T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ÇİFT İNDİSLİ DİZİLER İÇİN ÇEKİRDEK TEOREMLERİ

Yurdal SEVER

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2010

Tezin Başlığı	:	Çift İndisli Diziler için Çekirdek Teoremleri
Tezi Hazırlayan	:	Yurdal SEVER
Sınav Tarihi	:	02.12.2010

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Feyzi BAŞAR	(Fatih Üniversitesi)	______________
Doç. Dr. Bilal ALTAY (Danışman)	(İnönü Üniversitesi)	______________
Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN	(İnönü Üniversitesi)	______________
Yrd. Doç. Dr. Turabi GEYİKLİ	(İnönü Üniversitesi)	______________
Yrd. Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR	(İnönü Üniversitesi)	______________

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Asım KÜNKÜL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Çift İndisli Diziler için Çekirdek Teoremleri" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Yurdal SEVER

ÖZET

Doktora Tezi
Çift İndisli Diziler için Çekirdek Teoremleri
Yurdal SEVER
İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
52+v sayfa
2010
Danışman: Doç. Dr. Bilal ALTAY

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, çift diziler ve çekirdek kavramının tarihsel gelişimi verildi.

İkinci bölümde, çift indisli dizi ve çekirdek kavramları ile ilgili bazı temel tanım ve teoremler ifade edildi.

Tezimizin üçüncü, dördüncü ve beşinci bölümleri orijinal sonuçları ihtiva etmektedir.

Üçüncü bölümde, tek indisli dizilerde çekirdek için verilen bazı tanım ve teoremler, çift indisli dizilere genişletildi.

Dördüncü bölümde, Cesàro Pringsheim, Cesàro sınırlı Pringsheim ve Cesàro sınırlı ve sıfıra Pringsheim yakınsak çift dizilerin cümlesi olarak tanımlanan Ces_p, Ces_{bp} ve Ces_{bp0} cümlelerinin bazı özellikleri ve dualleri incelendi.

Beşinci bölümde, Cesàro çift dizilere tanımlı bazı matris sınıfları karakterize edilerek, Cesàro çekirdek ile ilgili bazı teoremlerin ispatları verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Çift dizi, Cesàro çift dizi uzayı, Dual uzay, Çekirdek teoremleri, Matris dönüşümü.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis
Core Theorems for Double Sequences
Yurdal SEVER
İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics
52+v pages
2010
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Bilal ALTAY

The present thesis consists of five chapters.

In the first chapter, a brief history of the concepts of double sequences and core are given.

In the second chapter, some basic definitions and theorems related to double sequences and core are expressed.

The third, fourth and fifth chapters of this thesis involve the original results.

In the third chapter, some definitions and theorems related to the core of single sequences are extended to the double sequences.

In the fourth chapter, some properties and duals of the sets of Cesàro Pringsheim, Cesàro bounded Pringsheim and Cesàro bounded and null Pringsheim convergent double sequences, denoted by Ces_p, Ces_{bp} and Ces_{bp0}, respectively, are examined.

In the fifth chapter, some matrix classes into Cesàro double sequence spaces are characterized and the proofs of some theorems related to Cesàro core of double sequences are given.

KEYWORDS: Double sequence, Cesàro double sequence space, Dual space,
Core theorems, Matrix transformation.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimimde danışmanlığımı üstlenen ve bu tezin hazırlanmasında gerekli maddi ve manevi imkanları sağlayarak bana yardımcı olan, yüksek lisans eğitimimden beri hiç bir zaman yakın ilgisini esirgemeyen, bilimselliğinin yanında karakter ve şahsiyetiyle de bana örnek olan hocam sayın Doç. Dr. Bilal Altay'a şükranlarımı sunarım.

Yüksek lisans eğitimimde danışmanım olan, ilim ve irfan sahasında değerli fikirlerinden etkilendiğim Fatih Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyesi hocam sayın Prof. Dr. Feyzi Başar'a, konunun belirlenmesinde ve dökümanların temininde yardımcı olan sayın Doç. Dr. Celal Çakan ve sayın Doç. Dr. İsmet Özdemir'e teşekkürlerimi sunarım.

Hayatımın her aşamasında benden, değerli şefkat ve merhametlerini esirgemeyen sevgili anneme, babama, her zaman destek olan eşime, sabırlarından dolayı oğlum ve kızım'a teşekkür ediyorum.

Ayrıca, doktora yapmam için beni teşvik eden arkadaşım Ramazan Açık ve bu tezin hazırlanmasında yardımlarını ve ilgilerini esirgemeyen, yakın arkadaşlarım Özer Talo ve Erdinç Dündar' a teşekkür ederim.

Yurdal SEVER

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar cümlesi
$\mathcal{C}_p$	: Pringsheim anlamında yakınsak olan kompleks terimli çift diziler uzayı
$\mathcal{C}_r$	: Regüler yakınsak kompleks terimli çift diziler uzayı
$\mathcal{C}_{bp}$	: Sınırlı ve Pringsheim anlamında yakınsak çift dizilerin uzayı
$\mathcal{C}_{0p}$	: Pringsheim anlamında sıfıra yakınsak olan kompleks terimli çift diziler uzayı
$\mathcal{C}_{0bp}$	: Sınırlı ve Pringsheim anlamında sıfıra yakınsak çift dizilerin uzayı
Ces_p	: Cesàro Pringsheim anlamında yakınsak çift dizilerin uzayı
Ces_{bp}	: Cesàro sınırlı Pringsheim anlamında yakınsak çift dizilerin uzayı
Ces_{bp0}	: Cesàro sınırlı ve sıfıra Pringsheim anlamında yakınsak çift dizilerin uzayı
K-çek$\{x\}$	: x dizisinin Knopp çekirdeği
$\mathcal{M}_u$	: Kompleks terimli sınırlı çift dizilerin uzayı
$\mathcal{L}_u$	: Mutlak Yakınsak seri oluşturan çift dizilerin uzayı
$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar cümlesi
P-çek$\{x\}$	: x çift dizisinin Pringsheim çekirdeği
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar cümlesi
Ω	: $\mathbb{C}$ üzerinde tanımlı çift dizilerin uzayı
Φ	: Sonlu sayıda terimi hariç diğer terimleri sıfır olan çift dizilerin cümlesi
υ- lim	: Çift dizinin υ-yakınsaklığa göre limiti
υ-yakınsak	: υ anlamında yakınsaklık
$X^{\beta(\upsilon)}$	: X çift dizi uzayının $\beta(\upsilon)$-duali
$\chi(A)$	: A matrisinin karakteristiği
$\sum_{k,l}^{s,t} x_{kl}$	: $\sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{t} x_{kl}$
$\sum_{k,l} x_{kl}$	: $\sum_{k,l=1}^{\infty,\infty} x_{kl}$
$\triangle_{10}a_{kl}$	: $a_{kl}-a_{k+1,l}$
$\triangle_{01}a_{kl}$	: $a_{kl}-a_{k,l+1}$
$\triangle_{11}a_{kl}$	: $\triangle_{01}(\triangle_{10}a_{kl})=\triangle_{10}(\triangle_{01}a_{kl})$

1. GİRİŞ

Çift dizilerde, tek dizilerin aksine birden fazla yakınsaklık çeşidi tanımlanmıştır. İlk olarak Pringsheim [**1**] çift dizilerin yakınsaklığı ile ilgilendi. Daha sonra Hardy [**2**], Robison [**3**], Kojima [**4**], Hamilton [**5**] ve Hill [**6**] gibi yazarlar, çift diziler üzerindeki yakınsaklığı ve bazı çift dizi uzaylarının özelliklerini incelediler.

Son yıllarda çift diziler üzerine çalışmalar yoğunlaşmaktadır. Jardas ve Sarapa [**7**] iki tek dizinin koordinatsal çarpımı şeklinde ifade edilebilen çift diziler üzerinde çalışmıştır. Moricz [**8**], tek indisli c ve c_0 dizi uzaylarına karşılık gelen Pringsheim, sıfıra Pringsheim yakınsak ve regüler anlamında yakınsak çift dizilerin $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{0p}$ ve $\mathcal{C}_r$ uzaylarının bazı özelliklerini inceledi.

Türkmenoğlu [**9**], $t = (t_{mn})$ pozitif reel sayıların bir dizisi olmak üzere, bazı çift dizi uzayları tanımlayarak, bu uzayların özelliklerini ve duallerini inceledi.

Boos, Leiger, Zeller [**10**] çift dizilerde e-, be- ve c-yakınsaklığı tanımladı ve SM metodunu kullanarak bu yakınsaklık çeşitlerinin bazı topolojik özelliklerini verdi. Zeltser [**11**]; Boos, Leiger, Zeller [**10**] tarafından verilen e-, be- ve c-yakınsak çift dizi uzaylarının taşıdığı bazı özellikleri inceledi. Ayrıca, çift dizilerde bir A metodunun e-, be- ve c- etki alanlarının yapısını verdi.

Altay [**12**], kısmi toplamları sınırlı, Pringsheim ve regüler yakınsak seri oluşturan $\mathcal{CS}_{bp}, \mathcal{CS}_p, \mathcal{CS}_r$ çift dizilerin ve sınırlı salınımlı $\mathcal{BV}$ çift dizilerin uzaylarını inşa ederek, bu uzaylar ile ilgili bazı özellikleri inceledi.

Dizilerin çekirdeği kavramı 1929-30 yıllarında, kapalı ve konveks cümleler yardımıyla Knopp [**13**] tarafından verildi. Daha sonra değişik çekirdek tanımları verildiğinden buna K-çekirdek denilmektedir. Tek indisli sınırlı dizilerde bariyerler ve Shcherbakov [**14**] tarafından diskler yardımıyla çekirdek tanımı yapıldı. Bu tanımların denk olduğu ilgili yazarlar tarafından gösterildi, [**15**]. Knopp tarafından regüler matris yardımıyla çekirdek teoremi olarak bilinen kapsama bağıntısı verildi. Knopp Çekirdek Teoremi, yapıyı koruyan matris yardımıyla Rhoades [**16**] tarafından incelendi ve verilen sonuçlar Schafer [**17**] tarafından genelleştirildi. Goffman, Petersen [**18**] çalışmaları doğrultusunda Rath, Tripathy [**19**], bazı regüler matris sınıfları ile ilgili teoremleri vermişlerdir. Maddox [**20**] çekirdek ile ilgili kapsama bağıntılarını eşitsizlikler yardımıyla karakterize etmiştir.

Tek indisli dizilerde Knopp [**13**] tarafından verilen çekirdek tanımı, Patterson [**21**] tarafından çift indisli dizilere taşınmıştır. Gökhan, Çolak, Mursaleen [**22**], paranormlu çift dizi uzaylarında Pringsheim çekirdiği ile ilgili çalışmalar yaptılar.

İstatistiksel yakınsaklık Fast [**23**] tarafından verildi. Daha sonra Šalát [**24**], Fridy [**25**], Connor [**26**], Kolk [**27**], Fridy, Orhan [**28**], [**29**] ve birçok yazar tarafından çalışıldı. İstatistiksel yakınsaklık kavramı Mursaleen, Edely [**30**] tarafından çift indisli dizilere taşınmıştır. Mursaleen, Çakan, Mohiuddine, Savaş [**31**] çift dizilerin genelleştirilmiş istatistiksel yakınsaklığı ve istatistiksel çekirdeğini incelediler.

Çakan, Altay [**32**] çalışmasında reel çift dizilerin st_2-sınırlılık, st_2-limsup, st_2-liminf ve istatistiksel çekirdeği tanımladılar.

Çakan, Altay, Mursaleen [**33**], Çakan, Altay, Çoşkun [**34**] çift dizilerde σ-yakınsaklık, σ-çekirdeği tanımlayarak, bazı kapsama bağıntılarını verdiler.

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışmada, önce çift dizi ve çekirdek kavramlarının bazı temel tanım ve teoremleri verilecektir. Tek indisli dizilerde çekirdek ile ilgili tanım ve teoremler çift indisli dizilere taşınacaktır.

Son olarak, Cesáro matrisi yardımıyla çift indisli dizi uzayları inşa edilecek ve Cesáro çekirdek ile ilgili bazı eşitsizlikler incelenecektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak temel tanım ve teoremler verilecektir. Bazı temel kavramların (vektör uzayı, topolojik uzay, norm, yarınorm, regüler matris sınıfı, ...) bilindiği kabul edilecektir.

2.1. Çift Dizi ve Yakınsaklık Çeşitleri

Bu kısımda, çift dizilerle ilgili bilgiler verilecektir. Çift dizilerde, tek dizilerin aksine birden fazla yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır. Bunlardan en çok kullanılan Pringsheim [**1**] ve regüler [**2**] yakınsaklıktır. Diğer bazı yakınsaklık çeşitleri olan e-, be- ve c-yakınsaklık; Boos, Leiger ve Zeller tarafından [**10**] numaralı kaynakta çalışıldı.

Tanım 2.1.1. X, boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere;

$$\begin{array}{rcl} f \;:\; \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & X \\ (k,l) & \longrightarrow & f(k,l)=x_{kl} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonuna bir X terimli *çift indisli dizi* denir.

Bu çalışmada çift indisli dizi yerine kısaca çift dizi ya da sadece dizi denilecektir.

Herhangi bir $x=(x_{kl})$ çift dizisinin x_{kl} elemanları,

$$\begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} & x_{13} & \dots & x_{1l} & \dots \\ x_{21} & x_{22} & x_{23} & \dots & x_{2l} & \dots \\ x_{31} & x_{32} & x_{33} & \dots & x_{3l} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \\ x_{k1} & x_{k2} & x_{k3} & \dots & x_{kl} & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \end{bmatrix}$$

şeklinde bir tablo olarak düşünülebilir. Ω ile kompleks veya reel terimli çift dizilerin cümlesi gösterilir. Buna göre;

$$\Omega=\Big\{x=(x_{kl}) : \forall\, k,l\in\mathbb{N} \text{ için } x_{kl}\in\mathbb{C}\Big\}$$

olup bu cümle, her $\alpha\in\mathbb{C}$ ve her $x,\,y\in\Omega$ için $\alpha x=(\alpha x_{kl})$ ve $x+y=(x_{kl}+y_{kl})$ işlemleri altında bir lineer uzaydır.

$x=(x_{kl})$ kompleks terimli bir çift dizi olmak üzere,

$$\sup_{k,l\geq 1}|x_{kl}|<\infty$$

oluyorsa, x dizisine *sınırlıdır* denir. Sınırlı çift dizilerin cümlesi $\mathcal{M}_u$ ile gösterilir. Buna göre;

$$\mathcal{M}_u = \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega : \| x \|_\infty = \sup_{k,l \in \mathbb{N}} |x_{kl}| < \infty \right\}$$

cümlesidir.

Reel ya da kompleks terimli bir $x = (x_{kl})$ çift dizisi, eğer verilen her $\varepsilon > 0$ için $k, l > N$ olduğunda

$$|x_{kl} - a| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N doğal sayısı mevcut ise, $a \in \mathbb{C}$ sayısına *Pringsheim anlamında yakınsaktır* denir. a değerine de x çift dizisinin *Pringsheim limiti* adı verilir. Pringsheim anlamında yakınsak bir $x = (x_{kl})$ çift dizisine kısaca P-yakınsak dizi denir ve limiti de

$$P\text{-} \lim_{k,l} x_{kl} = a$$

ile gösterilir. Pringsheim anlamında yakınsak çift dizilerin cümlesi $\mathcal{C}_p$ ile gösterelir. $\mathcal{C}_p$ cümlesi,

$$\mathcal{C}_p = \left\{ x = (x_{kl}) \in \Omega \mid \exists a \in \mathbb{C}\, \forall \varepsilon > 0\, \exists N \in \mathbb{N}\, \forall k, l \geq N \ni |x_{kl} - a| < \varepsilon \right\}$$

biçiminde ifade edilebilir. Tanımdan anlaşıldığı üzere Pringsheim anlamında yakınsak bir çift dizi, sınırlı olmak zorunda değildir.

Örnek 2.1.1. Reel terimli $x = (x_{kl})$ çift dizisi;

$$x_{kl} = \begin{cases} k & , \quad l = 1 \\ -l & , \quad k = 1, l \geq 2 \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, $\sup_{k,l} x_{kl} = +\infty$ ve $\inf_{k,l} x_{kl} = -\infty$ olduğu halde, dizinin P-limiti sıfırdır.

$\mathcal{C}_p \cap \mathcal{M}_u$ cümlesi Pringsheim anlamında yakınsak sınırlı çift dizilerin uzayıdır ve bu cümle $\mathcal{C}_{bp}$ ile gösterilir.

Pringsheim anlamında a noktasına yakınsak olmasına ilave olarak her $l \in \mathbb{N}$ için $\lim_k x_{kl}$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim_l x_{kl}$ limitleri mevcut olan $x = (x_{kl})$ çift dizisine, a noktasına *regüler yakınsak* (kısaca, a noktasına $r-$yakınsak) denir. Regüler yakınsak bir $x = (x_{kl})$ çift dizisi için $\lim_l \lim_k x_{kl}$ ve $\lim_k \lim_l x_{kl}$ limitleri mevcut ve Pringsheim limitine eşittir. Regüler yakınsak çift dizilerin $\mathcal{C}_r$ cümlesi,

$$\mathcal{C}_r = \left\{ x = (x_{kl}) \in \mathcal{C}_p \mid (x_{kl})_k, (x_{kl})_l \in c, \quad \forall k, l \in \mathbb{N} \right\}$$

olarak tanımlanabilir. Burada c ile yakınsak tek dizilerin uzayı ve $(x_{kl})_l \in c$ ile l indisine göre yakınsaklığı gösterilmektedir. Regüler yakınsaklık kavramında, yakınsak her çift dizinin sınırlı olduğu kolaylıkla görülür.

Moricz [**8**], tek indisli c ve c_0 dizi uzaylarına karşılık gelen Pringsheim; sıfıra Pringsheim yakınsak ve regüler anlamında yakınsak çift dizilerin $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{0p}$ ve $\mathcal{C}_r$ uzaylarının bazı özelliklerini inceledi.

Boos, Leiger, Zeller [**10**], Pringsheim anlamında yakınsaklıktan daha zayıf olan, çift dizilerin a noktasına e-yakınsaklığı,

$$\forall\varepsilon > 0 \ \ \exists l_0 \in \mathbb{N} \ \ \forall l \geq l_0 \ \ \exists k_l \in \mathbb{N} \ \ k \geq k_l \Rightarrow |x_{kl} - a| < \varepsilon$$

şeklinde tanımladı.

Bu durumda, e-yakınsak dizilerin cümlesi,

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_e = \Big\{ x = (x_{kl}) \in \Omega \quad | \quad & \exists a \in \mathbb{C}, \forall\varepsilon > 0 \text{ için } \exists l_0 \in \mathbb{N}, \forall l \geq l_0, \\ & \exists k_l \in \mathbb{N} \ni \forall k \geq k_l \text{ için } |x_{kl} - a| < \varepsilon \Big\} \\ = \Big\{ x = (x_{kl}) \in \Omega \quad | \quad & \exists a \in \mathbb{C} : \lim_l \limsup_k |x_{kl} - a| = 0 \Big\}\end{aligned}$$

şeklindedir.

Tanımlardan anlaşıldığı üzere $\mathcal{C}_r \subsetneq \mathcal{C}_p \subsetneq \mathcal{C}_e$ olduğu açıktır.

$x = (x_{kl})$ çift dizisi e-yakınsak olmak üzere, her $l \in \mathbb{N}$ için $\sup_k |x_{kl}|$ değeri sonlu ise *be-yakınsak*, $\lim_k x_{kl}$ mevcut ise *c-yakınsak* denir.

Örnek 2.1.2. $x = (x_{kl})$ çift dizisi;

$$x_{kl} = \begin{cases} k & , \quad k = l \\ 1 & , \quad k > l \\ 0 & , \quad k < l \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, x çift dizisi Pringsheim anlamında yakınsak değil fakat e- ve c- yakınsaktır.

Zeltser [**11**] doktora tezinde, Boos, Leiger, Zeller tarafından verilen e-, be- ve c-yakınsak çift dizi uzaylarının taşıdığı bazı özellikleri inceledi. Ayrıca, çift dizilerde bir A metodunun e-, be- ve c- etki alanlarının yapısını verdi.

Genel olarak, bir $x = (x_{kl})$ çift dizinin sınırlılığı, düzgün sınırlılık, yani $sup_{k,l}|x_{kl}|$ ifadesinin sonlu olması anlamındadır. Bu; r- ve bp- yakınsaklık için tabii bir sınırlılık tanımıdır.

Yukarıda tanımlanan yakınsaklık çeşitlerinin kendilerine özgü sınırlılık tanımları vardır. Bir $x = (x_{kl})$ çift dizisi için $\overline{\lim}_N \sup_{k,l\geq N} |x_{kl}|$, $\overline{\lim}_l \ \overline{\lim}_k |x_{kl}|$, $\sup_l \overline{\lim}_k |x_{kl}|$

ve $\sup_l |\lim_k x_{kl}|$ değerleri sonlu ise $x = (x_{kl})$ çift dizisine, sırasıyla, p-, e-, be- ve c-sınırlı denir.

Genel olarak göz önüne alınan çift dizi uzayları,

$$e_{ij}^{kl} = \begin{cases} 1 & , \quad (k,l) = (i,j) \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanan (e^{kl}) dizilerinin gerdiği Φ uzayını kapsarlar.

Her $x = (x_{kl})$ çift dizisi için, dizinin $m.$, $n.$ kısmı

$$x^{[m,n]} := \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} x_{kl} e^{kl} \quad ; \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanır.

$\sum_{k,l} e^{kl}$, $\sum_k e^{kl}$ $(l \in \mathbb{N})$, ve $\sum_l e^{kl}$ $(k \in \mathbb{N})$ ifadeleri, sırasıyla, e, e^l ve e_k ile gösterilecektir.

Tanım 2.1.2. υ çift dizilerle ilgili herhangi bir yakınsaklık kavramını göstermek üzere, bir E çift dizi uzayının α- ve $\beta(\upsilon)$- dualleri,

$$E^{\alpha} = \left\{ (a_{ij}) \in \Omega \mid \forall x \in E \text{ için } \sum_{i,j} |a_{ij} x_{ij}| < \infty \right\}$$

ve

$$E^{\beta(\upsilon)} = \left\{ (a_{ij}) \in \Omega \mid \forall x \in E \text{ için } \upsilon\text{-} \sum_{i,j} a_{ij} x_{ij} \text{ mevcut} \right\}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 2.1.3. **[35]** $x = (x_{kl})$ reel sayıların bir çift dizisi ve

$$\alpha_n(x) = \sup_{k,l \geq n} x_{kl} \quad \text{ve} \quad \beta_n(x) = \inf_{k,l \geq n} x_{kl}$$

olsun. Bu durumda, en az bir $n \in \mathbb{N}$ sayısı için $\alpha_n(x) < \infty$ ve $\beta_n(x) > -\infty$ ise x çift dizisi Pringsheim anlamında bir üst ve alt limite sahiptir. Buna göre, bir x çift dizisinin Pringsheim alt limiti,

i) Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n(x) = -\infty$ ise,

$$P\text{-} \liminf x = -\infty,$$

ii) Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$ için $\beta_n(x) > -\infty$ ise,

$$P\text{-} \liminf x = \lim_{n \to \infty} \left(\inf_{k,l \geq n} x_{kl} \right) = \sup_n \beta_n(x)$$

ve Pringsheim üst limiti,

i) Eğer her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n(x) = +\infty$ ise,

$$P\text{-} \limsup x = +\infty,$$

ii) Eğer bazı $n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n(x) < +\infty$ ise,

$$P\text{-}\limsup x = \lim_{n\to\infty}\left(\sup_{k,l\geq n} x_{kl}\right) = \inf_n \alpha_n(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Aşağıda verilen örnek, bir çift dizinin alttan ve üstten sınırsız olmasına rağmen, Pringsheim üst ve alt limitlerinin varlığını göstermektedir.

Örnek 2.1.3. Reel terimli $x = (x_{kl})$ çift dizisi,

$$x_{kl} = \begin{cases} k &, \ l = 1 \\ -l &, \ k = 1, l \geq 2 \\ (-1)^k &, \ k = l > 1 \\ 0 &, \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanırsa, $\sup x_{kl} = +\infty$ ve $\inf x_{kl} = -\infty$ olduğu halde, $n \geq 2$ için $\alpha_n(x) = 1$ ve $\beta_n(x) = -1$ bulunduğundan

$$P\text{-}\liminf x = -1 \quad \text{ve} \quad P\text{-}\limsup x = 1$$

olur.

Teorem 2.1.1. [**9**, Teorem II.2] *$x = (x_{kl})$ reel terimli bir çift dizi olsun.*
(i) $\lim_{N\to\infty}(\sup_{k,l\geq N} x_{kl}) = L$ olması için gerek ve yeter şart verilen her $\varepsilon > 0$ için

(a) Yeteri kadar büyük her $k, l \geq N$ için $x_{kl} < L + \varepsilon$

(b) Sonsuz çoklukta (k, l) için $x_{kl} > L - \varepsilon$

olmasıdır.
(ii) $\lim_{N\to\infty}(\inf_{k,l\geq N} x_{kl}) = K$ olması için gerek ve yeter şart verilen her $\varepsilon > 0$ için

(a) Yeteri kadar büyük her $k, l \geq N$ için $x_{kl} > K - \varepsilon$

(b) Sonsuz çoklukta (k, l) için $x_{kl} < K + \varepsilon$

olmasıdır.

Tanım 2.1.4.

$$\begin{aligned} f \ : \ \mathbb{N}\times\mathbb{N} &\longrightarrow X \\ (k,l) &\longrightarrow f(k,l) = x_{kl} \end{aligned}$$

çift dizisi verilmiş olsun.

$$\begin{aligned} i : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ k &\rightarrow i(k) = i_k \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} j : \mathbb{N} &\rightarrow \mathbb{N} \\ l &\rightarrow j(l) = j_l \end{aligned}$$

fonksiyonları (dizileri) artan olmak üzere

$$\begin{array}{rcccl} h & : & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & \mathbb{N}\times\mathbb{N} \\ & & (k,l) & \longrightarrow & h(k,l)=(i_k,j_l) \end{array}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$\begin{array}{rcccl} f\circ h & : & \mathbb{N}\times\mathbb{N} & \longrightarrow & X \\ & & (k,l) & \longrightarrow & f\circ h(k,l)=x_{i_k j_l} \end{array}$$

bileşke fonksiyonuna (x_{kl}) çift dizisinin bir *alt dizisi* denir.

$\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ cümlesinin sonsuz çoklukta (i_k, j_l) dizisi bulunabileceğinden, bir (x_{kl}) çift dizisinin sonsuz çoklukta alt dizisi vardır. Burada alt diziyi, orijinal diziden satırlar ve sütunlar atmakla elde ediyoruz. $(x_{i_k j_l})$ alt dizisinin her teriminin (x_{kl}) çift dizisinin bir terimi olduğu açıktır.

Önerme 2.1.1. [**35**, Proposition 3.1] *$x=(x_{kl})$ ve $y=(y_{kl})$ reel değerli iki çift dizi olsun. Bu durumda dizilerin P-limitleri arasında aşağıdaki ilişkiler mevcuttur:*

(1) $P\text{-}\liminf x \le P\text{-}\limsup x$,

(2) $P\text{-}\liminf x = P\text{-}\limsup x = a \Longleftrightarrow P\text{-}\lim x = a$,

(3) $P\text{-}\limsup(-x) = -\ \ P\text{-}\liminf x$,

(4) $P\text{-}\limsup(x+y) \le P\text{-}\limsup x + P\text{-}\limsup y$,

(5) $P\text{-}\liminf(x+y) \ge P\text{-}\liminf x + P\text{-}\liminf y$,

(6) Eğer z, x çift dizisinin bir alt dizisi ise

$$P\text{-}\liminf x \le P\text{-}\liminf z \le P\text{-}\limsup z \le P\text{-}\limsup x.$$

$x=(x_{kl})$ reel terimli çift dizisi için $k\le k'$ ve $l\le l'$ olduğunda $x_{kl}\le x_{k'l'}$ oluyorsa *monoton artan*, $k\ge k'$ ve $l\ge l'$ olduğunda $x_{kl}\le x_{k'l'}$ oluyorsa *monoton azalan* denir.

Monoton çift diziler hakkındaki teoremler, monoton tek diziler hakkındaki teoremlerle aynı yapıya sahiptir.

Tanım 2.1.5. $x=(x_{mn})$ çift dizisi verilmiş olsun. Şimdi,

$$s_{mn}=\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij} \quad ; \quad (m,n\in\mathbb{N})$$

şeklinde tanımlanan (s_{mn}) dizisini göz önüne alalım. Bu durumda, $((x_{mn}),(s_{mn}))$ ikilisine bir *çift seri* denir. x_{mn} terimine serinin genel terimi, (s_{mn}) dizisine de serinin *kısmi toplamlar dizisi* denir. Eğer (s_{mn}) kısmi toplamlar dizisi bir s sayısına υ-yakınsak, yani

$$\upsilon\text{-}\lim_{m,n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}=s$$

ise $((x_{mn}),(s_{mn}))$ serisi υ-yakınsaktır ve serinin υ-toplamı s sayısıdır. Yakınsak olmayan seriye *ıraksak seri* denir.

Genel terimi x_{mn} ve toplamı s olan yakınsak seri,

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}x_{mn}=s$$

şeklinde gösterilir. Seri ister yakınsak ister ıraksak olsun, genel terimi x_{mn} olan seri

$$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}x_{mn}$$

ile gösterilir. υ-yakınsak çift seri oluşturan dizilerin uzayı $\mathcal{CS}_{\upsilon}$ ile gösterilmektedir. Buna göre,

$$\mathcal{CS}_{\upsilon}=\left\{x=(x_{ij})\in\Omega \mid \upsilon\text{-}\sum_{i,j}x_{ij}=\upsilon\text{-}\lim_{m,n}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}x_{ij}\text{ mevcut}\right\}$$

şeklindedir.

$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}x_{mn}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}x_{mn}$ serilerine *sıralı seriler* denir. Sıralı seriler, aynı toplama sahip olmak zorunda değildir. Gerçekten $x=(x_{mn})$ çift dizisi için

$$x_{mn}=\begin{cases}1 & , \quad m=n+1, n=1,2,...\\ -1 & , \quad m=n-1, n=1,2,...\\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda}\end{cases}$$

$\sum_{m=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}x_{mn}=-1$ fakat $\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{m=1}^{\infty}x_{mn}=1$' dir.

Tanım 2.1.6. Eğer $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|x_{ij}|$ serisi yakınsak ise, $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}x_{ij}$ kompleks terimli serisi *mutlak yakınsaktır* denir.

Mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin cümlesi $\mathcal{L}_u$ ile gösterilir. Yani;

$$\mathcal{L}_u=\left\{x\in\Omega \mid \| x \|_1=\sum_{i,j}|x_{ij}|<\infty\right\}.$$

Teorem 2.1.2. [**36**, shf. 278-282] *(i) Mutlak yakınsak bir çift seri yakınsaktır.*

(ii) Pozitif reel terimli bir serinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu serinin kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olmasıdır.

(iii) Reel terimli (a_{ij}) ve (b_{ij}) dizilerini göz önüne alalım.

Her $i,j\in\mathbb{N}$ için $0\le a_{ij}\le b_{ij}$ ve $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_{ij}$ serisi yakınsak ise $\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}$ serisi de yakınsaktır ve

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}\le\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}b_{ij}$$

eşitsizliği geçerlidir.

Yakınsak bir çift indisli serinin kısmi toplamları sınırlı olmak zorunda değildir. Gerçekten genel terimi

$$x_{mn} = \begin{cases} 1 & , \quad m = 1 \\ -1 & , \quad m = 2 \\ 0 & , \quad m \geq 3 \end{cases}$$

olarak tanımlanan $\sum_{m,n} x_{mn}$ serisi yakınsak fakat kısmi toplamlar dizisi sınırlı değildir.

2.2. Dizilerde Çekirdek Kavramı

Bu kısımda tek indisli dizilerin çekirdek kavramı ve ilgili teoremler ifade edilerek, çift indisli dizilerde çekirdek kavramı hakkında bazı bilgiler verilecektir.

Tanım 2.2.1. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $X \setminus A$ cümlesi açık ise, A cümlesine *kapalı cümle* denir. Kapalı cümlelerin sonlu birleşimi ve sonsuz kesişimi kapalıdır.

A cümlesinin içindeki tüm açık alt cümlelerin birleşimine A cümlesinin *içi* denir ve A° ile gösterilir.

A cümlesini içeren tüm kapalı cümlelerin arakesitine A cümlesinin *kapanışı* denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

$x \in X$ noktasının her komşuluğunun A ile kesişimi, x noktasından farklı nokta ihtiva ediyorsa, x noktasına A cümlesinin bir *limit noktası* denir. A cümlesinin tüm limit noktalarının cümlesi A' ile gösterilir.

Tanım 2.2.2. $E \subset \mathbb{C}$ bir cümle ve $a \geq 0,\ b \geq 0,\ a+b = 1$ olsun. Eğer $x, y \in E$ için $ax + by \in E$ oluyorsa, E cümlesine *konveks cümle* denir. Konveks cümlelerin herhangi sayıdaki kesişimi konveks cümledir.

Tanım 2.2.3. [**15**, shf. 137] $x = (x_n)$ kompleks terimli bir dizi ve $R_n;\ x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots$ noktalarını içeren en küçük kapalı konveks bölge olsun.

$\bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$ cümlesine, $x = (x_n)$ dizisinin *çekirdeği* denir ve K-çek$\{x\}$ ile gösterilir. Tanımdan da anlaşıldığı üzere K-çek$\{x\}$ kapalı ve konvekstir.

$x = (x_n)$ dizisinin limit noktalarının cümlesi D olsun. Bu durumda

$$D \subseteq K\text{-çek}\{x\}$$

kapsaması geçerlidir. K-çek$\{x\}$ cümlesinin bir tek nokta içermesi için gerek ve yeter şart x dizisinin yakınsak olmasıdır ki bu nokta, x dizisinin limit noktası olur. K-çek$\{x\} = \emptyset$ ise, x dizisine belirli anlamda ıraksak dizi denir ve $x = (x_n) \sim \infty$ ile gösterilir.

Reel terimli sınırlı bir $x = (x_n)$ dizisinin K-çekirdeği

$$\liminf_n x_n = l(x) \text{ ve } \limsup_n x_n = L(x)$$

olmak üzere; $[l(x), L(x)]$ kapalı aralığıdır.

Şimdi de alternatif çekirdek tanımlarını verelim.

Tanım 2.2.4. [**15**, shf. 139] Eğer bir X cümlesinin noktaları bir l doğrusunun ayırdığı yarı düzlemde kalıyorsa (l doğrusunun üzerinde olabilir), l doğrusuna X cümlesinin bir *bariyeri* denir.

Tanım 2.2.5. [**15**, shf. 139] $x = (x_n)$ dizisinin terimleri için hiç bir bariyer yoksa K-çek$\{x\}$ cümlesi $\mathbb{C}$ düzlemidir. Eğer $x = (x_n)$ dizisinin terimleri için bariyerler varsa, K-çek$\{x\}$; $x = (x_n)$ dizisinin limit noktalarını içeren yarı düzlemlerin ara kesitidir.

Tanım 2.2.6. [**14**] Bir $x = (x_n)$ sınırlı dizisi için

$$B_x(z) = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq \limsup_n |x_n - z| \right\}$$

disklerini tanımlayalım. Bu durumda, $x = (x_n)$ dizinin çekirdeği,

$$\bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z)$$

şeklinde tanımlanır.

Sınırlı bir dizi için verilen Tanım 2.2.3, 2.2.5 ve 2.2.6 denktir, [**15, 14**].

İki dizinin limit noktalarının cümlesi aynı ise, K-çekirdekleri aynıdır. Fakat karşıtı doğru değildir. Burada aklımıza şu soru gelmektedir.

İki dizinin K-çekirdekleri aynı ise, limit noktalarının cümlesi için ne söylenebilir? Bu sorunun cevabı için hangi çekirdek tanımı kullanıldığı önemlidir.

Teorem 2.2.1. [**15**, shf. 140-141] *$x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ iki dizi olsun.*

(i) K-çek$\{x\} = K$-çek$\{y\}$ olması için gerek ve yeter şart birinin limit noktalarını kapsayan kapalı konveks bölge, diğerinin limit noktalarını kapsar.

(ii) K-çek$\{x\} = K$-çek$\{y\}$ olması için gerek ve yeter şart birinin limit noktalarını kapsayan her yarı düzlem, diğerinin limit noktalarını kapsar.

Şimdi de iki dizinin K-çekirdeklerinin eşit olma şartını sağlayan teoremi verelim.

Teorem 2.2.2. [**15**, shf. 144] *$x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ iki dizi olsun. $\lim_n |x_n - y_n| = 0$ ise, K-çek$\{x\} = K$-çek$\{y\}$ eşitliği geçerlidir.*

Çekirdek tanımlarından sonra, Knopp Çekirdek Teoremi olarak bilinen teoremi verelim.

Teorem 2.2.3. [**15**, shf. 138] *A reel terimli sonsuz bir matris, $x = (x_k)$ de reel terimli bir dizi olsun. Eğer $A = (a_{nk})$ pozitif terimli regüler bir matris ise,*

$$K\text{-}\mathit{çek}\{Ax\} \subseteq K\text{-}\mathit{çek}\{x\}$$

kapsaması geçerlidir.

Teorem 2.2.4. [**16**, Theorem 4] *$A = (a_{nk})$ reel terimli sonsuz matrisi için*

$$\chi(A) = \lim_n \sum_k a_{nk} - \sum_k \lim_n a_{nk}$$

tanımlı olsun. $\sum_k a_k x_k$ serisinin tanımlı olduğu durumlarda, $a_{nk} \geq 0$ olacak şekilde bir $k \geq q \in \mathbb{N}$ $(n \in \mathbb{N})$ sayısı mevcut ise,

$$\liminf_n A_n x \geq \sum_k a_k x_k + \chi(A) l(x) \tag{2.2.1}$$

ve

$$\limsup_n Ax \leq \sum_k a_k x_k + \chi(A) L(x) \tag{2.2.2}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Burada, $a_k = \lim_n a_{nk}$ şeklinde tanımlıdır.

Teorem 2.2.5. [**16**, Theorem 6] *$A = (a_{nk})$ reel terimli sonsuz matrisi için $\chi(A)$ tanımlı olsun. $x = (x_k)$ sınırlı dizi olmak üzere, $\sum_k a_k x_k$ serisinin tanımlı olduğu durumlarda, (2.2.1) ve (2.2.2) eşitsizliklerinin geçerli olması için*

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| = \lim_n \sum_k a_{nk} = a$$

şartının sağlanması yeterlidir.

Teorem 2.2.6. [**20**, Theorem 1] *$x = (x_k)$ reel terimli sınırlı bir dizi olmak üzere,*

$$\limsup_n A_n x \leq \limsup_n x_n$$

olması için gerek ve yeter şart $A = (a_{nk})$ regüler ve

$$\lim_n \sum_k |a_{nk}| = 1$$

olmasıdır.

Tanım 2.2.7. $a_{nk}^- = \text{maks}\{-a_{nk}, 0\}$ olmak üzere;

$$\lim_n \sum_k a_{nk}^- = 0$$

ise, $A = (a_{nk})$ matrisine *hemen hemen pozitif matris* denir.

Teorem 2.2.7. [**20**, Theorem 3] *$B = (b_{nk})$ sonsuz matrisi regüler ve hemen hemen pozitif olsun. $x \in \ell_\infty$ için*

$$\limsup_n A_n x \leq \liminf_n B_n x$$

olacak şekilde A matrisi yoktur.

Rath, Tripathy [**19**], bazı regüler matris sınıfları ile ilgili aşağıdaki teoremleri vermişlerdir.

$I = [0, 1]$ olmak üzere $\alpha \in I$ olsun.

$$\text{Her } n, k \in \mathbb{N} \text{ için } a_{nk} \geq 0,$$

$$\text{her } n \in \mathbb{N} \text{ için } a_{nk} = \alpha \text{ olacak şekilde } k \in \mathbb{N} \text{ mevcut},$$

$$\text{her } k \in \mathbb{N} \text{ için } a_{nk} = \alpha \text{ olacak şekilde } n \in \mathbb{N} \text{ mevcut}$$

şartlarını sağlayan regüler $A = (a_{nk})$ matris sınıfı $Q(\alpha)$ ile gösterilsin.

Teorem 2.2.8. [**19**, Theorem 1] *$x = (x_k)$ sınırlı bir dizi, $\alpha \in [0, \frac{1}{2}]$ ve $\lambda \in I$ olsun. Bu durumda, $x = (x_k)$ dizisini $\lambda a + (1-\lambda)b$ noktasına limitleyen bir $A \in Q(\alpha)$ matrisi vardır. Burada $a = \alpha L(x) + (1-\alpha)l(x)$ ve $b = \alpha l(x) + (1-\alpha)L(x)$ şeklindedir.*

Teorem 2.2.9. [**19**, Theorem 2] *$\alpha \in I$ ve $x = (x_k)$, $A \in Q(\alpha)$ matrisi tarafından limitlenebilen sınırlı bir dizi ise,*

$$a \leq \lim_n A_n x \leq b$$

eşitsizliği sağlanır.

Tanım 2.2.8. [**37**] $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ dönüşümü, her $m, n \in \mathbb{N}$ için $\sigma^m(n) \neq n$ olacak şekilde birebir bir fonksiyon olsun. Bu durumda $\phi : l_\infty \longrightarrow R$ lineer sürekli fonksiyoneli,

(i) Her n için $x_n \geq 0$ ise $\phi(x) \geq 0$

(ii) $e = (1, 1, 1, \cdots, 1, \cdots)$ ise $\phi(e) = 1$

(iii) Her $x_n \in l_\infty$ için $\phi(\{x_{\sigma(n)}\}) = \phi(x)$

şartlarını sağlıyorsa, ϕ fonksiyoneline *invaryant limit* veya *σ-limit* denir. Özel olarak, $\sigma(n) = n + 1$ alınırsa Banach limit elde edilir. Bütün invaryant limitleri eşit olan sınırlı diziye, *invaryant yakınsak* veya *σ-yakınsak* dizi denir ve σ-yakınsak dizilerin uzayı V_σ ile gösterilir.

$x = (x_k)$ sınırlı reel dizisinin σ-çekirdeği,

$$q_\sigma(x) = \limsup_p \sup_n \left(\frac{x_n + x_{\sigma(n)} + \cdots + x_{\sigma^p(n)}}{p + 1} \right)$$

olmak üzere, $[-q_\sigma(-x), q_\sigma(x)]$ aralığıdır.

TANIM 2.2.9. [**37**] $(c, V_\sigma)_{reg}$ ve $(V_\sigma, V_\sigma)_{reg}$ sınıflarına, sırasıyla, σ-regüler ve V_σ-*regüler matris sınıfları* denir.

Bir $A = (a_{nk})$ matrisi için $a^-(p,n,k) = \frac{1}{p}\sum_{j=1}^{p} a^-_{\sigma^j(n)k}$ olmak üzere,

$$\lim_p \sum_k a^-(p,n,k) = 0$$

ise, A matrisine *σ-düzgün pozitif matris* denir.

TEOREM 2.2.10. [**37**] *Bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi için,*

(i) σ-çek$\{Ax\} \subseteq K$-çek$\{x\}$ olması için gerek ve yeter şart, A matrisinin σ-regüler ve σ- düzgün pozitif olmasıdır.

(ii) σ-çek$\{Ax\} \subseteq \sigma$-çek$\{x\}$ olması için gerek ve yeter şart, A matrisinin V_σ-regüler ve σ- düzgün pozitif olmasıdır.

Tek indisli dizilerde Knopp [**13**] tarafından verilen çekirdek tanımı, Patterson [**21**] tarafından çift indisli dizilerde aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

TANIM 2.2.10. [**21**] $x = (x_{kl})$ kompleks terimli çift dizi olmak üzere, P-$C_n\{x\}$, $k, l > n$ olduğunda x dizisinin tüm noktalarını içeren en küçük kapalı konveks bölge olsun. Bu durumda, $x = (x_{kl})$ çift dizisinin *Pringsheim çekirdeği*,

$$P\text{-çek } \{x\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} P\text{-}C_n\{x\}$$

biçiminde tanımlanır.

TANIM 2.2.11. [**21**] $x = (x_{kl})$ çift dizisinin, $P\text{-}\lim y = \beta$ olacak şekilde bir $y = (y_{kl})$ alt dizisi mevcut ise, β sayısına x çift dizisinin *Pringsheim limit noktası* denir.

Pringsheim limit noktası aşağıdaki gibi de ifade edilebilir. (k_i) ve (l_j) artan iki indis dizisi olmak üzere,

$$P\text{-}\lim_{i,j} x_{k_i l_j} = \beta$$

oluyorsa β sayısına x çift dizisinin *Pringsheim limit noktası* denir. Bir dizinin Pringsheim limit noktalarının en küçüğüne dizinin P-liminf ve en büyüğüne P-limsup adı verilir. Bu durumda, sınırlı reel terimli bir $x = (x_{kl})$ çift dizisi bakımından

$$P\text{-çek}\{x\} = [P\text{-}\liminf x, P\text{-}\limsup x]$$

eşitliği geçerlidir.

İstatistiksel yakınsaklık Fast [**23**] tarafından verildi. Daha sonra Šalát, Fridy [**25**], Connor [**26**], Kolk [**27**], Fridy, Orhan [**28**], [**29**] ve birçok yazar tarafından çalışıldı.

TANIM 2.2.12. $x = (x_k)$ reel ya da kompleks terimli bir dizi ve $|E|$, E cümlesinin kardinalitesi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : |x_k - l| \geq \varepsilon\}| = 0$$

olacak şekilde bir $l \in \mathbb{C}$ sayısı mevcut ise, $x = (x_k)$ dizisi l sayısına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $st\text{-}\lim_k x_k = l$ ile gösterilir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı Mursaleen, Edely **[30]** tarafından çift indisli dizilere genişletilmiştir. $E \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ ve

$$E(m,n) = \Big\{(j,k) : j \leq m, k \leq n\Big\}$$

olmak üzere E cümlesinin çift doğal yoğunluğu,

$$\delta_2(E) = P\text{-}\lim_{m,n} \frac{|E(m,n)|}{mn}$$

biçiminde tanımlanır. Her $\varepsilon > 0$ için $\{(j,k) : |x_{jk} - l| \geq \varepsilon\}$ cümlesinin doğal yoğunluğu sıfır ise, $x = (x_{jk})$ reel çift dizisi l noktasına *istatistiksel yakınsaktır* denir ve $st_2\text{-}\lim_{j,k} x_{jk} = l$ ile gösterilir. P-yakınsak bir çift dizi st_2-yakınsaktır fakat karşıtı doğru değildir.

Çakan, Altay **[32]** nolu çalışmada reel çift dizilerin st_2-sınırlılık, st_2-limsup, st_2-liminf ve istatistiksel çekirdeğini aşağıdaki gibi tanımlamıştır.

$x = (x_{jk})$ reel çift dizisi için,

$$\delta_2(\{(j,k) : x_{jk} > M\}) = 0$$

olacak şekilde $M \in \mathbb{R}$ mevcut ise, üstten st_2-sınırlıdır,

$$\delta_2(\{(j,k) : x_{jk} < N\}) = 0$$

olacak şekilde $N \in \mathbb{R}$ mevcut ise, alttan st_2-sınırlıdır ve hem üstten hem de alttan st_2-sınırlı ise, *st_2-sınırlı dizi* denir.

$M, N, C, D \in \mathbb{R}$, $x = (x_{jk})$ reel çift dizisi için

$$K_x = \Big\{N : \delta_2(\{(j,k) : x_{jk} < N\}) = 0\Big\}$$

ve

$$L_x = \Big\{M : \delta_2(\{(j,k) : x_{jk} > M\}) = 0\Big\}$$

olmak üzere, $st_2\text{-}\inf x = \sup K_x$ ve $st_2\text{-}\sup x = \inf L_x$,

$$G_x = \Big\{C \in \mathbb{R} : \delta_2(\{(j,k) : x_{jk} > C\}) \neq 0\Big\}$$

ve

$$F_x = \Big\{ D \in \mathbb{R} : \delta_2(\{(j,k) : x_{jk} < D\}) \neq 0 \Big\}$$

olmak üzere,

$$st_2\text{-} \limsup x = \begin{cases} \sup G_x & , \quad G_x \neq \emptyset \\ -\infty & , \quad G_x = \emptyset \end{cases}$$

ve

$$st_2\text{-} \liminf x = \begin{cases} \inf F_x & , \quad F_x \neq \emptyset \\ \infty & , \quad F_x = \emptyset \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 2.2.11. [**32**, Teorem 2.4] *a)* st_2*-* $\limsup x = \beta \Leftrightarrow$ *her* $\varepsilon > 0$*,* $\delta_2(\{(j,k) : x_{jk} > \beta - \varepsilon\}) \neq 0$ *ve* $\delta_2(\{(j,k) : x_{jk} > \beta + \varepsilon\}) = 0$*.*

b) st_2*-* $\liminf x = \alpha \Leftrightarrow$ *her* $\varepsilon > 0$*,* $\delta_2(\{(j,k) : x_{jk} < \alpha + \varepsilon\}) \neq 0$ *ve* $\delta_2(\{(j,k) : x_{jk} < \alpha - \varepsilon\}) = 0$*.*

Tanım 2.2.13. [**33**] $x = (x_{jk})$ reel terimli sınırlı çift dizisi için

$$P\text{-} \lim_{m,n} \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{\sigma^j(s), \sigma^k(t)} = l \qquad (s,t \text{ ye göre düzgün})$$

sağlanıyorsa, $x = (x_{jk})$ dizisi l noktasına *σ-yakınsaktır* denir ve σ_2- $\lim x = l$ ile gösterilir. Sınırlı σ-yakınsak ve sıfıra σ-yakınsak çift dizilerin cümlesi, sırasıyla, V_σ^2 ve Z^2 ile gösterilir. Tek indisli dizilerdeki durumun aksine P-yakınsak bir çift dizi σ-yakınsak olmak zorunda değildir. Fakat her sınırlı P-yakınsak çift dizi σ-yakınsaktır.

$x = (x_{jk}) \in V_\sigma^2$ dizileri için $Ax \in \mathcal{C}_{bp}$ ve P- $\lim Ax = \sigma_2$- $\lim x$ şartlarını sağlayan 4-boyutlu $A = (a_{mnjk})$ matrisine kuvvetli *σ-regüler matris* denir.

2.3. Matris Dönüşümleri

Bu kısımda; çift dizi uzayları arasındaki matris dönüşümleri tanımlanarak, matris dönüşümleri ile ilgili teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Tanım 2.3.1. $A = (a_{mnkl})$ 4-boyutlu bir sonsuz matris ve υ çift dizilerle ilgili herhangi bir yakınsaklık kavramı olsun. Şimdi,

$$\Omega_A^{(\upsilon)} = \left\{ x \in \Omega : [Ax]_{mn} = \upsilon\text{-} \sum_{k,l} a_{mnkl} x_{kl} \quad \forall\, m,n \in \mathbb{N} \text{ için mevcut} \right\}$$

cümlesini tanımlayalım. Bu durumda,

$$A : \Omega_A^{(\upsilon)} \to \Omega, \quad x \mapsto Ax = ([Ax]_{mn})$$

dönüşümüne *υ-tipi bir matris dönüşümü* denir.

E bir çift dizi uzayı ve υ bir yakınsaklık tipi olmak üzere, υ yakınsaklık tipine göre A dönüşümü altında E uzayında yatan x dizilerinin cümlesi $E_A^{(\upsilon)}$ ile gösterilmektedir. Yani,

$$E_A^{(\upsilon)} = \left\{ x \in \Omega_A^{(\upsilon)} : Ax \in E \right\}.$$

Tanım 2.3.2. $\mathcal{C}_\upsilon \subset (\mathcal{C}_\upsilon)_A$ olan bir A matrisine, *$\mathcal{C}_\upsilon$-yapıyı koruyan matris* denir. Eğer $\mathcal{C}_\upsilon$-yapıyı koruyan A matrisi limiti de koruyorsa o zaman A matrisi bir *$\mathcal{C}_\upsilon$-regüler matris* olarak adlandırılır.

Şimdi, bazı matris sınıflarının karakterizasyonlarını veren teoremler ispatsız olarak sunulacaktır.

Teorem 2.3.1. [**11**, shf. 86] *(a) $A = (a_{mnkl})$ matrisinin $\upsilon = r$ bakımından $\mathcal{C}_\upsilon$-yapıyı koruyan olması için*

$$\sup_{m,n} \sum_{k,l} |a_{mnkl}| < \infty, \tag{2.3.1}$$

$$\upsilon\text{-}\lim_{m,n} a_{mnkl} = a_{kl} \ \textit{mevcut} \ (k, l \in \mathbb{N}), \tag{2.3.2}$$

$$\upsilon\text{-}\lim_{m,n} \sum_k a_{mnkl_0} = u^{l_0} \quad \textit{ve} \tag{2.3.3}$$

$$\upsilon\text{-}\lim_{m,n} \sum_l a_{mnk_0l} = v_{k_0} \ \textit{mevcut} \ (k_0, l_0 \in \mathbb{N}),$$

$$\upsilon\text{-}\lim_{m,n} \sum_{k,l} a_{mnkl} = v \ \textit{mevcut} \tag{2.3.4}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

Bu şartlar altında $a = (a_{kl}) \in \mathcal{L}_u$, $(u^l), (v_k) \in \ell_1$ ve

$$\begin{aligned} \upsilon\text{-}\lim_{m,n} [Ax]_{mn} &= \sum_{k,l} a_{kl} x_{kl} + \sum_k \left(v_k - \sum_l a_{kl} \right) x_k + \sum_l \left(u^l - \sum_k a_{kl} \right) x^l \\ &\quad + \left(\mu + \sum_{k,l} a_{kl} - \sum_k v_k - \sum_l u^l \right) \upsilon - \lim_{m,n} x_{mn} \end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $x_k = \lim_l x_{kl}$ $(k \in \mathbb{N})$ ve $x^l = \lim_k x_{kl}$ $(l \in \mathbb{N})$ şeklindedir.

(b) $A = (a_{mnkl})$ matrisinin $\upsilon = r$ bakımından $\mathcal{C}_\upsilon$-regüler olması için gerek ve yeter şart; (2.3.1)-(2.3.4) şartlarının, $a_{kl} = u^l = v_k = 0$ $(k, l \in \mathbb{N})$ ve $v = 1$ ile sağlanmasıdır.

Teorem 2.3.2. [**11**, shf. 87] *$A = (a_{mnkl})$ matrisinin $\upsilon = bp$ bakımından $\mathcal{C}_\upsilon$-yapıyı koruyan olması için (2.3.1), (2.3.2), (2.3.4) şartlarının sağlanması ve her bir $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ alındığında*

$$\upsilon\text{-}\lim_{m,n} \sum_k |a_{mnkl_0} - a_{kl_0}| = 0 \text{ ve } \upsilon\text{-}\lim_{m,n} \sum_l |a_{mnk_0l} - a_{k_0l}| = 0 \tag{2.3.5}$$

olması gerek ve yeterdir.

Bu şartlar altında $a = (a_{kl}) \in \mathcal{L}_u$ ve

$$\upsilon\text{-}\lim_{m,n}[Ax]_{mn} = \sum_{k,l} a_{kl}x_{kl} + \left(\upsilon\text{-}\sum_{k,l} a_{kl}\right) \upsilon\text{-}\lim_{m,n} x_{mn}$$

eşitliği geçerlidir.

(b) $A = (a_{mnkl})$ matrisinin $\upsilon = bp$ bakımından $\mathcal{C}_\upsilon$-regüler olması için (2.3.1), (2.3.2), (2.3.4) ve (2.3.5) şartlarının $a_{kl} = 0$ $(k, l \in \mathbb{N})$ ve $\upsilon = 1$ ile sağlanması gerek ve yeterdir.

Teorem 2.3.3. [**11**, shf. 87] *$A = (a_{mnkl})$ matrisinin $\upsilon = p$ bakımından $\mathcal{C}_\upsilon$-yapıyı koruyan olması için (2.3.2),(2.3.4) ve*

$$\begin{array}{c} \text{her } k, m, n \in \mathbb{N} \text{ için öyle bir } L(m, n, k) \in \mathbb{N} \text{ sayısı} \\ \text{mevcuttur ki } \quad l > L(m, n, k) \text{ olduğunda } a_{mnkl} = 0, \end{array} \tag{2.3.6}$$

$$\begin{array}{c} \text{her } l, m, n \in \mathbb{N} \text{ için öyle bir } K(m, n, l) \in \mathbb{N} \text{ sayısı} \\ \text{mevcuttur ki } k > K(m, n, l) \text{ olduğunda } a_{mnkl} = 0, \end{array} \tag{2.3.7}$$

$$\begin{array}{c} \text{her } k \in \mathbb{N} \text{ için öyle bir } L \in \mathbb{N} \text{ sayısı} \\ \text{mevcuttur ki } m, n, l > L \text{ olduğunda } a_{mnkl} = 0, \end{array} \tag{2.3.8}$$

$$\begin{array}{c} \text{her } l \in \mathbb{N} \text{ için öyle bir } K \in \mathbb{N} \text{ sayısı} \\ \text{mevcuttur ki } m, n, k > K \text{ olduğunda } a_{mnkl} = 0, \end{array} \tag{2.3.9}$$

$$\text{her } m, n \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{k,l} |a_{mnkl}| < \infty, \tag{2.3.10}$$

$$\sup_{m,n \geq N} \sum_{k,l} |a_{mnkl}| < \infty \text{ olacak şekilde } N \in \mathbb{N} \text{ sayısı mevcuttur,} \tag{2.3.11}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

Bu şartlar altında $a = (a_{kl}) \in \mathcal{L}_u$, $(a_{kl_0})_k, (a_{k_0l})_l \in \varphi$ $(k_0, l_0 \in \mathbb{N})$ ve

$$\upsilon\text{-}\lim_{m,n}[Ax]_{mn} = \sum_{k,l} a_{kl}x_{kl} + \left(\upsilon\text{-}\sum_{k,l} a_{kl}\right) \upsilon\text{-}\lim_{m,n} x_{mn}$$

eşitliği geçerlidir. Burada; φ, sıfırdan farklı terimlerin sayısı sonlu olan dizilerin cümlesini göstermektedir.

(b) $A = (a_{mnkl})$ matrisinin $\upsilon = p$ bakımından $\mathcal{C}_\upsilon$-regüler olması için (2.3.2), (2.3.4) ve (2.3.6)-(2.3.11) şartlarının $a_{kl} = 0$ $(k, l \in \mathbb{N})$ ve $\upsilon = 1$ ile sağlanması gerek ve yeterdir.

TEOREM 2.3.4. **[5, 3]** *$A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{C}_{bp}, \mathcal{C}_p)_{reg}$ olması için*

$$P\text{-}\lim_{m,n} a_{mnkl} = 0 \quad \textit{her bir} \quad k, l; \tag{2.3.12}$$

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{k,l} a_{mnkl} = 1; \tag{2.3.13}$$

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{k} |a_{mnkl}| = 0 \ \textit{her bir} \ l; \tag{2.3.14}$$

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{l} |a_{mnkl}| = 0 \ \textit{her bir} \ k; \tag{2.3.15}$$

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{k,l} |a_{mnkl}| \ \textit{mevcut}; \tag{2.3.16}$$

$$\|A\| = \sup_{m,n} \sum_{k,l} |a_{mnkl}| < \infty \tag{2.3.17}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.

TEOREM 2.3.5. **[38]** *$A = (a_{mnkl}) \in (\mathcal{C}_p, \mathcal{C}_{bp})_{reg}$ olması için (2.3.1), (2.3.2) (her $k, l \in \mathbb{N}$ için $a_{kl} = 0$), (2.3.4) $(\upsilon = 1)$, (2.3.8) ve (2.3.9) şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir.*

3. ÇİFT DİZİLERDE ÇEKİRDEK KAVRAMI

Bu bölümde, çift indisli dizilerde çekirdek kavramı üzerinde durulacaktır.

3.1. Çekirdek Teoremleri

Bu kısımda, Patterson [**21**] çift indisli dizilerin P-çekirdeği kavramını vererek bazı teoremleri ispatladı. Patterson'un çekirdek tanımı kullanılarak, tek indisli dizlerde Knopp [**13**], Cooke [**15**], Shcherbakov [**14**], Rhoades [**16**] ve Maddox [**20**] tarafından verilen bazı tanım ve teoremlerin, çift indisli dizilerdeki karşılıkları verilecektir.

TEOREM 3.1.1. *$x = (x_{kl})$ dizisinin Pringsheim limit noktalarının cümlesi D olsun. Bu durumda,*

$$D \subseteq P\text{-çek}\ \{x\}$$

dir.

İSPAT. α noktası, $x = (x_{kl})$ dizisinin bir P-limit noktası olsun. Bu durumda,

$$P\text{-}\lim_{i,j} x_{k_i l_j} = \alpha$$

olacak şekilde doğal sayıların artan bir (k_i, l_j) dizisi mevcuttur. Herhangi bir sabit $n \in \mathbb{Z}^+$ seçilirse, $k_p, l_q > n$ olacak şekilde (p, q) belirlenir. Bu durumda,

$$\begin{matrix} x_{k_p,l_q} & x_{k_p,l_{q+1}} & x_{k_p,l_{q+2}} & \cdots \\ x_{k_{p+1},l_q} & x_{k_{p+1},l_{q+1}} & x_{k_{p+1},l_{q+2}} & \cdots \\ x_{k_{p+2},l_q} & x_{k_{p+2},l_{q+1}} & x_{k_{p+2},l_{q+2}} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

noktaları $P\text{-}C_n\{x\}$ cümlesindedir. $P\text{-}C_n\{x\}$ kapalı olduğundan (x_{kl}) dizisinin P-limit noktalarını içerir. O halde α noktası da $P\text{-}C_n\{x\}$ cümlesindedir. n keyfi olduğundan, ispat tamamlanır. □

Şimdi de alternatif P-çekirdek tanımlarını verelim.

TANIM 3.1.1. Eğer bir X cümlesinin noktaları bir L doğrusunun ayırdığı yarı düzlemde kalıyorsa (L doğrusunun üzerinde de olabilir), L doğrusuna X cümlesinin bir *bariyeri* denir.

X cümlesinin noktalarını ihtiva eden L bariyeri ile ayrılan yarı düzlem H ile gösterilecektir.

TANIM 3.1.2. $x = (x_{kl})$ dizisinin terimleri için hiç bir bariyer yoksa P-çek$\{x\} = \mathbb{C}$ eğer $x = (x_{kl})$ dizisinin terimleri için bariyerler varsa, P-çek $\{x\}$; $x = (x_{kl})$ dizisinin P-limit noktalarını içeren yarı düzlemlerin ara kesiti olarak tanımlanır.

Shcherbakov **[14]** tarafından tek indisli sınırlı dizilerde verilen çekirdek tanımını, aşağıdaki gibi çift indisli sınırlı dizilere taşıyabiliriz.

TANIM 3.1.3. Sınırlı bir $x = (x_{kl})$ çift dizisi için

$$B_x(z) = \left\{ w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq P\text{-} \limsup_{k,l} |x_{kl} - z| \right\}$$

disklerini tanımlayalım. Bu durumda, $x = (x_{kl})$ dizinin P-çekirdeği,

$$\bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z)$$

şeklinde tanımlanır.

TEOREM 3.1.2. *Bir $x = (x_{kl})$ çift dizisi için Tanım 2.2.10 ile Tanım 3.1.2 denktir.*

İSPAT. D, $x = (x_{kl})$ dizisinin P-limit noktalarının cümlesi, E cümlesi, dizinin Tanım 2.2.10'a göre P-çekirdeği ve F cümlesi de, dizinin Tanım 3.1.2'ye göre P-çekirdeği olsun.

$a \notin E$ olsun. O zaman, bazı n indisleri için $a \notin P\text{-}C_n\{x\}$ dir. Böylece a noktasını $P\text{-}C_n\{x\}$ cümlesinden ayıracak şekilde bir L bariyeri çizilebilir. $P\text{-}C_n\{x\}$ kapalı olduğundan, $D \subset P\text{-}C_n\{x\}$ ve L bariyeri, a noktası ile D cümlesini ayırır. Böylece $a \notin F$ dir. Bu ise,

$$F \subset E \tag{3.1.1}$$

olduğunu gösterir.

H, D cümlesini kapsayan yarı düzlem ve L doğrusu da bunun bir bariyeri olsun. Bu durumda, $x = (x_{kl})$ dizisinin k veya l, m indisinden küçük elamanları hariç hepsi D ile aynı taraftadır. Aksi halde; en az bir P-limit noktası D cümlesinin bulunmadığı tarafta olabilir. Böylece, x dizisinin

$$\begin{matrix} x_{m,m} & x_{m,m+1} & x_{m,m+2} & \cdots \\ x_{m+1,m} & x_{m+1,m+1} & x_{m+1,m+2} & \cdots \\ x_{m+2,m} & x_{m+2,m+1} & x_{m+2,m+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

noktaları, H yarı düzlemindedir. Yani $P\text{-}C_m\{x\} \subset H$ kapsaması geçerlidir. m keyfi olduğundan $E \subset H$ elde edilir.

Buna göre,

$$F \supset E \tag{3.1.2}$$

kapsaması geçerlidir.

(3.1.1) ve (3.1.2) kapsamalarından $E = F$ elde edilir. $\square$

TEOREM 3.1.3. *Sınırlı bir $x = (x_{kl})$ çift dizisi için Tanım 3.1.2 ile Tanım 3.1.3 denktir.*

İSPAT. $w \notin \bigcap_{z\in\mathbb{C}} B_x(z)$ olsun. Bu durumda, en az bir $z_0 \in \mathbb{C}$ için $w \notin B_x(z_0)$ dır. w ile z_0 doğru parçasına dik ve $B_x(z_0)$ diskine teğet olan L doğrusu çizelim. L doğrusu $x = (x_{kl})$ dizisinin P-limit noktalarını ihtiva eden yarı düzlemle w noktasını birbirinden ayırır. Bu nedenle bu yarı düzlemlerin arakesitinde w noktası bulunmaz. O halde,

$$P\text{-çek } \{x\} \subset \bigcap_{z\in\mathbb{C}} B_x(z) \tag{3.1.3}$$

kapsaması geçerlidir.

Tersine; $w \notin P$-çek $\{x\}$ olsun. Bu takdirde, w noktası $x = (x_{kl})$ çift dizisinin P-limit noktalarını ihtiva eden H yarı düzlemini L bariyeri ile ayırır. L bariyerine dik olacak şekilde w noktasından geçen d doğrusunu çizelim. L, d doğrularının kesim noktası ile w noktasını birleştiren doğru parçasının orta noktası p olsun. H düzleminde d doğrusu üzerinde bir z_0 noktası seçelim ve

$$B(z_0) = \Big\{ y \in \mathbb{C} : |y - z_0| \le |p - z_0| \Big\}$$

diskini tanımlayalım. $x = (x_{kl})$ sınırlı, bazı $n \in \mathbb{N}$ ve $k, l > n$ için $x_{kl} \in H$ olduğundan z_0 noktasını

$$|p - z_0| = P\text{-}\limsup_{k,l} |x_{kl} - z_0|$$

olacak şekilde p noktasından yeteri kadar uzakta seçilebilir. Böylece $B(z_0)$ diski, $B_x(z)$ disklerinden biridir ve $w \notin B(z_0)$ olduğundan $w \notin \bigcap_{z\in\mathbb{C}} B_x(z)$ olur. Bu ise,

$$P\text{-çek } \{x\} \supset \bigcap_{z\in\mathbb{C}} B_x(z) \tag{3.1.4}$$

kapsamasının geçerli olduğunu gösterir.

(3.1.3) ve (3.1.4) kapsamalarından istenen elde edilir. $\square$

Sonuç 3.1.1. *İki dizinin P-limit noktaları aynı ise P-çekirdekleri aynıdır. Fakat karşıtı doğru değildir.*

ÖRNEK 3.1.1. $x = (x_{kl})$ çift dizisi;

$$x_{kl} = \begin{cases} 1 & , \quad k+l \text{ çift} \\ -1 & , \quad k+l \text{ tek} \end{cases}$$

$y = (y_{kl})$ çift dizisi;

$$y_{kl} = \begin{cases} 1 & , \quad k+l \equiv 0 \ (mod\ 3) \\ -1 & , \quad k+l \equiv 1 \ (mod\ 3) \\ 0 & , \quad k+l \equiv 2 \ (mod\ 3) \end{cases}$$

olsun. Bu durumda x ve y dizilerinin P-limit noktaları $D_x = \{-1, 1\}$ ve $D_y = \{-1, 0, 1\}$ cümleleri aynı değildir, fakat P-çekirdekleri aynıdır.

İki dizinin Pringsheim çekirdekleri aynı ise, Pringsheim limit noktalarının cümlesi hakkında ne söylenebilir? Bu sorunun cevabı için hangi çekirdek tanımı kullanıldığı önemlidir.

TEOREM 3.1.4. *$x = (x_{kl})$ ve $y = (y_{kl})$ iki çift dizi olmak üzere;*

$$P\text{-}çek\ \{x\} = P\text{-}çek\{y\}$$

olması için gerek ve yeter şart dizilerden birinin P-limit noktalarını kapsayan her yarı düzlem, diğerinin P-limit noktalarını kapsar.

İSPAT. $x = (x_{kl})$ ve $y = (y_{kl})$ dizilerinin P-limit noktalarının cümlesini, sırasıyla, D_x ve D_y ile gösterelim.

P-çek $\{x\} = P$-çek $\{y\}$ ve H yarı düzlemi de D_x cümlesini kapsayan herhangi bir yarı düzlem olsun. Tanımdan, P-çek $\{x\} = P$-çek $\{y\} \subset H$ dir. $D_y \subseteq P$-çek $\{y\}$ olduğundan, $D_y \subseteq H$ olur.

Tersine; D_x cümlesini kapsayan her yarı düzlem D_y cümlesini de kapsasın ve $\alpha \in P$-çek $\{x\}$ olsun. Bu durumda, α noktası D_x cümlesini kapsayan her yarı düzlemdedir. Kabulden α noktası D_y cümlesini kapsayan her yarı düzlemde olur. Bu ise $\alpha \in P$-çek $\{y\}$ olduğunu gösterir.

Böylece, P-çek $\{x\} \subseteq P$-çek$\{y\}$ olur ve tersi de benzer şekilde gösterilebileceğinden, P-çek $\{x\} = P$-çek $\{y\}$ elde edilir. □

Aşağıdaki iki teoremin ispatı benzer şekilde yapılacağından, teoremler ispatsız verilecektir.

TEOREM 3.1.5. *$x = (x_{kl})$ ve $y = (y_{kl})$ iki çift dizi olmak üzere;*

$$P\text{-}çek\ \{x\} = P\text{-}çek\ \{y\}$$

olması için gerek ve yeter şart dizilerden birinin P-limit noktalarını kapsayan her kapalı konveks bölge, diğerinin P-limit noktalarını kapsar.

Teorem 3.1.6. *$x = (x_{kl})$ ve $y = (y_{kl})$ iki sınırlı çift dizi olmak üzere;*

$$P\text{-}çek\ \{x\} = P\text{-}çek\ \{y\}$$

olması için gerek ve yeter şart dizilerden birinin P-limit noktalarını kapsayan her disk, diğerinin P-limit noktalarını kapsar.

İki dizinin Pringsheim çekirdeklerinin eşit olma şartlarını sağlayan [**39**]'da verilen teoremi yeniden ispat edeceğiz.

Teorem 3.1.7. *$x = (x_{kl})$ ve $y = (y_{kl})$ iki çift dizi olmak üzere;*
$P\text{-}\lim_{k,l} |x_{kl} - y_{kl}| = 0$ ise $P\text{-}çek\ \{x\} = P\text{-}çek\ \{y\}$ dir.

İspat. $z \in P$-çek$\{y\}$ fakat $z \notin P$-çek $\{x\}$ olacak şekilde bir z noktası alalım. Bu durumda, $z \notin P\text{-}C_n\{x\}$ olacak şekilde bir n indisi mevcuttur. z', $P\text{-}C_n\{x\}$ cümlesinin z noktasına en yakın noktası ve

$$\alpha = z + \frac{z' - z}{3}, \quad \beta = z + \frac{2}{3}(z' - z) \ \text{ ve } \ |z' - z| = 3d$$

olsun. Bu durumda,

$$|\alpha - z| = |\beta - \alpha| = |z' - \beta| = d$$

olur. $\min(k, l) \geq q$ olduğunda, $|x_{kl} - y_{kl}| < d$ olacak şekilde $q > n$ seçelim.

L_α ve L_β, zz' doğrusuna α ve β noktalarında dik doğrular olsun. Bu durumda, $P\text{-}C_n\{x\}$ cümlesine ait

$$\begin{matrix} x_{q,q} & x_{q,q+1} & x_{q,q+2} & \cdots \\ x_{q+1,q} & x_{q+1,q+1} & x_{q+1,q+2} & \cdots \\ x_{q+2,q} & x_{q+2,q+1} & x_{q+2,q+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

noktalarının hepsi L_β ile z noktasından ayrılmıştır. Aynı şekilde,

$$\begin{matrix} y_{q,q} & y_{q,q+1} & y_{q,q+2} & \cdots \\ y_{q+1,q} & y_{q+1,q+1} & y_{q+1,q+2} & \cdots \\ y_{q+2,q} & y_{q+2,q+1} & y_{q+2,q+2} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{matrix}$$

noktaları da L_α ile z noktasından ayrılmıştır. Böylece; $z \notin P$-çek $\{y\}$ dir. Bu ise kabulle çelişir.

Tersi de benzer şekilde gösterilir. □

Patterson [**35**]'de kompleks terimli çift diziler için verdiği Teorem 3.1'i reel terimli çift diziler için ifade ve ispat edeceğiz.

Teorem 3.1.8. *4-boyutlu $A = (a_{mnkl})$ negatif olmayan reel terimli RH-regüler matris olsun. $x = (x_{kl})$ reel sınırlı bir dizi ve Ax mevcut ise,*

$$P\text{-}çek\ \{Ax\} \subseteq P\text{-}çek\ \{x\}$$

kapsaması geçerlidir.

İspat. Bunun için

$$P\text{-}\limsup_{m,n} A_{mn}x \leq P\text{-}\limsup_{m,n} x_{mn}$$

eşitsizliğinin geçerli olduğunu göstermek yeterlidir.

$P\text{-}\limsup_{k,l} x_{kl} = L$ olsun. Bu durumda, $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde en az bir $N_0 \in \mathbb{N}$ için $k, l \geq N_0$ olduğunda,

$$x_{kl} \leq L + \varepsilon$$

eşitsizliği geçerlidir. $A = (a_{mnkl})$ matrisinin negatif olmadığı dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
A_{mn}x &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{mnkl}x_{kl} \\
&= \sum_{k=1}^{N_0}\sum_{l=1}^{N_0} a_{mnkl}x_{kl} + \sum_{k=1}^{N_0}\sum_{l=N_0+1}^{\infty} a_{mnkl}x_{kl} \\
&\quad + \sum_{k=N_0+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_0} a_{mnkl}x_{kl} + \sum_{k=N_0+1}^{\infty}\sum_{l=N_0+1}^{\infty} a_{mnkl}x_{kl} \\
&\leq \sum_{k=1}^{N_0}\sum_{l=1}^{N_0} a_{mnkl}x_{kl} + \sum_{k=1}^{N_0}\sum_{l=N_0+1}^{\infty} a_{mnkl}x_{kl} \\
&\quad + \sum_{k=N_0+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_0} a_{mnkl}x_{kl} + (L+\varepsilon)\sum_{k=N_0+1}^{\infty}\sum_{l=N_0+1}^{\infty} a_{mnkl}
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. x dizisi sınırlı olduğundan,

$$\begin{aligned}
A_{mn}x \leq\ & \|x\| \textstyle\sum_{k=1}^{N_0}\sum_{l=1}^{N_0} a_{mnkl} + \|x\| \sum_{k=1}^{N_0}\sum_{l=N_0+1}^{\infty} a_{mnkl} \\
& + \|x\| \textstyle\sum_{k=N_0+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_0} a_{mnkl} \\
& + (L+\varepsilon) \textstyle\sum_{k=N_0+1}^{\infty}\sum_{l=N_0+1}^{\infty} a_{mnkl}
\end{aligned} \tag{3.1.5}$$

olur. A matrisi RH-regüler olduğundan,

$$P\text{-}\lim_{m,n} a_{mnkl} = 0, \ (\forall k, l \in \mathbb{N})$$

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{l=N_0+1}^{\infty} a_{mnkl} = 0, \ (\forall k \in \mathbb{N})$$

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{k=N_0+1}^{\infty} a_{mnkl} = 0, \ (\forall l \in \mathbb{N})$$

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{k=N_0+1}^{\infty} \sum_{l=N_0+1}^{\infty} a_{mnkl} = 1$$

olup, (3.1.5) eşitsizliğinde $P\text{-}\limsup$ alınırsa,

$$P\text{-}\limsup_{m,n} A_{mn}x \leq L + \varepsilon$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan istenen elde edilir.

$$P\text{-}\liminf_{m,n} A_{mn}x \geq P\text{-}\liminf_{m,n} x_{mn}$$

eşitsizliği için yukarıdaki tartışmalarda x yerine $-x = (-x_{kl})$ alınırsa ispat tamamlanır. □

Teorem 3.1.9. *4-boyutlu $A = (a_{mnkl})$ reel matris ve $x = (x_{kl})$ reel sınırlı çift dizisi için*

$$P\text{-}\lim_{m,n} a_{mnkl} = \alpha_{kl}, \ P\text{-}\liminf_{k,l} x_{kl} = l(x) \ ve \ P\text{-}\limsup_{k,l} x_{kl} = L(x)$$

olmak üzere;

$$\chi(A) = P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{k,l} a_{mnkl} - \sum_{k,l} P\text{-}\lim_{m,n} a_{mnkl}$$

tanımlı olsun. $\sum_{k,l} \alpha_{kl} x_{kl}$ *serisinin yakınsak olduğu durumlarda,*

(3.1.6) *maks*$\{k, l\} \geq N \in \mathbb{N}$ *bakımından* $a_{mnkl} \geq 0 \quad (m, n \in \mathbb{N})$

ise

(3.1.7) $$P\text{-}\liminf_{m,n} A_{mn}x \geq \chi(A)l(x) + \sum_{k,l} \alpha_{kl} x_{kl}$$

ve

(3.1.8) $$P\text{-}\limsup_{m,n} A_{mn}x \leq \chi(A)L(x) + \sum_{k,l} \alpha_{kl} x_{kl}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

(Not: $P\text{-}\liminf_{k,l} x_{kl} = -\infty$ durumunda, $\chi(A) > 0$ ise (3.1.6) şartı sağlanmaksızın (3.1.7) eşitsizliği sağlanır. Benzer şekilde $P\text{-}\limsup_{k,l} x_{kl} = \infty$ olursa (3.1.8) sağlanır.)

İSPAT. $P\text{-}\liminf_{k,l} x_{kl} = l(x)$ olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ sayısı için $k,l \geq N_0$ olan x_{kl} terimleri

$$x_{kl} \geq l(x) - \varepsilon$$

eşitsizliğini sağlar.

$$\begin{aligned}
A_{mn}x &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{mnkl}x_{kl} \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{mnkl}\Big[x_{kl} + (l(x)-\varepsilon) - (l(x)-\varepsilon)\Big] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{mnkl}[l(x)-\varepsilon] + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{mnkl}\Big[x_{kl} - (l(x)-\varepsilon)\Big] \\
&= [l(x)-\varepsilon]\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{mnkl} + \sum_{k=1}^{N_0}\sum_{l=1}^{N_0} a_{mnkl}\Big[x_{kl} - (l(x)-\varepsilon)\Big] \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N_0}\sum_{l=N_0+1}^{\infty} a_{mnkl}\Big[x_{kl} - (l(x)-\varepsilon)\Big] + \sum_{k=N_0+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_0} a_{mnkl}\Big[x_{kl} - (l(x)-\varepsilon)\Big] \\
&\quad + \sum_{k=N_0+1}^{\infty}\sum_{l=N_0+1}^{\infty} a_{mnkl}\Big[x_{kl} - (l(x)-\varepsilon)\Big]
\end{aligned}$$

eşitliğinde $a_{mnkl} \geq 0 \quad (m,n \in \mathbb{N})$ olduğu göz önüne alınırsa, beşinci toplam pozitif olduğundan,

$$\begin{aligned}
A_{mn}x &\geq [l(x)-\varepsilon]\left(\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{mnkl} - \sum_{k=1}^{N_0}\sum_{l=1}^{N_0} a_{mnkl}\right) + \sum_{k=1}^{N_0}\sum_{l=1}^{N_0} a_{mnkl}x_{kl} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{N_0}\sum_{l=N_0+1}^{\infty} a_{mnkl}\Big[x_{kl} - (l(x)-\varepsilon)\Big] + \sum_{k=N_0+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{N_0} a_{mnkl}\Big[x_{kl} - (l(x)-\varepsilon)\Big]
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitsizlikte $P\text{-}\liminf$ alınırsa, N_0 ve ε keyfi olduğundan

$$P\text{-}\liminf_{m,n} A_{mn}x \geq \chi(A)l(x) + \sum_{k,l} \alpha_{kl}x_{kl}$$

elde edilir. □

Benzer tartışmalarla (3.1.8) eşitsizliği de gösterilebilir.

TEOREM 3.1.10. *4-boyutlu $A = (a_{mnkl})$ reel matrisi için $\chi(A)$ tanımlı ve*

$$P\text{-}\lim_{m,n}\sum_{k,l}|a_{mnkl}| = P\text{-}\lim_{m,n}\sum_{k,l} a_{mnkl} = t$$

olsun. $\sum_{k,l}\alpha_{kl}x_{kl}$ yakınsak olan $x \in M_u$ için (3.1.7) ve (3.1.8) eşitsizlikleri geçerlidir.

İSPAT.

$$b_{mnkl}=\frac{|a_{mnkl}|+a_{mnkl}}{2} \quad \text{ve} \quad c_{mnkl}=\frac{|a_{mnkl}|-a_{mnkl}}{2}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda,

$$a_{mnkl}=b_{mnkl}-c_{mnkl},$$

$$P\text{-}\lim_{m,n}\sum_{k,l}b_{mnkl}=t$$

ve

$$P\text{-}\lim_{m,n}\sum_{k,l}c_{mnkl}=0$$

olur. $x=(x_{kl})$ çift dizisi sınırlı olduğundan, her $k,l\in\mathbb{N}$ için

$$|x_{kl}|<K$$

olacak şekilde pozitif bir K sayısı mevcuttur.

$$P\text{-}\liminf_{k,l}x_{kl}=l(x) \quad \text{ve} \quad P\text{-}\limsup_{k,l}x_{kl}=L(x)$$

olsun. Bu durumda, her $\varepsilon>0$ için $M,N>q$ sayıları vardır ki

$$x_{kl}\geq l(x)-\varepsilon, \quad (k,l>N)$$

ve

$$\sum_{k,l}c_{mnkl}<\frac{\varepsilon}{K+d+\varepsilon}, \quad (m,n>M \quad \text{ve} \quad d=\text{maks}(|l|,|L|))$$

$r>\max\{M,N\}$ olsun. $m,n>r$ için

$$\begin{aligned}
A_{mn}x &= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{mnkl}x_{kl}\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{mnkl}\Big[x_{kl}+(l(x)-\varepsilon)-(l(x)-\varepsilon)\Big]\\
&= \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{mnkl}[l(x)-\varepsilon]+\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}a_{mnkl}\Big[x_{kl}-(l(x)-\varepsilon)\Big]\\
&= [l(x)-\varepsilon]\sum_{k,l}a_{mnkl}+\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=1}^{r}a_{mnkl}\Big[x_{kl}-(l(x)-\varepsilon)\Big]\\
&\quad+\sum_{k=1}^{r}\sum_{l=r+1}^{\infty}a_{mnkl}\Big[x_{kl}-(l(x)-\varepsilon)\Big]+\sum_{k=r+1}^{\infty}\sum_{l=1}^{r}a_{mnkl}\Big[x_{kl}-(l(x)-\varepsilon)\Big]\\
&\quad+\sum_{k=r+1}^{\infty}\sum_{l=r+1}^{\infty}b_{mnkl}\Big[x_{kl}-(l(x)-\varepsilon)\Big]-\sum_{k=r+1}^{\infty}\sum_{l=r+1}^{\infty}c_{mnkl}\Big[x_{kl}-(l(x)-\varepsilon)\Big]
\end{aligned}$$

eşitliği yazılabilir. Bu eşitlikte,

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}\sum_{l=r+1}^{\infty}b_{mnkl}\Big[x_{kl}-(l(x)-\varepsilon)\Big]\geq 0,$$

$$\sum_{k=r+1}^{\infty}\sum_{l=r+1}^{\infty} c_{mnkl}\Big[x_{kl}-(l(x)-\varepsilon)\Big] < [K+|l(x)|+\varepsilon]\sum_{k=r+1}^{\infty}\sum_{l=r+1}^{\infty} c_{mnkl} < \varepsilon,$$

$$\sum_{l=r+1}^{\infty} a_{mnkl} < \varepsilon$$

ve

$$\sum_{k=r+1}^{\infty} a_{mnkl} < \varepsilon$$

olduğundan,

$$P\text{-}\liminf_{m,n} A_{mn}x \geq [l(x)-\varepsilon]\left(t-\sum_{k,l}\alpha_{kl}\right)+\sum_{k,l}\alpha_{kl}x_{kl}+\varepsilon \tag{3.1.9}$$

elde edilir.

Benzer tartışmalarla (3.1.8) eşitsizliği de gösterilebilir. □

3.2. $Q_2(\alpha)$ Matris Sınıfı

Bu kısımda, Rath, Tripathy **[19]** tarafından tek dizilerde verilen $Q(\alpha)$ matris sınıfını çift diziler bakımından $Q_2(\alpha)$ matris sınıfı tanımlanarak, bazı çekirdek teoremleri verilecektir.

$I=[0,1]$ olmak üzere, $\alpha \in I$ olsun.

$$\text{Her } \ m,n,k,l \in \mathbb{N} \text{ için } a_{mnkl} \geq 0,$$

$$\text{her } \ m,n \in \mathbb{N} \text{ için } k,l \in \mathbb{N} \text{ vardır öyle ki } a_{mnkl}=\alpha$$

ve

$$\text{her } \ k,l \in \mathbb{N} \text{ için } m,n \in \mathbb{N} \text{ vardır öyle ki } a_{mnkl}=\alpha$$

şartlarını sağlayan RH-regüler $A=(a_{mnkl})$ matrislerinin sınıfını $Q_2(\alpha)$ ile gösterelim.

Teorem 3.2.1. *$x=(x_{kl})$ sınırlı bir çift dizi, $\alpha \in [0,\frac{1}{2}]$ ve $\lambda \in I$ olsun. Bu durumda, $x=(x_{kl})$ dizisini $\lambda a+(1-\lambda)b$ ye limitleyen bir $A \in Q_2(\alpha)$ matrisi vardır. Burada $a=\alpha L(x)+(1-\alpha)l(x)$ ve $b=\alpha l(x)+(1-\alpha)L(x)$ dir.*

İspat. $c=\lambda+\alpha-2\lambda\alpha \in I$ dersek, $\lambda a+(1-\lambda)b=cl(x)+(1-c)L(x)$ olur.

Her $k,l \in \mathbb{N}$ için,

$$l(x)-\varepsilon_{kl} \leq x_{kl} \leq L(x)+\varepsilon_{kl}$$

olacak şekilde sıfıra P-yakınsak ε_{kl} bulunabilir.

Böylece her k,l için $\delta_{kl} \geq 0, \lambda_{kl} \geq 0$ ve $\delta_{kl}+\lambda_{kl}=1$ olacak şekildeki (δ_{kl}) ve (λ_{kl}) dizileri için

$$x_{kl}=\delta_{kl}(l(x)-\varepsilon_{kl})+\lambda_{kl}(L(x)+\varepsilon_{kl})$$

yazılabilir. $\alpha_{kl} = c - \alpha\delta_{kl}$ ve $\beta_{kl} = 1 - c - \alpha\lambda_{kl}$ yazarsak

$$0 \leq \alpha_{kl} \leq 1 - \alpha \text{ ve } \beta_{kl} = 1 - \alpha - \alpha_{kl} \geq 0$$

olduğu görülür. Doğal sayıların (p_k, q_l) ve (r_k, s_l) artan çift dizisi, her $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$(p_k, q_l) \neq (k, l), \quad (p_k, q_l) \neq (r_k, s_l), \quad (r_k, s_l) \neq (k, l)$$

ve

$$P\text{-}\lim_{k,l} x_{p_k, q_l} = l(x), \quad P\text{-}\lim_{k,l} x_{r_k, s_l} = L(x)$$

şartlarını sağlasın.

Şimdi de bir $A \in Q_2(\alpha)$ matrisini

$$a_{klmn} = \begin{cases} \alpha & , \ (m,n) = (k,l) \\ \alpha_{kl} & , \ (m,n) = (p_k, q_l) \\ \beta_{kl} & , \ (m,n) = (r_k, s_l) \\ 0 & , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda;

$$\begin{aligned} \sum_{m,n=1,1}^{\infty,\infty} a_{klmn} x_{mn} &= \alpha\delta_{kl}(l(x) - \varepsilon_{kl}) + \alpha\lambda_{kl}(L(x) + \varepsilon_{kl}) + \alpha_{kl} l(x) \\ &\quad + \beta_{kl} L(x) + \alpha_{kl}(x_{p_k, q_l} - l(x)) + \beta_{kl}(x_{r_k, s_l} - L(x)) \\ &= c l(x) + (1-c)L(x) - \varepsilon_{kl}\alpha\delta_{kl} + \varepsilon_{kl}\alpha\lambda_{kl} \\ &\quad + \alpha_{kl}(x_{p_k, q_l} - l(x)) + \beta_{kl}(x_{r_k, s_l} - L(x)) \end{aligned}$$

Bu eşitlikte, $k, l \longrightarrow \infty$ için P-limit alınırsa,

$$Ax \longrightarrow c l(x) + (1-c)L(x)$$

elde edilir. □

Teorem 3.2.2. *$\alpha \in I$ ve $x = (x_{kl})$ bir $A \in Q_2(\alpha)$ matrisi tarafından limitlenebilen sınırlı bir dizi ise,*

$$a \leq P\text{-}\lim_{m,n} A_{mn} x \leq b$$

olur.

İspat. $\alpha = 0$ ise, $a = l(x)$, $b = L(x)$ olur ki sonuç açıktır.

$\alpha > 0$ olsun.

$$P\text{-}\lim_{k,l} x_{p_k q_l} = l(x), \quad P\text{-}\lim_{k,l} x_{r_k s_l} = L(x)$$

olacak şekilde doğal sayıların (p_k, q_l) ve (r_k, s_l) indis dizileri olsun. Bu durumda, her k, l için

$$a_{t_k z_l p_k q_l} = \alpha \ \ ve \ \ a_{d_k h_l r_k s_l} = \alpha$$

olacak şekilde $(t_k, z_l), (d_k, h_l)$ doğal sayıların indis dizilerini bulabiliriz.

$$k, l \longrightarrow \infty \text{ iken } (t_k, z_l) \longrightarrow \infty, \quad (d_k, h_l) \longrightarrow \infty$$

ve A matrisi RH-regüler olduğundan,

$$\sum_{(m,n) \neq (p_k, q_l)} a_{t_k z_l mn} \longrightarrow 1 - \alpha$$

bulunur. Her $\varepsilon > 0$ için

$$x_{kl} < L(x) + \varepsilon$$

ve

$$\sum_{(m,n) \neq (t_k, z_l)} a_{t_k z_l mn} < 1 - \alpha + \varepsilon$$

olacak şekilde $(m, n) > (m_1, n_1)$ ve $(k, l) > (k_1, l_1)$ olan (m_1, n_1) ve (k_1, l_1) ikilileri bulunabilir.

Bu durumda, $(k, l) > (k_1, l_1)$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{m,n=1,1}^{\infty,\infty} a_{t_k z_l mn} x_{mn} &= \alpha x_{p_k, q_l} + \sum_{\substack{(m,n) \neq (p_k, q_l) \\ m \leq m_1 \cup n \leq n_1}} a_{t_k z_l mn} x_{mn} + \sum_{\substack{(m,n) \neq (p_k, q_l) \\ (m,n) > (m_1, n_1)}} a_{t_k z_l mn} x_{mn} \\
&< \alpha x_{p_k, q_l} + \sum_{\substack{(m,n) \neq (p_k, q_l) \\ m \leq m_1 \cup n \leq n_1}} a_{t_k z_l mn} x_{mn} \\
&\quad + \sum_{\substack{(m,n) \neq (p_k, q_l) \\ (m,n) > (m_1, n_1)}} a_{t_k z_l mn} x_{mn} + [L(x) + \varepsilon](1 - \alpha + \varepsilon)
\end{aligned}$$

yazılır. $k, l \longrightarrow \infty$ için limit alınırsa,

$$P\text{-} \lim_{k,l} (Ax)_{kl} \leq \alpha l(x) + (1 - \alpha) L(x)$$

elde edilir.

$(p_k, q_l), (t_k, z_l)$ yerine $(r_k, s_l), (d_k, h_l)$ alarak aynı şekilde,

$$P\text{-} \lim_{k,l} (Ax)_{kl} \geq \alpha L(x) + (1 - \alpha) l(x)$$

olduğu gösterilebilir. □

Teorem 3.2.3. *$\alpha > \frac{1}{2}$ ve $A \in Q_2(\alpha)$ ise A matrisi hiç bir sınırlı reel çift diziyi limitleyemez.*

İspat. A matrisi, bir $x = (x_{kl})$ sınırlı reel çift dizisini limitleyebilsin.

$$P\text{-} \liminf_{k,l} x_{kl} = l \text{ ve } P\text{-} \limsup_{k,l} x_{kl} = L$$

ise Teorem 3.2.2 den;

$$\alpha L + (1 - \alpha) l \leq \alpha l + (1 - \alpha) L$$

yani,

$$(2\alpha - 1)L \leq (2\alpha - 1)l$$

çelişkisi elde edilmiş olur. Bu ise istenendir. $\square$

Tanım 3.2.1. $a^{-}_{mnkl} = \text{maks}\{-a_{mnkl}, 0\}$ olmak üzere,

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum a^{-}_{mnkl} = 0$$

ise, 4- boyutlu $A = (a_{mnkl})$ matrisine *hemen hemen pozitif matris* denir.

Teorem 3.2.4. *4- boyutlu $B = (b_{mnkl})$ matrisi RH-regüler ve hemen hemen pozitif olsun. Bu durumda, $x \in M_u$ için*

$$P\text{-}\limsup Ax \leq P\text{-}\liminf Bx$$

olacak şekilde bir A matrisi yoktur.

İspat. Bu şartlara uygun bir A matrisinin olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$P\text{-}\limsup Bx \leq P\text{-}\limsup x$$

olup

$$P\text{-}\limsup Ax \leq P\text{-}\liminf Bx \leq P\text{-}\limsup Bx \leq P\text{-}\limsup x$$

eşitsizliği sağlanır. Bu ise Teorem 3.2 [**35**] den, A matrisinin regüler olduğunu gösterir. Corollary 3.1 [**40**] den en az bir $z \in M_u$ için

$$P\text{-}\liminf Az \neq P\text{-}\limsup Az$$

dir.

$$P\text{-}\limsup Ax \leq P\text{-}\limsup Bx$$

olduğundan (x yerine $-x$ yazarsak)

$$P\text{-}\liminf Bx \leq P\text{-}\liminf Ax$$

elde ederiz. Böylece,

$$P\text{-}\liminf Bz < P\text{-}\limsup Az \leq P\text{-}\liminf Bz$$

olur ki bu bir çelişkidir. $\square$

4. CESÀRO ÇİFT DİZİ UZAYLARI

Bu bölümde, Cesàro Pringsheim, Cesàro sınırlı Pringsheim ve Cesàro sınırlı ve sıfıra Pringsheim yakınsak çift dizilerin cümlesi olarak tanımlanan Ces_p, Ces_{bp} ve Ces_{bp0} cümlelerinin; lineer uzay ve tam yarınormlu uzay teşkil ettikleri ve sırasıyla $\mathcal{C}_p$, $\mathcal{C}_{bp}$ ve $\mathcal{C}_{0bp}$ uzaylarına izomorf oldukları gösterilmiştir. Ayrıca Ces_{bp} uzayının $\beta(bp)$-duali ve Ces_p uzayının $\beta(bp)$- ve $\beta(p)$- dualleri hesaplanmıştır.

4.1. Ces_p, Ces_{bp} ve Ces_{bp0} Uzayları

Bu kısımda, Ces_p, Ces_{bp} ve Ces_{bp0} cümleleri tanımlanarak bazı özellikleri incelenmiştir.

Tanım 4.1.1. Birinci mertebeden Cesàro Pringsheim yakınsak çift dizilerin cümlesi

$$Ces_p = \{x = (x_{jk}) : C_1 x \in \mathcal{C}_p\},$$

Cesàro sınırlı Pringsheim yakınsak çift dizilerin cümlesi

$$Ces_{bp} = \{x = (x_{jk}) : C_1 x \in \mathcal{C}_{bp}\},$$

ve Cesàro sınırlı ve sıfıra Pringsheim yakınsak çift dizilerin cümlesi

$$Ces_{bp0} = \{x = (x_{jk}) : C_1 x \in \mathcal{C}_{0bp}\},$$

olarak tanımlanır. Burada

$$C_1 x = \frac{1}{mn} \sum_{j,k}^{m,n} x_{jk}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.1. *Ces_p cümlesi dizilerin toplama ve skalarla çarpma işlemine göre bir lineer uzaydır.*

İspat. $x = (x_{jk}),\ y = (y_{jk}) \in Ces_p$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. Bu durumda,

$$P\text{-}\lim_{m,n} \left| \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{jk} - L_1 \right| = 0$$

ve

$$P\text{-}\lim_{m,n} \left| \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} y_{jk} - L_2 \right| = 0$$

eşitliklerini sağlayan $L_1, L_2 \in \mathbb{C}$ sayıları vardır. Buna göre,

$$\begin{aligned}
& P\text{-}\lim_{m,n}\left|\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\alpha x_{jk}+y_{jk}-(\alpha L_1+L_2)\right| \\
= & P\text{-}\lim_{m,n}\left|\alpha\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}x_{jk}-L_1+\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}y_{jk}-L_2\right| \\
\leq & P\text{-}\lim_{m,n}\left\{|\alpha|\left|\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}x_{jk}-L_1\right|+\left|\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}y_{jk}-L_2\right|\right\} \\
\leq & |\alpha| P\text{-}\lim_{m,n}\left|\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}x_{jk}-L_1\right|+P\text{-}\lim_{m,n}\left|\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}y_{jk}-L_2\right|=0
\end{aligned}$$

olduğundan, $P\text{-}\lim C_1(\alpha x+y)=\alpha L_1+L_2$ ve dolayısıyla $\alpha x+y \in Ces_p$ bulunur. O hâlde, Ces_p cümlesi bir lineer uzaydır. □

Teorem 4.1.2. *Ces_p uzayı, $\mathcal{C}_p$ uzayına lineer olarak izomorftur.*

İspat. Bunun için Ces_p ve $\mathcal{C}_p$ uzayları arasında lineer, birebir ve örten bir dönüşüm tanımlamalıyız.

$$\begin{aligned}
T \ :\ & Ces_p \to \mathcal{C}_p \\
& x \mapsto Tx=\left(\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}x_{jk}\right)=(s_{mn})=s
\end{aligned}$$

dönüşümünü göz önüne alalım.

(i) $x=(x_{jk}),\ y=(y_{jk}) \in Ces_p$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için;

$$\begin{aligned}
T(\alpha x+y) &= \left(\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}\alpha x_{jk}+y_{jk}\right) \\
&= \alpha\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}x_{jk}+\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}y_{jk} \\
&= \alpha Tx+Ty
\end{aligned}$$

olduğundan T dönüşümü lineerdir.

(ii) $Tx=0$ denklemi,

$$\begin{bmatrix}
x_{11} & \frac{1}{2}(x_{11}+x_{12}) & \frac{1}{3}(x_{11}+x_{12}+x_{13}) & \cdots \\
\frac{1}{2}(x_{11}+x_{21}) & \frac{1}{4}(x_{11}+x_{12}+x_{21}+x_{22}) & \frac{1}{6}(x_{11}+x_{12}+x_{13}+x_{21}+x_{22}+x_{23}) & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
\frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m}x_{j1} & \frac{1}{2m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{2}x_{jk} & \frac{1}{3m}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{3}x_{jk} & \cdots \\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots
\end{bmatrix}=0$$

şeklinde olup, buradan

$$\left.\begin{array}{cccc} x_{11}=0 & x_{12}=0 & x_{13}=0 & \dots \\ x_{21}=0 & x_{22}=0 & x_{23}=0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array}\right\} \Longrightarrow x=0$$

bulunur ki, bu da T dönüşümünün birebir olduğunu gösterir.

(iii) $s \in \mathcal{C}_p$ alalım. Bu durumda; $x = (x_{jk})$ dizisini, $s_{0,0} = 0$, $s_{0,1} = 0$ ve $s_{1,0} = 0$ olmak üzere,

$$x_{jk} = jks_{jk} - (j-1)ks_{j-1,k} - j(k-1)s_{j,k-1} + (j-1)(k-1)s_{j-1,k-1} \quad (j,k \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımladığımızda, genel terimi x_{jk} olan serinin $m.$, $n.$ kısmi toplamı,

$$\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{jk} = s_{mn}$$

bulunur. $s \in \mathcal{C}_p$ olduğundan,

$$P\text{-}\lim_{m,n}\left|\frac{1}{mn}\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} x_{jk} - L\right| = 0$$

eşitliğini sağlayan bir $L \in \mathbb{C}$ sayısı mevcuttur. Bu ise, $x \in Ces_p$ olduğunu gösterir. O halde, T dönüşümü örtendir.

(i)-(iii) sağlandığından T bir lineer izomorfizm olup, Ces_p ve $\mathcal{C}_p$ uzayları da lineer izomorfik uzaylardır. □

Teorem 4.1.3. *Ces_p lineer uzayı*

$$\| x \|_\infty = \lim_{i\to\infty}\left(\sup_{m,n\geq i}\left|\frac{1}{mn}\sum_{j,k=1}^{m,n} x_{jk}\right|\right)$$

yarınormu ile tam yarınormlu uzaydır.

İspat. Önce Ces_p uzayının, $\|\cdot\|_\infty$ ile yarınormlu uzay teşkil ettiğini ispatlayalım. Bunun için yarınorm şartlarının sağlandığını görelim.

YN1) Mutlak değerli ifadeden dolayı $\| x \|_\infty \geq 0$ özelliği sağlanır.

YN2) $\| 0 \|_\infty = 0$ olur.

YN3) $x = (x_{jk}) \in Ces_p$ ve λ skaları için,

$$\begin{aligned} \| \lambda x \|_\infty &= \lim_{i\to\infty}\left(\sup_{m,n\geq i}\left|\frac{1}{mn}\sum_{j,k=1}^{m,n} \lambda x_{jk}\right|\right) \\ &= |\lambda| \lim_{i\to\infty}\left(\sup_{m,n\geq i}\left|\frac{1}{mn}\sum_{j,k=1}^{m,n} x_{jk}\right|\right) \\ &= |\lambda| \, \| x \|_\infty \end{aligned}$$

bulunur.

YN4) Herhangi $x = (x_{jk}), y = (y_{jk}) \in Ces_p$ için

$$\begin{aligned}
\| x + y \|_\infty &= \lim_{i\to\infty}\left(\sup_{m,n\geq i}\left|\frac{1}{mn}\sum_{j,k=1}^{m,n}(x_{jk}+y_{jk})\right|\right) \\
&\leq \lim_{i\to\infty}\left(\sup_{m,n\geq i}\left|\frac{1}{mn}\sum_{j,k=1}^{m,n}x_{jk}\right|\right) + \lim_{i\to\infty}\left(\sup_{m,n\geq i}\left|\frac{1}{mn}\sum_{j,k=1}^{m,n}y_{jk}\right|\right) \\
&= \| x \|_\infty + \| y \|_\infty
\end{aligned}$$

olduğundan dolayı da üçgen eşitsizliği sağlanır.

Ces_p uzayı üzerindeki $\| \cdot \|_\infty$ fonksiyoneli (YN1)-(YN4) aksiyomlarını sağladığından bir yarınorm olup, $(Ces_p, \| \cdot \|_\infty)$ ikilisi bir yarınormlu uzaydır.

Şimdi Ces_p uzayının tam olduğunu gösterelim. $x^l = \left(x^l_{jk}\right)$ dizisi Ces_p uzayında herhangi bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için $l, r > n_0$ olduğunda,

$$\| x^l - x^r \| < \varepsilon \tag{4.1.1}$$

olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ sayısı vardır. Buradan,

$$s^l_{mn} = \frac{1}{mn}\sum_{j,k=1}^{m,n} x^l_{jk}$$

olmak üzere, sabit her $m, n \geq n_1$ çifti ve her $l, r > n_0$ için

$$\sup_{m,n\geq n_1} |s^l_{mn} - s^r_{mn}| < \varepsilon$$

dolayısıyla

$$|s^l_{mn} - s^r_{mn}| < \varepsilon \tag{4.1.2}$$

yazabiliriz ki, bu $(s^l_{mn})_{l\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\mathbb{C}$ cisminde bir Cauchy dizisi olduğunu gösterir. $\mathbb{C}$ cisminde her Cauchy dizisi yakınsak olduğundan, her bir sabit $m, n \geq n_1$ için

$$\lim_l s^l_{mn} = s_{mn} \tag{4.1.3}$$

olacak şekilde bir s_{mn} kompleks sayısı mevcuttur. Bu şekilde elde ettiğimiz

$$s_{mn} = \frac{1}{mn}\sum_{j,k=1}^{m,n} x_{jk}$$

kompleks sayılarını kullanarak $s = (s_{mn})$ dizisini oluşturalım. (4.1.2) eşitsizliğinde $m, n \geq n_1$ olduğunda $r \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\lim_{r\to\infty}\sup_{m,n\geq n_1}|s^l_{mn} - s^r_{mn}| = \sup_{m,n\geq n_1}|s^l_{mn} - s_{mn}| < \varepsilon$$

olduğundan,

$$\| x^l - x \| < \varepsilon$$

elde edilir ki, bu $s^l \to s$ olması demektir. Şimdi, $s = (s_{mn})$ dizisinin $\mathcal{C}_p$ uzayının bir elemanı olduğunu gösterelim. s dizisi, $m, n, p, r > n_1$ olduğunda,

$$\begin{aligned} |s_{mn} - s_{pq}| &= \left|s_{mn} - s^l_{mn} + s^l_{mn} - s^l_{pq} + s^l_{pq} - s_{pq}\right| \\ &\leq \left|s_{mn} - s^l_{mn}\right| + \left|s^l_{mn} - s^l_{pq}\right| + \left|s^l_{pq} - s_{pq}\right| \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliği sağladığından dolayı, bir Cauchy dizisidir. O halde $x = (x_{jk}) \in Ces_p$ bulunur. □

TEOREM 4.1.4. *$\mathcal{C}_{bp}$ uzayı, Ces_p uzayının bir alt uzayıdır.*

İSPAT. C_1 Cesàro ortalaması RH-regüler bir matris olduğundan, $x \in \mathcal{C}_{bp}$ dizisi için

$$C_1 x \in \mathcal{C}_p$$

olacaktır. Bu ise $x \in Ces_p$ olduğunu gösterir. O halde,

$$\mathcal{C}_{bp} \subset Ces_p$$

kapsaması geçerlidir. □

Cesàro ortalaması Pringsheim anlamında yakınsak dizi oluşturan Ces_p uzayı ile ilgili teoremlerin ispatlarındaki tartışmalara paralel olarak, aşağıda vereceğimiz Cesàro ortalamaları sınırlı Pringsheim ve sınırlı ve sıfıra Pringsheim yakınsak dizi teşkil eden Ces_{bp} ve Ces_{bp0} dizi uzayları üzerindeki teoremler de ispatlanabilir. Bu sebeple, teoremleri ispatsız olarak vereceğiz.

TEOREM 4.1.5. *Ces_{bp} ve Ces_{bp0} cümleleri, dizilerin toplama ve skalarla çarpma işlemine göre birer lineer uzaydırlar.*

TEOREM 4.1.6. *Ces_{bp} ve Ces_{bp0} lineer uzayları, sırasıyla, $\mathcal{C}_{bp}$ ve $\mathcal{C}_{0bp}$ uzaylarına lineer olarak izomorfturlar.*

TEOREM 4.1.7. *Ces_{bp} ve Ces_{bp0} lineer uzayları*

$$\| x \|_\infty = \sup_{m,n \geq 1} \left| \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} x_{jk} \right|$$

normu ile Banach uzay teşkil ederler.

4.2. Dualler

Bu kısımda, Ces_{bp} uzayının $\beta(bp)$-duali ve Ces_p uzayının $\beta(bp)$- ve $\beta(p)$- duallerini hesaplayacağız.

Teorem 4.2.1. *Ces_{bp} uzayının $\beta(bp)$-duali,*

$$\Upsilon_{bp-bp} = \Big\{a \in \Omega : \sum_{k,l} |kl\triangle_{11}a_{kl}| < \infty,\ (kl\Delta_{10}a_{kl})_k,\ (kl\Delta_{01}a_{kl})_l \in \ell_1,$$
$$(kla_{kl}) \in \mathcal{M}_u, (a_{kl}) \in \mathcal{CS}_p\Big\}$$

cümlesidir. Burada, l_1 ile mutlak yakınsak seri oluşturan tek dizilerin uzayı gösterilmektedir.

İspat. Ces_{bp} uzayındaki herhangi bir $x = (x_{kl})$ çift dizisini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$s_{mn} = \frac{1}{mn}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} x_{kl}$$

olmak üzere $s = (s_{mn})$ çift dizisi, Teorem 4.1.6 dolayısıyla $\mathcal{C}_{bp}$ uzayının elemanıdır. Şimdi, Ω uzayındaki bir $a = (a_{kl})$ çift dizisi için

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}x_{kl} \tag{4.2.1}$$

serisinin bp-yakınsak olması için gerek ve yeter şartları araştıralım.

(4.2.1) serisinin $m.$, $n.$ kısmi toplamlar dizisi için,

$$\begin{aligned} z_{mn} &= \textstyle\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}x_{kl} \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1} s_{kl}(kl\triangle_{11}a_{kl}) \\ &\quad + \textstyle\sum_{k=1}^{m-1} s_{kn}(kn\triangle_{10}a_{kn}) + \sum_{l=1}^{n-1} s_{ml}(ml\triangle_{01}a_{ml}) \\ &\quad + s_{mn}(mna_{mn}) \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

eşitliği geçerlidir. 4-boyutlu $B = (b_{mnkl})$ matrisini

$$b_{mnkl} = \begin{cases} kl\triangle_{11}a_{kl} & , \quad k \le m-1 \quad ve \quad l \le n-1 \\ kn\triangle_{10}a_{kn} & , \quad k \le m-1 \quad ve \quad l = n \\ ml\triangle_{01}a_{ml} & , \quad k = m \quad ve \quad l \le n-1 \\ mna_{mn} & , \quad k = m \quad ve \quad l = n \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlarsak, (4.2.2) eşitliğini

$$z_{mn} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{mnkl}s_{kl} = (Bs)_{mn} \tag{4.2.3}$$

olarak yazabiliriz. Bu durumda, (4.2.3) eşitliğinden her $x \in Ces_{bp}$ için $(a_{kl}x_{kl})$ çarpım dizisinin sınırlı P-yakınsak bir seri oluşturması için gerek ve yeter şart $B = (b_{mnkl})$ matrisinin $(\mathcal{C}_{bp}, \mathcal{C}_{bp})$ sınıfında bulunmasıdır çift gerektirmesini okuruz. Şimdi, $B \in$

$(\mathcal{C}_{bp}, \mathcal{C}_{bp})$ olması için gerek ve yeter şartları, Teorem 2.3.2'den elde edelim. (2.3.1) şartından,

$$\begin{aligned}\sup_{m,n\geq 1}\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}|b_{mnkl}| &= \sup_{m,n\geq 1}\left\{\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{l=1}^{n-1}|kl\triangle_{11}a_{kl}| + \sum_{k=1}^{m-1}|kn\triangle_{10}a_{kn}|\right. \\ &\quad \left. + \sum_{l=1}^{n-1}|ml\triangle_{01}a_{ml}| + |mna_{mn}|\right\} < \infty,\end{aligned}$$

(2.3.2) şartından,

$$P\text{-}\lim_{m,n} b_{mnkl} = kl\triangle_{11}a_{kl},$$

(2.3.4) şartından,

$$P\text{-}\lim_{m,n}\sum_{k,l} b_{mnkl} = \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl}$$

ve (2.3.5) şartından da,

$$P\text{-}\lim_{m,n}\sum_{k}|b_{mnkl} - b_{kl}| = P\text{-}\lim_{m,n}\sum_{k=m}^{\infty}|kl\Delta_{11}a_{kl}| = 0 \tag{4.2.4}$$

$$P\text{-}\lim_{m,n}\sum_{k}|b_{mnkl} - b_{kl}| = P\text{-}\lim_{m,n}\sum_{l=n}^{\infty}|kl\Delta_{11}a_{kl}| = 0 \tag{4.2.5}$$

bulunur. Böylece, (2.3.1)-(2.3.5) şartlarından,

$$\sum_{k,l}|kl\triangle_{11}a_{kl}| < \infty, \tag{4.2.6}$$

$$\sup_{n}\sum_{k}|kn\triangle_{10}a_{kn}| < \infty \tag{4.2.7}$$

ve

$$\sup_{m}\sum_{l}|ml\triangle_{01}a_{ml}| < \infty \tag{4.2.8}$$

elde edilir.

(4.2.7) ve (4.2.8) ifadeleri dikkate alınırsa, (4.2.4) ve (4.2.5) eşitliklerinin sağlandığı görülür.

Böylece, herhangi bir $x \in Ces_{bp}$ dizisi için (4.2.1) serisinin bp-yakınsak olması için $a \in \Omega$ dizisinin taşıması gereken şartların,

$$\sum_{k,l}|kl\triangle_{11}a_{kl}| < \infty,$$

$$(kl\Delta_{10}a_{kl})_k \in \ell_1,$$

$$(kl\Delta_{01}a_{kl})_l \in \ell_1,$$

$$(kla_{kl}) \in \mathcal{M}_u$$

ve

$$(a_{kl}) \in \mathcal{CS}_p$$

olduğu anlaşılır. Buna göre, Ces_{bp} uzayının $\beta(bp)$-dualinin Υ_{bp-bp} cümlesi olduğu ispatlanmış olur.

$\square$

Aşağıdaki teoremlerin ispatları, Teorem 4.2.1'in ispatı gibi yapılabileceğinden, teoremler ispatsız verilecektir.

Teorem 4.2.2. *Ces_p uzayının $\beta(bp)$-duali, Υ_{bp-bp} cümlesidir.*

Teorem 4.2.3. *Ces_p uzayının $\beta(p)$-duali, Υ_{bp-bp} cümlesidir.*

5. ÇİFT DİZİLERDE CESÀRO ÇEKİRDEK TEOREMLERİ

Bu bölümde; Cesàro çift dizilere tanımlı $(\mathcal{C}_{bp}, Ces_{bp})_{reg}$, $(st_2 \cap M_u, Ces_{bp})_{reg}$, $(V_\sigma, Ces_{bp})_{reg}$ ve (M_u, Ces_{bp0}) matris sınıfları karakterize edilerek, Cesàro çekirdek ile ilgili bazı teoremler verilecektir.

5.1. Bazı Matris Sınıfları Karakterizasyonu

Bu kısımda, çekirdek teoremlerinde gerekli olan bazı matris sınıfları karakterize edilecektir.

Teorem 5.1.1. *$A = (a_{mnkl})$ olmak üzere, $A \in (M_u, Ces_{bp0})$ olması için*

$$\|A\| = \sup_{m,n} \sum_{k,l} |a_{mnkl}| < \infty \tag{5.1.1}$$

$$P\text{-}\lim_{m,n} \alpha_{mnkl} = 0 \ \ (k, l \in \mathbb{N}) \tag{5.1.2}$$

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{k} \alpha_{mnkl} = 0 \ \ (l \in \mathbb{N}) \tag{5.1.3}$$

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{l} \alpha_{mnkl} = 0 \ \ (k \in \mathbb{N}) \tag{5.1.4}$$

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{k,l} |\alpha_{mnkl}| = 0 \tag{5.1.5}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir. Burada,

$$\alpha_{mnkl} = \frac{1}{mn} \sum_{r,s=1}^{m,n} a_{rskl}$$

şeklinde tanımlıdır.

İspat. $A \in (M_u, Ces_{bp0})$ olsun. Bu durumda, her $x = (x_{kl}) \in M_u$ için Ax mevcut ve $Ax \in Ces_{bp0}$ önermeleri geçerlidir.

$$x_{kl} = \begin{cases} sgn\, \alpha_{m_i, n_j, kl} & , \ \ k_{i-1} < k \le k_i \ , \ l_{j-1} < l \le l_j \\ 0 & , \ \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlanan $x = (x_{kl})$ çift dizisi alınırsa,

$$\begin{aligned} P\text{-}\lim C_1(Ax) &= P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{j,k} \alpha_{mnjk} x_{jk} \\ &= P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{j,k} |\alpha_{mnjk}| \\ &= 0 \end{aligned}$$

bulunur ki bu (5.1.5) şartının sağlandığını gösterir. Ax mevcut olduğundan (5.1.1) şartı sağlanır. $(e_{ij}^{kl}), (e^l), (e_k)$ dizileri için (5.1.2), (5.1.3) ve (5.1.4) şartları sağlanır. Yeterlilik kısmı ise açıktır. □

Teorem 5.1.2. *$A = (a_{mnkl})$ matrisinin $(st_2 \cap M_u, Ces_{bp})_{reg}$ sınıfında bulunması için*

$$A \in (\mathcal{C}_{bp}, Ces_{bp})_{reg} \tag{5.1.6}$$

ve

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{k,l \in E} |\alpha_{mnkl}| = 0 \tag{5.1.7}$$

şartlarının sağlanması gerek ve yeterdir. Burada $E \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ cümlesi $\delta_2(E) = 0$ şeklindeki cümledir.

İspat. $A \in (st_2 \cap M_u, Ces_{bp0})$ olsun. $\mathcal{C}_{bp} \subset st_2 \cap M_u$ olduğundan $A \in (\mathcal{C}_{bp}, Ces_{bp})_{reg}$ sağlanır. Bir $x = (x_{jk}) \in M_u$ dizisi için, $\delta_2(E) = 0$ olmak üzere, $z = (z_{jk})$ dizisini

$$z_{jk} = \begin{cases} x_{jk} & , \quad j,k \in E \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda,

$$st_2\text{-}\lim z = 0$$

bulunacağından, Az dizisi Ces_{bp0} cümlesinde olur.

$$A_{mn}z = \sum_{j,k} a_{mnjk} z_{jk}$$

olup,

$$\begin{aligned}
(C_1)_{mn}Az &= \frac{1}{mn} \sum_{r,s=1}^{m,n} (Az)_{r,s} \\
&= \frac{1}{mn} \sum_{r,s=1}^{m,n} \left(\sum_{j,k} a_{rsjk} z_{jk} \right) \\
&= \sum_{j,k} \left(\frac{1}{mn} \sum_{r,s=1}^{m,n} a_{rsjk} \right) z_{jk} \\
&= \sum_{j,k} \alpha_{mnjk} z_{jk}
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir.

$$b_{mnjk} = \begin{cases} \alpha_{mnjk} & , \quad j,k \in E \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere, $B = (b_{mnjk})$ matrisi tanımlanırsa, $B \in (M_u, \mathcal{C}_{0bp})$ olduğu görülür. Lemma 3.2 **[32]** (3.4) şartından,

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{j,k \in E} |\alpha_{mnjk}| = 0$$

elde edilir.

Tersine, $A \in (\mathcal{C}_{bp}, Ces_{bp})_{reg}$ olsun ve (5.1.7) şartı sağlansın. $st_2\text{-}\lim x = L$ olan bir $x = (x_{jk}) \in st_2 \cap M_u$ dizisini göz önüne alalım. O zaman, her $\varepsilon > 0$ için

$$\delta_2(E) = \delta_2\big(\{(j,k) : |x_{jk} - L| \geq \varepsilon\}\big) = 0$$

olup, $j, k \notin E$ için

$$|x_{jk} - L| < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır. Buna göre,

$$\sum_{j,k} \alpha_{mnjk} x_{jk} = \sum_{j,k} \alpha_{mnjk}(x_{jk} - L) + L \sum_{j,k} \alpha_{mnjk}$$

eşitliğinde, A matrisinin $(\mathcal{C}_{bp}, Ces_{bp})_{reg}$ sınıfında bulunması dikkate alındığında,

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{j,k} \alpha_{mnjk} x_{jk} = P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{j,k} \alpha_{mnjk}(x_{jk} - L) + L \tag{5.1.8}$$

elde edilir. Diğer taraftan;

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{j,k} \alpha_{mnjk}(x_{jk} - L)\Big| &= \Big|\sum_{j,k \in E} \alpha_{mnjk}(x_{jk} - L) + \sum_{j,k \notin E} \alpha_{mnjk}(x_{jk} - L)\Big| \\ &\leq \|x_{jk} - L\| \sum_{j,k \in E} |\alpha_{mnjk}| + \varepsilon \|B\| \end{aligned}$$

eşitsizliği geçerlidir. (5.1.7) şartından,

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{j,k} \alpha_{mnjk}(x_{jk} - L) = 0$$

elde edilir. (5.1.8) eşitliğinden $P\text{-}\lim C_1(Ax) = L = st_2\text{-}\lim x$ bulunur ki bu da ispatı tamamlar. □

5.2. Cesàro Çekirdek Teoremleri

Bu kısımda, Cesàro dizi uzaylarına tanımlı matrisler için çekirdek teoremleri verilecektir.

Teorem 5.2.1. *$A = (a_{mnkl})$ olmak üzere, $\|A\| < \infty$ ve $x \in M_u$ olsun. Bu durumda*

$$P\text{-}\limsup C_1(Ax) \leq st_2\text{-}\limsup x \tag{5.2.1}$$

eşitsizliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$A \in (st_2 \cap M_u, Ces_{bp})_{reg} \tag{5.2.2}$$

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{k,l} |\alpha_{mnkl}| = 1 \tag{5.2.3}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

İSPAT. $x = (x_{jk}) \in M_u$ için

$$P\text{-}\limsup C_1(Ax) \leq st_2\text{-}\limsup x$$

eşitsizliği sağlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} st_2\text{-}\liminf x &\leq P\text{-}\liminf C_1(Ax) \\ &\leq P\text{-}\limsup C_1(Ax) \\ &\leq st_2\text{-}\limsup x \end{aligned} \tag{5.2.4}$$

elde edilir.

$x = (x_{jk})$ keyfi ve $st_2 \cap M_u \subset M_u$ olduğundan, (5.2.4) eşitsizliğini sağlayan $x = (x_{jk}) \in st_2 \cap M_u$ dizisini $st_2\text{-}\lim x = L$ olarak alalım. O zaman, Teorem 2.5 **[32]** ten

$$st_2\text{-}\liminf x = st_2\text{-}\limsup x = L$$

olur. Yine (5.2.4) eşitsizliğinden,

$$P\text{-}\liminf C_1(Ax) = P\text{-}\limsup C_1(Ax) = L$$

elde edilir. Bu ise, $A \in (st_2 \cap M_u, Ces_{bp})_{reg}$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan,

$$P\text{-}\limsup C_1(Ax) \leq st_2\text{-}\limsup x \leq P\text{-}\limsup x$$

olduğundan, Teorem 3.2 **[35]** gereği,

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{j,k} |\alpha_{mnjk}| = 1$$

olduğu görülür.

Tersine, (5.2.2) ve (5.2.3) şartları sağlansın. $x = (x_{jk}) \in M_u$ dizisini alalım. Bu durumda, Ax sınırlı ve $st_2\text{-}\limsup x$ sonludur. Her $\varepsilon > 0$ için Teorem 2.2.11 den $E = \{(j,k) : x_{jk} > st_2\text{-}\limsup x + \varepsilon\}$ olmak üzere, $\delta_2(E) = 0$ önermesi sağlanır. $(j,k) \notin E$ için

$$x_{jk} \leq st_2\text{-}\limsup x + \varepsilon$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$\begin{aligned}
\sum_{j,k}\alpha_{mnjk}x_{jk} &\le \Big|\sum_{j,k}\frac{|\alpha_{mnjk}x_{jk}|+\alpha_{mnjk}x_{jk}}{2}+\sum_{j,k}\frac{|\alpha_{mnjk}x_{jk}|-\alpha_{mnjk}x_{jk}}{2}\Big| \\
&\le \Big|\sum_{j,k}\alpha_{mnjk}x_{jk}\Big|+\sum_{j,k}\left(|\alpha_{mnjk}|-\alpha_{mnjk}\right)|x_{jk}| \\
&\le \Big|\sum_{j,k\in E}\alpha_{mnjk}x_{jk}+\sum_{j,k\notin E}\alpha_{mnjk}x_{jk}\Big|+\|x\|\sum_{j,k}\left(|\alpha_{mnjk}|-\alpha_{mnjk}\right) \\
&\le \|x\|\sum_{j,k\in E}|\alpha_{mnjk}|+(st_2\text{-}\limsup x+\varepsilon)\sum_{j,k\notin E}|\alpha_{mnjk}| \\
&\quad +\|x\|\sum_{j,k}\Big(|\alpha_{mnjk}|-\alpha_{mnjk}\Big)
\end{aligned}$$

elde edilir. $B=(\alpha_{mnjk})$ matrisi RH-regüler olduğundan ve (5.2.3) eşitliğinden,

$$P\text{-}\limsup C_1(Ax)\le st_2\text{-}\limsup x+\varepsilon$$

eşitsizliğine sahip oluruz. ε keyfi olduğundan, ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 5.2.2. *$A=(a_{mnjk})$ matrisinin kuvvetli Cesàro σ-regüler (yani $A\in(V_\sigma, Ces_{bp})_{reg}$) olması için gerek ve yeter şart*

$$B=(\alpha_{mnjk}) \text{ matrisi } RH\text{-regüler,} \tag{5.2.5}$$

$$P\text{-}\lim_{m,n}\sum_{j,k}\left|\alpha_{mnjk}-\alpha_{mn\sigma(j),k}\right|=0 \tag{5.2.6}$$

ve

$$P\text{-}\lim_{m,n}\sum_{j,k}\left|\alpha_{mnjk}-\alpha_{mnj,\sigma(k)}\right|=0 \tag{5.2.7}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. A matrisi kuvvetli Cesàro σ-regüler matris olsun. Bu durumda,

$$\mathcal{C}_{bp}\subset V_\sigma$$

olduğundan, B matrisinin RH-regüler olduğu elde edilir.

Herhangi bir $x=(x_{jk})$ dizisi için

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{j,k}\alpha_{mnjk}\big(x_{jk}-x_{\sigma(j),k}\big) &= \textstyle\sum_{j,k}\big(\alpha_{mnjk}-\alpha_{mn\sigma(j),k}\big)x_{\sigma(j),k} \\ &\quad \textstyle-\sum_{j\notin\sigma(\mathbb{N}),k}\alpha_{mnjk}x_{jk}\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

ve

$$\begin{aligned}\textstyle\sum_{j,k}\alpha_{mnjk}\big(x_{jk}-x_{j,\sigma(k)}\big) &= \textstyle\sum_{j,k}\big(\alpha_{mnjk}-\alpha_{mnj,\sigma(k)}\big)x_{j,\sigma(k)} \\ &\quad \textstyle-\sum_{j,k\notin\sigma(\mathbb{N})}\alpha_{mnjk}x_{jk}\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

eşitlikleri yazılabilir. Her $x = (x_{jk})$ için (5.2.8) ve (5.2.9) eşitlikleri yazılabildiğinden, $k \notin \sigma(\mathbb{N})$ için $x_{jk} = 0$ ve $j \notin \sigma(\mathbb{N})$ için $x_{jk} = 0$ olan diziler için de eşitlikler sağlanacaktır. Bu diziler bakımından, sırasıyla,

$$\sum_{j,k} \alpha_{mnjk}\big(x_{jk} - x_{\sigma(j),k}\big) = \sum_{j,k} \big(\alpha_{mnjk} - \alpha_{mn\sigma(j),k}\big) x_{\sigma(j),k} \tag{5.2.10}$$

ve

$$\sum_{j,k} \alpha_{mnjk}\big(x_{jk} - x_{j,\sigma(k)}\big) = \sum_{j,k} \big(\alpha_{mnjk} - \alpha_{mnj,\sigma(k)}\big) x_{j,\sigma(k)} \tag{5.2.11}$$

eşitliklerini elde ederiz.

$x \in V_\sigma^2$ olsun. Bu durumda, $(x_{jk} - x_{\sigma(j),k}) \in Z^2$ olacağından, (5.2.10) eşitliğinin sol tarafı Ces_{bp0} uzayındadır. Böylece,

$$b_{mnjk} = \alpha_{mnjk} - \alpha_{mn\sigma(j),k} \quad \text{her } m, n, j, k \in \mathbb{N}$$

olmak üzere, $B = (b_{mnjk})$ matrisi (M_u, Ces_{bp}) sınıfındadır.

Bu nedenle, Teorem 5.1.1 den (5.2.6) elde edilir.

Benzer şekilde, (5.2.7)'nin gerekliliği gösterilebilir.

Tersine, B matrisi RH-regüler ve (5.2.6), (5.2.7) şartları sağlansın. $x \in V_\sigma^2$ ve $\sigma_2\text{-}\lim x = l$ olsun. Bu durumda,

$$x_{jk} = (x_{jk} - x_{\sigma(j),k}) + le \tag{5.2.12}$$

veya

$$x_{jk} = (x_{jk} - x_{j,\sigma(k)}) + le \tag{5.2.13}$$

olup, (5.2.12) eşitliğinden,

$$\sum_{j,k} \alpha_{mnjk} x_{jk} = \sum_{j,k} \alpha_{mnjk}(x_{jk} - x_{\sigma(j),k}) + l \sum_{j,k} \alpha_{mnjk} \tag{5.2.14}$$

elde edilir. Böylece, (5.2.10) eşitliğini kullanarak,

$$\begin{aligned} \Big| \sum_{j,k} \alpha_{mnjk}(x_{jk} - x_{\sigma(j),k}) \Big| &= \Big| \sum_{j,k} \big(\alpha_{mnjk} - \alpha_{mn\sigma(j),k}\big) x_{\sigma(j),k} \Big| \\ &\leq \|x\| \sum_{j,k} \big|\alpha_{mnjk} - \alpha_{mn\sigma(j),k}\big| \end{aligned}$$

eşitsizliğini ve (5.2.6) şartından da

$$P\text{-}\lim_{m,n} \sum_{j,k} \alpha_{mnjk}(x_{jk} - x_{\sigma(j),k}) = 0$$

eşitliğini elde ederiz.

Böylece, (5.2.14) eşitliğinde $m, n \longrightarrow \infty$ için P-limit alınır ve B matrisinin RH-regüler olduğu göz önüne alınırsa, $P\text{-}\lim C_1(Ax) = \sigma_2\text{-}\lim x$ elde edilir. Bu ise A matrisinin kuvvetli Cesàro σ-regüler olduğunu gösterir. $\square$

Tanım 5.2.1. [**33**, Tanım 3.5]

$$C_\sigma(x) = P\text{-}\limsup_{p,q} \sup_{s,t} \frac{1}{pq} \sum_{j=0}^{p} \sum_{k=0}^{q} x_{\sigma^j(s),\sigma^k(t)}$$

olmak üzere, sınırlı reel bir $x = (x_{jk})$ çift dizisinin σ_2-çekirdeği $[-C_\sigma(-x), C_\sigma(x)]$ kapalı aralığı olarak tanımlanır.

Her sınırlı yakınsak çift dizi σ-yakınsak olduğundan, sınırlı diziler için

$$C_\sigma(x) \leq P\text{-}\limsup x$$

eşitsizliği geçerlidir. Bu nedenle, her sınırlı $x = (x_{jk})$ çift dizisi için

$$\sigma_2\text{-çek}\{x\} \subseteq P\text{-çek}\{x\}$$

kapsaması mevcuttur.

Lemma 5.2.1. [**33**, Lemma 3.5] $W_p(x) = \inf_{z \in Z^2} \left\{ P\text{-}\limsup(x+z) \right\}$ *olsun. Bu durumda, her* $x \in M_u$ *için*

$$W_p(x) = C_\sigma(x)$$

eşitliği geçerlidir.

Teorem 5.2.3. *4-boyutlu* $A = (a_{mnjk})$ *sonsuz bir matris olsun. Bu durumda, sınırlı reel* $x = (x_{jk})$ *dizisi için*

$$P\text{-}\limsup C_1(Ax) \leq C_\sigma(x)$$

eşitsizliğinin sağlanması için $A \in (V_\sigma^2, Ces_{bp})_{reg}$ *ve (5.2.3) şartlarının bulunması gerek ve yeterdir.*

İspat. Her $x \in M_u$ için $P\text{-}\limsup C_1(Ax) \leq C_\sigma(x)$ olsun. $V_\sigma^2 \subset \ell_\infty^2$ olduğundan,

$$-C_\sigma(-x) = C_\sigma(x) = \sigma\text{-}\lim x$$

eşitliği geçerlidir. Böylece,

$$\sigma\text{-}\lim x \leq P\text{-}\liminf C_1(Ax) \leq P\text{-}\limsup C_1(Ax) \leq \sigma\text{-}\lim x$$

eşitsizliğine sahip oluruz ki bu ise,

$$P\text{-}\lim C_1(Ax) = \sigma\text{-}\lim x$$

olduğunu gösterir. Buna göre, A Cesàro kuvvetli σ-regüler matristir.

Diğer taraftan, her $x \in M_u$ için

$$C_\sigma(x) \leq P\text{-}\limsup x$$

olduğundan (5.2.3) eşitliğinin gerekliliği, Teorem 3.2 [**35**] den elde edilir.

Tersine, A Cesàro kuvvetli σ-regüler olsun ve (5.2.3) şartı sağlansın. Bu durumda, B matrisi RH-regüler olduğundan, Teorem 3.2 **[35]** gereğince, her $x \in M_u$ için

$$P\text{- }\limsup C_1(Ax) \leq P\text{- }\limsup x$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece,

$$H(z) = \inf_{z\in Z^2} \left\{P\text{- }\limsup C_1[A(x+z)]\right\} \leq \inf_{z\in Z^2} \left\{P\text{- }\limsup (x+z)\right\} = W_p(x)$$

elde edilir.

Diğer taraftan, A matrisi Cesàro kuvvetli σ-regüler olduğundan her $z \in Z^2$ için

$$P\text{- }\limsup C_1(Az) = 0$$

olur. Bu nedenle,

$$\begin{aligned} H(z) &\geq \inf_{z\in Z^2} \left\{P\text{- }\limsup C_1(Ax)\right\} + \inf_{z\in Z^2} \left\{P\text{- }\limsup C_1(Az)\right\} \\ &= P\text{- }\limsup Ax \end{aligned}$$

elde edilir.

Son iki eşitsizliği birleştirerek, her $x \in M_u$ için

$$P\text{- }\limsup C_1(Ax) \leq W_p(x)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Lemma 5.2.1 den ispat tamamlanır. $\square$

KAYNAKLAR

[1] A. PRINGSHEIM, *Elementare Theorie der unendliche Doppelreihen,* Sitsungs berichte der Math. Akad. der Wissenschafftenzu Münch. Ber. **7**(1898), 101–153.

[2] G. H. HARDY, *On the convergence of certain multiple series*, Proc. Cambridge Philos. Soc. **19**(1917), 86–95.

[3] G. M. ROBISON, *Divergent double sequences and series,* Trans. Amer. Math. Soc. **28**(1926), no.1, 50–73.

[4] T. KOJIMA, *On the theory of double sequence,* Tôhoku Math. J. **21**(1922), 3–14.

[5] H. J. HAMILTON, *Transformations of multiple sequences*, Duke Math. J. **2**(1936), 29–60.

[6] J. D. HILL, *On perfect summability of double sequences*, Bull. Amer. Math. Soc. **46**(1940), 327–331.

[7] C. JARDAS, N. SARAPA, *On the summability of pairs of sequences*, Glasnik Math. **26**(46)(1991), 67–73.

[8] F. MÓRICZ, *Extensions of the spaces c and c_0 from single to double sequences,* Acta Math. Hung. **57** (1991), no. 1-2, 129–136.

[9] A. GÖKHAN (TÜRKMENOĞLU), *Bazı Çift İndisli Dizi Uzayları*, Fırat Üniv. Fen Bil. Enst. Doktora tezi, 1993.

[10] J. BOOS, T. LEIGER, K. ZELLER, *Consistency theory for SM-methods*, Acta Math. Hungar. **76**(1997), 83–116.

[11] M. ZELTSER, *Investigation of Double Sequences Spaces by Soft and Hard Analytical Methods*, Dissertationes Mathematicae Universitatis Tartuensis, Tartu, 2001.

[12] B. ALTAY, *Bazı Yeni Çift Dizi Uzayları*, İnönü Üniv. Fen Bil. Enst. Doktora tezi, Malatya 2002.

[13] K. KNOPP, *Zur theorie der limitierungs verfahren (Erste Mitteilung),* Math. Z. **31**(1930), 115–127.

[14] A.A. SHCHERBAKOV, *Kernels of sequences of complex numbers and their regular transformations*, Math. Notes **22**(1977), 948–953.

[15] R.G. COOKE, *Infinite Matrices and Sequence Spaces*, Macmillan and Co. Limited, London, 1950.

[16] B.E. RHOADES, *Some properties of totally coregular matrices*, Illinois J. Math. **4**(1960), 518–525.

[17] P. SCHAEFER, *Core theorems for coregular matrices*, Illinois J. Math. **9**(1965), 207–211.

[18] C. GOFFMAN, G.M. PETERSEN, *Consistent limitation methods*, Proc. Amer. Math. Soc. **7**(1956), 367–369.

[19] D. RATH, B.K. TRIPATHY, *On some classes of regular matrices*, Duke Math. J. **84**(1981), 530–533.

[20] I.J. MADDOX, *Some analogues of Knopp's core theorem*, Internat. J. Math. Math. Sci. **2**(1979), 605–614.

[21] R. F. PATTERSON, *Some Theorems in the Theory of Divergent Double Sequences,* Phd. Dissertation, Kent state University, 1997.

[22] A. GÖKHAN, R. ÇOLAK, M. MURSALEEN, *Some matrix transformations and generalized core of double sequences*, Math. Comput. Modelling **49**(2009), 1721–1431.

[23] H. FAST, *Sur la convergence statistique*, Colloq. Math. **2**(1951), 241–244.

[24] T. ŠALÁT, *On statistically convergent sequences of real numbers,* Math. Slovaca **30**(1980), 139–150.

[25] J. A. FRIDY, *On statistical convergence*, Analysis, **5**(1985), 301–313.

[26] J. S. CONNOR, *The statistical and strong p-Cesàro convergence of sequence*, Analysis(Munich) **8**(1988), 47–63.

[27] E. KOLK, *Matrix summability of statistically convergent sequences*, Analysis (Munich), **13**, (1993), 77–83.

[28] J. A. FRIDY, C. ORHAN, *Statistical limit superior and inferior*, Proc. Amer. Math. Soc. **125**(1997), 3625–3631.

[29] J. A. FRIDY, C. ORHAN, *Statistical core theorems*, J. Math. Anal. Appl. **208**(1997), 520–527.

[30] M. MURSALEEN, O. H. H. EDELY, *Statistical convergence of double sequences*, J. Math. Anal. Appl. **288**(2003), 223–231.

[31] M. MURSALEEN, C. ÇAKAN, S.A. MOHIUDDINE, E. SAVAŞ, *Generalized statistical convergence and statistical core of double sequences*, Acta Math. Sin. (Eng. Ser.) **26**(11)(2010), 2131–2144.

[32] C. ÇAKAN, B. ALTAY, *Statistically boundedness and statistical core of double sequences*, J. Math. Anal. Appl. **317**(2)(2006), 690–697.

[33] C. ÇAKAN, B. ALTAY, M. MURSALEEN, *The σ-convergence and σ-core of double sequences*, Appl. Math. Letters **19**(10)(2006), 1122–1128.

[34] C. ÇAKAN, B. ALTAY, H. ÇOŞKUN, *σ-regular matrices and a σ-core theorem for double sequences*, Hacet. J. Math. Stat. **38**(1)(2009), 51–58.

[35] R.F. PATTERSON, *Double sequence core teorems*, Int. J. Math. & Math. Sci. **22**(4)(1999), 785–793.

[36] V. G. IYER, *Mathematical Analysis*,Tata McGraw-Hill, 3rd Edition, 1985.

[37] S. MISHRA, B. SATAPATHY, N. RATH, *Invariant means and $\sigma-$core*, J. Indian. Math. Soc. **60** (1994), 151–158.

[38] M. ZELTSER, M. MURSALEEN, S. A. MOHIUDDINE, *On almost conservative matrix methods for double sequence spaces*, Pub. Math. Debreceen **75**(3-4)(2009), 387–399.

[39] R.F. PATTERSON, *Four dimensional matrix characterization of Pringsheim core*, Southeast Asian Bull. Math. **27**(2003), 1–8.

[40] R.F. PATTERSON, *Analogues of some fundamental theorems of summability theory*, Int. J. Math.& Math. Sci. **23**(1)(2000), 1–9.

ÖZGEÇMİŞ

1970 yılında Afyonkarahisar-Emirdağ'da doğdu. İlk öğrenimini Emirdağ'da, orta öğrenimini Eskişehir'de tamamladı. 1986 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi Fen Bilimleri Eğitimi Matematik Öğretmenliği Bölümü'nü kazandı ve 1991 yılında mezun oldu. 1991-2000 yılları arasında bir özel okulda görev yaptı. 2000 yılında Milli Eğitim Bakanlığına geçti. 2003-2006 yılları arasında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü'nde yüksek lisansını yaptı. Halen Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı bir okulda matematik öğretmenliği görevini sürdürmektedir.