

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ
VE UYGULAMALARI**

BERNA BULUT

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI**

**MALATYA
Şubat 2007**

Tezin Başlığı : **Klasik Sonlu Fark Yöntemleri ve Uygulamaları**

Tezi Hazırlayan : **Berna BULUT**

Sınav Tarihi : 23 Şubat 2007

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri

Doç. Dr. Ahmet Refik BAHADIR (İnönü Üniversitesi) _____

Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY (İnönü Üniversitesi) _____

Yrd. Doç. Dr. Sibel ÖZER (İnönü Üniversitesi) _____

Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY
Tez Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Ali ŞAHİN
Enstitü Müdürü

Onur Sözü

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “*Klasik Sonlu Fark Yöntemleri ve Uygulamaları*” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Berna BULUT

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ VE UYGULAMALARI

BERNA BULUT

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

79+vi sayfa

2007

Tez Danışmanı : Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir.

İkinci bölümde çalışmanın ana konusu olan klasik sonlu fark yöntemlerinden açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımları farklı sınır şartları ile verilen ısı iletim denklemi için incelenmiştir.

Üçüncü bölümde farklı sınır şartlarındaki ısı iletim denklemi için açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımlarının kararlılık analizleri matris ve von-Neumann yöntemleriyle yapılmıştır.

Dördüncü bölümde ısı iletim probleminin açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımlarının lokal kesme hataları incelenmiştir.

Beşinci bölümde farklı sınır şartlarındaki ısı iletim problemi için model problemler ele alınarak bu model problemlerin açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımlarının matris ve Von-Neumann yöntemleriyle kararlılık analizleri incelenmiş, elde edilen fark yaklaşımlarının nümerik çözümleri ve analitik çözümleri karşılaştırmalı olarak tablolar halinde sunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Açık Yöntem, Kapalı Yöntem, Crank-Nicolson Yöntemi, Kararlılık Analizi, Lokal Kesme Hatası.

ABSTRACT

MSc. Thesis

CLASSICAL FINITE DIFFERENCE METHODS AND THEIR APPLICATIONS

BERNA BULUT

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

79+vi pages

2007

Supervisor: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

This study consists of five chapters. Chapter 1 aims to explain some basic concepts and theorems which are used in the latter chapters.

The main issue of Chapter 2 includes explicit, implicit and Crank-Nicolson methods – which are among classical finite difference methods – have been examined for heat conduction equation with different boundary conditions.

In Chapter 3, for heat conduction equation with different boundary conditions, stability analyses of explicit, implicit and Crank-Nicolson approaches were carried out by using Matrix and von-Neumann methods.

In Chapter 4, an examination of the local truncation errors of explicit, implicit and Crank-Nicolson approaches of heat conduction problem was carried out.

In Chapter 5, model problems were discussed for heat conduction problem with different boundary conditions. Stability analysis of these approaches were conducted with reference to Matrix and Von-Neumann methods and were examined for explicit, implicit and Crank-Nicolson finite difference approaches on these model problems. Numerical solutions and analytical solutions were presented as tables.

KEYWORDS: Explicit Method, Implicit Method, Crank-Nicolson Method, Stability Analysis, Local Truncation Error.

TEŞEKKÜR

Çalıőmalarım süresince her türlü imkânı sağlayarak bana yardımcı olan bilgi ve görüőlerinden çok yararlandığım tez danıőmanım ve değerli hocam Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Başkanımız Prof. Dr. Sadık KELEŐ'e ve diğer bölüm hocalarıma teşekkür ederim. Ayrıca kıymetli eleőtiri ve önerileriyle tezin olgunlaőmasında ve program yapımında katkıda bulunan Arő Gör. Dr. Alaattin ESEN'e ve Öğr. Gör. Yusuf UÇAR'a teşekkürü bir borç bilirim.

Aldığım bu değerli akademik katkıların yanı sıra tez yazma sürecinde, kendi ağır sorumluluklarına karşı benden desteklerini esirgemeyen Av. Metin BULUT'a ve Gülüzar BULUT'a en içten teşekkürlerimi sunuyorum.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ	v
TABLolar DİZİNİ	vi
1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER	1
2. KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ	10
2.1. Açık (Explicit) Sonlu Fark Yöntemi.....	13
2.2. Kapalı (Implicit) Sonlu Fark Yöntemi.....	15
2.3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi	18
2.4. Ağırlıklı Averaj Yaklaşımı	21
3. KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ İÇİN KARARLILIK ANALİZLERİ	22
3.1. Matris Yöntemi.....	23
3.1.1. Açık Sonlu Fark Yaklaşımın Matris Yöntemiyle Kararlılık Analizi	25
3.1.2. Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımın Matris Yöntemiyle Kararlılık Analizi	30
3.1.3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımın Matris Yöntemiyle Kararlılık Analizi	34
3.2. von Neuman (Fourier Seri)Yöntemi.....	37
3.2.1. von Neumann Yöntemiyle Kararlılık Analizi.....	39
4. KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİNİN LOKAL KESME HATASI	42
4.1. Açık Sonlu Fark Yaklaşımının Lokal Kesme Hatası	42
4.2. Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımının Lokal Kesme Hatası	44
4.3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımının Lokal Kesme Hatası.....	45
5. MODEL PROBLEMLER	47
KAYNAKLAR	78
ÖZGEÇMİŞ	79

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 Dügüm Noktalarının Gösterimi	10
--	----

TABLolar DİZİNİ

Tablo 5.1 Açık Yöntem: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümleri	56
Tablo 5.2 Kapalı Yöntem: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümleri	56
Tablo 5.3 Crank-Nicolson Yöntemi: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümleri	57
Tablo 5.4 $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması	57
Tablo 5.5 Açık Yöntem: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 2'nin nümerik ve analitik çözümleri	65
Tablo 5.6 Kapalı Yöntem: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 2'nin nümerik ve analitik çözümleri	66
Tablo 5.7 Crank-Nicolson Yöntemi: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 2'nin nümerik ve analitik çözümleri	66
Tablo 5.8 $h = 0.1$ ve $k = 0.001$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında Problem 2'nin nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması	67
Tablo 5.9 Açık Yöntem: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 3'ün nümerik ve analitik çözümleri	76
Tablo 5.10 Kapalı Yöntem: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 3'ün nümerik ve analitik çözümleri	76
Tablo 5.11 Crank-Nicolson Yöntemi: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 3'ün nümerik ve analitik çözümleri	77
Tablo 5.12 $h = 0.1$ ve $k = 0.001$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında Problem 3'ün nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması	77

1. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılan bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tanım 1.1: m ve n pozitif tamsayılar ve $i = 1(1)m$, $j = 1(1)n$ olmak üzere a_{ij} sayılarının oluşturduğu

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

biçimindeki sayılar tablosuna matris denir. Burada m sayısına matrisin satır sayısı, n sayısına da matrisin sütun (kolon) sayısı denir. m satırlı ve n sütunlu matrise $m \times n$ boyutlu ya da $m \times n$ türünden bir matris denir. Matrisler $[]$ veya $()$ sembollerinden biri ile gösterilir.

$i = 1(1)m$, $j = 1(1)n$ olmak üzere $m \times n$ türünden bir A matrisi kısaca $A = [a_{ij}]_{m \times n}$ biçiminde gösterilir. Bir matriste i . satırla j . sütunun kesiştiği yerdeki a_{ij} sayısına matrisin (i, j) . terimi adı verilir. Elemanları reel sayı olan $m \times n$ boyutundaki matrislerin kümesi IR_n^m ile, elemanları kompleks sayılar olan matrislerin kümesi ise \mathbb{C}_n^m ile gösterilir [1].

Tanım 1.2: Satır ve sütun sayıları aynı ($m = n$) olan bir matrise kare matris denir. $a_{11}, a_{22}, \dots, a_{nn}$ elemanlarına da kare matrisin köşegen elemanları, bu elemanların bulunduğu köşegene ise matrisin esas köşegeni (esas diyagonali) veya kısaca köşegeni denir [1].

Tanım 1.3: Esas köşegen üzerindeki elemanları sıfırdan farklı, diğer bütün elemanları sıfır olan bir kare matrise köşegen matris denir [1].

Tanım 1.4: k bir sabit sayı olmak üzere $a_{11} = a_{22} = \dots = a_{nn} = k$ olan bir köşegen matrise skaler matris denir [1].

Tanım 1.5: Köşegen üzerindeki elemanları 1 ve köşegen dışındaki elemanları 0 olan $n \times n$ boyutlu bir matrise n mertebeden birim matris denir ve I_n ile gösterilir [1].

Tanım 1.6: A , $m \times n$ boyutunda bir matris olmak üzere (j, i) bileşeni A matrisinin (i, j) bileşeni olan bir $n \times m$ boyutundaki matrise A matrisinin transpozu denir ve A^T ile gösterilir. Yani $A = [a_{ij}]$ ise $A^T = [a_{ji}]$ dir [1].

Tanım 1.7: Transpozu kendisine eşit olan bir kare matrise simetrik matris denir. Başka bir ifadeyle $A = [a_{ij}]$ olmak üzere $A^T = A$ ise A matrisine simetriktir denir [1].

Tanım 1.8: $A = [a_{ij}]$ olmak üzere $A^T = -A$ ise A matrisine anti-simetrik matris denir [1].

Tanım 1.9: Bir A matrisinin elemanlarından bazıları (veya hepsi) kompleks sayılar ise, bu sayıların eşleniklerini yazarak elde edilen matrise A matrisinin eşleniği veya konjugesi denir ve \bar{A} ile gösterilir [1].

Tanım 1.10: $\bar{A}^T = A$ ise A matrisine Hermitian matris, $\bar{A}^T = -A$ ise A matrisine anti hermitian matris denir [1].

Tanım 1.11: A ve B matrisleri $AB = I$ ve $BA = I$ bağıntılarını sağlayan birer $n \times n$ boyutunda matrisler ise B matrisine A matrisinin tersi (inversi) denir ve A^{-1} ile gösterilir [1]

Tanım 1.12: $A \in IR_n^n$ ve $\lambda \in IR$ olmak üzere $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ olarak tanımlanan P polinomuna A matrisinin karakteristik polinomu denir [2].

Tanım 1.13: P , $A \in IR_n^n$ matrisin karakteristik polinomu ise P polinomunun köklerine A matrisinin özdeğerleri veya karakteristik değerleri denir [2].

Tanım 1.14: Bir $A \in IR_n^n$ matrisinin özdeğeri λ olmak üzere sıfırdan farklı $x \in IR^n$ vektörü için $(A - \lambda I_n)x = 0$ özelliğini sağlayan x vektörüne A matrisinin λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü veya karakteristik vektörü denir [2].

Tanım 1.15: Bir $A \in IR_n^n$ matrisinin λ_i ($i = 1(1)n$) özdeğerlerinin en büyüğüne A matrisinin spektral yarıçapı denir ve $\rho(A)$ ile gösterilir. Bu tanıma göre $\rho(A) = \max_i |\lambda_i|$ dir [3].

Tanım 1.16: $x \in IR^n$ olmak üzere

$$\| \cdot \| : IR^n \rightarrow IR^+$$

$$x \rightarrow \| \cdot \| (x) = \|x\|$$

olarak tanımlanan dönüşüme IR^n üzerinde bir vektör normu denir. Her $x, y \in IR^n$ ve $c \in IR$ için vektör normu

- i. $x \neq 0$ ise $\|x\| > 0$, $x = 0$ ise $\|x\| = 0$,
- ii. $\|cx\| = |c| \|x\|$,
- iii. $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

özelliklerine sahiptir [2].

Tanım 1.17: $A \in IR_n^n$ olmak üzere

$$\| \cdot \| : IR_n^n \rightarrow IR^+$$

$$A \rightarrow \| \cdot \| (A) = \|A\|$$

olarak tanımlanan dönüşüme IR_n^n üzerinde bir matris normu denir. Her $A, B \in IR_n^n$ ve $c \in IR$ için matris normu

- i. $A \neq 0$ ise $\|A\| > 0$, $A = 0$ ise $\|A\| = 0$,

- ii. $\|cA\| = |c| \|A\|$,
- iii. $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
- iv. $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

özelliklerine sahiptir [2].

Özel olarak $\|A\|_1$, $\|A\|_2$ ve $\|A\|_\infty$ ile gösterilen normlar aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^H A)},$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|.$$

Tanım 1.18: f , bir x noktasının komşuluğunda tanımlanmış bir fonksiyon olsun.

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

limiti veya $u = x + \Delta x$ almakla elde edilen

$$\lim_{u \rightarrow x} \frac{f(u) - f(x)}{u - x}$$

limiti mevcut ise bu limit değerine f fonksiyonunun x noktasındaki türevi denir ve

$f'(x)$ veya $\frac{df}{dx}$ ile gösterilir.

Tanım 1.19: f , $x = a$ noktasında n -inci mertebeden türevlenebilen bir fonksiyon olsun.

$p(a) = f(a)$, $p'(a) = f'(a)$, \dots , $p^n(a) = f^n(a)$ şartını gerçekleyen ve derecesi n den

büyük olmayan bir tek p polinomu vardır. $p(x) = \sum_{k=0}^n f^k(a)(x-a)^k$ formülü ile verilen

bu p polinomuna f fonksiyonu tarafından $x = a$ noktasında üretilen n -inci dereceden Taylor polinomu denir [4].

Tanım 1.20: f fonksiyonu a noktasını içeren bir açık aralıkta her mertebeden türevlenebilir olsun. $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$ serisine a noktasında f fonksiyonu tarafından üretilen Taylor Serisi denir [4].

Teorem 1.1 (Birinci Gerschgorin Teoremi): Bir $A \in \mathbb{R}_n^n$ matrisin özdeğerlerinin modülünün en büyüğü matrisin herhangi bir satırı veya herhangi bir kolonu üzerinde bulunan elemanlarının modülünün en büyüğünü geçemez. Başka bir ifadeyle $\rho(A) \leq \|A\|_1$ veya $\rho(A) \leq \|A\|_{\infty}$ dir [3].

İspat: λ_i , $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisinin özdeğeri ve $x_i = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ de λ_i özdeğerine karşılık gelen özvektör olsun. Özdeğer ve özvektör tanımından $Ax_i = \lambda_i x_i$ ($x_i \neq 0$) eşitliği açık olarak

$$\begin{aligned} a_{11}v_1 + a_{12}v_2 + \dots + a_{1n}v_n &= \lambda_i v_1 \\ a_{21}v_1 + a_{22}v_2 + \dots + a_{2n}v_n &= \lambda_i v_2 \\ \vdots & \\ a_{s1}v_1 + a_{s2}v_2 + \dots + a_{sn}v_n &= \lambda_i v_s \\ \vdots & \\ a_{n1}v_1 + a_{n2}v_2 + \dots + a_{nn}v_n &= \lambda_i v_n \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

v_s , x_i özvektörünün mutlak değerce en büyük bileşeni olsun. Yukarıdaki sistemin s -inci denkleminde

$$\lambda_i = a_{s1} \left(\frac{v_1}{v_s} \right) + a_{s2} \left(\frac{v_2}{v_s} \right) + \dots + a_{sn} \left(\frac{v_n}{v_s} \right)$$

olarak yazılabilir. Buradan

$$|\lambda_i| = \left| a_{s1} \left(\frac{v_1}{v_s} \right) + a_{s2} \left(\frac{v_2}{v_s} \right) + \dots + a_{sn} \left(\frac{v_n}{v_s} \right) \right|$$

$$\leq |a_{s1}| \left| \frac{v_1}{v_s} \right| + |a_{s2}| \left| \frac{v_2}{v_s} \right| + \dots + |a_{sn}| \left| \frac{v_n}{v_s} \right|$$

bulunur. $v_s = \max_i |v_i|$ olarak seçildiğinden $|v_i/v_s| \leq 1$ ($i = 1(1)n$) olup yukarıdaki eşitsizlik

$$|\lambda_i| \leq |a_{s1}| + |a_{s2}| + \dots + |a_{sn}|, \quad i = 1(1)n$$

olur. Bu eşitsizlik her λ_i için sağlandığından özellikle $|\lambda_i| = \max |\lambda_s|$ için de sağlanır. Böylece $\rho(A) \leq \|A\|_\infty$ elde edilir.

Bir A matrisinin özdeğerleri ile transpozunun özdeğerleri aynı olduğundan, yukarıdaki ispata benzer şekilde $\rho(A) \leq \|A\|_1$ olduğu kolayca gösterilebilir.

Teorem 1.2 (Gerschgorin Çember Teoremi veya Brauer Teoremi): $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisinin a_{ss} köşegen elemanı hariç s -inci sıra üzerinde bulunan elemanlarının modülleri toplamı P_s olsun. Bu takdirde A matrisinin her bir özdeğeri $|\lambda - a_{ss}| \leq P_s$ çemberinin en az birinin içinde veya sınırı üzerinde bulunur [3].

İspat: $A = [a_{ij}]_{n \times n}$ matrisinin özdeğeri λ_i , ve bu özdeğere karşılık gelen özvektör $x_i = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ olsun. v_s de x_i özvektörünün mutlak değerce en büyük bileşeni olsun. Teorem 1.1'den

$$\lambda_i = a_{s1} \left(\frac{v_1}{v_s} \right) + a_{s2} \left(\frac{v_2}{v_s} \right) + \dots + a_{ss} + \dots + a_{sn} \left(\frac{v_n}{v_s} \right)$$

olduğu bilinmektedir. Buradan

$$|\lambda_i - a_{ss}| = \left| a_{s1} \left(\frac{v_1}{v_s} \right) + a_{s2} \left(\frac{v_2}{v_s} \right) + \dots + 0 + \dots + a_{sn} \left(\frac{v_n}{v_s} \right) \right|$$

olduğu görülür. Bu eşitlik mutlak değer tanımı ve $|v_i/v_s| \leq 1$ ($i = 1(1)n$) özelliği kullanılırsa

$$|\lambda_i - a_{ss}| \leq |a_{s1}| \left| \frac{v_1}{v_s} \right| + |a_{s2}| \left| \frac{v_2}{v_s} \right| + \dots + 0 + \dots + |a_{sn}| \left| \frac{v_n}{v_s} \right|$$

olarak yazılabilir. $P_s = |a_{s1}| + |a_{s2}| + \dots + |a_{s,s-1}| + |a_{s,s+1}| + \dots + |a_{sn}|$ olduğundan, $|\lambda_i - a_{ss}| \leq P_s$ olduğu açık olarak görülür ve böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 1.3: $a, b, c \in IR$ ve $bc > 0$ olmak üzere

$$A = \begin{bmatrix} a & b & & & & \\ c & a & b & & & \\ & c & a & b & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & c & a & b \\ & & & & & c & a \end{bmatrix}$$

olarak verilen $A \in IR_N^N$ matrisinin λ_s özdeğerleri

$$\lambda_s = a + 2\sqrt{bc} \cos \frac{s\pi}{N+1}, \quad s = 1(1)N$$

dir [3].

İspat: λ , A matrisinin özdeğeri ve $x = (v_1, v_2, \dots, v_N)$ de λ özdeğerine karşılık gelen özvektör olsun. $x \neq 0$ olmak üzere özdeğer ve özvektör tanımından $Ax = \lambda x$ dir. Bu sistem açık olarak

$$\begin{aligned} (a - \lambda)v_1 + bv_2 &= 0 \\ cv_1 + (a - \lambda)v_2 + bv_3 &= 0 \\ &\vdots \\ cv_{j-1} + (a - \lambda)v_j + bv_{j+1} &= 0 \\ cv_{N-1} + (a - \lambda)v_N &= 0 \end{aligned}$$

biçiminde yazılabilir. Eğer $v_0 = v_{N+1} = 0$ olarak tanımlanırsa yukarıdaki N tane denklem

$$cv_{j-1} + (a - \lambda)v_j + bv_{j+1} = 0, \quad j = 1(1)N \quad (1.1)$$

denkleminle temsil edilebilir. Bu denklem bir fark denklemini olup karakteristik denklemi

$$c + (a - \lambda)m + bm^2 = 0 \quad (1.2)$$

dir. Daha sonra görüleceği üzere bu denklemin farklı iki kökü vardır. Bu durum göz önüne alınırsa (1.1) fark denkleminin çözümü, B ve C keyfi sabitler olmak üzere,

$$v_j = Bm_1^j + Cm_2^j$$

şeklindedir. Bu çözümde $v_0 = v_{N+1} = 0$ şartları kullanılırsa

$$B + C = 0$$

ve

$$Bm_1^{N+1} + Cm_2^{N+1} = 0$$

bulunur. Buradan

$$\left(\frac{m_1}{m_2}\right)^{N+1} = 1 = e^{i2s\pi}, \quad s = 1(1)N, \quad i = \sqrt{-1}$$

veya

$$\frac{m_1}{m_2} = e^{i2s\pi/(N+1)} \quad (1.3)$$

elde edilir. (1.2) denkleminin köklerinin çarpımı

$$m_1 m_2 = \frac{c}{b} \quad (1.4)$$

dir. (1.3) ve (1.4) denklemlerinden m_1 ve m_2 sırasıyla

$$m_1 = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{2}} e^{is\pi/(N+1)}$$
$$m_2 = \left(\frac{c}{b}\right)^{\frac{1}{2}} e^{-is\pi/(N+1)}$$

olarak bulunur. (1.2) denkleminin köklerinin toplamı

$$m_1 + m_2 = (\lambda - a) / b$$

olup buradan λ özdeğeri

$$\lambda = a + b(m_1 + m_2)$$

veya

$$\lambda = a + b\sqrt{\frac{c}{b}} \left(e^{is\pi/(N+1)} + e^{-is\pi/(N+1)} \right)$$

olarak elde edilir. O halde A matrisinin N tane özdeğeri

$$\lambda_s = a + 2\sqrt{bc} \cos \frac{s\pi}{N+1}, \quad s = 1(1)N$$

şeklindedir.

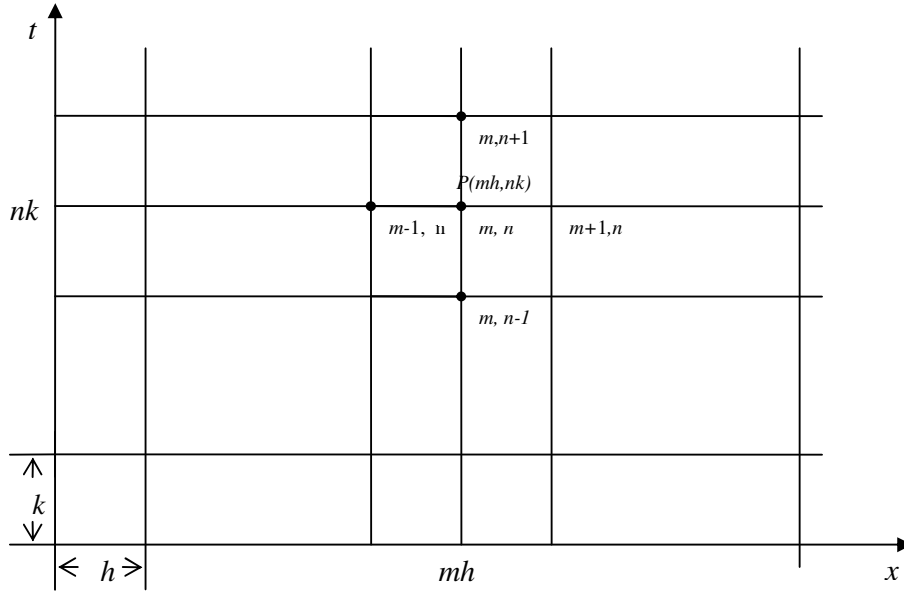
Kolayca gösterilebilir ki (1.2) denkleminin kökleri eşit olamaz. Eğer (1.2) denkleminin kökleri eşit olsaydı (1.1) denkleminin çözümü

$$v_j = (B + Cj)m_1^j$$

olurdu. $v_0 = v_{N+1} = 0$ olduğundan $B = C = 0$ ve dolayısıyla $v = 0$ olurdu. Bu ise özdeğer ve özvektör tanımına aykırıdır.

2. KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ

Sonlu fark yöntemleri, lineer ve lineer olmayan birçok kısmi diferansiyel denklemin çözümünde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bir kısmi diferansiyel denklemin sonlu fark yaklaşımı bulunurken öncelikle problemin çözüm bölgesi Şekil 2.1’de gösterildiği gibi genellikle dikdörtgensel şekiller içeren kafeslere bölünür ve problemin yaklaşık çözümü her bir kafesin düğüm (mesh veya grid) noktaları üzerinde hesaplanır. Daha sonra diferansiyel denklemdaki türevler ve sınır şartları yerine Taylor serisi yardımıyla elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece diferansiyel denklemin çözümü problemi, fark denklemlerinden oluşan lineer veya non-lineer bir cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine indirgenir. Elde edilen cebirsel denklem sistemi direkt veya iteratif yöntemlerden biri yardımıyla kolayca çözülür [5].



Şekil 2.1. Düğüm Noktalarının Gösterimi.

U , x ve t değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olsun. $\Delta x (\equiv h)$, x yönünde konum adım uzunluğu, $\Delta t (\equiv k)$, t yönünde zaman adım uzunluğu olmak üzere, konum ve zaman koordinatları x ve t sırasıyla

$$x = x_m = m\Delta x = mh, \quad m = 0(1)M, \quad l = Mh$$

$$t = t_n = n\Delta t = nk, \quad n = 0(1)N$$

olarak gösterilir.

Temsili bir $P(mh, nk)$ düğüm noktası üzerinde U fonksiyonunun noktasal değeri, $U_p = U(x, t) = U(m\Delta x, n\Delta t) = U_m^n$ ile gösterilir. U fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden türevlerine sonlu fark yaklaşımları, Taylor serisi yardımıyla

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^n - U_m^n}{h} + O(h) \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_m^n - U_{m-1}^n}{h} + O(h) \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^n - U_{m-1}^n}{2h} + O(h^2) \quad (2.3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} + O(k) \quad (2.4)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{U_m^n - U_m^{n-1}}{k} + O(k) \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_m^n - 2U_{m+1}^n + U_{m+2}^n}{h^2} + O(h) \quad (2.6)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-2}^n - 2U_{m-1}^n + U_m^n}{h^2} + O(h) \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} + O(h^2) \quad (2.8)$$

olarak bulunur. Burada “ O ”; sonsuz terimli bir eşitliğin sonlu bir terimde kesildiğini, $O(h)$ terimi hatanın $h \rightarrow 0$ iken h ile orantılı olduğunu gösterir ve $O(h)$ terimine kesme hatası denir. $O(k)$ ise hatanın k mertebesinde olduğunu ve böylece k ile orantılı olarak azalacağını göstermektedir (2.1), (2.2) ve (2.3) ile verilen, x değişkenine göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla iki nokta ileri, geri ve üç nokta merkezi fark formülleri denir. Benzer şekilde (2.4) ve (2.5) ile verilen, t değişkenine göre birinci mertebeden türev yaklaşımlarına sırasıyla ileri ve geri fark formülleri denir. (2.6), (2.7)

ve (2.8) ile verilen, x değişkenine göre ikinci mertebeden türev yaklaşımlarına ise sırasıyla üç nokta ileri, geri ve merkezi fark formülleri denir [3].

Verilen bir diferansiyel denklemi sonlu fark formunda ifade etmek için en çok kullanılan yöntemler şunlardır:

- Açık (Explicit) Sonlu Fark Yöntemi
- Kapalı (Implicit) Sonlu Fark Yöntemi
- Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

Bu yöntemler klasik sonlu fark yöntemleri olarak bilinir.

Bu çalışmada

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq l, \quad t > 0 \quad (2.9)$$

ısı iletim denklemi

$$\left. \begin{array}{l} U(0,t) = f_1(t) \\ U(l,t) = f_2(t) \end{array} \right\} \text{(Dirichlet sınır şartları)} \quad (2.10)$$

$$\left. \begin{array}{l} -k_1 \frac{\partial U}{\partial x}(0,t) = g_1(t) \\ k_1 \frac{\partial U}{\partial x}(l,t) = g_2(t) \end{array} \right\} \text{(Neumann sınır şartları)} \quad (2.11)$$

$$\left. \begin{array}{l} -k_1 \frac{\partial U}{\partial x}(0,t) + m_1 U(0,t) = h_1(t) \\ k_2 \frac{\partial U}{\partial x}(l,t) + m_2 U(l,t) = h_2(t) \end{array} \right\} \text{(Robbin sınır şartları)} \quad (2.12)$$

olarak verilen üç tip sınır şartı ve

$$U(x,0) = f(x) \quad 0 \leq x \leq l \quad (2.13)$$

başlangıç şartı için göz önüne alınacaktır. Burada $f_1, f_2, g_1, g_2, h_1, h_2$ fonksiyonları t nin bilinen fonksiyonları olup k_1, k_2, m_1, m_2 ve α sabit sayılardır.

Bundan sonra (2.9), (2.10) ve (2.13) denklemleriyle verilen probleme Dirichlet sınır şartlı, (2.9), (2.11) ve (2.13) denklemleriyle verilen probleme Neumann sınır şartlı ve (2.9), (2.12) ve (2.13) denklemleriyle verilen probleme de Robbin sınır şartlı ısı iletim problemi denilecektir.

2.1. Açık Sonlu Fark Yöntemi

(2.9) denklemindeki $\partial U / \partial t$ ve $\partial^2 U / \partial x^2$ türevleri yerine (2.5) ve (2.6) denklemleriyle verilen sonlu fark yaklaşımları hatalar ihmal edilerek yazılırsa ısı iletim denkleminin açık sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \alpha \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \quad (2.14)$$

veya

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad m = 0(1)M, \quad n = 0(1)N \quad (2.15)$$

olur. Burada $r = \alpha k / h^2$ olup hatanın mertebesinin $O(k) + O(h^2)$ olduğu açıkça görülür. Eğer t_m zaman adımında U_m^n değerleri verilirse t_{m+1} zaman adımında U_m^{n+1} değerleri (2.15) denkleminde kolayca bulunur [3].

- **Dirichlet Sınır Şartlı Isı İletim Problemi**

(2.9) denkleminin sınır şartlarının (2.10) ile verilen Dirichlet sınır şartları olması durumunda, $r = \alpha k / h^2$ olmak üzere, ısı iletim probleminin açık sonlu fark yaklaşımı

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n; \quad m = 1(1)M - 1, \quad n = 0(1)N \quad (2.16)$$

dir. t_m zaman adımında U_m^n değerleri verilirse t_{m+1} zaman adımında U_m^{n+1} değerleri (2.16) denkleminde kolayca bulunur.

- **Neumann Sınır Şartlı Isı İletim Problemi**

Şimdi de (2.9) ısı iletim denklemi (2.11) Neumann sınır şartlarına bağlı olarak göz önüne alınacaktır. (2.15) fark denklemi, $m=0$ ($x=0$) ve $m=M$ ($x=l$) için problemin çözüm bölgesi içine düşmeyen $(-1, n)$ ve $(M+1, n)$ düğüm noktalarında U_{-1}^n ve U_{M+1}^n değerlerini içermektedir. $(-1, n)$ ve $(M+1, n)$ düğüm noktalarına hayali noktalar, U_{-1}^n ve U_{M+1}^n değerlerine de hayali değerler adı verilir. Bu hayali değerler (2.11) sınır şartlarındaki U_x türevi yerine (2.3) ile verilen merkezi fark yaklaşımının kullanılmasıyla yok edilebilir. Böylece

$$U_0^{n+1} = 2rU_1^n + (1-2r)U_0^n + \frac{2rh}{k_1} g_1(t)$$

ve

$$U_M^{n+1} = 2rU_{M-1}^n + (1-2r)U_M^n + \frac{2rh}{k_1} g_2(t)$$

eşitlikleri bulunur. O halde Neumann sınır şartlı ısı iletim probleminin açık sonlu fark yaklaşımı

$$U_m^{n+1} = 2rU_{m+1}^n + (1-2r)U_m^n + \frac{2rh}{k_1} g_1(t), \quad m=0 \quad (2.17)$$

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad m=1(1)M-1 \quad (2.18)$$

$$U_m^{n+1} = 2rU_{m-1}^n + (1-2r)U_m^n + \frac{2rh}{k_1} g_2(t), \quad m=M \quad (2.19)$$

olarak elde edilir.

- **Robbin Sınır Şartlı Isı İletim Problemi**

Burada (2.9) ısı iletim denklemi (2.12) ile verilen Robbin sınır şartlarına bağlı olarak göz önüne alındı. (2.15) fark denkleminde $m = 0 (x = 0)$ ve $m = M (x = l)$ için ortaya çıkan U_{-1}^n ve U_{M+1}^n hayali değerleri (2.12) sınır şartlarındaki U_x türevi yerine (2.3) ile verilen merkezi fark yaklaşımının kullanılmasıyla sırasıyla

$$U_{-1}^n = U_1^n + \frac{2h}{k_1}(h_1(t) - m_1 U_0^n) \quad (2.20)$$

$$U_{M+1}^n = U_{M-1}^n + \frac{2h}{k_2}(h_2(t) - m_2 U_M^n) \quad (2.21)$$

olarak elde edilir. Bu eşitlikler $m = 0$ ve $m = M$ için (2.15) fark denkleminde kullanılarak U_{-1}^n ve U_{M+1}^n hayali değerleri yok edilebilir. Böylece Robbin sınır şartları ile verilen ısı iletim probleminin sonlu fark yaklaşımı herhangi bir n -inci zaman adımında

$$U_m^{n+1} = (1 - 2r\beta_1)U_m^n + 2rU_{m+1}^n + \frac{2rh}{k_1}h_1(t), \quad m = 0 \quad (2.22)$$

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad m = 1(1)M - 1 \quad (2.23)$$

$$U_m^{n+1} = 2rU_{m-1}^n + (1 - 2r\beta_2)U_m^n + \frac{2rh}{k_2}h_2(t), \quad m = M \quad (2.24)$$

olarak bulunur. Burada $\beta_1 = 1 + m_1 h/k_1$ ve $\beta_2 = 1 + m_2 h/k_2$ dir [6].

2.2. Kapalı Sonlu Fark Yöntemi

Bu yöntemde (2.9) ısı iletim denklemindeki $\partial^2 U / \partial x^2$ yerine $n+1$ -inci zaman adımındaki $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + O(h^2)$ merkezi fark formülü ve $\partial U / \partial t$ türevi yerine (2.4) ile verilen ileri fark formülü hatalar ihmal edilerek yazılırsa ısı iletim denkleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \alpha \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} \quad (2.25)$$

veya

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1 + 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n, \quad m = 0(1)M, \quad n = 0(1)N \quad (2.26)$$

dir. Burada $r = \alpha k / h^2$ olup hatanın mertebesinin $O(k) + O(h^2)$ olduğu açıkça görülür [3].

- **Dirichlet Sınır Şartlı Isı İletim Problemi**

Bu problem için herhangi bir n -inci zaman adımındaki U_0^{n+1} ve U_M^{n+1} değerleri (2.10) sınır şartlarından bilinen değerler olduğundan (2.9) ısı iletim denkleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı, $r = \alpha k / h^2$ olmak üzere,

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1 + 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n, \quad m = 1(1)M - 1, \quad n = 0(1)N \quad (2.27)$$

dir.

- **Neumann Sınır Şartlı Isı İletim Problemi**

(2.11) ile verilen Neumann sınır şartlarında $\partial U / \partial x$ türevi yerine $n+1$ -inci zaman adımındaki

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{U_{m+1}^{n+1} - U_{m-1}^{n+1}}{2h} \quad (2.28)$$

merkezi fark formülü yazılırsa sırasıyla

$$-k_1 \frac{U_1^{n+1} - U_{-1}^{n+1}}{2h} = g_1(t)$$

$$k_1 \frac{U_{M+1}^{n+1} - U_{M-1}^{n+1}}{2h} = g_2(t)$$

elde edilir. Bu eşitlikler sırasıyla

$$U_{-1}^{n+1} = U_1^{n+1} + \frac{2hg_1(t)}{k_1}$$

ve

$$U_{M+1}^{n+1} = U_{M-1}^{n+1} + \frac{2hg_2(t)}{k_1}$$

olarak yazılabilirler. Görüldüğü gibi bu son eşitliklerde problemin çözüm bölgesi içine düşmeyen U_{-1}^{n+1} ve U_{M+1}^{n+1} hayali değerleri bulunmaktadır. Bu hayali değerler $m = 0$ ve $m = M$ için (2.26) fark yaklaşımının kullanılmasıyla yok edilebilir. Böylece Neumann sınır şartlı ısı iletim probleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı,

$$(1 + 2r)U_m^{n+1} - 2rU_{m+1}^{n+1} - \frac{2rh}{k_1} g_1(t) = U_m^n, \quad m = 0 \quad (2.29)$$

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1 + 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n, \quad m = 1(1)M - 1 \quad (2.30)$$

$$-2rU_{m-1}^{n+1} + (1 + 2r)U_m^{n+1} - \frac{2rh}{k_1} g_2(t) = U_m^n, \quad m = M \quad (2.31)$$

olarak bulunur.

- **Robbin Sınır Şartlı Isı İletim Problemi**

(2.12) ile verilen Robbin sınır şartlarında $\partial U / \partial x$ türevi yerine (2.28) ile verilen merkezi fark yaklaşımı yazılırsa, sol sınır üzerinde $m = 0$ ($x = 0$) ve sağ sınır üzerinde $m = M$ ($x = l$) olacağından sırasıyla

$$-k_1 \frac{U_1^{n+1} - U_{-1}^{n+1}}{2h} + m_1 U_0^{n+1} = h_1(t) \quad (2.32)$$

$$k_2 \frac{U_{M+1}^{n+1} - U_{M-1}^{n+1}}{2h} + m_2 U_M^{n+1} = h_2(t) \quad (2.33)$$

veya

$$U_{-1}^{n+1} = U_1^{n+1} + 2 \frac{h}{k_1} (h_1(t) - m_1 U_0^{n+1}) \quad (2.34)$$

$$U_{M+1}^{n+1} = U_{M-1}^{n+1} + 2 \frac{h}{k_2} (h_2(t) - m_2 U_M^{n+1}) \quad (2.35)$$

hayali değerleri elde edilir. Bu değerler $m = 0$ ve $m = M$ için (2.26) fark yaklaşımının kullanılmasıyla yok edilebilir. Böylece Robbin sınır şartlı ısı iletim probleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı herhangi bir n -inci zaman adımı için

$$(1 + 2r\beta_1)U_m^{n+1} - 2rU_{m+1}^{n+1} - \frac{2rh}{k_1} h_1(t) = U_m^n, \quad m = 0 \quad (2.36)$$

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1 + 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n, \quad m = 1(1)M - 1 \quad (2.37)$$

$$-2rU_{m-1}^{n+1} + (1 + 2r\beta_2)U_m^{n+1} - \frac{2rh}{k_2} h_2(t) = U_m^n, \quad m = M \quad (2.38)$$

olarak yazılabilir.

2.3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

Bu yöntem John Crank ve Phyllis Nicolson tarafından önerilen modifiye edilmiş bir kapalı yöntemdir [3]. Bu yöntem sırasıyla (2.15) ve (2.26) denklemleriyle verilen açık ve kapalı sonlu fark yaklaşımlarının sağ taraflarının averajlarının alınmasıyla elde edilmiştir.

(2.9) ısı iletim denkleminin Crank- Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \frac{1}{2} \alpha \left[\frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} + \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \right] \quad (2.39)$$

dir. Bu denklem $m = 0(1)M$ ve $n = 0(1)N$ için

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad (2.40)$$

olarak yazılabilir [7].

- ***Dirichlet Sınır Şartlı Isı İletim Problemi***

Bu ısı iletim problemi için herhangi bir n -inci ve $n+1$ -inci zaman adımlarındaki U_0^n , U_M^n ve U_0^{n+1} , U_M^{n+1} değerleri sırasıyla (2.10) sınır şartlarından bilinen değerler olduğundan (2.9) ısı iletim denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı, $r = \alpha k / h^2$ olmak üzere, $m = 1(1)M - 1$ ve $n = 0(1)N$ için

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad (2.41)$$

şeklindedir.

- ***Neumann Sınır Şartlı Isı İletim Problemi***

(2.11) ile verilen Neumann sınır şartlarında $\partial U / \partial x$ türevi yerine n -inci zaman adımındaki (2.3) ve $n+1$ -inci zaman adımındaki (2.28) merkezi fark formülleri yazılırsa sırasıyla

$$-k_1 \frac{U_1^n - U_{-1}^n}{2h} = g_1(t) \quad (2.42)$$

$$-k_1 \frac{U_1^{n+1} - U_{-1}^{n+1}}{2h} = g_1(t) \quad (2.43)$$

$$k_1 \frac{U_{M+1}^n - U_{M-1}^n}{2h} = g_2(t) \quad (2.44)$$

$$k_1 \frac{U_{M+1}^{n+1} - U_{M-1}^{n+1}}{2h} = g_2(t) \quad (2.45)$$

elde edilir. Görüldüğü gibi bu son eşitliklerde problemin çözüm bölgesi içine düşmeyen U_{-1}^n , U_{-1}^{n+1} , U_{M+1}^n ve U_{M+1}^{n+1} hayali değerleri bulunmaktadır. Bu hayali değerler $m = 0$ ve $m = M$ için (2.40) fark denklemi ve (2.42), (2.43), (2.44) ve (2.45) denklemleri kullanılarak yok edilebilir. Böylece Neumann şartlı ısı iletim probleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$(2 + 2r)U_m^{n+1} - 2rU_{m+1}^{n+1} = (2 - 2r)U_m^n + 2rU_{m+1}^n + 4r \frac{hg_1(t)}{k_1}, \quad m = 0 \quad (2.46)$$

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2 + 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad m = 1(1)M - 1 \quad (2.47)$$

$$-2rU_{m-1}^{n+1} + (2 + 2r)U_m^{n+1} = 2rU_{m-1}^n + (2 - 2r)U_m^n + 4r \frac{hg_2(t)}{k_1}, \quad m = M \quad (2.48)$$

olarak elde edilir.

- **Robbin Sınır Şartlı Isı İletim Problemi**

(2.12) ile verilen Robbin sınır şartlarında $\partial U / \partial x$ türevi yerine n -inci zaman adımındaki (2.3) ve $n+1$ -inci zaman adımındaki (2.28) merkezi fark formülleri, sol sınır üzerinde $m = 0$ ($x = 0$) ve sağ sınır üzerinde $m = M$ ($x = l$) olacağından sırasıyla

$$-k_1 \frac{U_1^n - U_{-1}^n}{2h} + m_1 U_0^n = h_1(t) \quad (2.49)$$

$$k_2 \frac{U_{M+1}^n - U_{M-1}^n}{2h} + m_2 U_M^n = h_2(t) \quad (2.50)$$

$$-k_1 \frac{U_1^{n+1} - U_{-1}^{n+1}}{2h} + m_1 U_0^{n+1} = h_1(t) \quad (2.51)$$

$$k_2 \frac{U_{M+1}^{n+1} - U_{M-1}^{n+1}}{2h} + m_2 U_M^{n+1} = h_2(t) \quad (2.52)$$

elde edilir. Bu yaklaşımlar problemin çözüm bölgesi içine düşmeyen U_{-1}^n , U_{-1}^{n+1} , U_{M+1}^n ve U_{M+1}^{n+1} hayali değerlerini içermektedir. Bu hayali değerler $m = 0$ ve $m = M$ için (2.40) fark denklemi ve (2.49), (2.50), (2.51) ve (2.52) denklemleri kullanılarak yok

edilebilir. Böylece Robbin sınır şartlı ısı iletim probleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$(2 + 2r\beta_1)U_m^{n+1} - 2rU_{m+1}^{n+1} = (2 - 2r\beta_1)U_m^n + 2rU_{m+1}^n + 4r\frac{hh_1(t)}{k_1}, \quad m = 0 \quad (2.53)$$

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2 + 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad m = 1(1)M - 1 \quad (2.54)$$

$$-2rU_{m-1}^{n+1} + (2 + 2r\beta_2)U_m^{n+1} = 2rU_{m-1}^n + (2 - 2r\beta_2)U_m^n + 4r\frac{hh_2(t)}{k_2}, \quad m = M \quad (2.55)$$

olarak bulunur [6].

2.4. Ağırlıklı Averaj Yaklaşımı

(2.9) ile verilen ısı iletim denkleminin ağırlıklı averaj yaklaşımı, $0 \leq \theta \leq 1$ olmak üzere,

$$\frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} = \frac{\alpha}{h^2} \left\{ \theta(U_{m+1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m-1}^{n+1}) + (1 - \theta)(U_{m+1}^n - 2U_m^n + U_{m-1}^n) \right\} \quad (2.56)$$

veya

$$-r\theta U_{m-1}^{n+1} + (1 + 2r\theta)U_m^{n+1} - r\theta U_{m+1}^{n+1} = r(1 - \theta)U_{m-1}^n + (1 - 2r(1 - \theta))U_m^n + r(1 - \theta)U_{m+1}^n \quad (2.57)$$

şeklinindedir. Burada (2.57) denklemi $\theta = 0$ için (2.9) ısı denkleminin açık sonlu fark yaklaşımını, $\theta = 1$ için tamamen kapalı sonlu fark yaklaşımını, $\theta = 1/2$ için Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımını verir [3].

3. KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ İÇİN KARARLILIK ANALİZLERİ

Bu bölümde lineer denklemler için kullanılan kararlılık analizlerinden, Matris ve von Neumann (Fourier Serisi) yöntemleri verilecektir. Bu yöntemlerden önce lokal kesme hatası, tutarlılık, kararlılık ve yakınsaklık tanımları ile birlikte Lax'ın denklemler teoremi ispatı olarak verilecektir.

Tanım 3.1. (Lokal Kesme Hatası): (m,n) -inci düğüm noktasında bir kısmi diferansiyel denkleme yaklaşan fark denklemi, u fark denkleminin tam çözümü olmak üzere, $F_{m,n}(u) = 0$ olarak gösterilsin. (m,n) -inci düğüm noktasında sonlu fark yaklaşımının lokal kesme hatası, U kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümü olmak üzere, $T_{m,n} = F_{m,n}(U)$ olarak tanımlanır.

Lokal kesme hatası, sonlu fark yaklaşımının kısmi diferansiyel denkleme ne derece iyi yaklaştığını veren bir ölçüdür. Taylor serisi açılımının kullanılmasıyla lokal kesme hatası, h ve k değerlerinin kuvvetleri ve (mh, nk) noktasında kısmi diferansiyel denkleminin tam çözümünün (U) kısmi türevleri cinsinden kolayca açıklanabilir [3].

Tanım 3.2. (Tutarlılık): $h, k \rightarrow 0$ olduğunda lokal kesme hatasının limit değeri sıfıra yaklaşıyorsa fark denklemi tutarlıdır. Yani $\lim_{h,k \rightarrow 0} T_{m,n} = 0$ ise fark denklemi tutarlıdır denir [3].

Tanım 3.3. (Kararlılık): Kısmi diferansiyel denkleme karşılık gelen sonlu fark denkleminin çözümünün kısmi diferansiyel denkleminin çözümüne yakın kaldığı durumlarda yöntem kararlıdır denir [3].

Tanım 3.4. (Yakınsaklık): u , fark denkleminin ve U ise kısmi diferansiyel denklemin tam çözümleri olmak üzere $\lim_{h,k \rightarrow 0} u_m^n = U_m^n$ ise sonlu fark denkleminin çözümü kısmi diferansiyel denklemin çözümüne yakınsar denir [3].

Teorem 3.1. (Lax'ın Denklik Teoremi): Sonlu fark yönteminin yakınsak olması için gerek ve yeter şart yöntemin tutarlı ve kararlı olmasıdır [3].

3.1. Matris Yöntemi

Bu yöntem diferansiyel denklemi ve sınır şartlarını içeren problemin sonlu fark gösterimine karşılık gelen matrisin özdeğerlerindeki hata dağılımını inceler.

Peş peşe gelen n ve $(n+1)$ -inci zaman adımlarında bir sonlu fark denklemi, katsayıları sabitler olmak üzere,

$$b_{m-1}U_{m-1}^{n+1} + b_m U_m^{n+1} + b_{m+1}U_{m+1}^{n+1} = c_{m-1}U_{m-1}^n + c_m U_m^n + c_{m+1}U_{m+1}^n$$

şeklinde olsun. Bu yaklaşım $m = 0$ ve $m = M$ sınır değerleri biliniyorsa, $m = 1(1)M - 1$ için açık biçimde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} b_1 & b_2 & & & & \\ b_1 & b_2 & b_3 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & b_{M-3} & b_{M-2} & b_{M-1} \\ & & & & b_{M-2} & b_{M-1} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} c_1 & c_2 & & & & \\ c_1 & c_2 & c_3 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & c_{M-3} & c_{M-2} & c_{M-1} \\ & & & & c_{M-2} & c_{M-1} \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-2}^n \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} c_0 U_0^n - b_0 U_0^{n+1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ c_M U_M^n - b_M U_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{d}_n}$$

olarak veya kapalı biçimde $B\underline{U}^{(n+1)} = C\underline{U}^{(n)} + \underline{d}_n$ olarak yazılabilir. Burada B ve C $(M-1)$ mertebeden matrisler, $\underline{U}^{(n+1)}$ elemanları $U_1^{n+1}, U_2^{n+1}, \dots, U_{M-1}^{n+1}$ olan kolon vektörü ve \underline{d}_n bilinen sınır değerlerinden ve sıfırlardan oluşan kolon vektörüdür. Bu son eşitlik B tersi mevcut bir matris ise $A = B^{-1}C$ ve $\underline{f}_n = B^{-1}\underline{d}_n$ olmak üzere,

$$\underline{U}^{(n+1)} = A\underline{U}^{(n)} + \underline{f}_n \quad (3.1)$$

olarak ifade edilebilir.

\underline{U}^* , \underline{U} vektörüne bir yaklaşım ise

$$\underline{U}^{(n+1)*} = A\underline{U}^{(n)*} + \underline{f}_n \quad (3.2)$$

olarak yazılabilir. Hata

$$e_m^n = U_m^n - U_m^{(n)*}$$

olarak tanımlansın. $\underline{e}^{(n)} = [e_1^n \ e_2^n \dots \ e_{M-1}^n]^T$ olmak üzere (3.2) ifadesi (3.1) ifadesinden çıkartılırsa

$$\underline{e}^{(n+1)} = A\underline{e}^{(n)}, \ n > 0$$

elde edilir. Buradan

$$\underline{e}^{(n)} = A\underline{e}^{(n-1)} = A^2\underline{e}^{(n-2)} = \dots = A^n \underline{e}^{(0)} \quad (3.3)$$

bulunur. Burada $\underline{e}^{(0)} = [e_1^0 \ e_2^0 \dots \ e_{M-1}^0]^T$ başlangıç hatasıdır.

Başlangıç hatası $t = 0$ noktasında biliniyor olsun. Bu durumda $\underline{e}^{(n)}$ değerinin ne zaman sınırlı olduğu araştırılmalıdır. Bunun için A matrisinin reel, simetrik ve rankı $(M - 1)$ olan bir matris olduğu kabul edilmelidir. Bu durumda A matrisi $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{M-1}$ özdeğerlerine karşılık gelen $(M - 1)$ tane lineer bağımsız $\underline{W}_1, \underline{W}_2, \dots, \underline{W}_{M-1}$ özvektörlerine sahiptir. Böylece \underline{W}_s ($s = 1(1)M - 1$) özvektörleri IR^{M-1} uzayının bir bazını oluştururlar. O halde boyu $(M - 1)$ olan herhangi bir vektör \underline{W}_s özvektörlerinin bir lineer birleşimi olarak yazılabilir. $\underline{e}^{(0)} \in IR^{M-1}$ olduğundan, $\underline{e}^{(0)}$ vektörü, \underline{W}_s özvektörlerinin lineer birleşimi olarak

$$\underline{e}^{(0)} = \sum_{s=1}^{M-1} \alpha_s \underline{W}_s$$

şeklinde yazılabilir. (3.3) denkleminde $\underline{e}^{(n)} = A^n \underline{e}^{(0)}$ olduğundan

$$\underline{e}^{(n)} = A^n \sum_{s=1}^{M-1} \alpha_s \underline{W}_s \quad (3.4)$$

dir. Özdeğer ve özvektör tanımından $A^n \underline{W}_s = \lambda_s^n \underline{W}_s$ olduğundan (3.4) eşitliği

$$\underline{e}^{(n)} = \sum_{s=1}^{M-1} \alpha_s \lambda_s^n \underline{W}_s$$

olur. Buradan açıkça görüldüğü gibi $\underline{e}^{(n)}$ değerinin n artarken sınırlı kalması, $\max_s |\lambda_s| \leq 1$ olması ile mümkündür [3].

3.1.1. Açık Sonlu Fark Yaklaşımının Matris Yöntemiyle Kararlılık Analizi

- *Dirichlet Sınır Şartlı Isı İletim Problemi*

Dirichlet sınır şartlı ısı iletim probleminin (2.16) denklemi ile verilen açık sonlu fark yaklaşımı herhangi bir n -inci zaman adımında açık olarak

$$\left. \begin{aligned} U_1^{n+1} &= rU_0^n + (1-2r)U_1^n + rU_2^n \\ U_2^{n+1} &= rU_1^n + (1-2r)U_2^n + rU_3^n \\ &\vdots \\ U_{M-2}^{n+1} &= rU_{M-3}^n + (1-2r)U_{M-2}^n + rU_{M-1}^n \\ U_{M-1}^{n+1} &= rU_{M-2}^n + (1-2r)U_{M-1}^n + rU_M^n \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

şeklindedir.

(2.10) sınır şartlarından U_0^n ve U_M^n bilinen değerler olduğundan (3.5) denklem sistemi matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1-2r) & r & & & \\ & r & (1-2r) & r & \\ & & & \ddots & \\ & & & r & (1-2r) & r \\ & & & & r & (1-2r) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-2}^n \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} rf_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ rf_2 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

veya kısaca

$$\underline{U}^{(n+1)} = A\underline{U}^{(n)} + \underline{b}$$

olarak yazılabilir. Teorem 1.3'den dolayı A matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_s = (1-2r) + 2r \cos\left(\frac{s\pi}{M}\right), \quad s = 1(1)M-1$$

veya

$$\lambda_s = 1 - 4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right), \quad s = 1(1)M-1$$

dir. Matris yönteminde kararlılık için $\max_s |\lambda_s| \leq 1$ yani

$$\left| 1 - 4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right) \right| \leq 1, \quad s = 1(1)M-1$$

olmalıdır. Buradan;

$$-1 \leq 1 - 4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right) \leq 1$$

veya

$$-2 \leq -4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right) \leq 0$$

bulunur. Bu eşitsizliğin sağ parçasından $r \geq 0$ ve sol parçasından ise

$$-4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right) \geq -2$$

veya

$$r \leq \frac{1}{2 \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right)} \leq \frac{1}{2}$$

bulunur ve böylece kararlılık parametresi $r \leq 1/2$ olarak elde edilir. Dolayısıyla ısı iletim denkleminin açık yöntem ile elde edilen yaklaşık çözümünün, ancak $0 < r \leq 1/2$ olduğunda denklemin analitik çözümüne yakınsayacağı beklenir [3].

- **Neumann Sınır Şartlı Isı İletim Problemi**

Neumann sınır şartlı ısı iletim probleminin (2.17), (2.18) ve (2.19) denklemleriyle verilen açık sonlu fark yaklaşımı açık matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-1}^{n+1} \\ U_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-2r & 2r & & & & \\ & r & 1-2r & r & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & r & 1-2r & r \\ & & & & & 2r & 1-2r \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^n \\ U_1^n \\ \vdots \\ U_{M-1}^n \\ U_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 2rhg_1 \\ k_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 2rhg_2 \\ k_1 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

olarak veya kapalı matris formunda

$$\underline{U}^{(n+1)} = A \underline{U}^{(n)} + \underline{b}$$

olarak yazılabilir. Teorem 1.2'den A matrisinin özdeğerleri

$$|\lambda - (1-2r)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 1 + 2r = 2r \Rightarrow \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 - 1 + 2r = -2r \Rightarrow \lambda_2 = 1 - 4r \end{cases}$$

dir. Kararlılık için $|\lambda_i| \leq 1$ ($i=1, 2$) olmalıdır. Buradan

$$|\lambda_1| \leq 1 \text{ den } |1| \leq 1 \text{ ve } |\lambda_2| \leq 1 \text{ den } 0 \leq r \leq 1/2$$

bulunur. Böylece Neumann sınır şartlı ısı iletim probleminin açık sonlu fark yaklaşımının çözümü ancak $0 < r \leq 1/2$ olduğunda analitik çözüme yakınsar.

- **Robbin Sınır Şartlı Isı İletim Problemi**

Robbin sınır şartlı ısı iletim probleminin açık sonlu fark yaklaşımı (2.22), (2.23) ve (2.24) denklemleriyle verilen $(M + 1)$ bilinmeyenli $(M + 1)$ -tane lineer denklemden oluşan bir denklem sistemidir. Bu denklem sistemi matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-1}^{n+1} \\ U_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1-2r\beta_1) & 2r & & & \\ r & (1-2r) & r & & \\ & \ddots & & & \\ & & r & (1-2r) & r \\ & & & 2r & (1-2r\beta_2) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^n \\ U_1^n \\ \vdots \\ U_{M-1}^n \\ U_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2rhh_1}{k_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{2rhh_2}{k_2} \end{bmatrix}}_b$$

olarak veya kısaca

$$\underline{U}^{(n+1)} = A\underline{U}^{(n)} + \underline{b}$$

olarak yazılabilir. Teorem 1.2'den A matrisinin özdeğerleri;

$$\underline{m=0} \text{ için } a_{ss} = 1-2r\beta_1 \text{ ve } P_s = 2r \text{ olduğundan,}$$

$$|\lambda - (1 - 2r\beta_1)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 1 + 2r\beta_1 = 2r \Rightarrow \lambda_1 = 1 - 2r \frac{m_1 h}{k_1}, \\ \lambda_2 - 1 + 2r\beta_1 = -2r \Rightarrow \lambda_2 = 1 - 2r \left(2 + \frac{m_1 h}{k_1} \right), \end{cases}$$

$\underline{m = 1(1)M - 1}$ için $a_{ss} = 1 - 2r$ ve $P_s = 2r$ olduğundan,

$$|\lambda - (1 - 2r)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 - 1 + 2r = 2r \Rightarrow \lambda_3 = 1, \\ \lambda_4 - 1 + 2r = -2r \Rightarrow \lambda_4 = 1 - 4r, \end{cases}$$

$\underline{m = M}$ için $a_{ss} = 1 - 2r\beta_2$ ve $P_s = 2r$ olduğundan,

$$|\lambda - (1 - 2r\beta_2)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_5 - 1 + 2r\beta_2 = 2r \Rightarrow \lambda_5 = 1 - 2r \frac{m_2 h}{k_2} \\ \lambda_6 - 1 + 2r\beta_2 = -2r \Rightarrow \lambda_6 = 1 - 2r \left(2 + \frac{m_2 h}{k_2} \right) \end{cases}$$

dir. Kararlılık için $|\lambda_i| \leq 1$ ($i = 1(1)6$) olmalıdır. Burada λ_i değerleri tek tek incelendiğinde,

$$|\lambda_1| \leq 1 \text{ den } r \leq \frac{1}{m_1 h / k_1},$$

$$|\lambda_2| \leq 1 \text{ den } r \leq \frac{1}{2 + m_1 h / k_1},$$

$$|\lambda_3| \leq 1 \text{ den } |1| \leq 1,$$

$$|\lambda_4| \leq 1 \text{ den } r \leq \frac{1}{2},$$

$$|\lambda_5| \leq 1 \text{ den } r \leq \frac{1}{m_2 h / k_2}$$

ve

$$|\lambda_6| \leq 1 \text{ den } r \leq \frac{1}{2 + m_2 h / k_2}$$

bulunur. Böylece Robbin sınır şartlı ısı iletim probleminin açık sonlu fark yaklaşımından elde edilecek çözümler ancak $r \leq \min \left\{ \frac{1}{2 + m_1 h/k_1}, \frac{1}{2 + m_2 h/k_2} \right\}$ olduğunda problemin analitik çözümüne yakınsar.

3.1.2. Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımının Matris Yöntemiyle Kararlılık Analizi

- *Dirichlet Sınır Şartlı Isı İletim Problemi*

Dirichlet sınır şartlı ısı iletim probleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı (2.16) denklemleri ile verilmiştir. Bu sonlu fark yaklaşımı herhangi bir n -inci zaman adımında açık olarak yazıldığında,

$$\left. \begin{aligned} -rU_0^{n+1} + (1+2r)U_1^{n+1} - rU_2^{n+1} &= U_1^n \\ -rU_1^{n+1} + (1+2r)U_2^{n+1} - rU_3^{n+1} &= U_2^n \\ &\vdots \\ -rU_{M-3}^{n+1} + (1+2r)U_{M-2}^{n+1} - rU_{M-1}^{n+1} &= U_{M-2}^n \\ -rU_{M-2}^{n+1} + (1+2r)U_{M-1}^{n+1} - rU_M^{n+1} &= U_{M-1}^n \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

denklemler sistemi elde edilir. (3.6) denklemler sistemi herhangi bir n -inci zaman adımı için matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (1+2r) & -r & & & \\ -r & (1+2r) & -r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -r & (1+2r) & -r \\ & & & & -r & (1+2r) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-2}^n \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} rf_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ rf_2 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

veya kısaca

$$A\underline{U}^{(n+1)} = \underline{U}^{(n)} + \underline{b}$$

olarak yazılabilir. Bu matris formu, A tersi mevcut bir matris olduğundan,

$$\underline{U}^{(n+1)} = A^{-1}\underline{U}^{(n)} + A^{-1}\underline{b}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada kararlılık analizi için A^{-1} matrisinin özdeğerlerine ihtiyaç vardır. λ_s , A matrisinin özdeğerleri ise A^{-1} matrisinin özdeğerleri $1/\lambda_s$ değeridir. A matrisinin özdeğerleri Teorem 1.3'den

$$\lambda_s = (1 + 2r) + 2r \cos\left(\frac{s\pi}{M}\right), \quad s = 1(1)M - 1$$

olarak veya

$$\lambda_s = 1 + 4r \cos^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right), \quad s = 1(1)M - 1$$

olarak bulunur. Böylece A^{-1} matrisinin özdeğerleri

$$\frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{1 + 4r \cos^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right)}, \quad s = 1(1)M - 1$$

dir. Matris yönteminde kararlılık için gerek ve yeter şart $\max_s |1/\lambda_s| \leq 1$ olmasıdır.

Buradan

$$\left| \frac{1}{\lambda_s} \right| = \frac{1}{\left| 1 + 4r \cos^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right) \right|} \leq 1, \quad s = 1(1)M - 1$$

bulunur. Bu eşitsizlik $\forall r > 0$ için sağlandığından yöntem şartsız kararlıdır. Böylece Dirichlet sınır şartlı ısı iletim probleminin kapalı yöntem ile elde edilen yaklaşık çözümü r kararlılık parametresinin herhangi bir seçimi için analitik çözüme yakınsar.

- *Neumann Sınır Şartlı Isı İletim Problemi*

Neumann sınır şartlı ısı iletim probleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı (2.29), (2.30) ve (2.31) denklemleriyle verilen $(M + 1)$ bilinmeyenli $(M + 1)$ -tane lineer denklemden oluşan bir denklem sistemidir. Bu denklem sistemi matris biçiminde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1+2r & -2r & & & & \\ & -r & 1+2r & -r & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -r & 1+2r & -r \\ & & & & & -2r & 1+2r \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-1}^{n+1} \\ U_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^n \\ U_1^n \\ \vdots \\ U_{M-1}^n \\ U_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2rhg_1}{k_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{2rhg_2}{k_1} \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

olarak veya kısaca

$$A\underline{U}^{(n+1)} = \underline{U}^{(n)} + \underline{b}$$

olarak yazılabilir. Bu matris formu A tersi mevcut bir matris olduğundan,

$$\underline{U}^{(n+1)} = A^{-1}\underline{U}^{(n)} + A^{-1}\underline{b}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Teorem 1.2'den A matrisinin özdeğerleri

$$|\lambda - (1 + 2r)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 1 - 2r = 2r \Rightarrow \lambda_1 = 1 + 4r, \\ \lambda_2 - 1 - 2r = -2r \Rightarrow \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

olarak bulunur. A matrisinin özdeğerleri λ_i ise A^{-1} matrisinin özdeğerleri $1/\lambda_i$ değerleridir. O halde kararlılık için $|1/\lambda_i| \leq 1$ ($i=1,2$) olmalıdır. Buradan kararlılık parametresi $r > 0$ olarak bulunur. Böylece Neumann sınır şartlı ısı iletim probleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı ile elde edilen yaklaşık çözümü r kararlılık parametresinin herhangi bir seçimi için problemin analitik çözümüne yakınsar. Yani yöntem şartsız kararlıdır.

- **Robbin Sınır Şartlı Isı İletim Problemi**

Robbin sınır şartlı ısı iletim probleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı (2.36), (2.37) ve (2.38) denklemleriyle verilen $(M + 1)$ bilinmeyenli $(M + 1)$ -tane lineer denklemden oluşan bir denklem sistemidir. Bu denklem sistemi matris biçiminde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (1+2r\beta_1) & -2r & & & & \\ -r & (1+2r) & -r & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & -r & (1+2r) & -r \\ & & & & -2r & (1+2r\beta_2) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-1}^{n+1} \\ U_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^n \\ U_1^n \\ \vdots \\ U_{M-1}^n \\ U_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{2rhh_1}{k_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{2rhh_2}{k_2} \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

veya kısaca

$$A\underline{U}^{(n+1)} = \underline{U}^{(n)} + \underline{b}$$

olarak yazılabilir. Bu matris formu A tersi mevcut bir matris olduğundan,

$$\underline{U}^{(n+1)} = A^{-1}\underline{U}^{(n)} + A^{-1}\underline{b}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Teorem 1.2'den A matrisinin özdeğerleri;

$\underline{m} = 0$ için $a_{ss} = 1 + 2r\beta_1$ ve $P_s = 2r$ olduğundan

$$|\lambda - (1 + 2r\beta_1)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 1 - 2r\beta_1 = 2r \Rightarrow \lambda_1 = 1 + 2r \left(2 + \frac{m_1 h}{k_1} \right), \\ \lambda_2 - 1 - 2r\beta_1 = -2r \Rightarrow \lambda_2 = 1 + 2r \frac{m_1 h}{k_1} \end{cases}$$

$\underline{m} = 1(1)M - 1$ için $a_{ss} = 1 + 2r$ ve $P_s = 2r$ olduğundan

$$|\lambda - (1 + 2r)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 - 1 - 2r = 2r \Rightarrow \lambda_3 = 1 + 4r, \\ \lambda_4 - 1 - 2r = -2r \Rightarrow \lambda_4 = 1 \end{cases}$$

$m = M$ için $a_{ss} = 1 + 2r\beta_2$ ve $P_s = 2r$ olduğundan,

$$|\lambda - (1 + 2r\beta_2)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_5 - 1 - 2r\beta_2 = 2r \Rightarrow \lambda_5 = 1 + 2r \left(2 + \frac{m_2 h}{k_2} \right), \\ \lambda_6 - 1 - 2r\beta_2 = -2r \Rightarrow \lambda_6 = 1 + 2r \frac{m_2 h}{k_2} \end{cases}$$

olarak bulunur.

A matrisinin özdeğerleri λ_i ise, A^{-1} matrisinin özdeğerleri $1/\lambda_i$ değeridir. O halde kararlılık için $|1/\lambda_i| \leq 1$ ($i=1(1)6$) olmalıdır. Buradan kararlılık parametresi $r > 0$ olarak bulunur. Böylece Robbin sınır şartlı ısı iletim probleminin kapalı sonlu fark yöntemi ile elde edilen yaklaşık çözümü r kararlılık parametresinin herhangi bir seçimi için problemin analitik çözümüne yakınsar. Yani yöntem şartsız kararlıdır.

3.1.3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımının Matris Yöntemiyle Kararlılık Analizi

- *Dirichlet Sınır Şartlı Isı İletim Problemi*

Dirichlet sınır şartlı ısı iletim probleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı (2.40) denkleminde ifade edilmiştir. Bu sonlu fark yaklaşımı herhangi bir n -inci zaman adımında açık olarak yazılırsa,

$$\left. \begin{aligned} -rU_0^{n+1} + (2+2r)U_1^{n+1} - rU_2^{n+1} &= rU_0^n + (2-2r)U_1^n + rU_2^n \\ -rU_1^{n+1} + (2+2r)U_2^{n+1} - rU_3^{n+1} &= rU_1^n + (2-2r)U_2^n + rU_3^n \\ \vdots & \\ -rU_{M-3}^{n+1} + (2+2r)U_{M-2}^{n+1} - rU_{M-1}^{n+1} &= rU_{M-3}^n + (2-2r)U_{M-2}^n + rU_{M-1}^n \\ -rU_{M-2}^{n+1} + (2+2r)U_{M-1}^{n+1} - rU_M^{n+1} &= rU_{M-2}^n + (2-2r)U_{M-1}^n + rU_M^n \end{aligned} \right\} (3.7)$$

denklemler sistemi elde edilir. (3.7) denklemler sistemi herhangi bir n -inci zaman adımı için matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (2+2r) & -r & & & \\ -r & (2+2r) & -r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -r & (2+2r) & -r \\ & & & -r & (2+2r) & \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (2-2r) & r & & & \\ r & (2-2r) & r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & r & (2-2r) & r \\ & & & & & r & (2-2r) \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-2}^n \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} rf_1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ rf_2 \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

olarak veya kısaca

$$A\underline{U}^{(n+1)} = B\underline{U}^{(n)} + \underline{b}$$

olarak yazılabilir. Bu matris formu A tersi mevcut bir matris olduğundan,

$$\underline{U}^{(n+1)} = A^{-1}B\underline{U}^{(n)} + A^{-1}\underline{b}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Dikkat edilirse $B = 4I_{M-1} - A$ olduğu kolaylıkla görülür.

Buradan $\underline{U}^{(n+1)} = (4A^{-1} - I_{M-1})\underline{U}^{(n)}$ bulunur. λ , A matrisinin bir özdeğeri olmak üzere $4A^{-1} - I_{M-1}$ matrisinin özdeğeri $4/\lambda - 1$ şeklindedir. Bu yöntemin kararlı olabilmesi için $|4/\lambda - 1| \leq 1$ olmalıdır. Buradan $\lambda \geq 2$ elde edilir.

A matrisinin λ özdeğerleri $[2, 2+4r]$ aralığında olup $\forall r > 0$ için $\lambda \geq 2$ olduğundan yöntem şartsız kararlıdır.

- **Neumann Sınır Şartlı Isı İletim Problemi**

Neumann sınır şartlı ısı iletim denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı (2.46), (2.47) ve (2.48) denklemleriyle verilen $(M + 1)$ bilinmeyenli $(M + 1)$ -tane lineer denklemden oluşan bir denklem sistemidir. Bu denklem sistemi matris biçiminde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2+2r & -2r & & & \\ & -r & 2+2r & -r & \\ & & & \ddots & \\ & & & -r & 2+2r & -r \\ & & & & -2r & 2+2r \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-1}^{n+1} \\ U_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \\
 \underbrace{\begin{bmatrix} 2-2r & 2r & & & \\ & r & 2-2r & r & \\ & & & \ddots & \\ & & & r & 2-2r & r \\ & & & & 2r & 2-2r \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^n \\ U_1^n \\ \vdots \\ U_{M-1}^n \\ U_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4rhg_1}{k_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{4rhg_2}{k_1} \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

veya kısaca

$$A\underline{U}^{(n+1)} = B\underline{U}^{(n)} + \underline{b}$$

olarak yazılabilir. Burada $B = 4I_{M-1} - A$ olduğundan yöntemin şartsız kararlı olduğu yukarıdakine benzer şekilde kolayca gösterilebilir.

- **Robbin Sınır Şartlı Isı İletim Problemi**

Robbin sınır şartlı (2.9) ısı iletim probleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı (2.53), (2.54) ve (2.55) denklemleriyle verilen $(M + 1)$ bilinmeyenli $(M + 1)$ -tane lineer denklemden oluşan bir denklem sistemidir. Bu denklem sistemi matris biçiminde

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2+2r\beta_1 & -2r & & & \\ & -r & 2+2r & -r & \\ & & & \ddots & \\ & & & -r & 2+2r & -r \\ & & & & -2r & 2+2r\beta_2 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-1}^{n+1} \\ U_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2-2r\beta_1 & 2r & & & \\ & r & 2-2r & r & \\ & & & \ddots & \\ & & & r & 2-2r & r \\ & & & & 2r & 2-2r\beta_2 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^n \\ U_1^n \\ \vdots \\ U_{M-1}^n \\ U_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{4rhh_1}{k_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{4rhh_2}{k_2} \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

veya kısaca

$$A\underline{U}^{(n+1)} = B\underline{U}^{(n)} + \underline{b}$$

olarak yazılabilir. Burada $B = 4I_{M-1} - A$ olduğundan yöntemin şartsız kararlı olduğu yukarıdakine benzer şekilde kolayca gösterilebilir.

3.2. von Neumann (Fourier Serisi) Yöntemi

Fourier seri yöntemi sadece diferansiyel denklemin kararlılığını hata yayılımı için inceleyer.

Burada T sonlu, $\delta x = h \rightarrow 0$, $\delta t = k \rightarrow 0$ ve $N \rightarrow \infty$ olduğunda $0 \leq t \leq T = Nk$ zaman aralığında $U(x,t)$ için lineer 2 zaman seviyeli fark denkleminin kararlılığı konusu incelenecektir. Fourier seri veya von Neumann metodu, $t = 0$ düğüm noktası boyunca sonlu Fourier serisine göre başlangıç değerini ifade eder. Böylece kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için kullanılan “değişkenlerine ayırma” yöntemine benzer olarak $t = 0$ için Fourier serilerine indirgenen bir fonksiyon göz önüne alınır.

Her ne kadar Fourier serileri sinüs ve cosinüs fonksiyonlarına göre ifade edilebiliyorsa da cebirsel olarak üstel biçimde yazılması daha uygundur. Yani

$\sum a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ veya $\sum b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ ifadeleri yerine bu denklemlere denk olan $\sum A_n e^{in\pi x/l}$ üstel ifadesi yazılabilir. Burada $i = \sqrt{-1}$ ve l, x aralığının uzunluğudur. Buna göre

$$A_n e^{in\pi x/l} = A_n e^{in\pi mh/l} = A_n e^{i\beta_n mh}$$

yazılabilir. Burada $\beta_n = n\pi/Mh$ ve $Mh = l$ olarak alınmıştır.

$t = 0$ pivot noktasındaki başlangıç değerlerini $U(mh, 0) = U_m^0$, $m = 0(1)M$ şeklinde olan $(M+1)$ -tane denklem, A_0, A_1, \dots, A_M bilinmeyen sabitlerini tek türlü belirlemek için yeterlidir. Bu ise başlangıç düğüm değerlerinin kompleks üstel formda açıklanabildiğini gösterir. Buna göre göz önüne alınan lineer fark denkleminin $e^{i\beta mh}$ gibi yalnız bir başlangıç değerinden elde edilmesi mümkündür. Çünkü lineer fark denklemi bağımsız çözümlerin lineer birleşimi şeklinde yazılabilir.

t değerinin artışına göre üstel dağılıma bakmak için

$$U_m^n = e^{i\beta x} e^{\alpha} = e^{i\beta mh} e^{\alpha k} = e^{i\beta mh} \varepsilon^n \quad (3.8)$$

ifadesi göz önüne alınır. Burada α genellikle kompleks bir sabit olmak üzere $\varepsilon = e^{\alpha k}$ olarak kullanılır ve ε genellikle güçlendirme faktörü (amplification factor) olarak adlandırılır.

Sonlu fark denkleminin kararlılığı için $h \rightarrow 0$ ve $k \rightarrow 0$ olduğunda her $n \leq N$ ve başlangıç şartını sağlayan tüm β değerleri için $|U_m^n|$ kalıntısı sabit olmalıdır. Bu ifade Lax-Richtmyer tanımı olarak bilinir.

Sonlu fark denkleminin tam çözümü zamana bağlı olarak üstel biçimde artmıyor ise kararlılık için gerek ve yeter şart

$$|\varepsilon| \leq 1$$

yani $-1 \leq \varepsilon \leq 1$ olmalıdır.

Bununla birlikte U_m^n zamana bağılı olarak artıyor ise kararlılık için gerek ve yeter şart; K pozitif sayısı, h , k , ve β değerlerinden bağımsız olmak üzere

$$|\varepsilon| \leq 1 + Kk = 1 + O(k)$$

olmasıdır.

Bu yöntem sabit katsayılı lineer denklemler için uygulanır ve l periyotlu periyodik başlangıç değerli problemler için geçerlidir.

3 veya daha fazla zaman seviyeli ya da iki veya daha fazla bağımlı değişken içeren fark denklemleri için von Neumann şartları gereklidir; ancak bu şartlar yeterli olmayabilir [3].

3.2.1. von Neumann Yöntemiyle Kararlılık Analizi

(2.9) ile verilen ısı iletim denkleminin ağırlıklı (2.57) ile verilen averaj yaklaşımında (3.8) eşitliği yerine konulup gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\varepsilon(-r\theta e^{-i\beta h} + (1 + 2r\theta) - r\theta e^{i\beta h}) = r(1 - \theta)e^{-i\beta h} + (1 - 2r(1 - \theta)) + r(1 - \theta)e^{i\beta h}$$

elde edilir. Bu eşitlikte $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ Euler formülünün kullanılmasıyla ε güçlendirme çarpanı

$$\varepsilon = \frac{1 - 4r(1 - \theta)\sin^2(\beta h/2)}{1 + 4r\theta\sin^2(\beta h/2)} \quad (3.9)$$

olarak elde edilir.

- **Açık Sonlu Fark Yaklaşımının von Neumann Yöntemiyle Kararlılık Analizi**

(2.57) ağırlıklı averaj yaklaşımı $\theta = 0$ için (2.15) ile verilen açık sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. $\theta = 0$ olduğunda (3.9) ile verilen ε değeri

$$\varepsilon = 1 - 4r \sin^2(\beta h / 2)$$

dir. Yöntemin kararlı olabilmesi için $|\varepsilon| \leq 1$ olmalıdır. O halde

$$|\varepsilon| = |-4r \sin^2(\beta h / 2) + 1| \leq 1$$

veya

$$-2 \leq -4r \sin^2(\beta h / 2) \leq 0$$

olmalıdır. Bu eşitliğin sağ parçasından $r > 0$, sol parçasından ise

$$r \leq \frac{1}{2 \sin^2(\beta h / 2)} \leq \frac{1}{2}$$

bulunur. Böylece açık sonlu fark yaklaşımı ancak $0 < r \leq \frac{1}{2}$ olduğunda kararlıdır.

- ***Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımının von Neumann Yöntemiyle Kararlılık Analizi***

(2.57) ağırlıklı averaj yaklaşımı $\theta = 1$ için (2.26) ile verilen kapalı sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. $\theta = 1$ olduğunda (3.9) ile verilen ε değerinin

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + 4r \sin^2(\beta h / 2)}$$

olduğu görülür. Yöntemin kararlı olabilmesi için $|\varepsilon| \leq 1$ yani

$$|\varepsilon| = \frac{1}{|1 + 4r \sin^2(\beta h / 2)|} \leq 1$$

olmalıdır. Bu durumda tüm β değerleri için $|\varepsilon| \leq 1$ dir. Böylece kapalı yöntem şartsız kararlıdır.

- ***Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımının von Neumann Yöntemiyle Kararlılık Analizi***

(2.57) ağırlıklı averaj yaklaşımı $\theta = 1/2$ için (2.40) ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımına karşılık gelir. $\theta = 1/2$ olduğunda (3.9) ile verilen ε değerinin

$$\varepsilon = \frac{1 - 2r \sin^2(\beta h / 2)}{1 + 2r \sin^2(\beta h / 2)}$$

olduğu görülür. Yöntemin kararlı olabilmesi için $|\varepsilon| \leq 1$ olmalıdır. Tüm β değerleri için $|\varepsilon| \leq 1$ eşitsizliği sağlandığından, Crank-Nicolson yöntemi şartsız kararlıdır.

4. KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİNİN LOKAL KESME HATASI

Bu bölümde $\alpha=1$ için (2.9) ısı iletim denkleminin açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımlarının lokal kesme hatalarının mertebesi hesaplanacaktır.

$\alpha=1$ için (2.9) ısı iletim denklemi

$$\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} = 0 \quad (4.1)$$

olur. (4.1) ısı iletim denkleminin tam çözümü U_m^n ve bu denkleme karşılık gelen herhangi bir sonlu fark denkleminin tam çözümü de u_m^n olsun. Bu durumda $u_m^n \cong U_m^n$ dir.

4.1. Açık Sonlu Fark Yaklaşımının Lokal Kesme Hatası

(4.1) denkleminin karşılık gelen açık sonlu fark denklemi

$$F_{m,n}(u) = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} - \frac{u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{h^2} = 0$$

şekindedir. Böylece lokal kesme hatasının tanımından

$$T_{m,n} = F_{m,n}(U) = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} - \frac{U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{h^2} \quad (4.2)$$

dir. U_{m+1}^n , U_{m-1}^n ve U_m^{n+1} ifadelerinin Taylor seri açılımları sırasıyla

$$\begin{aligned} U_{m+1}^n &= U\{(m+1)h, nk\} = U(x_m + h, t_n) \\ &= U_m^n + h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{m,n} + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} + \frac{1}{6} h^3 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_{m,n} + \dots \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$\begin{aligned}
U_{m-1}^n &= U\{(m-1)h, nk\} = U(x_m - h, t_n) \\
&= U_m^n - h \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)_{m,n} + \frac{1}{2} h^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} - \frac{1}{6} h^3 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial x^3} \right)_{m,n} + \dots \quad (4.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_m^{n+1} &= U\{mh, (n+1)k\} = U(x_m, t_n + k) \\
&= U_m^n + k \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{m,n} + \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{m,n} + \frac{1}{6} k^3 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right)_{m,n} + \dots \quad (4.5)
\end{aligned}$$

dir. (4.2) eşitliğinde (4.3), (4.4) ve (4.5) eşitliklerinin yazılmasıyla

$$\begin{aligned}
T_{m,n} &= \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} + \frac{1}{2} k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{m,n} - \frac{1}{12} h^2 \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_{m,n} \\
&\quad + \frac{1}{6} k^2 \left(\frac{\partial^3 U}{\partial t^3} \right)_{m,n} - \frac{1}{360} h^4 \frac{\partial^6 U}{\partial x^6} + \dots \quad (4.6)
\end{aligned}$$

elde edilir. U , verilen kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü olduğundan açıkça

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} = 0$$

dir. Böylece lokal kesme hatasının esas kısmı

$$\left(\frac{1}{2} k \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{12} h^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_{m,n}$$

şeklinindedir. O halde lokal kesme hatası

$$T_{m,n} = O(k) + O(h^2)$$

dir [6].

4.2. Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımının Lokal Kesme Hatası

(4.1) denkleminin karşılık gelen kapalı sonlu fark denklemi

$$F_{m,n}(u) = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} - \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1}}{h^2} = 0$$

şeklinde. Böylece lokal kesme hatasının tanımından

$$T_{m,n} = F_{m,n}(U) = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} - \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1}}{h^2} \quad (4.7)$$

dir. U_{m+1}^{n+1} , U_{m-1}^{n+1} ve U_m^{n+1} ifadelerinin Taylor serisi açılımları sırasıyla

$$\begin{aligned} U_{m+1}^{n+1} &= U\{(m+1)h, (n+1)k\} = U(x_m + h, t_n + k) \\ &= U_{m+1}^n + k \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{m+1,n} + \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{m+1,n} + \dots \\ &= U_m^n + h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dots + k \frac{\partial}{\partial t} \left\{ U_m^n + h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dots \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ U_m^n + h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dots \right\} \end{aligned} \quad (4.8)$$

$$\begin{aligned} U_{m-1}^{n+1} &= U\{(m-1)h, (n+1)k\} = U(x_m - h, t_n + k) \\ &= U_{m-1}^n + k \left(\frac{\partial U}{\partial t} \right)_{m-1,n} + \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{m-1,n} + \dots \\ &= U_m^n - h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dots + k \frac{\partial}{\partial t} \left\{ U_m^n - h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dots \right\} \\ &\quad + \frac{1}{2} k^2 \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ U_m^n - h \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{2} h^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} - \dots \right\} + \dots \end{aligned} \quad (4.9)$$

dir. (4.7) eşitliğinde (4.5), (4.8) ve (4.9) eşitliklerinin yazılmasıyla

$$T_{m,n} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} + \frac{1}{2}k \left(\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \right)_{m,n} - \frac{1}{24}h^2 \left(\frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_{m,n} - k \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} - \frac{1}{2}k^2 \frac{\partial}{\partial t^2} \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \dots$$

elde edilir. U , verilen kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü olduğundan,

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} = 0$$

dir. Böylece lokal kesme hatasının esas kısmı,

$$\left(\frac{1}{2}k \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} - \frac{1}{24}h^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_{m,n}$$

şeklindedir. O halde kapalı yöntem için lokal kesme hatasının

$$T_{m,n} = O(k) + O(h^2)$$

olduğu görülür [3].

4.3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımının Lokal Kesme Hatası

(4.1) denkleme karşılık gelen Crank-Nicolson sonlu fark denklemini

$$F_{m,n}(u) = \frac{u_m^{n+1} - u_m^n}{k} - \frac{u_{m-1}^{n+1} - 2u_m^{n+1} + u_{m+1}^{n+1} + u_{m-1}^n - 2u_m^n + u_{m+1}^n}{2h^2} = 0$$

şeklindedir. Lokal kesme hatasının tanımından

$$T_{m,n} = F_{m,n}(U) = \frac{U_m^{n+1} - U_m^n}{k} - \frac{U_{m-1}^{n+1} - 2U_m^{n+1} + U_{m+1}^{n+1} + U_{m-1}^n - 2U_m^n + U_{m+1}^n}{2h^2} \quad (4.10)$$

dir. (4.3), (4.4), (4.5), (4.8) ve (4.9) ifadelerinin Taylor seri açılımlarının (4.10) eşitliğinde yerlerine yazılmasıyla

$$T_{m,n} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} + \frac{1}{2} k \frac{\partial}{\partial t} \left[\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right]_{m,n} + \frac{1}{6} k^2 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \frac{1}{12} h^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} + O(h^4) + O(kh^2)$$

elde edilir. U fonksiyonu verilen kısmi diferansiyel denklemin tam çözümü olduğundan açıkça

$$\left(\frac{\partial U}{\partial t} - \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \right)_{m,n} = 0$$

dir. Böylece lokal kesme hatasının esas kısmı

$$\left(\frac{1}{6} k^2 \frac{\partial^3 U}{\partial t^3} - \frac{1}{12} h^2 \frac{\partial^4 U}{\partial x^4} \right)_{m,n}$$

şeklindedir. O halde Crank-Nicolson yöntemi için lokal kesme hatasının mertebesi

$$T_{m,n} = O(k^2) + O(h^2)$$

dir [8].

5. MODEL PROBLEMLER

Bu bölümde (2.9) ile verilen ısı iletim denklemi için farklı sınır ve başlangıç şartlarına bağlı olarak model problemler ele alınacaktır. Bu problemler için açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımlarının matris ve von Neumann yöntemleriyle kararlılıkları incelenecek ve elde edilen nümerik çözümlerle analitik çözümler karşılaştırılacaktır.

Problem 1: Bu problemde

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

denkleminin verilen 1-boyutlu zamana bağlı ısı iletim denklemi

$$U(0, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$U(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = f(x) = \begin{cases} 2x, & 0 \leq x \leq 1/2 \\ 2(1-x), & 1/2 \leq x \leq 1 \end{cases}$$

başlangıç şartına bağlı olarak göz önüne alınmıştır. Bu problemin analitik çözümü

$$U(x, t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{2} n\pi \right) (\sin n\pi x) e^{-n^2 \pi^2 t}$$

dir [3].

◆ **Açık Sonlu Fark Yaklaşımı**

Bu problemin açık sonlu fark yaklaşımı

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad m = 1(1)M-1, \quad n = 0(1)N \quad (5.1)$$

şeklindedir. (5.1) ile verilen yaklaşım açık biçimde

$$\left. \begin{aligned} U_1^{n+1} &= rU_0^n + (1-2r)U_1^n + rU_2^n \\ U_2^{n+1} &= rU_1^n + (1-2r)U_2^n + rU_3^n \\ &\vdots \\ U_{M-2}^{n+1} &= rU_{M-3}^n + (1-2r)U_{M-2}^n + rU_{M-1}^n \\ U_{M-1}^{n+1} &= rU_{M-2}^n + (1-2r)U_{M-1}^n + rU_M^n \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

olarak yazılabilir.

• ***Matris Yöntemi***

Problem 1'in sınır şartları $U(0,t) = 0$ ve $U(1,t) = 0$ olarak verildiğinden (5.2) denklem sistemi açık matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (1-2r) & r & & & \\ r & (1-2r) & r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & r & (1-2r) & r \\ & & & & r & (1-2r) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-2}^n \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}}$$

veya kapalı matris formunda

$$\underline{U}^{(n+1)} = A\underline{U}^{(n)}$$

olarak yazılabilir. Bu sonlu fark yaklaşımın kararlılığının incelenmesinde A matrisinin özdeğerlerinin bulunmasına ihtiyaç vardır. Teorem 1.3'den A matrisinin özdeğerleri,

$$\lambda_s = (1 - 2r) + 2r \cos\left(\frac{s\pi}{M}\right), \quad s = 1(1)M - 1$$

veya

$$\lambda_s = 1 - 4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right), \quad s = 1(1)M - 1$$

dir. Matris yönteminde kararlılık için gerek ve yeter şart $\max_s |\lambda_s| \leq 1$ olmasıdır. O halde, sonlu fark yönteminin kararlı olması için

$$\left| 1 - 4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right) \right| \leq 1, \quad s = 1(1)M - 1$$

veya

$$-2 \leq -4r \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right) \leq 0$$

olmalıdır. Bu eşitsizliğin sağ parçasından $r \geq 0$ ve sol parçasından ise

$$r \leq \frac{1}{2 \sin^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right)} \leq \frac{1}{2}$$

elde edilir. O halde kararlılık parametresi $r \leq 1/2$ dir. Böylece problem 1'in açık yöntem ile elde edilen yaklaşık çözümleri ancak $0 < r \leq 1/2$ olduğunda problemin analitik çözüme yakınsar.

- ***von Neumann Yöntemi***

(5.1) denkleminle verilen fark yaklaşımında (3.8) eşitliği yerine yazılır ve sonra gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\varepsilon = -4r \sin^2(\beta h / 2) + 1$$

elde edilir. Kararlılık için gerek ve yeter şart $|\varepsilon| \leq 1$ olmasıdır. Buradan

$$-2 \leq -4r \sin^2(\beta h / 2) \leq 0$$

bulunur. Bu eşitsizliğin sağ parçasından $r \geq 0$ ve sol parçasından ise

$$r \leq \frac{1}{2 \sin^2(\beta h / 2)} \leq \frac{1}{2}$$

elde edilir. O halde kararlılık parametresi $r \leq 1/2$ olduğunda elde edilen yaklaşık çözüm problemin analitik çözümüne yakınsar.

◆ Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımı

Problem 1'in kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n, \quad m = 1(1)M-1, \quad n = 0(1)N \quad (5.3)$$

dir. Bu sonlu fark yaklaşımı herhangi bir n -inci zaman adımında açık olarak yazıldığında

$$\left. \begin{aligned} -rU_0^{n+1} + (1+2r)U_1^{n+1} - rU_2^{n+1} &= U_1^n \\ -rU_1^{n+1} + (1+2r)U_2^{n+1} - rU_3^{n+1} &= U_2^n \\ \vdots & \\ -rU_{M-3}^{n+1} + (1+2r)U_{M-2}^{n+1} - rU_{M-1}^{n+1} &= U_{M-2}^n \\ -rU_{M-2}^{n+1} + (1+2r)U_{M-1}^{n+1} - rU_M^{n+1} &= U_{M-1}^n \end{aligned} \right\} \quad (5.4)$$

denklem sistemi elde edilir.

- **Matris Yöntemi**

Problem 1 in sınır şartları $U(0,t)=0$ ve $U(1,t)=0$ olarak verildiğinden her n için $U_0^n = U_M^n = 0$ olup (5.4) denklem sistemi açık matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (1+2r) & -r & & & \\ -r & (1+2r) & -r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -r & (1+2r) & -r \\ & & & & -r & (1+2r) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-2}^n \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}}$$

veya kapalı matris formunda

$$A\underline{U}^{(n+1)} = \underline{U}^{(n)}$$

olarak yazılabilir. A tersi mevcut bir matris olduğundan $A\underline{U}^{(n+1)} = \underline{U}^{(n)}$ sistemi

$$\underline{U}^{(n+1)} = A^{-1}\underline{U}^{(n)}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Burada kararlılık analizi için A^{-1} matrisinin özdeğerlerine ihtiyaç vardır. A matrisinin özdeğerleri λ_s ise A^{-1} matrisinin özdeğerleri $1/\lambda_s$ değeridir. Teorem 1.3'den A matrisinin özdeğerleri

$$\lambda_s = (1+2r) + 2r \cos\left(\frac{s\pi}{M}\right), \quad s = 1(1)M-1$$

veya

$$\lambda_s = 1 + 4r \cos^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right), \quad s = 1(1)M-1$$

olarak bulunur. Böylece A^{-1} matrisinin özdeğerleri

$$\frac{1}{\lambda_s} = \frac{1}{1 + 4r \cos^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right)}, \quad s = 1(1)M - 1$$

şeklindedir. Kararlılık için $\max_s |1/\lambda_s| \leq 1$ olması gerek ve yeter şarttır. O halde göz önüne alınan yöntemin kararlı olması için

$$\left| \frac{1}{\lambda_s} \right| = \frac{1}{\left| 1 + 4r \cos^2\left(\frac{s\pi}{2M}\right) \right|} \leq 1, \quad s = 1(1)M - 1$$

olmalıdır. $\forall r > 0$ için bu eşitsizlik sağlandığından yöntem şartsız kararlıdır. Böylece ısı iletim probleminin kapalı yöntem ile elde edilen yaklaşık çözümünün $r > 0$ olduğunda analitik çözüme yakınsadığı görülür.

- **von Neumann Yöntemi**

(5.3) denkleminin verilen fark yaklaşımında (3.8) eşitliği yerine konulup, gerekli işlemler yapıldığında ε değeri

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + 4r \sin^2(\beta h / 2)}$$

olarak bulunur. Kararlılık için gerek ve yeter şart $|\varepsilon| \leq 1$ olmasıdır. Açıkça her $r > 0$ ve β değerleri için $|\varepsilon| \leq 1$ dir. Böylece kapalı sonlu fark yöntemi şartsız kararlıdır.

- ◆ **Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı**

Problem 1'in Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n \quad (5.5)$$

dir. Bu sonlu fark yaklaşımı herhangi bir n -inci zaman adımında açık olarak yazıldığında

$$\left. \begin{aligned} -rU_0^{n+1} + (2+2r)U_1^{n+1} - rU_2^{n+1} &= rU_0^n + (2-2r)U_1^n + rU_2^n \\ -rU_1^{n+1} + (2+2r)U_2^{n+1} - rU_3^{n+1} &= rU_1^n + (2-2r)U_2^n + rU_3^n \\ \vdots & \\ -rU_{M-3}^{n+1} + (2+2r)U_{M-2}^{n+1} - rU_{M-1}^{n+1} &= rU_{M-3}^n + (2-2r)U_{M-2}^n + rU_{M-1}^n \\ -rU_{M-2}^{n+1} + (2+2r)U_{M-1}^{n+1} - rU_M^{n+1} &= rU_{M-2}^n + (2-2r)U_{M-1}^n + rU_M^n \end{aligned} \right\} (5.6)$$

denklem sistemi elde edilir.

- **Matris Yöntemi**

Sınır şartları $U(0,t)=U(1,t)=0$ olarak verildiğinden $\forall n$ için $U_0^n = U_M^n = 0$ olup (5.6) denklem sistemi matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (2+2r) & -r & & & \\ -r & (2+2r) & -r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -r & (2+2r) & -r \\ & & & -r & (2+2r) & \\ & & & & & \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-2}^{n+1} \\ U_{M-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (2-2r) & r & & & \\ r & (2-2r) & r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & r & (2-2r) & r \\ & & & & & r & (2-2r) \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-2}^n \\ U_{M-1}^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}}$$

veya

$$A\underline{U}^{(n+1)} = B\underline{U}^{(n)}$$

olarak yazılabilir. A tersi mevcut bir matris olduğundan bu sistem $\underline{U}^{(n+1)} = A^{-1}B\underline{U}^{(n)}$ şeklinde de ifade edilebilir. Dikkat edilecek olursa $B = 4I_{M-1} - A$ dir. Böylece

$$\underline{U}^{(n+1)} = (4A^{-1} - I_{M-1})\underline{U}^{(n)}$$

yazılabilir. A reel ve simetrik bir matris olduğundan $4A^{-1} - I_{M-1}$ matrisi de reel ve simetriktir. Öyleyse $\|4A^{-1} - I_{M-1}\| = \rho(4A^{-1} - I_{M-1})$ dir. $4A^{-1} - I_{M-1}$ matrisinin tüm özdeğerlerinin modülleri 1 den küçük olduğunda kararlılık şartı sağlanır. Yani; A matrisinin bir özdeğeri λ olmak üzere $|4/\lambda - 1| \leq 1$ olmalıdır. Bu eşitsizlikten $\lambda \geq 2$ elde edilir. A matrisi için $a_{ss} = 2 + 2r$ ve $P_s = 2r$ olduğundan Teorem 1.2'den

$$|\lambda - 2 - 2r| \leq 2r \text{ veya } 2 \leq \lambda \leq 2 + 4r$$

olduğu görülür. Böylece $\forall r > 0$ için $\lambda \geq 2$ olduğundan yöntem şartsız kararlıdır.

- **von Neumann Yöntemi**

(5.5) fark yaklaşımında (3.8) eşitliği yerine konulup, gerekli işlemler yapıldığında

$$\varepsilon = \frac{1 - 2r \sin^2(\beta h / 2)}{1 + 2r \sin^2(\beta h / 2)}$$

elde edilir. Kararlılık için gerek ve yeter şart $|\varepsilon| \leq 1$ olmasıdır. Bu durumda tüm $r > 0$ değerleri için $|\varepsilon| \leq 1$ eşitsizliği geçerlidir. Böylece yöntem şartsız kararlıdır.

Nümerik Sonuçlar

Bu çalışmada bütün hesaplamalar Intel P4 bilgisayarda Fortran derleyicisi kullanılarak yapıldı. Nümerik çözümlerin analitik çözümlere ne kadar yakın olduğunu göstermek için $U(x_m, t_n)$ ve U_m^n sırasıyla $U(x, t)$ nin (x_m, t_n) noktasındaki tam ve nümerik değerleri olmak üzere aşağıdaki gibi tanımlanan $\|e\|_1$, L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı:

$$\|e\|_1 = \frac{1}{M} \sum_{m=1}^{M-1} \left| 1 - \frac{U_m^n}{U(x_m, t_n)} \right|,$$

$$L_2 = \left[h \sum_{m=1}^M |U(x_m, t_n) - U_m^n|^2 \right]^{\frac{1}{2}},$$

$$L_\infty = \max_m |U(x_m, t_n) - U_m^n|.$$

$k = 0.00001$ ve farklı mesh uzunluğu h için $t = 0.1$ zamanında Problem 1'in açık yöntem ile elde edilen nümerik çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması Tablo 5.1'de, kapalı yöntem ile elde edilen nümerik çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması Tablo 5.2'de ve Crank-Nicolson yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması Tablo 5.3'de verildi. Tablolardan kolayca görüleceği üzere mesh uzunluğu h ne kadar küçük seçilirse nümerik çözümlerin analitik çözüme o kadar yaklaştığı kolayca görülür. Buradaki h ve k değerleri kararlılığı bozmayacak şekilde seçilmiştir.

$k = 0.00001$ ve $h = 0.0125$ değerleri için Problem 1'in açık, kapalı ve Crank-Nicolson yöntemleriyle elde edilen $t = 0.5$ zamanındaki nümerik çözümlerin karşılaştırılması Tablo 5.4 ile verilmiştir. Tablodan kolayca görüleceği gibi analitik çözüme en yakın sonuçlar açık yöntemden daha sonra sırasıyla Crank-Nicolson ve kapalı yöntemlerinden elde edilmiştir.

Tablo 5.1. Açık Yöntem: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.094867	0.093721	0.093436	0.093365	0.093346
0.2	0.180463	0.178277	0.177734	0.177598	0.177561
0.3	0.248411	0.245392	0.244642	0.244455	0.244405
0.4	0.292049	0.288490	0.287607	0.287386	0.287327
0.5	0.307088	0.303342	0.302413	0.302181	0.302118
0.6	0.292049	0.288490	0.287607	0.287386	0.287327
0.7	0.248411	0.245392	0.244642	0.244455	0.244405
0.8	0.180463	0.178277	0.177734	0.177598	0.177561
0.9	0.094867	0.093721	0.093436	0.093365	0.093346
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.014737	0.003835	0.000947	0.000204	
L_2	0.003505	0.000864	0.000208	0.000044	
L_∞	0.004970	0.001224	0.000295	0.000063	

Tablo 5.2. Kapalı Yöntem: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.094876	0.093730	0.093445	0.093374	0.093346
0.2	0.180480	0.178294	0.177751	0.177615	0.177561
0.3	0.248435	0.245416	0.244666	0.244479	0.244405
0.4	0.292077	0.288518	0.287635	0.287414	0.287327
0.5	0.307117	0.303372	0.302442	0.302210	0.302118
0.6	0.292077	0.288518	0.287635	0.287414	0.287327
0.7	0.248435	0.245416	0.244666	0.244479	0.244405
0.8	0.180480	0.178294	0.177751	0.177615	0.177561
0.9	0.094876	0.093730	0.093445	0.093374	0.093346
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.014824	0.003927	0.001042	0.000300	
L_2	0.003526	0.000885	0.000229	0.000065	
L_∞	0.004999	0.001254	0.000324	0.000092	

Tablo 5.3. Crank-Nicolson Yöntemi: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.094871	0.093726	0.093441	0.093369	0.093346
0.2	0.180471	0.178286	0.177742	0.177607	0.177561
0.3	0.248423	0.245404	0.244654	0.244467	0.244405
0.4	0.292063	0.288504	0.287621	0.287400	0.287327
0.5	0.307103	0.303357	0.302427	0.302195	0.302118
0.6	0.292063	0.288504	0.287621	0.287400	0.287327
0.7	0.248423	0.245404	0.244654	0.244467	0.244405
0.8	0.180471	0.178286	0.177742	0.177607	0.177561
0.9	0.094871	0.093726	0.093441	0.093369	0.093346
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.014781	0.003881	0.000995	0.000252	
L_2	0.003515	0.000874	0.000218	0.000055	
L_∞	0.004984	0.001239	0.000309	0.000077	

Tablo 5.4. $h = 0.0125$ ve $k = 0.00001$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması

x	Açık Yöntem	Kapalı Yöntem	Crank-Nicolson Yöntemi	Analitik Çözüm
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.1	0.001803	0.001803	0.001803	0.001802
0.2	0.003429	0.003430	0.003429	0.003427
0.3	0.004719	0.004721	0.004720	0.004717
0.4	0.005548	0.005550	0.005549	0.005545
0.5	0.005833	0.005836	0.005835	0.005830
0.6	0.005548	0.005550	0.005549	0.005545
0.7	0.004719	0.004721	0.004720	0.004717
0.8	0.003429	0.003430	0.003429	0.003427
0.9	0.001803	0.001803	0.001803	0.001802
1.0	0.0	0.0	0.0	0.0
Hata Normu				
$\ e\ _1$	0.000513	0.000994	0.000753	
L_2	0.000002	0.000004	0.000003	
L_∞	0.000003	0.000006	0.000004	

Problem 2: Bu problemde

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

1-boyutlu zamana bağılı ısı iletim denklemi

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial U(1,t)}{\partial x} = 2$$

sınır şartları ve

$$U(x,0) = f(x) = x^2 + 1 + \cos(\pi x)$$

başlangıç şartına bağılı olarak verilmiştir. Bu problemin analitik çözümü

$$U(x,t) = 2t + x^2 + 1 + e^{-\pi^2 t} + \cos(\pi x)$$

dir [9].

◆ **Açık Sonlu Fark Yaklaşımı**

Problem 2'nin açık sonlu fark yaklaşımı

$$U_m^{n+1} = 2rU_{m+1}^n + (1-2r)U_m^n, \quad m = 0 \quad (5.7)$$

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad m = 1(1)M-1 \quad (5.8)$$

$$U_m^{n+1} = 2rU_{m-1}^n + (1-2r)U_m^n + 4rh, \quad m = M \quad (5.9)$$

şeklindedir. Bu yaklaşım açık biçimde

$$\left. \begin{aligned}
U_0^{n+1} &= 2rU_1^{n+1} + (1-2r)U_1^n \\
U_1^{n+1} &= rU_0^n + (1-2r)U_1^n + rU_2^n \\
U_2^{n+1} &= rU_1^n + (1-2r)U_2^n + rU_3^n \\
&\vdots \\
U_{M-1}^{n+1} &= rU_{M-2}^n + (1-2r)U_{M-1}^n + rU_M^n \\
U_M^{n+1} &= 2rU_{M-1}^{n+1} + (1-2r)U_M^n + 4rh
\end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

olarak yazılabilir.

- **Matris Yöntemi**

(5.10) denklem sistemi

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-1}^{n+1} \\ U_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-2r & 2r & & & & \\ & r & 1-2r & r & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & r & 1-2r & r \\ & & & & & 2r & 1-2r \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^n \\ U_1^n \\ \vdots \\ U_{M-1}^n \\ U_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 4rh \end{bmatrix}}_b$$

olarak veya kısaca

$$\underline{U}^{n+1} = A\underline{U}^n + \underline{b}$$

formunda yazılabilir. Burada kararlılık için A matrisinin özdeğerlerine ihtiyaç vardır.

Tüm satırlar için $a_{ss} = 1 - 2r$ ve $P_s = 2r$ olduğundan Teorem 1.2'den

$$|\lambda - (1 - 2r)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 1 + 2r = 2r \Rightarrow \lambda_1 = 1, \\ \lambda_2 - 1 + 2r = -2r \Rightarrow \lambda_2 = 1 - 4r \end{cases}$$

bulunur. Kararlılık için $|\lambda_i| \leq 1$ ($i=1,2$) olmalıdır. Burada λ_i değerleri tek tek incelenmelidir:

$$|\lambda_1| \leq 1 \text{ den } |1| \leq 1$$

ve

$$|\lambda_2| \leq 1 \text{ den } 0 \leq r \leq 1/2$$

bulunur. Buradan kararlılık parametresi $r \leq 1/2$ olarak elde edilir. Böylece Problem 2'nin açık yöntem ile elde edilen yaklaşık çözümü ancak $0 < r \leq 1/2$ olduğunda analitik çözüme yakınsar.

- ***von Neumann Yöntemi***

(2.15) ile verilen açık sonlu fark yaklaşımında (3.8) eşitliği ile birlikte $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ Euler formülü kullanılır ve sonra gerekli işlemler yapılırsa

$$\varepsilon = -4r \sin^2(\beta h / 2) + 1$$

elde edilir. Kararlılık için gerek ve yeter şart $|\varepsilon| \leq 1$ olmasıdır. Buradan

$$-2 \leq -4r \sin^2(\beta h / 2) \leq 0$$

bulunur. Bu eşitliğin sağ parçasından $r > 0$ ve sol parçasından ise

$$r \leq \frac{1}{2 \sin^2(\beta h / 2)} \leq \frac{1}{2}$$

bulunur. Böylece kararlılık parametresi $r \leq 1/2$ olarak elde edilir. O halde Problem 2'nin açık yöntem ile elde edilen yaklaşık çözümü ancak $0 < r \leq 1/2$ olduğunda analitik çözüme yakınsar.

◆ **Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımı**

Problem 2'nin kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$(1 + 2r)U_m^{n+1} - 2rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n, \quad m = 0 \quad (5.11)$$

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1 + 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n, \quad m = 1(1)M - 1 \quad (5.12)$$

$$-2rU_{m-1}^{n+1} + (1 + 2r)U_m^{n+1} - 4rh = U_m^n, \quad m = M \quad (5.13)$$

şeklindedir. Bu yaklaşım açık olarak yazıldığında

$$\left. \begin{aligned} (1 + 2r)U_0^{n+1} - 2rU_1^{n+1} &= U_0^n \\ -rU_0^{n+1} + (1 + 2r)U_1^{n+1} - rU_2^{n+1} &= U_1^n \\ -rU_1^{n+1} + (1 + 2r)U_2^{n+1} - rU_3^{n+1} &= U_2^n \\ \vdots & \\ -rU_{M-2}^{n+1} + (1 + 2r)U_{M-1}^{n+1} - rU_M^{n+1} &= U_{M-1}^n \\ -2rU_{M-1}^{n+1} + (1 + 2r)U_M^{n+1} - 4rh &= U_M^n \end{aligned} \right\} \quad (5.14)$$

denklem sistemi elde edilir.

• **Matris Yöntemi**

(5.14) denklem sistemi açık matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1+2r & -2r & & & & \\ & -r & 1+2r & -r & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -r & 1+2r & -r \\ & & & & & -2r & 1+2r \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-1}^{n+1} \\ U_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^n \\ U_1^n \\ \vdots \\ U_{M-1}^n \\ U_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 4rh \end{bmatrix}}_b$$

olarak ve kapalı matris formunda

$$A\underline{U}^{(n+1)} = \underline{U}^{(n)} + \underline{b}$$

olarak yazılabilir. Bu denklem sistemi A tersi mevcut bir matris olduğundan,

$$\underline{U}^{(n+1)} = A^{-1}\underline{U}^{(n)} + A^{-1}\underline{b}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Teorem 1.2'den A matrisinin özdeğerleri

$$|\lambda - (1 + 2r)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 1 - 2r = 2r \Rightarrow \lambda_1 = 1 + 4r, \\ \lambda_2 - 1 - 2r = -2r \Rightarrow \lambda_2 = 1 \end{cases}$$

olarak bulunur. A matrisinin özdeğerleri λ_i ise A^{-1} matrisinin özdeğerleri $1/\lambda_i$ değerleridir. O halde kararlılık için $|1/\lambda_i| \leq 1$ ($i = 1, 2$) olmalıdır. Buradan kararlılık parametresi $r > 0$ olarak bulunur. Böylece Neumann sınır şartlı ısı iletim probleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı ile elde edilen yaklaşık çözümü r kararlılık parametresinin herhangi bir seçimi için problemin analitik çözümüne yakınsar. Yani yöntem şartsız kararlıdır.

- ***von Neumann Yöntemi***

(2.26) ile verilen kapalı sonlu fark yaklaşımında (3.8) eşitliği ile birlikte $e^{i\phi} = \cos \phi + i \sin \phi$ Euler formülü kullanılır ve sonra gerekli işlemler yapılırsa ε güçlendirme faktörü

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + 4r \sin^2(\beta h / 2)},$$

olarak bulunur. Kararlılık için gerek ve yeter şart $|\varepsilon| \leq 1$ olmasıdır. Açıkça her $r > 0$ ve β değerleri için $|\varepsilon| \leq 1$ dir. Böylece kapalı yöntem şartsız kararlıdır.

◆ **Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı**

Problem 2'nin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$(2+2r)U_m^{n+1} - 2rU_{m+1}^{n+1} = (2-2r)U_m^n + 2rU_{m+1}^n, m = 0 \quad (5.15)$$

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, m = 1(1)M-1 \quad (5.16)$$

$$-2rU_{m-1}^{n+1} + (2+2r)U_m^{n+1} = 2rU_{m-1}^n + (2-2r)U_m^n + 8rh, m = M \quad (5.17)$$

şeklinde. Bu sonlu fark yaklaşımları açık olarak yazıldığında

$$\left. \begin{aligned} (2+2r)U_0^{n+1} - 2rU_1^{n+1} &= (2-2r)U_0^n + 2rU_1^n \\ -rU_0^{n+1} + (2+2r)U_1^{n+1} - rU_2^{n+1} &= rU_0^n + (2-2r)U_1^n + rU_2^n \\ -rU_1^{n+1} + (2+2r)U_2^{n+1} - rU_3^{n+1} &= rU_1^n + (2-2r)U_2^n + rU_3^n \\ \vdots & \\ -rU_{M-2}^{n+1} + (2+2r)U_{M-1}^{n+1} - rU_M^{n+1} &= rU_{M-2}^n + (2-2r)U_{M-1}^n + rU_M^n \\ -2rU_{M-1}^{n+1} + (2+2r)U_M^{n+1} &= 2rU_{M-1}^n + (2-2r)U_M^n + 8rh \end{aligned} \right\} (5.18)$$

denklem sistemi elde edilir.

• ***Matris Yöntemi***

(5.18) denklem sistemi

$$\underbrace{\begin{bmatrix} (2+2r) & -2r & & & \\ -r & (2+2r) & -r & & \\ & & \ddots & & \\ & -r & (2+2r) & -r & \\ & & & -2r & (2+2r) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-1}^{n+1} \\ U_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} (2-2r) & 2r & & & \\ r & (2-2r) & r & & \\ & & \ddots & & \\ & & & r & (2-2r) & r \\ & & & & 2r & (2-2r) \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^n \\ U_1^n \\ \vdots \\ U_{M-1}^n \\ U_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 8rh \end{bmatrix}}_{\underline{b}}$$

olarak veya kısaca

$$\underline{A}\underline{U}^{(n+1)} = \underline{B}\underline{U}^{(n)} + \underline{b}$$

olarak yazılabilir. Bu denklem sistemi A tersi mevcut bir matris olduğundan,

$$\underline{U}^{(n+1)} = A^{-1}B\underline{U}^{(n)} + A^{-1}\underline{b}$$

şeklinde de ifade edilebilir. Dikkat edilirse $B = 4I_{M+1} - A$ olduğu kolaylıkla görülür. Buradan $\underline{U}^{(n+1)} = (4A^{-1} - I_{M+1})\underline{U}^{(n)}$ yazılabilir. A matrisinin bir özdeğeri λ olmak üzere $4A^{-1} - I_{M+1}$ matrisinin özdeğeri $4/\lambda - 1$ şeklindedir. Bu yöntemin kararlı olabilmesi için $|4/\lambda - 1| \leq 1$ olmalıdır. Bu durumda $\lambda \geq 2$ elde edilir. O halde A matrisi için Teorem 1.2'den

$$|\lambda - 2 - 2r| \leq 2r \text{ veya } 2 \leq \lambda \leq 2 + 4r$$

olduğu görülür. Bu durumda $\forall r > 0$ için $\lambda \geq 2$ olduğundan yöntem şartsız kararlıdır.

- **von Neumann Yöntemi**

(2.40) ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımında (3.8) eşitliği yerine konulup, gerekli işlemler yapıldığında

$$\varepsilon = \frac{1 - 2r \sin^2(\beta h / 2)}{1 + 2r \sin^2(\beta h / 2)}$$

olduğu görülür. Kararlılık için gerek ve yeter şart $|\varepsilon| \leq 1$ olmasıdır. Açıkça her $r > 0$ ve β değerleri için $|\varepsilon| \leq 1$ olup yöntem şartsız kararlıdır.

Nümerik Sonuçlar

$k = 0.00001$ ve farklı mesh uzunluğu h için $t = 0.1$ zamanında Problem 2'nin açık yöntem ile elde edilen nümerik çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması Tablo 5.5'de, kapalı yöntem ile elde edilen nümerik çözümlerinin analitik çözümle

karşılaştırılması Tablo 5.6'da ve Crank-Nicolson yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması Tablo 5.7'de verildi. Tablolardan kolayca görüleceği üzere mesh uzunluğu h ne kadar küçük seçilirse nümerik çözümlerin analitik çözüme o kadar yaklaştığı kolayca görülür. Buradaki h ve k değerleri kararlılığı bozmayacak şekilde seçilmiştir.

$k = 0.001$ ve $h = 0.1$ değerleri için Problem 2'nin açık, kapalı ve Crank-Nicolson yöntemleriyle elde edilen $t = 0.5$ zamanındaki nümerik çözümlerin karşılaştırılması Tablo 5.8 ile verilmiştir. Tablodan kolayca görüleceği gibi analitik çözüme en yakın sonuçlar açık yöntemden daha sonra Crank-Nicolson ve kapalı yöntemlerinden elde edilmiştir.

Tablo 5.5. Açık Yöntem: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 2'nin nümerik ve analitik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.0	1.575718	1.573446	1.572879	1.572737	1.572708
0.1	1.567329	1.565168	1.564629	1.564494	1.564466
0.2	1.543962	1.542124	1.541665	1.541551	1.541527
0.3	1.510841	1.509506	1.509173	1.509089	1.509072
0.4	1.476103	1.475401	1.475226	1.475182	1.475173
0.5	1.450000	1.450000	1.450000	1.450000	1.450000
0.6	1.443897	1.444599	1.444774	1.444818	1.444827
0.7	1.469159	1.470494	1.470827	1.470911	1.470928
0.8	1.536038	1.537876	1.538335	1.538449	1.538473
0.9	1.652671	1.654832	1.655371	1.655506	1.655534
1.0	1.824282	1.826554	1.827121	1.827263	1.827292
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.001037	0.000279	0.000067	0.000012	
L_2	0.002128	0.000522	0.000121	0.000021	
L_∞	0.00301	0.000738	0.000171	0.000029	

Tablo 5.6. Kapalı Yöntem: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 2'nin nümerik ve analitik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.0	1.575754	1.573482	1.572915	1.572773	1.572708
0.1	1.567363	1.565203	1.564663	1.564528	1.564466
0.2	1.543991	1.542154	1.541695	1.541580	1.541527
0.3	1.510862	1.509527	1.509194	1.509111	1.509072
0.4	1.476114	1.475412	1.475237	1.475193	1.475173
0.5	1.450000	1.450000	1.450000	1.450000	1.450000
0.6	1.443886	1.444588	1.444763	1.444807	1.444827
0.7	1.469138	1.470473	1.470806	1.470889	1.470928
0.8	1.536009	1.537846	1.538305	1.53842	1.538473
0.9	1.652637	1.654797	1.655337	1.655472	1.655534
1.0	1.824246	1.826518	1.827085	1.827227	1.827292
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.001049	0.000292	0.000081	0.000026	
L_2	0.002154	0.000548	0.000147	0.000046	
L_∞	0.003046	0.000775	0.000207	0.000065	

Tablo 5.7. Crank-Nicolson Yöntemi: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 2'nin nümerik ve analitik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.0	1.575736	1.573464	1.572897	1.572755	1.572708
0.1	1.567346	1.565186	1.564646	1.564511	1.564466
0.2	1.543976	1.542139	1.54168	1.541565	1.541527
0.3	1.510852	1.509517	1.509183	1.509100	1.509072
0.4	1.476109	1.475407	1.475231	1.475188	1.475173
0.5	1.450000	1.450000	1.450000	1.450000	1.450000
0.6	1.443891	1.444593	1.444768	1.444812	1.444827
0.7	1.469148	1.470483	1.470817	1.470900	1.470928
0.8	1.536024	1.537861	1.53832	1.538435	1.538473
0.9	1.652654	1.654814	1.655354	1.655489	1.655534
1.0	1.824264	1.826536	1.827103	1.827245	1.827292
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.001043	0.000285	0.000074	0.000019	
L_2	0.002141	0.000535	0.000134	0.000033	
L_∞	0.003028	0.000757	0.000189	0.000047	

Tablo 5.8. $h = 0.1$ ve $k = 0.001$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında Problem 2'nin nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması

x	Açık Yöntem	Kapalı Yöntem	Crank-Nicolson Yöntemi	Analitik Çözüm
0.0	2.007310	2.007669	2.007488	2.007192
0.1	2.016953	2.017294	2.017122	2.016840
0.2	2.045914	2.046204	2.046058	2.045818
0.3	2.094297	2.094508	2.094402	2.094227
0.4	2.162259	2.162370	2.162314	2.162222
0.5	2.250000	2.250000	2.250000	2.250000
0.6	2.357741	2.357630	2.357686	2.357778
0.7	2.485703	2.485492	2.485598	2.485773
0.8	2.634086	2.633796	2.633942	2.634182
0.9	2.803047	2.802706	2.802878	2.803160
1.0	2.992690	2.992331	2.992511	2.992808
Hata Normu				
$\ e\ _1$	0.000027	0.000110	0.000068	
L_2	0.000084	0.000337	0.000210	
L_∞	0.000118	0.000477	0.000297	

Problem 3: Bu problemde

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

1-boyutlu zamana bağlı ısı iletim denklemi

$$U(x,0) = 1$$

başlangıç şartı ve

$$\frac{\partial U(0,t)}{\partial x} = U,$$

$$\frac{\partial U(1,t)}{\partial x} = -U$$

Robbin sınır şartlarına bağlı olarak göz önüne alınmıştır. Bu problemin analitik çözümü

$$U(x,t) = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{\sec \alpha_n}{(3 + 4\alpha_n^2)} e^{-4\alpha_n^2 t} \cos \left(2\alpha_n \left(x - \frac{1}{2} \right) \right) \right\}$$

dir. Burada α_n değerleri α tan $\alpha = 1/2$ denkleminin pozitif kökleridir [3].

◆ **Açık Sonlu Fark Yaklaşımı**

Problem 3'ün açık sonlu fark yaklaşımı

$$U_m^{n+1} = 2rU_{m+1}^n + [1 - 2r(1+h)]U_m^n, \quad m = 0 \quad (5.19)$$

$$U_m^{n+1} = rU_{m-1}^n + (1-2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad m = 1(1)M-1 \quad (5.20)$$

$$U_m^{n+1} = 2rU_{m-1}^n + [1 - 2r(1+h)]U_m^n, \quad m = M \quad (5.21)$$

şeklindedir. Bu problemin açık sonlu fark yaklaşımı açık olarak yazıldığında

$$\left. \begin{aligned} U_0^{n+1} &= 2rU_1^n + [1 - 2r(1+h)]U_0^n \\ U_1^{n+1} &= rU_0^n + (1-2r)U_1^n + rU_2^n \\ &\vdots \\ U_{M-1}^{n+1} &= rU_{M-2}^n + (1-2r)U_{M-1}^n + rU_M^n \\ U_M^{n+1} &= 2rU_{M-1}^n [1 - 2r(1+h)]U_M^n \end{aligned} \right\} \quad (5.22)$$

denklem sistemi elde edilir.

• **Matris Yöntemi**

(5.22) denklem sistemi

$$\underbrace{\begin{bmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-1}^{n+1} \\ U_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1-2r(1+h) & 2r & & & & \\ & r & 1-2r & r & & \\ & & r & 1-2r & r & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & r & 1-2r & r \\ & & & & & 2r & 1-2r(1+h) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^n \\ U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-1}^n \\ U_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}}$$

olarak veya kısaca

$$\underline{U}^{(n+1)} = A\underline{U}^{(n)}$$

biçiminde yazılabilir. Teorem 1.2'den A matrisinin özdeğerleri:

$\underline{m=0}$ ve $m=M$ için $a_{ss} = 1-2r(1+h)$ ve $P_s = 2r$ olduğundan

$$|\lambda - 1 + 2r(1+h)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 1 + 2r(1+h) = 2r \Rightarrow \lambda_1 = 1 - 2rh, \\ \lambda_2 - 1 + 2r(1+h) = -2r \Rightarrow \lambda_2 = 1 - 2r(2+h), \end{cases}$$

$\underline{m=1(1)M-1}$ için $a_{ss} = 1-2r$ ve $P_s = 2r$ olduğundan

$$|\lambda - (1-2r)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 - 1 + 2r = 2r \Rightarrow \lambda_3 = 1, \\ \lambda_4 - 1 + 2r = -2r \Rightarrow \lambda_4 = 1 - 4r \end{cases}$$

olarak bulunur. Kararlılık analizi için $|\lambda_i| \leq 1$ ($i=1(1)4$) olmalıdır. Burada λ_i değerleri tek tek incelenmelidir:

$$|\lambda_1| \leq 1 \text{ den } 0 \leq r \leq \frac{1}{h},$$

$$|\lambda_2| \leq 1 \text{ den } 0 \leq r \leq \frac{1}{2+h},$$

$$|\lambda_3| \leq 1 \text{ den } |1| \leq 1,$$

$$|\lambda_4| \leq 1 \text{ den } 0 \leq r \leq 1/2$$

bulunur. Kararlılık için $r \leq \min\{1/h, 1/(2+h), 1, 1/2\}$ olmalıdır. Buradan kararlılık parametresi $r \leq 1/(2+h)$ olarak elde edilir. Böylece Robbin sınır şartlı ısı iletim probleminin açık yöntem ile elde edilen yaklaşık çözümünün ancak $0 < r \leq 1/(2+h)$ olduğunda analitik çözüme yakınsadığı görülür.

- **von Neumann Yöntemi**

(2.15) ile verilen açık sonlu fark yaklaşımında (3.8) eşitliği yerine konulup, gerekli işlemler yapıldığında

$$\varepsilon = -4r \sin^2(\beta h / 2) + 1$$

elde edilir. Kararlılık için gerek ve yeter şart $|\varepsilon| \leq 1$ olmasıdır. O halde

$$-2 \leq -4r \sin^2(\beta h / 2) \leq 0$$

olur. Bu eşitliklerin sağ parçasından $r \geq 0$ ve sol parçasından ise

$$r \leq \frac{1}{2 \sin^2(\beta h / 2)} \leq \frac{1}{2}$$

bulunur. Buradan kararlılık parametresi $r \leq 1/2$ olarak elde edilir. Böylece Robbin sınır şartlı ısı iletim denkleminin açık yöntem ile elde edilen yaklaşık çözümü ancak $0 < r \leq 1/2$ olduğunda analitik çözüme yakınsar.

- ◆ **Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımı**

Problem 3'ün kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$[1 + 2r(1+h)]U_m^{n+1} - 2rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n, \quad m = 0 \quad (5.23)$$

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (1+2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = U_m^n, \quad m = 1(1)M-1 \quad (5.24)$$

$$-2rU_{m-1}^{n+1} + [1 + 2r(1+h)]U_m^{n+1} = U_m^n, \quad m = M \quad (5.25)$$

şeklindedir. Bu sonlu fark yaklaşımı açık olarak yazıldığında

$$\left. \begin{aligned} [1 + 2r(1+h)]U_0^{n+1} - 2rU_1^{n+1} &= U_0^n \\ -rU_0^{n+1} + (1+2r)U_1^{n+1} - rU_2^{n+1} &= U_1^n \\ -rU_1^{n+1} + (1+2r)U_2^{n+1} - rU_3^{n+1} &= U_2^n \\ \vdots & \\ -rU_{M-2}^{n+1} + (1+2r)U_{M-1}^{n+1} - rU_M^{n+1} &= U_{M-1}^n \\ -2rU_{M-1}^{n+1} + [1 + 2r(1+h)]U_M^{n+1} &= U_M^n \end{aligned} \right\} \quad (5.26)$$

denklem sistemi elde edilir.

- **Matris Yöntemi**

(5.26) denklem sistemi

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 1+2r(1+h) & -2r & & & & \\ -r & (1+2r) & -r & & & \\ & -r & 1+2r & -r & & \\ & & & \ddots & & \\ & & -r & (1+2r) & -r & \\ & & & -2r & 1+2r(1+h) & \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-1}^{n+1} \\ U_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^n \\ U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-1}^n \\ U_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}}$$

veya

$$A\underline{U}^{(n+1)} = \underline{U}^{(n)}$$

olarak ifade edilebilir. A tersi mevcut bir matris olduğundan $A\underline{U}^{(n+1)} = \underline{U}^{(n)}$ sistemi $\underline{U}^{(n+1)} = A^{-1}\underline{U}^{(n)}$ olarak yazılabilir. Burada kararlılık analizi için A^{-1} matrisinin

özdeğerlerine ihtiyaç vardır. A matrisinin özdeğerleri λ_i ise A^{-1} matrisinin özdeğerleri $1/\lambda_i$ değeridir. Teorem 1.2'den A matrisinin özdeğerleri

$m = 0$ ve $m = M$ için $a_{ss} = 1 + 2r(1 + h)$ ve $P_s = 2r$ olduğundan

$$|\lambda - 1 - 2r(1 + h)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 - 1 - 2r(1 + h) = 2r & \Rightarrow \lambda_1 = 1 + 2r(2 + h), \\ \lambda_2 - 1 + 2r(1 + h) = -2r & \Rightarrow \lambda_2 = 1 + 2rh, \end{cases}$$

$m = 1(1)M - 1$ için $a_{ss} = 1 + 2r$ ve $P_s = 2r$ olduğundan

$$|\lambda - (1 + 2r)| = 2r \Rightarrow \begin{cases} \lambda_3 - 1 - 2r = 2r & \Rightarrow \lambda_3 = 1 + 4r, \\ \lambda_4 - 1 - 2r = -2r & \Rightarrow \lambda_4 = 1 \end{cases}$$

dir. Yöntemin kararlı olması için $|1/\lambda_i| \leq 1$ ($i = 1(1)4$) olmalıdır. Burada $1/\lambda_i$ değerleri tek tek incelendiğinde

$$\left| \frac{1}{\lambda_1} \right| \leq 1 \text{ den } r \geq 0,$$

$$\left| \frac{1}{\lambda_2} \right| \leq 1 \text{ den } r \geq 0,$$

$$\left| \frac{1}{\lambda_3} \right| \leq 1 \text{ den } r \geq 0,$$

$$\left| \frac{1}{\lambda_4} \right| \leq 1 \text{ den } |1| \leq 1$$

elde edilir. Böylece yöntem şartsız kararlıdır.

- **von Neumann Yöntemi**

(2.26) ile verilen kapalı sonlu fark yaklaşımında (3.8) eşitliği yerine konulup, gerekli işlemler yapıldığında

$$\varepsilon = \frac{1}{1 + 4r \sin^2(\beta h / 2)}$$

elde edilir. Kararlılık için gerek ve yeter şart $|\varepsilon| \leq 1$ olmasıdır. O halde

$$-1 \leq \frac{1}{1 + 4r \sin^2(\beta h / 2)} \leq 1$$

elde edilir. Bu eşitsizlik her $r \geq 0$ için sağlanır. Böylece Robbin sınır şartlı ısı iletim probleminin kapalı sonlu fark yaklaşımı şartsız kararlıdır.

◆ Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı

Problem 3'ün Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$[2 + 2r(1 + h)]U_m^{n+1} - 2rU_{m+1}^{n+1} = [2 - 2r(1 + h)]U_m^n + 2rU_{m+1}^n, \quad m = 0 \quad (5.27)$$

$$-rU_{m-1}^{n+1} + (2 + 2r)U_m^{n+1} - rU_{m+1}^{n+1} = rU_{m-1}^n + (2 - 2r)U_m^n + rU_{m+1}^n, \quad m = 1(1)M - 1 \quad (5.28)$$

$$-2rU_{m-1}^{n+1} + [2 + 2r(1 + h)]U_m^{n+1} = 2rU_{m-1}^n + [2 - 2r(1 + h)]U_m^n, \quad m = M \quad (5.29)$$

şeklindedir. Bu sonlu fark yaklaşımı açık olarak yazıldığında

$$\left. \begin{aligned} [2 + 2r(1 + h)]U_0^{n+1} - 2rU_1^{n+1} &= [2 - 2r(1 + h)]U_0^n + 2rU_1^n \\ -rU_0^{n+1} + (2 + 2r)U_1^{n+1} - rU_2^{n+1} &= rU_0^n + (2 - 2r)U_1^n + rU_2^n \\ -rU_1^{n+1} + (2 + 2r)U_2^{n+1} - rU_3^{n+1} &= rU_1^n + (2 - 2r)U_2^n + rU_3^n \\ \vdots & \\ -rU_{M-2}^{n+1} + (2 + 2r)U_{M-1}^{n+1} - rU_M^{n+1} &= rU_{M-2}^n + (2 - 2r)U_{M-1}^n + rU_M^n \\ -2rU_{M-1}^{n+1} + [2 + 2r(1 + h)]U_M^{n+1} &= 2rU_{M-1}^n + [2 - 2r(1 + h)]U_M^n \end{aligned} \right\} \quad (5.30)$$

denklem sistemi elde edilir.

• *Matris Yöntemi*

(5.30) denklem sistemi açık matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} 2+2r(1+h) & -2r & & & & \\ -r & (2+2r) & -r & & & \\ & -r & 2+2r & -r & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & -r & (2+2r) & -r \\ & & & & & -2r & 2+2r(1+h) \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^{n+1} \\ U_1^{n+1} \\ U_2^{n+1} \\ \vdots \\ U_{M-1}^{n+1} \\ U_M^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n+1)}} = \underbrace{\begin{bmatrix} 2-2r(1+h) & 2r & & & & \\ r & (2-2r) & r & & & \\ & r & 2-2r & r & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & r & (2-2r) & r \\ & & & & & 2r & 2-2r(1+h) \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} U_0^n \\ U_1^n \\ U_2^n \\ \vdots \\ U_{M-1}^n \\ U_M^n \end{bmatrix}}_{\underline{U}^{(n)}}$$

olarak veya kapalı matris formunda

$$A\underline{U}^{(n+1)} = B\underline{U}^{(n)}$$

olarak yazılabilir. A tersi mevcut bir matris olduğundan $A\underline{U}^{(n+1)} = B\underline{U}^{(n)}$ sistemi

$\underline{U}^{(n+1)} = A^{-1}B\underline{U}^{(n)}$ olarak yazılabilir. $B = 4I_{M+1} - A$ olduğundan

$\underline{U}^{(n+1)} = (4A^{-1} - I_{M+1})\underline{U}^{(n)}$ dir. A matrisinin bir özdeğeri λ olmak üzere $4A^{-1} - I_{M+1}$

matrisinin özdeğeri $4/\lambda - 1$ şeklindedir. Bu yöntemin kararlı olabilmesi için $|4/\lambda - 1| \leq 1$

olmalıdır. Bu durumda $\lambda \geq 2$ elde edilir. Teorem 1.2'den A matrisinin özdeğerleri:

$\underline{m} = 0$ ve $\underline{m} = M$ için $a_{ss} = 2 + 2r(1+h)$ ve $P_s = 2r$ olduğundan

$$|\lambda - 2 - 2r(1+h)| = 2r \begin{cases} \lambda_1 - 2 - 2r(1+h) = 2r \Rightarrow \lambda_1 = 2 + 2r(2+h), \\ \lambda_2 - 2 + 2r(1+h) = -2r \Rightarrow \lambda_2 = 2 + 2rh, \end{cases}$$

$\underline{m} = 1(1)M - 1$ için $a_{ss} = 2 + 2r$ ve $P_s = 2r$ olduğundan

$$|\lambda - (2 + 2r)| = 2r \begin{cases} \lambda_3 - 2 - 2r = 2r \Rightarrow \lambda_3 = 2 + 4r, \\ \lambda_4 - 2 - 2r = -2r \Rightarrow \lambda_4 = 2 \end{cases}$$

olarak bulunur. Açıkça $\forall r > 0$ için $\lambda \geq 2$ olduğundan yöntem şartsız kararlıdır.

- **von Neumann Yöntemi**

(2.40) ile verilen Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımında (3.8) eşitliği yerine konulup gerekli işlemler yapıldığında

$$\varepsilon = \frac{1 - 2r \sin^2(\beta h / 2)}{1 + 2r \sin^2(\beta h / 2)}$$

elde edilir. Kararlılık için gerek ve yeter şart $|\varepsilon| \leq 1$ olmasıdır. O halde

$$-1 \leq \frac{1 - 2r \sin^2(\beta h / 2)}{1 + 2r \sin^2(\beta h / 2)} \leq 1$$

elde edilir. Bu eşitsizlik her $r \geq 0$ için sağlanır. Böylece Robbin sınır şartlı ısı iletim probleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı şartsız kararlıdır.

Nümerik Sonuçlar

$k = 0.00001$ değeri ve farklı mesh uzunluğu h için $t = 0.1$ zamanında Problem 3'ün açık yöntem ile elde edilen nümerik çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması Tablo 5.9'da, kapalı yöntem ile elde edilen nümerik çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması Tablo 5.10'da ve Crank-Nicolson yöntemi ile elde edilen nümerik çözümlerinin analitik çözümle karşılaştırılması Tablo 5.11'de verildi. Tablolardan kolayca görüleceği üzere mesh uzunluğu h ne kadar küçük seçilirse nümerik çözümlerin analitik çözüme o kadar yaklaştığı kolayca görülür. Buradaki h ve k değerleri kararlılığı bozmayacak şekilde seçilmiştir.

$k = 0.001$ ve $h = 0.1$ değerleri için Problem 3'ün açık, kapalı ve Crank-Nicolson yöntemleriyle elde edilen $t = 0.5$ zamanındaki nümerik çözümlerin karşılaştırılması Tablo 5.12 ile verilmiştir. Tablodan kolayca görüleceği gibi analitik çözüme en yakın sonuçlar açık yöntemden daha sonra Crank-Nicolson ve kapalı yöntemlerinden elde edilmiştir.

Tablo 5.9. Açık Yöntem: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 3'ün nümerik ve analitik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.0	0.718024	0.717672	0.717587	0.717566	0.717527
0.1	0.783425	0.782924	0.782801	0.782771	0.782733
0.2	0.834964	0.834404	0.834266	0.834231	0.834195
0.3	0.872019	0.871463	0.871324	0.871290	0.871255
0.4	0.894308	0.893777	0.893644	0.893610	0.893577
0.5	0.901742	0.901225	0.901094	0.901061	0.901028
0.6	0.894308	0.893777	0.893644	0.893610	0.893577
0.7	0.872019	0.871463	0.871324	0.871290	0.871255
0.8	0.834964	0.834404	0.834266	0.834231	0.834195
0.9	0.783425	0.782924	0.782801	0.782771	0.782733
1.0	0.718024	0.717672	0.717587	0.717566	0.717527
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.000780	0.000224	0.000079	0.000042	
L_2	0.000717	0.000197	0.000068	0.000036	
L_∞	0.000770	0.000210	0.000071	0.000039	

Tablo 5.10. Kapalı Yöntem: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 3'ün nümerik ve analitik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.0	0.718029	0.717677	0.717591	0.717570	0.717527
0.1	0.783429	0.782928	0.782806	0.782775	0.782733
0.2	0.834967	0.834407	0.834269	0.834234	0.834195
0.3	0.872021	0.871465	0.871326	0.871292	0.871255
0.4	0.894308	0.893778	0.893645	0.893611	0.893577
0.5	0.901742	0.901225	0.901094	0.901061	0.901028
0.6	0.894308	0.893778	0.893645	0.893611	0.893577
0.7	0.872021	0.871465	0.871326	0.871292	0.871255
0.8	0.834967	0.834407	0.834269	0.834234	0.834195
0.9	0.783429	0.782928	0.782806	0.782775	0.782733
1.0	0.718029	0.717677	0.717591	0.717570	0.717527
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.000782	0.000227	0.000082	0.000045	
L_2	0.000719	0.000200	0.000071	0.000039	
L_∞	0.000773	0.000213	0.000074	0.000043	

Tablo 5.11. Crank-Nicolson Yöntemi: $k = 0.00001$ ve h 'nin farklı değerleri için $t = 0.1$ zamanında Problem 3'ün nümerik ve analitik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.0	0.718026	0.717674	0.717589	0.717568	0.717527
0.1	0.783427	0.782926	0.782804	0.782773	0.782733
0.2	0.834966	0.834405	0.834267	0.834233	0.834195
0.3	0.872020	0.871464	0.871325	0.871291	0.871255
0.4	0.894308	0.893778	0.893644	0.893611	0.893577
0.5	0.901742	0.901225	0.901094	0.901061	0.901028
0.6	0.894308	0.893778	0.893644	0.893611	0.893577
0.7	0.872020	0.871464	0.871325	0.871291	0.871255
0.8	0.834966	0.834405	0.834267	0.834233	0.834195
0.9	0.783427	0.782926	0.782804	0.782773	0.782733
1.0	0.718026	0.717674	0.717589	0.717568	0.717527
Hata Normu					
$\ e\ _1$	0.000781	0.000226	0.000081	0.000044	
L_2	0.000718	0.000199	0.000069	0.000037	
L_∞	0.000771	0.000212	0.000073	0.000041	

Tablo 5.12. $h = 0.1$ ve $k = 0.001$ değerleri için $t = 0.5$ zamanında Problem 3'ün nümerik ve analitik çözümlerinin karşılaştırılması

x	Açık Yöntem	Kapalı Yöntem	Crank-Nicolson Yöntemi	Analitik Çözüm
0.0	0.361560	0.362088	0.361824	0.361895
0.1	0.394627	0.395203	0.394915	0.394901
0.2	0.420950	0.421565	0.421258	0.421174
0.3	0.440081	0.440724	0.440403	0.440267
0.4	0.451692	0.452352	0.452022	0.451855
0.5	0.455584	0.456250	0.455917	0.455740
0.6	0.451692	0.452352	0.452022	0.451855
0.7	0.440081	0.440724	0.440403	0.440267
0.8	0.420950	0.421565	0.421258	0.421174
0.9	0.394627	0.395203	0.394915	0.394901
1.0	0.361560	0.362088	0.361824	0.361895
Hata Normu				
$\ e\ _1$	0.000436	0.000878	0.000221	
L_2	0.000226	0.000412	0.000120	
L_∞	0.000335	0.000510	0.000177	

KAYNAKLAR

- [1] E. Kreyszig, *Advanced Engineering Mathematics*, John Wiley & Sons, New York, 1988.
- [2] R. L. Burden and J. D. Faires, *Numerical Analysis*, PWS-Kent Publishing Company, Boston, 1993.
- [3] G. D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Clarendon Press-Oxford, 1985.
- [4] M. Balcı, *Matematik Analiz Cilt II*, Balcı Yayınları, 1996.
- [5] Y. Uçar, “1-Boyutlu Burgers Tipi Denklemlerin Sonlu Fark Çözümleri”, MSc.Thesis, İnönü University, Turkey, 2005.
- [6] M. N. Özışık, *Boundary Value Problems of Heat Conduction*, Dover Publications, Inc., New York, 1989.
- [7] M. Dehghan, *An Inverse Problem of Finding a Source Parameter in a Semilinear Parabolic Equation*, **Applied Mathematical Modelling**, 25 (2001) 743-754.
- [8] J. M. Hill and J. N. Dewynne, *Heat Conduction*, Blackwell Scientific Publications, London, 1987.
- [9] S. Sallam, M. N. Anwar, M.R. Abdel-Aziz, *Unconditionally Stable C^1 - Cubic Spline collocation Method for Solving Parabolic Equations*, **International Journal of Computer Mathematics**, 81:7 (2004) 813-821.

ÖZGEÇMİŞ

Berna BULUT, 18.05.1982 tarihinde Ankara'da doğdu. Turhal 100. Yıl İlkokulu'ndan 1993, Turhal Alparslan Ortaokulu'ndan 1996, Turhal Cumhuriyet Lisesi'nden (YDA) 2000 yılında mezun oldu. 2000 yılında Adnan Menderes Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne kayıt yaptıran Berna BULUT, bu bölümü 2004 yılında bitirdi. Aynı yıl İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. Bu kapsamda Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY danışmanlığında Klasik Sonlu Fark Yöntemleri ve Uygulamaları isimli çalışmasını yürüttü.