\lambda=0}$$

$$= \cos x_{i0}.$$

$$A_1 = \frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k},\ldots,\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{d}{d\lambda}\cos(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)\Big|_{\lambda=0}$$

$$= -x_{i1}\sin x_{i0}.$$

$$A_2 = \frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k},\ldots,\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\cos(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots\Big|_{\lambda=0}$$

$$= -x_{i2}\sin x_{i0} - \frac{1}{2!}x_{i1}^2\cos x_{i0},$$

$$A_3 = \frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k},\ldots,\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\cos(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)\Big|_{\lambda=0}$$

$$= -x_{i3}\sin x_{i0} - x_{i1}x_{i2}\cos x_{i0} + \frac{1}{3!}x_{i1}^3\sin x_{i0},$$

$$A_4 = \frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{d\lambda^4}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k},\ldots,\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0} = \frac{1}{4!}\frac{d^4}{d\lambda^4}\cos(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)\Big|_{\lambda=0}$$

$$= -x_{i4}\sin x_{i0} - \left(\frac{1}{2!}x_{i2}^2 + x_{i1}x_{i3}\right)\cos x_{i0} - \frac{1}{2!}x_{i1}^2x_{i2}\sin x_{i0} + \frac{1}{4!}x_{i1}^4\cos x_{i0},$$

şeklinde elde edilir [24].

Örnek 4.1.7 $F(x)=\sin x$ nonlineer terimi için Adomian polinomlarının hesaplanması:

$$x=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k = x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\dots \quad \text{olmak üzere}$$

$$A_0=\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0}=\sin(x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\dots)\mid_{\lambda=0} \quad =\sin x_0,$$

$$A_1=\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0}=\frac{d}{d\lambda}\sin(x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\dots)\mid_{\lambda=0}=x_1\cos x_0,$$

$$A_2=\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0}=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\sin(x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\dots)\mid_{\lambda=0}$$

$$=x_2\cos x_0-\frac{1}{2!}x_1^2\sin x_0,$$

$$A_3=\frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0}=\frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\sin(x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\dots)\mid_{\lambda=0}$$

$$=x_3\cos x_0-x_1x_2\sin x_0-\frac{1}{3!}x_1^3\cos x_0$$

$$A_4=\frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{d\lambda^4}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_k\right)\right]_{\lambda=0}=\frac{1}{4!}\frac{d^4}{d\lambda^4}\sin(x_0+\lambda x_1+\lambda^2 x_2+\dots)\mid_{\lambda=0}$$

$$=-x_4\cos x_0-\left(\frac{1}{2!}x_2^2+x_1x_3\right)\sin x_0-\frac{1}{2!}x_1^2x_2\cos x_0+\frac{1}{4!}x_1^4\sin x_0$$

$$\vdots$$

şeklinde elde edilir [4].

Benzer şekilde $F(x_1,x_2,\dots.x_i,\dots,x_n)=\sin x_i$ nonlineer terimi için Adomian polinomları:

$$x_i=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{ik}=x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\dots \qquad i=1,2,\dots,n \qquad \text{olmak üzere}$$

$$A_0=\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k},\dots,\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0}=\sin(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\dots)\mid_{\lambda=0}$$

$$=\sin x_{i0},$$

$$A_1=\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k},\dots,\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0}=\frac{d}{d\lambda}\sin(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\dots)\mid_{\lambda=0}$$

$$=x_{i1}\cos x_{i0}.$$

$$A_2=\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k},\dots,\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\sin(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)\Big|_{\lambda=0} \qquad =x_{i2}\cos x_{i0}-\frac{1}{2!}x_{i1}^2\sin x_{i0},$$

$$A_3=\frac{1}{3!}\left[\frac{d^3}{d\lambda^3}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k},\ldots,\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0}=\frac{1}{3!}\frac{d^3}{d\lambda^3}\sin(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)\Big|_{\lambda=0}$$

$$=-x_{i3}\cos x_{i0}-x_{i1}x_{i2}\sin x_{i0}+\frac{1}{3!}x_{i1}^3\cos x_{i0},$$

$$A_4=\frac{1}{4!}\left[\frac{d^4}{d\lambda^4}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k},\ldots,\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{nk}\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$=\frac{1}{4!}\frac{d^4}{d\lambda^4}\sin(x_{i0}+\lambda x_{i1}+\lambda^2 x_{i2}+\ldots)\Big|_{\lambda=0}$$

$$=-x_{i4}\cos x_{i0}-(\frac{1}{2!}x_{i2}^2+x_{i1}x_{i3})\sin x_{i0}-\frac{1}{2!}x_{i1}^2x_{i2}\cos x_{i0}+\frac{1}{4!}x_{i1}^4\sin x_{i0},$$

şeklinde elde edilir [24].

Örnek 4.1.8 $F(x_1,x_2)=\cos(x_1x_2)$ nonlineer terimi için Adomian polinomlarının hesaplanması:

$$x_1=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k}, \quad x_2=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k} \quad \text{olmak üzere}$$

$$A_0=\frac{1}{0!}\left[\frac{d^0}{d\lambda^0}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$=\cos((x_{10}+\lambda x_{11}+\lambda^2 x_{12}+\ldots)(x_{20}+\lambda x_{21}+\lambda^2 x_{22}+\ldots))\Big|_{\lambda=0} \qquad =\cos x_{10}x_{20},$$

$$A_1=\frac{1}{1!}\left[\frac{d}{d\lambda}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}\right)\right]_{\lambda=0}=\frac{d}{d\lambda}\cos((x_{10}+\lambda x_{11}+\ldots)(x_{20}+\lambda x_{21}+\ldots))\Big|_{\lambda=0}$$

$$=-(x_{10}x_{21}+x_{11}x_{20})\sin x_{10}x_{20},$$

$$A_2=\frac{1}{2!}\left[\frac{d^2}{d\lambda^2}F\left(\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{1k},\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k x_{2k}\right)\right]_{\lambda=0}$$

$$=\frac{1}{2!}\frac{d^2}{d\lambda^2}\cos((x_{10}+\lambda x_{11}+\lambda^2 x_{12}+\ldots)(x_{20}+\lambda x_{21}+\lambda^2 x_{22}+\ldots))\Big|_{\lambda=0}$$

$$=-(x_{10}x_{22}+x_{11}x_{21}+x_{12}x_{20})\sin x_{10}x_{20}-\frac{1}{2!}(x_{10}^2x_{21}^2+x_{11}^2x_{20}^2)\cos x_{10}x_{20}$$

şeklinde elde edilir [24].

5.BÖLÜM

LİNEER DENKLEM SİSTEMLERİNİN ADOMIAN AYRIŞIM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

$AX=B$ lineer denklem sisteminde A nxn matris, B bilinen bir vektör ve X bilinmeyen bir vektör ve sistemin bir tek çözümü olsun. $AX=B$ denklem sisteminin i. denklemi

$$a_{i1}x_1 + \ldots + a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{ii}x_i + a_{i,i+1}x_{i+1} + \ldots + a_{in}x_n = b_i \tag{5.1}$$

şeklindedir. $a_{ii} \neq 0$ olmak üzere (5.1) den x_i aşağıdaki gibi elde edilir.

$$x_i = \frac{b_i}{a_{ii}} - \frac{1}{a_{ii}}(a_{i1}x_1 + \ldots + a_{i,i-1}x_{i-1} + a_{i,i+1}x_{i+1} + \ldots + a_{in}x_n) \tag{5.2}$$

$g_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n)$ lineer bir fonksiyon ve c_i bir sabit olmak üzere (5.2) den Adomian denkleminin kanonik yapısına uygun olarak ,

$$x_i = c_i + g_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) \tag{5.3}$$

yazılabilir. Adomian ayrışım yöntemini uygulamak için A_{im} $(m = 0,1,2,\ldots)$ Adomian polinomları olmak üzere

$$x_i = \sum_{m=0}^{\infty} x_{im} \qquad \text{ve} \qquad g_i(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{im}$$

yazılabilir. Bu nedenle (5.3) denklemi,

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{im} = c_i + \sum_{m=0}^{\infty} A_{im}(x_{10},\ldots,x_{1m},\ldots,x_{n0},\ldots,x_{nm}) \tag{5.4}$$

şeklinde düzenlenebilir ve (5.4) ten ,

$$\begin{aligned} x_{i0} &= c_i \\ x_{i,m+1} &= A_{im}(x_{10},\ldots,x_{1m},\ldots,x_{n0},\ldots,x_{nm}), \quad i = 1,2\ldots,n, \quad m = 0,1,2,\ldots \end{aligned} \tag{5.5}$$

elde edilebilir. $\lim_{k\to\infty} \varphi_{ik} = x_i$ olmak üzere x_i yaklaşık olarak $\varphi_{ik} = \sum_{m=0}^{k-1} x_{im}$ ile hesaplanabilir. λ hesaplamaları kolaylaştıracak bir parametre olmak üzere n. mertebeden Adomian polinomlarını elde etmek için,

$$x_{i\lambda} = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m x_{im}, \tag{5.6}$$

$$g_{i\lambda}(x_1,\ldots,x_{i-1},x_{i+1},\ldots,x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} \lambda^m A_{im}, \tag{5.7}$$

yazılabilir [25]. (5.7) den,

$$A_{im} = \frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{d\lambda^m} g_{i\lambda}(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n)\right]_{\lambda=0} \tag{5.8}$$

ve (5.6) , (5.8) den

$$\begin{aligned} A_{im}(x_{10},\dots,x_{1m},\dots,x_{n0},\dots,x_{nm}) &= -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}\left[\frac{1}{m!}\frac{d^m}{d\lambda^m}\sum_{l=0}^{\infty}\lambda^l x_{jl}\right]_{\lambda=0} \\ &= -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_{jm} \end{aligned} \tag{5.9}$$

elde edilir. Bu nedenle (5.4) ve (5.5) ten lineer denklem sisteminin çözümü için iterasyon formülü,

$$\begin{aligned} x_{i0} &= c_i \\ x_{i,m+1} &= -\frac{1}{a_{ii}}\sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} a_{ij}x_{jm}, \qquad i=1,2\dots,n\,, \quad m=0,1,2,\dots \end{aligned} \tag{5.10}$$

şeklinde elde edilir.

Adomian ayrışım yöntemi ile Jacobi iterasyon metotlarını daha iyi karşılaştırmak için Adomian ayrışım metodu matris formunda D , A matrisi gibi bir köşegen matris, $-L$ tam olarak A nın alt üçgensel ve $-U$ da A nın üst üçgensel matris olarak yazılabilir. Bu gösterimler ile A matrisi $A=D-L-U$ şeklinde parçalanır. O zaman $AX=B$ sistemi yerine $(D-L-U)X=B$ yazılırsa,

$$DX=(L+U)X+B \tag{5.11}$$

ve sonuç olarak

$$X=D^{-1}(L+U)X+D^{-1}B \tag{5.12}$$

elde edilir. Böylece Adomian ayrışım yönteminin matris formunda iterasyon formülü,

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= D^{-1}B \\ X^{(m+1)} &= D^{-1}(L+U)X^{(m)} \qquad m=0,1,2,\dots \end{aligned} \tag{5.13}$$

şeklinde elde edilir. $T_A = D^{-1}(L+U)$ denilirse yukarıdaki iterasyon formülü,

$$\begin{aligned} X^{(0)} &= D^{-1}B \\ X^{(m+1)} &= T_A X^{(m)} \qquad m=0,1,2,\dots \end{aligned} \tag{5.14}$$

şeklini alır. Böylece Adomian ayrışım yönteminin matris formundaki iterasyon formülünün Jacobi iterasyon yöntemi ile aynı olduğu görülür. Jacobi iterativ yönteminde ilk değer genellikle sıfır vektörü iken Adomian ayrışım yönteminde ilk değer $D^{-1}B$ dir [11].

5.2 Yöntemin Yakınsaklığı

Yöntemin yakınsaklığı için, $X^{(m+1)} = T_A X^{(m)}$,$(m = 0,1,2...)$ matris formu $X^{(0)} = D^{-1}B$ ilk değeri ile birlikte ele alınıp Jacobi iterativ yöntemi ile karşılaştırıldığında Adomian ayrışım yöntemi ile Jacobi iterativ yönteminin lineer denklem sistemlerinin çözümünde aynı olduğu söylenebilir. Bu nedenle yöntemin yakınsaklığı ile Jacobi iterativ yöntemi aynı yakınsaklık kriterine sahiptir [11].

Örnek 5.1.

$$\begin{aligned} 10x_1 + x_2 + x_3 &= 24 \\ -x_1 + 20x_2 + x_3 &= 21 \\ x_1 - 2x_2 + 100x_3 &= 300 \end{aligned} \tag{5.15}$$

Tam çözümü X=(2,1,3) olan lineeer denklem sisteminin Adomian ayrışım ve Jacobi iterativ yöntemleri ile çözümü:

Çözüm: Denklem sisteminin katsayılar matrisi

$A = \begin{bmatrix} 10 & 1 & 1 \\ -1 & 20 & 1 \\ 1 & -2 & 100 \end{bmatrix}$ matrisi köşegen dominanttır, dolayısıyla $\det A \neq 0$ dır.

i) Adomian Ayrışım Yöntemi ile Çözümü

(5.10) dan $x_{1,0} = \frac{24}{10}$, $x_{2,0} = \frac{21}{20}$, $x_{3,0} = \frac{300}{100}$ ve Adomian ayrışım yöntemi için iterasyon formülü

$$\begin{aligned} x_{1,m+1} &= \frac{1}{10}(-x_{2,m} - x_{3,m}), \\ x_{2,m+1} &= \frac{1}{20}(x_{1,m} - x_{3,m}), \\ x_{3,m+1} &= \frac{1}{100}(-x_{1,m} + 2x_{2,m}), \qquad m = 0,1,... \end{aligned} \tag{5.16}$$

şeklinde olur. Çözüm için k -terim yaklaşımı $\varphi_{ik} = \sum_{m=0}^{k-1} x_{im}$ dır. Matris formunda

$$T_A = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} & 0 & -\frac{1}{20} \\ -\frac{1}{100} & \frac{2}{100} & 0 \end{bmatrix}, \qquad X^{(0)} = D^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{24}{10} \\ \frac{21}{20} \\ \frac{300}{100} \end{bmatrix}$$

alınırsa iterasyon formülü $X^{(m+1)} = T_A X^{(m)}$ şeklini alır. Elde edilen sonuçlar Tablo 5.1 de verildi.

Tablo 5.1. Örnek 5.1 için Adomian ayrışım yöntemi ile elde edilen sonuçlar

k	φ_{1k}	φ_{2k}	φ_{3k}	$\left\|\varphi^{(k)}-\varphi^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	2.400000	1.050000	3.000000	-
1	1.995000	1.020000	2.997000	4.0×10^{-1}
2	1.998300	0.999900	3.000450	2.0×10^{-2}
3	1.999965	0.999892	3.000015	1.6×10^{-3}
4	2.000009	0.999997	2.999998	4.4×10^{-5}
5	2.000000	1.000001	3.000000	9.0×10^{-6}
6	2.000000	1.000000	3.000000	1.0×10^{-6}

ii) Jacobi İterativ Yöntemi ile Çözümü

Verilen denklem sisteminde i. denklem x_i değişkenine göre çözülürse

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{10}(24-x_2-x_3), \\ x_2 &= \frac{1}{20}(21+x_1-x_3), \\ x_3 &= \frac{1}{100}(300-x_1+2x_2) \end{aligned} \tag{5.17}$$

elde edilir. (5.17) denkleminden iterasyon formülü

$$\begin{aligned} x_{1,m+1} &= \frac{1}{10}(-x_{2,m}-x_{3,m}) + \frac{24}{10} \\ x_{2,m+1} &= \frac{1}{20}(x_{1,m}-x_{3,m}) + \frac{21}{20} \\ x_{3,m+1} &= \frac{1}{100}(-x_{1,m}+2x_{2,m}) + \frac{300}{100} \qquad m=0,1,2,... \end{aligned} \tag{5.18}$$

şeklinde elde edilir. Matris formunda

$$T=\begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{10} & -\frac{1}{10} \\ \frac{1}{20} & 0 & -\frac{1}{20} \\ -\frac{1}{100} & \frac{2}{100} & 0 \end{bmatrix}, \qquad C=\begin{bmatrix} \frac{24}{10} \\ \frac{21}{20} \\ \frac{300}{100} \end{bmatrix}$$

şeklinde seçilirse $X=TX+C$ yapısı elde edilir. Başlangıç yaklaşımı $X^{(0)}=(0,0,0)'$ alınarak çözüm yapıldığında Tablo 5.2 deki değerler elde edildi.

Tablo 5.2. Örnek 5.1 için Jacobi iterativ yöntemi ile elde edilen sonuçlar

m	$x_{1,m}$	$x_{2,m}$	$x_{3,m}$	$\left\|x^{(m)}-x^{(m-1)}\right\|_{\infty}$
0	0.000000	0.000000	0.000000	-
1	2.400000	1.050000	3.000000	3.0
2	1.995000	1.020000	2.997000	4.0×10^{-1}
3	1.998300	0.999900	3.000450	2.0×10^{-2}
4	1.999965	0.999992	3.000015	1.6×10^{-3}
5	2.000009	0.999997	2.999998	4.4×10^{-5}
6	2.000000	1.000001	3.000000	9.0×10^{-6}
7	2.000000	1.000000	3.000000	1.0×10^{-6}

Dikkat edilirse T_A ve T matrisleri aynıdır. Tablo 5.1 ve Tablo 5.2 incelendiğinde birinci satırları dışında aynı oldukları görülür. Yani Jacobi iterativ yönteminin ilk değeri $D^{-1}B$ alınırsa Adomian ayrışım yöntemi ile Jacobi iterativ yöntemi tamamen aynı sonuçları verir [11].

Örnek 5.2.

$$\begin{aligned} 10x_1 - x_2 + 2x_3 \qquad\qquad &= 6 \\ -x_1 + 11x_2 - x_3 + 3x_4 &= 25 \\ 2x_1 - x_2 + 10x_3 - x_4 &= -11 \\ 3x_2 - x_3 + 8x_4 &= 15 \end{aligned} \tag{5.19}$$

Tam çözümü X=(1,2,-1,1) olan lineeer denklem sisteminin Adomian ayrışım ve Jacobi iterativ yöntemleri ile çözümü:

Çözüm : Denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$A=\begin{bmatrix} 10 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 11 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & 8 \end{bmatrix}$$

dır. A matrisi köşegen dominant ve pozitif tanımlı bir matristir. dolayısıyla $\det A \neq 0$ dır.

i) Adomian Ayrışım Yöntemi ile Çözümü

(5.10) dan $x_{1,0}=\dfrac{6}{10}$, $x_{2,0}=\dfrac{25}{11}$, $x_{3,0}=\dfrac{-11}{10}$, $x_{4,0}=\dfrac{15}{8}$ ve Adomian ayrışım yöntemi için iterasyon formülü

$$\begin{aligned}
x_{1,m+1} &= \frac{1}{10}(x_{2,m}-2x_{3,m}),\\
x_{2,m+1} &= \frac{1}{11}(x_{1,m}+x_{3,m}-3x_{4,m}),\\
x_{3,m+1} &= \frac{1}{10}(-2x_{1,m}+x_{2,m}+x_{4,m}),\\
x_{4,m+1} &= \frac{1}{8}(-3x_{2,m}+x_{3,m}), \qquad m=0,1,2,...
\end{aligned} \tag{5.20}$$

şeklinde olur. Bu iterasyon formülünden elde edilen sonuçlar Tablo 5.3 te verildi. Çözüm için k-terim yaklaşımı $\varphi_{ik}=\sum_{m=0}^{k-1} x_{i,m}$ dır.

Tablo 5.3. Örnek 5.2 için Adomian ayrışım yöntemi ile elde edilen sonuçlar

k	φ_{1k}	φ_{2k}	φ_{3k}	φ_{4k}	$\left\Vert\varphi^{(k)}-\varphi^{(k-1)}\right\Vert_\infty$
0	0.600000	2.272727	-1.100000	1.875000	-
1	1.047272	1.715909	-0.805230	0.885228	9.8×10^{-1}
2	0.932636	2.053305	-1.049340	1.130881	3.3×10^{-1}
3	1.015198	1.953695	-0.968110	0.973844	9.9×10^{-2}
4	0.988991	2.011413	-1.010290	1.021351	5.7×10^{-2}
5	1.003198	1.992240	-0.994520	0.994435	2.6×10^{-2}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
14	0.999998	2.000001	-1.000000	1.000004	6.0×10^{-6}
15	1.000000	1.999998	-1.000000	1.000000	4.0×10^{-6}
16	0.999999	1.999999	-1.000000	1.000001	1.0×10^{-6}

ii) Jacobi İterativ Yöntemi ile Çözümü

Verilen denklem sisteminde i. denklem x_i değişkenine göre çözülürse

$$\begin{aligned}
x_1 &= \frac{1}{10}(6 - x_2 - 2x_3), \\
x_2 &= \frac{1}{11}(25 - x_1 + x_3 - 3x_4), \\
x_3 &= \frac{1}{10}(-11 - 2x_1 + x_2 + x_4), \\
x_4 &= \frac{1}{8}(15 - 3x_2 + x_3)
\end{aligned} \tag{5.21}$$

olur.. (5.21) denkleminden iterasyon formülü

$$\begin{aligned}
x_{1,m+1} &= \frac{1}{10}(x_{2,m} - 2x_{3,m}) + \frac{6}{10} \\
x_{2,m+1} &= \frac{1}{11}(x_{1,m} + x_{3,m} - 3x_{4,m}) + \frac{25}{11} \\
x_{3,m+1} &= \frac{1}{10}(-2x_{1,m} + x_{2,m} + x_{4,m}) + \frac{-11}{10} \\
x_{4,m+1} &= \frac{1}{8}(-3x_{2,m} + x_{3,m}) + \frac{15}{8} \qquad m = 0,1,2,...
\end{aligned} \tag{5.22}$$

şeklinde elde edilir. Başlangıç yaklaşımı $X^{(0)} = (0,0,0,0)^t$ alınarak çözüm yapıldığında Tablo 5.4 deki elde edildi.

Tablo 5.4. Örnek 5.2 için Jacobi iterativ yöntemi ile elde edilen sonuçlar

m	$x_{1,m}$	$x_{2,m}$	$x_{3,m}$	$x_{4,m}$	$\left\| x^{(m)} - x^{(m-1)} \right\|_\infty$
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
1	0.600000	2.272727	-1.100000	1.875000	9.8×10^{-1}
2	1.047272	1.715909	-0.805230	0.885228	3.3×10^{-1}
3	0.932636	2.053305	-1.049340	1.130881	9.9×10^{-2}
4	1.015198	1.953695	-0.968110	0.973844	5.7×10^{-2}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
15	0.999998	2.000001	-1.000000	1.000004	6.0×10^{-6}
16	1.000000	1.999999	-1.000000	1.000001	4.0×10^{-6}
17	1.000000	2.000000	-1.000000	1.000000	1.0×10^{-6}

Örnek 5.3.

$$\begin{aligned} 4x_1 + x_2 - x_3 &= 7 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 &= 8 \\ -x_1 - x_2 + 5x_3 - 2x_4 &= -4 \\ 2x_3 - 4x_4 &= 6 \end{aligned} \qquad (5.23)$$

Tam çözümü X=(1,2,-1,-2) olan lineeer denklem sisteminin Adomian ayrışım ve Jacobi iterativ yöntemleri ile çözümü:

Çözüm: Denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 5 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{bmatrix}$$

dır. A matrisi köşegen dominant ve pozitif tanımlı bir matristir, dolayısıyla $\det A \neq 0$ dır.

i) Adomian Ayrışım Yöntemi ile Çözümü

(5.10) dan $x_{1,0} = \frac{7}{4}$, $x_{2,0} = \frac{8}{3}$, $x_{3,0} = -\frac{4}{5}$, $x_{4,0} = -\frac{6}{4}$ ve Adomian ayrışım yöntemi için iterasyon formülü

$$\begin{aligned} x_{1,m+1} &= \frac{1}{4}(-x_{2,m} + x_{3,m}), \\ x_{2,m+1} &= \frac{1}{3}(-x_{1,m} + x_{3,m}), \\ x_{3,m+1} &= \frac{1}{5}(x_{1,m} + x_{2,m} + 2x_{4,m}), \\ x_{4,m+1} &= -\frac{1}{4}(-2x_{3,m}) \qquad m = 0,1,2,... \end{aligned} \qquad (5.24)$$

şeklinde olur. Bu iterasyon formülünden elde edilen sonuçlar Tablo 5.5 de verildi. Çözüm için k-terim yaklaşımı $\varphi_{ik} = \sum_{m=0}^{k-1} x_{im}$ dır.

Tablo 5.5. Örnek 5.3 için Adomian ayrışım yöntemi ile elde edilen sonuçlar

k	φ_{1k}	φ_{2k}	φ_{3k}	φ_{4k}	$\left\|\varphi^{(k)}-\varphi^{(k-1)}\right\|_{\infty}$
0	1.750000	2.666667	-0.800000	-1.500000	-
1	0.883333	1.816667	-0.516667	-1.900000	8.6×10^{-1}
2	1.166667	2.200000	-1.020000	-1.758333	5.0×10^{-1}
3	0.945000	1.937778	-0.830000	-2.010000	2.6×10^{-1}
4	1.058056	2.075000	-1.027444	-1.915000	1.9×10^{-1}
5	0.974389	1.971500	-0.939389	-2.013722	1.0×10^{-1}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
29	1.000001	2.000001	-1.000001	-1.999998	4.0×10^{-6}
30	1.000000	1.999999	-0.999999	-1.999999	2.0×10^{-6}
31	1.000001	1.999999	-1.000000	-2.000000	1.0×10^{-6}

ii) Jacobi İterativ Yöntemi ile Çözümü

Verilen denklem sisteminde i. denklem x_i değişkenine göre çözülürse

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{1}{4}(7-x_2+x_3), \\ x_2 &= \frac{1}{3}(8-x_1+x_3), \\ x_3 &= \frac{1}{5}(-4x_1+x_2+2x_4), \\ x_4 &= -\frac{1}{4}(6-2x_3) \end{aligned} \tag{5.25}$$

elde edilir.

(5.25) denkleminden iterasyon formülü

$$\begin{aligned} x_{1,m+1} &= \frac{1}{4}(-x_{2,m}+x_{3,m})+\frac{7}{4} \\ x_{2,m+1} &= \frac{1}{3}(-x_{1,m}+x_{3,m})+\frac{8}{3} \\ x_{3,m+1} &= \frac{1}{5}(x_{1,m}+x_{2,m}+2x_{4,m})-\frac{4}{5} \\ x_{4,m+1} &= -\frac{1}{4}(-2x_{3,m})-\frac{6}{4} \qquad m=0.1.2,... \end{aligned} \tag{5.26}$$

elde edilir. Başlangıç yaklaşımı $X^{(0)} = (0,0,0,0)'$ alınarak çözüm yapıldığında Tablo 5.6 daki değerler elde edildi.

Tablo 5.6. Örnek 5.3 için Jacobi iterativ yöntemi ile elde edilen sonuçlar

m	$x_{1,m}$	$x_{2,m}$	$x_{3,m}$	$x_{4,m}$	$\lVert x^{(m)} - x^{(m-1)} \rVert_\infty$
0	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-
1	1.750000	2.666667	-0.800000	-1.500000	8.6×10^{-1}
2	0.883333	1.816667	-0.516667	-1.900000	5.0×10^{-1}
3	1.166667	2.200000	-1.020000	-1.758333	2.6×10^{-1}
4	0.945000	1.937778	-0.830000	-2.010000	1.9×10^{-1}
5	1.058056	2.075000	-1.027444	-1.915000	1.0×10^{-1}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
31	0.999999	1.999999	-0.999999	-2.000001	4.0×10^{-6}
32	1.000000	2.000000	-1.000001	-2.000000	2.0×10^{-6}
33	1.000000	2.000000	-1.000000	-2.000000	1.0×10^{-6}

Örnek 5.4.

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= -8 \\ 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 3x_4 &= -20 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= -2 \\ x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 &= 4 \end{aligned} \tag{5.27}$$

Tam çözümü X=(-7,3,2,2) olan denklem sisteminin Adomian ayrışım yöntemi ile çözümü:

Çözüm: Denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & -1 \\ 2 & -2 & 3 & -3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$$

dır. A matrisi köşegen dominant değildir. $\det A \neq 0$ olduğundan denklem sisteminin tek çözümü vardır.

(5.10) dan $x_{10} = -8$, $x_{2,0} = 10$, $x_{3,0} = -2$, $x_{4,0} = \frac{4}{3}$ ve Adomian ayrışım yöntemi için iterasyon formülü

$$
\begin{aligned}
x_{1,m+1} &= (x_{2,m} + 2x_{3,m} + x_{4,m}), \\
x_{2,m+1} &= -\frac{1}{2}(-2x_{1,m} - 3x_{3,m} + 3x_{4,m}), \\
x_{3,m+1} &= \frac{1}{5}(-x_{1,m} - x_{2,m}), \\
x_{4,m+1} &= \frac{1}{3}(-x_{1,m} + x_{2,m} - 4x_{3,m}) \qquad m = 0,1,2,...
\end{aligned}
\tag{5.28}
$$

şeklinde olur. Bu iterasyon formülünden elde edilen sonuçlar Tablo 5.7 de verildi. Çözüm için k -terim yaklaşımı $\varphi_{ik} = \sum_{m=0}^{k-1} x_{im}$ dır.

Tablo 5.7. Örnek 5.6 için Adomian ayrışım yöntemi ile elde edilen sonuçlar

k	φ_{1k}	φ_{2k}	φ_{3k}	φ_{4k}	$\lVert\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}\rVert_\infty$
0	-8.000000	10.000000	-2.000000	1.333333	-
1	7.333333	-3.000000	-4.000000	10.000000	8.66
2	6.999670	-3.666670	-6.333333	3.222222	6.77
3	4.221890	2.666663	-5.333333	6.222222	6.33
4	11.555220	-3.111120	-8.888890	7.925922	7.33
5	14.592260	-3.666670	-10.444500	8.296290	3.04
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	

elde edilir. Tablo 5.7. incelendiğinde bu denklem sisteminin çözümünün Adomian ayrışım yöntemi ile bulunamadığı görülür.

Örnek 5.5.

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \quad\;\; 3x_4 &= 4 \\
2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 &= 1 \\
3x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 &= -3 \\
-x_1 + 2x_2 + 3x_3 - x_4 &= 4
\end{aligned}
\tag{5.29}
$$

Tam çözümü X =(3,-2,0,1) olan denklem sisteminin Adomian ayrışım yöntemi ile çözümü:

Çözüm: Denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}
$$

dır. A matrisi köşegen dominant değildir, dolayısıyla $\det A \neq 0$ olduğundan denklem sisteminin tek çözümü vardır.

(5.10) dan $x_{1,0} = 4$, $x_{2,0} = 1$, $x_{3,0} = 3$, $x_{4,0} = -4$ ve Adomian ayrışım yöntemi için iterasyon formülü

$$\begin{aligned} x_{1,m+1} &= (-x_{2,m} - 3x_{3,m}), \\ x_{2,m+1} &= -\frac{1}{2}(-2x_{1,m} + x_{3,m} - x_{4,m}), \\ x_{3,m+1} &= -(-3x_{1,m} + x_{2,m} - 2x_{4,m}), \\ x_{4,m+1} &= -(x_{1,m} - 2x_{2,m} - 3x_{3,m}) \qquad m = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{5.30}$$

şeklinde olur. Bu iterasyon formülünden elde edilen sonuçlar Tablo 5.8 de verildi. Çözüm için k-terim yaklaşımı $\varphi_{ik} = \sum_{m=0}^{k-1} x_{im}$ dır.

Tablo 5.8 . Örnek 5.7 için Adomian ayrışım yöntemi ile elde edilen sonuçlar

k	φ_{1k}	φ_{2k}	φ_{3k}	φ_{4k}	$\left\Vert\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}\right\Vert_\infty$
0	4.000000	1.000000	3.000000	-4.000000	-
1	15.000000	0.000000	6.000000	3.000000	11
2	-5.000000	-26.000000	54.000000	-1.000000	48
3	33.000000	66.000000	12.000000	111.000000	112
4	-395.000000	164.000000	256.000000	131.000000	428
5	-225.000000	918.000000	- 756.000000	837.000000	1012
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	

sonuçları elde edilir. Tablo 5.8. incelendiğinde bu denklem sisteminin çözümünün Adomian ayrışım yöntemi ile bulunamadığı görülür.

Örnek 5.6. $0.003\,x_1 + 59.14\,x_2 = 59.17$

$$5.291\,x_1 - 6.130\,x_2 = 46.78 \tag{5.31}$$

Tam çözümü X=(10,1) olan lineer denklem sisteminin Adomian ayrışım yöntemi ile çözümü:

Çözüm: Denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 0.003 & 59.14 \\ 5.291 & -6.130 \end{bmatrix}$$

dır. A matrisi köşegen dominant değildir. $\det A \neq 0$ olduğundan denklem sisteminin tek çözümü vardır.

(5.10) dan $x_{1,0} = 19723.3$, $x_{2,0} = -7.631320$, ve Adomian ayrışım yöntemi için iterasyon formülü

$$\begin{aligned} x_{1,m+1} &= \frac{1}{0.003}(-59.14x_{2,m}), \\ x_{2,m+1} &= -\frac{1}{6.130}(-5.291x_{1,m}), \qquad m = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{5.32}$$

şeklinde olur. Bu iterasyon formülünden elde edilen sonuçlar Tablo 5.9 da verildi. Çözüm için k-terim yaklaşımı $\varphi_{ik} = \sum_{m=0}^{k-1} x_{im}$ dır.

Tablo 5.9 . Örnek 5.6 için Adomian ayrışım yöntemi ile elde edilen sonuçlar

k	φ_{1k}	φ_{2k}	$\left\|\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	19723.300000	-7.631320	-
1	170162.300000	17016.168680	170213
2	-3354226837.700000	146865.168700	33543969999
3	-25932926838.000000	-289517134.800000	22578700001
⋮	⋮	⋮	⋮

elde edilir. Tablo 5.9. incelendiğinde bu denklem sisteminin çözümünün Adomian ayrışım yöntemi ile bulunamadığı görülür.

Katsayılar matrisinin köşegeni dominant olacak şekilde verilen denklem sistemi yeniden düzenlenirse

$$\begin{aligned} 5.291\ x_1 - 6.130\ x_2 &= 46.78 \\ 0.003\,x_1 + 59.14\,x_2 &= 59.17 \end{aligned} \tag{5.33}$$

elde edilir.Bu durumda denklem sisteminin katsayılar matrisi

$$A = \begin{bmatrix} 5.291 & -6.130 \\ 0.003 & 59.14 \end{bmatrix}$$

dır. A matrisi köşegen dominanttır dolayısıyla $\det A \neq 0$ olduğundan denklem sisteminin tek çözümü vardır.

(5.10) dan $x_{1,0} = 8.841428$. $x_{2,0} = 1.000507$ ve Adomian ayrışım yöntemi için iterasyon formülü

$$
\begin{aligned}
x_{1,m+1} &= \frac{1}{5.291}(6.130x_{2,m}), \\
x_{2,m+1} &= \frac{1}{59.14}(-0.003x_{1,m}), \qquad m = 0,1,2,...
\end{aligned}
\tag{5.34}
$$

şeklinde olur. Bu iterasyon formülünden elde edilen sonuçlar Tablo 5.10 da verildi. Çözüm için k-terim yaklaşımı $\varphi_{ik} = \sum_{m=0}^{k-1} x_{im}$ dır.

Tablo 5.10. Örnek 5.6 için Adomian ayrışım yöntemi ile elde edilen sonuçlar

k	φ_{1k}	φ_{2k}	$\left\|\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	8.841428	1.000507	-
1	10.000586	1.000059	1.15
2	10.000067	1.000005	5.1×10^{-4}
3	9.999999	1.000001	6.7×10^{-5}
4	10.000000	1.000000	1.0×10^{-6}

6.BÖLÜM

6.1. LİNEER OLMAYAN DENKLEM SİSTEMLERİNİN ADOMIAN AYRIŞIM YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, Adomian ayrışım yöntemi ile lineer olmayan denklem sistemlerinin çözümü incelenecektir. $f_i = IR^n \to IR,\quad i = 1,2,...,n$ olmak üzere

$$\begin{aligned} &f_1(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ &f_2(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \\ &\vdots \\ &f_n(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \end{aligned} \tag{6.1.1}$$

lineer olmayan denklem sisteminin bir tek çözümü olsun. (6.1.1) sisteminin i. denklemi

$$f_i(x_1, x_2, ..., x_n) = 0 \tag{6.1.2}$$

olmak üzere bu denklemden x_i, Adomian ayrışım yönteminin yapısına uygun olarak

$$x_i = c_i + g_i(x_1, x_2, ..., x_n) \tag{6.1.3}$$

şeklinde elde edilebilir. Burada $g_i(x_1, x_2, ..., x_n)$ lineer olmayan bir fonksiyon ve c_i bir sabittir. (6.1.3) denklemine Adomian ayrışım yöntemi uygulamak için

$$x_i = \sum_{m=0}^{\infty} x_{im}$$

ve

$$g_i(x_1, x_2, ..., x_n) = \sum_{m=0}^{\infty} A_{im}(x_{10}, ..., x_{1m}, ..., x_{n0}, ..., x_{nm}) \tag{6.1.4}$$

şeklinde yazılır. Burada A_{im} ler Adomian polinomlarıdır [25]. (6.1.4) , (6.1.3) te yazılırsa

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{im} = c_i + \sum_{m=0}^{\infty} A_{im} \tag{6.1.5}$$

elde edilir. Bu durumda, (6.1.5) denkleminden iterasyon formülü

$$\begin{aligned} &x_{i0} = c_i \\ &x_{i,m+1} = A_{im}, \qquad i = 1,...,n, \quad m = 0,1,2,... \end{aligned} \tag{6.1.6}$$

şeklinde elde edilir. x_i çözümü için k-terim yaklaşımı $\varphi_{ik} = \sum_{m=0}^{k-1} x_{im}$ şeklindedir. Böylece k-terim yaklaşımının gerçek çözüme yakınsaması durumunda

$$\lim_{k\to\infty} \varphi_{ik} = x_i \tag{6.1.7}$$

olacaktır. Eğer x_i, λ parametresine bağlı olarak

$$x_{i\lambda} = \sum_{j=0}^{m} \lambda^j x_{ij}, \quad i = 1,...,n \tag{6.1.8}$$

şeklinde yazılırsa Adomian polinomları

$$A_{im}(x_{10},...,x_{1m},...,x_{n0},...,x_{nm}) = \frac{1}{m!}\left[\frac{d^m}{d\lambda^m} g_i(x_1,x_2...,x_n)\right]_{\lambda=0} \tag{6.1.9}$$

formülünden kolaylıkla hesaplanabilir [26]. Bu durumda

$$A_{i0}(x_{10},x_{20}...,x_{n0}) = g_i(x_{10},x_{20},...,x_{n0})$$

$$A_{im}(x_{10},...,x_{1m},x_{20},...,x_{2m},...,x_{n0},...,x_{nm}) = \sum_{\Omega}\left(\frac{x_{11}^{k_{11}}}{k_{11}!}\cdots\frac{x_{m1}^{k_{m1}}}{k_{m1}!}\right)\left(\frac{x_{12}^{k_{12}}}{k_{12}!}\cdots\frac{x_{m2}^{k_{m2}}}{k_{m2}!}\right)\cdots\left(\frac{x_{1n}^{k_{1n}}}{k_{1n}!}\cdots\frac{x_{mn}^{k_{mn}}}{k_{mn}!}\right)$$

$$\times \frac{\partial^{\Omega_1+\Omega_2+\cdots\Omega_n}}{\partial x_1^{\Omega_1}\partial x_2^{\Omega_2}\cdots\partial x_n^{\Omega_n}} g_i(x_{10},x_{20},...,x_{n0}), \quad m \neq 0 \tag{6.1.10}$$

yazılabilir. Burada

$$\Omega = (k_{11} + 2k_{21} + ... + mk_{m1}) + ... + (k_{1m} + 2k_{2m} + ... + mk_{mn}) = m$$

ve

$$\Omega_i = k_{1i} + k_{2i} + ... + k_{mi}, \quad i = 1,2...,n$$

dir .

6.2. Yöntemin Yakınsaklığı

(6.1.1) denklem sisteminin çözümü

$$x_{i\lambda} = \sum_{j=0}^{\infty} x_{ij}\lambda^j , \quad i = 1,2,...,n \tag{6.2.1}$$

olsun. i. serinin yakınsaklık yarıçapı ρ_i olmak üzere $\rho = \min\{\rho_1, \rho_2,..., \rho_n\}$ ve $\rho > 1$ olsun. Bu durumda (6.2.1) denklemi $|\lambda| \le \rho$ için yakınsar [12].

Yakınsaklık yarıçapı $\hat{\rho} > 1$ ve

$$g_{i\lambda}(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_n=m\\ k_1...k_n\in W=\{0,1...\}}} a_{k_1k_2,...k_n}x_1^{k_1}x_1^{k_2},...,x_n^{k_n}\ , \qquad (6.2.2)$$

olmak üzere, $g_{i\lambda}(x_1,x_2,...,x_n)$ nın seriye açılması durumunda ise (6.2.1) serileri $\|x\|<\hat{\rho}$ için yakınsar. (6.2.1) denklemi (6.2.2) de kullanılırsa $\sum_{m=0}^{\infty} c_m\lambda^m$ yeni serisi elde edilir ve burada yakınsaklık yarıçapı 1 den büyük olur.

$$g_{i\lambda}(x_1,x_2,...,x_n)=\sum_{m=0}^{\infty}\sum_{\substack{k_1+k_2+...+k_n=m\\ k_1...k_n\in W=\{0,1...\}}} a_{k_1k_2,...,k_n}\prod_{i=1}^{n}\left(\sum_{j=0}^{\infty}x_{ij}\lambda^j\right)^{k_i} \qquad (6.2.3)$$

Bu dizinin m satırı (6.1.9) da tanımlanan A_{im} ye $\lambda=1$ olduğu zaman yakınsar. Çünkü $g_{i\lambda}(x_1,x_2,...,x_n)$ Taylor serisine açılabilir.. Aşağıda (6.2.3) deki seri çiftlerinin yakınsaklığını ispatlayan teorem verildi.

Teorem 6.2.1. $x_1,x_2,...,x_n$ $(i=1,2,...,n)$ değişkenlerinin analitik bir fonksiyonu $g_{i\lambda}(x_1,x_2,...,x_n)$ ve $\|x\|<R$ olmak üzere $x_i=\sum x_{im}$ sonsuz seri şeklinde ayrıştırılabilir. $\lambda\in[-1,1]$ için $x_{i\lambda}=\sum x_{im}\lambda^{im}$ parametrizasyonu kesinlikle yakınsaktır ve x_i serileri aşağıdaki şekilde üretilebilir.

$$\frac{m'}{n(1+\varepsilon)}\left(1+\frac{1}{(1+\varepsilon)}\left(\frac{\lambda}{p}\right)+...+\frac{1}{(1+\varepsilon)^n}\left(\frac{\lambda}{p}\right)^n+...\right) \qquad (6.2.4)$$

Burada $m'\geq M$ (M, x_i nin üst limiti) ve $\varepsilon>\left(\frac{M}{R}\right)$ ve $\rho\geq 1$ dir. Bu durumda seri çiftleri $\lambda=1$ için yakınsar [27].

Örnek 6.1.1 Örnek 3.1.1 in Adomian ayrışım yöntemi ile çözümü:

Verilen denklem sistemindeki i. denklemden x_i çözülürse

$$x_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cos(x_2 x_3)$$

$$x_2 = -0.1 + \frac{1}{9}\sqrt{x_1^2 + \sin x_3 + 1.06}$$

$$x_3 = -\frac{10\pi - 3}{60} - \frac{1}{20}e^{-x_1 x_2} \tag{6.1}$$

elde edilir. (6.1) denklemine Adomian ayrışım yönteminin uygulanmasıyla

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{1m} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty} A_m(\cos(x_2 x_3)),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{2m} = -0.1 + \frac{1}{9}\sqrt{\sum_{m=0}^{\infty} A_m(x_1^2) + \sum_{m=0}^{\infty} A_m(\sin(x_3)) + 1.06},$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{3m} = -\frac{10\pi - 3}{60} - \frac{1}{20}\sum_{m=0}^{\infty} A_m(e^{-x_1 x_2})$$

denklemleri ve $x_{1,0} = \frac{1}{6}$, $\quad x_{2,0} = -0,1$, $\quad x_{3,0} = -\frac{10\pi - 3}{60}$ olmak üzere

$$x_{1,m+1} = \frac{1}{3}(A_m(\cos x_2 x_3)),$$

$$x_{2,m+1} = \frac{1}{9}\sqrt{A_m((x_1)^2) + A_m(\sin x_3) + 1.06},$$

$$x_{3,m+1} = -\frac{1}{20}A_m(e^{-x_1 x_2}). \qquad m = 0,1,2,\ldots$$

iterasyon formülü elde edilir.

$F(x_1,x_2,x_3) = x_1^2$, $F(x_1,x_2,x_3) = e^{x_1 x_2}$, $F(x_1,x_2,x_3) = \sin x_3$, $F(x_1,x_2,x_3) = \cos(x_2 x_3)$ nonlineer terimlerinin Adomian polinomları 4. bölümde elde edildi. Bu iterasyon formülüne göre $\left\| x^{(m-1)} - x^{(m)} \right\| \le 10^{-6}$ olacak şekilde elde edilen sonuçlar Tablo 6.1 de verildi.

Tablo 6.1 Örnek 6.1.1 in Adomian ayrışım yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçlar

k	$\varphi_{1,k}$	$\varphi_{2,k}$	$\varphi_{3,k}$	$\left\Vert \varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)} \right\Vert_\infty$
0	0.166666	-0.100000	-0.473360	-
1	0.499626	-0.026440	-0.525290	33.2×10^{-2}
2	0.499833	0.000639	-0.524100	2.7×10^{-2}
3	0.499905	0.000241	-0.523770	3.9×10^{-4}
4	0.499952	0.000052	-0.523619	1.8×10^{-4}
5	0.499990	0.000008	-0.523594	4.4×10^{-5}
6	0.499994	0.000005	-0.523596	4.0×10^{-6}
7	0.499997	0.000003	-0.523597	3.0×10^{-6}
8	0.499998	0.000002	-0.523598	2.0×10^{-6}
9	0.499999	0.000001	-0.523598	1.0×10^{-6}

Tablo 3.1 ve 3.2 nin başlangıç şartları Tablo 6.1 deki gibi seçilerek yapılan iterasyonlar sonucunda elde edilen değerler Tablo 6.2 ve 6.3 de verildi.

Tablo 6.2 Örnek 6.1.1 in Basit iterasyon yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçlar

m	x_1	x_2	x_3	$\left\Vert x^{m} - x^{(m-1)} \right\Vert_\infty$
0	0.166666	-0.100000	-0.473360	-
1	0.499627	0.002665	-0.523532	3.3×10^{-1}
2	0.499999	0.000004	-0.523594	2.6×10^{-3}
3	0.500000	0.000001	-0.523598	4.0×10^{-6}
4	0.500000	0.000000	-0.523598	1.0×10^{-6}

Tablo 6.3 Örnek 6.1.1 in Newton Raphson yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçlar

m	x_1	x_2	x_3	$\left\|x^m - x^{(m-1)}\right\|_\infty$
0	0.166666	-0.100000	-0.473360	-
1	0.500039	0.002134	-0.523485	3.3×10^{-1}
2	0.500048	0.000012	-0.523528	2.1×10^{-3}
3	0.500000	0.000001	-0.523598	7.0×10^{-5}
4	0.500000	0.000000	-0.523598	1.0×10^{-6}

Örnek 6.1.2

$$\begin{aligned} x_1^2 - 10x_1 + x_2^2 + 8 &= 0 \\ x_1x_2^2 + x_1 - 10x_2 + 8 &= 0 \end{aligned}$$

lineer olmayan denklem sisteminin Adomian ayrışım, Basit iterasyon ve Newton-Raphson yöntemleri ile çözümü:

i) Adomian Ayrışım Yöntemi ile Çözümü

Verilen denklem sistemindeki i. denklemden x_i çözülürse

$$x_1 = \frac{8}{10} + \frac{1}{10}x_1^2 + \frac{1}{10}x_2^2 ,$$

$$x_2 = \frac{8}{10} + \frac{1}{10}x_1x_2^2 + \frac{1}{10}x_1 , \tag{6.2}$$

elde edilir. (6.2) denklemine Adomian ayrışım yönteminin uygulanmasıyla

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{1m} = \frac{8}{10} + \frac{1}{10}\sum_{m=}^{\infty} A_m(x_1^2) + \frac{1}{10}\sum_{m=0}^{\infty} A_m(x_2^2),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{2m} = \frac{8}{10} + \frac{1}{10}\sum_{m=0}^{\infty} A_m(x_1x_2^2) + \frac{1}{10}\sum_{m=0}^{\infty} x_1 ,$$

denklemleri ve $x_{1,0} = \frac{8}{10}$, $x_{2,0} = \frac{8}{10}$ olmak üzere

$$x_{1,m+1} = \frac{1}{10}(A_m(x_1^2) + A_m(x_2^2)) ,$$

$$x_{2,m+1} = \frac{1}{10}(A_m(x_1x_2^2) + x_{1,m}) , \qquad m = 0,1,2,...$$

iterasyon formülleri elde edilir.

$F(x_1,x_2)=x_1^2$, $F(x_1,x_2)=x_2^2$, $F(x_1,x_2)=x_1x_2^2$ nonlineer terimlerinin Adomian polinomları 4. bölümde elde edildi. Bu iterasyon formülüne göre $\left\|x^{(m-1)}-x^{(m)}\right\|\leq 10^{-6}$ olacak şekilde elde edilen sonuçlar Tablo 6.4 de verildi.

Tablo 6.4 Örnek 6.1.2 nin Adomian ayrışım yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçlar

k	$\varphi_{1,k}$	$\varphi_{2,k}$	$\left\|\varphi^{(k)}-\varphi^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	0.800000	0.800000	-
1	0.928000	0.931200	1.3×10^{-1}
2	0.969472	0.968985	4.1×10^{-2}
3	0.985512	0.984620	1.6×10^{-2}
4	0.992633	0.991910	7.2×10^{-3}
5	0.996074	0.995559	3.6×10^{-3}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
18	0.999998	0.999996	4.0×10^{-6}
19	0.999999	0.999998	2.0×10^{-6}
20	1.000000	0.999999	1.0×10^{-6}

ii) Basit İterasyon Yöntemi ile Çözümü

(6.2) denkleminden basit iterasyon yönteminin iterasyon formülü

$$x_1^{(m)}=\frac{1}{10}((x_1^{m-1})^2+(x_2^{(m-1)})^2)+\frac{8}{10},$$
$$x_2^{(m)}=\frac{1}{10}(x_1^{(m-1)}.(x_2^{m-1})^2+x_1^{(m-1)})+\frac{8}{10},$$

elde edilir. $X^{(0)}$, Tablo 6.4 deki gibi alındığında yapılan iterasyonlar sonucunda elde edilen değerler Tablo 6.5 verildi.

Tablo 6.5 Örnek 6.1.2 nin Basit iterasyon yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçlar

m	x_1	x_2	$\lVert x^m - x^{(m-1)} \rVert_\infty$
0	0.800000	0.800000	-
1	0.928000	0.952192	1.5×10^{-1}
2	0.976785	0.986241	4.8×10^{-2}
3	0.992678	0.995823	1.5×10^{-2}
4	0.997707	0.998710	5.0×10^{-3}
5	0.999284	0.999599	1.5×10^{-3}
⋮	⋮	⋮	⋮
9	0.999993	0.999996	1.5×10^{-5}
10	0.999998	0.999999	5.0×10^{-6}
11	0.999999	1.000000	1.0×10^{-6}

iii) Newton-Raphson Yöntemi ile Çözümü

Verilen sistem için Jacobian matrisi ;

$$J(x_1,x_2)=\begin{bmatrix} 2x_1-10 & 2x_2 \\ 1+x_2^2 & 2x_1x_2-10 \end{bmatrix}$$

dır. Newton algoritmasına göre istenen iterasyon ,

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \end{bmatrix}=-(J(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)}))^{-1}F(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)})$$

olur.

Böylece k .adımda $J(X^{(k-1)})\ Y^{(k-1)}= - F(X^{(k-1)})$ lineer sistemi çözülmelidir. Burada

$$J(X^{(k-1)})=\begin{bmatrix} 2x_1^{(k-1)} & 2x_2^{(k-1)} \\ (x_2^{(k-1)})^2 & -10 \end{bmatrix},$$

ve

$$Y^{(k-1)}=\begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

$$F(X^{(k-1)})=\begin{bmatrix}(x_1^{(k-1)})^2-10x_1^{(k-1)}+(x_2^{(k-1)})^2+8\\ x_1^{(k-1)}(x_2^{(k-1)})^2+x_1^{(k-1)}-10x_2^{(k-1)}+8\end{bmatrix}$$

dir. $X^{(0)}$, Tablo 6.4 deki gibi alındığında yapılan iterasyonlar sonucunda elde edilen değerler Tablo 6.6 da verildi.

Tablo 6.6 Örnek 6.1.2 nin Newton Raphson yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçlar

m	x_1	x_2	$\left\Vert x^m - x^{(m-1)}\right\Vert_\infty$
0	0.800000	0.800000	-
1	0.983091	0.961227	1.8×10^{-1}
2	0.997859	0.991984	3.0×10^{-2}
3	0.999575	0.998319	6.3×10^{-3}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
7	0.999999	0.999997	1.3×10^{-5}
8	1.000000	0.999999	2.0×10^{-6}
9	1.000000	1.000000	1.0×10^{-6}

Örnek 6.1.3

$$\begin{aligned}15x_1+x_2^2-4x_3&=13,\\ x_1^2+10x_2-e^{-x_3}&=11,\\ x_2^3-25x_3&=-22,\end{aligned}$$

lineer olmayan denklem sisteminin Adomian ayrışım , Basit iterasyon ve Newton-Raphson yöntemleri ile çözümü:

i) Adomian Ayrışım Yöntemi ile Çözümü

Verilen denklem sistemindeki i. denklemden x_i çözülürse

$$\begin{aligned}x_1&=\frac{13}{15}-\frac{1}{15}x_2^2+\frac{4}{15}x_3,\\ x_2&=\frac{11}{10}-\frac{1}{10}x_1^2+\frac{1}{10}e^{-x_3},\\ x_3&=\frac{22}{25}+\frac{1}{25}x_2^3,\end{aligned}\tag{6.3}$$

elde edilir. (6.3) denklemine Adomian ayrışım metodunun uygulanmasıyla

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{1m} = \frac{13}{15} - \frac{1}{15}\sum_{m=0}^{\infty} A_m(x_2^2) + \frac{4}{15}\sum_{m=0}^{\infty} x_3 ,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{2m} = \frac{11}{10} - \frac{1}{10}\sum_{m=0}^{\infty} A_m(x_1^2) + \frac{1}{10}\sum_{m=0}^{\infty} A_m(e^{-x_3}),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{3m} = \frac{22}{25} + \frac{1}{25}\sum_{m=0}^{\infty} A_m(x_2^3),$$

denklemleri ve $x_{1,0} = \frac{13}{15}$, $x_{2,0} = \frac{11}{10}$ $x_{3,0} = \frac{22}{25}$ olmak üzere

$$x_{1,m+1} = -\frac{1}{15} A_m(x_2^2) + \frac{4}{15} x_{3,m} ,$$

$$x_{2,m+1} = -\frac{1}{10} A_m(x_1^2) + \frac{1}{10} A_m(e^{-x_3}),$$

$$x_{3,m+1} = \frac{1}{25} A_m(x_2^3) , \qquad m = 0,1,2,...$$

iterasyon formülü elde edilir.

$F(x_1,x_2,x_3) = x_1^2$, $F(x_1,x_2,x_3) = x_2^2$, $F(x_1,x_2,x_3) = x_2^3$, $F(x_1,x_2,x_3) = e^{-x_i}$ nonlineer terimleri için Adomian polinomları 4. bölümde elde edildi. Bu iterasyon formülüne göre $\left\|x^{(m-1)} - x^{(m)}\right\| \le 10^{-6}$ olacak şekilde elde edilen sonuçlar Tablo 6.7 de verildi.

Tablo 6.7 Örnek 6.1.3 için Adomian ayrışım yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçlar

k	$\varphi_{1,k}$	$\varphi_{2,k}$	$\varphi_{3,k}$	$\left\|\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}\right\|_\infty$
0	0.866666	1.100000	0.880000	-
1	1.020666	1.066368	0.933240	1.5×10^{-1}
2	1.039796	1.022474	0.928357	4.3×10^{-2}
3	1.044856	1.027487	0.922029	6.3×10^{-3}
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
7	1.042145	1.031087	0.923842	6.4×10^{-6}
8	1.042146	1.031089	0.923845	3.0×10^{-6}
9	1.042148	1.031090	0.923847	2.0×10^{-6}
10	1.042149	1.031091	0.923848	1.0×10^{-6}

elde edilir.

ii) Basit İterasyon Yöntemi ile Çözümü

(6.3) denkleminden basit iterasyon yönteminin iterasyon formülü

$$x_1^{(m)} = -\frac{1}{15}(x_2^{(m-1)})^2 + \frac{4}{15}x_3^{(m-1)} + \frac{13}{15},$$

$$x_2^{(m)} = -\frac{1}{10}(x_1^{(m-1)})^2 + \frac{1}{10}e^{-x_3^{(m-1)}} + \frac{11}{10},$$

$$x_3^{(m)} = \frac{1}{25}(x_2^{(m-1)})^3 + \frac{22}{25}$$

şeklinde elde edilir. $X^{(0)}$, Tablo 6.7 deki gibi alındığnda yapılan iterasyonlar sonucunda elde edilen değerler Tablo 6.8 de verildi.

Tablo 6.8 Örnek 6.1.3 ün Basit iterasyon yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçlar

m	x_1	x_2	x_3	$\lVert x^m - x^{(m-1)} \rVert_\infty$
0	0.866666	1.100000	0.880000	-
1	1.020667	1.037302	0.924645	1.5×10^{-1}
2	1.041506	1.031194	0.923861	2.0×10^{-2}
3	1.042139	1.031093	0.923848	6.4×10^{-3}
4	1.042149	1.031091	0.923848	1.0×10^{-6}

iii) Newton-Raphson Yöntemi ile Çözümü

Verilen sistem için Jacobian matrisi ;

$$J(x_1,x_2,x_3) = \begin{bmatrix} 15 & 2x_2 & -4 \\ 2x_1 & 10 & e^{-x_3} \\ 0 & 3x_2^2 & -25 \end{bmatrix}$$

dır. Newton algoritmasına göre istenen iterasyon ,

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

şeklindedir. Burada

$$\begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix} = -(J(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)},x_3^{(k-1)}))^{-1} F(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)},x_3^{(k-1)})$$

olur.

Böylece k .adımda $J(X^{(k-1)})\ Y^{(k-1)} = -F(X^{(k-1)})$ lineer sistemi çözülmelidir. Burada

$$J(X^{(k-1)}) = \begin{bmatrix} 15 & 2x_2^{(k-1)} & -4 \\ 2x_1^{(k-1)} & 10 & e^{-x_3^{(k-1)}} \\ 0 & 3(x_2^{(k-1)})^2 & -25 \end{bmatrix},$$

$$Y^{(k-1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

ve

$$F(X^{(k-1)}) = \begin{bmatrix} 15x_1^{(k-1)} + (x_2^{(k-1)})^2 - 4x_3^{(k-1)} - 13 \\ (x_1^{(k-1)})^2 + 10x_2^{(k-1)} - e^{-x_3^{(k-1)}} - 11 \\ (x_2^{(k-1)})^3 - 25x_3^{(k-1)} + 22 \end{bmatrix}$$

dir. $X^{(0)}$, Tablo 6.7 deki gibi alındığnda yapılan iterasyonlar sonucunda elde edilen değerler Tablo 6.9 da verildi.

Tablo 6.9 Örnek 6.1.3 ün Newton Raphson yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçlar

m	x_1	x_2	x_3	$\lVert x^m - x^{(m-1)} \rVert_\infty$
0	0.866666	1.100000	0.880000	-
1	1.043929	1.033540	0.930680	1.7×10^{-1}
2	1.042130	1.031098	0.923776	6.9×10^{-3}
3	1.042149	1.031091	0.923849	7.3×10^{-5}
4	1.042149	1.031091	0.923848	1.0×10^{-6}

Örnek 6.1.4

$$x_1^3 + x_2^3 - 6x_1 + 3 = 0$$
$$x_1^3 - x_2^3 - 6x_2 + 2 = 0$$

lineer olmayan denklem sisteminin Adomian ayrışım, Basit iterasyon ve Newton-Raphson yöntemleri ile çözümü:

i) Adomian Ayrışım Yöntemi ile Çözümü

Verilen denklem sistemindeki $i.$denklemden x_i çözülürse

$$x_1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}x_1^3 + \frac{1}{6}x_2^3$$
$$x_2 = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}x_1^3 - \frac{1}{6}x_2^3 \qquad (6.4)$$

elde edilir. (6.4) denklemlemine Adomian ayrışım metodunun uygulanmasıyla

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{1m} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\sum_{m=0}^{\infty} A_m(x_1^3) - \frac{1}{6}\sum_{m=0}^{\infty} A_m(x_2^3)$$
$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{2m} = \frac{1}{2} + \frac{1}{6}\sum_{m=}^{\infty} A_m(x_1^3) + \frac{1}{6}\sum_{m=0}^{\infty} A_m(x_2^3),$$

denklemleri ve $x_{1,0} = \frac{1}{3}$, $\quad x_{2,0} = \frac{1}{2}$ olmak üzere

$$x_{1,m+1} = \frac{1}{6}A_m(x_1^3) + \frac{1}{6}A_m(x_2^3),$$
$$x_{2,m+1} = \frac{1}{6}A_m(x_1^3) - \frac{1}{6}A_m(x_2^3), \qquad m = 0,1,2,...$$

iterasyon formülü elde edilir [28].

$F(x_1,x_2) = x_1^3$, $F(x_1,x_2) = x_2^3$ nonlineer terimleri için Adomian polinomları 4. bölümde elde edildi. Bu iterasyon formülüne göre $\left\|x^{(m-1)} - x^{(m)}\right\| \le 10^{-6}$ olacak şekilde elde edilen sonuçlar Tablo 6.10 da verildi.

Tablo 6.10 Örnek 6.1.4 için Adomian ayrışım yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçlar

k	$\varphi_{1,k}$	$\varphi_{2,k}$	$\left\|\varphi^{(k)}-\varphi^{(k-1)}\right\|_{\infty}$
0	0.500000	0.333333	-
1	0.527006	0.347993	2.7×10^{-2}
2	0.529320	0.348679	2.3×10^{-3}
3	0.531953	0.350736	2.6×10^{-3}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
8	0.532362	0.351251	3.0×10^{-6}
9	0.532364	0.351252	2.0×10^{-6}
10	0.532364	0.351253	1.0×10^{-6}

ii) Basit İterasyon Yöntemi ile Çözümü

(6.4) denkleminden basit iterasyon yönteminin iterasyon formülü

$$x_1^{(m)}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}(x_1^{(m-1)})^3+\frac{1}{6}(x_2^{(m-1)})^3,$$

$$x_2^{(m-1)}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}(x_1^{(m-1)})^3-\frac{1}{6}(x_2^{(m-1)})^3$$

elde edilir. $X^{(0)}$, Tablo 6.10 daki gibi alındığında yapılan iterasyonlar sonucunda elde edilen değerler Tablo 6.11 verildi.

Tablo 6.11 Örnek 6.1.4 ün Basit iterasyon yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçlar

m	x_1	x_2	$\left\|x^{m}-x^{(m-1)}\right\|_{\infty}$
0	0.500000	0.333333	-
1	0.526823	0.351713	2.6×10^{-2}
2	0.531621	0.351123	4.7×10^{-3}
3	0.532256	0.351250	6.3×10^{-4}
4	0.532363	0.351252	1.0×10^{-4}
5	0.532364	0.351253	1.0×10^{-6}

iii) Newton-Raphson Yöntemi ile Çözümü

Verilen sistem için Jacobian matrisi ;

$$J(x_1,x_2)=\begin{bmatrix}3x_1^2-6 & 3x_2^2\\ 3x_1^2 & -3x_2^2-6\end{bmatrix}$$

dır. Newton algoritmasına göre istenen iterasyon ,

$$\begin{bmatrix}x_1^{(k)}\\ x_2^{(k)}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_1^{(k-1)}\\ x_2^{(k-1)}\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}y_1^{(k-1)}\\ y_2^{(k-1)}\end{bmatrix}$$

şeklindedir ki burada

$$\begin{bmatrix}y_1^{(k-1)}\\ y_2^{(k-1)}\end{bmatrix}=-(J(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)}))^{-1}F(x_1^{(k-1)},x_2^{(k-1)})$$

olur.

Böylece k .adımda $J(X^{(k-1)})\ Y^{(k-1)}=-F(X^{(k-1)})$ lineer sistemi çözülmelidir. Burada

$$J(X^{(k-1)})=\begin{bmatrix}3(x_1^{(k-1)})^2-6 & 3(x_2^{(k-1)})^2\\ 3(x_1^{(k-1)})^2 & -3(x_2^{(k-1)})^2-6\end{bmatrix},$$

ve

$$Y^{(k-1)}=\begin{bmatrix}y_1^{(k-1)}\\ y_2^{(k-1)}\end{bmatrix}$$

$$F(X^{(k-1)})=\begin{bmatrix}(x_1^{(k-1)})^3+(x_2^{(k-1)})^3-6x_1^{(k-1)}+3\\ (x_1^{(k-1)})^3-(x_2^{(k-1)})^3-6x_2^{(k-1)}+2\end{bmatrix}$$

dir. $X^{(0)}$, Tablo 6.10 daki gibi alındığında yapılan iterasyonlar sonucunda elde edilen değerler Tablo 6.12 verildi.

Tablo 6.12 Örnek 6.1.4 ün Newton Raphson yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçlar

m	x_1	x_2	$\left\|x^m - x^{(m-1)}\right\|_\infty$
0	0.500000	0.333333	-
1	0.531236	0.350921	3.1×10^{-2}
2	0.532354	0.351249	1.1×10^{-3}
3	0.532363	0.351252	9.0×10^{-6}
4	0.532364	0.351253	1.0×10^{-6}

Örnek 6.1.5

$$3x_1 - \cos(x_2x_3) - \frac{1}{2} = 0$$

$$x_1^2 - 625x_2^2 = 0$$

$$e^{-x_1x_2} + 20x_3 + \left(\frac{10\pi - 3}{3}\right) = 0$$

lineer olmayan denklem sisteminin Adomian ayrışım, Basit iterasyon ve Newton-Raphson yöntemleri ile çözümü:

i) Adomian Ayrışım Yöntemi ile Çözümü

Verilen denklem sistemindeki i. denklemden x_i çözülürse

$$x_1 = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\cos(x_2x_3)$$

$$x_2 = \frac{1}{25}x_1$$

$$x_3 = -\frac{10\pi - 3}{60} - \frac{1}{20}e^{-x_1x_2} \tag{6.5}$$

elde edilir. (6.5) denklemine Adomian ayrışım yönteminin uygulanmasıyla

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{1m} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\sum_{m=0}^{\infty} A_m(\cos(x_2x_3)),$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{2m} = \frac{1}{25}\sum_{m=0}^{\infty} x_1,$$

$$\sum_{m=0}^{\infty} x_{3m} = -\frac{10\pi-3}{60} - \frac{1}{20}\sum_{m=0}^{\infty} A_m(e^{-x_1x_2})$$

denklemleri ve $x_{1,0} = \frac{1}{6}$, $x_{2,0} = 0$, $x_{3,0} = -\frac{10\pi-3}{60}$ olmak üzere

$$x_{1,m+1} = \frac{1}{3}A_m(\cos x_2x_3),$$

$$x_{2,m+1} = \frac{1}{25}x_{1,m},$$

$$x_{3,m+1} = -\frac{1}{20}A_m(e^{-x_1x_2}), \qquad m = 0,1,2,...$$

iterasyon formülleri elde edilir.

$F(x_1,x_2,x_3) = \cos(x_2x_3)$, $F(x_1,x_2,x_3) = e^{-x_1x_2}$ nonlineer terimileri için Adomian polinomları 4. bölümde elde edildi. Bu iterasyon formülüne göre $\left\|x^{(m-1)} - x^{(m)}\right\| \leq 10^{-6}$ olacak şekilde elde edilen sonuçlar Tablo 6.13 de verildi.

Tablo 6.13 Örnek 6.1.5 için Adomian ayrışım yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçlar

k	$\varphi_{1,k}$	$\varphi_{2,k}$	$\varphi_{3,k}$	$\left\|\varphi^{(k)} - \varphi^{(k-1)}\right\|_{\infty}$
0	0.166667	0.000000	-0.473599	-
1	0.500000	0.006666	-0.523598	3.3×10^{-1}
2	0.500000	0.019999	-0.523543	1.3×10^{-2}
3	0.499999	0.019999	-0.523251	2.2×10^{-4}
4	0.499998	0.199999	-0.523097	1.5×10^{-4}
5	0.499999	0.019999	-0.523100	3.0×10^{-6}
6	0.500000	0.020000	-0.523101	1.0×10^{-6}

yazılabilir.

ii) Basit İterasyon Yöntemi ile Çözümü

(6.5) denkleminden basit iterasyon yönteminin iterasyon formülü

$$x_1^{(m)} = \frac{1}{3}\cos x_2^{(m-1)} x_3^{(k-1)} + \frac{1}{6}$$

$$x_2^{(m)} = \frac{1}{25} x_1^{(m-1)}$$

$$x_3^{(m)} = -\frac{1}{20} e^{-x_1^{(m-1)} x_2^{(m-1)}} - \frac{10\pi - 3}{60}$$

şeklinde elde edilir. $X^{(0)}$, Tablo 6.13 deki gibi alındığında yapılan iterasyonlar sonucunda elde edilen değerler Tablo 6.14 verildi.

Tablo 6.14 Örnek 6.1.5 in Basit iterasyon yöntemi ile çözümünden elde edilen sonuçlar

m	x_1	x_2	x_3	$\left\|x^m - x^{(m-1)}\right\|_\infty$
0	0.166667	0.000000	-0.473599	-
1	0.500000	0.200000	-0.523101	3.3×10^{-1}
2	0.500000	0.019999	-0.523101	1.0×10^{-6}

iii) Newton-Raphson Yöntemi ile Çözümü

Verilen sistem için Jacobian matrisi ;

$$J(x_1, x_2, x_3) = \begin{bmatrix} 3 & x_3 \sin(x_2 x_3) & x_2 \sin(x_2 x_3) \\ 2x_1 & -1250 x_2 & 0 \\ -x_2 e^{-x_1 x_2} & -x_1 e^{-x_1 x_2} & 20 \end{bmatrix}$$

dır.Newton algoritmasına göre istenen iterasyon ,

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

şeklindedir ki burada

$$\begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix} = -(J(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)}))^{-1} F(x_1^{(k-1)}, x_2^{(k-1)}, x_3^{(k-1)})$$

olur.

Böylece k.adımda $J(X^{(k-1)})\, Y^{(k-1)} = -F(X^{(k-1)})$ lineer sistemi çözülmelidir. Burada

$$J(X^{(k-1)}) = \begin{bmatrix} 3 & x_3^{(k-1)}\sin(x_2^{(k-1)}x_3^{(k-1)}) & x_2^{(k-1)}\sin(x_2^{(k-1)}x_3^{(k-1)}) \\ 2x_1^{(k-1)} & -1250x_2^{(k-1)} & 0 \\ -x_2^{(k-1)}e^{-x_1^{(k-1)}x_2^{(k-1)}} & -x_1^{(k-1)}e^{-x_1^{(k-1)}x_2^{(k-1)}} & 20 \end{bmatrix},$$

$$Y^{(k-1)} = \begin{bmatrix} y_1^{(k-1)} \\ y_2^{(k-1)} \\ y_3^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

ve

$$F(X^{(k-1)}) = \begin{bmatrix} 3x_1^{(k-1)} - \cos(x_2^{(k-1)}x_3^{(k-1)}) - \frac{1}{2} \\ (x_1^{(k-1)})^2 - 625(x_2^{(k-1)})^2 \\ e^{-x_1^{(k-1)}x_2^{(k-1)}} + 20x_3^{(k-1)} + \frac{10\pi - 3}{3} \end{bmatrix}$$

dir. $X^{(0)}$, Tablo 6.13 deki gibi alındığında yapılan iterasyonlar sonucunda elde edilen değerler Tablo 6.15 verildi.

Tablo 6.15 Örnek 6.1.5 in Newton Raphson yöntemi ile çözümündenelde edilen sonuçlar

m	x_1	x_2	x_3	$\lVert x^m - x^{(m-1)} \rVert_\infty$
0	0.166667	0.000000	-0.473599	-
1	0.499915	0.051111	-0.521534	3.3×10^{-1}
2	0.499982	0.029468	-0.522865	2.1×10^{-2}
3	0.499995	0.021521	-0.523063	7.9×10^{-3}
4	0.499997	0.020053	-0.523100	1.4×10^{-3}
5	0.499998	0.019999	-0.523101	5.4×10^{-5}
6	0.499999	0.019999	-0.523101	1.0×10^{-6}

7. BÖLÜM

SONUÇ

Bu çalışmada, lineer ve lineer olmayan denklem sistemlerinin Adomian ayrışım yöntemi ile çözümü verildi.

Tezin birinci bölümünde temel tanım ve teoremler verildi. Tezin ikinci ve üçüncü bölümlerinde sırasıyla lineer ve lineer olmayan denklem sistemlerinin literatürde mevcut olan çözüm yöntemlerinden bazıları verildi.

Tezin dördüncü bölümünde, Adomian tarafından geliştirilen yöntem ile çeşitli nonlineer fonksiyonların Adomian polinomları hesaplandı.

Tezin beşinci bölümünde lineer denklem sistemlerinin Adomian ayrışım yöntemi ile çözümü verildi. Elde edilen sonuçlara göre, Adomian ayrışım yöntemi ile klasik Jacobi iterativ yönteminin başlangıç şartları dışında tamamen aynı sonuçları verdiği görüldü. Her iki yöntemin de iterasyon formüllerinin matris formu aynı olduğundan yakınsama şartları da aynıdır. Dolayısıyla, bir lineer denklem sisteminin katsayılar matrisi, köşegen dominant veya pozitif tanımlı ise Adomian ayrışım yöntemi çözüme yakınsar.

Tezin altıncı bölümünde lineer olmayan denklem sistemlerinin Adomian ayrışım yöntemi ile çözümü verildi. Yöntem değişik örneklere uygulandı ve elde edilen sonuçlar Basit iterasyon ve Newton-Raphson yöntemlerinden elde edilen sonuçlar ile karşılaştırıldığında sonuçların birbirleri ile uyum içinde olduğu görüldü. Her bir yöntemin çözüme yakınsaması için gerekli iterasyon sayısı Tablo 7.1 de verildi.

Tablo 7.1. Her bir yöntemin $\left\|x^{m}-x^{(m-1)}\right\|_{\infty}<10^{-6}$ şartını sağlaması için ihtiyaç duyulan iterasyon sayılarının karşılaştırılması

Örnek	Adomian ayrışım yönt.	Basit iterasyon yönt.	Newton-Raphson yönt.
6.1.	9	4	4
6.2.	20	11	9
6.3.	10	4	4
6.4.	10	5	4
6.5.	6	2	6

Tablo 7.l. incelendiğinde Adomian ayrışım yönteminin çözüme yakınsaması için diğer yöntemlere göre daha çok iterasyona ihtiyaç duyduğu görülür.

KAYNAKLAR

[1] G. Adomian , Solving Frontier Problems of Physics, *The Decomposition Method*, Kluwer Academic Publisher, Boston, (1994).

[2] G. Adomian , *Nonlinear stochastic operator equations*, Academic Press, San Diego, (1986).

[3] S. Khelifa, Y. Cherruault, *New results for the Adomian method*, Kybernetes, Vol. 29, No.3 332-354, (2000).

[4] A. M. Wazwaz, *A new algorithm for calculating Adomian polynomials for nonlinear operators*, Appl. Math. Comput. 111, 53-69 (2000).

[5] A. M. Wazwaz, *A reliable modification of Adomian decomposition method*, Appl. Math. Comput. 102, 77-86 (1999).

[6] G. Adomian, R. Rach, *Noise terms in decomposition series*. Appl. Math. Comput. 24 (11) 61-64 (1992).

[7] A. M. Wazwaz ve S. M. El-Sayed, *A new modification of Adomian decomposition method for linear and nonlinear operators*, Appl. Math. Comput. 122. 393-405 (2001).

[8] F. Abdelwahid, *A mathematical model of Adomian polynomials*, Appl. Math. Comput. 141, 447-453, (2003).

[9] E. Babolian, S. Javadi, *New method for calculating Adomian polynomials*. Appl. Math. Comput. 153, 253-259, (2004).

[10] Y. Zhu. Q. Chang, S. Wu, *A new algorithm for calculating Adomian polynomials*, Appl. Math. Comput. (2004).

[11] E. Babolian, J. Biazar, A. R. Vahidi, *On the decomposition method for system of linear equations and system of linear Volterra integral equationns*, Appl. Math. Comput. 147, 19-27, (2004).

[12] E. Babolian, J. Biazar, A. R. Vahidi, *Solution of system of nonlinear equations by Adomian decomposition method*, Appl. Math. Comput. 150, 847-854, (2004).

[13] R. L. Burden, J. D. Faires, *Numerical Analysis*, Fifth Edition, PWS Publishing, (1985).

[14] Seymour Lipschutz, *Schaum's Outline of Theory and problems of Linear Algebra*, McGraw-Hill Book Company Ltd. London, (1974).

[15] F. Başar, *Lineer Cebir*, Uğurel Matbaası, Malatya (2002).

[16] G. Amirali, H. Duru, *Nümerik Analiz*, Pegem Yayınları, Başak Matbaacılık, 1. Baskı, (2002).

[17] M. Balcı, *Matematik Analiz*, Ankara Üniversitesi, Ankara, (1997).

[18] E. Sabri Türker, Engin Can, *Bilgisayar uygulamalı Sayısal Analiz Yöntemleri*, Değişim Yayınları, 2.Baskı.

[19] B. Musayev, M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Dumlupınar Üniversitesi, Kütahya, (2000).

[20] Z. Aktaş, H. Öncül, S. Ural, *Sayısal Çözümleme*, METU, (1981).

[21] E. A. Kendall, *An Introduction to Numerical Analysis*, Printed in USA, by John Wiles and Sons, (1978).

[22] F. G. Curtis, O. W. Patrick, *Applied Numerical Analysis*, Addision Wesley Publishing Company (1989).

[23] R. J. Goult, R. F. Hoskins, J. A. Milner, M. J. Pratt, *Computational Methods in Lineer Algebra* Stanley Thornes Ltd. (1974).

[24] A. M. Wazwaz, *Partial Differential Equations*. Printed by Gorter, Steenwijk, The Netherlands, (2002).

[25] K. Abbaoui, Y. Cherruault, *Convergence of Adomian's method applied to differential equations*, Math. Comput. Modelling 28(5), 103-110, (1994).

[26] K. Abbaoui, Y. Cherruault, V. Seng, *Practical formula for the calculus of multivariable Adomian polynomials*, Math. Comput. Modell. 22 (1), 89-93, (1995).

[27] Y. Cherruault, Y. Saccomandi, B. Some, *New results for converce of Adomian's method applied to integral equations, Math. Comp. Modell.* 16(2), 83-93, (1992).

[28] D. Kaya, S. M. El-Sayed, *Adomian's decomposition method applied to systems of nonlinear algebraic equations,* Appl. Math. Comput. Vol. 154, Issue 2, 487-493, (2004).

ÖZGEÇMİŞ

23.09.1979 yılında Malatya'da doğdu. İlk öğrenimini Malatya'da, orta öğrenimini Eskişehir Yunus Emre Anadolu Öğretmen Lisesi'nde tamamladıktan sonra 2001 yılında Konya Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği bölümünden mezun oldu. 2001-2005 yılları arasında Malatya Akçadağ Anadolu Öğretmen Lisesi'nde görev yaptı. Halen Beydağı Anadolu Lisesi'nde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır. Evli ve bir çocuk babasıdır.