T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LIE ÖRTÜ GRUPOİDLERİ

M. Habil GÜRSOY

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Ağustos 2007

Tezin Başlığı: **Lie Örtü Grupoidleri**

Tezi Hazırlayan: **Mustafa Habil GÜRSOY**

Sınav Tarihi: 27 Ağustos 2007

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Prof.Dr. Orhan ÖZER	(Anadolu Üniv.)	______________
Doç.Dr. İlhan İÇEN	(İnönü Üniv.)	______________
Prof.Dr. Cemil YILDIZ	(Gazi Üniv.)	______________
Prof.Dr. Selçuk KUTLUAY	(İnönü Üniv.)	______________
Yrd.Doç.Dr. Hacı Bayram KARADAĞ	(İnönü Üniv.)	______________

____

Doç.Dr. İlhan İÇEN

Tez Danışmanı

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

____

Prof.Dr. Ali ŞAHİN

Enstitü Müdürü

Onur Sözü

Doktora Tezi olarak sunduğum "Lie Örtü Grupoidleri" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Sevgili Eşim Canan' a ...

ÖZET

Doktora Tezi
LIE ÖRTÜ GRUPOİDLERİ
M.Habil GÜRSOY
İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
174+v sayfa
2007
Danışman: Doç. Dr. İlhan İÇEN

M bağlantılı bir diferensiyellenebilir manifold ise bir $\widetilde{M}$ evrensel örtü manifoldu vardır ve bu manifold $p : \widetilde{M} \to M$ örtü dönüşümü diferensiyellenebilir olacak şekilde bir tek diferensiyellenebilir yapıya sahiptir. Bu gerçek bağlantılı Lie gruplar için de doğrudur.

Bu düşünceden hareketle bağlantılı Lie grupların genelleştirilmesi olan bağlantılı Lie grupoidlerin örtülerinin $LGdCov(G)$ kategorisi ve bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerine etkilerinin $LGdOp(G)$ kategorisinin denk olduğu gösterildi.

İkinci olarak Lie grup-grupoidler tanımlanarak bir G Lie grup-grupoidinin örtülerinin $LGGdCov(G)$ kategorisi ile G' nin M bağlantılı Lie grubu üzerine etkilerinin $LGGdOp(G)$ kategorileri oluşturuldu. Ayrıca bu kategorilerin denk olduğu ispat edildi.

Son olarak Lie grup-grupoidlerin doğal bir genelleştirmesi olan Lie halka-grupoid kavramı tanımlanarak bir R Lie halka-grupoidinin örtülerinin $LRGdCov(R)$ kategorisi ile R' nin M bağlantılı Lie halkası üzerine etkilerinin $LRGdOp(R)$ kategorisinin denk olduğu gösterildi.

ANAHTAR KELİMELER: Grupoid, Lie grupoid, örtü grupoidi, Lie grup-grupoid, Lie halka-grupoidi.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

LIE COVERING GROUPOIDS

M.Habil GÜRSOY

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

174+v pages

2007

Supervisor: Assoc. Prof. İlhan İÇEN

If M is a differentiable connected manifold then there exists an universal covering manifold $\widetilde{M}$ having unique differentiable structure such that the covering map $p : \widetilde{M} \to M$ is differentiable. This fact is also true for connected Lie groups

By using this fact, it is proved that the category $LGdCov(G)$ of coverings of connected Lie groupoids which is a generalization of connected Lie groups, and the category $LGdOp(G)$ of actions on some M differentiable manifold are equivalent.

Secondly, by introducing Lie group-groupoids the category $LGGdCov(G)$ of coverings of some G Lie group-groupoid and the category $LGGdOp(G)$ of actions of G on connected Lie group M are established. Further, it is shown that these categories are equivalent.

Finally, it is presented by launching the notion Lie ring-groupoids, a generalization of Lie group-groupoids, that the category $LRGdCov(R)$ of coverings of R Lie ring-groupoids and the category $LRGdOp(R)$ of actions of R on connected Lie ring M are equivalent.

KEY WORDS: Groupoid, Lie groupoid, covering groupoid, Lie group-groupoid, Lie ring-groupoid.

TEŞEKKÜR

Beni bu konuda çalışmaya teşvik ederek, bilgi ve tecrübeleriyle yönlendiren tez danışmanım Sayın Doç.Dr. İlhan İçen' e, lisansüstü öğrenimim boyunca beni yönlendiren bölüm başkanım Sayın Prof.Dr. Sadık Keleş' e, zaman zaman karşılaştığım problemleri tartışmak için bana değerli zamanını ve bilgilerini sunan Sevgili arkadaşım Arş.Gör.Dr. A. Fatih Özcan' a, bu çalışmadaki şekillerin çizilmesinde ve bilgisayar ortamına alınmasında bana yardım eden Değerli hocam Yrd.Doç.Dr. M. Kemal Özdemir' e, Sevgili arkadaşlarım Arş.Gör. Tugba Ertan' a ve Arş.Gör. Fulya Durak' a, ve manevi desteğini hiç bir zaman esirgemeyen anneme, babama ve Sevgili eşim Canan' a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Örtü uzayları topolojik problemlerin cebirsel problemlere dönüştürülmesinde temel bir rol oynamaktadır. Bunu X topolojik uzayının esas grubuna göre $\widetilde{X}$ örtü uzayının esas grubunun daha küçük (smaller) olmasından kolayca görebiliriz. Ayrıca grupoidleri grupların bir genelleştirilmesi olarak gözönüne aldığımızda X ve $\widetilde{X}$ arasındaki topolojik ilişki, X ve $\widetilde{X}$' ya karşılık gelen $\pi_1 X$ ve $\pi_1 \widetilde{X}$ esas grupoidleri arasındaki cebirsel ilişkiye dönüştürülür. Dolayısıyla örtü uzayları ile grupoidler arasında yakın bir ilişki vardır.

Teorinin cebirsel yönden topolojiye aktarılmasında en büyük katkıyı R. Brown [6] yapmıştır. R. Brown "Topology and Groupoids" isimli kitabında, verilen bir X uzayı için $\pi_1 X$ esas grupoidini elde etti. Böylece topolojik uzayların bir $p : \tilde{X} \to X$ örtü dönüşümü için, grupoidlerin $\pi_1 p : \pi_1 \tilde{X} \to \pi_1 X$ örtü morfizmini tanımladı. Daha genel olarak, X evrensel örtüye sahip olmak üzere X in örtülerinin $TCov(X)$ kategorisi ile $\pi_1 X$ esas grupoidinin örtülerinin $GdCov(\pi_1 X)$ kategorisinin denkliğini gösterdi. Daha sonra geçişli bir G grupoidi verildiğinde, G' yi örten ve geçişli olan bir H grupoidinin varlığını ispatladı .

Bu çalışmalar topolojik anlamda örtü uzayları ile örtü grupoidleri arasında daha sonra yapılacak çalışmalar için temel teşkil etmektedir. Cebirsel olarak grupoidin denk olduğu bazı yapılar için de benzer düşünceler geliştirildi. P. Gabriel ve M. Zisman [48] bir G grupoidinin örtülerinin $GdCov(G)$ kategorisi ile G nin kümeler üzerine etkilerinin $GdOp(G)$ kategorisinin denkliğini gösterdi.

1950' lerde Ehresmann tarafından grupoid kavramının topolojik ve diferensiyellenebilir versiyonlarının verilmesinden sonra topolojik örtü uzayları ve topolojik örtü grupoidleri arasındaki ilişkiler incelenmeye başlandı. İlk olarak R. Brown ve G. Danesh-Naruie [28] evrensel örtüye sahip bir X topolojik uzayı için, $\pi_1 X$ esas grupoidinin bir topolojik grupoid olduğunu gösterdi. Bu çalışmadan sonra R. Brown,

G. Danesh-Naruie ve J.P.L. Hardy [30] evrensel örtüye sahip topolojik uzayların $p : \tilde{X} \to X$ örtü dönüşümü için, $\pi_1 p : \pi_1 \tilde{X} \to \pi_1 X$ in topolojik grupoidlerin örtü morfizmi olduğunu gösterdi. X ve $\tilde{X} = G_0$ evrensel örtüye sahip olmak üzere $p : G \to \pi_1 X$ nesneleri üzerinde $TGdCov(\pi_1 X)$ kategorisinin tam altkategorisi olan $UTGdCov(\pi_1 X)$ kategorisi ile $\tilde{X}$ ve X evrensel örtüye sahip olmak üzere $p : \tilde{X} \to X$ nesneleri üzerinde $TCov(X)$ kategorisinin tam altkategorisi olan $UTCov(X)$ kategorisinin denkliği O. Mucuk ve İ. İçen tarafından gösterildi [18].

Bu ilişkiler, daha sonra yüksek boyutlu cebirsel yapılarda arandı. Öncelikle grup-grupoid kavramı üzerinde incelendi. R. Brown ve G. Danesh-Naruie [28] bir X topolojik grubu için $\pi_1 X$ in bir grup-grupoid olduğunu ve topolojik grupların bir $p : \tilde{X} \to X$ örtü morfizmi için, grup-grupoidlerin $\pi_1 p : \pi_1 \tilde{X} \to \pi_1 X$ morfizminin grup-grupoidlerin örtü morfizmi olduğunu gösterdi. O. Mucuk [17] X temelini oluşturan uzayı (underlying space) evrensel örtüye sahip bir topolojik grup olmak üzere, X in örtülerinin $TGCov(X)$ kategorisi ile $\pi_1 X$ in grup-grupoid örtülerinin $GGdCov(\pi_1 X)$ kategorisinin denkliğini ispatladı. Bu çalışmanın üzerine R. Brown ve O. Mucuk [20] bir G grup-grupoidinin örtülerinin $GGdCov(G)$ kategorisi ile G nin gruplar üzerine etkilerinin $GGdOp(G)$ kategorisinin denk olduğunu gösterdi. O. Mucuk ve İ. İçen [18], temelini oluşturan grupoidi geçişli olan bir G grup-grupoidi için, bir örtü grup-grupoidinin varlığını ispatladı .

1998' de grup-grupoidlerin doğal bir genişlemesi olan halka-grupoid kavramı O. Mucuk [21] tarafından tanımlandı. Bu çalışmada, X bir topolojik halka olmak üzere $\pi_1 X$ in bir halka-grupoid olduğu ve $p : \tilde{X} \to X$ topolojik halkaların örtü morfizmi ise $\pi_1 p : \pi_1 \tilde{X} \to \pi_1 X$ in de halka-grupoidlerin örtü morfizmi olduğu gösterildi. Daha sonra O. Mucuk ve İ. İçen [18], R bir halka-grupoid olmak üzere R nin örtülerinin $RGdCov(R)$ kategorisi ile R nin halkalar üzerine etkilerinin $RGdOp(R)$ kategorisinin denk olduğunu ispatladı. Ayrıca, temelini oluşturan grupoidi geçişli olan bir R halka-grupoidi verildiğinde, bir H halka-grupoidinin ve halka-grupoidlerin bir $p : H \to R$ örtü morfizminin varolduğu gösterildi.

2004' de A.F. Özcan [9] doktora tezinde grup-grupoid ve halka-grupoid kavramlarının topolojik tanımlarını vererek R. Brown, O. Mucuk ve İ. İçen [18, 20, 21] tarafından yapılan çalışmaların topolojik versiyonlarını ispatladı. Temelini oluşturan uzayı evrensel örtüye sahip bir X topolojik grubu için, $\pi_1 X$ in bir topolojik grup-grupoid olduğunu ve temelini oluşturan uzayları evrensel örtüye sahip topolojik grupların $p : \tilde{X} \to X$ örtü morfizmi için, $\pi_1 p : \pi_1 \tilde{X} \to \pi_1 X$ in topolojik grup-grupoidlerin örtü morfizmi olduğunu gösterdi.

X topolojik grup olmak üzere, $\pi_1 X$ topolojik grup-grupoidinin örtülerinin $UTGGdCov(\pi_1 X)$ kategorisi ile $UTGCov(X)$ kategorisinin denkliğini verdi. Daha sonra bir G topolojik grup-grupoidinin örtülerinin $TGGdCov(G)$ kategorisi ile G nin topolojik gruplar üzerine etkilerinin $TGGdOp(G)$ kategorisini oluşturarak bunların denk olduğunu gösterdi. Ayrıca temelini oluşturan grupoidi geçişli ve nesne uzayı Hausdorff olan bir G topolojik grup-grupoidi verildiğinde, bir H topolojik grup-grupoidinin ve topolojik grup-grupoidlerin bir $p : H \to G$ örtü morfizminin var olduğunu ortaya koydu.

Benzer olarak, X topolojik grubu yerine X topolojik halkası alarak X' in örtülerinin $UTRCov(X)$ kategorisi ile $\pi_1 X$ topolojik halka-grupoidinin örtülerinin $UTRGdCov(\pi_1 X)$ kategorisini tanımlayarak bu kategorilerin denk olduğunu gösterdi. Ayrıca bir R topolojik halka-grupoidinin örtülerinin $TRGdCov(R)$ kategorisi ile R nin topolojik halkalar üzerine etkilerinin $TRGdOp(R)$ kategorisini tanımlayarak bu kategorilerin denkliğini ispatladı. Bunlara ek olarak, temelini oluşturan grupoidi geçişli ve nesne uzayı Hausdorff olan bir R topolojik halka-grupoidi verildiğinde, bir H topolojik halka-grupoidinin ve topolojik halka-grupoidlerin bir $p : H \to R$ örtü morfizminin varolduğunu gösterdi.

Bu çalışmada diferensiyellenebilir örtü manifoldları aynı zamanda topolojik örtü uzayları olduğundan ve Lie grupoidler de aynı zamanda birer topolojik grupoid olduğundan yukarıda verilen çalışmalar diferensiyellenebilir açıdan incelendi. A.F. Özcan doktora tezinde topolojik uzayları lokal yol-bağlantılı ve yarı-lokal basit bağlantılı olarak ele almıştır. Manifoldların bağlantılı olması durumunda E. Spanier' den [23] bu topolojik özelliklerin kendiliğinden sağlandığını ve her bağlantılı manifoldun bir evrensel örtü manifolduna sahip olduğunu biliyoruz. Yine Teorem 1.3.9 dan G bağlantılı bir Lie grup olmak üzere G' nin $\widetilde{G}$ ile gösterilen ve basit bağlantılı olan evrensel örtü Lie grubu ve aynı zamanda bir Lie grup homomorfizmi de olan bir $p : \widetilde{G} \to G$ diferensiyellenebilir örtü dönüşümünün var olduğu bilinmektedir.

Literatürde bazı yazarlar Lie grupoidlerin tanımını verirken morfizmlerin manifoldunun Hausdorff olmasını ayrı bir tanım olarak vermektedir. Bu tezde Lie grupoidlerin morfizmlerinin manifoldu Hausdorff olarak kabul edilecektir.

Tezin birinci bölümünde çalışmaya temel teşkil eden kavramlar cebirsel, topolojik ve diferensiyellenebilir olmak üzere üç kısımda verildi.

Bölüm 2 de P. Gabriel ve M. Zisman [48] tarafından ispatlanan bir G grupoidinin örtülerinin $GdCov(G)$ kategorisi ile G' nin kümeler üzerine etkilerinin $GdOp(G)$ kategorisinin denkliği ve bu denkliğin R. Brown, G. Danesh-Naruie ve J.P.L. Hardy [30] tarafından ispatlanan topolojik versiyonu verildi. Lie örtü grupoidinin tanımı verildikten sonra Lie örtü grupoidlerinin $LGdCov(G)$ kategorisi ile bir G Lie grupoidinin manifoldlar üzerine etkilerinin $LGdOp(G)$ kategorisi oluşturularak bu kategorilerin denkliği ispatlandı.

Bölüm 3 de A.F. Özcan [9] tarafından ispatlanan bir G topolojik grup-grupoidinin örtülerinin $TGGdCov(G)$ kategorisi ile G' nin topolojik gruplar üzerine etkilerinin $TGGdOp(G)$ kategorisinin denkliği verildikten sonra Lie grup-grupoidler tanımlanarak bir G Lie grup-grupoidin örtülerinin $LGGdCov(G)$ kategorisi ile G' nin bir M bağlantılı Lie grubu üzerine etkilerinin $LGGdOp(G)$ kategorisinin denkliği gösterildi.

Son olarak, yine A.F. Özcan [9] tarafından doktora tezinde ispatlanan bir R topolojik halka-grupoidinin örtülerinin $TRGdCov(R)$ kategorisi ile R' nin topolojik halkalar üzerine etkilerinin $TRGdOp(R)$ kategorisinin denkliği verildikten sonra Lie halka-grupoidler tanımlanarak bir R Lie halka-grupoidin örtülerinin $LRGdCov(R)$ kategorisi ile R' nin bir M bağlantılı Lie halkası üzerine etkilerinin $LRGdOp(R)$ kategorisinin denkliği gösterildi.

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, tez boyunca kullanılacak olan bazı temel tanım ve teoremler verildi. Bu temel kavramlar; cebirsel kavramlar, topolojik kavramlar ve diferensiyellenebilir kavramlar başlıkları altında göz önüne alındı.

1.1 Cebirsel Kavramlar

1.1.1 Grupoidler

Tanım 1.1.1. *Bir $\mathcal{C}$ kategorisi; nesnelerin kümesi C_0 ve morfizmlerin kümesi C ile birlikte aşağıdaki yapı dönüşümlerinden meydana gelir. Bu yapı dönüşümleri; sırasıyla kaynak ve hedef dönüşümü $\alpha, \beta : C \to C_0$, $x \in C_0$ olmak üzere nesne dönüşümü $1_{()} : C_0 \to C, x \mapsto 1_x$ ve $C_\alpha \times_\beta C = \{(b,a) \in C \times C : \alpha(b) = \beta(a)\}$ geri çekmesi (pullback) üzerinde tanımlı $m : C_\alpha \times_\beta C \to C, (b,a) \mapsto b \circ a$ kompozisyonudur. Bu dönüşümler aşağıdaki şartları sağlamalıdır [1, 6]:*

i) *her $(b,a) \in C_\alpha \times_\beta C$ için $\alpha(b \circ a) = \alpha(a)$ ve $\beta(b \circ a) = \beta(b)$,*

ii) *her $a, b, c \in C$ için $\alpha(b) = \beta(a)$ ve $\alpha(c) = \beta(b)$ olmak üzere $c \circ (b \circ a) = (c \circ b) \circ a$,*

iii) *her $x \in C_0$ için $\alpha(1_x) = \beta(1_x) = x$,*

iv) *her $a \in C$ için $a \circ 1_{\alpha(a)} = a$ ve $1_{\beta(a)} \circ a = a$.*

Örnek 1.1.1. *Nesnelerin kümesi topolojik uzaylar, morfizmlerin kümesi bu uzaylar arasındaki sürekli dönüşümler ve kompozisyon sürekli dönüşümlerin bileşkesi alınırsa topolojik uzaylar ve sürekli dönüşümlerin Top kategorisi elde edilir [2].*

Tanım 1.1.2. *$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ dönüşümüne funktor denir, eğer $\mathcal{C}$' ye ait her bir x nesnesine $\mathcal{D}$' de bir $F(x)$ nesnesi ve $\mathcal{C}$' deki $a : x \to y$ morfizmine $\mathcal{D}$' de $F(a) : F(x) \to F(y)$ morfizmi karşılık getiriyorsa öyle ki*

i) *$I_x : x \to x$, $\mathcal{C}$' de özdeş morfizm ise $F(I_x) : F(x) \to F(x)$, $\mathcal{D}$' de özdeş morfizmdir. Yani $F(I_x) = I_{F(x)}$ dir,*

ii) *$a : x \to y$ ve $b : y \to z$, $\mathcal{C}$' de morfizmler ise $F(b \circ a) = F(b) \circ F(a)$ dır [2].*

Kategoriler arasında doğal dönüşümler (natural transformation) ve doğal denklik aşağıdaki gibi tanımlanır [4]:

$\delta : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ve $\mu : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ iki funktor olmak üzere bir $\tau : \delta \to \mu$ doğal dönüşümü; $\mathcal{C}$' nin her bir x nesnesine $\mathcal{D}$' de bir $\tau_x : \delta(x) \to \mu(x)$ morfizmini ve $\mathcal{C}$' deki her bir $a : x \to x^{'}$ morfizmine de aşağıdaki değişimli diyagramı karşılık getiren bir dönüşümdür.

$$\begin{tikzcd} \delta(x) \arrow[r, "\tau_x"] \arrow[d, "\delta(a)"'] & \mu(x) \arrow[d, "\mu(a)"] \\ \delta(x') \arrow[r, "\tau_{x'}"'] & \mu(x') \end{tikzcd}$$

Bu takdirde $\tau_x : \delta(x) \to \mu(x)$ dönüşümüne x' de *doğaldır* denir. Her x nesnesi için τ_x morfizmleri birer izomorfizm ise τ' ya *doğal izomorfizm* ve δ ile μ funktorlarına da *doğal denktir* denir ve $\delta \cong \mu$ ile gösterilir.

$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ iki kategori olsun. $\mu\delta \cong 1_{\mathcal{C}}$ ve $\delta\mu \cong 1_{\mathcal{D}}$ olacak şekilde $\delta : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ ve $\mu : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ funktorları varsa, $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorilerine *doğal denktir* denir ve $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ ile gösterilir.

Tanım 1.1.3. *Bir G kategorisinde her bir $a \in G$ morfizmi için $\alpha(a) = \beta(a^{-1})$, $\beta(a) = \alpha(a^{-1})$, $a^{-1} \circ a = 1_{\alpha(a)}$ ve $a \circ a^{-1} = 1_{\beta(a)}$ şartlarını sağlayan $a^{-1} \in G$ tersi varsa G' ye bir **grupoid** denir [1, 3, 6].*

Bir G grupoidinde $x, y \in G_0$ için x' den y' ye giden morfizmlerin kümesi $G(x, y)$ ile gösterilir.

Örnekler 1.1.1. *1. G birim elemanı e olan bir grup olsun. Bu durumda G, $\{e\}$ nesne kümesi ve grup işlemi ile bir grupoiddir. G' nin morfizmleri grubun elemanlarından oluşur.*

2. X bir küme, $R \subseteq X \times X$ de X üzerinde bir denklik bağıntısı ve $\alpha, \beta : R \to X$ sırasıyla ikinci ve birinci izdüşüm dönüşümleri olsun. Bu durumda $(y, x), (z, y) \in R$

için $(z,y)\circ(y,x)=(z,x)$ *kompozisyonu ile* R *bir grupoid olur. Her* $x\in X$ *için birim morfizm* (x,x) *çifti ve* (x,y)*' nin ters morfizmi* (y,x)*' dir.*

3. X *bir küme ve* G *bir grup olsun. Böylece nesne kümesi* X *ve morfizm kümesi* $X\times G\times X$ *olan bir grupoid elde ederiz. Kaynak dönüşümü* $\alpha(x,g,y)=y$*, hedef dönüşümü* $\beta(x,g,y)=x$*, nesne dönüşümü* $x\mapsto(x,e,x)$*, ters dönüşüm* $(x,g,y)\mapsto(y,-g,x)$ *ve kompozisyon da* $y=y^{'}$ *olmak üzere*

$$(z,h,y^{'})\circ(y,g,x)=(z,h+g,x)$$

ile tanımlıdır. Bu grupoide G *grubu ile* X *üzerindeki aşikar grupoid denir [5].*

Tanım 1.1.4. H *ve* G *iki grupoid olsun.* H*' dan* G*' ye bir grupoid morfizmi, her* $(a,b)\in H\ {}_{\alpha_H}\times_{\beta_H} H$ *için* $\alpha_G\circ f=f_0\circ\alpha_H$*,* $\beta_G\circ f=f_0\circ\beta_H$ *ve* $f(a\circ b)=f(a)\circ f(b)$ *şartlarını sağlayan* $f:H\to G$ *ve* $f_0:H_0\to G_0$ *morfizmlerinden oluşur. Bu şartlar aşağıdaki diyagramların değişimli olmasına karşılık gelir.*

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\alpha_H"'] & G \arrow[d, "\alpha_G"] \\ H_0 \arrow[r, "f_0"'] & G_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta_H"'] & G \arrow[d, "\beta_G"] \\ H_0 \arrow[r, "f_0"'] & G_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} H_{\alpha_H}\times_{\beta_H} H \arrow[r, "f\times f"] \arrow[d, "m_H"'] & G_{\alpha_G}\times_{\beta_G} G \arrow[d, "m_G"] \\ H_0 \arrow[r, "f_0"'] & G_0 \end{tikzcd}$$

Böyle bir morfizm, kısaca $f:H\to G$ ile gösterilir. $\alpha_G\circ f=f_0\circ\alpha_H$ ve $\beta_G\circ f=f_0\circ\beta_H$ şartları, $a\circ b$ tanımlı olduğunda $f(a)\circ f(b)$' nin tanımlı olmasını garanti eder. Eğer f ve f_0 bire-bir ve örten ise $f:H\to G$' ye bir *izomorfizm* denir. Eğer $f:H\to G$ grupoidlerin bir morfizmi ise, $x\in H_0$ ve $b\in H$ için $f(1_x)=1_{f_0(x)}$ ve $f(b^{-1})=f(b)^{-1}$ dir. Böylece grupoidler ve onlar arasındaki morfizmlerden oluşan Gd kategorisi elde edilir [5, 6] .

Tanım 1.1.5. G *bir grupoid ve* $N\subseteq G$ *olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan* N*' ye* G*' nin bir altgrupoidi denir [5, 6] :*

i) $\alpha(N)\subseteq N_0$ *ve* $\beta(N)\subseteq N_0$*,*

ii) *her* $x\in N_0$ *için* $1_x\in N$*,*

iii) N*, kompozisyon işlemi altında kapalıdır.*

N, G' nin altgrupoidi olsun. Eğer $N_0 = G_0$ ise N' ye G' nin *geniş* (wide) altgrupoidi, ve her $x, y \in N_0$ için $N(x, y) = G(x, y)$ ise N' ye G' nin *tam* (full) altgrupoidi denir [5, 6].

G bir grupoid olsun. Her $x, y \in G_0$ için $G(x, y)$ boştan farklı ise G' ye *geçişli grupoid*, $G(x, y)$ bir tek morfizme sahip ise G' ye *1-geçişli grupoid*, $G(x, y)$ birden fazla morfizme sahip değilse G' ye *basit geçişli grupoid* ve G sadece birim morfizmlerden oluşuyorsa G' ye *diskret grupoid* denir.

Açıkça bir G grupoidinin 1-geçişli olması için gerek ve yeter şart G grupoidinin geçişli ve basit geçişli olmasıdır.

G bir grupoid ve $x_0 \in G_0$ olmak üzere $C_{x_0}(G)$, bütün x nesneleri üzerinde $G(x_0, x) \neq \emptyset$ olacak şekilde G' nin tam altgrupoidi olsun. Eğer x ve y, $C_{x_0}(G)$ altgrupoidinin iki nesnesi ise $a \in G(x, x_0)$ ve $b \in G(x_0, y)$ için $G(x, y) \neq \emptyset$ dir. Böylece $C_{x_0}(G)$, G' nin en geniş (maximal) geçişli altgrupoididir. Bu altgrupoide G' nin x_0 noktasını içeren *geçişli bileşeni* denir.

G' nin tüm geçişli bileşenlerinin kümesi $\pi_0(G)$ ile gösterilir. G üzerinde

$$"x \sim y \Leftrightarrow G(x, y) \neq \emptyset"$$

bağıntısı bir denklik bağıntısı tanımlar. Denklik sınıfları, G' nin bileşenlerinin nesne kümeleridir.

Bir (G, x) *noktalı grupoidi*, G nin bir x nesnesiyle bir G grupoididir. Noktalı grupoidlerin bir $(G, x) \to (H, y)$ *noktalı morfizmi*, $f(x) = y$ şartını sağlayan grupoidlerin bir $f : G \to H$ morfizmidir.

Bir G grupoidinin $x \in G_0$' daki starı $G_x = St_G x = \alpha^{-1}(x) = \{b \in G : \alpha(b) = x\}$ kümesi ve costarı da $G^x = CoSt_G x = \beta^{-1}(x) = \{b \in G : \beta(b) = x\}$ kümesidir. $G(x, x)$ kümesinin G' deki kompozisyon altında bir grup olduğu açıktır. Bu gruba x' deki *verteks* ya da *nesne grubu* denir ve kısaca $G\{x\}$ ile gösterilir [6].

Tanım 1.1.6. *G bir grupoid ve N de G' nin geniş altgrupoidi olsun. $x, y \in G_0$ ve $a \in G(x, y)$ için, $a \circ N\{x\} = N\{y\} \circ a$ şartı sağlanıyorsa N' ye G' nin normal altgrupoidi denir [17].*

G bir grupoid ve N, G' nin tamamen geçişsiz normal altgrupoidi olsun. G/N *bölüm grupoidi*, nesnelerin kümesi $(G/N)_0 = G_0$, morfizmlerin kümesi $G/N(x, y) =$

$\{a \circ N\{x\} : a \in G(x,y)\}$ ve $a \in G(x,y), b \in G(y,z)$ için $(b \circ N\{y\}) \circ (a \circ N\{x\}) = b \circ a \circ N\{x\}$ kompozisyonu ile tanımlıdır [6].

1.1.2 Esas Grupoid

Bu kısımda, homotopi tanımı verilerek bir X topolojik uzayı üzerinde yolların homotopilerinin denklik sınıfları üzerinde tanımlanan işlem ile esas grup, ve sonra da esas grupoid elde edilecektir. Örtü grupoidleri teorisinde önemli bir yere sahip olan esas grupoid kavramı için R. Brown' ın kitabı [6] temel alınmıştır. Aşağıdaki kavramlar cebirsel topoloji için temel kavramlar olup [23, 24]' de bulunabilir.

$I = [0,1]$ kapalı aralık olmak üzere I' daki topoloji $\mathbb{R}$' nin alışılmış topolojisinden indirgenen topoloji olsun. $a : I \to Y$ sürekli fonksiyonuna Y topolojik uzayında bir *yol* denir.

$0 \leq t \leq 1$ olsun. t parametresine bağlı Y' deki a_t yol ailesini gözönüne alalım. $a_0 = a$, $a_1 = b$ olmak üzere t, I' yı taradığında a_t sürekli olarak değişsin. Şimdi $F(x,t) = F : I \times I \to Y$ fonksiyonunu tanımlayalım. Eğer F fonksiyonu sürekli, t' nin her bir değerine bir a_t yolunu karşılık getiriyor ve $F(x,0) = a_0 = a$, $F(x,1) = a_1 = b$ şartları sağlanıyorsa, F fonksiyonu a_t yolları aracılığıyla a' dan b' ye sürekli bir deformasyon tanımlar. Bu deformasyona a' dan b' ye bir *homotopi* denir. Açıkça F fonksiyonu bir tek değildir. $a_0 = a$ ve $a_1 = b$ şartını sağlayan herhangi bir a_t sürekli ailesi bulunabilir.

Tanım 1.1.7. *Y ' deki a ve b yollarının başlangıç ve bitim noktaları aynı olsun. Eğer a ve b, I ' nın $\{0,1\}$ altkümesine göre homotop iseler bu iki yola "uç noktalarına göre homotoptur" denir ve $a \sim b$ $rel.\{0,1\}$ ile gösterilir.*

Bu tezde $a \sim b$ $rel.\{0,1\}$ yerine kısaca $a \sim b$ gösterimi kullanılacaktır. Açıkça uç noktalarına göre homotop olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

X topolojik uzay ve $s \in \mathbb{R}$ olmak üzere $a : [0,s] \to X$, $a(0) = x$, $a(s) = y$ sürekli fonksiyonuna x noktasını y noktasına birleştiren ve uzunluğu s olan bir yol denir. Eğer b yolu da y noktasını z noktasına birleştiren ve uzunluğu s' olan bir başka yol ise,

$$c = \begin{cases} a(t) & ,0 \leq t \leq s \\ b(t-s) & ,s \leq t \leq s+s' \end{cases}$$

fonksiyonu, uzunluğu $s+s'$ olan x noktasını z noktasına birleştiren bir başka yoldur. Bu c yoluna a ve b yollarının *çarpımı* denir ve $a \circ b$ ile gösterilir. Ayrıca bir a yolunun tersi $a^{-1}(t) = a(s-t)$ ile tanımlıdır.

Teorem 1.1.1. *a, b, c, d yolları Y' de herhangi yollar olsun. $a \sim c$, $b \sim d$ ve $a \circ b$ tanımlı ise $c \circ d$ tanımlıdır ve $a \circ b \sim c \circ d$ dir.*

Teorem 1.1.2. *$a \sim b$ ise $a^{-1} \sim b^{-1}$ dir.*

Teorem 1.1.3. *$a \circ b$ tanımlı olmak üzere, a bir yol ve b sıfır yol olsun. Bu takdirde $a \circ b \sim a$ dır. Benzer şekilde $c \circ a$ tanımlı olmak üzere c sıfır yol ise $c \circ a \sim a$ dır.*

Teorem 1.1.4. *$a \circ b$ ve $b \circ c$ tanımlı olacak şekilde Y' deki üç yol a, b ve c olsun. Bu takdirde $(a \circ b) \circ c$ ve $a \circ (b \circ c)$ tanımlıdır. Ayrıca $(a \circ b) \circ c \sim a \circ (b \circ c)$ dir.*

Teorem 1.1.5. *a, Y' de bir yol ise $a \circ a^{-1}$ ve $a^{-1} \circ a$ sıfır yola homotoptur.*

Bir topolojik uzayda yollar için temel özellikleri verdikten sonra artık esas grubu ifade edebiliriz.

Y bir topolojik uzay ve $y_0 \in Y$ sabit bir nokta olsun. Y' de y_0 noktasında başlayıp y_0 noktasında biten tüm kapalı yolların kümesini gözönüne alalım. y_0 noktasına yollar için taban nokta, yollara ise y_0' da kapalı yollar veya kısaca yollar denir. a, y_0' da bir yol ise a' ya homotop olan y_0' daki tüm yolların denklik sınıfını $[a]$ ile ve denklik sınıflarının ailesini $\pi(Y, y_0)$ ile gösterelim.

$[a], [b] \in \pi(Y, y_0)$ için çarpım $[a] \circ [b] = [a \circ b]$ şeklinde tanımlanır. Bu tanımlanan çarpım işlemi, homotopi sınıflarının kümesi $\pi(Y, y_0)$ üzerinde bir grup yapısı tanımlar. Bu gruba y_0' daki *esas grup* denir [23, 24, 27].

Aşağıdaki temel kavram ve tanımlar R. Brown' ın kitabından [6] alınmıştır.

Şimdi gruptan grupoide geçiş yaparak bu kavramı genelleştirelim.

X bir topolojik uzay olmak üzere yukarıdaki şekilde tanımlanan yolların çarpımı birleşimlidir ve birim eleman sıfır yoludur. Böylece nesnelerin kümesi X olan PX kategorisini tanımlayabiliriz. Her $x, y \in X$ için $PX(x, y)$ kümesi başlangıç noktası x ve bitim noktası y olan yolların ailesidir. Kompozisyon ise yolların çarpım işlemidir.

Tanım 1.1.8. *$\pi_1 X(x,y)$, $PX(x,y)$' nin denklik sınıflarının bir kümesi olsun. Aynı s uzunluğundaki $a, b \in PX(x,y)$ yollarını gözönüne alalım. a' dan b' ye $s^{'}$ uzunluğunda uç noktalara göre* ***homotopi****,*

$t^{'} \in [0,s]$ *için* $F(t^{'},0) = a(t^{'})$ *ve* $F(t^{'},s^{'}) = b(t^{'})$ *ve*

$t \in [0,s^{'}]$ *için* $F(0,t) = x$ *ve* $F(s,t) = y$

şartlarını sağlayan $F : [0,s] \times [0,s^{'}] \to X$ *dönüşümüdür.*

Her bir $t \in [0,s^{'}]$ için $F_t : t^{'} \mapsto F(t^{'},t)$ yolunun, $PX(x,y)$' de bir yol olacağına dikkat edilmelidir. (F_t) ailesi, $F_0 = a$ ve $F_1 = b$ arasında yolların sürekli ailesi olarak düşünülebilir. Aksi takdirde, F' nin a' dan b içine bir deformasyon olduğunu düşünebiliriz.

F, a' dan b' ye uç noktalarına göre homotopi ise bunu $F : a \sim b$ ile göstereceğiz. a' dan a' ya sıfır uzunluğunda bir tek homotopi vardır. Eğer $F : a \sim b$, s uzunluğunda bir homotopi ise, $-F : b \sim a$, $(t^{'},t) \mapsto F(t^{'}, s-t)$ ile tanımlı bir homotopidir. Eğer a, b ve c s uzunluğunda yollar olmak üzere $F : a \sim b$ ve $G : b \sim c$ sırasıyla $s^{'}$ ve $s^{''}$ uzunluğunda ise F ve G' nin çarpımı

$$G + F : [0,s] \times [0, s^{'} + s^{''}] \to X$$
$$(t^{'},t) \mapsto \begin{cases} F(t^{'},t) & ,0 \leq t \leq s^{'} \\ G(t^{'}, t-s^{'}) & ,s^{'} \leq t \leq s^{'} + s^{''} \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır ve süreklidir. Ayrıca $a \sim c$ homotopisini tanımlar.

a ve b aynı uzunlukta yollar olmak üzere $F : a \sim b$ homotopisi var ise a ve b uç noktalarına göre homotopiktir denir ve $a \sim b$ şeklinde gösterilir. Yolların durumunda uç noktalarına göre homotopi yerine kısaca homotopi diyeceğiz. $a \sim b$ bağıntısının bir denklik bağıntısı olduğu önceki paragraftan açıktır.

$F : [0,s] \times [0,s^{'}] \to X$, $a \sim b$ bir homotopi olsun. Bu takdirde 1 uzunluğunda $F^{'} : a \sim b$ homotopisi vardır. Yani

$$F^{'} : [0,s] \times I \to X$$
$$(t,t^{'}) \mapsto F(t, s^{'} + t^{'}).$$

Bundan sonra uzunluğu 1 olan homotopilerle ilgileneceğiz. Şimdi homotopiler için uygun bir gösterim belirleyelim. F_t bir yol ve $t \mapsto F_t$, F_t' ye kısıtlanış olduğunda

1 uzunluğundaki bir F homotopisini, t' den F_t' ye bir fonksiyon olarak düşünürüz. Eğer F_t, $a \sim b$ bir homotopi ise F_{1-t} de $b \sim a$ bir homotopidir.

Her bir $s \geq 0$ reel sayısı ve $x \in X$ için s uzunluğunda x' deki sabit yolu s_x ile gösterelim. Karışıklık olmadığı durumda s_x yolunu kısaca s ile göstereceğiz. Özellikle her bir a yolu ve $s \geq 0$ için $a \circ s$, $s \circ a$ yolları iyi tanımlıdır.

Lemma 1.1.1. *$|a| = |b|$ ve $|c| = |d|$ olmak üzere $a, b \in PX(x, y)$ ve $c, d \in PX(y, z)$ olsun. Bu durumda*

1. *eğer $a \sim b$ ise $a^{-1} \sim b^{-1}$,*
2. *eğer $a \sim b$ ve $c \sim d$ ise $c \circ a \sim d \circ b$,*
3. *her bir $s \geq 0$ için $a \circ s \sim s \circ a$.*

Lemma 1.1.2. *Eğer $a \in PX(x, y)$ ve $|a| = s$ ise $a^{-1} \circ a \sim 2s_x$ ve $a \circ a^{-1} \sim 2s_y$ dir.*

Şimdi değişik uzunluktaki yollar arasında bir denklik bağıntısı tanımlayalım. $a, b \in PX(x, y)$ olsun. Eğer $|a| + s = |b| + s^{'}$ şartını sağlayan $s, s^{'} \geq 0$ reel sayıları var ve $s \circ a$ ile $s^{'} \circ b$ homotopik ise a ve b denktir denir. Bu bağıntının yansıyan ve simetrik olduğu homotopiden hemen görülür. Ayrıca a, b, c yollar ve $s, s^{'}, s^{''}, s^{'''} \geq 0$ olmak üzere verilen $s \circ a \sim s^{'} \circ b$ ve $s^{''} \circ b \sim s^{'''} \circ c$ homotopileri için

$$(s^{''} + r)a \sim (s^{''} + s)b = (s + s^{''})b \sim (s + s^{'''})c$$

homotopilerinin var olması, bağıntının geçişmeli olduğunu gösterir.

Teorem 1.1.6. *$a \in PX(x, y)$, $b \in PX(y, z)$ olmak üzere yolların çarpımı ve tersi sırasıyla $[b] \circ [a] = [b \circ a]$ ve $[a]^{-1} = [a^{-1}]$ şeklinde verilir.*

Teorem 1.1.7. *Yolların çarpımı birleşimlidir. Ayrıca eğer $[a] \in \pi_1 X(x, y)$ ise*

1. *$[a] \circ [1_x] = [1_y] \circ [a] = [a]$*
2. *$[a^{-1}] \circ [a] = [1_x]$*
3. *$[a] \circ [a^{-1}] = [1_y]$*

eşitlikleri sağlanır.

Böylece yolların homotopi sınıfları kümesi üzerinde $\pi_1 X$ ile gösterilen bir grupoid tanımlanır. Bu grupoidin nesneler kümesi X' deki noktalar ve morfizmleri x' den y' ye yolların homotopi sınıflarıdır. $[a] \in \pi_1 X(x,y)$ olmak üzere kaynak dönüşümü $\alpha([a]) = x$, hedef dönüşümü $\beta([a]) = y$, x' deki sabit yolların homotopi sınıfı $[1_x]$ olmak üzere nesne dönüşümü $x \mapsto [1_x]$, ters dönüşümü $[a]^{-1} = [a^{-1}]$ ve kompozisyonu da $\alpha([b]) = \beta([a])$ olmak üzere $[b] \circ [a] = [b \circ a]$ ile tanımlıdır. Bu grupoide X üzerindeki *esas grupoid* denir [6, 28]. Açıkça $\pi_1 X = \bigcup\limits_{x,y \in X} \pi_1 X(x,y)$ dir. Özel olarak $x = y$ alınırsa X üzerinde $\pi_1 X(x,x) = \pi(X,x)$ esas grubu elde edilir.

1.1.3 Grup-Grupoidler

Grupoidlerin kategorisinde bir grup nesne olan grup-grupoid kavramı ilk olarak 1976' da R. Brown ve C.B. Spencer [29] tarafından tanımlandı. Daha sonra, O. Mucuk doktora tezinde [17] bu kavramı geliştirdi. Bu, grup-kategorinin grupoid teorisine bir uyarlamasıdır. Cat; C_0 nesne kümesi sadece bir kümeden oluşan bütün kategoriler ve onlar arasındaki funktorların kategorisi olsun. Şimdi grup-kategoriyi tanımlayalım.

Tanım 1.1.9. *G bir kategori olmak üzere bir grup-kategori; $m : G \times G \to G$ toplam, $e : \star \to G$ ($\star$, bir nesneli ve birim morfizmli bir kategoridir) birim ve $\bar{u} : G \to G$ ters funktorları ile donatılmış Cat' daki bir grup nesnedir [29].*

Bir G grup-kategorisinde iki morfizm a ve b olsun. Grup işlemi $m(a,b) = a + b$, kategorideki kompozisyon $a \circ b$, grup işlemine göre tersi $-a$, (eğer varsa) kategori işlemine göre tersi a^{-1} ile gösterelim ve $e(\star) = e$ yazalım. m bir funktor olduğundan $a \circ b$ ve $c \circ d$ tanımlı olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
(a \circ b) + (c \circ d) &= m(a \circ b, c \circ d) = m((a,c) \circ (b,d)) \\
&= m(a,c) \circ m(b,d) = (a+c) \circ (b+d)
\end{aligned}
$$

eşitliğinden, bilinen değiştirme kuralı elde edilir. e bir funktor olduğundan $e(1_*) = 1_{e(*)}$ olup $e = 1_e$' dir. Eğer grup üzerinde değiştirme kuralını sağlayan iki işlem varsa bunlar çakışıktır ve grup da değişimlidir.

Şimdi sonraki ispatlarda kullanacağımız bir önermeyi verelim.

Önerme 1.1.1. *G bir grup-kategori, $a \in G(x,y)$, $b \in G(y,z)$ ve $g \in G\{e\}$ olsun. Bu takdirde,*

1. $b \circ a = a - 1_y + b = b - 1_y + a$,
2. $a^{-1} \circ (1_y + g) \circ a = 1_x + g$ *ve* $a + g - a = 1_x + g - 1_x$

dir [29].

Tanım 1.1.10. *Bir G grup-kategorisinde her morfizmin bir tersi varsa G' ye **grup-grupoid** denir. Yani kategori yerine grupoid alınarak elde edilir [29].*

Böylece G' deki morfizmlerin kompozisyonu grup işlemiyle ifade edilebilir. Eğer $y = e$ ise $b + a = a + b$ olur. Buradan G_e ve G^e grup işlemi altında değişimlidir.

Örnek 1.1.2. *Önerme.1.1.1' in ilk şıkkından, eğer $a : x \to y$ ise $a^{-1} = 1_x - a + 1_y$ elemanı $\circ$ işlemine göre a' nın tersidir. Dolayısıyla her grup-kategori aynı zamanda bir grup-grupoiddir.*

Örnek 1.1.3. *G bir grup olsun. Bu takdirde, nesne kümesi G ve morfizmler kümesi $G \times G$ olan bir grup-grupoid elde ederiz. Yani bir x nesnesinden y nesnesine morfizm (y,x) ikilisidir. Burada kaynak dönüşümü $\alpha(y,x) = x$, hedef dönüşümü $\beta(y,x) = y$, $x \in G$ için nesne dönüşümü $x \mapsto (x,x)$, (x,y)' nin tersi (y,x) ve kompozisyon işlemi $(y,x),(z,y) \in G \times G$ için $(z,y) \circ (y,x) = (z,x)$ ile tanımlıdır. G bir grup olduğundan, G' nin işlemi ile tanımlanan $(x,y)+(z,t) = (x+z, y+t)$ işlemiyle $G \times G$ de bir gruptur. G' nin birim elemanı e olmak üzere bu grubun birim elemanı (e,e) ve (y,x)' in gruptaki tersi $(-y,-x)$' dir. Şimdi $G \times G$' nin grup yapı dönüşümlerinin birer grupoid morfizmi olduğunu gösterelim.*

$m : (G \times G) \times (G \times G) \to G \times G$ için,

$$\begin{aligned} m(((z,y),(z',y')) \circ ((y,x),(y',x'))) &= m((z,y) \circ (y,x), (z',y') \circ (y',x')) \\ &= m((z,x),(z',x')) \\ &= (z + z', x + x') \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} m((z,y),(z',y')) \circ m((y,x),(y',x')) &= ((z,y)+(z',y')) \circ ((y,x)+(y',x')) \\ &= (z+z',y+y') \circ (y+y',x+x') \\ &= (z+z',x+x') \end{aligned}$$

olup m bir grupoid morfizmidir.

Benzer şekilde grubun ters ve birim dönüşümünün de birer grupoid morfizmi olduğu gösterilebilir. Sonuç olarak, $G \times G$ bir grup-grupoiddir.

Böylece aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 1.1.2. *Gruplar ve grup homomorfizmlerinin Grp kategorisinden, grup-grupoidlerin GGd kategorisine $\Gamma : Grp \to GGd$ funktoru vardır [29].*

Örnek 1.1.4. *X bir topolojik uzay olduğunda, $\pi_1 X$' in bir grupoid olduğu 1.1.2. kısımda gösterilmişti. Eğer X, $m : X \times X \to X$ işlemi ve $\bar{u} : X \to X$ tersi ile bir topolojik grup ise*

$$\pi_1(X \times X) \cong \pi_1 X \times \pi_1 X$$

olduğundan $\pi_1 m : \pi_1 X \times \pi_1 X \to \pi_1 X$ nesneler üzerinde $(x,y) \mapsto x+y$, homotopi sınıfları üzerinde $([a],[b]) \mapsto [a+b]$ ve $\pi_1 \bar{u} : \pi_1 X \to \pi_1 X$ de nesneler üzerinde $x \mapsto -x$, homotopi sınıfları üzerinde $[a] \mapsto [-a]$ ile tanımlı π_1' den indirgenmiş funktorlardır. Bununla birlikte $\pi_1 m$ ve $\pi_1 \bar{u}$ grup yapı dönüşümleridir. Eğer e, X üzerindeki grubun birimi ise $[1_e]$ de e' deki sabit yolların homotopi sınıfıdır ve $\pi_1 m([a],[1_e]) = \pi_1 m([1_e],[a]) = [a]$ dır. Böylece $[1_e]$, $\pi_1 X$ üzerindeki grubun birimidir. Sonuç olarak $\pi_1 X$ bir grup-grupoiddir [30].

Bir G grup-grupoidinin temelini oluşturan grupoid geçişli, 1-geçişli veya basit geçişli ise G' ye *geçişli*, *1-geçişli* veya *basit geçişlidır* denir.

1.1.4 Halka-Grupoidler

Grupoidler kategorisinde bir halka nesne olan halka-grupoid kavramı ilk olarak O. Mucuk [21] tarafından tanımlanmıştır. Daha sonra bu kavram O. Mucuk ve İ. İçen [18] tarafından geliştirilmiştir.

Tanım 1.1.11. *Bir R **halka-grupoidi**, bir halka yapısıyla donatılmış ve aşağıdaki halka yapı dönüşümleri birer grupoid morfizmi olan bir grupoiddir:*

i. $m : R \times R \to R$, $(a,b) \mapsto a+b$ *grup işlemi,*

ii. $n : R \times R \to R$, $(a,b) \mapsto ab$ *halka işlemi,*

iii. $u : R \to R$, $a \mapsto -a$ *grup tersi,*

iv. $e : * \to R$.

Bir R halka-grupoidinde $a, b \in R$ için $\alpha(b) = \beta(a)$ olmak üzere grupoid işlemi $b \circ a$, grup işlemi $a+b$ ve halka işlemi ab ile gösterilecektir.

Önerme 1.1.3. *Bir R halka-grupoidinde aşağıdaki değiştirme kuralları vardır [21].*

1. $(c \circ a) + (d \circ b) = (c+d) \circ (a+b)$,
2. $(c \circ a)(d \circ b) = cd \circ ab$.

$\widetilde{R}$ ve R iki halka-grupoid olsun. Halka-grupoidlerin bir $f : \widetilde{R} \to R$ morfizmi, temeli oluşturan grupoidlerin halka yapısını koruyan bir morfizmdir. Yani

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(a) + f(b), \\ f(ab) &= f(a)f(b), \\ f(a \circ b) &= f(a) \circ f(b) \end{aligned}$$

şartları sağlanmalıdır.

Örnek 1.1.5. *R bir halka olsun. Bu durumda Örnek 1.1.3' den, nesne kümesi R ve morfizm kümesi $R \times R$ olan bir grup-grupoid elde ederiz. Ayrıca R' nin halka işlemi olarak $(x,y)(z,t) = (xz, yt)$ işlemi tanımlandığında*

$$\begin{aligned} (x,y)((z,t) + (z^{'},t^{'})) &= (x,y)(z+z^{'}, t+t^{'}) \\ &= (x(z+z^{'}), y(t+t^{'})) \\ &= (xz + xz^{'}, yt + yt^{'}) \\ &= (xz, yt) + (xz^{'}, yt^{'}) \\ &= ((x,y)(z,t)) + ((x,y)(z^{'},t^{'})) \end{aligned}$$

dağılma kuralı sağlanır. Böylece $R \times R$ de bir halkadır. Şimdi $R \times R$' nin halka yapı dönüşümlerinin birer grupoid morfizmi olduğunu gösterelim. Örnek 1.1.3' den $R \times R$ grup-grupoid olduğundan sadece halka işleminin bir grupoid morfizmi olduğunu göstermek yeterlidir. $n : (R \times R) \times (R \times R) \to R \times R$ için,

$$\begin{aligned} n(((z,y),(z',y')) \circ ((y,x),(y',x'))) &= n((z,y) \circ (y,x),(z',y') \circ (y',x')) \\ &= n((z,x),(z',x')) \\ &= (zz',xx') \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} n((z,y),(z',y')) \circ n((y,x),(y',x')) &= ((z,y)(z',y')) \circ ((y,x)(y',x')) \\ &= (zz',yy') \circ (yy',xx') \\ &= (zz',xx') \end{aligned}$$

olup n bir grupoid morfizmidir. Sonuç olarak $R \times R$ bir halka-grupoiddir.

Böylece halkaların *Ring* kategorisinden halka-grupoidlerin *RGd* kategorisine bir funktor tanımlanır. Bunu aşağıdaki önerme ile verelim.

Önerme 1.1.4. *Halkaların Ring kategorisinden halka-grupoidlerin RGd kategorisine bir $\Gamma : Ring \to RGd$ funktoru vardır.*

X topolojik grup alındığında $\pi_1 X$ esas grupoidinin bir grup-grupoid olduğunu göstermiştik. Benzer bir sonuç halka-grupoidler için de ifade edilebilir.

Önerme 1.1.5. *X topolojik halka ise $\pi_1 X$ esas grupoidi bir halka-grupoiddir [21].*

İspat. X,

$$m : X \times X \to X, (a,b) \mapsto a+b$$
$$n : X \times X \to X, (a,b) \mapsto ab$$

yapı dönüşümleri ve $u : X \to X$, $a \mapsto -a$ ters dönüşümü ile bir halka-grupoid olsun. Bu durumda bu dönüşümler aşağıdaki indirgenmiş dönüşümleri tanımlar.

$$\begin{aligned} &\pi_1 m : \pi_1 X \times \pi_1 X \to \pi_1 X,\ ([a],[b]) \mapsto [a+b], \\ &\pi_1 n : \pi_1 X \times \pi_1 X \to \pi_1 X,\ ([a],[b]) \mapsto [ab], \\ &\pi_1 u : \pi_1 X \to \pi_1 X,\ [a] \mapsto [-a]. \end{aligned}$$

[33]' den $\pi_1 X$' in bir grup-grupoid olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\pi_1 X$' in bir halka-grupoid olduğunu ispatlamak için dağılma kuralını göstermeliyiz. $a, b, c \in X$ için $a(b+c) = ab + ac$ olduğundan,

$$\begin{aligned}[a]([b]+[c]) &= [a][b+c] \\ &= [a(b+c)] \\ &= [ab+ac] \\ &= [ab]+[ac]\end{aligned}$$

elde ederiz. Böylece $\pi_1 X$ bir halka-grupoiddir. □

1.2 Topolojik Kavramlar

Bu bölümde ileride sıklıkla kullanacağımız temel topolojik kavramlara yer vereceğiz. Öncelikle topolojik uzaylar ile ilgili bazı temel kavramları verelim.

1.2.1 Topolojik Uzaylar İçin Genel Kavramlar

Bağlantılılık

X bir topolojik uzay olsun. Eğer X uzayı boş olmayan ayrık iki açık altkümenin birleşimi olarak yazılamıyorsa X' e *bağlantılı* uzay, aksi halde *bağlantısız* uzay denir. Bağlantılı uzaylar ile ilgili en önemli özelliklerden birisi sürekli dönüşümler altında bağlantılı kümelerin görüntülerinin de bağlantılı olmasıdır.

X bir topolojik uzay ve $x, y \in X$ olsun. Eğer her $x, y \in X$ için X' de x' den y' ye bir yol varsa X' e *yol bağlantılıdır* denir.

Yol bağlantılı her uzayın bağlantılı olduğu açıktır.

Bir X topolojik uzayının bir bileşenini tanımlamak için X üzerinde aşağıdaki gibi bir denklik bağıntısı oluşturalım:

X deki iki nokta *denktir*, eğer onların ikisi de X' in bir bağlantılı altkümesi içinde bulunuyorlarsa.

Bu bağıntının bir denklik bağıntısı olduğu kolayca gösterilebilir. Bu denklik bağıntısı altında X' deki denklik sınıflarına X' in *bileşenleri* denir. X' in bileşenleri, herhangi bir başka bağlantılı altküme tarafından içerilmeyen X' in maksimal bağlantılı altkümeleridir. Yine biliyoruz ki X' in her bir bileşeni X' de kapalıdır.

Benzer bir denklik bağıntısını yol bağlantılılık için tanımlayabiliriz. Bir X uzayında x ve y noktaları için

$$x \underset{p}{\sim} y \Leftrightarrow X\text{' de } x\text{' den } y\text{' ye bir yol vardır.}$$

$\underset{p}{\sim}$ altında denklik sınıflarına X' in *yol bileşenleri* denir.

Bağlantılılık ve yol bağlantılılık kavramlarının yanı sıra lokal bağlantılılık ve lokal yol bağlantılılık kavramlarını da kullanacağız. Herhangi $x \in X$ ve x' in bir U komşuluğu için eğer x, U' da içerilen bir (yol) bağlantılı komşuluğa sahip ise X' e *lokal (yol) bağlantılıdır* denir [6, 7, 8].

Lemma 1.2.1. *X bir topolojik uzay olsun.*

a) *Eğer X lokal bağlantılı ise, X' in her bir bileşeni açıktır.*

b) *Eğer X lokal yol bağlantılı ise, X' in her bir yol bileşeni açıktır ve X' in yol bileşenleri ile bileşenleri aynıdır.*

c) *Eğer X lokal yol bağlantılı ise, X' in bağlantılı olması için gerek ve yeter şart X' in yol bağlantılı olmasıdır [7].*

X bir topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. $\pi_1(X, x)$ sadece bir elemandan oluşuyorsa X' e *1-bağlantılıdır* denir. Bu durum X' in yol bağlantılı olmasını gerektirir.

Aynı tanımı $x, y \in X$ olmak üzere $\pi X(x, y)$ için de yapabiliriz.

Eğer X' in her bir yol bileşeni 1-bağlantılı ise, X' deki her bir x, y için $\pi X(x, y)$ birden fazla eleman içermez. Bu durumda X' e *basit bağlantılıdır* deriz.

Bir topolojik uzay basit bağlantılı açık kümelerin bir tabanına sahip ise bu uzaya *lokal basit bağlantılıdır* denir. Açıkça bir lokal basit bağlantılı uzay lokal yol bağlantılıdır. Çünkü basit bağlantılı uzaylar yol bağlantılıdır.

Bir X topolojik uzayı $U \subset X$' deki her kapalı eğrinin X içinde sabit eğriye homotopik olması özelliği ile U açık altkümelerinin bir tabanına sahip ise X' e *yarı-lokal basit bağlantılıdır* denir [6, 7, 8].

Sonuç 1.2.1. 1. *Lokal yol bağlantılı bir uzayın herhangi bir açık altkümesi de lokal yol bağlantılıdır.*

2. *Lokal yol bağlantılı bir uzay lokal bağlantılıdır.*

3. *Lokal yol bağlantılı bir uzayda bileşenler ve yol bileşenler çakışıktır.*

4. *Bağlantılı, lokal yol bağlantılı bir uzay yol bağlantılıdır [6, 7, 8].*

Kompaktlık

Şimdi kompaktlık ile ilgili bazı temel bilgileri hatırlatalım. Bir X uzayının bir açık örtüsü, birleşimleri X' i veren X' in açık altkümelerinin bir $\mathcal{U}$ ailesidir, ve $\mathcal{U}$' nun bir altörtüsü yine $\mathcal{U}$' nun X' i örten, bir altailesidir. Bir X topolojik uzayının her açık örtüsü sonlu bir altörtüye sahip ise X 'e *kompakttır* denir.

Kompakt uzaylarla ilgili bir kaç temel özelliği sıralayalım:

- Kompakt uzayların sürekli görüntüleri de kompakttır.
- Bir kompakt uzayın her kapalı altkümesi kompakttır.
- Bir Hausdorff uzayın her kompakt altkümesi kapalıdır.
- Bir kompakt uzayın her bölüm uzayı kompakttır.

Kompakt Hausdorff uzaylar, Öklidyen uzayların bilinen özelliklerinin çoğuna sahiptir. Bir X topolojik uzayında her $q \in X$ için X' de q' nun bir komşuluğunu içeren bir kompakt altküme varsa X' e *lokal kompakttır* denir. Hausdorff'luk özelliği ile birleştirildiğinde lokal kompaktlık çok daha kullanışlıdır. Bir X topolojik uzayında bir A altkümesi için $\overline{A}$ kompakt ise A' ya *önkompakttır (precompact)* ya da *relatif kompakttır* denir [6, 7, 8].

Önerme 1.2.1. *X bir Hausdorff uzay olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir.*

a) *X lokal kompakttır.*

b) *X' in her bir noktası bir önkompakt komşuluğa sahiptir.*

c) *X önkompakt açık kümelerin bir tabanına sahiptir [7].*

Önerme 1.2.2. ***(Daraltma Lemması)*** *X bir lokal kompakt Hausdorff uzay olsun. Eğer $x \in X$ ve U, x' in bir komşuluğu ise, x' in $\overline{V} \subset U$ olacak şekilde bir V önkompakt komşuluğu vardır [7, 8].*

Lemma 1.2.2. *Bir lokal kompakt Hausdorff uzayın herhangi açık ya da kapalı altkümesi lokal kompakt Hausdorff' tur [7, 8].*

Şimdi vereceğimiz lemma ileride kullanılacak olan kullanışlı bir lemmadır.

Lemma 1.2.3. ***(Kapalı Dönüşüm Lemması)*** *F bir kompakt uzaydan bir Hausdorff uzaya sürekli bir dönüşüm olsun.*

a) *F kapalı bir dönüşümdür.*

b) *Eğer F örten ise bir bölüm dönüşümüdür.*

c) *Eğer F bire-bir ise bir topolojik embedding' dir.*

d) *Eğer F bire-bir ve örten ise bir homeomorfizmdir [7].*

Kapalı dönüşüm lemması kullanışlı olmakla birlikte sadece tanım kümesi kompakt olan dönüşümler için geçerlidir. Aşağıdaki önerme kompakt olmayan uzaylar için kapalı dönüşüm lemmasının daha kullanışlı bir genelleştirmesidir. Fakat önermeyi vermeden önce düzgünlük denilen bir kavramı ifade edelim. $f : X \to Y$ sürekli dönüşüm olsun. Eğer Y' nin her kompakt altkümesinin ters görüntüsü kompakt ise f' ye *düzgündür (proper)* denir [7].

Önerme 1.2.3. *$f : X \to Y$ lokal kompakt Hausdorff uzaylar arasında bir sürekli dönüşüm olsun. Eğer f düzgün ise kapalı bir dönüşümdür [7].*

Bölüm Uzayları

X bir topolojik uzay, Y herhangi bir küme ve $\pi : X \to Y$ bir örten dönüşüm olsun. Y üzerinde bir topolojiyi şu şekilde tanımlayalım: Bir $U \subset Y$ altkümesi açıktır gerek ve yeter şart $\pi^{-1}(U)$, X' de açıktır. Bu topolojiye π aracılığıyla indirgenen *bölüm topolojisi* denir.

$\pi : X \to Y$ topolojik uzaylar arasında sürekli, örten bir dönüşüm ve Y, π aracılığıyla indirgenen bölüm topolojisine sahip ise π' ye *bölüm dönüşümü* denir [6].

Bölüm dönüşümlerinin en yaygın inşası aşağıdaki gibidir. $\sim$, X uzayı üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Her bir $q \in X$ için $[q]$ ile q' nun denklik sınıfını ve $X/_\sim$ ile de denklik sınıflarının kümesini gösterelim. $X/_\sim$ denklik sınıflarının kümesi, X' in bir parçalanmasıdır. $\pi : X \to X/_\sim$, X' in her bir elemanını onun denklik sınıfına götüren doğal dönüşüm olsun. Bu takdirde, π ile indirgenen topolojiyle birlikte $X/_\sim$' ya, verilen denklik bağıntısı aracılığıyla X' in *bölüm uzayı* ve π' ye *bölüm dönüşümü* denir [6, 7].

Eğer $\pi : X \to Y$ bir bölüm dönüşümü ise, bir $V \subset Y$ altkümesi için $U = \pi^{-1}(V)$ olacak şekildeki bir $U \subset X$ altkümesine *π' ye göre doygundur (saturated)* denir. Buna denk olarak U doygundur gerek ve yeter şart $U = \pi^{-1}(\pi(U))$ dur. Eğer Y bir denklik bağıntısı aracılığıyla belirlenen bir bölüm uzayı ise, doygun kümeler denklik sınıflarının birleşimleri olan kümelerdir. Daha genel olarak herhangi bir $\pi : X \to Y$ bölüm dönüşümü için, $y \in Y$ olmak üzere bir $\pi^{-1}(y) \subset X$ altkümesine π' nin bir *lifidir (fiber)* denir. Doygun bir küme, liflerin birleşimi olan bir kümedir [7].

Bölüm dönüşümleri her zaman açık kümeleri açık kümelere götürmez. Fakat doygun kümeler türünden bölüm dönüşümlerinin kullanışlı bir karakterizasyonu vardır:

Lemma 1.2.4. *Bir $\pi : X \to Y$ sürekli ve örten dönüşümünün bir bölüm dönüşümü olması için gerek ve yeter şart π' nin doygun açık (ya da kapalı) kümeleri doygun açık (ya da kapalı) kümelere götürmesidir [7].*

Lemma 1.2.5. *$f : X \to Y$ bir bölüm dönüşümü olsun. f' nin herhangi bir doygun açık ya da kapalı kümeye kısıtlaması da bir bölüm dönüşümüdür [7].*

Sürekli, örten bir dönüşümün bir bölüm dönüşümü olup olmadığını kontrol etmek her zaman kolay bir durum değildir. Aşağıdaki lemma sürekli, örten bir dönüşümün bir bölüm dönüşümü olması için çok kullanışlı bir şart verir.

Lemma 1.2.6. *Eğer $f : X \to Y$ sürekli, örten, açık (ya da kapalı) bir dönüşüm ise bir bölüm dönüşümüdür [7].*

Lemma 1.2.7. *$\pi_1 : X \to Y$ ve $\pi_2 : Y \to Z$ iki bölüm dönüşümü olsun. Bu takdirde $\pi_2 \circ \pi_1 : X \to Z$ de bir bölüm dönüşümüdür [6, 7].*

Şimdi bölüm topolojisinin bazı karakteristik özelliklerini lemmalar halinde verelim.

Lemma 1.2.8. *$\pi : X \to Y$ bir bölüm dönüşümü olsun. Herhangi bir Z topolojik uzayı için; $f : Y \to Z$ dönüşümü süreklidir $\Leftrightarrow$ $f \circ \pi$ bileşkesi süreklidir [7].*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f\circ\pi"] & \\ Y \arrow[r, "f"'] & Z \end{tikzcd}$$

Lemma 1.2.9. *$\pi : X \to Y$ bölüm dönüşümü, Z bir topolojik uzay ve $f : X \to Z$ de π' nin lifleri üzerinde sabit olan (yani $\pi(p) = \pi(q) \Rightarrow f(p) = f(q)$) sürekli bir dönüşüm olsun. Bu takdirde aşağıdaki diyagram değişimli olacak şekilde bir tek $\widetilde{f} : Y \to Z$ sürekli dönüşümü vardır. [7]:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[d, "\pi"'] \arrow[dr, "f"] & \\ Y \arrow[r, "\widetilde{f}"'] & Z \end{tikzcd}$$

Lemma 1.2.10. *$\pi_1 : X \to Y_1$ ve $\pi_2 : X \to Y_2$, aynı belirlemeleri yapan (yani $\pi_1(p) = \pi_1(q) \Leftrightarrow \pi_2(p) = \pi_2(q)$) bölüm dönüşümleri olsun. Bu takdirde bir tek $\varphi : Y_1 \to Y_2$ homeomorfizmi vardır öyle ki $\varphi \circ \pi_1 = \pi_2$ [7].*

Şimdi bölüm topolojisi ile yakından ilgili olan bir topoloji türünü verelim.

Tanım 1.2.1. *Y boştan farklı herhangi bir küme, $\{X_j \mid j \in J\}$ topolojik uzayların bir ailesi olsun ve her $j \in J$ için $f_j : X_j \to Y$ dönüşümleri verilsin. Y üzerindeki topolojilerden, f_j dönüşümlerinin her birini sürekli kılan topolojilerden en incesine $\mathcal{F}$ diyelim. Bu $\mathcal{F}$ topolojisine f_j dönüşümlerine göre* ***sonuç (final) topolojisi***

ve Y uzayına da $\{X_j \mid j \in J\}$ topolojik uzaylarının f_j dönüşümlerine göre ***sonuç uzayı*** *denir [6].*

Önerme 1.2.4. *Y üzerinde bir topoloji $\mathcal{F}$, herhangi bir topolojik uzay Z ve $g : Y_{\mathcal{F}} \to Z$ de bir dönüşüm olsun. Her $j \in J$ için, g' nin sürekli olması için gerek ve yeter şart $g \circ f_j : X_j \to Z$ dönüşümlerinin sürekli olmasıdır [6].*

Önerme 1.2.5. *Eğer $\mathcal{F}$, Y üzerinde (f_j) dönüşümlerine göre sonuç topolojisi ise aşağıdaki şartlar sağlanır [6].*

1. *Her bir $f_j : X_j \to Y$ süreklidir.*
2. *Eğer $\mathcal{F}'$, $f_j : X_j \to Y_{\mathcal{F}'}$ dönüşümlerini sürekli yapan Y üzerinde bir başka topoloji ise $\mathcal{F}$, $\mathcal{F}'$' nden daha incedir.*

Önerme 1.2.6. *Y üzerinde (f_j) dönüşümlerine göre $\mathcal{F}$ sonuç topolojisi vardır ve bu topoloji aşağıdaki şartlardan birisi ile karakterize edilebilir [6].*

1. *Eğer $U \subset Y$ ise U' nun $\mathcal{F}$' de açık olması için gerek ve yeter şart her $j \in J$ için $f_j^{-1}(U)$ nun X_j' de açık olmasıdır.*
2. *Eğer $U \subset Y$ ise U' nun $\mathcal{F}$' ye göre kapalı olması için gerek ve yeter şart her $j \in J$ için $f_j^{-1}(U)$ nun X_j' de kapalı olmasıdır.*

Şimdi $f : X \to Y$ dönüşümü tek olduğunda sonuç topolojisini inceleyelim. Y, f' ye göre sonuç topolojisine sahip olmak üzere $Y_1 = Y - f(X)$ olsun. Eğer $y \in Y_1$ ise $f^{-1}(y)$ boştur. Böylece $\{y\}$, Y uzayında hem açık hem de kapalıdır. Ayrıca $f(X)$ de Y uzayında hem açık hem kapalıdır. Sonuç olarak Y, diskret Y_1 uzayı ile $f(X)$' in topolojik toplamıdır [6].

Tanım 1.2.2. *X, Y birer topolojik uzay ve $f : X \to Y$ bir dönüşüm olsun. f örten ve Y de f' ye göre sonuç topolojisine sahip ise f' ye özdeşlik (identification) dönüşümü, Y üzerindeki bu topolojiye özdeşlik topolojisi ve Y uzayına da f' nin özdeşlik uzayı denir [6].*

Önerme 1.2.7. *$f : X \to Y$ sürekli örten bir dönüşüm olsun. f açık veya kapalı dönüşüm ise f özdeşlik dönüşümüdür [6].*

Açıkça bölüm dönüşümü bir özdeşlik dönüşümüdür.

Lemma 1.2.11. *$f : X \to Y$ açık, örten bir dönüşüm, $A \subset X$ ve $g = f\mid_A$ olsun. Eğer A kümesi f-doygun ise g dönüşümü de açık ve örten dönüşümdür [7].*

1.2.2 Topolojik Grup

Tanım 1.2.3. *Bir topolojik grup, temelini oluşturan G kümesi bir topolojiye sahip ve $+ : G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto x + y$ toplam, $\overline{u} : G \to G,\ x \mapsto -x$ ters dönüşümleri sürekli olan bir G grubudur [31].*

Önerme 1.2.8. *G bir topolojik gruptur $\Leftrightarrow$ $G\times G \to G,\ (x, y) \mapsto x-y$ fark dönüşümü süreklidir [31].*

Diğer bir ifadeyle, bir G grubu (aynı zamanda topolojik uzayı) verildiğinde G' nin topolojik grup olduğunu göstermek için $G \times G \to G,\ (x, y) \mapsto x - y$ fark dönüşümünün sürekli olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

Eğer topolojik uzay olarak G diskret uzay ise, G grubuna *diskret topolojik grup* denir. Eğer G bir topolojik grup ve H da G' nin bir altgrubu ise H grubu da G' den indirgenmiş altuzay topolojisi ile bir topolojik gruptur. [31].

Örnekler 1.2.1. *1. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi alışılmış topoloji ve toplama işlemiyle bir topolojik gruptur.*

2. $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} - \{0\}$, alışılmış topoloji ve çarpma işlemi ile bir topolojik gruptur.

3. Herhangi bir G grubu diskret topoloji ile bir topolojik gruptur [31].

Bir G topolojik grubundan bir H topolojik grubuna f grup morfizmi için eğer f, G ve H' nın temelini oluşturan topolojik uzaylar üzerinde sürekli ise f' ye *topolojik grup morfizmi* denir [31].

Bir G topolojik grubunun N altgrubu için, eğer N grup olarak normal altgrup ise N' ye *topolojik normal altgruptur* denir [31].

Yol bağlantılı, basit bağlantılı, lokal basit bağlantılı ve lokal yol bağlantılı topolojik gruplar aşağıdaki gibi tanımlanır.

G bir topolojik grup olmak üzere; eğer G topolojik uzay olarak yol bağlantılı ise G' ye *yol bağlantılıdır*, eğer G' nin temelini oluşturan topolojik uzayın esas grubu sadece birim elemandan oluşuyorsa G' ye *basit bağlantılıdır*, eğer her bir $x \in G$ ve x' in U komşuluğu için uç noktaları x' de olan ve V tarafından içerilen her bir kapalı yol U' da 0' a homotopik olacak şekilde x' in bir $V \subseteq U$ komşuluğu var ise G' ye *lokal basit bağlantılıdır*, eğer x noktası ve x' in bir U komşuluğu için, her bir $y \in V$, U' daki bir yol ile x' e birleştirilebilecek şekilde x' in bir $V \subseteq U$ komşuluğu var ise G' ye *lokal yol bağlantılıdır* denir [31].

Teorem 1.2.1. *G bir topolojik grup ve $a \in G$ olmak üzere aşağıdaki morfizmlerin her biri homeomorfizmdir [31].*

1. *$f : G \to G$, $x \mapsto a + x$ sol öteleme dönüşümü,*

2. *$f : G \to G$, $x \mapsto x + a$ sağ öteleme dönüşümü,*

3. *$f : G \to G$, $x \mapsto -x$ ters dönüşümü.*

Önerme 1.2.9. *G ve H topolojik gruplar ve $f : G \to H$ grupların bir morfizmi olsun. Bu takdirde,*

1. *f açıktır gerek ve yeter şart G' deki e biriminin her W komşuluğu için $f(W)$ da H' da açıktır.*

2. *f süreklidir gerek ve yeter şart f, e biriminde süreklidir [31].*

Tanım 1.2.4. *$\mathcal{N}(x)$, x noktasının komşuluklar ailesi olsun. G topolojik grup olmak üzere komşuluklar türünden süreklilik aşağıdaki gibi tanımlıdır [31].*

1. *$G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x + y$ dönüşümü süreklidir $\Leftrightarrow$ her $x, y \in G$ ve her $W \in \mathcal{N}(x + y)$ için $U + V \subseteq W$ olacak şekilde en az bir $U \in \mathcal{N}(x)$ ve en az bir $V \in \mathcal{N}(y)$ komşulukları vardır.*

2. *$G \to G$, $x \mapsto -x$ dönüşümü süreklidir $\Leftrightarrow$ her $x \in G$ ve her $W \in \mathcal{N}(-x)$ için $-U \subseteq W$ olacak şekilde en az bir $U \in \mathcal{N}(x)$ komşuluğu vardır.*

3. *$G \times G \to G$, $(x, y) \mapsto x - y$ dönüşümü süreklidir $\Leftrightarrow$ her $x, y \in G$ ve her $W \in \mathcal{N}(x - y)$ için $U - V \subseteq W$ olacak şekilde en az bir $U \in \mathcal{N}(x)$ ve en az bir $V \in \mathcal{N}(y)$ komşulukları vardır.*

Teorem 1.2.2. *G bir topolojik grup olsun. Bu takdirde,*

1. *$a \in G$, $F \subseteq G$ kapalı bir küme, $U \subseteq G$ açık bir küme, $C \subseteq G$ herhangi bir küme olmak üzere $a+F, F+a, -F$ kapalı kümeler ve $U+C, C+U, -U$ açık kümelerdir.*

2. *A ve B kompakt altkümeler ise $A+B$ kompakttır. A kapalı ve B kompakt ise $A+B$ ve $B+A$ kapalı kümelerdir. A ve B kümelerinin her ikisi de kapalı iken $A+B$ ve $B+A$ kümeleri kapalı olmak zorunda değildir [31].*

Teorem 1.2.3. *G bir topolojik grup, $\mathcal{U}_e$ de e birim elemanının komşuluklar tabanı olsun.*

i) *Her $U \in \mathcal{U}_e$ için, $V+V = V^2 \subset U$ olacak şekilde en az bir $V \in \mathcal{U}_e$ vardır,*

ii) *her $U \in \mathcal{U}_e$ için, $-V \subset U$ olacak şekilde en az bir $V \in \mathcal{U}_e$ vardır,*

iii) *her $U \in \mathcal{U}_e$ ve $x \in U$ için, $V+x \subset U$ olacak şekilde en az bir $V \in \mathcal{U}_e$ vardır,*

iv) *her $U \in \mathcal{U}_e$ ve $x \in G$ için, $x+V-x \subset U$ olacak şekilde en az bir $V \in \mathcal{U}_e$ vardır,*

v) *her $U, V \in \mathcal{U}_e$ için, $W \subset U \cap V$ olacak şekilde en az bir $W \in \mathcal{U}_e$ vardır,*

şartları sağlanıyorsa $\{U+x \mid x \in G,\ U \in \mathcal{U}_e\}$ ve $\{x+U \mid x \in G,\ U \in \mathcal{U}_e\}$ ailelerinin her biri G' nin topolojisi için birer taban oluşturur [31].

Teorem 1.2.4. *G bir cebirsel grup ve $\mathcal{U}_e$ de G' nin altkümelerinin Teorem 1.2.3' de verilen şartları sağlayan sonlu arakesit özelliğine sahip bir ailesi olsun. Bu takdirde G üzerinde, G' yi topolojik grup yapan bir tek topoloji tanımlanabilir. Burada $\mathcal{U}_e$ ailesi, bu topolojik gruptaki birim elemanın açık komşuluklar tabanıdır [31].*

Tanım 1.2.5. *G bir topolojik grup, X bir topolojik uzay olsun. G' nin X üzerine bir **sol etkisi**, aşağıdaki şartları sağlayan bir $G \times X \to X$, $(g,x) \mapsto g \cdot x$ sürekli dönüşümüdür.*

i) $\forall x \in X$, $\forall g_1, g_2 \in G$ *için* $g_1 \cdot (g_2 \cdot x) = (g_1 g_2) \cdot x$

ii) $\forall x \in X$ *için* $e \cdot x = x$ *[7].*

Benzer olarak bir sağ etki $(x \cdot g_1) \cdot g_2 = x \cdot (g_1 g_2)$ ve $x \cdot e = x$ olacak şekilde sürekli bir $X \times G \to X$, $(x, g) \mapsto x \cdot g$ dönüşümüdür. Her sağ etki, $g \cdot x = x \cdot g^{-1}$ olduğunu dikkate alırsak bir sol etki belirler.

Etki tanımından her bir $g \in G$ için $x \mapsto g \cdot x$ dönüşümünün X' den X' e sürekli bir dönüşüm olacağı açıktır. Çünkü bu dönüşüm, etkinin $\{g\} \times X \subset G \times X$ altuzayına kısıtlamasıdır. Bu şekildeki her dönüşüm bir homeomorfizmdir, çünkü grup etkisinin tanımı onun bir sürekli $x \mapsto g^{-1} \cdot x$ tersine sahip olmasını garanti eder.

Herhangi $x \in X$ için $G \cdot x = \{g \cdot x \mid g \in G\}$ kümesine x' in *yörüngesi* denir. Eğer her $x, y \in X$ nokta çifti için $g \cdot x = y$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa, ya da denk olarak tek yörünge X uzayının kendisi ise etkiye *geçişlidir*(transitive) denir. Eğer G' nin noktaları sabit bırakan tek elemanı birim eleman ise, yani sadece $g = e$ için $g \cdot x = x$ oluyorsa etkiye *serbest* (free)' tir denir [6, 7].

Örnek 1.2.1. *Herhangi bir G topolojik grubu, $g \cdot g' = L_g(g') = gg'$ sol dönüşüm aracılığıyla kendisi üzerine soldan serbest olarak ve geçişli olarak etki eder. Benzer şekilde sağ dönüşüm aracılığıyla kendisi üzerine sağdan etki eder [6, 7, 31].*

G' nin bir X uzayı üzerine bir etkisi verilsin. X üzerinde bir denklik bağıntısını şu şekilde tanımlayalım: $x_1 \sim x_2 \Leftrightarrow$ en az bir $g \in G$ var öyle ki $g \cdot x_1 = x_2$. Denklik sınıfları tam olarak grup etkisinin yörüngeleridir. Karşılık gelen bölüm uzayı X/G ile gösterilir ve ona etkinin *yörünge uzayı* denir. Eğer etki geçişli ise yörünge uzayı bir tekil noktadır [6, 7].

Önemli bir özel durum, bir G topolojik grubunun (altuzay topolojisi ile) bir Γ altgrubunu düşündüğümüzde ortaya çıkar. Sol veya sağdan grup çarpımı, Γ' nın G üzerinde bir sol veya sağ etkisini tanımlar. Bu etki tam olarak G' nin kendisi üzerine etkisinin $\Gamma \times G$ ya da $G \times \Gamma$' ya kısıtlamasıdır. Bu etki süreklidir ve serbesttir, fakat genellikle geçişli değildir. Γ' nın G üzerine sağ etkisinin bir yörüngesi $\{g\gamma \mid \gamma \in \Gamma\}$ şeklindeki bir kümedir ve ona $g\Gamma$ *sol yan kümesi* (coset) denir. Böylece Γ' nın G üzerine sağ etkisinin yörünge uzayı, bölüm topolojisi ile sol yan kümelerin G/Γ kümesidir. Bu bölüm uzayına Γ aracılığıyla G' nin *(sol) yan küme uzayı* denir [6, 7, 31].

Eğer Γ, G topolojik grubunun bir normal altgrubu ise G/Γ yan küme uzayı da bir topolojik gruptur [31].

X bir topolojik uzay olmak üzere eğer her $x, y \in X$ için x' i y' ye götüren bir $\varphi : X \to X$ homeomorfizmi varsa X' e *homojendir* denir. Ayrıca belirtelim ki her yan küme uzayı homojendir [7].

G, X topolojik uzayı üzerine sürekli olarak etki eden bir topolojik grup olsun. Bu takdirde $\pi : X \to X/G$ bölüm dönüşümü açıktır. Ayrıca X/G Hausdorff' tur $\Leftrightarrow$ $\{(x_1, x_2) \in X \times X \mid x_2 = g \cdot x_1,\ g \in G\}$ yörünge bağıntısı $X \times X$' de kapalıdır [6, 7, 31].

Şimdi ayrı bir bölüm oluşturmaksızın topolojik halka kavramını verelim.

Tanım 1.2.6. *Bir R topolojik halkası, temelini oluşturan küme topolojiye sahip ve $m : R \times R \to R$, $(x, y) \mapsto x + y$ grup işlemi, $n : R \times R \to R$, $(x, y) \mapsto xy$ halka işlemi, $\overline{u} : R \to R$, $x \mapsto -x$ ters dönüşümü sürekli olan bir R halkasıdır [9].*

H' dan R' ye topolojik halkaların bir morfizmi, H ve R' nin temelini oluşturan halkaların sürekli bir $p : H \to R$ halka morfizmidir.

1.2.3 Topolojik Grupoidler

Tanım 1.2.7. *Bir G topolojik grupoidi, nesne ve morfizm kümeleri topolojiye sahip ve grupoid yapı dönüşümleri sürekli olan bir G grupoididir [5, 19].*

Örnek 1.2.2. *G, birim elemanı e olan bir topolojik grup olsun. Bu durumda G; nesne kümesi $\{e\}$, morfizmler kümesi topolojik grubun elemanları, kompozisyonu grubun işlemi, $a \in G$ olmak üzere kaynak ve hedef dönüşümleri $\alpha(a) = \beta(a) = e$, nesne dönüşümü $1_{()} : G_0 = \{e\} \to G$, $e \mapsto 1_e$ ve ters dönüşümü yine topolojik grubun ters dönüşümü olan bir topolojik grupoiddir. Burada nesne kümesi altuzay topolojisi ile verilir. Ayrıca kaynak, hedef ve nesne dönüşümleri sabit dönüşüm olduklarından ve kompozisyon ile ters dönüşüm de topolojik grubun yapı dönüşümleri olduklarından süreklidirler [3, 5, 9].*

Örnek 1.2.3. *X bir topolojik uzay olsun. Bu takdirde $X \times X$, X üzerinde aşağıdaki gibi bir topolojik grupoiddir. x' den y' ye bir morfizm (y, x) çiftidir. Kaynak* *dönüşümü* $\alpha(y,x) = x$, *hedef dönüşümü* $\beta(y,x) = y$, $x \in X$ *için nesne dönüşümü* $x \mapsto (x,x)$, *ters dönüşüm* $i(x,y) = (y,x)$ *ve kompozisyon ise* $(z,y) \circ (y,x) = (z,x)$ *ile tanımlıdır.* α *ve* β*' nın sürekliliği izdüşüm dönüşümünün sürekliliğinden açıktır. Nesne dönüşümü, birim dönüşümün* 1×1 *çarpımı olup süreklidir. Ters dönüşüm ise* pr_1 *ve* pr_2 *sırasıyla birinci ve ikinci izdüşüm dönüşümleri olmak üzere* (pr_2, pr_1) *ile tanımlı olup süreklidir. Son olarak kompozisyon,* $(pr_1 \times pr_2)((z,y),(y,x)) = (z,x)$ *ile tanımlı olup süreklidir [3, 5, 9].*

G bir topolojik grupoid olsun. Eğer G' nin temelini oluşturan grupoid geçişli, 1-geçişli , basit geçişli ise G' ye *geçişli*, *1-geçişli*, *basit geçişlidir* denir [9].

$f : H \to G$ topolojik grupoidler arasında bir morfizm olsun. Eğer f, H ve G' nin temelini oluşturan grupoidlerin bir morfizmi ise ve $f : H \to G$ ile $f_0 : H_0 \to G_0$ sürekli ise f' ye *topolojik grupoid morfizmi* denir [3, 5, 9].

$G_\alpha \times_\beta G \to G$, $(b,a) \mapsto b \circ a$ kompozisyonunun ve $G \to G$, $a \mapsto a^{-1}$ ters dönüşümünün sürekli olması için gerek ve yeter şart

$$G \underset{\alpha}{\times} G = \{(b,a) \in G \times G \mid \alpha(b) = \alpha(a)\}$$

geri çekmesi $G \times G$' den gelen altuzay topolojisine sahip olmak üzere $G \underset{\alpha}{\times} G \to G$, $(b,a) \mapsto b \circ a^{-1}$ grupoid fark dönüşümünün sürekli olmasıdır. Yine α, β dönüşümlerinden birisi ve ters dönüşüm sürekli ise diğeri de süreklidir. Ayrıca bir G topolojik grupoidinde $a \in G(x,y)$ için $R_a : St_G y \to St_G x$, $b \mapsto b \circ a$ sağ dönüşümü ve $L_a : CoSt_G x \to CoSt_G y$, $b \mapsto a \circ b$ sol dönüşümü birer homeomorfizmdir [3, 5, 9].

Tanım 1.2.8. *G bir topolojik grupoid, X bir topolojik uzay ve $w : X \to G_0$ sürekli bir dönüşüm olsun.* $X_w \times_\beta G = \{(x,a) \in X \times G \mid \beta(a) = w(x)\}$ *olmak üzere eğer*

$$w(x^a) = \alpha(a) \quad , \quad (x^a)^b = x^{b \circ a} \quad ve \quad x^{1_{w(x)}} = x$$

şartlarını sağlayan bir $\phi : X_w \times_\beta G \to X$, $(x,a) \mapsto x^a$ *sürekli dönüşümü varsa G topolojik grupoidi X uzayı üzerine w aracılığıyla sağdan sürekli olarak etki eder (veya kısaca X bir sağ G-uzaydır) denir ve* (w, X) *ile gösterilir [5, 9].*

Gruplarda olduğu gibi ${}^a x = x^{a^{-1}}$ kuralıyla bir sol G-uzay, bir sağ G-uzaya dönüştürülebilir.

Tanım 1.2.9. *G, H birer topolojik grupoid ve X bir topolojik uzay olsun. G, X üzerine w aracılığıyla soldan ve H da X üzerine $w^{'}$ aracılığıyla sağdan etki ediyor ve $x \in X$, $a \in G$, $b \in H$ için ${}^{a}x$, x^{b} tanımlı olmak üzere*

$$w^{'}({}^{a}x) = w^{'}(x) \quad , \quad w(x^{b}) = w(x) \ \ ve \ \ {}^{a}(x^{b}) = ({}^{a}x)^{b}$$

şartları sağlanıyorsa X' e bir G-H-uzayı (bispace) denir ve $(w^{'}, X, w)$ ile gösterilir. Böylece G ve H, X üzerine w-$w^{'}$ aracılığıyla etki eder denir [19].

Örnek 1.2.4. *G bir topolojik grupoid olsun. Bu takdirde G kendisi üzerine β-α aracılığıyla etki eder. Etki, G' deki kompozisyon ile verilir. Gerçekten G' nin $X = G$ üzerine $w = \beta : G \to G_0$ aracılığıyla topolojik sol etkisi, $\phi : G_{\alpha} \times_{w=\beta} G \to G$, $(a, b) \mapsto {}^{a}b = a \circ b$ ile tanımlıdır. w, hedef dönüşümü ve etki de topolojik grupoidin kompozisyonu ile verildiğinden süreklidir. G' nin $X = G$ üzerine $w^{'} = \alpha : G \to G_0$ aracılığıyla topolojik sağ etkisi $\phi^{'} : G\ {}_{\beta}\times_{w^{'}=\alpha} G \to G$, $(a, b) \mapsto b^{a} = b \circ a$ ile tanımlıdır. $w^{'}$, kaynak dönüşümü ve etki de topolojik grupoidin kompozisyonu ile verildiğinden süreklidir. $\alpha({}^{a}b) = \alpha(a \circ b) = \alpha(b)$, $\beta(b^{a}) = \beta(b \circ a) = \beta(b)$ ve ${}^{a}(b^{c}) = {}^{a}(b \circ c) = a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = (a \circ b)^{c} = ({}^{a}b)^{c}$ olup şartlar sağlanır. Böylece G topolojik grupoidi bir G-G-uzaydır [19].*

Önerme 1.2.10. *G bir topolojik grupoid olsun. Eğer G_0 nesne uzayı Hausdorff uzay ise $G \underset{\alpha}{\times} G$, $G \underset{\beta}{\times} G$ ve $G_{\alpha} \times_{\beta} G$ kümeleri kapalıdır [33].*

Önerme 1.2.11. *G bir topolojik grupoid olsun. Eğer G_0 nesne uzayı T_1-uzayı ise, her $x \in G_0$ için $St_{G}x$, $CoSt_{G}x$ ve $G\{x\}$ kümeleri G' de kapalıdır [33].*

Önerme 1.2.12. *G_0 nesne uzayı Hausdorff uzay ise, $x \in G_0$ için aşağıdaki şartlar sağlanır [33].*

i) *$St_{G}x$ Hausdorff' tur $\Leftrightarrow$ $G\{x\}$ Hausdorff' tur.*

ii) *$CoSt_{G}x$ Hausdorff' tur $\Leftrightarrow$ $G\{x\}$ Hausdorff' tur.*

Bu önermeden sonra aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 1.2.2. *G_0 nesne uzayı Hausdorff ise $x \in G_0$ için aşağıdakiler denktir [33].*

i) *$G\{x\}$ Hausdorff' tur,*

ii) *$St_G x$ Hausdorff' tur,*

iii) *$CoSt_G x$ Hausdorff' tur.*

Teorem 1.2.5. *H bir topolojik grup ve G de G_0 nesne uzayı Hausdorff olan bir topolojik grupoid olsun. Eğer X bir G-H-uzay ise G' nin X üzerine etkisi X/H yörünge uzayı üzerinde bir sol G-uzay yapısı belirler [19].*

G bir topolojik grupoid olsun. Örnek.1.2.4'de G' nin β-α aracılığıyla bir G-G-uzay olduğu gösterilmişti. Şimdi $x \in G_0$ ve $N\{x\}$ de $G\{x\}$' in bir altgrubu olsun. Bu takdirde $St_G x$, bir G-$N\{x\}$-uzaydır. Böylece $N\{x\}$' in sol yan kümelerinin $St_G x/N\{x\} = St_G N\{x\}$ uzayı tanımlanır.

Sonuç 1.2.3. *Eğer G_0 nesne uzayı Hausdorff uzay ve $N\{x\}$ de $G\{x\}$' in altgrubu ise sol çarpma, $St_G N\{x\}$ uzayına bir sol G-uzay yapısı verir [19].*

1.2.4 Topolojik Örtü Uzayları

Tanım 1.2.10. *$p : \widetilde{X} \to X$ topolojik uzayların sürekli bir dönüşümü ve $U \subseteq X$ olsun. U altkümesi açık, yol bağlantılı, $p^{-1}(U)$' nun her bir yol bileşeni $\widetilde{X}$' da açık ve p ile U üzerine homeomorfik olarak dönüştürülüyorsa U' ya (p' ye göre) kanoniktir denir [6].*

Bu tanıma göre bir U kanonik kümesinin herhangi bir yol bağlantılı açık altkümesinin de kanonik bir küme olduğu açıktır.

Tanım 1.2.11. *$p : \widetilde{X} \to X$ topolojik uzayların bir sürekli dönüşümü olsun. Her bir $x \in X$ noktası kanonik komşuluğa sahip ise p dönüşümüne örtü dönüşümü, $\widetilde{X}$' ya X' in örtü uzayı ve X uzayına da örtünün tabanı denir [6].*

$p : \widetilde{X} \to X$ topolojik uzayların bir örtü dönüşümü olsun. Eğer $\widetilde{X}$ ve X uzaylarının ikisi de yol bağlantılı ise p örtü dönüşümüne bağlantılıdır denir. Eğer X yol bağlantılı ve $x \in X$ için $\pi_1(X, x) = \{e\}$ ise X uzayına basit bağlantılıdır denir. Burada e, esas grubun birim elemanıdır [6].

Lemma 1.2.12. *Her topolojik örtü dönüşümü bir lokal homeomorfizmdir, bir açık dönüşümdür, ve bir bölüm dönüşümüdür. Ayrıca bir bire-bir topolojik örtü dönüşümü bir homeomorfizmdir [8].*

Ayrıca topolojik örtü dönüşümlerinin herhangi sonlu çarpımı yine bir topolojik örtü dönüşümüdür.

Önerme 1.2.13. *Eğer $r : Z \longrightarrow Y$ ve $q : Y \longrightarrow X$ dönüşümleri, qr ve q topolojik örtü dönüşümleri olacak şekilde topolojik uzaylar arasında dönüşümler ise r de bir topolojik örtü dönüşümüdür [8].*

Şimdi, topolojik örtü dönüşümleri ile ilgili bazı sonuçlar verelim:

Sonuç 1.2.4. 1. *Herhangi bir homeomorfizm bir topolojik örtü dönüşümüdür.*

2. *Bir lokal homeomorfizm bir açık dönüşümdür.*

3. *Bir topolojik örtü dönüşümü bir lokal homeomorfizmdir.*

4. *Bir lokal homeomorfizm, bir topolojik örtü dönüşümü olmak zorunda değildir.*

5. *Eğer X lokal bağlantılı bir uzay ise bir $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ sürekli dönüşümü bir topolojik örtü dönüşümüdür $\Longleftrightarrow$ X' in her bir C bileşeni için*

$$p|_{p^{-1}(C)} : p^{-1}(C) \longrightarrow C$$

dönüşümü bir topolojik örtü dönüşümüdür.

6. *X lokal bağlantılı, p_1 ve p_2 topolojik örtü dönüşümleri olsun ve*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X_1} \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X_2} \arrow[dl, "p_2"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

değişimli üçgenini gözönüne alalım. Eğer p örten ise p bir topolojik örtü dönüşümüdür [6, 8].

Lemma 1.2.13. *$p : \widetilde{X} \to X$ bir topolojik örtü dönüşümü olsun. Herhangi bir $U \subset X$ kanonik küme, $q \in U$ ve q üzerindeki lif (fiber) içinde bir $\widetilde{q_0}$ verildiğinde $\sigma(q) = \widetilde{q_0}$ olacak şekilde bir $\sigma : U \to \widetilde{X}$ lokal kesiti vardır [8].*

İspat. $\widetilde{q_0}$' yı içeren $p^{-1}(U)$' nun bir yol bileşeni $\widetilde{U_0}$ olsun. p' nin $\widetilde{U_0}$' ya kısıtlaması bir homeomorfizm olduğundan, lokal kesit olarak $\sigma = (p \mid_{\widetilde{U_0}})^{-1}$ yı alabiliriz. □

Örtü dönüşümlerinin en önemli özellikleri yükseltmelerle ilgilidir.

Tanım 1.2.12. *$p : \widetilde{X} \to X$ topolojik örtü dönüşümü olsun. Eğer aşağıdaki diyagram değişimli ise f' ye h' nın* ***yükseltmesi*** *veya f, h' yı örtüyor denir [6, 8].*

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{X} \arrow[d, "p"] \\ Y \arrow[ur, "f"] \arrow[r, "h"'] & X \end{tikzcd}$$

Önerme 1.2.14. *(**Tek Yükseltme Özelliği**) $p : \widetilde{X} \to X$ bir topolojik örtü dönüşümü olsun. Bir Z topolojik uzayının yol bağlantılı olduğunu, $\varphi : Z \to X$ dönüşümünün sürekli olduğunu ve $\widetilde{\varphi_1}, \widetilde{\varphi_2} : Z \to \widetilde{X}$' nın Z' nin bir noktasında aynı olacak şekilde φ' nin iki yükseltmesi olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\widetilde{\varphi_1}$ ile $\widetilde{\varphi_2}$ izomorfiktir [8].*

Tek yükseltme özelliğini şu şekilde de verebiliriz:

Teorem 1.2.6. *$p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ bir örtü dönüşümü, Y bağlantılı bir uzay ve $F : Y \to X$ sürekli dönüşüm olsun. $y_0 \in Y$ ve $x_0 = F(y_0)$ olmak üzere $p^{-1}(x_0)$' da bir $\widetilde{x}_0$ noktası seçelim. Bu takdirde, F' nin $\widetilde{F}(y_0) = \widetilde{x}_0$ olacak şekilde en fazla bir tane $\widetilde{F} : Y \to \widetilde{X}$ yükseltmesi vardır [6].*

Önerme 1.2.15. *(**Yol Yükseltme Özelliği**) $p : \widetilde{X} \to X$ bir topolojik örtü dönüşümü, $f : I \to X$ herhangi bir yol ve $\widetilde{q_0} \in \widetilde{X}$ noktası $f(0)$ üzerinde p' nin lifi içerisinde bir nokta olsun. Bu takdirde f' nin $\widetilde{f}(0) = \widetilde{q_0}$ olacak şekilde bir tek $\widetilde{f} : I \to \widetilde{X}$ yükseltmesi vardır [8].*

Önerme 1.2.16. ***(Homotopi Yükseltme Özelliği)*** *$p : \widetilde{X} \to X$ bir topolojik örtü dönüşümü, $f_0, f_1 : I \to X$ homotopik yollar ve $\widetilde{f}_0, \widetilde{f}_1 : I \to \widetilde{X}$ sırasıyla f_0 ve f_1' in $\widetilde{f}_0(0) = \widetilde{f}_1(0)$ olacak şekildeki yükseltmeleri olsun. Bu takdirde $\widetilde{f}_0 \sim \widetilde{f}_1$ dir [8].*

Örtü dönüşümleri ile esas gruplar arasında yakın bir ilişki vardır. Bu ilişkiyi aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 1.2.7. *$p : \widetilde{X} \to X$ bir topolojik örtü dönüşümü olsun. Herhangi bir $\widetilde{q} \in \widetilde{X}$ noktası için, $p_* : \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}) \to \pi_1(X, p(\widetilde{q}))$ indirgenmiş homomorfizmi bire-birdir [8].*

İspat. $[f] \in \pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q})$, p_*' ın çekirdeği içinde yolların bir homotopi sınıfı olsun. Bu demektir ki $q = p(\widetilde{q})$ olmak üzere $p_*([f]) = [c_q]$ dur, ya da diğer bir ifadeyle X uzayında $p \circ f \sim c_q$ dur. Homotopi yükseltme özelliğinden dolayı, aynı noktada başlayan $p \circ f$ ve c_q' nun yükseltmeleri $\widetilde{X}$' da homotopik yollar olmalıdır. Dolayısıyla f, $p \circ f$' nin $\widetilde{q}$ ' da başlayan bir yükseltmesidir, ve $c_{\widetilde{q}}$ sabit kapalı eğrisi de c_q' nun aynı noktada başlayan bir yükseltmesidir. Böylece $\widetilde{X}$ uzayında $f \sim c_{\widetilde{q}}$ dır, ve bu $[f] = 1$ demektir. □

Bu teorem bir örtü uzayının esas grubunun, taban uzayının esas grubunun bir altgrubu ile belirlenebileceğini gösterir. Şimdi yükseltme kriterini esas gruplar cinsinden ifade edelim.

Teorem 1.2.8. ***(Yükseltme Kriteri)*** *$p : \widetilde{X} \to X$ bir topolojik örtü dönüşümü, Y bağlantılı ve lokal yol bağlantılı bir uzay ve $\varphi : Y \to X$ sürekli bir dönüşüm olsun. Herhangi $y_0 \in Y$ ve $\widetilde{q}_0 \in \widetilde{X}$ noktaları verilsin öyle ki $p(\widetilde{q}_0) = \varphi(y_0)$. Bu takdirde φ, $\widetilde{\varphi}(y_0) = \widetilde{q}_0$ olacak şekilde bir tek $\widetilde{\varphi} : Y \to \widetilde{X}$ yükseltmesine sahiptir gerek ve yeter şart $\pi_1(X, \varphi(y_0))$' ın $\varphi_*(\pi_1(Y, y_0))$ altgrubunun $p_*(\pi_1(\widetilde{X}, \widetilde{q}_0))$ grubu içerisinde ihtiva edilmesidir [8].*

Teorem 1.2.9. ***(Bir Lif Üzerine Esas Grubun Etkisi)*** *$p : \widetilde{X} \to X$ bir topolojik örtü dönüşümü ve $q \in X$ olsun. $p^{-1}(q)$ lifi üzerinde $\pi_1(X, q)$ esas grubunun $\widetilde{q} \cdot [f] = \widetilde{f}(1)$ ile verilen geçişli bir sağ etkisi vardır. Burada $\widetilde{f}$, f' nin $\widetilde{q} \in p^{-1}(q)$ noktasında başlayan yükseltmesidir [8].*

Şimdi örtü uzaylarının sınıflandırılması ile ilgili problemi ele alalım. Yani aynı taban uzayının örtü uzayları arasındaki ilişkileri inceleyelim. Bunun için bazı kavramları vermeliyiz.

Tanım 1.2.13. *X bir topolojik uzay, $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ ve $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$ de X' in iki örtü uzayı olsun. p_1' den p_2' ye bir örtü homomorfizmi aşağıdaki diyagram değişimli olacak şekilde sürekli bir $\varphi : \widetilde{X}_1 \to \widetilde{X}_2$ dönüşümüdür [8]:*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X}_1 \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "p_1"'] & & \widetilde{X}_2 \arrow[dl, "p_2"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Aynı zamanda bir homeomorfizm olan bir örtü homomorfizmine örtülerin bir *izomorfizmi* denir. Bu durumda, açıkça ters dönüşüm de bir örtü homomorfizmidir. İki örtü arasında bir izomorfizm varsa onların izomorfik olduğunu söyleriz. Bu, X' in örtülerinin kümesi üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Örtü homomorfizmlerinin karakteristik bir özelliği, onların kendilerinin de örtü dönüşümleri olmasıdır. Bunu aşağıdaki lemma ile verelim.

Lemma 1.2.14. *$p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ ve $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$, X' in iki örtü uzayı ve p_1' den p_2' ye bir örtü homomorfizmi φ olsun. Bu takdirde φ bir örtü dönüşümüdür [8].*

İki örtü uzayının izomorfik olduğunu belirlemenin yolu onlar arasında örtü homomorfizmlerinin mevcut olup olmadığına karar vermektir. Aşağıdaki teorem ile bu soruya cevap verebiliriz.

Teorem 1.2.10. ***(Örtü Homomorfizmi Kriteri)*** *$p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ ve $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$, X' in iki örtüsü ve $\widetilde{q}_1 \in \widetilde{X}_1$, $\widetilde{q}_2 \in \widetilde{X}_2$ da, $p_1(\widetilde{q}_1) = p_2(\widetilde{q}_2) = q \in X$ olacak şekilde taban noktaları olsun. Bu takdirde p_1' den p_2' ye $\widetilde{q}_1$' yı $\widetilde{q}_2$' ya götüren bir örtü homomorfizmi vardır $\Leftrightarrow$ $p_{1*}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{q}_1)) \subset p_{2*}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{q}_2))$ dır [8].*

İspat. p_1' den p_2' ye bir örtü homomorfizmine p_1' in bir yükseltmesi olarak bakılabilir:

$$\begin{tikzcd}
& \widetilde{X}_2 \arrow[d, "p_2"] \\
\widetilde{X}_1 \arrow[ur, "\varphi"] \arrow[r, "p_1"'] & X
\end{tikzcd}$$

Böylece hem gereklilik kısmı hem de yeterlilik kısmı yükseltme kriterinden gelir. $\square$

Aşağıdaki teorem örtü uzayları için teklik problemini çözer.

Teorem 1.2.11. *İki tane $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ ve $p_2 : \widetilde{X}_2 \to X$ örtüsü izomorfiktir $\Leftrightarrow$ bir $q \in X$ noktası ve $\widetilde{q}_1 \in p_1^{-1}(q)$ ve $\widetilde{q}_2 \in p_2^{-1}(q)$ taban noktaları için $p_{1*}(\pi_1(\widetilde{X}_1, \widetilde{q}_1))$ ve $p_{2*}(\pi_1(\widetilde{X}_2, \widetilde{q}_2))$ altgrupları $\pi_1(X, q)$ içinde konjugedirler [8].*

Şimdiye kadar verdiğimiz bilgileri basit bağlantılı örtü uzaylarına uyguladığımızda çok kullanışlı olan sonuçlar ve evrensel örtü uzayı tanımı karşımıza çıkar. Önce basit bağlantılı örtü uzayları ile ilgili bazı özellikleri bir önerme ile verelim.

Önerme 1.2.17. ***a)*** *$\widetilde{X}$ basit bağlantılı bir uzay olmak üzere $p : \widetilde{X} \to X$ bir örtü dönüşümü olsun. Eğer $p_1 : \widetilde{X}_1 \to X$ herhangi bir örtü ise, o zaman aşağıdaki diyagram değişimli olacak şekilde bir $\widetilde{p} : \widetilde{X} \to \widetilde{X}_1$ örtü dönüşümü vardır.*

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{X} \arrow[dd, "p"'] \arrow[dr, "\widetilde{p}"] & \\
& \widetilde{X}_1 \arrow[dl, "p_1"] \\
X &
\end{tikzcd}$$

b) *Aynı uzayın herhangi iki basit bağlantılı örtü uzayı izomorfiktir [8].*

İspat. Aşikar altgrup diğer tüm altgruplar içinde ihtiva edildiğinden a) kısmı örtü homomorfizmi kriterinden ve her örtü homomorfizminin bir örtü dönüşümü olması gerçeğinden gelir. b) kısmı da örtü izomorfizm teoreminin bir sonucudur. $\square$

Teorem 1.2.12. ***a)*** *$p : (X, x_0) \to (Y, y_0)$ bir örtü ve Z bir yol bağlantılı, lokal yol bağlantılı topolojik uzay olsun. $f : (Z, z_0) \to (Y, y_0)$ sürekli bir dönüşüm olsun* *öyle ki* $f_*(\pi_1(Z, z_0)) \subset p_*(\pi_1(X, x_0))$ *. Bu taktirde* $p \circ \widetilde{f} = f$ *olacak şekilde bir tek* $\widetilde{f} : (Z, z_0) \to (X, x_0)$ *sürekli dönüşümü vardır.*

$$\begin{tikzcd} & (X, x_0) \arrow[d, "p"] \\ (Z, z_0) \arrow[r, "f"'] \arrow[ur, dotted, "\widetilde{f}"] & (Y, y_0) \end{tikzcd}$$

b) *Eğer* X *bir yol bağlantılı, lokal yol bağlantılı ve yarı-lokal 1-bağlantılı topolojik uzay ise,* X *bir basit bağlantılı örtü uzayıdır.*
c) *Eğer* $p : X \to Y$ *bir örtü ve* Y *basit bağlantılı ise,* p *bir homeomorfizmdir [14].*

Literatürde evrensel örtü uzayları için denk olan tanımlar vardır. Şimdi bu denk tanımları verelim.

Tanım 1.2.14. *X' in 1-bağlantılı örtü uzayına X' in bir* ***evrensel örtü uzayı*** *denir [6, 34].*

Tanım 1.2.15. *Bir* X *bağlantılı uzayının basit bağlantılı bir* $\widetilde{X}$ *örtü uzayına* X*' in* ***evrensel örtü uzayı*** *denir [8, 35].*

Şimdi evrensel örtü uzaylarının varlığı ve tekliğine dair şu teoremi verelim.

Teorem 1.2.13. ***(Evrensel Örtü Uzayının Varlığı)*** *Her bağlantılı ve lokal basit bağlantılı topolojik uzay bir evrensel örtü uzayına sahiptir [8].*

Bu teoremin ispatında bir X uzayında bir $U \subset X$ açık altkümesi içindeki kapalı eğrilerin oldukça küçük olduklarını, diğer bir ifadeyle sabit eğriye homotopik (null homotopic) olduklarını, dolayısıyla da X içinde sabit eğriye homotopik olduklarını kullanıyoruz. Bu yüzden şu tanımı hatırlatmak yararlı olacaktır: Eğer X uzayı U' daki her kapalı eğrinin X içinde sabit eğriye homotopik olması özelliği ile U açık altkümelerinin bir tabanına sahip ise, X uzayına *yarı-lokal basit bağlantılıdır* denir.

Bu tanımdan sonra evrensel örtü uzayı ile ilgili olarak şu sonucu verebiliriz.

Sonuç 1.2.5. *Bağlantılı, lokal yol bağlantılı bir uzay bir evrensel örtü uzayına sahiptir gerek ve yeter şart o yarı-lokal 1-bağlantılıdır [36, 37].*

Evrensel örtü uzaylarının varlığı ve tekliği teoreminin bir sonucu olarak aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 1.2.6. *Her uzay en fazla bir tane evrensel örtü uzayına sahiptir. Dolayısıyla bağlantılı, lokal yol bağlantılı bir uzayın iki evrensel örtü uzayı denktir [8].*

Ancak şunu belirtelim ki her bağlantılı, lokal yol bağlantılı uzay bir evrensel örtü uzayına sahip değildir. Ayrıca bağlantılı ve lokal yol bağlantılı bir uzayın, basit bağlantılı olmayan bir evrensel örtü uzayına sahip olması mümkündür.

Artık evrensel örtü uzayının tanımını verdikten sonra örtü uzaylarının kategorisinden sözedebiliriz.

Tanım 1.2.16. *X evrensel örtüye sahip bağlantılı bir topolojik uzay olsun. $TCov(X)$ kategorisi; nesneleri $p : \tilde{X} \to X$ örtü dönüşümleri ve $p : \tilde{X} \to X$ nesnesinden $q : \tilde{Y} \to X$ nesnesine bir morfizmi, $p = q \circ r$ şartını sağlayan $r : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ dönüşümü olan bir kategoridir.*

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{Y} \arrow[dl, "q"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

Bu kategoride; kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1 : \tilde{X} \to \tilde{X}$ ile tanımlıdır. Ayrıca, $r : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ ve $r' : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ iki morfizm olmak üzere kompozisyon,

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{Y} \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & \tilde{Z} \arrow[dl, "p'"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır [6].

Eğer r aynı zamanda bir homeomorfizm ise r' ye örtü uzaylarının bir **izomorfizmi** denir. Bu kategori literatürde bağlantılı, lokal yol bağlantılı bir uzayın bağlantılı örtü uzaylarının kategorisi olarak bilinir [6].

Aşağıdaki lemma Tanım.1.2.16' da belirtilen her morfizmin aynı zamanda bir örtü dönüşümü olduğunu gösterir.

Lemma 1.2.15. *Bağlantılı, lokal yol bağlantılı bir uzayın bağlantılı örtü uzaylarının kategorisindeki her morfizm bir örtü dönüşümüdür [6, 8].*

Tanım 1.2.17. *$H_1, H_2 \subset G$ altgruplar olsun. Eğer her $g \in G$ için $H_2 = g \cdot H_1 \cdot g^{-1}$ ise H_1 ve H_2 konjugedir denir. Yani H_1 ve H_2 aynı yörünge içinde bulunuyorlarsa konjugedirler [8].*

Aşağıdaki sonuç X' in bağlantılı örtü uzaylarının kategorisinde bir nesneden bir başka nesneye bir morfizmin varolduğunu belirtir:

Teorem 1.2.14. *$TCov(X)$ kategorisinde iki nesne $p_1 : \widetilde{X}_1 \longrightarrow X$ ve $p_2 : \widetilde{X}_2 \longrightarrow X$ olsun. Aşağıdakiler denktir:*

1. *Bir $f : \widetilde{X}_1 \longrightarrow \widetilde{X}_2$ örtü dönüşümü vardır öyle ki $p_2 \circ f = p_1$ dir.*
2. *$p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2)$ olacak şekildeki her $\widetilde{x}_1 \in \widetilde{X}_1$ ve $\widetilde{x}_2 \in \widetilde{X}_2$ için $p_{1_*}\left(\pi_1\left(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1\right)\right)$, $\pi_1(X, p_1(\widetilde{x}_1))$ içinde $p_{2_*}\left(\pi_1\left(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2\right)\right)$' nin bir altgrubuna konjugedir.*
3. *$\widetilde{x}_1 \in \widetilde{X}_1$ ve $\widetilde{x}_2 \in \widetilde{X}_2$ mevcuttur öyle ki $p_1(\widetilde{x}_1) = p_2(\widetilde{x}_2)$' dır ve $p_{1_*}\left(\pi_1\left(\widetilde{X}_1, \widetilde{x}_1\right)\right)$, $\pi_1(X, p_1(\widetilde{x}_1))$ içinde $p_{2_*}\left(\pi_1\left(\widetilde{X}_2, \widetilde{x}_2\right)\right)$' nin bir altgrubuna konjugedir [6, 8].*

Sonuç 1.2.7. *Bir X bağlantılı lokal yol bağlantılı uzayın bağlantılı örtü uzaylarının kategorisindeki iki nesne denktir gerek ve yeter şart (X' in aynı noktası üzerinde öyle iki noktadaki) esas grupları, (bu noktada) X' in esas grubunun konjuge alt gruplarına dönüşür [6, 8].*

Yukarıda oluşturulan kategoriden yararlanarak evrensel örtü uzayı tanımını kategorik olarak şu şekilde de verebiliriz:

Tanım 1.2.18. *X bağlantılı uzayının bir evrensel örtü uzayı, X' in bağlantılı örtü uzaylarının kategorisinin bir $p : \widetilde{X} \longrightarrow X$ nesnesidir öyle ki bu kategorinin herhangi $p' : \widetilde{X'} \longrightarrow X$ nesnesi için kategoride bir*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{X} \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "p"'] & & \widetilde{X}' \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

morfizmi vardır [6].

1.3 Diferensiyellenebilir Kavramlar

1.3.1 Manifoldlar

Lie grupoidler, temelinde manifold yapısı olan topolojik grupoidlerdir. Dolayısıyla tezin ilerleyen kısımlarında yapılan ispatların daha rahat anlaşılabilmesi için bu kısımda manifoldlarla ilgili bazı temel tanımlar ve kavramlar verilecektir.

Tanım 1.3.1. *M bir topolojik uzay olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa M' ye n-boyutlu topolojik manifold veya kısaca topolojik n-manifold denir.*

i. *M bir Hausdorff uzay,*

ii. *M ikinci sayılabilir uzay, yani M' nin topolojisi için bir sayılabilir taban vardır,*

iii. *M n-boyutlu lokal Öklidyendir, yani M' nin her noktası $\mathbb{R}^n$ nin bir açık altkümesine homeomorf olan bir komşuluğa sahiptir [7].*

Topolojik n-manifoldların en belirgin örneği $\mathbb{R}^n$ dir. $\mathbb{R}^n$ bir metrik uzay olduğundan Hausdorff' tur. Ayrıca rasyonel merkezli ve rasyonel yarıçaplı tüm açık yuvarların kümesi bir sayılabilir taban olduğundan $\mathbb{R}^n$ ikinci sayılabilir bir uzaydır.

Bir topolojik n-manifoldun herhangi bir açık altkümesinin, altuzay topolojisi ile birlikte yine bir topolojik n-manifold olduğu kolayca görülebilir.

Tanım 1.3.2. *M bir topolojik n-manifold olsun. M üzerinde bir koordinat haritası bir (U, φ) ikilisidir öyle ki U, M' nin bir açık altkümesi ve $\varphi : U \to \widetilde{U}$ dönüşümü U' dan bir $\widetilde{U} = \varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ açık altkümesine bir homeomorfizmdir. U' ya koordinat tanım kümesi, φ' ye (lokal) koordinat dönüşümü ve φ' nin $\varphi(p) = (x^1(p), ..., x^n(p))$ şeklinde tanımlanan $(x^1, ..., x^n)$ bileşen fonksiyonlarına U üzerindeki lokal koordinatlar deriz. M topolojik manifoldunu örtecek şekilde haritaların bir kolleksiyonuna atlas deriz ve $\mathcal{A}$ ile gösteririz [7].*

Eğer $\varphi(U) \subseteq \mathbb{R}^n$ altkümesi $\mathbb{R}^n$' de bir açık yuvar ise, U' ya bir koordinat yuvarı deriz. Bir topolojik n-manifold tanımından görüleceği üzere her bir $p \in M$ noktası en az bir (U, φ) haritasının tanım kümesi içinde içerilir.

Örnek 1.3.1. *$M_1, ..., M_k$ sırasıyla $n_1, ..., n_k$ boyutlu topolojik manifoldlar olsun. $M_1 \times ... \times M_k$ çarpım uzayı $n_1 + ... + n_k$ boyutlu bir topolojik manifolddur. Gerçekten, Hausdorff uzayların çarpımları da Hausdorff olduğundan ve ikinci sayılabilir uzayların çarpımları da ikinci sayılabilir olduğundan topolojik manifold olmanın ilk iki şartı açıkça sağlanır. Dolayısıyla sadece lokal Öklidyenlik özelliğini göstermek yeterlidir. Herhangi bir $(p_1, ..., p_k) \in M_1 \times ... \times M_k$ noktası verilsin. $p_i \in U_i$ ile her bir M_i için bir (U_i, φ_i) koordinat haritası seçebiliriz.*

$$\varphi_1 \times ... \times \varphi_k : U_1 \times ... \times U_k \to \mathbb{R}^{n_1+...+n_k}$$

çarpım dönüşümü, $\mathbb{R}^{n_1+...+n_k}$ nın bir açık altkümesi olan kendi görüntüsü üzerine bir homeomorfizmdir. Böylece $M_1 \times ... \times M_k$, $(U_1 \times ... \times U_k, \varphi_1 \times ... \times \varphi_k)$ şeklindeki haritalar ile $n_1 + ... + n_k$ boyutlu bir topolojik manifolddur [7].

Lemma 1.3.1. *Her topolojik manifold önkompakt koordinat yuvarlarının bir sayılabilir tabanına sahiptir [7].*

M topolojik uzay olsun. Eğer her nokta M' nin bir kompakt altkümesi içinde ihtiva edilen bir komşuluğa sahip ise M' ye *lokal kompakttır* denir. Eğer M Hausdorff ise, bu tanım M' nin önkompakt açık kümelerin bir tabanına sahip olmasına denktir [8].

Sonuç 1.3.1. *Her topolojik manifold lokal kompakttır [7].*

Önerme 1.3.1. *M topolojik n-manifold olsun. Bu takdirde,*

1. *M lokal yol-bağlantılıdır.*
2. *M bağlantılıdır $\Leftrightarrow$ M yol-bağlantılıdır.*
3. *M' nin bileşenleri, yol bileşenleri ile aynıdır.*
4. *M en fazla sayılabilir çoklukta bileşenlere sahiptir, ki onların her biri M' nin bir açık alt kümesidir ve bağlantılı birer topolojik manifolddur [7].*

Örtü manifoldlarını daha iyi anlamamız bakımından manifoldların esas grupları ile ilgili olarak aşağıda vereceğimiz önerme yararlı olacaktır.

Önerme 1.3.2. *Herhangi bir topolojik manifoldun esas grubu sayılabilirdir [7].*

Diferensiyellenebilir manifold kavramını vermeden önce Öklidyen uzaylar arasında diferensiyellenebilirlik üzerine bazı temel bilgileri hatırlatalım. Tez boyunca, aksi belirtilmedikçe diferensiyellenebilirlik kavramından C^∞ anlamında yani sonsuz diferensiyellenebilirliği kastedeceğiz.

U ve V sırasıyla $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{R}^m$ Öklidyen uzayların açık altkümeleri olsun ve bir $F : U \to V$ fonksiyonunu gözönüne alalım. Eğer F' nin bileşen fonksiyonlarının her biri her mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ise F' ye *diferensiyellenebilirdir* denir. Ayrıca eğer F bire-bir ve örten ise ve bir diferensiyellenebilir terse sahip ise ona *diffeomorfizmdir* denir [7, 38].

Tanım 1.3.3. *M bir topolojik n-manifold olsun. Eğer (U, φ) ve (V, ψ), $U \cap V \neq \emptyset$ olacak şekilde iki harita ise, $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$ bileşke dönüşümüne φ' den ψ' ye geçiş dönüşümü denir. Bu bileşke dönüşümü homeomorfizmlerin bir bileşkesidir, dolayısıyla o da bir homeomorfizmdir. Eğer ya $U \cap V = \emptyset$ ise ya da $\psi \circ \varphi^{-1}$ geçiş dönüşümü bir diffeomorfizm ise (U, φ) ve (V, ψ) haritalarına diferensiyellenebilir olarak bağdaşabilirdir denir [7, 38].*

Tanım 1.3.4. *M bir topolojik manifold ve $\mathcal{A}$, M üzerinde bir atlas olsun. Eğer $\mathcal{A}$' daki herhangi iki harita birbiri ile diferensiyellenebilir olarak bağdaşabilir ise $\mathcal{A}$' ya bir diferensiyellenebilir atlas denir [7, 38].*

Verilen bir $\mathcal{A}$ atlasında φ ve ψ koordinat dönüşümlerinin her çifti için bu durum $\psi \circ \varphi^{-1}$ geçiş dönüşümünün diferensiyellenebilir olması şeklinde olur. Bir kere bunu yaptık mı $\psi \circ \varphi^{-1}$ nin bir diffeomorfizm olduğunu sağlatmak gereksizdir, çünkü onun tersi olan $(\psi \circ \varphi^{-1})^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$ bizim zaten diferensiyellenebilir olduğunu gösterdiğimiz geçiş dönüşümlerinden birisidir.

M üzerinde bir $\mathcal{A}$ diferensiyellenebilir atlası, daha geniş bir atlas içinde içerilmiyorsa *maksimaldir* adını alır. Bu, $\mathcal{A}$ daki her harita ile diferensiyellenebilir olarak bağdaşabilir herhangi bir haritanın da $\mathcal{A}$ içinde olması demektir. Böyle bir diferensiyellenebilir atlasa "*tam*" dır da denir [7, 38].

Tanım 1.3.5. *Bir M topolojik manifoldu üzerinde bir* ***diferensiyellenebilir yapı*** *bir maksimal diferensiyellenebilir atlastır. Bir diferensiyellenebilir manifold, bir*

M topolojik manifoldu ve onun üzerindeki bir $\mathcal{A}$ diferensiyellenebilir yapısı ile birlikte bir $(M, \mathcal{A})$ ikilisidir [7, 38].

Lemma 1.3.2. *M bir topolojik manifold olsun.*

a) *M için her diferensiyellenebilir atlas bir tek maksimal diferensiyellenebilir atlas içinde ihtiva edilir.*

b) *M için iki diferensiyellenebilir atlas aynı maksimal diferensiyellenebilir atlası belirler gerek ve yeter şart onların birleşimleri bir diferensiyellenebilir atlastır [7, 38].*

Tanım 1.3.6. *Eğer M bir diferensiyellenebilir manifold ise, verilen maksimal diferensiyellenebilir atlasta ihtiva edilen herhangi bir (U, φ) haritasına bir diferensiyellenebilir harita ve karşılık gelen φ koordinat dönüşümüne bir diferensiyellenebilir koordinat dönüşümü denir. Ayrıca bir diferensiyellenebilir koordinat haritasının tanım kümesine diferensiyellenebilir koordinat tanım kümesi ya da diferensiyellenebilir koordinat komşuluğu denir. Bir diferensiyellenebilir koordinat yuvarı, bir diferensiyellenebilir koordinat dönüşümü altında, görüntüsü Öklid uzayında bir yuvar olan bir diferensiyellenebilir koordinat tanım kümesidir [7, 38].*

Şimdi Lemma 1.3.1' in diferensiyellenebilir manifoldlar için uyarlamasını verelim.

Lemma 1.3.3. *Her diferensiyellenebilir manifold, önkompakt diferensiyellenebilir koordinat yuvarlarının bir sayılabilir tabanına sahiptir [7].*

Bir diferensiyellenebilir manifold için bağlantılılık ve yol-bağlantılılık kavramları çakışıktır. Yani bağlantılı bir diferensiyellenebilir manifoldun herhangi iki noktası bir diferensiyellenebilir eğri (yol) ile birleştirilebilir. Bir diferensiyellenebilir manifoldun bağlantılı bileşenleri açık ve kapalıdır. Bir sayılabilir tabanın varolması varsayımımızdan, bir diferensiyellenebilir manifoldun en fazla sayılabilir çoklukta bağlantılı bileşenlere sahip olduğu gelir.

Örnek 1.3.2. *$\mathbb{R}^n$, bir tek $(\mathbb{R}^n, Id_{\mathbb{R}^n})$ haritasından oluşan atlas aracılığıyla belirlenen diferensiyellenebilir yapı ile bir diferensiyellenebilir n-manifolddur. Buna standart diferensiyellenebilir yapı ve ortaya çıkan koordinat dönüşümüne standart koordinatlar deriz. Özel olarak belirtilmedikçe her zaman $\mathbb{R}^n$ üzerinde bu diferensiyellenebilir yapıyı kullanacağız [7].*

Örnek 1.3.3. *Bir sıfır boyutlu M topolojik manifoldu tam olarak bir sayılabilir diskret uzaydır. Her bir $p \in M$ noktası için $\mathbb{R}^0$ ın bir açık altkümesine homeomorf olan p' nin tek komşuluğu $\{p\}$' nin kendisidir, ve sadece bir tane $\varphi : \{p\} \to \mathbb{R}^0$ koordinat dönüşümü vardır. Bu yüzden M üzerindeki tüm haritaların kümesi aşikar olarak diferensiyellenebilir bağdaşabilirlik şartını sağlar ve her sıfır boyutlu manifold bir tek diferensiyellenebilir yapıya sahiptir [7].*

Örnek 1.3.4. *U, $\mathbb{R}^n$ nin bir açık altkümesi olsun. Bu takdirde, U bir topolojik n-manifolddur ve tek başına (U, Id_U) haritası U üzerinde bir diferensiyellenebilir yapı tanımlar. Daha genel olarak, M bir diferensiyellenebilir n-manifold ve U, M' nin herhangi bir açık altkümesi olsun. U üzerinde bir atlası*

$$\mathcal{A}_U = \{M \text{ için } (V, \varphi) \text{ diferensiyellenebilir haritalar} : V \subset U\}$$

şeklinde tanımlayalım. Herhangi $p \in U$ noktası, M' nin en az bir (W, φ) haritasının tanım kümesinde ihtiva edilir. Eğer $V = W \cap U$ alırsak, o zaman $(V, \varphi\mid_V)$ tanım kümesi p' yi içeren $\mathcal{A}_U$' da bir haritadır. Böylece U, $\mathcal{A}_U$' daki haritaların tanım kümeleri ile örtülür, ve bunun U için bir diferensiyellenebilir atlas olduğu kolayca gösterilir. Buradan M' nin herhangi bir açık altkümesinin kendisi doğal bir şekilde bir diferensiyellenebilir n-manifolddur. Bu diferensiyellenebilir yapı ile donatılan herhangi açık altkümeye M' nin bir ***açık altmanifoldu*** *denir [7].*

Örnek 1.3.5. *Eğer $M_1, ..., M_k$ sırasıyla $n_1, ..., n_k$ boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ise $M_1 \times ... \times M_k$ çarpım uzayının $(U_1 \times ... \times U_k, \varphi_1 \times ... \times \varphi_k)$ şeklindeki haritalarla $n_1 + ... + n_k$ boyutlu bir topolojik manifold olduğu Örnek 1.3.1' de gösterildi. Bu şekildeki herhangi iki harita diferensiyellenebilir olarak bağdaşabilirdir. Çünkü kolayca gösterilebileceği üzere*

$$(\psi_1 \times ... \times \psi_k) \circ (\varphi_1 \times ... \times \varphi_k)^{-1} = (\psi_1 \circ \varphi_1^{-1}) \times ... \times (\psi_k \circ \varphi_k^{-1})$$

diferensiyellenebilir dönüşümdür. Bu, çarpım üzerinde çarpım diferensiyellenebi- lir manifold yapısı dediğimiz doğal bir diferensiyellenebilir manifold yapısı tanımlar [7].

Aşağıdaki lemma bir küme üzerine nasıl diferensiyellenebilir manifold yapısı kurulduğunu gösterir.

Lemma 1.3.4. ***(Diferensiyellenebilir manifold inşaa etme lemması)*** *M boştan farklı bir küme olsun ve aşağıdaki özellikleri sağlayacak şekilde her bir α için bir $\varphi_\alpha : U_\alpha \to \mathbb{R}^n$ bire-bir dönüşümü ile birlikte M' nin altkümelerinin bir $\{U_\alpha\}$ kolleksiyonunun verildiğini kabul edelim.*

i) *Her bir α için $\varphi_\alpha(U_\alpha)$, $\mathbb{R}^n$ nin bir açık altkümesidir,*

ii) *Her bir α ve β için $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ ve $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ kümeleri $\mathbb{R}^n$ de açıktır,*

iii) *$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olduğunda $\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ bir diffeomorfizmdir,*

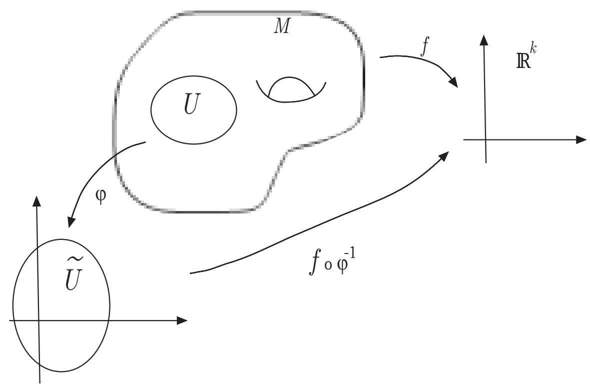
iv) *Sayılabilir çoklukta U_α kümeleri M' yi örter,*

v) *$p, q \in M$ farklı noktalar olduğunda ya hem p' yi hem de q' yu içeren en az bir U_α vardır ya da $p \in U_\alpha$ ve $q \in U_\beta$ ile ayrık U_α, U_β kümeleri vardır.*

Bu takdirde her bir $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ bir diferensiyellenebilir harita olacak şekilde bir tek diferensiyellenebilir manifold yapısı vardır [7].

1.3.2 Diferensiyellenebilir Dönüşümler

Tanım 1.3.7. *M bir diferensiyellenebilir n-manifold ve $f : M \to \mathbb{R}^k$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $p \in M$ için M' de tanım kümesi p' yi içeren bir (U, φ) diferensiyellenebilir haritası var öyle ki $f \circ \varphi^{-1}$ bileşke fonksiyonu $\widetilde{U} = \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerinde diferensiyellenebilir ise f' ye diferensiyellenebilirdir denir [7].*



Şekil 1.1. Diferensiyellenebilir fonksiyonların tanımı

Tanım 1.3.8. *Bir M diferensiyellenebilir manifoldu için bir $f : M \to \mathbb{R}^k$ fonksiyonu ve bir (U, φ) haritası verilsin. $\widehat{f} : \varphi(U) \to \mathbb{R}^k$, $\widehat{f}(x) = f \circ \varphi^{-1}(x)$ fonksiyonuna f*

nin koordinat temsilcisi denir [7].

Bu tanımdan görüleceği gibi, f diferensiyellenebilirdir gerek ve yeter şart f' nin koordinat temsilcisi her bir nokta civarında en az bir haritada diferensiyellenebilirdir.

Diferensiyellenebilir fonksiyonların tanımı kolayca manifoldlar arasındaki dönüşümlere genelleştirilebilir.

Tanım 1.3.9. *M, N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F : M \to N$ herhangi bir dönüşüm olsun. Eğer her $p \in M$ için p' yi ihtiva eden bir (U, φ) ve $F(p)$' yi ihtiva eden (V, ψ) diferensiyellenebilir haritaları var öyle ki $F(U) \subset V$ ve $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ bileşke dönüşümü $\varphi(U)$' dan $\psi(V)$' ye diferensiyellenebilir ise F' ye bir diferensiyellenebilir dönüşümdür denir [7].*

Diferensiyellenebilirlik kavramı lokaldir. Yani M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F : M \to N$ bir dönüşüm olsun. Bu takdirde eğer her $p \in M$ noktası $F\mid_U$ kısıtlaması diferensiyellenebilir olacak şekilde bir U komşuluğuna sahip ise o zaman F diferensiyellenebilirdir. Tersine eğer F diferensiyellenebilir ise onun herhangi bir açık altkümeye kısıtlaması diferensiyellenebilirdir. Şimdi diferensiyellenebilir dönüşümleri inşaa etmenin oldukça kullanışlı bir yolunu veren önemli bir lemma verelim. Bu lemma aynı zamanda diferensiyellenebilirliğin lokal olmasının formal bir ifadesidir.

Lemma 1.3.5. *M, N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ ailesi M' nin bir açık örtüsü olsun. Her bir $\alpha \in A$ için bir $F_\alpha : U_\alpha \to N$ diferensiyellenebilir dönüşümü verilsin öyle ki her α, β için $F_\alpha\mid_{U_\alpha \cap U_\beta} = F_\beta\mid_{U_\alpha \cap U_\beta}$ olsun. Bu takdirde her bir $\alpha \in A$ için $F\mid_{U_\alpha} = F_\alpha$ olacak şekilde bir tek $F : M \to N$ diferensiyellenebilir dönüşümü vardır [7].*

Lemma 1.3.6. *Diferensiyellenebilir manifoldlar arasındaki her diferensiyellenebilir dönüşüm aynı zamanda süreklidir [7, 38].*

İspat. $F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Diferensiyellenebilirliğin tanımından her bir $p \in M$ için, $F(U) \subset V$ ve $\psi \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olacak şekilde p' yi içeren (U, φ) ve $F(p)$' yi içeren

(V, ψ) diferensiyellenebilir haritaları vardır. Dolayısıyla $\psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ diferensiyellenebilir dönüşümü süreklidir. $\varphi : U \to \varphi(U)$ ve $\psi : V \to \psi(V)$ homeomorfizm olduklarından sürekli dönüşümlerin bir bileşkesi olan

$$F \mid_U = \psi^{-1} \circ (\psi \circ F \circ \varphi^{-1}) \circ \varphi : U \to V$$

dönüşümünden bahsedebiliriz. F her bir noktanın bir komşuluğunda sürekli olduğundan M üzerinde süreklidir. □

Eğer $F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ise ve (U, φ) ile (V, ψ) sırasıyla M ve N nin herhangi diferensiyellenebilir haritaları ise o zaman $\widehat{F} : \psi \circ F \circ \varphi^{-1}$ dönüşümüne verilen koordinatlara göre F nin *koordinat temsilcisi* denir [7].

Bir $F : M \to N$ dönüşümünün sürekli olduğu önceden bilinirse F' nin diferensiyellenebilirliği, M ve N nin özel diferensiyellenebilir atlaslarının haritalarındaki koordinat temsilcileri aracılığıyla kolayca kontrol edilebilir. Bunu aşağıdaki lemma ile verelim.

Lemma 1.3.7. *M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F : M \to N$ bir sürekli dönüşüm olsun. Eğer $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ ve $\{(V_\beta, \psi_\beta)\}$ sırasıyla M ve N için diferensiyellenebilir atlaslar ise ve eğer her bir α ve β için $\psi_\beta \circ F \circ \varphi_\alpha^{-1}$, tanım kümesi üzerinde diferensiyellenebilir ise F diferensiyellenebilirdir [7].*

İspat. $p \in M$ verilsin ve verilen atlaslardan $p \in U_\alpha$ ve $F(p) \in V_\beta$ olacak şekilde $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ ve (V_β, ψ_β) haritalarını seçelim. F sürekli olduğundan $U = F^{-1}(V_\beta) \cap U_\alpha$ kümesi M' de açıktır ve $F(U) \subset V_\beta$ dır. Böylece $(U, \varphi_\alpha \mid_U)$ ve (V_β, ψ_β) haritaları diferensiyellenebilirlik tanımındaki gerekli şartları sağlar. □

Lemma 1.3.8. *Diferensiyellenebilir manifoldlar arasındaki diferensiyellenebilir dönüşümlerin bileşkesi de diferensiyellenebilirdir [7, 38, 14].*

İspat. $F : M \to N$ ve $G : N \to P$ diferensiyellenebilir dönüşümler ve $p \in M$ keyfi bir nokta olsun. G' nin diferensiyellenebilirliğinden $F(p)$ yi içeren (V, θ) ve $G(F(p)$' yi içeren (W, ψ) diferensiyellenebilir haritaları vardır öyle ki $G(V) \subset W$ dır ve $\psi \circ G \circ \theta^{-1} : \theta(V) \to \psi(W)$ diferensiyellenebilirdir. F sürekli olduğundan $F^{-1}(V)$ kümesi M' de p' nin bir açık komşuluğudur. Böylece M için $p \in U \subset F^{-1}(V)$ olacak şekilde bir (U, φ) diferensiyellenebilir haritası vardır. $\theta \circ F \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \theta(V)$ diferensiyellenebilirdir. Bu takdirde $G \circ F(U) \subset G(V) \subset W$ dır ve

$$\psi \circ (G \circ F) \circ \varphi^{-1} = (\psi \circ G \circ \theta^{-1}) \circ (\theta \circ F \circ \varphi^{-1}) : \varphi(U) \to \psi(W)$$

diferensiyellenebilirdir, çünkü bu Öklidyen uzayların açık altkümeleri arasında diferensiyellenebilir dönüşümlerin bir bileşkesidir. $\square$

Bir dönüşümün diferensiyellenebilir olduğunu göstermenin üç yaygın yolu vardır. Dönüşümü, diferensiyellenebilir lokal koordinatlarda yazmak ve diferensiyellenebilir elemanter fonksiyonların bileşkeleri olarak onun bileşen fonksiyonlarını tanımlamak, dönüşümü bilinen diferensiyellenebilir dönüşümlerin bir bileşkesi olarak göstermek ve son olarak da sözkonusu özel duruma uygulanabilecek bazı özel amaçlı teoremleri kullanmak.

Örnek 1.3.6. *Bir sıfır boyutlu topolojik manifolddan bir diferensiyellenebilir manifolda her dönüşüm otomatik olarak diferensiyellenebilirdir [7].*

Örnek 1.3.7. *$M_1, ..., M_k$ ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $pr_i : M_1 \times .. \times M_k \to M_i$ dönüşümü i-yinci faktör üzerine izdüşüm olsun. Bir $F : N \to M_1 \times ... \times M_k$ dönüşümü diferensiyellenebilirdir gerek ve yeter şart $F_i = pr_i \circ F : N \to M_i$ bileşen dönüşümlerinden her biri diferensiyellenebilirdir [7].*

Tanım 1.3.10. *M ve N diferensiyellenebilir manifoldları arasında bir **diffeomorfizm**, bir diferensiyellenebilir terse sahip olan bir $F : M \to N$ diferensiyellenebilir bire-bir örten dönüşümdür. Eğer M ve N arasında bir diffeomorfizm varsa onlara diffeomorfiktir denir ve $M \approx N$ ile gösterilir [7].*

Eğer M bir diferensiyellenebilir manifold ve (U, φ), M üzerinde bir diferensiyellenebilir koordinat haritası ise, $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ bir diffeomorfizmdir. Daha genel olarak;

Tanım 1.3.11. *$F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Her $p \in M$ noktası $F(U) \subset N$ açık olacak şekilde bir U komşuluğuna sahip ve $F\mid_U : U \to F(U)$ bir diffeomorfizm ise F' ye bir lokal diffeomorfizmdir denir [7, 38].*

Tanımdan bir lokal diffeomorfizmin bir lokal homeomorfizm ve dolayısıyla bir açık dönüşüm olduğu açıktır. Ayrıca diferensiyellenebilir manifoldlar arasında bir dönüşüm diffeomorfizmdir gerek ve yeter şart bir bire-bir örten lokal diffeomorfizmdir.

Önerme 1.3.3. *1. Eğer $F : M \longrightarrow M'$ ve $G : M_1 \longrightarrow M_1'$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ise, $F \times G$ de diferensiyellenebilirdir.*

2. Eğer $F : M \longrightarrow M'$ ve $G : M \longrightarrow M_1'$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ise (F, G) de diferensiyellenebilirdir [38].

Şimdi altmanifoldlar kavramı için gerekli olacak olan tanjant uzaylardan ve türev dönüşümünden bahsedelim.

Bir M diferensiyellenebilir manifoldundan $\mathbb{R}$' ye giden diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesini $\mathcal{F}(M)$ ile gösterelim. $\mathcal{F}(M)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir cebirdir.

Tanım 1.3.12. *M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olsun. Aşağıdaki iki şartı sağlayan bir $\upsilon_p : \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna, p noktasında bir tanjant vektör denir [39].*

1. *Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve her $f, g \in \mathcal{F}(M)$ için $\upsilon_p(af + bg) = a\upsilon_p(f) + b\upsilon_p(g)$*

2. *Her $f, g \in \mathcal{F}(M)$ için $\upsilon_p(fg) = \upsilon_p(f).g(p) + f(p).\upsilon_p(g)$*

Bu tanımdaki ikinci eşitliğe *Leibnitz kuralı* denir.

p noktasındaki bütün tanjant vektörlerin kümesi T_pM ile gösterilir. T_pM kümesi aşağıdaki toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte bir vektör uzayıdır ve ona M manifoldunun p noktasındaki *tanjant uzayı* denir [39].

$$(\upsilon_p + \omega_p)(f) = \upsilon_p(f) + \omega_p(f)$$
$$(\lambda \upsilon_p)(f) = \lambda(\upsilon_p(f))$$

Teorem 1.3.1. *$F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $p \in M$ olsun. $\upsilon_p \in T_pM$ olmak üzere $g \in \mathcal{F}(N)$ için $[F_{*p}(\upsilon_p)](g) = \upsilon_p(g \circ F)$ eşitliği ile tanımlanan $F_{*p}(\upsilon_p) : \mathcal{F}(N) \to \mathbb{R}$ dönüşümü, $T_{F(p)}N$ uzayının bir elemanıdır [39].*

İspat. $F_{*p}(\upsilon_p) : \mathcal{F}(N) \to \mathbb{R}$ dönüşümünün lineer olduğu ve Leibnitz kuralını sağladığı kolayca görülür. □

Yukarıdaki teoremin bir sonucu olarak $F_{*p} : T_pM \to T_{F(p)}N$ dönüşümü elde edilir. F_{*p} yerine bazen T_pF ifadesi kullanılacaktır.

Tanım 1.3.13. *$F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $p \in M$ olmak üzere $F_{*p} : T_pM \to T_{F(p)}N$ dönüşümüne, $F : M \to N$ fonksiyonunun p noktasındaki türev dönüşümü veya diferensiyeli denir [39].*

Teorem 1.3.2. *$F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $p \in M$ olmak üzere F_{*p} dönüşümü lineerdir [39].*

İspat. $\upsilon_p, \omega_p \in T_pM$ olmak üzere $g \in \mathcal{F}(N)$ için

$$\begin{aligned}[F_{*p}(a\upsilon_p + \omega_p)](g) &= (a\upsilon_p + \omega_p)(g \circ F) \\ &= a\upsilon_p(g \circ F) + \omega_p(g \circ F) = aF_{*p}(\upsilon_p) + F_{*p}(\omega_p)\end{aligned}$$

dir. □

Önerme 1.3.4. *Eğer $F : M \to M'$ ve $G : M' \to M''$ diferensiyellenebilir fonksiyonlar ve m, $G \circ F$' nin tanım bölgesinden bir nokta ise*

$$(G \circ F)_{*m} = G_{*(F(m))} \circ F_{*m}$$

dir [39].

Önerme 1.3.5. *Eğer $F : M \to M'$ bir diferensiyellenebilir fonksiyon ise onun diferensiyeli olan $F_* : TM \to TM'$ de diferensiyellenebilirdir [39].*

Önerme 1.3.6. *Eğer pr ve pr', $M \times M'$ çarpım manifoldundan sırasıyla M ve M' üzerine izdüşümler ise, $\lambda = (pr_*, pr'_*) : T(M \times M') \to (TM) \times (TM')$ bir diffeomorfizmdir [39].*

Önerme 1.3.7. *Eğer M bir diferensiyellenebilir manifold ise TM de diferensiyellenebilir manifolddur [7].*

Tanım 1.3.14. *$F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $p \in M$ olsun. Eğer $T_p(F) : T_pM \to T_{F(p)}N$ bire-bir ise F' ye $p \in M$' de bir immersiyondur, örten ise F' ye $p \in M$' de bir submersiyondur denir [7, 38].*

Eğer F, p' de bir immersiyon ise $rank_p F = boy_p M$ dir. Bu şart p' nin bir açık komşuluğunda da gerçeklenir. Dolayısıyla F, m' nin bir komşuluğunda bir immersiyondur. Eğer F, p' de bir submersiyon ise $rank_p F = boy_{F(p)} N$ dir. Bu şart p' nin bir açık komşuluğunda da gerçeklenir. Dolayısıyla F, m' nin bir komşuluğunda bir submersiyondur.

Tanım 1.3.15. *$F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer F, M nin her noktasında bir immersiyon ise F' ye bir immersiyondur, M nin her noktasında bir submersiyon ise F' ye bir submersiyondur denir [7, 38].*

Şimdi diferensiyellenebilirlik ile immersiyon ve submersiyonlar arasındaki ilişkileri sonuçlarla verelim.

Sonuç 1.3.2. *$i : M \to N$ bir immersiyon ve $F : P \to M$ bir sürekli dönüşüm olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir [7]:*

i) *F diferensiyellenebilirdir,*

ii) *$i \circ F$ diferensiyellenebilirdir.*

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, "F"] \arrow[dr, "i \circ F"'] & M \arrow[d, "i"] \\ & N \end{tikzcd}$$

Sonuç 1.3.3. *$p : M \longrightarrow N$ bir örten submersiyon ve $F : N \longrightarrow P$ bir dönüşüm olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir [7]:*

i) *F diferensiyellenebilirdir,*

ii) *$F \circ p$ diferensiyellenebilirdir.*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "P"] \arrow[dr, "F \circ p"'] & N \arrow[d, "F"] \\ & P \end{tikzcd}$$

Sonuç 1.3.4. *Eğer $G : M' \longrightarrow M$ bir immersiyon ve $F : M' \longrightarrow M_1$ herhangi bir diferensiyellenebilir fonksiyon ise $(G, F) : M' \longrightarrow M \times M_1$ bir immersiyondur [7].*

Sonuç 1.3.5. *$G : M' \longrightarrow M$ ve $F : M_1' \longrightarrow M_1$ iki immersiyon olsun. Bu takdirde $G \times F : M' \times M_1' \longrightarrow M \times M_1$ bir immersiyondur [7].*

Sonuç 1.3.6.

1. *$pr_1 : M_1 \times M_2 \to M_1$ izdüşümü bir submersiyondur.*
2. *$F : M \to M'$ ve $G : M_1 \to M_1'$ submersiyon ise $F \times G$ bir submersiyondur [7].*

Sonuç 1.3.7. *$F : M \to M'$ bir immersiyon olsun. Eğer $G : M_1 \to M$, $F \circ G$ diferensiyellenebilir olacak şekilde sürekli bir fonksiyon ise, G de diferensiyellenebilirdir [7].*

Sonuç 1.3.8. *Bir submersiyon açık dönüşümdür [7].*

Önerme 1.3.8. *Eğer $F : M_1 \to M$ ve $F' : M_1 \to M'$ dönüşümleri $(F, F') : M_1 \to M \times M'$ bir diffeomorfizm olacak şekildeki diferensiyellenebilir dönüşümler ise $(F_*, F'_*) : TM_1 \to TM \times TM'$ bir diffeomorfizmdir [38].*

Uyarı 1.3.1. *$\pi : TM \longrightarrow M$ bir submersiyondur [38].*

Şimdi altmanifold tanımını verebiliriz.

Tanım 1.3.16. *M' ve M iki manifold olsun. Eğer M', M' nin bir alt kümesi ve $j : M' \longrightarrow M$ doğal dahil etme dönüşümü bir immersiyon ise M' manifolduna, M manifoldunun bir* ***altmanifoldu*** *denir [38].*

Önerme 1.3.9. *M', M' nin bir altmanifoldu ve M'', M' nün bir altmanifoldu ise M'', M' nin bir alt manifoldudur [38].*

Tanım 1.3.17. *M_1' den M' ye bir bire-bir immersiyona M_1' den M' ye bir* ***imbedding*** *denir [38].*

Şimdi altmanifoldlar ile ilgili bazı özellikleri verelim.

Sonuç 1.3.9.

1. *M' nin bir bağlantılı altmanifoldu M' nin bir bağlantılı altkümesi olmak zorundadır.*

2. *M' nin bir kompakt altmanifoldu M' nin bir kompakt altkümesi olmak zorundadır.*

3. *Bir M manifoldunun bir bileşeni, M' nin bir bağlantılı altmanifoldudur [38].*

Lemma 1.3.9. *$F : M \to N$ 1:1 immersiyon olsun. $F : M \to F(M) \subset N$ bir homeomorfizm ise $F(M)$, N' de bir altmanifolddur ve $F : M \to N$ bir diffeomorfizmdir [47].*

Lemma 1.3.10. *$F : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu takdirde F' nin Γ_F grafı, $M \times N$' nin bir kapalı altmanifoldudur [8, 47].*

Önerme 1.3.10. *F, M' den M'' ne bir submersiyon olsun. Eğer $G : M' \longrightarrow M''$, $G \circ F$ diferensiyellenebilir olacak şekildeyse G de diferensiyellenebilirdir [38].*

Önerme 1.3.11. *Bir $F : M \longrightarrow M'$ diferensiyellenebilir fonksiyonu bir submersiyondur $\Leftrightarrow$ F' nin tanım bölgesindeki her bir m noktası için, F' nin bir diferensiyellenebilir kesiti vardır öyle ki bu kesitin görüntü bölgesi m' yi içerir [38, 47].*

Lemma 1.3.11. *$F : M \longrightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. F' nin bir subimmersiyon olduğunu varsayalım. Bu takdirde, herhangi $n \in N$ için $F^{-1}(n)$, M' nin bir kapalı altmanifoldudur ve herhangi $m \in F^{-1}(n)$ için*

$$T_m\left(F^{-1}(n)\right) = \ker\left(T_m(F)\right)$$

dir [47].

Submersiyonların durumunda daha kuvvetli bir sonuca sahibiz.

Lemma 1.3.12. *$F : M \to N$ bir submersiyon ve P, N' nin bir altmanifoldu olsun. Bu takdirde $F^{-1}(P)$, M' nin bir altmanifoldudur ve*

$$F|_{F^{-1}(P)} : F^{-1}(P) \longrightarrow P$$

kısıtlaması bir submersiyondur. Ayrıca herhangi $m \in F^{-1}(P)$ için

$$T_m\left(F^{-1}(P)\right) = T_m(F)^{-1}\left(T_{F(m)}(P)\right)$$

dir [47].

Şimdi ileride sıkça kullanacağımız bir kavram olan bölüm manifoldu kavramını verelim.

En genel haliyle bir bölüm manifoldunu aşağıdaki gibi tanımlarız.

Tanım 1.3.18. *M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar ve $p : M \to N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bir $U \subset N$ açık altmanifoldu üzerinde tanımlanan herhangi bir f fonksiyonu için $p^{-1}(U)$ üzerinde bir $p^* f$ fonksiyonunu*

$$(p^* f)(x) = f(p(x))$$

şeklinde tanımlayalım. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa p dönüşümüne bir ***bölüm dönüşümü*** *denir [15]:*

1. *Bir $U \subset N$ altkümesi açıktır $\Leftrightarrow p^{-1}(U)$ M' de açıktır,*

2. *Bir $U \subset N$ açık altkümesi üzerinde tanımlanan bir f fonksiyonu diferensiyellenebilirdir $\Leftrightarrow p^* f$ fonksiyonu diferensiyellenebilirdir.*

Bir bölüm dönüşümü aşağıdaki evrensellik özelliğine sahiptir:

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "p"] \arrow[dr, "q"'] & & N \arrow[dl, "\phi"] \\ & K & \end{tikzcd}$$

değişimli üçgeni verilsin, burada p bir bölüm ve q bir diferensiyellenebilir dönüşümdür. Bu taktirde ϕ dönüşümü diferensiyellenebilirdir. Eğer q aynı zamanda bir bölüm dönüşümü ve ϕ bire-bir örten ise, ϕ bir diffeomorfizmdir. Bu son durum şöyle yorumlanabilir: eğer bir M diferensiyellenebilir manifoldundan bir N kümesine bir p dönüşümü verilirse, o zaman N kümesi, p bir bölüm dönüşümü olacak şekilde en fazla bir tane diferensiyellenebilir yapıya sahiptir [15].

Şimdi bir denklik bağıntısı verilmesi durumunda bölüm manifoldunu inceleyelim.

M bir diferensiyellenebilir manifold ve $R \subset M \times M$, M üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. $M/_R$, R' ye göre M' nin denklik sınıflarının kümesi ve $p : M \to M/_R$, herhangi bir $m \in M$' yi onun $M/_R$' deki denklik sınıfına götüren doğal dönüşüm olsun.

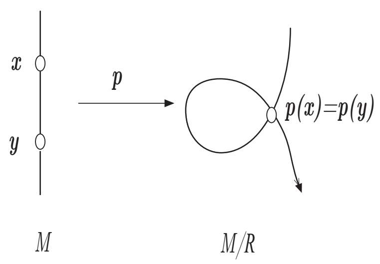
$M/_R$ üzerinde bölüm topolojisini tanımlayalım; yani $U \subset M/_R$ açıktır $\Longleftrightarrow$ $p^{-1}(U) \subset M$ açıktır. O zaman $p : M \longrightarrow M/_R$ bir sürekli dönüşümdür ve R' nin denklik sınıfları üzerinde sabit olan herhangi $F : M \longrightarrow N$ sürekli dönüşümü için aşağıdaki diyagram değişimli olacak şekilde bir tek

$$\overline{F} : M/_R \longrightarrow N$$

sürekli dönüşümü vardır

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "F"] \arrow[d, "P"'] & N \\ M/_R \arrow[ur, "\overline{F}"'] & \end{tikzcd} \qquad ...(*)$$

Genellikle $M/_R$ bir manifold değildir. Örneğin $M = (0,1) \subset \mathbb{R}$ ve R de $(0,1) \times (0,1)$' deki köşegenin ve $x, y \in (0,1)$, $x \neq y$ için $\{(x,y),(y,x)\}$' in birleşimi olsun. Bu takdirde, $M/_R$, x ve y' nin belirlenmesi aracılığıyla M' den elde edilir. Açıkça bu topolojik uzay bir manifold yapısına izin vermez.



Varsayalım ki $M/_R$, $p : M \longrightarrow M/_R$ bir submersiyon olacak şekilde bir diferensiyellenebilir yapıya sahip olsun. p sürekli olduğundan $M/_R$' deki herhangi U açık kümesi için $p^{-1}(U)$, M' de açıktır. Ayrıca, p bir açık dönüşümdür. Buradan $p^{-1}(U)$, M' de açık olacak şekildeki herhangi $U \subset M/_R$ altkümesi için $U = p\left(p^{-1}(U)\right)$ kümesi $M/_R$' de açıktır.

Böylece $M/_R$' deki bir U altkümesi açıktır $\Leftrightarrow$ $p^{-1}(U)$, M' de açıktır, yani $M/_R$ üzerindeki topoloji bölüm topolojisidir.

Ayrıca, $(*)$' dan , eğer M' den bir N diferensiyellenebilir manifolduna giden F dönüşümü diferensiyellenebilir ise, $\overline{F} : M/_R \longrightarrow N$ dönüşümü de diferensiyellenebilirdir.

Böyle bir diferensiyellenebilir yapının tek olduğunu gösterelim. Aksini kabul edelim ve $(M/_R)_1$ ve $(M/_R)_2$ bu özelliklerle iki manifoldu göstersin. Bu durumda, yukarıdaki uyarıdan dolayı $(M/_R)_1 \to (M/_R)_2$ ve $(M/_R)_2 \to (M/_R)_1$ birim dönüşümleri diferensiyellenebilirdir. Böylece birim dönüşüm $(M/_R)_1$ ve $(M/_R)_2$' nin bir diffeomorfizmidir, yani $M/_R$ üzerindeki diferensiyellenebilir yapılar birimseldir.

Böylece $M/_R$, $p : M \longrightarrow M/_R$ bir submersiyon olacak şekilde bir diferensiyellenebilir yapıya izin verirse ona R' ye göre M' nin **bölüm manifoldu** olduğunu söyleriz. Bu durumda, denklik bağıntısı **regülerdir** denir.

Eğer $M/_R$ bölüm manifoldu var ise, $p : M \longrightarrow M/_R$ bir submersiyon olduğundan p aynı zamanda bir açık dönüşümdür [38, 40, 47].

Teorem 1.3.3. *M bir diferensiyellenebilir manifold ve R, M üzerinde bir denklik bağıntısı olsun. Bu takdirde aşağıdaki durumlar denktir [38]:*

i) *R bağıntısı regülerdir.*

ii) *R, $M \times M$' nin kapalı altmanifoldudur ve $pr_1, pr_2 : M \times M \longrightarrow M$ doğal izdüşümlerinin $p_1, p_2 : R \longrightarrow M$ kısıtlamaları submersiyondurlar.*

Önerme 1.3.12. *M bir diferensiyellenebilir manifold ve R, M üzerinde bir regüler denklik bağıntısı olsun. $p : M \to M/_R$, M' den $M/_R$ üzerine doğal dönüşümü göstersin. $m \in M$ olmak üzere N, m' nin denklik sınıfı olsun. Bu takdirde N, M' nin bir kapalı altmanifoldudur ve*

$$boy_m N = boy_m M \to boy_{p(m)} M/_R$$

dir. Özel olarak, eğer M bağlantılı ise $M/_R$ de bağlantılıdır [7, 38].

M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar, R_M ve R_N sırasıyla M ve N üzerinde regüler denklik bağıntıları olsun. Bu takdirde, $M \times N$ üzerinde bir R denklik bağıntısını şöyle tanımlayabiliriz:

$$(m, n) \sim (m', n') \Leftrightarrow (m, m') \in R_M \quad ve \quad (n, n') \in R_N.$$

$$q : M \times M \times N \times N \to M \times N \times M \times N$$
$$(m, m', n, n') \mapsto q(m, m', n, n') = (m, n, m', n')$$

diffeomorfizmini düşünelim. q açıkça $R_M \times R_N$ kapalı altmanifoldunu R üzerine dönüştürür. Böylece R, $M \times N \times M \times N$' nin bir kapalı altmanifoldudur. Eğer karşılık gelen projeksiyonları

$$P_{M,i} : R_M \to M \ , \ P_{N,i} : R_N \to N \ \text{ ve } \ P_i : R \to M \times N$$

ile gösterirsek aşağıdaki değişimli diyagrama sahip oluruz:

$$\begin{tikzcd}
M \times M \times N \times N \arrow[r, "q"] \arrow[d, "P_{M,i} \times P_{N,i}"'] & R \arrow[dl, "P_i"] \\
M \times N &
\end{tikzcd}$$

Bu, R' nin regüler olmasını ve $(M \times N)/_R$' nin varolmasını gerektirir.

Ayrıca; eğer

$$p_M : M \longrightarrow M/_R \ , \ p_N : N \longrightarrow N/_R \text{ ve } \ p : M \times N \longrightarrow (M \times N)/_R$$

ile gösterirsek aşağıdaki diyagram değişimlidir:

$$\begin{tikzcd}
M \times N \arrow[r, "p"] \arrow[d, "p_M \times p_N"'] & (M \times N)/_R \arrow[dl] \\
M/_{R_M} \times N/_{R_N} &
\end{tikzcd}$$

$(M \times N)/_R \longrightarrow M/_R \times N/_R$ bir bire-bir örten dönüşüm olduğundan aynı zamanda bir diffeomorfizmdir. Burada bütün dönüşümler diferensiyellenebilirdir ve yatay dönüşümler aynı zamanda submersiyondurlar. Böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Lemma 1.3.13. *M ve N diferensiyellenebilir manifoldlar, R_M ve R_N sırasıyla M ve N üzerinde regüler denklik bağıntıları olsun. Bu takdirde,*

$$R = \{((m, n), (m', n')) \,|(m, m') \in R_M, (n, n') \in R_N\}$$

denklik bağıntısı regülerdir.

Ayrıca, $(M \times N)/_R \longrightarrow M/_R \times N/_R$ doğal dönüşümü bir diffeomorfizmdir [38].

1.3.3 Lie Gruplar

Tanım 1.3.19. *Bir G Lie grubu; $m : G \times G \to G$, $(g, h) \mapsto gh$ çarpım ve $i : G \to G$, $g \mapsto g^{-1}$ ters dönüşümleri diferensiyellenebilir olacak şekilde bir diferensiyellenebilir manifold yapısına sahip olan bir G grubudur [14].*

Diferensiyellenebilir dönüşümler sürekli olduğundan bir Lie grup aynı zamanda bir topolojik gruptur.

Örnek 1.3.8. *Reel terimli tersi alınabilir $n \times n$ matrislerin kümesi $GL(n, \mathbb{R})$, matris çarpımı altında bir gruptur ve $M(n, \mathbb{R})$ vektör uzayının bir açık altmanifoldudur. Bir AB çarpım matrisinin matris terimleri A ve B nin terimlerindeki polinomlar olduğundan çarpım diferensiyellenebilirdir. Ters işlemi de diferensiyellenebilirdir. Çünkü Cramer kuralı A nın terimlerinin rasyonel fonksiyonları olarak A^{-1} in terimlerini belirler [7].*

Örnek 1.3.9. *G_1 ve G_2 iki Lie grup olsun. Bu takdirde $G_1 \times G_2$ direkt çarpımı çarpım manifoldu yapısı ile bir Lie gruptur. Gerçekten $G_1 \times G_2$ kümesinin elemanları $g \in G_1$ ve $h \in G_2$ olmak üzere (g, h) şeklindeki elemanlardır. $G_1 \times G_2$ üzerinde*

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2) \tag{1}$$

işlemi ile bir grup yapısı tanımlanır. (1) ifadesi koordinatlar cinsinden

$$(g_{11}, ..., g_{1n}, h_{11}, ..., h_{1n})(g_{21}, ..., g_{2n}, h_{21}, ..., h_{2n}) = ((g_1 g_2)_1, ..., (h_1 h_2)_n)$$

şeklindedir. G_1 ve G_2 Lie grup olduklarından, her bir $(g_1 g_2)_i$, $(i = 1, .., n)$, g_1 ve g_2 nin ve her bir $(h_1 h_2)_i$, $(i = 1, .., n)$, h_1 ve h_2 nin koordinatlarının bir diferensiyellenebilir fonksiyonudur. Böylece (1) ile tanımlanan

$$(G_1 \times G_2) \times (G_1 \times G_2) \to G_1 \times G_2$$

dönüşümü diferensiyellenebilirdir ve dolayısıyla $G_1 \times G_2$ bir Lie gruptur [40].

Bu örneği genelleştirecek olursak; $G_1, ..., G_k$ Lie gruplar olmak üzere $G_1 \times ... \times G_k$ direkt çarpımı

$$(g_1, ..., g_k)(h_1, ..., h_k) = (g_1 h_1, ..., g_k h_k)$$

işlemi ile bir Lie gruptur [7].

Tanım 1.3.20. *G bir Lie grup olsun. Eğer H, G nin bir altgrubu ve G nin bir (immersed) altmanifoldu ise H ya G nin bir Lie altgrubudur denir [15, 45].*

Özel olarak, bir Lie grubun kapalı altgrupları ile ilgileneceğiz. Dolayısıyla kapalı altgrupların tanımını verelim.

Tanım 1.3.21. *Bir G Lie grubunun bir altgrubu ve bir kapalı altkümesine G nin kapalı altgrubu denir [45].*

Kapalı altgrupların Lie altgrup olduğunu aşağıdaki teorem aracılığıyla söyleriz.

Teorem 1.3.4. *Eğer H, bir G Lie grubunun bir kapalı altgrubu ise H, G nin bir altmanifoldudur ve buradan G nin bir Lie altgrubudur [45].*

Sonuç 1.3.10. *Bir G Lie grubunun herhangi H Lie altgrubu G de kapalıdır [47].*

Teorem 1.3.5. *G bir Lie grup olsun. G^0 ile birimin bağlantılı bileşenini gösterelim. Bu takdirde G^0, G nin bir normal altgrubudur ve bir Lie gruptur. G/G^0 bölüm grubu ayrıktır [47].*

İspat. G^0 ın çarpım ve ters işlemleri altında kapalı olduğunu ve bir normal altgrup olduğunu göstermemiz gerekiyor. Bir bağlantılı topolojik uzayın sürekli bir dönüşüm altında görüntüsü bağlantılı olduğundan i ters dönüşümü G^0 ı G nin tek bileşenine götürmelidir. Bu bileşen $i(e) = e$ yi içerir. Yani G^0 dır. Benzer bir düşünceyle G^0 ın çarpım altında kapalı olduğunu gösterebiliriz.

Şimdi G^0 ın bir normal altgrup olduğunu gösterelim. Eğer $g \in G$ ve $h \in G^0$ ise $ghg^{-1} \in G^0$ olduğunu ispatlamalıyız. g aracılığıyla eşlenik süreklidir ve bu yüzden G^0 ı G nin bir bağlantılı bileşenine götürecektir. Eşlenik dönüşümü e' yi sabit bıraktığından bu bileşen G^0 dır.

Bölümün ayrık olduğu açıktır. □

Tanım 1.3.22. *G ve H Lie gruplar olsun. Bu takdirde G den H ya bir Lie grup homomorfizmi, aynı zamanda bir grup homomorfizmi olan bir $F : G \to H$ diferensiyellenebilir dönüşümüdür. Eğer F aynı zamanda bir diffeomorfizm ise F ye bir Lie grup izomorfizmi denir. Bu durumda G ve H nın izomorfik Lie gruplar olduğunu söyleriz [7].*

Örnek 1.3.10. *G bir Lie grup ve $g \in G$ olsun. $C_g : G \to G$ yi $C_g(h) = ghg^{-1}$ şeklinde eşlenik olarak tanımlayalım. Bu takdirde, grup çarpımı diferensiyellenebilir olduğundan C_g diferensiyellenebilirdir. Kolayca gösterilebileceği gibi C_g aynı zamanda bir grup homomorfizmidir. Böylece C_g bir Lie grup homomorfizmidir [7].*

Önerme 1.3.13. *Lie grup homomorfizmlerinin bileşkesi yine bir Lie grup homomorfizmidir [7].*

Bir Lie grup üzerinde iki özel dönüşüm tanımlarız. Bu dönüşümler Lie gruptaki herhangi bir elemanı birim eleman civarına taşımamıza imkan verir. Böylece birim eleman civarında geçerli olan özellikler grubun tamamı için geçerli olur.

Tanım 1.3.23. *G bir Lie grup ve $a \in G$ olsun. Bu takdirde*

$$\begin{aligned} L_a &: G \to G,\ g \mapsto L_a(g) = ag, \\ R_a &: G \to G,\ g \mapsto R_a(g) = ga \end{aligned}$$

dönüşümlerine sırasıyla sol ve sağ dönüşüm denir [45].

Bu dönüşümler G Lie grubunun işlemi ile tanımlandığı için diferensiyellenebilirdirler. Ayrıca

$$L_{g_1} \circ L_{g_2} = L_{g_1 g_2} \quad \text{ve} \quad R_{g_1} \circ R_{g_2} = R_{g_2 g_1}$$

dir. Eğer $e \in G$ birim eleman ise $L_e = Id = R_e$ dir. Dolayısıyla $(L_g)^{-1} = L_{g^{-1}}$ ve $(R_g)^{-1} = R_{g^{-1}}$ dir. Böylece her bir $g \in G$ için L_g ve R_g birer diffeomorfizmdir.

Herhangi bir $g \in G$ elemanı , $L_{g^{-1}}$ (veya $R_{g^{-1}}$) dönüşümü aracılığıyla $e \in G$ birimine taşınabilir.

$g, h \in G$ için $L_g \circ R_h = R_h \circ L_g$ olup sol ve sağ dönüşümleri değişimlidir. Zincir kuralından

$$T_{gh}(L_{g^{-1}}) \circ T_h(L_g) = T_h(L_{g^{-1}} \circ L_g) = Id$$

dir. Dolayısıyla $T_h(L_g)$ tersi alınabilirdir. Yani $T_g(L_{g^{-1}}) : T_g(G) \to T_e(G)$ indirgenmiş dönüşümü bir vektör uzayı izomorfizmidir. R_g sağ dönüşümü için de benzer durum sözkonusudur.

Topolojik ve diferensiyel geometrik olarak bir G Lie grubunun her H altgrubu herhangi bir $h \in H$ noktasında birim ile aynı (birimdeki gibi) görünür. Çünkü h, G

manifoldunun bir diffeomorfizmi olan sol (ya da sağ) dönüşüm aracılığıyla kendisine dönüşür. Dolayısıyla bir H altgrubunun bir Lie altgrup olduğunu gerçeklemek için onun birimin bir komşuluğunda bir altmanifold olduğunu göstermek yeterlidir.

Tanım 1.3.24. *G bir Lie grup ve M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. G nin M üzerine bir diferensiyellenebilir (sol) etkisi aşağıdaki şartları sağlayan bir $\mu : G \times M \to M$ diferensiyellenebilir dönüşümüdür [47]:*

i) *Her $m \in M$ için $\mu(e, m) = m$,*

ii) *Her $m \in M$ ve $g, h \in G$ için $\mu(g, \mu(h, m)) = \mu(gh, m)$ dir, yani*

$$\begin{tikzcd} G \times G \times M \arrow[r, "id_G \times \mu"] \arrow[d, "m \times id_M"'] & G \times M \arrow[d, "\mu"] \\ G \times M \arrow[r, "\mu"'] & M \end{tikzcd}$$

diyagramı değişimlidir.

Bu durumda M manifolduna bir G-manifold denir. (i) ve (ii) şartlarını kısaca $e \cdot m = m$ ve $g \cdot (h \cdot m) = (gh) \cdot m$ şeklinde yazarız.

Sağ etki durumunda bu şartlar sırasıyla $m \cdot e = m$ ve $m \cdot (g \cdot h) = m \cdot (gh)$ şeklindedir.

Örnek 1.3.11. *Her G Lie grubu kendisi üzerine sırasıyla $g \cdot h = L_g(h) = gh$ sol dönüşüm ve $g \cdot h = R_h(g) = gh$ sağ dönüşüm aracılığıyla soldan ve sağdan diferensiyellenebilir olarak etki eder [47].*

Tanım 1.3.25. *Bir G Lie grubunun bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerine bir diferensiyellenebilir etkisi verilsin.*

a) *Eğer her $m, n \in M$ için $g \cdot m = n$ olacak şekilde bir $g \in G$ varsa etkiye **geçişlidir** denir,*

b) *Eğer her $m \in M$ için $g \cdot m = m$ eşitliği ancak $g = e$ ile sağlanıyorsa etkiye **serbesttir** denir [38].*

G nin M üzerine bir diferensiyellenebilir etkisi $\mu : G \times M \to M$ olsun. Bu takdirde her $g \in G$ için bir

$$\tau(g) : M \to M \ , \ m \mapsto \tau(g)(m) = g \cdot m$$

dönüşümü tanımlarız. $\tau(gh) = \tau(g)\tau(h)$ olduğu kolayca görülür. Ayrıca $\tau(g)$ diferensiyellenebilirdir. Buradan her $g \in G$ için $\tau(g)$, $\tau(g^{-1})$ tersi ile M nin bir diffeomorfizmidir [47].

G Lie grubu M diferensiyellenebilir manifoldu üzerine soldan etki etsin. Bu durumda $\Omega = G \cdot m = \{g \cdot m \mid g \in G\}$ kümesine $m \in M$ noktasının G-yörüngesi denir. $\rho(m) : G \to M$, $\rho(m)(g) = g \cdot m$ diferensiyellenebilir dönüşümü, m nin yörünge dönüşümüdür. Ayrıca ρ nun görüntüsü $G \cdot m$ yörüngesidir [47].

G nin M üzerine etkisi geçişli ise M nin kendisi bir G-yörüngedir.

$G_m = \{g \in G \mid g \cdot m = m\} = \rho(m)^{-1}(m)$ kümesi G' de bir altgruptur ve G_m' ye G içinde m nin **izotropi grubu** veya **dengeleyicisi** denir [47].

Lemma 1.3.14. *Her $m \in M$ için $\rho(m) : G \to M$ yörünge dönüşümü sabit ranka sahiptir. Ayrıca $\rho(m)$ bir subimmersiyondur [47].*

Önerme 1.3.14. *Her $m \in M$ için G_m izotropi grubu G nin bir Lie altgrubudur. Ayrıca $T_e(G_m) = \ker\ (T_e(\rho(m)))$ dir [47].*

G ve H iki Lie grup ve $f : G \to H$ bir Lie grup homomorfizmi olsun. Bu takdirde H üzerinde G' nin bir

$$(g, h) \mapsto f(g)h \ , \ g \in G, h \in H$$

diferensiyellenebilir etkisini tanımlayabiliriz. $e \in H$ nın G' deki izotropi grubu $\ker f = \{g \in G \mid f(g) = e\}$ Lie altgrubudur. Böylece aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 1.3.15. *$f : G \to H$ Lie grupların bir homomorfizmi olsun. Bu takdirde*

i) *$f : G \to H$ homomorfizminin çekirdeği $\ker f$, G' nin bir normal Lie altgrubudur,*

ii) *$T_e(\ker f) = \ker (T_e f)$ dir,*

iii) *$f : G \to H$ dönüşümü bir subimmersiyondur [47].*

Lie grupların bir homomorfizminin çekirdeği bir Lie altgrup olduğu halde bir Lie grup homomorfizminin görüntüsü bir Lie altgrup olmak zorunda değildir. Bunu aşağıdaki uyarı ile verelim.

Uyarı 1.3.2. *Eğer $f(G)$ bir altmanifold ise $f(G)$, H' da bir Lie altgruptur. Fakat her zaman $f(G)$ bir altmanifold olmaz [15].*

Tanım 1.3.26. *G, bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerine etki eden bir Lie grup olsun. M üzerinde bir R_G denklik bağıntısını aşağıdaki gibi tanımlayalım.*

$$R_G = \{(g \cdot m, m) \in M \times M \mid g \in G, m \in M\}.$$

Bu denklik bağıntısının denklik sınıfları M üzerindeki G-yörüngelerdir. M/R_G bölümüne M' nin yörünge uzayı denir ve M/G ile gösterilir [47].

Teorem 1.3.6. *G, bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerine diferensiyellenebilir olarak etki eden bir Lie grup olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar denktir:*

i) *R_G bağıntısı regülerdir,*

ii) *R_G, $M \times M$' nin bir kapalı altmanifoldudur [47].*

İspat. Teorem 1.3.3' den $(i) \Rightarrow (ii)$ olduğu açıktır. $(ii) \Rightarrow (i)$ olduğunu ispatlamak için Teorem 1.3.3' den $p_2 : R_G \to M$ nin bir submersiyon olduğunu göstermeliyiz.

$$\theta : G \times M \to M \times M, (g, m) \mapsto (g \cdot m, m)$$

dönüşümünü tanımlayalım. Açıkça θ diferensiyellenebilirdir ve $M \times M$' deki görüntüsü R_G' ye eşittir. Dolayısıyla θ' yı $G \times M$' den R_G üzerine bir diferensiyellenebilir dönüşüm olarak gözönüne alabiliriz. Bu takdirde $p_2 \circ \theta = pr_2 : G \times M \to M$ dir. Böylece bu bileşke bir submersiyondur. θ örten olduğundan p_2 de bir submersiyon olmak zorundadır. □

Bu teoremin bir sonucu olarak, eğer R_G bir kapalı altmanifold ise M/G yörünge uzayı doğal bir diferensiyellenebilir manifold yapısına sahiptir ve $p : M \to M/G$ doğal dönüşümü bir submersiyondur. Bu durumda grup etkisinin regüler olduğunu söyleriz ve M/G' ye M' nin *yörünge manifoldu* deriz [47].

Regüler bir etki için Önerme 1.3.12' den M' deki tüm G-yörüngeler M' nin kapalı altmanifoldlarıdır. Bu durumda Ω, M' de bir yörüngedir. Lemma 1.3.14' den dolayı $G \times \Omega \to \Omega$ indirgenmiş dönüşümü G' nin Ω üzerine bir diferensiyellenebilir etkisidir. Üstelik bu etki geçişlidir. Herhangi $g \in G$ için $\tau(g) : \Omega \to \Omega$ dönüşümü bir diffeomorfizmdir. Bu, her $g \in G$ için $boy_{g \cdot m}\Omega = boy_m\Omega$ olmasını gerektirir. Ayrıca $m \in \Omega$ için $\rho(m) : G \to \Omega$ yörünge dönüşümü Lemma 1.3.14 den dolayı bir örten subimmersiyondur.

Ayrıca $\theta : G \times M \to R_G$ dönüşümü bir örten diferensiyellenebilir dönüşümdür. $m \in M$ seçelim ve Ω, m' nin yörüngesi olsun. $j_m : G \to G \times M$ ile $g \in G$ için $j_m(g) = (g, m)$ diferensiyellenebilir dönüşümünü gösterelim. j_m' nin G' den $G \times M$' nin $G \times \{m\}$ kapalı altmanifoldu üzerine bir diffeomorfizm olduğu açıktır. Benzer şekilde $k_m : \Omega \to M \times M$ ile $n \in \Omega$ için $k_m(n) = (n, m)$ diferensiyellenebilir dönüşümünü gösterelim. Açıkça k_m, Ω' dan $\Omega \times \{m\}$ kapalı altmanifoldu üzerine bir diffeomorfizmdir. $\Omega \times \{m\} = R_G \cap (M \times \{m\})$ olduğundan onu R_G' nin bir kapalı altmanifoldu olarak düşünebiliriz. Bu durumda aşağıdaki değişimli diyagrama sahip oluruz.

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho(m)"] \arrow[d, "j_m"'] & \Omega \arrow[d, "k_m"] \\ G \times M \arrow[r, "\theta"'] & M \times M \end{tikzcd}$$

Eğer $\theta : G \times M \to R_G$ dönüşümü bir diffeomorfizm ise G Lie grubunun M üzerine bir regüler diferensiyellenebilir etkisine *serbesttir* deriz.

Yukarıdaki diyagram, eğer G' nin etkisi serbest ise tüm yörünge dönüşümlerinin G' den yörüngeler üzerine diffeomorfizm olmasını gerektirir. Ayrıca $m \in M$ için G_m izotropi grupları aşikardır [47].

Şimdi Lie bölüm grupları için aşağıdaki bilgileri verelim.

G bir Lie grup ve H, G' nin bir Lie altgrubu olsun. Bu takdirde

$$\begin{aligned} \mu_l &: H \times G \to G \\ (h, g) &\mapsto \mu_l(h, g) = hg \end{aligned}$$

şeklinde H' nın G üzerine bir diferensiyellenebilir sol etkisi tanımlanır. Karşılık gelen $\theta_l : H \times G \to G \times G$ dönüşümü $\theta_l(h, g) = (hg, g)$ ile verilir. Bu dönüşüm

$$\begin{aligned} \alpha_l \quad &: \quad G \times G \to G \times G \\ (h, g) \quad &\mapsto \quad \alpha_l(h, g) = (hg, g) \end{aligned}$$

dönüşümünün $H \times G$' ye kısıtlamasıdır ve açıkça diferensiyellenebilirdir. Ayrıca α_l' nin tersi $\beta_l : G \times G \to G \times G$, $\beta_l(h, g) = (hg^{-1}, g)$ dönüşümüdür. Dolayısıyla α_l bir diffeomorfizmdir. Bu, α_l' nin $H \times G$' ye kısıtlaması olan θ_l' nin de R_G görüntüsü üzerine bir diffeomorfizm olmasını gerektirir. Böylece R_G, $G \times G$' nin bir kapalı altmanifoldudur ve H' nın G üzerine bu etkisi regülerdir ve serbesttir. Bölüm manifoldu $H \backslash G$ ile gösterilir ve H' ya göre G' nin *sağ yan küme manifoldu* denir [47].

Benzer şekilde $\mu_r : H \times G \to G$, $(h, g) \mapsto gh^{-1}$ dönüşümü H' nın G üzerine bir sol diferensiyellenebilir etkisini tanımlar. Karşılık gelen $\theta_r : H \times G \to G \times G$ dönüşümü $\theta_r(h, g) = (gh^{-1}, g)$ ile verilir. Bu dönüşüm

$$\begin{aligned} \alpha_r \quad &: \quad G \times G \to G \times G \\ (h, g) \quad &\mapsto \quad (gh^{-1}, g) \end{aligned}$$

dönüşümünün $H \times G$' ye kısıtlamasıdır. Bu dönüşüm açıkça diferensiyellenebilirdir ve tersi $\beta_r : G \times G \to G \times G$, $(h, g) \mapsto (gh, g)$ dönüşümüdür. Dolayısıyla α_r bir diffeomorfizmdir. Bu, α_r' nin $H \times G$' ye kısıtlaması olan θ_r' nin R_G görüntüsü üzerine bir diffeomorfizm olmasını gerektirir. Böylece R_G, $G \times G$' nin bir kapalı altmanifoldu olup H' nın G üzerine bu etkisi regüler ve serbesttir. Bölüm manifoldu G/H ile gösterilir ve H' ya göre G' nin *sol yan küme manifoldu* denir [47].

G, sağ dönüşüm aracılığıyla kendisi üzerine diferensiyellenebilir olarak etki ettiğinden bir

$$G \times G \xrightarrow{m} G \xrightarrow{p} H \backslash G$$

diferensiyellenebilir dönüşümünü oluşturabiliriz. Bu dönüşüm sağ yan kümeler üzerinde sabittir. Yukarıdaki düşünceden dolayı bu dönüşüm bir $\mu_{H,r} : G \times H \backslash G \to H \backslash G$ diferensiyellenebilir dönüşümü indirger. Bu dönüşüm G' nin $H \backslash G$ üzerine bir diferensiyellenebilir etkisidir.

Benzer şekilde G, G/H sol yan küme manifoldu üzerine diferensiyellenebilir olarak etki eder.

Bu söylediklerimizi bir teorem ile verelim.

Teorem 1.3.7. *H, bir G Lie grubunun bir Lie altgrubu olsun. G' de H' nın sol yan kümelerinin G/H kümesi, $p : G \to G/H$, $g \mapsto gH$ kanonik dönüşümü bir bölüm dönüşümü olacak şekilde bir tek diferensiyellenebilir yapıya sahiptir. Ayrıca G/H üzerinde G grubunun (sol dönüşümler aracılığıyla) kanonik etkisi diferensiyellenebilirdir [15].*

Önerme 1.3.16. *Eğer H bir G Lie grubunun kapalı bağlantılı Lie altgrubu ise, o zaman G/H bölüm kümesi, G' nin bir bölüm manifoldunun yapısına sahiptir [38].*

Eğer N, G' nin bir normal Lie altgrubu ise bölümün tekliğinden diferensiyellenebilir manifoldlar olarak $G/N = N\backslash G$ olduğu gelir. Ayrıca $G \times G \to G/N$, $(g,h) \mapsto p(gh^{-1}) = p(g)p(h)^{-1}$ dönüşümü $G/N \times G/N$ uzayını tanımlamamıza imkan verir. Bu, G/N' nin bir Lie grup olduğunu ispatlar.

Tanım 1.3.27. *N, bir G Lie grubunun bir normal Lie altgrubu olsun. Bu taktirde, G/N' ye N normal Lie altgrubuna göre G' nin Lie bölüm grubu denir [15].*

Eğer G grubu bir M diferensiyellenebilir manifoldu üzerine, N' nin etkisi aşikar olacak şekilde, etki ederse, o zaman G/N bölüm grubunun M üzerine indirgenmiş etkisi diferensiyellenebilirdir.

Şimdi N normal Lie altgrubu yerine izotropi gruplarının ele alınması durumunda bölüm grubu yapısını inceleyelim.

G, bir M manifoldu üzerine diferensiyellenebilir olarak etki eden bir Lie grup ve $m \in M$ olsun. G' de m' nin G_m izotropi grubunu alalım. Bu takdirde $\rho(m) : G \to M$ yörünge dönüşümü sol G_m-yan kümeler üzerinde sabittir. Dolayısıyla $\rho(m)$, G/G_m sol yan küme manifoldunu tanımlamamıza imkan verir, yani aşağıdaki değişimli diyagrama sahibiz:

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "\rho(m)"] \arrow[d, "p"'] & M \\ G/G_m \arrow[ur, "\delta(m)"'] & \end{tikzcd}$$

$\rho(m)$, Lemma 1.3.14' den dolayı sabit ranka sahip olduğundan

$$\begin{aligned} rank_g\rho(m) &= rank_e\rho(m) = boy\ im\,(T_e(\rho(m))) = boy\ T_e(G) - boy\ \ker T_e(\rho(m)) \\ &= boy\ T_e(G) - boy\ T_e(G_m) = boy\ G - boy\ G_m = boy\ G/G_m \end{aligned}$$

dir. Diğer taraftan, p bir submersiyon olduğundan

$$rank_{p(g)}\delta(m) = rank_g\rho(m) = boyG/G_m$$

dir. p örten olduğundan bu, $\delta(m)$' nin bir subimmersiyon olmasını gerektirir. Diğer taraftan $\delta(m)$ bire-birdir. Böylece $\delta(m)$ bir immersiyon olmak zorundadır.

Özel olarak, eğer $f : G \to H$ Lie grupların bir homomorfizmi ise Lie gruplar ve onların homomorfizmlerinden oluşan

$$\begin{tikzcd} G \arrow[r, "f"] \arrow[d, "p"'] & H \\ G/kerf \arrow[ur, "\phi"'] & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramını oluşturabiliriz. ϕ morfizmi bir immersiyondur. Böylece her Lie grup homomorfizmi biri örten submersiyon ve diğeri bire-bir immersiyon olan iki Lie grup homomorfizminin bir bileşkesi olarak temsil edilebilir.

Etkiler ile kesitler arasında yakın bir ilişki vardır. Şimdi bu ilişkiyi verelim.

G, bir M manifoldu üzerine diferensiyellenebilir olarak etki eden bir Lie grup olsun ve etkinin regüler olduğunu kabul edelim. Böylece M/G bölüm manifoldu mevcuttur ve $p : M \to M/G$ doğal dönüşümü bir submersiyondur. U, M/G' de bir açık küme olsun. $p \circ s = id_U$ olacak şekildeki bir $s : U \to M$ diferensiyellenebilir dönüşümüne bir *lokal kesit* denir. p bir submersiyon olduğundan her bir $u \in M/G$ noktası, bir U açık komşuluğuna ve U üzerinde bir s lokal kesitine sahiptir.

$U \subset M/G$ bir açık küme ve $s : U \to M$ bir lokal kesit olsun. Bir $\psi = \mu\circ(id_G \times s) : G\times U \to M$ diferensiyellenebilir dönüşümünü tanımlayalım. İkinci koordinat üzerine izdüşümü $p_2 : G \times U \to U$ ile gösterirsek her $g \in G$ ve U için

$$p(\psi(g, u)) = p(\mu(g, s(u))) = p(g \cdot s(u)) = p(s(u)) = u = p_2(g, u)$$

dur, yani

$$\begin{tikzcd}
G \times U \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "p_2"'] & M \arrow[d, "p"] \\
U \arrow[r] & M/G
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişimlidir.

Ayrıca M' nin $p^{-1}(U)$ açık altkümesi doygundur ve $s(U) \subset p^{-1}(U)$ dur. $m \in p^{-1}(U)$ alalım. Bu takdirde $p(m)$, m' nin Ω yörüngesine karşılık gelir. Üstelik $p(s(p(m))) = p(m)$ ve $s(p(m))$ de Ω içindedir. Bu bir $g \in G$ için $m = g \cdot s(p(m)) = \psi(g, p(m))$ olmasını gerektirir ve ψ dönüşümü $G \times U$' dan $p^{-1}(U)$ üzerine bir örten diferensiyellenebilir dönüşümdür.

$u \in U$ ve $g \in G$ için $m = s(u)$ olsun. Ω ile m' nin G-yörüngesini gösterelim. Bu takdirde $T_m(p) \circ T_u(s) = 1_{T_u(M/G)}$ dir. Böylece $T_u(s) : T_u(M/G) \to T_m(M)$ bir bire-bir lineer dönüşümdür, $T_m(p)$ bir örten lineer dönüşümdür, $\ker T_m(p) \cap im\ T_u(s) = \{0\}$ dır ve $T_m(M) = \ker T_m(p) \oplus im\ T_u(s)$ dir. Önerme 1.3.14' den $\ker T_m(p) = T_m(\Omega)$ dır. Dolayısıyla $T_m(M) = T_m(\Omega) \oplus im\ T_u(s)$ dir.

Şimdi $T_{(g,u)}(\psi) : T_{(g,u)}(G \times U) \to T_{g \cdot m}(M)$ diferensiyelini hesaplayalım. $i_u : G \to G \times \{u\}$ ve $i_g : U \to \{g\} \times U$ olsun. İlk olarak her $h \in G$ için

$$(\psi \circ i_u)(h) = h \cdot m = \tau(g)(g^{-1} \cdot h \cdot m) = (\tau(g) \circ \rho(m))(g^{-1}h) = (\tau(g) \circ \rho(m) \circ L_{g^{-1}})(h)$$

dır. Dolayısıyla her iki tarafın diferensiyelini alırsak

$$T_g(\psi \circ i_u) = T_m(\tau(g)) \circ T_e(\rho(m)) \circ T_g(L_{g^{-1}})$$

olur. İkinci olarak

$$(\psi \circ i_g)(v) = g \cdot s(v) = (\tau(g) \circ s)(v)$$

olup her iki tarafın diferensiyelini alırsak

$$T_u(\psi \circ i_g) = T_m(\tau(g)) \circ T_u(s)$$

olur. $T_{(g,u)}(G \times U) = T_g(G) \oplus T_u(M/G)$ olduğundan $X \in T_g(G)$ ve $Y \in T_u(M/G)$ için

$$\begin{aligned}
T_{(g,u)}(\psi)(X, Y) &= T_m(\tau(g))(T_e(\rho(m))(T_g(L_{g^{-1}}))(X) + T_m(\tau(g))(T_u(s))(Y) \\
&= T_m(\tau(g))(T_e(\rho(m))(T_g(L_{g^{-1}}))(X) + T_u(s)(Y))
\end{aligned}$$

olur. $\tau(g)$ bir diffeomorfizm olduğundan $T_m(\tau(g)) : T_m(M) \to T_{g\cdot m}(M)$ bir lineer izomorfizmdir. Ayrıca L_g bir diffeomorfizm olduğundan $T_g(L_{g^{-1}}) : T_g(G) \to T_e(G)$ bir lineer izomorfizmdir. Buradan $T_{(g,u)}(\psi)$ örtendir gerek ve yeter şart

$$im\ T_e(\rho(m)) + im\ T_u(s) = T_m(M)$$

dir. Açıkça $im\ T_e(\rho(m)) \subset T_m(\Omega)$ ve daha önce söylediğimiz gibi $T_m(\Omega) \oplus im\ T_u(s) = T_m(M)$ dir. Buradan $T_{(g,u)}(\psi)$ örtendir gerek ve yeter şart $T_e(\rho(m)) : T_e(G) \to T_m(\Omega)$ örtendir.

Böylece ψ, $G \times U$' dan $p^{-1}(U)$ üzerine bir örten submersiyondur gerek ve yeter şart tüm $\rho(m)$ yörünge dönüşümleri G' den $m \in s(U)$' nun yörüngeleri üzerine submersiyonlardır. $\rho(h \cdot m) = \rho(m) \circ R_{h^{-1}}$ ve $R_{h^{-1}}$ bir diffeomorfizm olduğundan $\rho(h \cdot m)$, $h \in G$, ler aynı ranklı subimmersiyonlardır. Böylece yukarıdaki şart tüm $\rho(m)$ dönüşümlerinin G' den $m \in p^{-1}(U)$' nun yörüngeleri üzerine submersiyon olmalarına denktir. $\delta(m) : G/G_m \to M$ dönüşümü bir bire-bir immersiyon olduğundan bu, tüm $\delta(m)$ dönüşümlerinin G/G_m' den $m \in p^{-1}(U)$' nun yörüngeleri üzerine diffeomorfizm olmalarına denktir.

M bir manifold olsun. G' nin $G \times M$ üzerine

$$\mu_M(g,(h,m)) = (gh,m)\ ,\ g,h \in G,\ m \in M$$

etkisini ele alalım. Bu etki açıkça diferensiyellenebilirdir ve

$$R_G = \{(g,m,h,m) \in G \times M \times G \times M\}$$

dir. Böylece R_G, $G \times M \times G \times M$' nin bir kapalı altmanifoldudur ve etki regülerdir. Ayrıca karşılık gelen $\theta_M : G \times G \times M \to G \times M \times G \times M$ dönüşümü $\theta_M(g,h,m) = (gh,m,h,m)$ ile verilir. Dolayısıyla θ_M, $G \times G \times M$ den R_G üzerine bir diffeomorfizmdir ve G' nin $G \times M$ üzerine etkisi serbesttir [47].

Şimdi bu söylediklerimizi bir teorem ile ifade edelim.

Teorem 1.3.8. *G, bir M manifoldu üzerine diferensiyellenebilir olarak etki eden bir Lie grup olsun. Etkinin regüler olduğunu kabul edelim. Bu takdirde aşağıdaki şartlar denktir:*

i) *G' nin etkisi serbesttir,*

ii) *Tüm $\rho(m) : G \to \Omega$, $m \in M$, yörünge dönüşümleri birer diffeomorfizmdir,*

iii) *Her $u \in M/G$ noktası için, M/G' de u' nun bir U açık komşuluğu ve bir $s : U \to M$ lokal kesiti vardır öyle ki $\psi : G \times U \to M$ dönüşümü $G \times U$' dan M' nin $p^{-1}(U)$ açık altmanifoldu üzerine bir diffeomorfizmdir [47].*

1.3.4 Örtü Manifoldları

Tanım 1.3.28. ***(Diferensiyellenebilir Örtü)*** *Eğer $\widetilde{M}$ ve M bağlantılı diferensiyellenebilir manifoldlar ise bir $p : \widetilde{M} \to M$ diferensiyellenebilir örtü dönüşümü aşağıdaki özellik ile bir diferensiyellenebilir örten dönüşümdür:*

her $p \in M$ noktası bir U bağlantılı komşuluğuna sahiptir öyle ki
$p^{-1}(U)$' nun her bir bileşeni p aracılığıyla diffeomorfik olarak U
üzerine dönüşür.

Bu durumda U' ya kanonik komşuluk, M manifolduna örtünün tabanı ve $\widetilde{M}$ ya da M nin bir örtü manifoldu denir [7].

Özel olarak bir diferensiyellenebilir örtü dönüşümü bir topolojik örtü dönüşümüdür. Bununla birlikte şunu belirtmeliyiz ki bir diferensiyellenebilir örtü dönüşümü diferensiyellenebilir olması nedeniyle bir topolojik örtü dönüşümünden daha kapsamlıdır. Diferensiyellenebilir örtü dönüşümünün tanımı ek olarak p' nin, kanonik bir komşuluğun ters görüntüsünün her bir bileşenine kısıtlamasının bir diffeomorfizm olmasını gerektirir.

Diferensiyellenebilir örtülerin özelliklerine dair şu önermeyi verelim.

Önerme 1.3.17. i) *Herhangi bir diferensiyellenebilir örtü dönüşümü bir lokal diffeomorfizmdir ve bir açık dönüşümdür.*
ii) *Bir 1-1 diferensiyellenebilir örtü dönüşümü bir diffeomorfizmdir.*
iii) *Bir topolojik örtü dönüşümü bir diferensiyellenebilir örtü dönüşümüdür gerek ve yeter şart o bir lokal diffeomorfizmdir [7].*

$p_1 : \widetilde{M_1} \to M_1$ ve $p_2 : \widetilde{M_2} \to M_2$ diferensiyellenebilir örtü dönüşümleri ise $p_1 \times p_2 : \widetilde{M_1} \times \widetilde{M_2} \to M_1 \times M_2$ bir diferensiyellenebilir örtü dönüşümüdür [7].

$p : \widetilde{M} \to M$ bir diferensiyellenebilir örtü dönüşümü olsun. p aynı zamanda bir topolojik örtü dönüşümü olduğundan bir $U \subset M$ altkümesinin kanonik olmasının ne demek olduğu hakkında bir soru aklımıza gelebilir. p , $p^{-1}(U)$' nun bileşenlerini U üzerine diffeomorfik olarak mı, yoksa sadece homeomorfik olarak mı dönüştürür? Aslında iki kavram denktir. Yani eğer $U \subset M$ topolojik anlamda kanonik ise, o zaman p, $p^{-1}(U)$' nun her bir bileşenini diffeomorfik olarak U üzerine dönüştürür.

Diferensiyellenebilir örtü dönüşümlerinin pek çok önemli özelliği, diferensiyellenebilir lokal kesitlerin varlığından gelir. Bu yüzden önce topolojik anlamda kesitlerden bahsedelim. Daha sonra diferensiyellenebilir örtülerin lokal kesitleri ile ilgili bir lemma vereceğiz.

Eğer $p : \widetilde{M} \to M$ herhangi bir sürekli dönüşüm ise, p' nin bir **kesiti**, $p \circ \sigma = Id_M$ olacak şekilde sürekli bir $\sigma : M \to \widetilde{M}$ dönüşümüdür.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[d, "p"'] \\ M \arrow[u, bend right, "\sigma"'] \end{tikzcd}$$

Bir **lokal kesit**, $U \subset M$ açık kümesi üzerinde tanımlı ve $p \circ \sigma = Id_U$ bağıntısını sağlayan sürekli bir $\sigma : U \to \widetilde{M}$dönüşümüdür [7].

Bu tanımlarda M ve $\widetilde{M}$' yı diferensiyellenebilir manifold aldığımızda ve süreklilik ile diferensiyellenebilirliği yer değiştirdiğimizde diferensiyellenebilir kesit ve lokal diferensiyellenebilir kesit tanımları kendiliğinden ortaya çıkar.

Lemma 1.3.15. ***(Diferensiyellenebilir Örtülerin Lokal Kesitleri)*** *$p : \widetilde{M} \to M$ bir diferensiyellenebilir örtü dönüşümü olsun. $\widetilde{M}$ nın her noktası p' nin bir diferensiyellenebilir lokal kesitinin görüntüsü içindedir. Daha net olarak, herhangi bir $\widetilde{m} \in \widetilde{M}$ için $m = p(\widetilde{m})$' nın bir U komşuluğu ve $\sigma(m) = \widetilde{m}$ olacak şekilde bir $\sigma : U \to \widetilde{M}$ diferensiyellenebilir lokal kesiti vardır [7].*

$$\begin{tikzcd} & \widetilde{M} \arrow[d, "p"] \\ U \arrow[r, "i"'] \arrow[ur, dotted, "\sigma"] & M \end{tikzcd}$$

Lokal kesitlerin önemli bir sonucu aşağıdaki önermedir. Bu önerme, bir örtü tabanından çıkan dönüşümlerin diferensiyellenebilir olup olmadıklarına karar vermek için çok basit bir kriter verir.

Önerme 1.3.18. *$p : \widetilde{M} \to M$ bir diferensiyellenebilir örtü dönüşümü ve N herhangi bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bir $f : M \to N$ dönüşümü diferensiyellenebilirdir $\Leftrightarrow$ $f \circ p : \widetilde{M} \to N$ diferensiyellenebilirdir [7].*

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[d, "p"'] \arrow[dr, "f\circ p"] & \\ M \arrow[r, "f"'] & N \end{tikzcd}$$

Aşağıdaki önerme, bağlantılı bir diferensiyellenebilir manifoldun her örtü uzayının bir diferensiyellenebilir manifold olduğunu gösterir.

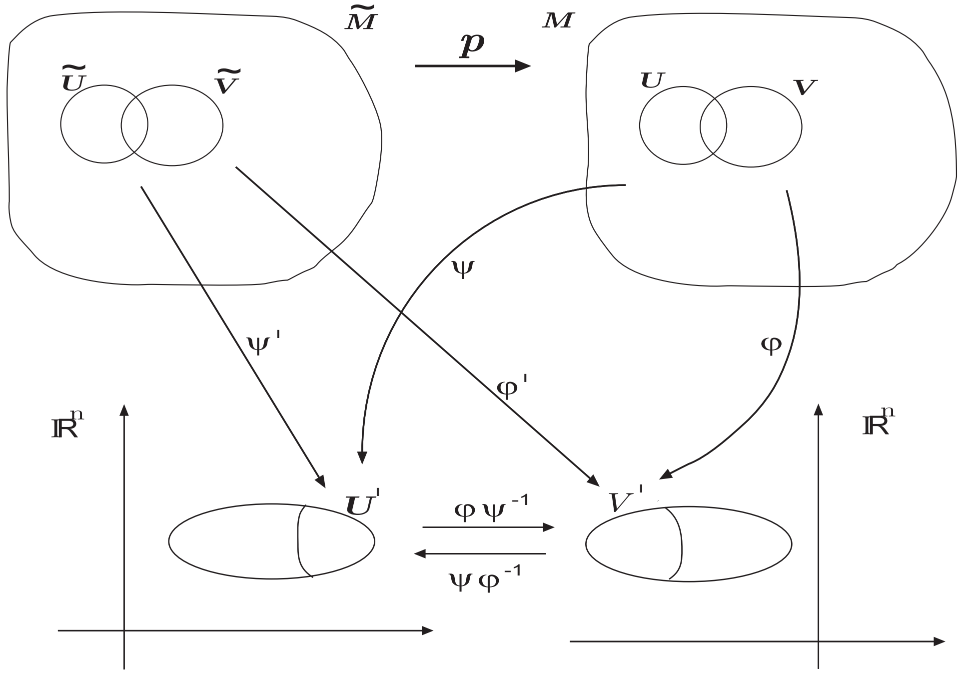
Önerme 1.3.19. *Eğer M bağlantılı bir diferensiyellenebilir manifold ve $p : \widetilde{M} \to M$ bir topolojik örtü dönüşümü ise, $\widetilde{M}$ bir topolojik manifolddur ve p bir diferensiyellenebilir örtü dönüşümü olacak şekilde bir tek diferensiyellenebilir yapıya sahiptir [7].*

Şimdi bir M bağlantılı manifoldunun diferensiyellenebilir yapısı ile örtü manifoldunun diferensiyellenebilir yapısı arasındaki ilişkiyi kısaca açıklayalım.

$p : \widetilde{M} \to M$ diferensiyellenebilir manifoldların örtü dönüşümünü gözönüne alalım. O halde p bir lokal diffeomorfizmdir. Şimdi $\widetilde{M}$ manifoldunun diferensiyellenebilir yapısı hakkında bilgi verelim. $\mathcal{A}$, M bağlantılı manifoldunu diferensiyellenebilir yapan tüm (U, φ) haritalarının yükseltilebilir (kanonik) harita tanım kümelerinden meydana gelen atlas olsun. U tanım kümeleri açıktır ve M bağlantılı olduğundan yol-bağlantılıdır. $\mathcal{A}$' dan yararlanarak $\widetilde{M}$ manifoldu üzerine diferensiyellenebilir yapıyı aşağıdaki şekilde koyabiliriz.

$$\mathcal{A} = \{U \subset M |\ \varphi : U \to U' \subseteq \mathbb{R}^n \ \ni \ U \subset M \ kanonik\}$$

olsun.



Şekil 1.2. Bir örtü manifoldunun diferensiyellenebilir yapısı

Şekil 1.2'yi gözönüne alalım. M diferensiyellenebilir olduğundan φ ve ψ dönüşümleri diferensiyellenebilir olup $\phi\psi^{-1}$ ve $\psi\varphi^{-1}$ dönüşümleri birer diffeomorfizmdir. $\widetilde{M}$, M' nin örtü manifoldu oldğundan M' deki U, V harita tanım kümelerine karşılık $\widetilde{M}$' da $\widetilde{U}$ ve $\widetilde{V}$ harita tanım kümeleri karşılık gelecektir. $\varphi^{'}$ ve $\psi^{'}$ dönüşümlerinin diferensiyellenebilir olduğunu gösterelim. $\varphi^{'}$ açıkça p örtü dönüşümü ve φ harita dönüşümün bileşkesidir. p bir lokal diffeomorfizm ve φ diferensiyellenebilir olduğundan $\varphi^{'}$ diferensiyellenebilirdir. Benzer şekilde $\psi^{'} = \psi \circ p$ olup $\psi^{'}$ de diferensiyellenebilir dönüşümdür. Ayrıca

$$\varphi^{'} \circ (\psi^{'})^{-1} = (\varphi \circ p) \circ (\psi \circ p)^{-1} = \varphi \circ p \circ p^{-1} \circ \psi^{-1} = \varphi \circ \psi^{-1}$$

ve

$$\psi^{'} \circ (\varphi^{'})^{-1} = (\psi \circ p) \circ (\varphi \circ p)^{-1} = \psi \circ p \circ p^{-1} \circ \varphi^{-1} = \psi \circ \varphi^{-1}$$

olup $\varphi \circ \psi^{-1}$ ve $\psi \circ \varphi^{-1}$ dönüşümleri diffeomorfizm olduğundan $\varphi^{'} \circ (\psi^{'})^{-1}$ ve $\psi^{'} \circ (\varphi^{'})^{-1}$ de birer diffeomorfizmdir.

Böylece $\widetilde{M}$ üzerindeki diferensiyellenebilir yapı , $\mathcal{A}$ ailesinden elde edilen ve $\mathcal{A}$' nın elemanlarının yükseltmeleri ile meydana gelen

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \{\widetilde{U} \subset \widetilde{M} : \varphi^{'} : \widetilde{U} \to U^{'} \subseteq \mathbb{R}^n \ \ni \ p(\widetilde{U}) = U \ ve \ U \subset M \ kanonik\}$$

ailesi ile belirlenir. $\mathcal{A}$' ya kısaca *yükseltilebilir atlas* ve $\widetilde{\mathcal{A}}$' ya da *yükseltilmiş atlas* diyeceğiz.

Verilen bir örten dönüşümün, bir lokal diffeomorfizm olduğu bilinse bile, bir örtü dönüşümü olup olmadığının belirlenmesi için çok fazla temel kriter yoktur.

Şimdi **düzgünlük** denilen böyle bir kriter verelim.

Tanım 1.3.29. *Eğer M ve N topolojik uzaylar ve $f : M \to N$ (sürekli veya değil) bir dönüşüm olsun. Eğer her $K \subset N$ kompakt kümesi için $f^{-1}(K)$ ters görüntüsü kompakt ise f' ye* ***düzgündür*** *denir [7].*

Aşağıdaki üç lemma, bir dönüşümün düzgün olması için kullanışlı şartlar verir:

Lemma 1.3.16. *M bir kompakt uzay ve N bir Hausdorff uzay olsun. Bu taktirde, her $f : M \to N$ sürekli dönüşümü düzgündür [7].*

Tanım 1.3.30. *Bir $A \subset M$ altkümesine, bir $f : M \to N$ dönüşümüne göre* ***doygundur*** *denir, eğer $A = f^{-1}(f(A))$ ise [7].*

Lemma 1.3.17. *$f : M \to N$ topolojik uzaylar arasında bir düzgün dönüşüm ve $A \subset M$, f' ye göre doygun olan bir altküme olsun. Bu takdirde, $f|_A : A \to f(A)$ düzgündür [7].*

Lemma 1.3.18. *$f : M \to N$ Hausdorff uzaylar arasında bir sürekli dönüşüm olsun. Eğer f için bir sürekli sol ters (yani bir $g : N \to M$ sürekli dönüşümü öyle ki $g \circ f = Id_M$) dönüşümü varsa, f düzgündür [7].*

Verilen bir sürekli dönüşümün bir kapalı dönüşüm olduğunu gösterebilmek büyük kolaylıklar sağlar. Örneğin aynı zamanda örten, bire-bir ya da bire-bir örten olan bir kapalı sürekli fonksiyon otomatik olarak sırasıyla bir **bölüm dönüşümü, bir topolojik embedding** ya da **bir homeomorfizmdir** [7].

Bu şartın otomatik olarak sağlandığı bir durum, tanım kümesinin kompakt olması halidir:

Kapalı Dönüşüm Lemması, bir kompakt topolojik uzaydan bir Hausdorff uzaya herhangi bir sürekli dönüşümün kapalı olduğunu iddia eder [7].

Aşağıdaki önerme, kapalı dönüşüm lemmasının güçlü bir genelleştirmesidir:

Önerme 1.3.20. ***(Düzgün Sürekli Dönüşümler Kapalıdır.)***

$f : M \to N$ topolojik manifoldlar arasında bir düzgün sürekli dönüşüm olsun. Bu taktirde f kapalıdır [7].

Artık bir düzgün dönüşümün diferensiyellenebilir örtülerle olan ilişkisini bir lemma ile verebiliriz.

Önerme 1.3.21. *$\widetilde{M}$ ve M bağlantılı diferensiyellenebilir manifoldlar ve $p : \widetilde{M} \to M$ bir düzgün lokal diffeomorfizm olsun. Bu takdirde, p bir diferensiyellenebilir örtü dönüşümüdür [7].*

Şimdi manifoldlarda eğrilerin ve homotopilerin yükseltilmesine dair iki özellik verelim.

Eğri Yükseltme Özelliği

$p : M \to N$ bir örtü, $n_0 \in N$, $m_0 \in M$ ve $p(m_0) = n_0$ olsun.
$c : [0,1] \to N$, $n_0 = c(0)$ da başlayan bir C^k-eğri, $k \geq 0$ olsun. Bu taktirde bir tek $d : [0,1] \to M$, C^k-eğrisi vardır öyle ki $d(0) = m_0$ ve $p \circ d = c$ dir [42].

Homotopi Yükseltme Özelliği

Eğri yükseltme özelliğindeki hipotezler ve notasyonlar ile, $H : [0,1] \times [0,1] \to N$ bir C^k -dönüşüm, $k \geq 0$ olsun ve $H(0,0) = n_0$ olduğunu varsayalım. Bu taktirde, bir tek $K : [0,1] \times [0,1] \to M$ C^k -dönüşümü vardır öyle ki

$$K(0,0) = m_0 \text{ ve } p \circ K = H$$

dır [42].

Homotopi yükseltme özelliği kısaca N' deki iki eğri, uç noktaları sabit tutan bir homotopi aracılığıyla homotopik ise, bu taktirde yükseltilmiş eğrilerin de uç noktaları sabit tutan bir homotopi aracılığıyla homotopik olduğunu söyler.

Evrensel örtü manifoldları için temel teşkil edecek olan bir önermeyi verelim.

Önerme 1.3.22. *M_i, $i = 1, 2$, bağlantılı olmak üzere $p_i : M_i \to N$, N' nin örtüleri olsun. Bu taktirde, eğer M_1 basit bağlantılı ise M_1, M_2 ' nin de bir örtüsüdür [42].*

M_1, M_2 basit bağlantılı diferensiyellenebilir manifoldlar olsun. Eğer $p_i : M_i \to N$, $i = 1, 2$, örtü iseler M_1 ve M_2, C^k-diffeomorfiktirler. Bu, N' nin basit bağlantılı bir örtüsüne, N' nin **evrensel örtü manifoldu** denmesinin sebebidir [42].

Her manifold lokal yarı-basit bağlantılılığa sahip olduğundan E. Spanier' dan [23] evrensel örtü manifoldlarının mevcut olduğu gelir.

Yani herhangi bir M bağlantılı diferensiyellenebilir manifoldu için bir basit bağlantılı $\widetilde{M}$ diferensiyellenebilir manifoldu ve bir $p : \widetilde{M} \to M$ (diferensiyellenebilir) örtüsünün varolduğunu biliyoruz. Böyle bir örtüye **evrenseldir** denir ve bu örtü aşağıdaki funktoryal özelliğe sahiptir:

(F) $f : M \to N$ bağlantılı diferensiyellenebilir manifoldlar arasında bir diferensiyellenebilir dönüşüm, $p : \widetilde{M} \to M$ ve $q : \widetilde{N} \to N$ onların evrensel örtüleri olsun. Bu taktirde; $f(p(\widetilde{m}_0)) = p(\widetilde{n}_0)$ şartını sağlayan herhangi $\widetilde{m}_0 \in \widetilde{M}$ ve $\widetilde{n}_0 \in \widetilde{N}$ noktaları için aşağıdaki diyagramı değişimli yapacak ve $\widetilde{f}(\widetilde{m}_0) = \widetilde{n}_0$ olacak şekilde bir tek $\widetilde{f} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ diferensiyellenebilir dönüşümü vardır

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[r, "\widetilde{f}"] \arrow[d, "p"'] & \widetilde{N} \arrow[d, "q"] \\ M \arrow[r, "f"] & N \end{tikzcd}$$

Bu durumda $\widetilde{f}$ ' nın f'yi örttüğünü söyleriz [15].

Bu söylenenleri aşağıdaki gibi bir önerme ile verelim:

Önerme 1.3.23. *$f : M \to N$, $f(m) = n$ ile bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $p_M : \widetilde{M} \to M$ ve $p_N : \widetilde{N} \to N$ sırasıyla M ve N' nin evrensel örtü manifoldları olsun. $p_M(\widetilde{m}) = m$ ve $p_N(\widetilde{n}) = n$ olacak şekilde $\widetilde{m} \in \widetilde{M}$ ve $\widetilde{n} \in \widetilde{N}$ alalım. Bu taktirde f' nin $\widetilde{M}$' ya bir tek $\widetilde{f} : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ yükseltmesi vardır öyle ki*

$$\widetilde{f}(\widetilde{m}) = \widetilde{n} \qquad ve \qquad f \circ p_M = p_N \circ \widetilde{f}$$

dır [43].

Aşağıdaki önerme evrensel örtü manifoldunun tek olduğunu söyler.

Önerme 1.3.24. *Herhangi M bağlantılı diferensiyellenebilir manifoldu, $p : \widetilde{M} \to M$ evrensel örtü manifoldlarına sahiptir. Ayrıca, aynı M tabanlı herhangi iki evrensel örtü manifoldu diffeomorfiktir [43].*

Şimdi evrensel örtü manifoldunun inşası üzerine formal bir algoritma verelim.

Evrensel Örtü Manifoldunun İnşası

N bağlantılı (buradan yol bağlantılı) bir manifold olsun ve $n_0 \in N$ seçelim. M, uç noktaları sabit tutan $c : [0,1] \to N$, $c(0) = n_0$ eğrilerinin homotopi sınıflarının kümesini göstersin. $[c]$, c eğrisinin homotopi sınıfı olmak üzere $p : M \to N$' yi $p([c]) = c(1)$ ile tanımlayalım.

i. p örten mi? N, yol bağlantılı olduğundan p örtendir.

ii. p sürekli mi? N içinde bir U açık kümesi için

$$U_{[c]} = \{[c * d] : d, \, U \text{ içinde } c(1)\text{' de başlayan bir eğri}\}$$

yi tanımlayalım. Bu taktirde,

$$\mathcal{B} = \{\emptyset, U_{[c]} | c, \; N \text{ içinde } n_0\text{' da başlayan bir eğri ve } U, \; N\text{' de açık}\}$$

M üzerinde topoloji için bir tabandır. Ayrıca eğer N Hausdorff ise M de Hausdorff' tur ve p süreklidir.

iii. M yol bağlantılı mı? M' nin yol bağlantılı olduğu aşağıdakiler kullanılarak gösterilir.

$\varphi(0) = [c]$ ve $\varphi(1) = [d]$ olacak şekilde bir $\varphi : [0,1] \to M$ sürekli eğrisi

$$\begin{aligned} s &\in [0, 1/2] \text{ için } \varphi(s) = [c_s] \\ s &\in [1/2, 1] \text{ için } \varphi(s) = [d_s] \end{aligned}$$

aracılığıyla verilir, burada $c_s(t) = c((1-2s)t)$ ve $d_s(t) = d((2s-1)t)$ dir.

iv. p, bir açık dönüşüm müdür?

Eğer $n \in p\left(U_{[c]}\right)$ ise, o zaman U' daki eğriler aracılığıyla n' ye birleştirilebilen U içindeki noktaların kümesi N' de açıktır ve $p\left(U_{[c]}\right)$ içinde kapsanır. Bu gösterilirse p' nin açık dönüşüm olduğu ortaya çıkar.

v. $p : M \to N$ bir örtü müdür? Aşağıdakiler kullanılırsa (iv)' den $p : M \to N$' nin bir örtü olduğu gelir.

U, N' nin bir büzülebilir harita tanım kümesi olsun ve $p^{-1}(U) = \bigcup U_{[c]}$ olduğunu gösteririz; burada, birleşim U içinde seçilmiş bir n noktası ve $p([c]) = n$ ile tüm c eğrilerinin üzerinden alınır.

vi. M, basit bağlantılı mıdır? M' nin basit bağlantılı olduğunu göstermek için aşağıdakiler kullanılır.

Eğer $\psi : [0,1] \to M$, $[c]$' de tabanlanmış bir kapalı eğri ise, yani ψ sürekli ve $\psi(0) = \psi(1) = [c]$ ise, o zaman

$$H : [0,1] \times [0,1] \to M \quad , \quad H(\cdot, s) = [c_s] \quad \ni \quad c_s(t) = c(ts),$$

$[c(0)]$ sabit eğrisi ile $[c]$' nin bir homotopisidir.

vii. M üzerinde bir manifold yapısı var mıdır ve M, N' ye lokal olarak diffeomorfik midir? Eğer (U, ψ), tanım kümesi; $p^{-1}(U)$, M' de her biri U' ya diffeomorfik olan açık kümelerin bir ayrık birleşimi olacak şekilde N üzerinde bir harita ise

$$\psi : V \to E$$

yi $\psi \circ p|_V$ şeklinde tanımlarız ve bu yolla tanımlanan atlas M üzerinde bir manifold yapısı tanımlar. Daha sonra M' nin N' ye lokal olarak diffeomorfik olduğu gösterilir [42].

Teorem 1.3.9. ***(Bir Evrensel Örtü Lie Grubunun Varlığı)*** *G bağlantılı bir Lie grup olsun. G nin* ***evrensel örtü Lie grubu*** *denilen bir $\widetilde{G}$ basit bağlantılı Lie grubu ve aynı zamanda bir Lie grup homomorfizmi de olan bir*

$$p : \widetilde{G} \to G$$

diferensiyellenebilir örtü dönüşümü vardır [7].

İspat. Teorem 1.2.13' den bir $\widetilde{G}$ basit bağlantılı topolojik uzayı ve bir $p : \widetilde{G} \to G$ (topolojik) örtü dönüşümü vardır. Önerme 1.3.19' den dolayı $\widetilde{G}$, p bir diferensiyellenebilir örtü dönüşümü olacak şekilde bir tek diferensiyellenebilir manifold yapısına sahiptir. Diferensiyellenebilir örtü dönüşümlerinin çarpımı da bir diferensiyellenebilir örtü dönüşümü olduğundan $p \times p : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to G \times G$ de bir diferensiyellenebilir örtü dönüşümüdür.

$m : G \times G \to G$ ve $i : G \to G$ sırasıyla G' nin çarpım ve ters dönüşümlerini göstersin ve $\widetilde{e}$, $p^{-1}(e) \subset \widetilde{G}$ lifinin keyfi bir elemanı olsun. $\widetilde{G}$ basit bağlantılı olduğundan, Teorem 1.2.8' den $m \circ (p \times p) : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to G$ dönüşümünün $\widetilde{m}(\widetilde{e}, \widetilde{e}) = \widetilde{e}$ ve $p \circ \widetilde{m} = m \circ (p \times p)$ olacak şekilde bir tek $\widetilde{m} : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ yükseltmesine sahip olduğu gelir.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G} \times \widetilde{G} \arrow[r, "\widetilde{m}"] \arrow[d, "p \times p"'] & \widetilde{G} \arrow[d, "p"] \\
G \times G \arrow[r, "m"'] & G
\end{tikzcd}$$

$\widetilde{m}$, p' nin bir σ lokal diferensiyellenebilir kesiti için $\sigma \circ m \circ (p \times p)$ şeklinde lokal olarak ifade edilebildiğinden, $\widetilde{m}$' nın diferensiyellenebilir olduğu gelir. Benzer şekilde $i \circ p : \widetilde{G} \to G$ dönüşümü bir tek $\widetilde{i} : \widetilde{G} \to \widetilde{G}$ diferensiyellenebilir yükseltmesine sahiptir öyle ki $\widetilde{i}(\widetilde{e}) = \widetilde{e}$ ve $p \circ \widetilde{i} = i \circ p$ dir.

$$\begin{tikzcd}
\widetilde{G} \arrow[r, "\widetilde{i}"] \arrow[d, "p"'] & \widetilde{G} \arrow[d, "p"] \\
G \arrow[r, "i"'] & G
\end{tikzcd}$$

$\widetilde{G}$ daki çarpımı ve tersi, $\forall \widetilde{x}, \widetilde{y} \in \widetilde{G}$ için sırasıyla $\widetilde{m}(\widetilde{x}, \widetilde{y}) = \widetilde{x}\widetilde{y}$ ve $\widetilde{i}(\widetilde{x}) = \widetilde{x}^{-1}$ şeklinde tanımlayalım. Bu takdirde yukarıdaki diyagramlar

$$p(\widetilde{x}\widetilde{y}) = p(\widetilde{x})p(\widetilde{y}) \tag{1.3.1}$$

$$p(\widetilde{x}^{-1}) = p(\widetilde{x})^{-1} \tag{1.3.2}$$

şeklinde ifade edilebilir. Geriye sadece bu işlemlerle $\widetilde{G}$ nın bir grup olduğunu göstermek kalıyor. Çünkü $\widetilde{m}$ ve $\widetilde{i}$ diferensiyellenebilir olduğundan $\widetilde{G}$ bir Lie grup olacaktır. (1.3.1) eşitliği p' nin bir Lie grup homomorfizmi olduğunu gösterir.

Önce $\widetilde{e}$ nın $\widetilde{G}$ daki çarpım için bir birim eleman olduğunu gösterelim. $f : \widetilde{G} \to \widetilde{G}$, $f(\widetilde{x}) = \widetilde{e}\widetilde{x}$ dönüşümünü gözönüne alalım. Bu takdirde (1.3.1) eşitliği, $p \circ f(\widetilde{x}) = p(\widetilde{e})p(\widetilde{x}) = ep(\widetilde{x}) = p(\widetilde{x})$ olmasını gerektirir. Dolayısıyla f, $p : \widetilde{G} \to G$ nin bir yükseltmesidir. $Id_{\widetilde{G}}$, p' nin bir başka yükseltmesidir ve bir noktada f ile aynıdır, çünkü $f(\widetilde{e}) = \widetilde{m}(\widetilde{e}, \widetilde{e}) = \widetilde{e}$ dir. Böylece örtü dönüşümlerinin tek yükseltme özelliği $f = Id_{\widetilde{G}}$' yı ya da denk olarak $\widetilde{x} \in \widetilde{G}$ için $\widetilde{e}\widetilde{x} = \widetilde{x}$ olmasını gerektirir. Aynı düşünce $\widetilde{x}\widetilde{e} = \widetilde{x}$ yı gösterir.

Şimdi $\widetilde{G}$' daki çarpımın birleşimli olduğunu göstermek için

$$\alpha_L, \alpha_R : \widetilde{G} \times \widetilde{G} \times \widetilde{G} \to \widetilde{G}$$

$$\alpha_L(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = (\widetilde{x}\widetilde{y})\widetilde{z}$$

$$\alpha_R(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = \widetilde{x}(\widetilde{y}\widetilde{z})$$

dönüşümlerini gözönüne alalım. Bu takdirde (1.3.1) eşitliği

$$p \circ \alpha_L(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = (p(\widetilde{x})p(\widetilde{y}))p(\widetilde{z}) = p(\widetilde{x})(p(\widetilde{y})p(\widetilde{z})) = p \circ \alpha_R(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z})$$

yi gerektirir. Dolayısıyla α_L ve α_R' nin ikisi de, aynı $\alpha(\widetilde{x}, \widetilde{y}, \widetilde{z}) = p(\widetilde{x})p(\widetilde{y})p(\widetilde{z})$ dönüşümünün yükseltmeleridir. α_L ve α_R, $(\widetilde{e}, \widetilde{e}, \widetilde{e})$' da aynı olduklarından aynıdır. Benzer bir düşünce $\widetilde{x}^{-1}\widetilde{x} = \widetilde{x}\widetilde{x}^{-1} = \widetilde{e}$ olduğunu gösterir. Böylece $\widetilde{G}$ bir Lie gruptur. □

$D = \ker\ p$ diyelim. Bu takdirde D, $\widetilde{G}$ nın bir normal Lie altgrubudur. p bir örtü dönüşümü olduğundan D aynı zamanda ayrıktır.

Lemma 1.3.19. *D bir G Lie grubunun bir ayrık altgrubu olsun. Bu takdirde D bir kapalı altgruptur [47].*

Lemma 1.3.20. *G bağlantılı bir Lie grup ve D, G' nin ayrık, normal altgrubu olsun. Bu takdirde D bir merkezil altgruptur [47].*

İspat. $d \in D$ olsun. Bu takdirde $\alpha : g \mapsto gdg^{-1}$, G' den G' ye sürekli bir dönüşümdür ve α' nın görüntüsü D' de içerilir. Dolayısıyla $\alpha : G \to D$ dönüşümü süreklidir. G bağlantılı olduğundan ve D ayrık olduğundan α' nın bir sabit dönüşüm olması gerekir. Dolayısıyla her $g \in G$ için $gdg^{-1} = \alpha(g) = \alpha(e) = d$ dir. Her $g \in G$ için $gd = dg$ olduğu ve d' nin G' nin merkezinde olduğu gelir. □

Özel olarak $p : \widetilde{G} \to G$ örtü dönüşümünün çekirdeği $\ker p$, $\widetilde{G}$ nın bir ayrık merkezil altgrubudur.

Teorem 1.3.10. *Bir G bağlantılı Lie grubunun her örtüsü, taban noktası birim eleman ve örtü dönüşümü Lie grupların bir morfizmi olacak şekilde bir tek Lie grup yapısına sahiptir [47].*

Önerme 1.3.25. *$\varphi : G \to H$ bağlantılı Lie grupların bir homomorfizmi olsun. Bu takdirde φ bir örtü dönüşümüdür gerek ve yeter şart $T_e(\varphi) : T_e(G) \to T_{\varphi(e)}(H)$ bir lineer izomorfizmdir [47].*

G ve H bağlantılı Lie gruplar ve $\varphi : G \to H$ bir Lie grup homomorfizmi olsun. G' nin basit bağlantılı olduğunu kabul edelim. Bu takdirde $\widetilde{\varphi}(e) = \widetilde{e}$ olacak şekilde bir tek $\widetilde{\varphi} : G \to \widetilde{H}$ yükseltmesi vardır. Çünkü

$$
\begin{aligned}
p \circ \widetilde{m}_{\widetilde{H}} \circ (\widetilde{\varphi} \times \widetilde{\varphi}) &= m_H \circ (p \times p) \circ (\widetilde{\varphi} \times \widetilde{\varphi}) = m_H \circ ((p \circ \widetilde{\varphi}) \times (p \circ \widetilde{\varphi})) \\
&= m_H \circ (\varphi \times \varphi) = \varphi \circ m_G \\
&= p \circ \widetilde{\varphi} \circ m_G
\end{aligned}
$$

olup $\widetilde{m}_{\widetilde{H}} \circ (\widetilde{\varphi} \times \widetilde{\varphi})$ ve $\widetilde{\varphi} \circ m_G$ dönüşümleri aynı dönüşümün yükseltmeleridir. Bu dönüşümler $G \times G$' de (e, e) üzerinde aynıdırlar, dolayısıyla birimseldirler. Bu, $\widetilde{\varphi} : G \to \widetilde{H}$ nın bir Lie grup homomorfizmi olmasını gerektirir.

Böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Lemma 1.3.21. *$\varphi : G \to H$ bir basit bağlantılı, bağlantılı G Lie grubundan bir bağlantılı H Lie grubuna bir Lie grup homomorfizmi olsun. H' nın evrensel örtü Lie grubunu $\widetilde{H}$ ile ve örtü dönüşümünü $p : \widetilde{H} \to H$ ile gösterelim. Bu takdirde $p \circ \widetilde{\varphi} = \varphi$ olacak şekilde bir tek $\widetilde{\varphi} : G \to \widetilde{H}$ Lie grup homomorfizmi vardır.*

Ayrıca eğer $\varphi : G \to H$ bağlantılı Lie grupların bir Lie grup morfizmi ise

$$
\begin{tikzcd}
\widetilde{G} \arrow[r, "\widetilde{\varphi}"] \arrow[d, "p_G"'] & \widetilde{H} \arrow[d, "p_H"] \\
G \arrow[r, "\varphi"'] & H
\end{tikzcd}
$$

diyagramı değişimli olacak şekilde bir tek $\widetilde{\varphi} : \widetilde{G} \to \widetilde{H}$ Lie grup homomorfizmi vardır, burada dikey oklar örtü dönüşümleridir.

1.3.5 Lie Kategoriler ve Lie Grupoidler

Literatürde Lie grupoidlerin tanımlarında morfizmlerin ve nesnelerin manifoldu üzerinde Hausdorff olma şartı bazen ayrı bir tanım olarak verilmektedir. Tez boyunca bir Lie grupoid verildiğinde morfizmlerin manifoldunun Hausdorff olduğunu kabul edeceğiz. Dolayısıyla nesne manifoldu da kendiliğinden Hausdorff olacaktır.

Lie kategorinin ve Lie grupoidin tanımını vermeden önce ileride ispatlarda kullanacağımız bir lemmayı verelim.

Lemma 1.3.22. *n-boyutlu bir C diferensiyellenebilir manifoldu, C_0 diferensiyellenebilir m-manifoldu üzerinde bir kategori olsun. α ve β kaynak ve hedef dönüşümleri m-ranklı diferensiyellenebilir dönüşümler olsun. Bu takdirde kompozisyon dönüşümünün tanım kümesi C_2, $C \times C$' nin bir kapalı altmanifoldudur [41].*

İspat. $\Delta \subseteq C_0 \times C_0$ köşegen olsun. Bu takdirde ($id : C_0 \to C_0$ nin grafı olan) Δ, $C_0 \times C_0$' ın bir kapalı altmanifoldudur. $rank\ \alpha = rank\ \beta = m$ olduğundan

$$\beta \times \alpha : C \times C \to C_0 \times C_0$$

dönüşümü, rankı $2m = boy(C_0 \times C_0)$ olan bir diferensiyellenebilir dönüşümdür. Buradan her $(a, b) \in C_2$ için $d(\beta \times \alpha)(a, b) : T_{(a,b)}(C \times C) \to T_{(\beta(a),\alpha(b))}(C_0 \times C_0)$ diferensiyeli örtendir. Dolayısıyla $C_2 = (\beta \times \alpha)^{-1}(\Delta)$, $C \times C$' nin bir kapalı altmanifoldudur. □

Tanım 1.3.31. *Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa bir C kümesine, bir C_0 kümesi üzerinde bir Lie kategori denir [41]:*

(LC1) *C, C_0 üzerinde bir cebirsel kategori,*

(LC2) *C ve C_0, $boy\ C > boy\ C_0$ olacak şekilde diferensiyellenebilir manifoldlar,*

(LC3) *α, β, ϵ kaynak, hedef ve nesne dönüşümleri diferensiyellenebilir dönüşümler ve rankları $boy\ C_0 = m$' ye eşit,*

(LC4) *$m : C_2 \to C$ kompozisyon dönüşümü bir diferensiyellenebilir dönüşümdür (önceki lemmadan C_2, $C \times C$' nin bir kapalı altmanifoldudur).*

Tanım 1.3.32. *Bir Lie grupoid, aşağıdakilerle birlikte bir* $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} G_0$ *grupoididir:* G *bir diferensiyellenebilir manifold,* G_0*,* G*' nin bir diferensiyellenebilir altmanifoldu,* α *ve* β*,* $G_2 \subset G \times G$*' nin bir diferensiyellenebilir altmanifoldu olması için diferensiyellenebilir örten submersiyonlar,* $m : G_2 \to G_0$ *bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve* $i : G \to G$ *bir diffeomorfizmdir [44].*

Şimdi Lie kategoriler ve Lie grupoidler ile ilgili bazı uyarıları verelim.

Uyarı 1.3.3. *Bir* G *Lie grupoidi için* ϵ *nesne dönüşümü diferensiyellenebilirdir. Ayrıca kaynak ve hedef dönüşümünün ikisi de örten submersiyon olduklarından* G_2 *bileşkelendirilebilen okların kümesi bir diferensiyellenebilir manifold yapısına sahip olur, çünkü* G_2

$$\alpha_G^{-1}(G_0) \times \beta_G^{-1}(G_0)$$

diferensiyellenebilir manifoldunun $G_0 \times G_0$ *çarpım manifoldunun köşegenine kısıtlanmasıdır [41].*

Uyarı 1.3.4. $G \underset{\beta}{\overset{\alpha}{\rightrightarrows}} G_0$ *bir Lie grupoid olsun.* α *ve* β *submersiyon olduklarından, her* $x \in G_0$ *için* $St_G x = \alpha^{-1}(x)$ α*-lifi ve* $CoSt_G x = \beta^{-1}(x)$ β*-lifi* G*' nin kapalı altmanifoldlarıdır ve ikisinin de boyutu* $boyG - boyG_0$ *dır.* i *ters dönüşümünün* x *boyunca* α*-life (*x *boyunca* β*-life) kısıtlaması,* $i(x)$ *boyunca* β*-lifi (*$i(x)$ *boyunca* α*-lifi) üzerine bir diffeomorfizmdir.* $G \times G$*' deki bileşkelendirilebilen ikililerin* G_2 *altmanifoldunun boyutu* $2boyG - boyG_0$ *dır [44].*

Uyarı 1.3.5. *Bir* G *Lie grupoidinin her bir* $u \in G_0$ *nesnesi için* G_u *izotropi grubu bir Lie gruptur [41].*

Uyarı 1.3.6. *Her Lie kategoride, her* x, y *nesnesi için* $C(x, y)$ *kümeleri kapalı altmanifoldlardır. Bu, Lie grupoidler için de geçerlidir [41].*

Uyarı 1.3.7. C*' deki birimlerin kümesi* $\epsilon(C_0)$*,* C*' nin* C_0*' a diffeomorf olan bir kapalı altmanifoldudur. Buradan* C_0*,* C*' nin bir altmanifoldu olarak düşünülebilir. Çünkü* $\epsilon \circ \beta$ *(ya da* $\epsilon \circ \alpha$*):* $C \to C$ *m-ranklı bir diferensiyellenebilir dönüşümdür. Dolayısıyla her bir* $1_x \in \epsilon(C_0)$ *için* C*' de en az bir* (U, λ) *koordinat haritası vardır öyle ki* $\epsilon(C_0) \cap U = \{a \in U : \ \lambda(a) = (\lambda^1(a), ..., \lambda^m(a), 0, ..., 0)\}$ *dır. Böylece* $\epsilon(C_0)$*,* C*' nin bir kapalı altmanifoldudur [41].*

Uyarı 1.3.8. *$a \in G(x,y)$ olsun. Bu takdirde*

$$R_a : St_G y \to St_G x \ , \ b \mapsto b \circ a$$

dönüşümü bir diferensiyellenebilir dönüşümdür. Çünkü

$$c_a : St_G y \to St_G x \ , \ b \mapsto a$$

sabit dönüşümünü gözönüne aldığımızda $R_a = m \circ (c_a, id)$ dir.

Benzer olarak $L_a : CoSt_G x \to CoSt_G y$, $b \mapsto a \circ b$ bir diferensiyellenebilir dönüşümdür [41].

Uyarı 1.3.9. *G bağlantılı bir Lie grupoid olsun. Bu takdirde her $x, y, x', y' \in G_0$ için $G(x,y)$, $G(x', y')$' ne diffeomorfiktir [41].*

Uyarı 1.3.10. *Her G bağlantılı Lie grupoidinde, nesne grupları izomorfik Lie gruplardır [41].*

Tanım 1.3.33. *G, G_0 üzerinde bir Lie grupoid olsun. Eğer $\alpha \times \beta : G \times G \to G_0 \times G_0$ bir diferensiyellenebilir submersiyon ise G' ye geçişlidir denir [11].*

Tanım 1.3.34. *(H, H_0) ve (G, G_0) Lie grupoidleri arasında bir homomorfizm, nesneler ve oklar üzerinde diferensiyellenebilir olan bir $(\phi, \phi_0) : (H, H_0) \longrightarrow (G, G_0)$ funktorudur [10].*

Bir $(\phi, \phi_0) : (H, H_0) \to (G, G_0)$ Lie grupoid morfizmi verildiğinde onu kısaca ϕ olarak göstereceğiz ve okların kümesi arasında $\phi : H \to G$, nesnelerin kümesi arasında $\phi_0 : H_0 \to G_0$ dönüşümlerini kullanacağız.

Eğer okların kümesi arasındaki $\phi : H \longrightarrow G$ bir submersiyon ise ϕ' ye submersiyondur deriz. Bu, $\phi_0 : H_0 \longrightarrow G_0$ ' ın da bir submersiyon olmasını gerektirir. Lie grupoidler ve onlar arasındaki homomorfizmler bir kategori oluşturur [10].

Tanım 1.3.35. *G ve H iki Lie grupoid olsun. Eğer $\phi \circ \psi$ ve $\psi \circ \phi$, sırasıyla H ve G nin birim homomorfizmleri olacak şekilde $\phi : G \to H$ ve $\psi : H \to G$ homomorfizmleri varsa G ve H' ya izomorfiktir denir. Bu durumda ϕ ve ψ' ye Lie grupoidlerin bir izomorfizmidir denir [10].*

Tanım 1.3.36. (G, G_0) *bir Lie grupoid olsun. G' nin bir Lie altgrupoidi, bir 1:1 immersiyon olan* $(\varphi, \varphi_0) : (G', G'_0) \longrightarrow (G, G_0)$ *Lie grupoid morfizmi ile birlikte bir* (G', G'_0) *Lie grupoididir [11].*

Örnek 1.3.12. *Her G Lie grubu, okların manifoldu olarak G grubu ve nesnelerin manifoldu olarak* $\{e\}$ *tek nokta kümesi ile bir Lie grupoiddir. Dolayısıyla kaynak ve hedef dönüşümlerinin diferensiyellenebilirliği aşikardır, çünkü onlar her g' ye e noktasını karşılık getiren sabit dönüşümlerdir ve açıkça sabit ranklıdırlar. Nesne dönüşümü G nin birimi e ye karşılık gelir ve sabit dönüşüm olduğundan diferensiyellenebilirdir. Kompozisyon işlemi Lie grubun işlemi ve ters dönüşüm de Lie gruptaki ters dönüşüm olduğundan aşikar olarak diferensiyellenebilirdir. Grup aksiyomları yukarıdaki yapı ile G nin bir grupoid olmasını garanti eder [10].*

Örnek 1.3.13. *Herhangi bir M manifolduna, M üzerinde bütün okları birimler olan bir Lie grupoid olarak bakılabilir.Yani okların manifoldu da M' dir. Bu Lie grupoidi yine M ile gösteririz ve M' ye karşılık gelen* ***birim grupoid*** *deriz [10].*

Örnek 1.3.14. *M bir diferensiyellenebilir manifold olsun.* $M \times M$ *çarpım manifoldu M üzerinde aşağıdaki gibi bir Lie grupoididir:* α *kaynak dönüşümü ikinci faktör üzerine izdüşüm ve* β *hedef dönüşümü birinci faktör üzerine izdüşümdür. Kompozisyon* $m((x, y), (y, z)) = (x, z)$ *şeklindedir ve tektir. Çünkü her* $x, y \in M$ *için x den y ye bir tek ok vardır. Her* $x \in M$ *için* $\epsilon(x) = (x, x)$ *dir.* $M \times M$*' ye M üzerinde* ***banal*** *grupoid denir. Ayrıca herhangi bir* $p : N \longrightarrow M$ *diferensiyellenebilir dönüşümü, banal grupoidlerin bir* $p \times p : N \times N \longrightarrow M \times M$ *dönüşümünü indirger. Ayrıca, eğer p bir submersiyon ise N üzerinde, tüm* $(y, y') \in N \times N \ni p(y) = p(y')$ *çiftlerinden oluşan ve* $N \times N$ *banal grupoidinin bir Lie altgrupoidi olan* $Ker(p)$ *çekirdek grupoidini tanımlayabiliriz. Yani* $Ker(p) = N \underset{M}{\times} N$ *dir [10, 16].*

Örnek 1.3.15. *M bir manifold olsun.* $pr_1, pr_2 : R \longrightarrow M$ *submersiyonlar olacak şekilde M üzerinde bir denklik bağıntısı tanımlayan bir* $R \subset M \times M$ *immersed altmanifoldu,* $G = R$ *ile M üzerinde bir G Lie grupoidi verir. Bu grupoid M' nin banal grupoidinin bir immersed Lie altgrupoididir. Ayrıca ,* $(\alpha, \beta) : G \longrightarrow G_0 \times G_0$ *ın bir 1:1 immersiyon olması özelliği ile her G Lie grupoidi bu yolla bir denklik bağıntısı yardımıyla tanımlanır [10].*

Örnek 1.3.16. *Eğer G bir Lie grup ve M, G aracılığıyla üzerine soldan diferensiyellenebilir olarak etki edilen bir diferensiyellenebilir manifold ise, okların manifoldu olarak $G \times M$ çarpımı ve nesnelerin manifoldu olarak M ile* ***etki grupoidini*** *tanımlarız. Kaynak dönüşümü ikinci faktör üzerine izdüşümdür ve hedef dönüşümü sol etki ile verilir. Son olarak kompozisyon*

$$(g_1, m_1)(g_2, m_2) = (g_1 g_2, m_1) \ , \ \forall g_1, g_2 \in G \ , \ \forall m_1, m_2 \in M$$

ile tanımlanır. Bir G grubuna ve bir M sol G-küme' ye karşılık gelen etki grupoidi genellikle $G \ltimes M$ ile gösterilir [10].

Örnek 1.3.17. *G ve H Lie grupoidleri verildiğinde G ve H nın çarpım grupoidini aşağıdaki gibi oluştururuz:*

i) *oklarının manifoldu $G \times H$ çarpım manifoldu,*

ii) *nesnelerinin manifoldu $G_0 \times H_0$ çarpım manifoldu,*

iii) *kaynak dönüşümü $\alpha_{G\times H}(g, h) = (\alpha_G(g), \alpha_H(h))$, $\forall (g, h) \in G \times H$,*

iv) *hedef dönüşümü $\beta_{G\times H}(g, h) = (\beta_G(g), \beta_H(h))$, $\forall (g, h) \in G \times H$,*

v) *nesne dönüşümü $\epsilon_{G\times H}(x, y) = (\epsilon_G(x), \epsilon_H(y))$, $\forall (x, y) \in G_0 \times H_0$,*

vi) *ters dönüşümü $i_{G\times H}(g, h) = (i_G(g), i_H(h))$, $\forall (g, h) \in G \times H$,*

vii) *kompozisyonu $(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2) \ \ni \ \alpha_{G\times H}(g_1, h_1) = \beta_{G\times H}(g_2, h_2)$*

şeklinde tanımlanır.

İki Lie grupoidin çarpımı, diferensiyellenebilir manifoldlarının çarpımının yine bir diferensiyellenebilir manifold ve diferensiyellenebilir dönüşümlerin çarpımının yine bir diferensiyellenebilir dönüşüm olmasından dolayı yine bir Lie grupoiddir. Ayrıca kaynak dönüşümlerin çarpımı açıkça örtendir ve tanjant dönüşümün tanımından dolayı açıkça bir submersiyondur, çünkü onun her iki faktörü de birer submersiyondur [44].

Şimdi bir Lie grupoidin bir diferensiyellenebilir manifold üzerine etkisini tanımlayalım. Bunun için (G, G_0) bir Lie grupoid ve M, bir $\rho : M \to G_0$ diferensiyellenebilir dönüşümü ile verilen bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Karşılık gelen lif çarpımını

$$M \underset{G_0}{\times} G = \{(x, a) \in M \times G \mid \rho(x) = \alpha(a)\}$$

ile gösterelim.

Tanım 1.3.37. *G' nin M üzerine bir etkisi, aşağıdaki şartları sağlayan*

$$M \underset{G_0}{\times} G \to M, (x, a) \mapsto x \cdot a$$

diferensiyellenebilir dönüşümüdür [11]:

- *her* $(x, a) \in M \underset{G_0}{\times} G$ *için* $\rho(x \cdot a) = \beta(a)$
- *her* $(a, b) \in G_2$ *için* $(x \cdot a) \cdot b = x \cdot (ab)$
- *her* $u \in G_0$ *için* $x \cdot u = x$.

G' nin M üzerine soldan etkisi,

$$G \underset{G_0}{\times} M = \{(a, x) \in G \times M \mid \sigma(x) = \beta(a)\}$$

olmak üzere $G \underset{G_0}{\times} M \to M$, $(a, x) \mapsto a \cdot x$ şeklinde gösterilir.

Tanımlardan, her $a \in G$ elemanının $x \in M$ olmak üzere $x \mapsto x \cdot a$ ile gösterilen M' nin bir transformasyonunu indirgediği gelir. Özel olarak her $u \in G_0$ için R_u ve L_u, M' nin birim transformasyonlarıdır.

Eğer $\forall x \in M$ $(\exists x \in M)$ için $x \cdot a = x$, $a = u \in G_0$ olmasını gerektiriyorsa G, M üzerine **efektif** (**serbest**) olarak etki eder deriz [11].

Eğer $\forall x, \widetilde{x} \in M$ için $\widetilde{x} = g \cdot x$ olacak şekilde $\exists g \in G$ varsa M diferensiyellenebilir manifoldu üzerinde bir etkiye **geçişlidir** denir. Bir sağ G-etki için geçişlilik kavramı benzerdir [11].

Eğer $M \underset{G_0}{\times} G \to M \times M$, $(x, a) \mapsto (x, x \cdot a)$ dönüşümü düzgün ise G' nin M üzerine etkisine **düzgündür** (proper) deriz [10].

Örnek 1.3.18. (G, G_0) *bir Lie grupoid ve* H, *G' nin kapalı geniş altgrupoidi olsun.*

i) *H, G üzerine sağdan aşağıdaki gibi etki eder. Her $a \in H$; $x \in G$ yi $x \cdot a$ ya dönüştürür. $M = G$ bir manifolddur, dolayısıyla (H, G_0) bir Lie grupoid ve $\rho = \beta : M = G \to G_0$ bir diferensiyellenebilir dönüşümdür. Bu durumda $G \underset{G_0}{\times} H = \{(x,a) \in G \times H \mid \beta(x) = \alpha(a)\}$ dır. Tanım 1.3.37 deki etki şartları kolayca gerçeklenir ve $\mu : G \underset{G_0}{\times} H \to G$, $(x,a) \mapsto x \cdot a$ nün H' nın G üzerine bir sağ etkisi olduğunu elde ederiz.*

ii) *G, G/H üzerine aşağıdaki gibi sağdan etki eder.*

G/H bölüm uzayı bir manifold yapısını kabul eder ve $G \to G/H$ projeksiyonu bir diferensiyellenebilir dönüşümdür.

Ayrıca, $\rho : G/H \to G_0$, $\rho(xH) = \beta(x)$, $\forall xH \in G/H$, bir diferensiyellenebilir dönüşümdür ve karşılık gelen lif çarpımı

$$G/H \underset{G_0}{\times} G = \{(xH, a) \in G/H \times G \mid \rho(xH) = \alpha(a)\}$$

dır.

Bu takdirde, $(xH, a) \mapsto xH \cdot a = xaH$ dönüşümü G' nin G/H üzerine sağdan bir etkisini tanımlar. Gerçekten,

- $\rho(xH, a) = \rho(xaH) = \beta(xa) = \beta(a)$, $\forall (xH, a) \in G/H \underset{G_0}{\times} G$
- $(xH \cdot a) \cdot b = (xaH) \cdot b = ((xa)b)H = x \cdot (ab)H = xH \cdot (ab)$, $\forall (a,b) \in G_2$
- $xH \cdot u = (xu)H = xH$, $\forall u \in G_0$

olup etki şartları sağlanır.

G, G/H üzerinde geçişli olan bir Lie transformasyon grupoididir.

G' nin G/H üzerine etkisi effektiftir gerek ve yeter şart H, G' nin herhangi bir normal altgrupoidini ($\neq G_0$) içermez.

iii) *G, G/H üzerine aşağıdaki gibi soldan etki eder.*
$\sigma : G/H \to G_0$, $xH \mapsto \sigma(xH) = \alpha(x)$ dönüşümü G/H manifoldundan G_0' a bir diferensiyellenebilir dönüşümdür ve karşılık gelen lif çarpımı

$$G \underset{G_0}{\times} G/H = \{(a, xH) \in G \times G/H \mid \sigma(xH) = \beta(a)\}$$

dır. $G \underset{G_0}{\times} G/H \to G/H$, $(a, xH) \mapsto a \cdot xH = (ax)H$ *dönüşümü,* G*' nin* G/H *üzerine soldan bir etkisidir. Gerçekten*

- $\sigma(a \cdot xH) = \sigma((ax)H) = \alpha(ax) = \alpha(a)$, $\forall (a, xH) \in G \underset{G_0}{\times} G/H$
- $(a \cdot (b \cdot xH)) = a \cdot (bx)H = (a(bx))H = ((ab)x)H = (ab) \cdot xH$, $\forall (a, b) \in G_2$
- $u \cdot xH = (ux)H = xH$, $\forall u \in G_0$

dır [11].

Örnek 1.3.19. *Bir* G *Lie grupoidi ve bir* M *diferensiyellenebilir manifoldu verildiğinde* G, $P = M \times G$ *üzerine sağdan serbest olarak aşağıdaki gibi etki eder.*

$\rho : P = M \times G \to G_0$, $(x, a) \mapsto \rho(x, a) = \beta(a)$ *dönüşümünü gözönüne alalım. Bu takdirde*

$$P \underset{G_0}{\times} G = \{((x, a), b) \in P \times G \mid \rho(x, a) = \alpha(b)\}$$

dir ve her $(x, a) \in P \underset{G_0}{\times} G$ *için* $\alpha(b) = \beta(a)$ *dır ve buradan* $(a, b) \in G_2$ *dir.* G*' nin* $M \times G$ *üzerine etkisi*

$$\begin{array}{rcl} (M \times G) \underset{G_0}{\times} G & \to & M \times G \\ ((x, a), b) & \mapsto & (x, ab) \end{array}$$

ile verilir [11].

Tanım 1.3.38. G *ve* H *iki Lie grupoid,* M *ve* N *iki diferensiyellenebilir manifold olmak üzere bir sol* G*-manifold* (M, ρ_M, μ_M) *ve bir sol* H*-manifold* (N, ρ_N, μ_N) *olsun.* M *sol* G*-manifoldu ve* N *sol* H*-manifoldu arasında bir denk dönüşüm aşağıdakilerle birlikte bir* (Θ, f, f_0) *üçlüsüdür [16].*

$\Theta : M \to N$ *bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve* (f, f_0) *ikilisi* G *grupoidinden* H *grupoidine Tanım 1.1.4 deki anlamda bir morfizmdir. Ayrıca aşağıdaki diyagramlar değişimlidir:*

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "\Theta"] \arrow[d, "\rho_M"'] & N \arrow[d, "\rho_N"] \\ G_0 \arrow[r, "f_0"'] & H_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \underset{G_0}{\times} M \arrow[r, "f \times \Theta"] \arrow[d, "\mu_M"'] & H \underset{H_0}{\times} N \arrow[d, "\mu_N"] \\ M \arrow[r, "\Theta"'] & N \end{tikzcd}$$

Uyarı 1.3.11. *Yukarıdaki tanımda ilk diyagramın değişimli olması,* $f \times \Theta$ *nın* $G \underset{G_0}{\times} M$ *manifoldunu* $H \underset{H_0}{\times} N$ *manifolduna dönüştürmesini gerektirir:*

$$\begin{aligned} \rho_N(\Theta(m)) &= f_0(\rho_M(m)) \\ &= f_0(\alpha(g)) \\ &= \alpha(f(g)), \forall (g,m) \in G \underset{G_0}{\times} M. \end{aligned}$$

İkinci diyagram ise genellikle

$$\Theta(gm) = f(g)\Theta(m), \forall (g,m) \in G \underset{G_0}{\times} M$$

şeklinde yazılır.

G bir Lie grupoid ve $x \in G_0$ olsun. G' nin kaynak ve hedef dönüşümleri birer submersiyon olduğundan $St_G x = \alpha^{-1}(x)$ ve $CoSt_G x = \beta^{-1}(x)$ lifleri G' nin kapalı altmanifoldlarıdır. Belirtelim ki, $St_G x$ üzerinde G_x izotropi grubunun sağ etkisi, $\beta_x = \beta|_{St_G x}$' in lifleri boyunca serbesttir ve geçişlidir. x boyunca geçen G' nin yörüngesi

$$G_x = \beta\left(St_G x\right) \subset G_0$$

ile tanımlanır [10].

Aşağıdaki teorem, izotropi gruplarının Lie gruplar olduğunu ve yörüngelerinin G_0' ın immersed altmanifoldlar olduğunu gösterir:

Teorem 1.3.11. *G bir Lie grupoid ve x,$y \in G_0$ olsun.*

i) *$G(x,y)$, G' nin bir kapalı altmanifoldudur.*

ii) *G_x bir Lie gruptur.*

iii) *G_x, G_0' ın bir immersed altmanifoldudur [10].*

Tanım 1.3.39. *r sınıfından M üzerindeki bir G Lie grupoidine lokal aşikardır denir, eğer her $m \in M$ için en az bir U komşuluğu ve bir $\lambda : U \to G$ C^r-dönüşümü var öyle ki $\forall x \in U$ için $\alpha(\lambda(x)) = x$ ve $\beta(\lambda(x)) = m$ ise [41].*

Lemma 1.3.23. *M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu takdirde πM nin her bir A bağlantılı geniş normal altgrupoidi için $\pi_A M$ lokal aşikardır [41].*

BÖLÜM 2

LIE GRUPOİDLERİN ÖRTÜLERİ VE ETKİLERİ

Bölüm 1 de topolojik örtü uzayları ve diferensiyellenebilir örtü manifoldları ile ilgili temel bilgiler verildikten sonra, bu bölümde bu kavramların grupoidlere nasıl uygulandığı ele alınacaktır. Bunun için, önce grupoidlerin örtüleri ve etkilerinin kategorilerinin denk olduğu, ve sonra topolojik grupoidlerin örtüleri ve etkilerinin kategorilerinin denk olduğu verilecektir. Son olarak Lie grupoidlerin örtüleri ve etkilerinin kategorilerinin denk olduğu gösterilecektir.

2.1 Grupoidlerin Örtüleri ve Etkileri

Tanım 2.1.1. *$p : \tilde{G} \to G$ grupoidlerin bir morfizmi olsun. Eğer her bir $\tilde{x} \in \tilde{G}_0$ nesnesi için p nin $\tilde{G}_{\tilde{x}} \to G_{p(\tilde{x})}$ kısıtlaması bire-bir ve örten ise p ye örtü morfizmi ve $\tilde{G}$ grupoidine de G nin örtü grupoidi denir. Eğer $\tilde{G}$ ve G nin her ikisi de geçişli ise p örtü morfizmine geçişlidir denir [6].*

$p : H \to G$ bir grupoid morfizmi ve $G_\alpha \times_{p_0} H_0 = \{(a, x) \in G \times H_0 \mid \alpha(a) = p_0(x)\}$ olmak üzere aşağıdaki geri çekme diyagramı verilsin.

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \times_{p_0} H_0 \arrow[r, "P_2"] \arrow[d, "P_1"'] & H_0 \arrow[d, "p_0"] \\ G \arrow[r, "\alpha"'] & G_0 \end{tikzcd}$$

Eğer $p : H \to G$ grupoidlerin bir örtü morfizmi ise $s_p : G_\alpha \times_{p_0} H_0 \to H$ fonksiyonu, her bir (a, x) ikilisini H_x' in $p(h) = a$ olacak şekildeki x de başlayan bir tek elemanına götüren bir yükseltme fonksiyonudur. Açıkça s_p, $(p, \alpha) : H \to G_\alpha \times_{p_0} H_0$ ın tersidir. Böylece, $p : H \to G$ morfizminin grupoidlerin bir örtü morfizmi olması için gerek ve yeter şart $(p, \alpha) : H \to G_\alpha \times_{p_0} H_0$ ın bire-bir ve örten olmasıdır [19].

Herhangi bir $p : \tilde{G} \to G$ grupoid morfizmi ve $\tilde{x} \in \tilde{G}_0$ nesnesi için, $G\{p(\tilde{x})\}$ grubunun $p(\tilde{G}\{\tilde{x}\})$ altgrubuna p nin $\tilde{x}$ daki *karakteristik* grubu denir. Eğer p bir örtü morfizmi ise p, $\tilde{G}\{\tilde{x}\}$ yı izomorfik olarak bu karakteristik gruba dönüştürür. Ayrıca eğer $a \in G\{p(\tilde{x})\}$ ise, $p(\tilde{a}) = a$ olacak şekilde $\tilde{G}_{\tilde{x}}$ nın bir tek $\tilde{a}$ elemanı vardır. Fakat $\tilde{a}$ nın kapalı eğri (loop) olması gerekmez. $\tilde{a} \in \tilde{G}\{\tilde{x}\}$ olması için gerek ve yeter şart a nın $\tilde{G}$ nın karakteristik grubuna ait olmasıdır.

Örnek 2.1.1. *G bir grupoid olsun. $p : G \to G$ birim dönüşümü grupoidlerin örtü morfizmidir. Burada, $s_p : G_\alpha \times_{p_0} G_0 \to G$ dönüşümü izdüşüm dönüşümü olduğundan bire-bir ve örten olduğu kolayca görülür.*

Şimdi, topolojik örtü dönüşümlerinden grupoidlerin örtü morfizmlerine geçişi veren önemli bir önermeyi verelim.

Önerme 2.1.1. *$p : \tilde{X} \to X$ topolojik uzayların örtü dönüşümü, $A \subseteq X$ bir altküme ve $\tilde{A} = p^{-1}(A)$ olsun. Bu takdirde $\pi p : \pi\tilde{X}\tilde{A} \to \pi XA$ indirgenmiş morfizmi bir örtü morfizmidir [6] .*

İspat. $\tilde{x} \in \tilde{A}$ ve $p(\tilde{x}) = x$ olsun. x başlangıç noktasıyla X deki herbir a yolu için $\tilde{a}$, $\tilde{x}$ başlangıç noktasıyla $\tilde{X}$ daki bir tek örtü yolunu göstersin. Eğer a nın bitiş noktası A da ise $\tilde{a}$ nın bitiş noktası da $\tilde{A}$ dadır. Aynı zamanda $\tilde{a}$ nın denklik sınıfı sadece a nın denklik sınıfına bağlıdır. Böylece $[a] \to [\tilde{a}]$ fonksiyonu p nin $(\pi\tilde{X}\tilde{A})_{\tilde{x}} \to (\pi XA)_x$ dönüşümüne kısıtlamasının tersidir. □

Yukarıdaki önermede özel olarak $A = X$ alınırsa aşağıdaki örnek elde edilir.

Örnek 2.1.2. *Eğer $p : \tilde{X} \to X$ topolojik uzayların bir örtü dönüşümü ise $\pi_1 p : \pi_1\tilde{X} \to \pi_1 X$ indirgenmiş morfizmi grupoidlerin örtü morfizmidir [6].*

Önerme 2.1.2. *$r : K \to H$ ve $q : H \to G$ grupoidlerin morfizmleri olsun. Bu durumda;*

1. *eğer q ve r örtü morfizmleri ise qr de örtü morfizmidir,*

2. *eğer q ve qr örtü morfizmleri ise r de örtü morfizmidir,*

3. *eğer r ve qr örtü morfizmleri ve r_0 örten ise q da örtü morfizmidir [6].*

$p : \tilde{G} \to G$ grupoidlerin örtü morfizmi olsun. Örtü uzaylarının esas grupoidlerle benzerliğinden, $\tilde{G}$ nın $\tilde{a}$ elemanına $p(\tilde{a})$ yı *örter* veya $p(\tilde{a})$ nın *yükseltmesidir* denir. Benzer olarak, $\tilde{G}$ grupoidindeki $\tilde{a}_n \circ ... \circ \tilde{a}_1$ kompozisyonuna, $p(\tilde{a}_n) \circ ... \circ p(\tilde{a}_1)$ kompozisyonunun *yükseltmesidir* veya $p(\tilde{a}_n) \circ ... \circ p(\tilde{a}_1)$ yı *örter* denir. Sadece G nin elemanları üzerindeki temel özellikler değil, aynı zamanda G deki kompozisyonlar üzerindeki örtü uzaylarının temel özellikleri de $\tilde{G}$ ya yükseltilebilir.

Önerme 2.1.3. *$\tilde{G}$ nın bir nesnesi $\tilde{x}$ ve $p(\tilde{x}) = x$ olsun. Eğer G_x in bir elemanı $a = a_n \circ ... \circ a_1$ ise, aşağıdaki şartları sağlayan $\tilde{G}$ nın bir tek $\tilde{a}_n, ..., \tilde{a}_1$ elemanları vardır [6].*

1. *$p(\tilde{a}_i) = a_i$, $i = 1, ..., n$,*

2. *$\tilde{a} = \tilde{a}_n \circ ... \circ \tilde{a}_1$ tanımlıdır ve $\tilde{G}_{\tilde{x}}$ ya aittir.*

Noktalı grupoidlerin $(G, x) \to (H, y)$ morfizminin karakteristik grubu, grupoidlerin $f : G \to H$ morfizminin karakteristik grubudur. $(\tilde{G}, \tilde{x})$ nın karakteristik grubu (yani $G\{p(\tilde{x})\}$ nın $p(\tilde{G}\{\tilde{x}\})$ altgrubu) yükseltme teorisinde önemli bir rol oynar.

$p : (\tilde{G}, \tilde{x}) \to (G, x)$ noktalı morfizmi için, grupoidlerin $p : \tilde{G} \to G$ morfizmi bir örtü morfizmi ise, $p : (\tilde{G}, \tilde{x}) \to (G, x)$ noktalı morfizmine *örtü morfizmi* denir. Benzer olarak eğer noktalı grupoidlerin aşağıdaki değişimli diyagramı verilmiş ise $\tilde{f}$ ya f nin yükseltmesi denir.

$$\begin{tikzcd}
 & (\tilde{G}, \tilde{x}) \arrow[d, "p"] \\
(F, z) \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & (G, x)
\end{tikzcd}$$

Önerme 2.1.4. *$p : (\tilde{G}, \tilde{x}) \to (G, x)$ örtü morfizmi, $f : (F, z) \to (G, x)$ grupoidlerin bir morfizmi ve F geçişli olsun. Bu durumda, f nin bir $\tilde{f} : (F, z) \to (\tilde{G}, \tilde{x})$ morfizmine yükseltilmesi için gerek ve yeter şart f nin karakteristik grubunun, p nin karakteristik grubu tarafından içerilmesidir, yani $f(F\{z\}) \subseteq p(\tilde{G}\{\tilde{x}\})$ olmasıdır. Eğer böyle bir yükseltme varsa tektir [6].*

Eğer $f(F\{z\}) = p(\tilde{G}\{\tilde{x}\})$ ise bu önerme, F ile $\tilde{G}$ grupoidlerinin izomorfik olmasını gerektirir. Eğer $N\{x\} = \{1_x\}$ ise, $p : H \to G$ morfizmi bir evrensel örtü morfizmidir. Eğer $N\{x\} = G\{x\}$ ise $H = G$ dir ve böylece, $p : H \to G$ birim morfizmdir. Bu yolla elde edilen evrensel örtüye $x \in G_0$ tabanlı *evrensel örtü grupoidi* denir.

Sonuç 2.1.1. *$p : (\tilde{G}, \tilde{x}) \to (G, x)$ ve $q : (\tilde{H}, \tilde{y}) \to (G, x)$, sırasıyla C ve D karakteristik gruplarıyla geçişli örtü morfizmleri olsun. Eğer $C \subseteq D$ ise $p = q \circ r$ olacak şekilde bir tek $r : (\tilde{G}, \tilde{x}) \to (\tilde{H}, \tilde{y})$ örtü morfizmi vardır. Eğer $C = D$ ise r bir izomorfizmdir [6].*

Sonuç 2.1.2. *G nin 1-geçişli örtü uzayı G nin her örtü uzayını örter [6].*

G bir grupoid olsun. Bu durumda nesneleri, grupoidlerin $p : H \to G$ örtü morfizmleri ve $p : H \to G$ nesnesinden $q : K \to G$ nesnesine bir morfizmi, grupoidlerin $p = q \circ r$ şartını sağlayan bir $r : H \to K$ morfizmi olan, G nin örtülerinin $GdCov(G)$ kategorisi elde edilir [9].

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & K \arrow[dl, "q"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Önerme.2.1.2 den r nin de bir örtü morfizmi olduğu açıktır. Bu kategoride kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$, ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : H \to H$ ile tanımlıdır. Ayrıca, $r : H \to K$ ve $r' : K \to K'$ iki morfizm olmak üzere komposizyon,

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "q"'] & K \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "p"] & K' \arrow[dl, "q'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

Tanım 2.1.2. *G bir grupoid, X bir küme ve $w : X \to G_0$ bir fonksiyon olsun. Eğer $G_\alpha \times_w X = \{(a, x) \in G \times X \mid \alpha(a) = w(x)\}$ olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan $\phi : G_\alpha \times_w X \to X$, $(a, x) \mapsto {}^a x$ fonksiyonu varsa G ye X üzerine w aracılığıyla soldan etki eder veya kısaca X bir sol G-uzaydır denir ve (X, w) ile gösterilir [9] .*

i) $w({}^a x) = \beta(a)$ *ii)* ${}^b({}^a x) = {}^{b \circ a} x$ *iii)* ${}^{1_{w(x)}} x = x$

Örnek 2.1.3. *$p : \tilde{G} \to G$ grupoidlerin örtü morfizmi, $X = \tilde{G}_0$ ve $w = p_0 : \tilde{G}_0 \to G_0$ olsun. Böylece, G nin $X = \tilde{G}_0$ üzerine $w = p_0$ vasıtasıyla $\phi : G_\alpha \times_{p_0} \tilde{G}_0 \to \tilde{G}_0$, $(a, \tilde{x}) \mapsto {}^a\tilde{x} = \tilde{\beta}(\tilde{a})$ etkisi elde edilir. Burada p, örtü morfizmi olduğundan $\tilde{x} \in X = \tilde{G}_0$ ve $a \in G_{p_0(\tilde{x})}$ için, $p(\tilde{a}) = a$ ve $p_0(\tilde{x}) = x$ olacak şekilde kaynağı $\tilde{x}$ olan a nin bir tek $\tilde{a}$ yükseltmesine götürür. Şimdi, etki şartlarının sağlandığını gösterelim. $w({}^a\tilde{x}) = p_0({}^a\tilde{x}) = p_0(\tilde{\beta}(\tilde{a})) = \beta(a)$ olup ilk şart sağlanır. ${}^b({}^a\tilde{x}) = {}^b\tilde{\beta}(\tilde{a}) = \tilde{\beta}(\tilde{b})$ ve ${}^{b\circ a}\tilde{x} = \tilde{\beta}(\tilde{b} \circ \tilde{a}) = \tilde{\beta}(\tilde{b})$ olup ${}^b({}^a\tilde{x}) = {}^{b\circ a}\tilde{x}$ bulunur. Son olarak, ${}^{1_{p_0(\tilde{x})}}\tilde{x} = \tilde{\beta}(\tilde{c}) = \tilde{x}$ olduğu görülür (G deki kapalı eğrinin $\tilde{G}$ da kapalı eğri olması gerekmez ancak örtünün tanımından G de x de başlayan bir morfizme $\tilde{G}$ da $\tilde{x}$ da başlayan bir morfizm karşılık gelir). Böylece etki şartları sağlanır [18] .*

Etki kurallarından, $a \in G(x, y)$ elemanı, $a_\# : w^{-1}(x) \to w^{-1}(y)$, $x \mapsto {}^a x$, bire-bir örten dönüşümünü tanımlar. Eğer $x, y \in G_0$, $x' \in w^{-1}(x)$ ve $y' \in w^{-1}(y)$ için ${}^a x' = y'$ şartını sağlayan bir $a \in G(x, y)$ varsa, etkiye *geçişlidir* denir. $x' \in w^{-1}(x)$ için G grupoidinin ${}^a x' = x'$ şartını sağlayan $a \in G$ elemanlarından oluşan $G(x') = \{a \in G \mid {}^a x' = x'\}$ grubuna x' nün *denge (stability) grubu*, bu şartı sağlayan a elemanına x' nün *dengeleyicisi* ve x' ne de a nın *sabitlenmiş noktası* denir.

Örnek 2.1.4. *G, X kümesi üzerine $w : X \to G_0$ vasıtasıyla etki eden bir grupoid olsun. Böylece bu etki yardımıyla nesnelerinin kümesi X olan ve etki grupoidi denen $G \ltimes X$ grupoidi tanımlanır. Bu grupoidin morfizmleri kümesi $G\ {}_\alpha\!\times_w X$ kümesidir. Yani, bir x nesnesinden bir y nesnesine bir morfizm, ${}^a x = y$ şartını sağlayan (a, x) çiftidir. Kaynak dönüşümü $\alpha(a, x) = x$, hedef dönüşümü $\beta(a, x) = {}^a x$, nesne dönüşümü $x \mapsto (1_{w(x)}, x)$, ters dönüşümü $(a, x)^{-1} = (a^{-1}, {}^a x)$ ve kompozisyonu ise $(b, y) \circ (a, x) = (b \circ a, x)$ ile tanımlıdır [6].*

Önerme 2.1.5. *Aşağıdaki ifadeler doğrudur [6]:*

1. *Yukarıdaki kısıtlama $G \ltimes X$ ' i bir grupoid yapar.*
2. *Nesneler üzerinde $w : X \to G_0$ ile ve morfizmler üzerinde $(a, x) \mapsto a$ ile verilen $p : G \ltimes X \to G$ izdüşümü, grupoidlerin bir örtü morfizmidir.*
3. *$G \ltimes X$ grupoidinin geçişli olması için gerek ve yeter şart etkinin geçişli olmasıdır.*

4. Eğer $x \in X$ ise $(G \ltimes X)\{x\}$ nesne grubu p ile $G\{x\}$' e izomorfik olarak dönüştürülür.

5. p örtü morfizmi tarafından belirlenen G nin X üzerine etkisi orjinal etkidir.

İspat. 1. Örnek 2.1.4 den kolayca görülebilir.

2. p nin tanımından, $p((b,y)\circ(a,x)) = p((b\circ a,x)) = b\circ a = p((b,y))\circ p((a,x))$ bulunur. Ayrıca p nesneler üzerinde w ile verildiğinden,

$$p((1_{w(x)},x) = 1_{w(x)} = 1_{p((1_{w(x)},x))}$$

olup, p bir grupoid morfizmidir. Aynı zamanda p örtü morfizmidir. Çünkü, eğer $a \in G(x,y)$ ve $x' \in w^{-1}(x)$ ise (a,x') kaynağı x' ve izdüşümü a olan $G \ltimes X$ in bir tek elemanıdır. Böylece, $(p,\alpha) : G_\alpha \times_{p_0=w} (G \ltimes X)_0 \to G \ltimes X$ bire-bir ve örtendir.

3. İspat için sadece $(G \ltimes X)(x,y)$ boştan farklı olması için gerek ve yeter şartın ${}^a x = y$ olacak şekilde bir $a \in G$ nin var olması olduğunu göstermek yeterlidir.

4. $(G \ltimes X)\{x\} = \{(a,x) \mid \alpha(a,x) = x$ ve $\beta(a,x) = x\}$ olup $\beta(a,x) = {}^a x$ ile tanımlı olduğundan ve verteks grubun tanımından, ${}^a x = x$ olduğu açıktır.

□

Önerme 2.1.6. *G geçişli grupoidinin bir nesnesi x, $G\{x\}$ grubunun bir altgrubu $N\{x\}$ ve $X = \{a\circ N\{x\} \mid a \in G_x\}$ olsun. $w : X \to G_0$ dönüşümü, $a\circ N\{x\} \mapsto \beta(a)$ ile tanımlansın. Bu durumda, ${}^b(a\circ N\{x\}) = b\circ a\circ N\{x\}$ ile G, X üzerine geçişli olarak etki eder. $\tilde{x}$, $N\{x\}$ yan kümesi olmak üzere $p : (G\ltimes X,\tilde{x}) \to (G,x)$ geçişli örtü morfizmi, $N\{x\}$ karakteristik grubuna sahiptir. Ayrıca $p^{-1}(x)$, $G\{x\}$ deki $N\{x\}$ nin sol yan kümelerinin $G\{x\}/N\{x\}$ kümesidir [6].*

İspat. $a \in G(x,y)$ ve $b \in G(y,z)$ olsun. Bu durumda, $w(a\circ N\{x\}) = y$ ve $w(b\circ a\circ N\{x\}) = z$ olup $w({}^b(a\circ N\{x\})) = z = \beta(b)$ dir. Yani, etkinin ilk şartı sağlanır. $b' \in G(z,z')$ için ${}^{b'}({}^b(a\circ N\{x\})) = {}^{b'}(b\circ a\circ N\{x\}) = b'\circ(b\circ a\circ N\{x\}) = (b'\circ b)\circ(a\circ N\{x\}) = {}^{b'\circ b}(a\circ N\{x\})$ olup, ikinci şart sağlanır. Son olarak, ${}^{1_y}(a\circ N\{x\}) = 1_y\circ a\circ N\{x\} = a\circ N\{x\}$ olup üçüncü şart da sağlanır. Böylece, etki şartları sağlanır. Etki geçişlidir. Gerçekten, $a \circ N\{x\}$, $a' \circ N\{x\}$ iki yan küme ve $b = a' \circ a^{-1}$ ise $b \circ a \circ N\{x\} = a' \circ N\{x\}$ dir. Buradan $G \ltimes X$ geçişlidir. $N\{x\}$ ve $a \circ N\{x\}$ tanımlı olmak üzere istenen karakteristik grup G nin elemanlarından oluşur ve bunun sağlanması için gerek ve yeter şart $a \in N\{x\}$ olmasıdır. Böylece $N\{x\}$ karakteristik gruptur. □

Önerme 2.1.6 da elde edilen noktalı grupoid, litaratürde $Tr(G, N\{x\})$ ile gösterilir ve bu grupoide $G\{x\}$ *in* $N\{x\}$ *altgrubu üzerine kurulmuş* G *nin örtü grupoidi* denir.

Sonuç 2.1.3. *Her geçişli grupoid bir evrensel örtü grupoidine sahiptir [6].*

Önerme 2.1.7. *G geçişli bir grupoid, $x \in G_0$ ve $N\{x\}$ de $G\{x\}$ nesne grubunun altgrubu olsun. Bu durumda, geçişli bir H grupoidi, grupoidlerin bir $p : H \to G$ örtü morfizmi ve $p(H\{\tilde{x}\}) = N\{x\}$ şartını sağlayan bir $\tilde{x} \in H_0$ vardır [6].*

Bu şekilde elde edilen örtü grupoidine, $G\{x\}$ grubunun $N\{x\}$ altgrubu üzerinde oluşturulmuş G nin *örtü grupoidi* denir. G grupoidinin geçişli olmaması durumunda, herbir $C_x(G)$ bileşeninden temsilci bir x nesnesi ve $N\{x\} \subseteq G\{x\}$ altgrubu seçilir. Böylece, herbir $C_x(G)$ bileşeni için, $p_x : C_x(H) \to C_x(G)$ örtüsü elde edilir. Bu örtüler bize $p : H \to G$ örtü morfizmini verir. Eğer $N\{x\}$ altgruplarının hepsi aşikar grup ise örtü *evrenseldir.* H nın inşasından $\pi_0 p : \pi_0 H \to \pi_0 G$ bire-bir, örten ve H da 1-geçişlidir.

Böylece nesneleri (X, w) etkileri ve bir (X, w) nesnesinden (X', w') nesnesine bir morfizmi, $w' \circ f = w$ ve $f(^a x) = {^a f(x)}$ şartlarını sağlayan $f : X \to X'$ fonksiyonu olan $GdOp(G)$ kategorisi elde edilir [9].

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "w"'] & & X' \arrow[dl, "w'"] \\ & G_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\alpha \times_w X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ G_\alpha \times_{w'} X' \arrow[r, "\phi'"'] & X' \end{tikzcd}$$

Bu kategoride kaynak dönüşümü $\alpha(f) = (X, w)$, hedef dönüşümü $\beta(f) = (X', w')$ ve nesne dönüşümü $1_{(X,w)} : (X, w) \to (X, w)$ ile tanımlıdır. Ayrıca komposizyon,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "w"'] & X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "w'"] & X'' \arrow[dl, "w''"] \\ & G_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\alpha \times_w X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ G_\alpha \times_{w'} X' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "1\times f'"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ G_\alpha \times_{w''} X'' \arrow[r, "\phi''"] & X'' \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramları ile tanımlıdır.

Teorem 2.1.1. *G bir grupoid olsun. Bu durumda, G' nin örtülerinin $GdCov(G)$ kategorisi ile kümeler üzerine etkilerinin $GdOp(G)$ kategorisi denktir [9].*

İspat. $\Gamma : GdOp(G) \to GdCov(G)$ funktorunu aşağıdaki gibi tanımlayalım: G grupoidinin X üzerine $w : X \to G_0$ aracılığıyla etkisi $\phi : G\ {}_\alpha\!\times_w X \to X,\ (a,x) \mapsto \phi(a,x) = {}^a x$ olsun. Böylece, Örnek 2.1.4 den nesnelerinin kümesi X ve morfizmleri kümesi $G_\alpha \times_w X$ kümesi olan $G \ltimes X$ etki grupoidi vardır. $p : G \ltimes X \to G$ morfizmi, nesneler üzerinde w ve morfizmler üzerinde $(a,x) \mapsto a$ ile verilsin. Önerme 2.1.5 den $p : G \ltimes X \to G$ grupoidlerin bir örtü morfizmidir. Yani $\Gamma(X,w)$, grupoidlerin örtü morfizmidir. Böylece Γ istenildiği gibi bir funktordur.

Tersine, $\Phi : GdCov(G) \to GdOp(G)$ funktorunu aşağıdaki gibi tanımlayalım: Grupoidlerin $p : \tilde{G} \to G$ örtü morfizmi için, $X = \tilde{G}_0$ ve $w = p_0 : \tilde{G}_0 \to G_0$ olsun. Böylece, Örnek 2.1.3 deki gibi, G grupoidinin $X = \tilde{G}_0$ üzerine $w = p_0$ aracılığıyla $\phi : G_\alpha \times_{p_0} \tilde{G}_0 \to \tilde{G}_0$, $(a, \tilde{x}) \mapsto {}^a\tilde{x} = \tilde{\beta}(\tilde{a})$ etkisini, $s_p : G_\alpha \times_{p_0} \tilde{G}_0 \to \tilde{G}$ ile $\beta : \tilde{G} \to \tilde{G}_0$ hedef dönüşümünün bileşkesinden elde ederiz. Yani $\Phi(p)$, G grupoidinin bir küme üzerine etkisidir. Böylece Φ istenildiği gibi bir funktordur.

$\Phi\Gamma = 1_{GdOp(G)}$ olduğu açıktır. Ayrıca $\Gamma\Phi \cong 1_{GdCov(G)}$ olduğu kolayca gösterilebilir.

□

2.2 Topolojik Grupoidlerin Örtüleri ve Etkileri

Bu kısımda topolojik grupoidlerin örtülerinin kategorisi ile etkilerinin kategorisinin denkliği verilecektir. Bunun için temel problem, taban uzayının topolojisinin üst uzaya yükseltilmesi olup bu kısımda bu problemin ayrıntıları ile ilgilenmeyeceğiz. Sözkonusu ayrıntılar [6] ve [9]' da bulunabilir.

Örtü uzayları ile grupoidler arasındaki ilişkide $\pi_1 X$ esas grupoidi temel rol oynamaktadır. Örnek 2.1.2' de topolojik uzaylar arasında bir örtü dönüşümü verildiğinde bu uzaylara karşılık gelen esas grupoidler arasında bir örtü morfizminin varolduğunu biliyoruz. Dolayısıyla topolojik grupoidlerin örtülerine geçmeden önce $\pi_1 X$ esas grupoidinin örtüleri ile ilgili bazı bilgileri ve Tanım 1.2.16' da verilen $TCov(X)$ kategorisi ile $\pi_1 X$ esas grupoidinin örtülerinin $GdCov(\pi_1 X)$ kategorisinin denkliğini vereceğiz.

Önerme 2.2.1. *$f : Z \to X$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\pi_1 f : \pi_1 Z \to \pi_1 X$ morfizmi bir $f\,' : \pi_1 Z \to \tilde{G}$ morfizmine yükseltilebiliyorsa, $\tilde{f} = f'_0 : Z \to \tilde{X}$ süreklidir ve $f : Z \to X$ dönüşümünün bir yükseltmesidir. f nin bütün yükseltmeleri bu yolla elde edilir [6].*

$$\begin{tikzcd} & \tilde{X} \arrow[d, "q_0"] \\ Z \arrow[ur, "\tilde{f}"] \arrow[r, "f"'] & X \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \tilde{G} \arrow[d, "q"] \\ \pi_1 Z \arrow[ur, "f'"] \arrow[r, "\pi_1 f"'] & \pi_1 X \end{tikzcd}$$

Önerme 2.2.2. *$p : \tilde{X} \to X$ bir örtü dönüşümü olsun. $\tilde{X}$ nın topolojisi $\pi_1 p : \pi_1 \tilde{X} \to \pi_1 X$ tarafından yükseltilmiş X in topolojisidir [6].*

Bu önermeden yararlanarak ilerideki teoremlerin ispatlarında kullanılacak olan temel bir önermeyi ifade edelim. Bu önermenin ispatı [6]' da bulunabilir.

Önerme 2.2.3. *X evrensel örtü uzayına sahip bir topolojik uzay, $q : \tilde{G} \to \pi_1 X$ grupoidlerin örtü morfizmi, $\tilde{X} = \tilde{G}_0$, $p = q_0 : \tilde{X} \to X$ ve $\mathcal{U}$, X in bütün açık, yol bağlantılı ve yükseltilebilir komşuluklarının bir ailesi olsun. Bu durumda $\tilde{X}$ üzerindeki topoloji aşağıdakileri sağlayan tek topolojidir [6]:*

1. *$p : \tilde{X} \to X$ örtü dönüşümüdür,*
2. *aşağıdaki diyagramı değişimli yapan ve nesneler üzerinde özdeş olan bir $r : \tilde{G} \to \pi_1 \tilde{X}$ izomorfizmi vardır.*

$$\begin{tikzcd} & \pi_1 \tilde{X} \arrow[d, "p"] \\ \tilde{G} \arrow[ur, "r"] \arrow[r, "q"'] & \pi_1 X \end{tikzcd}$$

X topolojik uzay ise $\pi_1 X$' in bir grupoid olduğunu biliyoruz. $\pi_1 X$' in ne zaman topolojik grupoid olduğunu bir önerme ile verelim.

Önerme 2.2.4. *X evrensel örtüye sahipse $\pi_1 X$ bir topolojik grupoiddir [28].*

İspat. X evrensel örtüye sahip topolojik uzay ise $\pi_1 X$ in bir grupoid olduğu esas grupoid kısmında ispatlanmıştı. Şimdi $\pi_1 X$ in topolojik grupoid olduğunu gösterelim. Nesne kümesi X olduğundan bir topolojik uzaydır. Şimdi X in topolojisi yardımıyla $\pi_1 X$ üzerine topoloji koyalım. X evrensel örtüye sahip olduğundan, X in $\mathcal{U}$ açık örtüsü, X in bütün açık ve yol bağlantılı U altkümelerinden oluşur ve $i : U \to X$ dahil etme dönüşümleri U nun esas grubunu aşikar gruba dönüştürür. $\mathcal{U}$ daki herbir U ve U daki herbir x için $\lambda_x : U \to \pi_1 X$, seçilen bir $x' \in U$ ya U da x den x' ne bir yolu karşılık getirsin ve $\lambda_x(x')$, $\pi_1 X(x, x')$ deki yolların bir denklik sınıfı olsun. U üzerindeki şartlar, $\lambda_x(x')$ nün x den x' ne U daki yolların seçilişinden bağımsız olmasını gerektirir. $\tilde{U}_x = \lambda_x(U)$ ve $[a] \in \pi_1 X(x, y)$ olsun. Bu durumda $U, V \in \mathcal{U}$, $x \in U$ ve $y \in V$ için $\tilde{V}_y[a]\tilde{U}_x^{-1}$ kümeleri $\pi_1 X$ üzerindeki yükseltilmiş topolojinin temel komşuluklarıdır [28]. Böylece $x \in U \in \mathcal{U}$, $y \in V \in \mathcal{U}$, $[a] \in \pi_1 X(x, y)$ ve $[a]$ nın temel komşuluğu $\tilde{V}_y[a]\tilde{U}_x^{-1}$ olsun. Bu durumda, $\alpha(\tilde{V}_y[a]\tilde{U}_x^{-1}) \subset U$ ve $\beta(\tilde{V}_y[a]\tilde{U}_x^{-1}) \subset V$ olup $\alpha, \beta : \pi_1 X \to X$ dönüşümleri süreklidir. Benzer şekilde, nesne ve ters dönüşümlerinin sürekliliği de gösterilebilir. Şimdi $m : \pi_1 X \; {}_\alpha\times_\beta \, \pi_1 X \to \pi_1 X$ kompozisyonunun sürekliliğini gösterelim. $[a] \in \pi_1 X(x, y)$ ve $[b] \in \pi_1 X(y, z)$ için, $[b] \circ [a] = [b \circ a]$ ve $\tilde{W}_z[b \circ a]\tilde{U}_x^{-1}$, $[b \circ a]$ nın temel komşuluğu olsun. Böylece, herhangi bir $V \in \mathcal{U}$ ve $y \in V$ için,

$$m((\tilde{W}_z[b]\tilde{V}_y^{-1}) \;{}_\alpha\times_\beta\; (\tilde{V}_y[a]\tilde{U}_x^{-1})) = \tilde{W}_z[b \circ a]\tilde{U}_x^{-1}$$

olup kompozisyon işlemi süreklidir. Sonuç olarak, $\pi_1 X$ bir topolojik grupoiddir. □

Böylece X evrensel örtüye sahip olmak üzere $GdCov(\pi_1 X)$ kategorisi; nesneleri $p : \tilde{G} \to \pi_1 X$ örtü morfizmleri ve $p : \tilde{G} \to \pi_1 X$ nesnesinden $q : \tilde{H} \to \pi_1 X$ nesnesine bir morfizmi, $p = q \circ r$ şartını sağlayan $r : \tilde{G} \to \tilde{H}$ morfizmi olan bir kategoridir.

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{H} \arrow[dl, "q"] \\ & \pi_1 X & \end{tikzcd}$$

Bu kategoride; kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ ile tanımlıdır. Ayrıca, $r : \tilde{G} \to \tilde{H}$ ve $r' : \tilde{H} \to \tilde{K}$ iki morfizm olmak üzere, kompozisyon

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{H} \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & \tilde{K} \arrow[dl, "p'"] \\ & \pi_1 X & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

İspatı [6]' da bulunan evrensel örtüye sahip bir X topolojik uzayının örtülerinin kategorisi ile X' e karşılık gelen $\pi_1 X$ esas grupoidinin örtülerinin kategorisinin denkliğini ifade edelim.

Önerme 2.2.5. *X evrensel örtüye sahip topolojik uzay olsun. Bu durumda X in örtülerinin $TCov(X)$ kategorisi, $\pi_1 X$ esas grupoidinin örtülerinin $GdCov(\pi_1 X)$ kategorisine denktir.*

Artık örtü uzayları ile esas grupoidler arasındaki ilişkiyi verdikten sonra topolojik örtü grupoidlerini verebiliriz. Bunun için öncelikle topolojik grupoidlerin örtü morfizmi tanımını verelim.

Tanım 2.2.1. *Topolojik grupoidlerin $p : H \to G$ morfizmi için, eğer $(p, \alpha) : H \to G_\alpha \times_{p_0} H_0$ dönüşümü homeomorfizm ise p morfizmine topolojik örtü morfizmi denir. Bu durumda, (p, α) nın tersi $s_p : G_\alpha \times_{p_0} H_0 \to H$ dönüşümüdür. Denk olarak, topolojik grupoidlerin $p : H \to G$ morfizmi ve her $x \in H_0$ için p nin $H_x \to G_{p(x)}$ kısıtlaması homeomorfizm ise p ye topolojik örtü morfizmi denir [19].*

Önerme 2.2.6. *$q : H \to G$ topolojik örtü morfizmi olsun ve topolojik grupoidlerin morfizmlerinin aşağıdaki değişimli diyagramı verilsin.*

$$\begin{tikzcd} & H \arrow[d, "q"] \\ H' \arrow[ur, "r"] \arrow[r, "p"'] & G \end{tikzcd}$$

Bu durumda, p nin topolojik örtü morfizmi olması için gerek ve yeter şart r nin topolojik örtü morfizmi olmasıdır [19].

İspat. $q : H \to G$ ve $r : H' \to H$ topolojik örtü morfizmleri olsun. Bu durumda her bir $h' \in H'_0$ için $H'_{h'} \to H_{r(h')}$ ve $H_{r(h')} \to G_{qr(h')}$ kısıtlamaları homeomorfizm olacağından p nin $G_{p(h')}$ ne kısıtlaması da bir homeomorfizmdir. Böylece, p soyut örtü morfizmidir ve $s_p : G_\alpha \times_{p_0} H'_0 \to H'$ yükseltmesi vardır. s_p nin sürekli olduğu aşağıdaki bileşkeden açıktır. Burada P_2, ikinci izdüşüm dönüşümüdür.

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \times_{r_0} H'_0 \arrow[r, "(1\times r_0, P_2)"] \arrow[d, "s_p"'] & (G_\alpha \times_{q_0} H_0)\ {}_\alpha\!\times_{r_0} H'_0 \arrow[d, "s_q\times 1"] \\ H' & H\ {}_\alpha\!\times_{r_0} H'_0 \arrow[l, "s_r"] \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} (g, y') \arrow[r, "(1\times r_0, P_2)"] \arrow[d, "s_p"'] & ((g, r_0(y')), y') \arrow[d, "s_q\times 1"] \\ y' & (h, y') \arrow[l, "s_r"] \end{tikzcd}$$

Tersine $q : H \to G$ ve $p : H' \to G$ topolojik örtü morfizmi olsun. Bu durumda, $r : H' \to H$ soyut anlamda topolojik örtü morfizmidir. $h' \in H'_0$ için r nin $H'_{h'}$ ne kısıtlaması, $H_{r(h')}$ üzerine bir homeomorfizmdir. Böylece $s_r : H_\alpha \times_{r_0} H'_0 \to H'$ yükseltmesi vardır. s_r nin sürekliliği aşağıdaki bileşkeden bulunur.

$$H_\alpha \times_{r_0} H'_0 \xrightarrow{q\times 1} G_\alpha \times_{p_0} H'_0 \xrightarrow{s_p} H'$$

□

Örnek 2.2.1. *$\tilde{X}$ ve X evrensel örtüye sahip olmak üzere topolojik uzayların $p : \tilde{X} \to X$ örtü dönüşümü verilsin. Bu durumda, $\pi_1 p : \pi_1\tilde{X} \to \pi_1 X$ indirgenmiş morfizmi de topolojik grupoidlerin topolojik örtü morfizmidir. Gerçekten, X ve $\tilde{X}$ evrensel örtüye sahip olduğundan Önerme 2.2.4 den $\pi_1\tilde{X}$ ve $\pi_1 X$ birer topolojik grupoiddir. Ayrıca, Örnek 2.1.2 den $\pi_1 p : \pi_1\tilde{X} \to \pi_1 X$ grupoidlerin örtü morfizmidir. Şimdi, $\pi_1 p$ nin topolojik grupoidlerin örtü morfizmi olduğunu gösterelim. $[\tilde{a}] \in \pi_1\tilde{X}(\tilde{x}, \tilde{y})$, $[a] \in \pi_1 X(x, y)$ ve U, U' sırasıyla x ve y nin kanonik komşulukları olsun. Bu durumda, $\tilde{x}$,$\tilde{y}$ nın, sırasıyla V,V' kanonik komşulukları vardır ve $p(V) \subset U$ ve $p(V') \subset U'$ dür. Böylece $\pi_1 p(\tilde{V}'_{\tilde{y}}[\tilde{a}]\tilde{V}_{\tilde{x}}^{-1}) \subseteq \tilde{U}'_y[a]\tilde{U}_x^{-1}$ olup $\pi_1 p$ süreklidir. $(\pi_1 p)_0 = p$ olup p, topolojik uzayların örtü dönüşümü olduğundan süreklidir. Dolayısıyla $\pi_1 p$*

topolojik grupoidlerin bir morfizmidir. $\pi_1 p$ *topolojik grupoid morfizmi ve* α *topolojik grupoidin kaynak dönüşümü olduğundan süreklidir. Dolayısıyla* $(\pi_1 p, \alpha) : \pi_1 \tilde{X} \to \pi_1 X \ {}_{\alpha}\times_{(\pi_1 p)_0} \tilde{X}$ *dönüşümü süreklidir ve* $\pi_1 p$ *grupoidlerin örtü morfizmi olduğundan* $(\pi_1 p, \alpha)$ *bire-bir ve örtendir. Son olarak,* $(\pi_1 p, \alpha)$ *nın açık olduğunu gösterelim.* $[\tilde{a}] \in \pi_1 \tilde{X}(\tilde{x}, \tilde{y})$ *olsun. Böylece* $\tilde{x}, \tilde{y}$ *nın* V,V' *kanonik komşuluklarını seçebiliriz. Buradan,* $U = p(V)$ *ve* $U' = p(V')$ *sırasıyla* $x = p(\tilde{x})$ *ve* $y = p(\tilde{y})$ *nın kanonik komşulukları bulunur. Eğer* $W = \tilde{V}_{\tilde{x}}[\tilde{a}](\tilde{V}'_{\tilde{y}})^{-1}$ *ise* $(\pi_1 p, \alpha)(W) = (\pi_1 p)(W) \ {}_{\alpha}\times_{(\pi_1 p)_0} V$ *iken* $\pi_1 p(W)$, $\pi_1 p([\tilde{a}])$ *nın temel komşuluğudur ve* $\pi_1 X \ {}_{\alpha}\times_{(\pi_1 p)_0} \tilde{X}$ *da açıktır. Böylece* $(\pi_1 p, \alpha)$ *bir homeomorfizm olup* $\pi_1 p$ *topolojik grupoidlerin örtü morfizmidir [9].*

Tanım 2.2.2. *G bir topolojik grupoid, X bir topolojik uzay ve* $w : X \to G_0$ *sürekli bir dönüşüm olsun. Tanım.2.1.2 deki* $w({}^a x) = \beta(a)$, ${}^b({}^a x) = {}^{b \circ a} x$ *ve* ${}^{1_{w(x)}} x = x$ *şartlarını sağlayan* $\phi : G_\alpha \times_w X \to X$, $(a, x) \mapsto {}^a x$, *sürekli dönüşümü varsa G, X topolojik uzayı üzerine w vasıtasıyla topolojik olarak etki eder denir [21].*

Örnek 2.2.2. $p : H \to G$ *topolojik grupoidlerin örtü morfizmi olsun. Bu durumda Örnek.2.1.3 den G,* $w = p_0 : H_0 \to G_0$ *vasıtasıyla* $X = H_0$ *üzerine etki eder. Şimdi etkinin topolojik etki olduğunu gösterelim.* $p : H \to G$ *topolojik örtü morfizmi olduğundan p, p_0 süreklidir ve* $s_p : G_\alpha \times_{p_0} H_0 \to H$ *bir homeomorfizmdir. Dolayısıyla w süreklidir ve topolojik grupoidin β hedef dönüşümü ile s_p nin bileşkesi olarak tanımlı olan* $\phi : G_\alpha \times_{p_0} H_0 \to H_0$, $(a, x) \mapsto {}^a x = \beta(\tilde{a})$, *etkisi süreklidir. Böylece G, H_0 üzerine topolojik olarak etki eder [21].*

G bir topolojik grupoid olsun. Topolojik etkiler arasındaki bir $f : (X, w) \to (X', w')$ morfizmi, $q \circ f = p$ ve $(a, x) \in G_\alpha \times_w X$ için $f({}^a x) = {}^a f(x)$ şartlarını sağlayan sürekli bir $f : X \to X'$ dönüşümüdür. Bu şartlar aşağıdaki değişimli diyagramları verir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "w"'] & & X' \arrow[dl, "w'"] \\ & G_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\alpha \times_w X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1 \times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ G_\alpha \times_{w'} X' \arrow[r, "\phi'"'] & X' \end{tikzcd}$$

Böylece, nesneleri (X, w) topolojik etkileri ve morfizmleri de yukarıdaki gibi topolojik etkilerin morfizmleri olan $TGdOp(G)$ kategorisini elde ederiz [30]. Bu kategoride kaynak dönüşümü $\alpha(f) = (X, w)$, hedef dönüşümü $\beta(f) = (X', w')$ ve nesne dönüşümü $1_{(X,w)} : (X, w) \to (X, w)$ ile tanımlıdır. Ayrıca kompozisyon,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "w"'] & X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "w'"] & X'' \arrow[dl, "w''"] \\ & G_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\alpha \times_w X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ G_\alpha \times_{w'} X' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "1\times f'"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ G_\alpha \times_{w''} X'' \arrow[r, "\phi''"] & X'' \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramları ile tanımlıdır.

Bu kısmın ana teoremlerinin ispatlarında kullanılacak olan ve ayrıntılı açıklaması [30]' da yer alan bir örneği verelim.

Örnek 2.2.3. *X bir topolojik uzay ve G de X üzerine $w : X \to G_0$ sürekli dönüşümü vasıtasıyla etki eden topolojik grupoid olsun. Böylece Örnek 2.1.4 den, nesne kümesi X ve morfizmleri kümesi $G_\alpha \times_w X$ olan bir $G \ltimes X$ etki grupoidi tanımlıdır. $G \ltimes X$ grupoidinin yapı dönüşümlerinin sürekliliği ve $p : G \ltimes X \to G$ izdüşümünün topolojik grupoidlerin örtü morfizmi olduğu kolayca gösterilir.*

Tanım 2.2.3. *G bir topolojik grupoid, X bir topolojik uzay ve $w : X \to G_0$ sürekli bir dönüşüm olsun. Eğer $X\ {}_w\!\times_\beta G = \{(x, a) \in X \times G \mid \beta(a) = w(x)\}$ olmak üzere $w(x^a) = \alpha(a)$, $(x^a)^b = x^{b\circ a}$ ve $x^{1_{w(x)}} = x$ şartlarını sağlayan $\phi : X\ {}_w\!\times_\beta G \to X$, $(x, a) \mapsto x^a$, sürekli dönüşümü varsa G topolojik grupoidi, X uzayı üzerine w vasıtasıyla sağdan topolojik olarak etki eder (veya kısaca X bir sağ G-uzaydır) denir ve (w, X) ile gösterilir [19].*

Gruplarda olduğu gibi ${}^a x = x^{a^{-1}}$ kuralıyla bir sol G-uzay, bir sağ G-uzaya dönüştürülebilir.

Tanım 2.2.4. *G, H birer topolojik grupoid ve X bir topolojik uzay olsun. G, X üzerine w sürekli dönüşümü vasıtasıyla soldan ve H da X üzerine w' sürekli dönüşümü vasıtasıyla sağdan etki ediyor ve $x \in X$, $a \in G$, $b \in H$ için ${}^a x, x^b$ tanımlı olmak üzere $w'({}^a x) = w'(x)$, $w(x^b) = w(x)$ ve ${}^a(x^b) = ({}^a x)^b$ şartları sağlanıyorsa, X e bir G-H-uzayı(bispace) denir ve (w', X, w) ile gösterilir. Böylece G ve H, X üzerine w-w' vasıtasıyla etki eder denir [19].*

Böyle bir etki için en temel örnek, ayrıntıları [19]' da bulunan bir G topolojik grupoidinin kendisi üzerine hedef ve kaynak dönüşümlerinin kullanılmasıyla aşağıdaki gibi verilir.

Örnek 2.2.4. *G bir topolojik grupoid olsun. Bu durumda G, kendi üzerine β-α vasıtasıyla etki eder. Etki, G deki kompozisyon ile tanımlanır.*

Şimdi böyle bir etki ile yörünge uzayları arasındaki ilişkiyi bir teorem ile ifade edelim.

Teorem 2.2.1. *H bir topolojik grup ve G de G_0 nesne uzayı Hausdorff olan bir topolojik grupoid olsun. Eğer X, bir G-H-uzay ise G nin X üzerine etkisi X/H yörünge uzayı üzerinde bir sol G-uzay yapısı belirler[19] .*

G bir topolojik grupoid olsun. Örnek 2.2.4 de G nin β-α vasıtasıyla bir G-G-uzay olduğu gösterilmişti. Şimdi, $x \in G_0$ ve $N\{x\}$ de $G\{x\}$ in altgrubu olsun. Bu durumda G_x, bir G-$N\{x\}$-uzaydır. Böylece, $N\{x\}$ in sol yan kümelerinin $G_x/N\{x\} = G_{N\{x\}}$ uzayı tanımlanır.

Sonuç 2.2.1. *Eğer G_0 nesne uzayı Hausdorff uzay ve $N\{x\}$, $G\{x\}$ in altgrubu ise sol çarpma $G_{N\{x\}}$ uzayına bir sol G-uzay yapısı verir.*

Bu sonucu topolojik grupoidlerin örtüleri ile aşağıdaki önerme aracılığıyla ilişkilendirelim.

Önerme 2.2.7. *G, G_0 nesne uzayı Hausdorff uzay olan bağlantılı topolojik grupoid, $x \in G_0$ ve $N\{x\}$, $G\{x\}$ nesne grubunun altgrubu olsun. Bu durumda bağlantılı bir H topolojik grupoidi, $p : H \to G$ topolojik örtü morfizmi ve $p(H\{\tilde{x}\}) = N\{x\}$ olacak şekilde bir $\tilde{x} \in H_0$ vardır [19].*

X, evrensel örtüye sahip topolojik uzay olsun. $\tilde{X}$ da evrensel örtüye sahip topolojik uzay olmak üzere, $UTCov(X)$ kategorisi; nesneleri $p : \tilde{X} \to X$ topolojik örtü dönüşümleri ve $p : \tilde{X} \to X$ nesnesinden $q : \tilde{Y} \to X$ nesnesine morfizmi, $p = q \circ r$ şartını sağlayan $r : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ dönüşümü olan bir kategoridir [21].

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{Y} \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Bu kategoride; kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1 : \tilde{X} \to \tilde{X}$ ile tanımlıdır. Ayrıca, $r : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ ve $r' : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ iki morfizm olmak üzere kompozisyon,

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{Y} \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & \tilde{Z} \arrow[dl, "p'"] \\
& X &
\end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

X evrensel örtüye sahip topolojik uzay ise Önerme 2.2.4 den $\pi_1 X$ esas grupoidi bir topolojik grupoiddir. $UTGdCov(\pi_1 X)$ kategorisi, $\tilde{X} = \tilde{G}_0$ evrensel örtüye sahip olmak üzere nesneleri $p : \tilde{G} \to \pi_1 X$ topolojik grupoidlerin örtü morfizmleri ve $p : \tilde{G} \to \pi_1 X$ nesnesinden $q : \tilde{H} \to \pi_1 X$ nesnesine bir morfizmi, $p = q \circ r$ şartını sağlayan topolojik grupoidlerin $r : \tilde{G} \to \tilde{H}$ morfizmi olan bir kategoridir [21].

$$\begin{tikzcd}
\tilde{G} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{H} \arrow[dl, "q"] \\
& \pi_1 X &
\end{tikzcd}$$

Bu kategoride; kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ ile tanımlıdır. Ayrıca, $r : \tilde{G} \to \tilde{H}$ ve $r' : \tilde{H} \to \tilde{K}$ iki morfizm olmak üzere kompozisyon,

$$\begin{tikzcd}
\tilde{G} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{H} \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & \tilde{K} \arrow[dl, "p'"] \\
& \pi_1 X &
\end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

Son olarak bu kısmın ana sonucunu [21] ve [30]' da ispatları verilen bir önerme ve teorem ile verelim.

Önerme 2.2.8. *$UTGdCov(\pi_1 X)$ ile $UTCov(X)$ kategorileri denktir.*

Teorem 2.2.2. *G topolojik grupoidinin örtülerinin $TGdCov(G)$ kategorisi ile etkilerinin $TGdOp(G)$ kategorisi denktir.*

2.3 Lie Grupoidlerin Örtüleri ve Etkileri

Bu kısımdan itibaren aksi belirtilmedikçe Lie grupoidleri ve diferensiyellenebilir manifoldları bağlantılı olarak kabul edeceğiz.

Lie örtü grupoidlerinin tanımını vermeden önce ilerideki ispatlarda temel oluşturacak bir örnek ve teoremi ifade edelim.

Örnek 2.3.1. *M bir bağlantılı diferensiyellenebilir manifold ve $\pi(M) = \{(x, [\sigma], y) \mid x, y \in M$ ve $[\sigma]$, eğrilerin homotopi sınıfı,$\sigma(0) = x$, $\sigma(1) = y\}$ olsun. Bu takdirde, $\pi(M)$ aşağıdaki kurallarla M üzerinde bir Lie grupoiddir:*

$\alpha(x, [\sigma], y) = x$, $\beta(x, [\sigma], y) = y$

$\mu((x, [\sigma], y), (y', [\tau], z)) = (x, [\sigma \circ \tau], z) \Longleftrightarrow y = y'$

$\epsilon(x) = (x, [sabit], x)$

$(x, [\sigma], y)^{-1} = (y, [\sigma^{-1}], x)$.

Eğer $\pi(M)$, M nin eğrilerinin uzayı üzerinde kompakt açık topolojinin bölüm topolojisi ile donatılırsa o zaman $\alpha \times \beta : \pi(M) \to M \times M$ bir örtü dönüşümüdür. $\pi(M)$' nin M üzerinde bir Lie grupoid olduğu gelir ve ona M' ye karşılık gelen esas grupoid denir. Onun izotropi grupları $\pi_1(M, x)$, $\forall x \in M$, esas gruplarıdır [11].

Teorem 2.3.1. *M, r sınıfından n-boyutlu bağlantılı bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu takdirde, πM nin her A geçişli geniş normal altgrupoidi için*

$$\pi_A M = (\pi_A M, \overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A, \overline{\theta}_A, \overline{u}_A, \overline{\sigma}_A)$$

r sınıfından bir Lie grupoiddir [41].

İspat. $M \times M$, $2n$ boyutlu bir C^r manifolddur. ([41],3.2.2)' den dolayı πM ve dolayısıyla $\pi_A M$ lokal aşikardır. Böylece $\pi_A M$, $M \times M$' nin bir örtü uzayıdır. Ve buradan $\pi_A M$, $2n$ boyutlu r sınıfından bir örtü manifoldudur. Ayrıca

$$(\overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A) : \pi_A M \to M \times M$$

örtü dönüşümü r sınıfındandır, ve buradan $\overline{\alpha}_A$ ve $\overline{\beta}_A$ r sınıfındandırlar. $\overline{\alpha}_A$ ve $\overline{\beta}_A$ nın ranklarının n olması gerçeği, lokal diffeomorfizmin, $(\overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A)$' nın projeksiyon özelliklerinin ve $pr_i : M_1 \times M_2 \to M_i$ nin bir sonucudur.

Şimdi $\overline{\mu}_A : (\pi_A M)_2 \to \pi_A M$ kompozisyonunun r sınıfından olduğunu gösterelim. $([a]_A, [b]_A) \in (\pi_A M)_2$ olsun. $U = \langle U_1, [a]_A, V_1\rangle \times \langle U_2, [b]_A, V_2\rangle$, $([a]_A, [b]_A)$' nin bir koordinat komşuluğu olsun. Bu takdirde, $\langle U_1, [a+b]_A, V_2\rangle$, $\pi_A M$' de $[a+b]_A$' nın bir koordinat komşuluğudur. (λ_i, U_i) ve (γ_i, V_i), $(i = 1, 2)$, M' de koordinat haritaları olsun. Bu takdirde,

$$\begin{aligned}
\psi_1 &= (\lambda_1 \times \gamma_1) \circ (\overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A) : \langle U_1, [a]_A, V_1\rangle \to IR^{2n} \\
\psi_2 &= (\lambda_2 \times \gamma_2) \circ (\overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A) : \langle U_2, [b]_A, V_2\rangle \to IR^{2n}
\end{aligned}$$

$$(\lambda_1 \times \gamma_2) \circ (\overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A) : \langle U_1, [a+b]_A, V_2\rangle \to IR^{2n}$$

$\pi_A M$' de haritalardır. Buradan

$$\psi_1 \times \psi_2 : \langle U_1, [a]_A, V_1\rangle \times \langle U_2, [b]_A, V_2\rangle \to IR^{4n}$$

$\pi_A M \times \pi_A M$' de bir haritadır. μ' nün temsilci fonksiyonu olan,

$$F = (\lambda_1 \times \gamma_2) \circ (\overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A) \circ \overline{\mu}_A \circ (\psi_1 \times \psi_2)^{-1} : \psi_1 \times \psi_2(U \cap (\pi_A M)_2) \to IR^{4n}$$

dönüşümünün C^r sınıfından olduğunu göstermeliyiz. Her $([c]_A, [d]_A) \in (\pi_A M)_2$ için

$$\begin{aligned}
\psi_1 \times \psi_2([c]_A, [d]_A) &= (\lambda_1(\alpha(c)), \gamma_1(\beta(c)), \lambda_2(\alpha(d)), \gamma_2(\beta(d))) \\
&= (\lambda_1^1(\alpha(c)), ..., \lambda_1^n(\alpha(c)), \gamma_1^1(\beta(c)), ..., \gamma_1^n(\beta(c)), \\
&\quad , \lambda_2^1(\alpha(d)), ..., \lambda_2^n(\alpha(d)), \gamma_2^1(\beta(d)), ..., \gamma_2^n(\beta(d)))
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
(\lambda_1 \times \gamma_2) \circ (\overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A) \circ \overline{\mu}_A ([c]_A, [d]_A) &= (\lambda_1 \times \gamma_2) \circ (\overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A) ([c+d]_A) \\
&= \lambda_1 \times \gamma_2 (\alpha(c), \beta(d)) \\
&= (\lambda_1^1(\alpha(c)), ..., \lambda_1^n(\alpha(c)), \gamma_2^1(\beta(d)), ..., \gamma_2^n(\beta(d)))
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla aşağıdaki değişimli diyagramlara sahibiz:

$$\begin{tikzcd}
U \cap (\pi_A M)_2 \arrow[rr, "\overline{\mu}_A"] \arrow[dd, "\psi_1 \times \psi_2"'] & & \langle U_1, [a+b]_A, V_2 \rangle \arrow[d, "(\lambda_1 \times \gamma_2)\circ(\overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A)"] \\
 & & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "pr_j"] \\
\psi_1 \times \psi_2(U \cap (\pi_A M)_2) \subseteq \mathbb{R}^{4n} \arrow[rr, "pr^j"'] & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
U \cap (\pi_A M)_2 \arrow[rr, "\overline{\mu}_A"] \arrow[dd, "\psi_1 \times \psi_2"'] & & \langle U_1, [a+b]_A, V_2 \rangle \arrow[d, "(\lambda_1 \times \gamma_2)\circ(\overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A)"] \\
 & & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "pr_j"] \\
\psi_1 \times \psi_2(U \cap (\pi_A M)_2) \subseteq \mathbb{R}^{4n} \arrow[rr, "pr^{2n+j}"'] & & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

İlk diyagramda $1 \leq j \leq n$ ve ikinci diyagramda $n \leq j \leq 2n$ olup pr_j, pr^j ve pr^{2n+j} açık olarak izdüşümlerdir, dolayısıyla C^r sınıfındandırlar. Böylece F ve dolayısıyla $\overline{\mu}_A$, r sınıfındandırlar.

Şimdi $\overline{\epsilon}_A : M \to \pi_A M$ nesne dönüşümünün r sınıfından olduğunu gösterelim. $x \in M$ ve $U \subseteq M$, x' in bir koordinat komşuluğu olsun. Bu takdirde $\langle U, [1_x]_A, U \rangle$, $\pi_A M$' de $[1_x]_A = \overline{\epsilon}_A(x)$ in bir koordinat komşuluğudur. Eğer $g : U \to IR^n$, M' de bir harita ise, o zaman

$$(g \times g) \circ (\overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A) : \langle U, [1_x]_A, U \rangle \to IR^{2n}$$

$\pi_A M$' de bir haritadır. Bu takdirde

$$P = (g \times g) \circ (\overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A) \circ \overline{\epsilon}_A \circ g^{-1} : IR^n \to IR^{2n}$$

$\overline{\epsilon}_A$ nın bir temsilci fonksiyonudur. Kolayca görülür ki P bir projeksiyondur ve buradan $\overline{\epsilon}_A$, maksimum n rankı ile bir C^r dönüşümdür.

Son olarak $\overline{i}_A : \pi_A M \to \pi_A M$, $[a]_A \mapsto [-a]_A$ ters dönüşümünün r sınıfından diferensiyellenebilir olduğunu gösterelim. $\langle U, [a]_A, V \rangle$, $[a]_A$' nın bir koordinat komşuluğu ve

$$(\lambda \times \gamma) \circ (\overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A) : \langle U, [a]_A, V \rangle \to B \subseteq IR^{2n}$$

bir harita olsun, burada (λ, U) ve (γ, V) M' deki koordinat haritalarıdır. Bu takdirde $\langle V, [-a]_A, U\rangle$, $[-a]_A$ nın bir koordinat komşuluğudur ve

$$(\gamma \times \lambda) \circ (\overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A) : \langle V, [-a]_A, U\rangle \to IR^{2n}$$

de $\pi_A M$' de bir haritadır. Aşağıdaki diyagramların değişimli olduğu kolayca görülür.

$$\begin{tikzcd}
\langle U, [a]_A, V\rangle \arrow[r, "\bar{i}_A"] \arrow[dd, "(\lambda\times\gamma)\circ(\overline{\alpha}_A,\overline{\beta}_A)"'] & \langle V, [-a]_A, U\rangle \arrow[d, "(\gamma\times\lambda)\circ(\overline{\alpha}_A,\overline{\beta}_A)"] \\
 & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "pr_j"] \\
B \subseteq \mathbb{R}^{2n} \arrow[r, "pr^{n+j}"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
\langle U, [a]_A, V\rangle \arrow[r, "\bar{i}_A"] \arrow[dd, "(\lambda\times\gamma)\circ(\overline{\alpha}_A,\overline{\beta}_A)"'] & \langle V, [-a]_A, U\rangle \arrow[d, "(\gamma\times\lambda)\circ(\overline{\alpha}_A,\overline{\beta}_A)"] \\
 & \mathbb{R}^{2n} \arrow[d, "pr_j"] \\
B \subseteq \mathbb{R}^{2n} \arrow[r, "pr^{j-n}"'] & \mathbb{R}
\end{tikzcd}$$

Burada ilk diyagramda $1 \leq j \leq n$ ve ikinci diyagramda $n \leq j \leq 2n$ dir. Böylece $pr_j \circ (\gamma \times \lambda) \circ (\overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A) \circ \bar{i}_A \circ (\overline{\alpha}_A, \overline{\beta}_A)^{-1} \circ (\lambda \times \gamma)^{-1}$ olduğu görülür, ve buradan $\bar{i}_A$ r sınıfından diferensiyellenebilirdir. □

Bundan sonraki kısımlarda bir fonksiyonun diferensiyellenebilirliği ile her mertebeden kısmi türevlerin mevcut ve sürekli olduğunu varsayacağız.

Şimdi Lie örtü grupoidlerinin tanımını verelim.

Tanım 2.3.1. *$p : \widetilde{G} \to G$ Lie grupoidlerin bir morfizmi olsun. Eğer her bir $\widetilde{x} \in \widetilde{G}_0$ nesnesi için p nin $\widetilde{G}_{\widetilde{x}} \to G_{p(\widetilde{x})}$ kısıtlaması diffeomorfizm ise p ye Lie grupoidlerin örtü morfizmi ve $\widetilde{G}$ Lie grupoidine de G nin Lie örtü grupoidi denir.*

$p : H \to G$ Lie grupoidlerin bir örtü morfizmi olsun ve aşağıdaki geri çekme diyagramı verilsin.

$$\begin{tikzcd}
G_\alpha \times_{p_0} H_0 \arrow[r, "pr_2"] \arrow[d, "pr_1"'] & H_0 \arrow[d, "p_0"] \\
G \arrow[r, "\alpha"] & G_0
\end{tikzcd}$$

Bu durumda

$$G_{\alpha \times_{p_0}} H_0 = \{(a, x) \in G \times H_0 \mid \alpha(a) = p_0(x)\}$$

olmak üzere $s_p : G_{\alpha \times_{p_0}} H_0 \to H$ fonksiyonu $p(h) = a$ şartını sağlayan (a, x) çiftini, x de başlayan bir tek $h \in H_x$ elemanına götüren bir yükseltme fonksiyonudur. Açıkça s_p, $(p, \alpha) : H \to G_{\alpha \times_{p_0}} H_0$ morfizminin tersidir.

Böylece $p : H \to G$ morfizminin Lie grupoidlerin bir örtü morfizmi olması için gerek ve yeter şart $(p, \alpha) : H \to G_{\alpha \times_{p_0}} H_0$ morfizminin diffeomorfizm olmasıdır.

Tanım 2.3.2. *Herhangi bir $p : \widetilde{G} \to G$ Lie grupoid morfizmi ve $\widetilde{x} \in \widetilde{G}_0$ için, $G\{p(\widetilde{x})\}$ Lie grubunun $p(\widetilde{G}\{\widetilde{x}\})$ Lie altgrubuna p nin $\widetilde{x}$ daki karakteristik grubu denir.*

Şimdi diferensiyellenebilir örtü dönüşümlerinden Lie grupoidlerin örtü morfizmlerine geçişi veren önemli bir önermeyi verelim.

Önerme 2.3.1. *Eğer $p : \widetilde{M} \to M$ diferensiyellenebilir örtü dönüşümü ise o zaman $\pi_1 p : \pi_1 \widetilde{M} \to \pi_1 M$ indirgenmiş morfizmi Lie grupoidlerin bir örtü morfizmidir.*

İspat. M ve $\widetilde{M}$ bağlantılı diferensiyellenebilir manifoldlar olduğundan Örnek 2.3.1' den $\pi_1 M$ ve $\pi_1 \widetilde{M}$ esas grupoidleri birer Lie grupoiddir. Ayrıca Örnek 2.1.2' den $\pi_1 p : \pi_1 \widetilde{M} \to \pi_1 M$ grupoidlerin örtü morfizmidir. Dolayısıyla $\pi_1 p$' nin Lie grupoidlerin örtü morfizmi olduğunu ispatlamak için $\pi_1 p$' nin diferensiyellenebilir olduğunu ve $(\pi_1 p, \alpha) : \pi_1 \widetilde{M} \to \pi_1 M_{\alpha \times_p} \widetilde{M}$ dönüşümünün tersi olan $s_{\pi_1 p} : \pi_1 M_{\alpha \times_p} \widetilde{M} \to \pi_1 \widetilde{M}$ yükseltme fonksiyonunun diferensiyellenebilir olduğunu göstermemiz gerekiyor. Önce $\pi_1 p$' nin diferensiyellenebilir olduğunu gösterelim. $p : \widetilde{M} \to M$ diferensiyellenebilir olduğundan $\widetilde{M}$ üzerindeki (U, φ) ve M üzerindeki (V, ψ) haritaları için $p(U) \subset V$ dir ve $\psi \circ p \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ bir diferensiyellenebilir dönüşümdür.

$$\begin{tikzcd} \widetilde{M} \arrow[r, "p"] \arrow[d, "\varphi"'] & M \arrow[d, "\psi"] \\ \mathbb{R}^n \arrow[r, "I"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$\pi_1 \widetilde{M}$ ve $\pi_1 M$ esas grupoidleri Lie grupoid olduğundan (U, φ) ve (V, ψ) haritalarının yükseltmeleri olan $(\widehat{U}, \widehat{\varphi})$ ve $(\widehat{V}, \widehat{\psi})$ yükseltilmiş haritaları aracılığıyla $\pi_1 p$ grupoid morfizmini $\widehat{\psi}^{-1} \circ Id \circ \widehat{\varphi}$ şeklinde tanımlayabiliriz. $\widehat{\psi}$ ve $\widehat{\varphi}$ sırasıyla $\pi_1 M$ ve $\pi_1 \widetilde{M}$ Lie grupoidlerinin harita dönüşümleri olduğundan diferensiyellenebilirdir. Ayrıca Id birim dönüşümü de diferensiyellenebilir olduğundan $\pi_1 p$ diferensiyellenebilirdir.

Şimdi de $s_{\pi_1 p}$' nin diferensiyellenebilirliğini gösterelim. $\pi_1 p$ Lie grupoidlerin morfizmi ve α, Lie grupoidin kaynak dönüşümü olduğundan $(\pi_1 p, \alpha) : \pi_1 \widetilde{M} \to \pi_1 M \,_{\alpha}\!\times_p \widetilde{M}$ dönüşümü diferensiyellenebilirdir. Ayrıca $\pi_1 p$ grupoidlerin örtü morfizmi olduğundan $(\pi_1 p, \alpha)$ bire-bir ve örtendir. Dolayısıyla $(\pi_1 p, \alpha)$' nın $s_{\pi_1 p} : \pi_1 M \,_{\alpha}\!\times_p \widetilde{M} \to \pi_1 \widetilde{M}$ tersi vardır. $s_{\pi_1 p}$ her bir $([a], \widetilde{x})$ ikilisini $\widetilde{x}$' da başlayan ve $\pi_1 p([b]) = [a]$ olacak şekilde b diferensiyellenebilir eğrilerinin bir tek $[b]_{\widetilde{x}}$ homotopi sınıfına götüren yükseltme fonksiyonudur. Homotopi yükseltme özelliği ve tek yükseltme özelliğinden $s_{\pi_1 p}$ iyi tanımlıdır. Ayrıca $s_{\pi_1 p}$,

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_1 M \,_{\alpha}\!\times_p \tilde{M} & \xrightarrow{I\times\epsilon} & \pi_1 M \times \pi_1 \widetilde{M} & \xrightarrow{I\times L_{\widetilde{a}}} & \pi_1 M \times \pi_1 \widetilde{M} & \xrightarrow{pr_2} & \pi_1 \widetilde{M} \\
([a], \widetilde{x}) & \longrightarrow & ([a], [1_{\widetilde{x}}]) & \longrightarrow & ([a], [\widetilde{a}]) & \longrightarrow & [\widetilde{a}]
\end{array}$$

diyagramındaki gibi diferensiyellenebilir dönüşümlerin bileşkesi olarak yazılabileceğinden diferensiyellenebilirdir. Böylece $s_{\pi_1 p}$ bir diffeomorfizm olup $\pi_1 p$ Lie grupoidlerin örtü morfizmidir.

□

Önerme 2.3.2. *M bağlantılı bir diferensiyellenebilir manifold, $q : \tilde{G} \to \pi_1 M$ grupoidlerin örtü morfizmi, $\tilde{M} = \tilde{G}_0$, $p = q_0 : \tilde{M} \to M$ ve $\mathcal{A}$, M manifoldunu diferensiyellenebilir manifold yapan ve bütün yükseltilebilir haritalarından meydana gelen atlası olsun. Bu durumda $\tilde{M}$ üzerindeki diferensiyellenebilir yapı aşağıdakileri sağlayan tek yapıdır:*

1. *$p : \tilde{M} \to M$ örtü dönüşümüdür,*
2. *aşağıdaki diyagramı değişimli yapan ve nesneler üzerinde özdeş olan bir $r : \tilde{G} \to \pi_1 \tilde{M}$ izomorfizmi vardır.*

$$\begin{tikzcd}
 & \pi_1 \tilde{M} \arrow[d, "\pi_1 p"] \\
\tilde{G} \arrow[ur, "r"] \arrow[r, "q"'] & \pi_1 M
\end{tikzcd}$$

İspat. İlk olarak $\tilde{M}$, yükseltilmiş manifolda sahip ise p nin örtü dönüşümü olduğunu gösterelim. $\tilde{\mathcal{A}}$, $\mathcal{A}$ nın elemanlarının yükseltmelerinin bir ailesi olsun. Böylece $\tilde{\mathcal{A}}$, $\tilde{M}$ üzerindeki diferensiyellenebilir manifoldun harita tanım kümeleri için bir atlas oluşturur. Eğer $U \in \mathcal{A}$ ise $p^{-1}(U)$, $\tilde{\mathcal{A}}$ nın elemanlarının birleşimidir, dolayısıyla p diferensiyellenebilirdir. Aynı zamanda, eğer $\tilde{U} \in \tilde{\mathcal{A}}$ ise $p(\tilde{U}) \in \mathcal{A}$ dır, yani p açık dönüşümdür. $\tilde{U}$, $\mathcal{A}$ nın U kümesinin bir yükseltmesi ise $p \mid_{\tilde{U}}$ kısıtlaması bire-bir ve örtendir. Böylece p, bir diffeomorfizmdir. Aynı zamanda $\tilde{U}$, $\tilde{M}$ da açık olduğundan $\tilde{U}$, $\tilde{M}$ da kanoniktir ve U, M de kanoniktir. Sonuç olarak p bir örtü morfizmidir. Şimdi, nesneler üzerinde özdeş olmak üzere $r : \tilde{G} \to \pi_1\tilde{M}$ morfizmini tanımlayalım. $\tilde{a} \in \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y})$ ve $q(\tilde{a}) \in \pi_1 M(x, y)$ olsun. Ayrıca $q(\tilde{a})$ nın temsilcisi $a : I \to M$ olsun. Bu durumda $\imath$, $\pi_1 I(0, 1)$ in bir tek elemanı olmak üzere a morfizmi, $(\pi_1 a)(\imath) = q(\tilde{a})$ şartını sağlayan bir $\pi_1 a : \pi_1 I \to \pi_1 M$ morfizmine indirgenir. I, 1-bağlantılı olduğundan $\pi_1 a$, $a' : (\pi_1 I, 0) \to (\tilde{G}, \tilde{x})$ morfizmine yükseltilir, burada $a'(\imath)$, $q(\tilde{a})$ nın yükseltmesidir ve $a'(\imath) = \tilde{a}$ dır. Örnek 2.3.1 den $a'_0 : I \to \tilde{M}$ diferensiyellenebilir olup $r(\tilde{a})$, $r(\tilde{a}) = [a'_0]$ olarak tanımlanabilir. Açıkça, $r(\tilde{a}) \in \pi_1\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ dır. Aynı zamanda $r(\tilde{a})$, $q(\tilde{a})$ daki temsilci a nın seçiminden bağımsızdır. Farklı a_1, a_2 temsilcileri denk olduğunda $\tilde{a}_1, \tilde{a}_2$ yükseltmeleri de denktir. Kabul edelim ki $b \in \tilde{G}(\tilde{y}, \tilde{z})$ olsun. Bu durumda, $r(b\tilde{a})$ ve $r(b)r(\tilde{a})$ nın her ikisi de $q(b\tilde{a})$ nın yükseltmesidir. Böylece $r(b\tilde{a}) = r(b)r(\tilde{a})$ bulunur. Bu, r nin morfizm olduğunu gösterir ve r nin tanımından $(\pi_1 p)r = q$ olduğu görülür. Önerme 2.1.2 den r morfizmi bir örtü morfizmidir. Bu, herbir $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{M}$ için $r : \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y}) \to \pi_1\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$ nin bire-bir olmasını gerektirir. Herhangi bir $c \in \pi_1\tilde{M}(\tilde{x}, \tilde{y})$, $\tilde{c} \in St_{\tilde{G}}\tilde{x}$ elemanı tarafından örtüldüğünden (eğer $\tilde{c} \in \tilde{G}(\tilde{x}, \tilde{y}')$ ise $r(\tilde{y}) = r(\tilde{y}')$ dir ve böylece, $\tilde{y} = \tilde{y}'$ bulunur) aynı zamanda örtendir. Sonuç olarak r bir izomorfizmdir. 1. ve 2. şartlarını sağlayan diferensiyellenebilir yapının tekliği, Sonuç 2.1.1 den gelir. Yani r nesneler üzerinde özdeş olduğundan M nin diferensiyellenebilir yapısı q ve $\pi_1 p$ tarafından $\tilde{M}$ üzerinde aynı diferensiyellenebilir yapıya yükseltilir. □

Önerme 2.3.3. *$r : K \to H$ ve $q : H \to G$ Lie grupoid morfizmleri olsun. Bu durumda*

1) *q ve r Lie grupoidlerin örtü morfizmleri ise qr de Lie grupoidlerin örtü morfizmidir.*

2) *q ve qr Lie grupoidlerin örtü morfizmleri ise r de Lie grupoidlerin örtü morfizmidir.*

3) *r ve qr Lie grupoidlerin örtü morfizmleri ve r_0 örten ise q da Lie grupoidlerin örtü morfizmidir.*

İspat.

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "qr"'] & H \arrow[d, "q"] \\ & G \end{tikzcd}$$

diyagramını gözönüne alalım. $qr = p$ diyelim.

1) q ve r Lie grupoidlerin örtü morfizmleri ise $q^{'} : St_H y \to St_G z$ ve $r^{'} : St_K x \to St_H y$ dönüşümleri birer diffeomorfizmdir. Diffeomorfizmlerin bileşkesi de bir diffeomorfizm olacağından $q^{'} r^{'} : St_K x \to St_G z$ de bir diffeomorfizmdir. Bu da $qr : K \to G$' nin Lie grupoidlerin bir örtü morfizmi olmasını gerektirir.

2) q ve $p = qr$ Lie grupoidlerin örtü morfizmleri ise $q^{'} : St_H y \to St_G z$ ve $p^{'} : St_K x \to St_G z$ dönüşümleri birer diffeomorfizmdir. $r^{'} : St_K x \to St_H y$ olmak üzere $q^{'}$ bir diffeomorfizm olduğundan $p^{'} = q^{'} r^{'}$ eşitliğinden $(q^{'})^{-1} p^{'} = r^{'}$ olur. Eşitliğin sol tarafı bir diffeomorfizm olduğundan $r^{'}$ de bir diffeomorfizmdir. Dolayısıyla r Lie grupoidlerin örtü morfizmidir.

3) Benzer düşüncelerden q' nun Lie grupoidlerin örtü morfizmi olduğu gelir. □

Önerme 2.3.4. *$p : (\widetilde{G}, \widetilde{x}) \to (G, x)$ Lie grupoidlerin örtü morfizmi, $f : (F, z) \to (G, x)$ Lie grupoid morfizmi ve F geçişli Lie grupoid olsun. Bu durumda, f nin bir $\widetilde{f} : (F, z) \to (\widetilde{G}, \widetilde{x})$ morfizmine yükseltilebilmesi için gerek ve yeter şart f nin karakteristik grubunun p nin karakteristik grubu tarafından içerilmesidir, yani $f(F\{z\}) \subset p(\widetilde{G}\{\widetilde{x}\})$ olmasıdır. Eğer böyle bir yükseltme var ise tektir.*

İspat. Kabul edelim ki $\widetilde{f}$ var olsun. $p\widetilde{f} = f$ eşitliği

$$f(F\{z\}) \subseteq p(\widetilde{G}\{\widetilde{x}\})$$

olmasını gerektirir.

Tersine f' nin karakteristik grubu, p' nin C karakteristik grubu tarafından içerilsin. p' nin $\widetilde{G}\{\widetilde{x}\} \to C$ kısıtlaması Lie gruplar arasında bir izomorfizm olacağından $f : F\{z\} \to G\{x\}$ morfizmi, bir $\widetilde{f} : F\{z\} \to \widetilde{G}\{\widetilde{x}\}$ morfizmine bir tek şekilde yükseltilir. Şimdi F' nin geçişli olmasından yararlanarak $\widetilde{f}$' nın bir grupoid morfizmi olduğunu gösterelim. F' nin her bir v nesnesi için $F(z,v)$' nin bir elemanı τ_v olsun. Eğer $a \in F(u,v)$ ise o zaman a, $a^{'} \in F\{z\}$ ile

$$a = \tau_v a^{'} \tau_u^{-1}$$

şeklinde tek olarak yazılabilir, burada $\tau_u \in F(z,u)$ dur. Ayrıca eğer $b = F(v,w)$ ise o zaman $b = \tau_w b^{'} \tau_v^{-1}$ ve $b^{'} \in F\{z\}$ ile $(ba)^{'} = b^{'}a^{'}$ dür. Her bir $f(\tau_v)$ elemanı $St_{\widetilde{G}}\widetilde{x}$ nın bir tek $\widetilde{f}(\tau_v)$ elemanı ile örtülür. Böylece

$$\widetilde{f}(\widetilde{a}) = \widetilde{f}(\tau_v)\widetilde{f}(a^{'})\widetilde{f}(\tau_u)^{-1}$$

'i tanımlarız ve

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(b)\widetilde{f}(a) &= \widetilde{f}(\tau_w)\widetilde{f}(b^{'})\widetilde{f}(a^{'})\widetilde{f}(\tau_u)^{-1} \\ &= \widetilde{f}(\tau_w)\widetilde{f}(ba)^{'}\widetilde{f}(\tau_u)^{-1} \\ &= \widetilde{f}(ba)\end{aligned}$$

elde edilir. Yani $\widetilde{f}$ bir grupoid morfizmidir. $\widetilde{f}$, $(\widetilde{G},\widetilde{x})$ noktalı Lie grupoidindeki kompozisyon ile tanımlandığı için açıkça diferensiyellenebilirdir.

Açıkça $\widetilde{f}$, f' nin yükseltmesidir. Ayrıca f' nin herhangi bir yükseltmesi $F\{z\}$ ve τ_v elemanları üzerinde $\widetilde{f}$ ile aynı olmalıdır. Dolayısıyla böyle bir yükseltme $\widetilde{f}$ ile çakışmalıdır. Bu, yükseltmenin tekliğini ispatlar.

□

G bir Lie grupoid olsun. Bu durumda nesneleri $p : H \to G$ diferensiyellenebilir örtü morfizmleri ve $p : H \to G$ nesnesinden $q : K \to G$ nesnesine bir morfizmi, Lie grupoidlerin $p = q \circ r$ şartını sağlayan bir $r : H \to K$ Lie grupoid morfizmi olan G nin diferensiyellenebilir örtülerinin $LGdCov(G)$ kategorisi elde edilir.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & K \arrow[dl, "q"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Bu kategoride; kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ ile tanımlıdır. Ayrıca, $r : H \to K$ ve $r' : K \to L$ iki morfizm olmak üzere kompozisyon,

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & K \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & L \arrow[dl, "p'"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

Önerme 2.3.3' den $LGdCov(G)$ kategorisindeki her bir r Lie grupoid morfizminin de bir diferensiyellenebilir örtü morfizmi olduğu görülür.

Lie grupoidlerin bir diferensiyellenebilir manifold üzerindeki etkisini tekrar hatırlatalım.

Tanım 2.3.3. *G bir Lie grupoid, M bir diferensiyellenebilir manifold ve $w : M \to G_0$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer*

$$G_{\alpha\times_w}M = \{(a, x) \in G \times M \mid \alpha(a) = w(x)\}$$

olmak üzere aşağıdaki şartları sağlayan bir $\phi : G_{\alpha\times_w}M \to M, (a, x) \mapsto a^{\cdot}x$ diferensiyellenebilir dönüşümü varsa G ye M üzerine w aracılığıyla soldan diferensiyellenebilir olarak etki eder veya kısaca M bir sol $G-$manifolddur denir ve (M, w) ile gösterilir.

i) $w(a^{\cdot}x) = \beta(a)$ ii) $b^{\cdot}(a^{\cdot}x) = (b \circ a)^{\cdot}x$ iii) $(1_{w(x)})^{\cdot}x = x$.

Örnek 2.3.2. *G, M diferensiyellenebilir manifoldu üzerine $w : M \to G_0$ aracılığıyla etki eden bir Lie grupoid olsun. Böylece bu etki yardımıyla nesnelerinin kümesi M olan ve Lie etki grupoidi denilen $G \ltimes M$ Lie grupoidi tanımlanır. Nesne kümesi M olduğundan diferensiyellenebilir manifolddur. Morfizmlerin kümesi $G_{\alpha\times_w}M$ kümesi olup α bir submersiyon olduğundan o da bir diferensiyellenebilir manifolddur. Bir x nesnesinden bir y nesnesine bir morfizm $a^{\cdot}x = y$ şartını sağlayan (a, x) ikilisidir. Kaynak dönüşümü $\alpha(a, x) = x$, hedef dönüşümü $\beta(a, x) = a^{\cdot}x$, nesne dönüşümü $x \mapsto (1_{w(x)}, x)$, ters dönüşümü $(a, x)^{-1} = (a^{-1}, a^{\cdot}x)$ ve komposizyon $(b, y) \circ (a, x) = (b \circ a, x) \ni y = a^{\cdot}x$ ile tanımlıdır. Kaynak ve hedef dönüşümleri, sırasıyla ikinci izdüşüm ve diferensiyellenebilir etki ile tanımlı olduğundan diferensiyellenebilirdir. Nesne dönüşümü ise, 1 birim dönüşümü ile Lie grupoidin $1_{(\ )}$ nesne dönüşümünün*

$1_{(\;)} \times 1 : M \to G \ltimes M$ *çarpımı ile verildiğinden diferensiyellenebilirdir. Ters dönüşümü ise Lie grupoidin ters dönüşümü ile etkinin çarpımı olarak tanımlı olduğundan diferensiyellenebilirdir. Son olarak kompozisyon,*

$$(G \ltimes M)\ {}_{\alpha}\times_{\beta} (G \ltimes M) \xrightarrow{pr_2} G \ltimes M \xrightarrow{\quad L_b \times 1 \quad} G \ltimes M$$

bileşkesiyle tanımlı olup, pr_2 *ikinci izdüşüm,* L_b *sol değişim ve* 1 *birim dönüşümleri diferensiyellenebilir olduğundan bileşke de diferensiyellenebilirdir.*

Önerme 2.3.5. *Nesneler üzerinde* $w : M \to G_0$ *ve morfizmler üzerinde* $(a, x) \mapsto a$ *ile verilen* $p : G \ltimes M \to G$ *izdüşümü Lie grupoidlerin bir örtü morfizmidir.*

İspat. p nin tanımından, $p((b, y) \circ (a, x)) = p((b \circ a, x)) = b \circ a = p((b, y)) \circ p((a, x))$ bulunur. Ayrıca p nesneler üzerinde w ile verildiğinden,

$$p((1_{w(x)}, x) = 1_{w(x)} = 1_{p((1_{w(x)},x))}$$

olup, p bir grupoid morfizmidir. Aynı zamanda Önerme 2.1.5 den, p grupoidlerin örtü morfizmidir. Dolayısıyla $s_p : G_{\alpha} \times_{p0=w} (G \ltimes M)_0 \to G_{\alpha} \times_{p0=w} M$ yükseltme fonksiyonu mevcuttur. $(G \ltimes M)_0 = M$ olduğundan $s_p : G_{\alpha} \times_{p0=w} M \to G_{\alpha} \times_{p0=w} M$ gelir. s_p açıkça birim dönüşüm olduğundan bir diffeomorfizmdir. Böylece p Lie grupoidlerin örtü morfizmidir.

□

Örnek 2.3.3. $p : H \to G$ *Lie grupoidlerin bir örtü morfizmi olsun.* $M = H_0$ *ve* $w = p_0 : H_0 \longrightarrow G_0$ *alalım. Böylece* G*' nin* $M = H_0$ *üzerine* $w = p_0$ *aracılığıyla* $\phi : G_{\alpha \times_{p_0}} H_0 \to H_0$, $(a, \widetilde{x}) \mapsto a^{\cdot}\widetilde{x} = \widetilde{\beta}(\widetilde{a})$ *etkisi elde edilir. Burada* p*, diferensiyellenebilir örtü morfizmi olduğundan* $\widetilde{x} \in M = H_0$ *ve* $a \in G_{p_0(\widetilde{x})}$ *için,* $p(\widetilde{a}) = a$ *ve* $p_0(\widetilde{x}) = x$ *olacak şekilde kaynağı* $\widetilde{x}$ *olan* a*' nın bir tek* $\widetilde{a}$ *yükseltmesi vardır. Şimdi etki şartlarının sağlandığını gösterelim.*

$w(a^{\cdot}\widetilde{x}) = p_0(a^{\cdot}\widetilde{x}) = p_0(\widetilde{\beta}(\widetilde{a})) = \beta(a)$ *olup ilk şart sağlanır.* $b^{\cdot}(a^{\cdot}\widetilde{x}) = b^{\cdot}\widetilde{\beta}(\widetilde{a}) = \widetilde{\beta}(\widetilde{b})$ *ve* $(b \circ a)^{\cdot}\widetilde{x} = \widetilde{\beta}(\widetilde{b} \circ \widetilde{a}) = \widetilde{\beta}(\widetilde{b})$ *olup* $b^{\cdot}(a^{\cdot}\widetilde{x}) = (b \circ a)^{\cdot}\widetilde{x}$ *bulunur. Son olarak* $1^{\cdot}_{p_0(\widetilde{x})}\widetilde{x} = \widetilde{\beta}(\widetilde{c}) = \widetilde{x}$ *olduğu görülür (*G*' deki kapalı eğrinin* H*' da kapalı eğri olması gerekmez, ancak örtünün tanımından* G*' de* x*' de başlayan bir morfizme* H*' da* $\widetilde{x}$*' da başlayan bir morfizm karşılık gelir). Böylece etki şartları sağlanır. Şimdi etkinin* *diferensiyellenebilir olduğunu gösterelim.* $p : H \to G$ *diferensiyellenebilir örtü morfizmi olduğundan* p *ve* p_0 *diferensiyellenebilirdir ve ayrıca* $s_p : G_{\alpha \times p_0} H_0 \to H$ *bir diffeomorfizmdir. Böylece* w *diferensiyellenebilirdir ve Lie grupoidin* $\widetilde{\beta}$ *hedef dönüşümü ile* s_p*' nin bileşkesi olarak tanımlı olan* $\phi : G_{\alpha \times p_0} H_0 \to H_0$, $(a, x) \mapsto a^{\cdot} x = \widetilde{\beta}(\widetilde{a})$ *etkisi diferensiyellenebilirdir. Sonuç olarak* G, H_0 *üzerine diferensiyellenebilir olarak etki eder.*

Böylece nesneleri (M, w) diferensiyellenebilir etkileri ve bir (M, w) nesnesinden (M', w') nesnesine bir morfizmi, $w' \circ f = w$ ve $f(a^{\cdot} x) = a^{\cdot} f(x)$ şartlarını sağlayan $f : M \to M'$ diferensiyellenebilir fonksiyonu olan $LGdOp(G)$ kategorisi elde edilir.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "w"'] & & M' \arrow[dl, "w'"] \\ & G_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\alpha \times_w M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1 \times f"'] & M \arrow[d, "f"] \\ G_\alpha \times_{w'} M' \arrow[r, "\phi'"] & M' \end{tikzcd}$$

Tanım 2.3.4. *G, H birer Lie grupoid ve M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. G, M üzerine w diferensiyellenebilir dönüşümü vasıtasıyla soldan ve H da M üzerine w' diferensiyellenebilir dönüşümü vasıtasıyla sağdan etki ediyor ve $x \in M$, $a \in G$, $b \in H$ için ${}^a x, x^b$ tanımlı olmak üzere $w'({}^a x) = w'(x)$, $w(x^b) = w(x)$ ve ${}^a(x^b) = ({}^a x)^b$ şartları sağlanıyorsa, M ye bir G-H-manifoldu denir ve (w', M, w) ile gösterilir. Böylece G ve H, M üzerine w-w' vasıtasıyla etki eder denir.*

Örnek 2.3.4. *G bir Lie grupoid olsun. Bu durumda G, kendisi üzerine β-α vasıtasıyla etki eder. Etki, G deki kompozisyon ile verilir. Gerçekten, G nin $M = G$ üzerine $w = \beta : G \to G_0$ vasıtasıyla diferensiyellenebilir sol etkisi, $\phi : G\ {}_\alpha \times_{w=\beta} G \to G$, $(a, b) \mapsto\ {}^a b = a \circ b$, ile tanımlıdır. w, hedef dönüşümü ve etki de Lie grupoidin kompozisyonu ile verildiğinden diferensiyellenebilirdir. G nin $M = G$ üzerine $w' = \alpha : G \to G_0$ vasıtasıyla diferensiyellenebilir sağ etkisi, $\phi' : G\ {}_\beta \times_{w'=\alpha} G \to G$, $(a, b) \mapsto b^a = b \circ a$, ile tanımlıdır. w', kaynak dönüşümü ve etki de Lie grupoidin kompozisyonu ile verildiğinden diferensiyellenebilirdir. $\alpha({}^a b) = \alpha(a \circ b) = \alpha(b)$, $\beta(b^a) = \beta(b \circ a) = \beta(b)$ ve ${}^a(b^c) =^a (b \circ c) = a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c = (a \circ b)^c = ({}^a b)^c$ olup şartlar sağlanır. Böylece G Lie grupoidi bir G-G-manifolddur.*

Daha önce, bir G Lie grubu ve üzerine etki edilen bir M diferensiyellenebilir manifoldu verildiğinde M/G yörünge uzayının her zaman bir manifold yapısına sahip olmadığını ve bunun ancak etkinin regüler olması durumunda mümkün olabileceğini söylemiştik. Yani M/G yörünge uzayının bir diferensiyellenebilir manifold olması ancak diferensiyellenebilir etkinin regüler olması ile mümkündür. Dolayısıyla bundan sonra Lie grupların etkileri sözkonusu olduğunda aksi belirtilmedikçe etkinin regüler olduğunu varsayacağız.

Teorem 2.3.2. *H bir Lie grup ve G de bir Lie grupoid olsun. Eğer M, bir G-H-manifold ise G nin M üzerine etkisi, M/H yörünge uzayı üzerinde bir sol G-manifold yapısı belirler.*

İspat. (w', M, w) G-H-manifoldunu gözönüne alalım. Yani G, w vasıtasıyla M üzerine soldan ve H, w' vasıtasıyla M üzerine sağdan etki etsin. $\phi : G_\alpha \times_w M \to M$ sol etkisinden indirgenen $\phi' : G_\alpha \times_w M/H \to M/H$ etkisinin diferensiyellenebilir olduğunu göstermeliyiz. $r : M \to M/H$ bölüm dönüşümü bir submersiyon olduğundan açıktır. Dolayısıyla $1 \times r : G \times M \to G \times M/H$ açık dönüşümdür ve o da submersiyondur. $G_\alpha \times_w M$ altmanifoldu , $G \times M$ nin $(1 \times r)$-doygun altkümesidir ve $1\tilde{\times}r = (1 \times r)\,|_{G_\alpha \times_w M}: G_\alpha \times_w M \to G_\alpha \times_w M/H$ olduğundan $1\tilde{\times}r$ dönüşümü açık ve örtendir. Ayrıca G_0, Hausdorff uzay olduğundan Önerme 1.2.10' dan $G_\alpha \times_w M$ altuzayı, $G \times M$ de kapalıdır. $(1 \times r)$ bölüm dönüşümü bir submersiyon olduğundan $G \times M/H$ bölüm manifoldu yapısına sahiptir ve $G \times M/H$ nın kapalı kümeleri $G \times M$ nin doygun kapalı U kümeleri için $(1 \times r)(U)$ kümeleri olup $G\ _\alpha \times_w M$, $G \times M$ nin doygun kapalı altkümesi olduğundan $(1 \times r)(G\ _\alpha \times_w M) = G_\alpha \times_w M/H$ kümesi $G \times M/H$ nın kapalı altkümesidir. Eğer K, $G\ _\alpha \times_w M/H$ nın kapalı altkümesi ise $G_\alpha \times_w M/H$, $G \times M/H$ nın kapalı altkümesi olduğundan K, $G \times M/H$ nın da kapalı altkümesidir. $1 \times r$ diferensiyellenebilir olduğundan $(1 \times r)^{-1}(K)$, $G \times M$ nin kapalı altkümesidir. $1\tilde{\times}r$ örten ve $G_\alpha \times_w M$ de $G \times M$ nin kapalı altkümesi olduğundan, altmanifold yapısına göre $(1\tilde{\times}r)^{-1}(K)$, $G_\alpha \times_w M$ de kapalı olup $1\tilde{\times}r$ diferensiyellenebilirdir. Böylece, $1\tilde{\times}r : G_\alpha \times_w M \to G_\alpha \times_w M/H$ bölüm dönüşümüdür. $\phi' \circ (1\tilde{\times}r) = r \circ \phi$ diferensiyellenebilir olduğundan ϕ' diferensiyellenebilirdir. □

G bir Lie grupoid olsun. Örnek 2.3.4 de G nin β-α vasıtasıyla bir G-G-manifold olduğu gösterilmişti. Şimdi, $x \in G_0$ ve $N\{x\}$ de $G\{x\}$ in kapalı altgrubu olsun. Dolayısıyla $N\{x\}$ bir Lie altgruptur. Bu durumda G_x, bir G-$N\{x\}$-manifolddur. Böylece, $N\{x\}$ in sol yan kümelerinin $G_x/N\{x\} = G_{N\{x\}}$ uzayı tanımlanır.

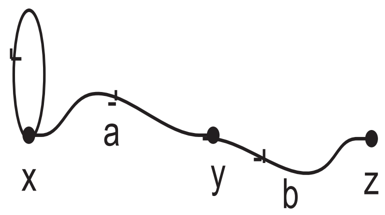
Sonuç 2.3.1. *Eğer G Lie grupoid ve $N\{x\}$, $G\{x\}$ in Lie altgrubu ise sol çarpma $G_{N\{x\}}$ uzayına bir sol G-manifold yapısı verir.*

Önerme 2.3.6. *G bağlantılı bir Lie grupoid, $x \in G_0$ ve $N\{x\}$, $G\{x\}$ nesne grubunun altgrubu olsun. Bu durumda bağlantılı bir H Lie grupoidi, $p : H \to G$ diferensiyellenebilir örtü morfizmi ve $p(H\{\tilde{x}\}) = N\{x\}$ olacak şekilde bir $\tilde{x} \in H_0$ vardır.*

İspat. $M = G_x/N\{x\} = G_{N\{x\}} = \{a \circ N\{x\} | a \in G_x\}$ ve $w : M \to G_0$ dönüşümü de $a \circ N\{x\} \mapsto \beta(a)$ ile tanımlansın. Bu durumda, $\phi : G_\alpha \times_w M \to M$, $(b, a \circ N\{x\}) \mapsto b \circ a \circ N\{x\}$, ile tanımlanan dönüşüm, G Lie grupoidinin M manifoldu üzerine w diferensiyellenebilir dönüşümü vasıtasıyla diferensiyellenebilir etkisini verir. Gerçekten G_x, G nin kapalı altmanifoldu olduğundan G_x, $\beta \mid_{G_x}$-$\alpha \mid_{G_x}$ vasıtasıyla bir G-$N\{x\}$-manifolddur. Böylece, $M = G_x/N\{x\}$ bir diferensiyellenebilir manifolddur ve w, Lie grupoidin hedef dönüşümü β ile verildiğinden diferensiyellenebilirdir. $a \in G(x, y)$ ve $b \in G(y, z)$ için $\alpha(b) = w(a \circ N\{x\}) = \beta(a)$ olup $b \circ a$ tanımlıdır ve $b \circ a \in G_x$ olur. Ayrıca,

$$w({}^b(a \circ N\{x\})) = w(b \circ a \circ N\{x\}) = \beta(b \circ a) = \beta(b)$$

olup etkinin ilk şartı sağlanır.



$c \in G(z, z')$ ise

$$\begin{gathered} {}^c({}^b(a \circ N\{x\})) = {}^c(b \circ a \circ N\{x\}) = c \circ (b \circ a \circ N\{x\}) = \\ (c \circ b) \circ (a \circ N\{x\}) = {}^{(b \circ a)}(a \circ N\{x\}) \end{gathered}$$

olup ikinci şart sağlanır. Son olarak ${}^{1_y}(a \circ N\{x\}) = 1_y \circ a \circ N\{x\} = a \circ N\{x\}$ olup üçüncü şart da sağlanır. Şimdi, etkinin diferensiyellenebilirliğini gösterelim. Bunun için, $\phi' : G\ {}_\alpha\times_\beta G \to G$ sol etkisinden indirgenen $\phi : G\ {}_\alpha\times_\beta G_x/N\{x\} \to G_x/N\{x\}$ etkisinin diferensiyellenebilir olduğunu göstermeliyiz. $r : G_x \to G_x/N\{x\}$ bölüm dönüşümü olsun. $G_x/N\{x\}$ bir diferensiyellenebilir manifold olduğundan r bir submersiyondur. O halde, r bir açık dönüşümdür. Buradan $1 \times r : G \times G_x \to G \times G_x/N\{x\}$ de açık dönüşümdür ve bir submersiyondur. $G_\alpha \times_w G_x$, $G \times G_x$ in $(1 \times r)$-doygun altkümesidir ve $1\tilde{\times}r = (1 \times r)\mid_{G_\alpha \times_w G_x}: G_\alpha \times_w G_x \to G_\alpha \times_w G_x/N\{x\}$ olduğundan $1\tilde{\times}r$ açık ve örtendir. Ayrıca G_0 nesne manifoldu Hausdorff olduğundan $G_\alpha \times_w G_x$, $G \times G_x$ de kapalıdır. $(1 \times r)$ submersiyon olduğundan $G \times G_x/N\{x\}$ bölüm manifolduna sahiptir ve $G \times G_x/N\{x\}$ nin kapalı kümeleri, $G \times G_x$ nin doygun kapalı U kümeleri için, $(1 \times r)(U)$ kümeleri olup $G_\alpha \times_w G_x$, $G \times G_x$ in doygun kapalı altkümesi olduğundan $(1 \times r)(G_\alpha \times_w G_x) = G_\alpha \times_w G_x/N\{x\}$ kümesi $G \times G_x/N\{x\}$ nin kapalı altkümesidir. Eğer K, $G_\alpha \times_w G_x/N\{x\}$ in kapalı altkümesi ise $G_\alpha \times_w G_x/N\{x\}$, $G \times G_x/N\{x\}$ nin kapalı altkümesi olduğundan K, $G \times G_x/N\{x\}$ nin de kapalı altkümesidir. $1 \times r$ diferensiyellenebilir olduğundan $(1 \times r)^{-1}(K)$, $G \times G_x$ in kapalı altkümesidir. $1\tilde{\times}r$ örten ve $G_\alpha \times_w G_x$ de $G \times G_x$ in kapalı altkümesi olduğundan altmanifold yapısına göre $(1\tilde{\times}r)^{-1}(K)$, $G_\alpha \times_w G_x$ de kapalı olup $1\tilde{\times}r$ diferensiyellenebilirdir. Böylece, $1\tilde{\times}r : G_\alpha \times_w G_x \to G_\alpha \times_w G_x/N\{x\}$ bölüm dönüşümüdür. $\phi \circ (1\tilde{\times}r) = r \circ \phi'$ diferensiyellenebilir olduğundan ϕ diferensiyellenebilirdir. O halde, etki diferensiyellenebilir etkidir. Böylece, Örnek 2.3.2 den nesne manifoldu $(G \ltimes M)_0 = M$ olan bir $G \ltimes M$ Lie etki grupoidi elde edilir. Bu grupoidin morfizmleri, ${}^b(a \circ N\{x\}) = a' \circ N\{x\}$ şartını sağlayan $(b, a \circ N\{x\})$ çiftleridir. Ayrıca kaynak dönüşümü $\alpha(b, a \circ N\{x\}) = a \circ N\{x\}$, hedef dönüşümü $\beta(b, a \circ N\{x\}) = b \circ a \circ N\{x\}$, nesne dönüşümü $a \circ N\{x\} \mapsto (1_{\beta(a)}, a \circ N\{x\})$, ters dönüşümü $(b, a \circ N\{x\}) \mapsto (b^{-1}, {}^b(a \circ N\{x\}))$ ve son olarak kompozisyonu $(b, a' \circ N\{x\}) \circ (c, a \circ N\{x\}) = (b \circ c, a \circ N\{x\})$ ile tanımlıdır. Kaynak dönüşümü bir submersiyon olan ikinci izdüşüm ve hedef dönüşümü de diferensiyellenebilir etki ile tanımlı olup diferensiyellenebilirdir. Nesne dönüşümü ise 1 birim dönüşüm ile Lie grupoidin $1_{(\ )}$ nesne dönüşümü ve w nın bileşkesinin çarpımı $(1_{(\ )} \circ w) \times 1 : M \to G \ltimes M$ ile verildiğinden diferensiyellenebilirdir. Ters dönüşüm ise Lie grupoidin ters dönüşümü ile etkinin çarpımı olarak tanımlı olduğundan diferensiyellenebilirdir. Son olarak kompozisyon,

$$\begin{tikzcd}
(G \ltimes M) \ltimes (G \ltimes M) \arrow[r, "pr_2"] & G \ltimes M \arrow[r, "L_b \times 1"] & G \ltimes M
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
((b, a \circ N\{x\}), (b', a' \circ N\{x\})) \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "pr_2"'] & & (b', a' \circ N\{x\}) \\
& (b \circ b', a' \circ N\{x\}) \arrow[ur, "L_b \times 1"'] &
\end{tikzcd}$$

bileşkesiyle tanımlı olup pr_2 ikinci izdüşüm, L_b sol değişim ve 1 birim dönüşümleri diferensiyellenebilir olduğundan bileşke de diferensiyellenebilirdir. $p : G \ltimes M \to G$ izdüşümü morfizmler üzerinde $(a, x) \mapsto a$ ve nesneler üzerinde w ile tanımlı olup Önerme 2.3.5 den Lie grupoidlerin örtü morfizmidir. Eğer $H = G \ltimes M$ ve $\tilde{x} = N\{x\}$ alırsak $p(H\{\tilde{x}\} = N\{x\}$ bulunur. $\square$

M ve $\tilde{M}$ bağlantılı diferensiyellenebilir manifoldlar olsun. $LCov(M)$ kategorisi; nesneleri $p : \tilde{M} \to M$ diferensiyellenebilir örtü dönüşümleri ve $p : \tilde{M} \to M$ nesnesinden $q : \tilde{N} \to M$ nesnesine morfizmi, $p = q \circ r$ şartını sağlayan $r : \tilde{M} \to \tilde{N}$ dönüşümü olan bir kategoridir.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{M} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{N} \arrow[dl, "q"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

Bu kategoride; kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1 : \tilde{M} \to \tilde{M}$ ile tanımlıdır. Ayrıca, $r : \tilde{M} \to \tilde{N}$ ve $r' : \tilde{N} \to \tilde{P}$ iki morfizm olmak üzere kompozisyon,

$$\begin{tikzcd}
\tilde{M} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{N} \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & \tilde{P} \arrow[dl, "p'"] \\
& M &
\end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

M bağlantılı bir diferensiyellenebilir manifold ise Örnek 2.3.1 den $\pi_1 M$ esas grupoidi bir Lie grupoiddir. $LGdCov(\pi_1 M)$ kategorisi, $\tilde{M} = \tilde{G}_0$ bağlantılı olmak üzere nesneleri $p : \tilde{G} \to \pi_1 M$ Lie grupoidlerin örtü morfizmleri ve $p : \tilde{G} \to \pi_1 M$

nesnesinden $q : \tilde{H} \to \pi_1 M$ nesnesine bir morfizmi, $p = q \circ r$ şartını sağlayan Lie grupoidlerin $r : \tilde{G} \to \tilde{H}$ morfizmi olan bir kategoridir.

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{H} \arrow[dl, "q"] \\ & \pi_1 M & \end{tikzcd}$$

Bu kategoride; kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ ile tanımlıdır. Ayrıca, $r : \tilde{G} \to \tilde{H}$ ve $r' : \tilde{H} \to \tilde{K}$ iki morfizm olmak üzere kompozisyon,

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{H} \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & \tilde{K} \arrow[dl, "p'"] \\ & \pi_1 M & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

Önerme 2.3.7. *$LGdCov(\pi_1 M)$ ile $LCov(M)$ kategorileri denktir.*

İspat. $\Gamma : LCov(M) \to LGdCov(\pi_1 M)$ funktoru aşağıdaki gibi tanımlansın: M ve $\tilde{M}$ bağlantılı olmak üzere, $p : \tilde{M} \to M$ diferensiyellenebilir manifoldların örtü dönüşümü olsun. Bu durumda Önerme 2.3.1 den $\pi_1 p : \pi_1 \tilde{M} \to \pi_1 M$, Lie grupoidlerin örtü morfizmidir, yani $\Gamma(p) = \pi_1 p$ Lie grupoidlerin örtü morfizmidir. Böylece, $\Gamma : LCov(M) \to LGdCov(\pi_1 M)$ istenildiği gibi bir funktordur.

$\Phi : LGdCov(\pi_1 M) \to LCov(M)$ funktoru aşağıdaki gibi tanımlansın: M ve $\tilde{G}_0 = \tilde{M}$ bağlantılı olmak üzere $q : \tilde{G} \to \pi_1 M$ Lie grupoidlerin örtü morfizmi olsun. Bu durumda, $\tilde{M}$ ve M bağlantılı manifoldlar olduğundan Önerme 2.3.2 ye göre, $p = q_0 : \tilde{M} \to M$ için, $\tilde{M}$ üzerinde p yi diferensiyellenebilir manifoldların örtü dönüşümü yapan yükseltilmiş manifold yapısı vardır. Böylece, $\Phi(q) = q_0 = p$ diferensiyellenebilir manifoldların örtü dönüşümüdür. O halde Φ, istenildiği gibi bir funktordur.

$\Gamma\Phi \simeq 1_{LGdCov(\pi_1 M)}$ ve $\Phi\Gamma \simeq 1_{LCov(M)}$ doğal denklikleri Önerme 2.2.5 de verilen kategorilerin denkliğine benzer şekilde elde edilir. □

Teorem 2.3.3. *G bir Lie grupoid olsun. Bu takdirde G nin diferensiyellenebilir örtülerinin $LGdCov(G)$ kategorisi ile diferensiyellenebilir manifoldlar üzerine etkilerinin $LGdOp(G)$ kategorisi denktir.*

İspat. $\Gamma : LGdOp(G) \to LGdCov(G)$ funktoru aşağıdaki gibi tanımlansın: G Lie grupoidinin M diferensiyellenebilir manifoldu üzerine $w : M \to G_0$ diferensiyellenebilir fonksiyonu aracılığıyla diferensiyellenebilir etkisi

$$\phi : G_{\alpha \times_w} M \to M$$
$$(a, x) \mapsto \phi(a, x) = a^{\cdot} x$$

olsun. Bu durumda Örnek 2.3.2' den nesne uzayı M olan $G \ltimes M$ Lie etki grupoidi ve nesneler üzerinde w, morfizmler üzerinde birinci izdüşüm ile tanımlı Lie grupoidlerin $p : G \ltimes M \to G$ örtü morfizmi vardır. Yani $\Gamma(M, w)$ Lie grupoidlerin örtü morfizmidir. Böylece Γ istenildiği gibi bir funktordur.

$\Phi : LGdCov(G) \to LGdOp(G)$ funktoru aşağıdaki gibi tanımlansın:
$p : \widetilde{G} \to G$ Lie grupoidlerin örtü morfizmi için $M = \widetilde{G}_0$ ve $w = p_0 : \widetilde{G}_0 \to G_0$ olsun. Bu durumda Örnek 2.3.3' den G Lie grupoidinin $M = \widetilde{G}_0$ üzerine $w = p_0$ diferensiyellenebilir fonksiyonu aracılığıyla $\phi : G_{\alpha \times_{p_0}} \widetilde{G}_0 \to \widetilde{G}_0$, $(a, \widetilde{x}) \mapsto a^{\cdot}\widetilde{x} = \widetilde{\beta}(\widetilde{a})$ diferensiyellenebilir etkisini $s_p : G_{\alpha \times_{p_0}} \widetilde{G}_0 \to \widetilde{G}_0$ ile $\widetilde{\beta} : \widetilde{G} \to \widetilde{G}_0$ hedef dönüşümünün bileşkesinden elde ederiz. Yani $\Phi(p)$, G Lie grupoidinin bir diferensiyellenebilir manifold üzerine diferensiyellenebilir etkisidir.

$\Phi\Gamma = 1_{LGdOp(G)}$ ve $\Gamma\Phi = 1_{LGdCov(G)}$ olduğu açıktır. □

BÖLÜM 3

LIE GRUP-GRUPOİDLERİN ÖRTÜLERİ VE ETKİLERİ

Bölüm 1 de cebirsel anlamda grup-grupoid kavramı ve gerekli olan bazı temel örnek ve teoremler verildi. Her Lie grup-grupoid bir topolojik grup-grupoid olduğundan, bu bölümde sırasıyla topolojik grup-grupoidler ile ilgili temel kavramlar, topolojik grup-grupoidlerin örtüleri ve etkilerinin kategorilerinin denkliği ve son olarak Lie grup-grupoidlerin tanımı ile örtüleri ve etkilerinin kategorilerinin denkliği verilecektir.

3.1 Topolojik Grup-Grupoidlerin Örtüleri ve Etkileri

Topolojik grup-grupoidlerin örtüleri ve etkilerini vermeden önce topolojik grup-grupoidlerle ilgili temel kavramları verelim.

Topolojik grupoidler kategorisinde bir grup nesne olan topolojik grup-grupoid tanımı ilk olarak, topolojik grup-grupoidlerin kategorisi ile topolojik crossed modüllerin denkliği ispatlanırken verildi [26].

Tanım 3.1.1. *Bir G topolojik grup-grupoidi, bir topolojik grup yapısıyla donatılmış ve $m : G \times G \to G,\ (a, b) \mapsto a + b$ toplama, $e : * \to G,\ * \mapsto e(*) = 1_e$ birim ve $\bar{u} : G \to G,\ a \mapsto -a$ ters denen topolojik grubun yapı dönüşümleri birer topolojik grupoid morfizmi olan bir G topolojik grupoiddir [46].*

Bir G topolojik grup-grupoidinde hem grup hem de grupoid yapısı olduğundan grup işlemi ile grupoidin kompozisyonu arasında aşağıdaki değiştirme kuralı vardır.

$$(b \circ a) + (d \circ c) = (b + d) \circ (a + c)$$

Örnek 1.1.3 ve Örnek 1.2.3' ü birlikte düşündüğümüzde aşağıdaki topolojik grup-grupoid örneğini elde ederiz.

Örnek 3.1.1. *G bir topolojik grup olsun. Bu durumda $G \times G$ bir topolojik grup-grupoiddir [46].*

Bu örnek, topolojik grupların $TGrp$ kategorisinden topolojik grup-grupoidlerin $TGGd$ kategorisine bir funktor tanımlar. Bunu bir önerme ile verelim.

Önerme 3.1.1. *Topolojik grupların $TGrp$ kategorisinden topolojik grup-grupoidlerin $TGGd$ kategorisine bir $\Gamma : TGrp \to TGGd$ funktoru vardır [46].*

Şimdi ispatları [46]' da verilen iki önemli teoremi ifade edelim.

Teorem 3.1.1. *Bir G topolojik grup-grupoidinde, e birim elemanının geçişli bileşeni topolojik grubun toplama işlemi ile birlikte topolojik normal altgrup yapısına sahip bir topolojik grup-grupoiddir .*

Teorem 3.1.2. *Bir G topolojik grup-grupoidinde bütün karakteristik gruplar birbirine lineer olarak homeomorftur.*

Bir G topolojik grup-grupoidi için, eğer onun temelini oluşturan topolojik grupoidi sırasıyla bağlantılı, 1-bağlantılı veya basit bağlantılı ise G ye *bağlantılıdır, 1-bağlantılıdır* veya *basit bağlantılıdır* denir.

G ve H iki topolojik grup-grupoid olsun. Topolojik grup-grupoidlerin bir $f : H \to G$ morfizmi, G ve H nın temelini oluşturan topolojik grupoidlerin, topolojik grup yapısını koruyan morfizmidir. Yani, $a, b \in H$ için $f(a + b) = f(a) + f(b)$ dir. Topolojik grup-grupoidlerin bir $f : H \to G$ morfizmi için, eğer f, G ve H nın temelini oluşturan topolojik grupoidlerin örtü morfizmi ise f ye *topolojik grup-grupoidlerin örtü morfizmi* denir [46].

X evrensel örtüye sahip bir topolojik uzay iken X' e karşılık gelen $\pi_1 X$ esas grupoidinin bir topolojik grupoid olduğunu görmüştük. Şimdi de esas grupoidin ne zaman topolojik grup-grupoid olduğunu bir önerme ile verelim.

Önerme 3.1.2. *Temelini oluşturan uzayı evrensel örtüye sahip bir topolojik grup X olsun. Bu durumda, $\pi_1 X$ bir topolojik grup-grupoiddir [46].*

İspat. $\pi_1 X$ in bir grup-grupoid olduğu Örnek 1.1.4 de gösterilmişti. $\mathcal{U}$, X in bütün açık, yol bağlantılı U altkümelerinden meydana gelen açık örtüsü olsun ve $i : U \to X$

dahil etme dönüşümü, U nun herbir esas grubunu aşikar gruba dönüştürsün. Her bir $U \in \mathcal{U}$ ve $x \in U$ için $\lambda_x : U \to \pi_1 X$, seçilen herbir $x' \in U$ için U da x den x' ne yolların $\pi_1 X(x, x')$ deki sınıfı olarak tanımlansın, yani $\lambda_x(x')$, x den x' ne yolların sınıfı olsun. U üzerindeki şart, $\lambda_x(x')$ nün U daki x den x' ne yolunun seçilişinden bağımsız olmasını gerektirir. $\lambda_x(U) = \tilde{U}_x$ ve $[a] \in \pi_1 X(x, y)$ olsun. Bu durumda her $U, V \in \mathcal{U}$ için $x \in U$ ve $y \in V$ olmak üzere $\tilde{U}_x[a]\tilde{V}_y^{-1}$ kümeleri, $\pi_1 X$ üzerindeki yükseltilmiş topoloji için komşuluklar tabanını oluşturur. Şimdi, $\pi_1 X$ in bir topolojik grup-grupoid olduğunu gösterebiliriz. Burada açık olmayan, $\theta : \pi_1 X_\alpha \times_\beta \pi_1 X \to \pi_1 X$ kompozisyonunun sürekliliğidir. $[a] \in \pi_1 X(x, y)$ ve $[b] \in \pi_1 X(y, z)$ olmak üzere $\theta([b], [a]) = [b \circ a]$ ve $\tilde{W}_z([b \circ a])\tilde{U}_x^{-1}$ kümeleri de $[b \circ a]$ nın temel komşulukları olsun. Bu durumda, herhangi bir $V \in \mathcal{U}$ ve $y \in V$ için $\theta((\tilde{W}_z[b]\tilde{V}_y^{-1}), (\tilde{V}_y[a]\tilde{U}_x^{-1})) = \tilde{W}_z[b \circ a]\tilde{U}_x^{-1}$ olup θ kompozisyonu süreklidir. Şimdi, $m : \pi_1 X \times \pi_1 X \to \pi_1 X$ grup işleminin sürekliliğini gösterelim. $[a] \in \pi_1 X(x, y)$ ve $[b] \in \pi_1 X(y, z)$ olmak üzere $m([a], [b]) = [a + b]$ ve $\tilde{U}_{y+z}[a + b]\tilde{U}_{x+y}^{-1}$ ler de $[a + b] \in \pi_1 G(x + y, y + z)$ nin temel komşulukları olsun. Bu durumda, herhangi bir $U \in \mathcal{U}$ ve $y \in U$ için $m((\tilde{U}_y[a]\tilde{U}_x^{-1}), (\tilde{U}_z[b]\tilde{U}_y^{-1})) = \tilde{U}_{y+z}[a + b]\tilde{U}_{x+y}^{-1}$ olup m süreklidir. $\square$

$\pi_1 G$ topolojik grup-grupoidinin funktoryalliği ile ilgili aşağıdaki önermeyi verelim.

Önerme 3.1.3. *$f : H \to G$ evrensel örtüye sahip topolojik grupların morfizmi olsun. $\pi_1 f$ den indirgenmiş $g : \pi_1 H \to \pi_1 G$ morfizmi topolojik grup-grupoidlerin morfizmidir [46].*

İspat. $a : y \to y'$, $\pi_1 H$ nın bir morfizmi, $b = g(a) : x \to x'$ ve U, U' sırasıyla x, x' nün kanonik komşulukları olsun. Bu durumda, y, y' nün sırasıyla V, V' kanonik komşulukları var ve $f(V) \subseteq U$, $f(V') \subseteq U'$ dür. Açıkça, $g(\tilde{V}'_{y'}[a](\tilde{V}_y)^{-1}) \subseteq \tilde{U}'_{x'}[b](\tilde{U}_x)^{-1}$ olup g süreklidir. $\square$

Önerme 3.1.4. *Evrensel örtüye sahip topolojik grupların $p : \tilde{X} \to X$ örtü dönüşümü verilsin. Bu durumda, $\pi_1 p : \pi_1 \tilde{X} \to \pi_1 X$ morfizmi de topolojik grup-grupoidlerin örtü morfizmidir [46].*

G bir topolojik grup-grupoid olsun. Bu durumda, nesneleri topolojik grup-grupoidlerin $p : H \to G$ örtü morfizmleri olan $TGGdCov(G)$ kategorisini elde ederiz. Bu kategoride, bir $p : H \to G$ nesnesinden $q : K \to G$ nesnesine bir morfizm, $p = q \circ r$ şartını sağlayan topolojik grup-grupoidlerin bir $r : H \to K$ morfizmidir.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & K \arrow[dl, "q"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Kategorinin kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : H \to H$ ile tanımlıdır. Nesne dönüşümü için aşağıdaki değişimli diyagram verilir.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "1_{(p)}"] \arrow[dr, "p"'] & & H \arrow[dl, "p"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Son olarak komposizyon,

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "q"'] & K \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "p"] & K' \arrow[dl, "q'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır [9].

Tanım 3.1.2. *G bir topolojik grup-grupoid ve X bir topolojik grup olsun. G topolojik grup-grupoidinin X topolojik grubu üzerine $w : X \to G_0$ sürekli grup morfizmi aracılığıyla etkisi, G nin temelini oluşturan topolojik grupoidin X in temelini oluşturan topolojik uzay üzerine $w : X \to G_0$ sürekli dönüşümü aracılığıyla $w({}^a x) = \beta(a)$, ${}^b({}^a x) = {}^{b \circ a} x$ ve ${}^{1_{w(x)}} x = x$ şartlarını sağlayan etkisinden oluşur. Ayrıca*

$$({}^b y) + ({}^a x) = {}^{b+a}(y + x).$$

değiştirme kuralı sağlanır. Etki (X, w) ile gösterilir [46].

Örnek 3.1.2. *Eğer G bir topolojik grup-grupoid ise G, $w = p_0 : X = G_0 \to G_0$ birim morfizmi vasıtasıyla $X = G_0$ üzerine etki eder [46].*

Topolojik grup-grupoidlerin örtüleri için de aşağıdaki örneği verebiliriz. Yine bu örneğin ayrıntıları [46]' da verilmiştir.

Örnek 3.1.3. *$p : \tilde{G} \to G$ topolojik grup-grupoidlerin örtü morfizmi olsun. Bu takdirde G topolojik grup-grupoidi $X = \tilde{G}_0$ topolojik grubu üzerine $w = p_0 : \tilde{G}_0 \to G_0$ sürekli grup morfizmi aracılığıyla etki eder.*

Son bir örnek olarak topolojik etki grupoidi ile topolojik grup-grupoidlerin örtüleri arasındaki ilişkiyi şu şekilde verelim.

Örnek 3.1.4. *G, X topolojik grubu üzerine $w : X \to G_0$ sürekli grup morfizmi aracılığıyla etki eden bir topolojik grup-grupoid olsun. Bu durumda, Örnek 2.2.3 den nesnelerinin kümesi X topolojik grubu olan $G \ltimes X$ topolojik etki grupoidi tanımlı olup $G \ltimes X$ topolojik etki grupoidi, G topolojik grup-grupoidinin grup işlemi ile tanımlı $(a,x)+(b,y) = (a+b, x+y)$ işlemiyle bir topolojik grup-grupoiddir. Ayrıca topolojik grupoidlerin $p : G \ltimes X \to G$ örtü morfizmi topolojik grup-grupoidlerin örtü morfizmidir [46].*

G bir topolojik grup-grupoid olsun. Böylece G nin topolojik gruplar üzerine topolojik etkilerinin $TGGdOp(G)$ kategorisini elde ederiz. Burada, (X,w) dan (X',w') ne bir morfizm, $w' \circ f = w$ ve $f({}^a x) = {}^a f(x)$ şartlarını sağlayan topolojik grupların bir $f : X \to X'$ morfizmidir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "w"'] & & X' \arrow[dl, "w'"] \\ & G_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\alpha \times_w X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ G_\alpha \times_{w'} X' \arrow[r, "\phi'"'] & X' \end{tikzcd}$$

Bu kategorinin kaynak dönüşümü $\alpha(f) = (X,w)$, hedef dönüşümü $\beta(f) = (X',w')$ ve nesne dönüşümü $1_{(X,w)} : (X,w) \to (X,w)$ ile tanımlıdır. Nesne dönüşümü için aşağıdaki diyagram verilebilir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "w"'] & & X \arrow[dl, "w"] \\ & G_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\alpha \times_w X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times 1"'] & X \arrow[d, "1"] \\ G_\alpha \times_{w} X \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd}$$

Son olarak komposizyon,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "w"'] & X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "w'"] & X'' \arrow[dl, "w''"] \\ & G_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\alpha \times_w X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ G_\alpha \times_{w'} X' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "1\times f'"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ G_\alpha \times_{w''} X'' \arrow[r, "\phi''"] & X'' \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramları ile tanımlıdır.

Şimdi bir topolojik grup-grupoidden nasıl bir başka topolojik grup-grupoid elde edildiğini bir önerme ile verelim. Bu önermenin ispatı [9]' da verilmiştir.

Önerme 3.1.5. *G, temelini oluşturan grupoidi geçişli ve nesne uzayı Hausdorff olan bir topolojik grup-grupoid, $e \in G_0$, G_0 ın birim elemanı ve $N\{e\}$ de $G\{e\}$ nin bir topolojik altgrubu olsun. Bu takdirde $\tilde{e} = N\{e\}$, H_0 ın birim elemanı olmak üzere bir H topolojik grup-grupoidi ve topolojik grup-grupoidlerin bir $p : H \to G$ topolojik örtü morfizmi vardır ve $p(H\{\tilde{e}\}) = N\{e\}$ dir.*

$\tilde{X}$ ve X evrensel örtüye sahip topolojik gruplar olsun. $UTGCov(X)$ kategorisi, nesneleri $p : \tilde{X} \to X$ topolojik grupların örtü morfizmleri ve $p : \tilde{X} \to X$ nesnesinden $q : \tilde{Y} \to X$ nesnesine morfizmi, $p = q \circ r$ şartını sağlayan topolojik grupların $r : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ morfizmi olan bir kategoridir.

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{Y} \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Bu kategoride; kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ birimi ile tanımlıdır. Nesne dönüşümü

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

diyagramı ile verilebilir. $r : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ ve $r' : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ iki morfizm olmak üzere kompozisyon,

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{Y} \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & \tilde{Z} \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

X evrensel örtüye sahip topolojik grup ise Önerme 3.1.2 den $\pi_1 X$ esas grupoidi bir topolojik grup-grupoiddir. Böylece $\tilde{X} = \tilde{G}_0$ evrensel örtüye sahip olmak üzere, nesneleri topolojik grup-grupoidlerin $p : \tilde{G} \to \pi_1 X$ örtü morfizmleri ve $p : \tilde{G} \to \pi_1 X$ nesnesinden $q : \tilde{H} \to \pi_1 X$ nesnesine morfizmi, $p = q \circ r$ şartını sağlayan topolojik grup-grupoidlerin $r : \tilde{G} \to \tilde{H}$ morfizmi olan $UTGGdCov(\pi_1 X)$ kategorisi tanımlıdır.

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{H} \arrow[dl, "q"] \\ & \pi_1 X & \end{tikzcd}$$

Bu kategoride; kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ ile tanımlıdır. Nesne dönüşümü için aşağıdaki değişimli diyagramı verebiliriz.

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[rr, "1_{(p)}"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{G} \arrow[dl, "p"] \\ & \pi_1 X & \end{tikzcd}$$

$r : \tilde{G} \to \tilde{H}$ ve $r' : \tilde{H} \to \tilde{K}$ iki morfizm olmak üzere kompozisyon,

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{H} \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & \tilde{K} \arrow[dl, "p'"] \\ & \pi_1 X & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır [9].

Son olarak elde edilen bu kategorilerin denkliklerini iki teorem ile verelim. Bu teoremler Özcan [46] tarafından ispatlanmıştır.

Teorem 3.1.3. *X evrensel örtüye sahip topolojik grup olsun. O zaman X in topolojik örtülerinin $UTGCov(X)$ kategorisi, $\pi_1 X$ topolojik grup-grupoidinin örtülerinin $UTGGdCov(\pi_1 X)$ kategorisine denktir.*

Teorem 3.1.4. *Bir G topolojik grup-grupoidi için, G nin örtülerinin $TGGdCov(G)$ kategorisi ile G nin topolojik gruplar üzerine topolojik etkilerinin $TGGdOp(G)$ kategorisi denktir.*

3.2 Lie Grup-Grupoidlerin Örtüleri ve Etkileri

Bu kısımda öncelikle Lie grup-grupoid kavramı ve bazı temel özellikleri verilecektir. Daha sonra Lie grup-grupoidlerin örtüleri ve etkilerinin kategorileri oluşturularak bu kategorilerin denk olduğu gösterilecektir.

Tanım 3.2.1. *Bir G Lie grup-grupoidi, bir Lie grup yapısıyla donatılmış ve $m : G \times G \to G$, $(a, b) \mapsto a + b$ toplama, $e : * \to G$, $* \mapsto e(*) = 1_e$ birim ve $\bar{u} : G \to G$, $a \mapsto -a$ ters denen Lie grubun yapı dönüşümleri birer Lie grupoid morfizmi olan bir G Lie grupoiddir.*

Ayrıca, bir G Lie grup-grupoidinde

$$(b \circ a) + (d \circ c) = (b + d) \circ (a + c)$$

değiştirme kuralı vardır.

Örnek 3.2.1. *G bir Lie grup olsun. Bu durumda, Örnek 1.1.3 den nesne kümesi G ve morfizm kümesi $G \times G$ olan bir grup-grupoid tanımlıdır. Ayrıca, Örnek 1.3.14 den $G \times G$ bir Lie grupoiddir. G Lie grubunun işlemi ile tanımlı $(x, y) + (z, t) = (x + z, y + t)$ işlemi ve çarpım manifoldu ile $G \times G$ de bir Lie gruptur. $G \times G$ nin grup yapı dönüşümleri, G Lie grubunun yapı dönüşümleri ile tanımlı olduğundan diferensiyellenebilirdir. Sonuç olarak, $G \times G$ bir Lie grup-grupoiddir.*

Böylece bu örnek, Lie grupların *LGrp* kategorisinden Lie grup-grupoidlerin *LGGd* kategorisine bir funktor tanımlar. Bunu bir önerme ile verelim.

Önerme 3.2.1. *Lie grupların LGrp kategorisinden Lie grup-grupoidlerin LGGd kategorisine bir $\Gamma : LGrp \to LGGd$ funktoru vardır.*

İspat. G bir Lie grup olsun. Bu durumda, Örnek 3.2.1 den $G \times G$ bir Lie grup-grupoiddir. Eğer $f : G \to H$ Lie grupların bir morfizmi ise $\Gamma(f) : G \times G \to H \times H$ de Lie grup-grupoidlerin morfizmidir. Gerçekten, $(y, x) \mapsto (f(y), f(x))$ ile verildiğinden Önerme 1.1.2 ye göre $\Gamma(f)$, grup yapısını korur ve f diferensiyellenebilir olduğundan $\Gamma(f) = (f, f)$ de diferensiyellenebilirdir. Ayrıca, Önerme 1.1.2 den

$$\Gamma(f)((z, y) \circ (y, x)) = \Gamma(f)(z, y) \circ \Gamma(f)(y, x)$$

bulunur. Sonuç olarak, $\Gamma(f)$ Lie grup-grupoidlerin morfizmidir. □

Teorem 3.2.1. *Bir G Lie grup-grupoidinde e birim elemanının geçişli bileşeni, Lie grubun toplama işlemi ile birlikte Lie normal altgrup yapısına sahip bir Lie grup-grupoiddir.*

İspat. $C_e(G)$ nin G nin altgrupoidi olduğunu göstermiştik. $C_e(G)_0$' dan seçilen her nesne için $T_x \in G(x,e)$ morfizmi ve $a \in G(x,y)$, $b \in G(x',y')$ olmak üzere $a,b \in C_e(G)$ olsun. Böylece, $T_x - T_{x'} \in G(x-x',e)$ ve $T_y - T_{y'} \in G(y-y',e)$ olmak üzere $a-b \in G(x-x',y-y')$ bulunur. Buradan $x-x', y-y' \in C_e(G)_0$ ve $a-b \in C_e(G)$ bulunur. Diğer bir ifadeyle $C_e(G)$ bir altgruptur. $C_e(G)_0$ ve $C_e(G)$ üzerinde altmanifold yapısı vardır. Ayrıca, $C_e(G)$ deki toplama işlemi G nin toplama işlemi olup diferensiyellenebilirdir. Böylece $C_e(G)$, Lie gruptur. Son olarak, $C_e(G)$ altgrupoidinin yapı dönüşümleri, G deki yapı dönüşümlerinin kısıtlamaları olup diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla $C_e(G)$, bir Lie grup-grupoiddir. Şimdi de normal olduğunu gösterelim. Bunun için $a \in G(x,y)$ olmak üzere $a \in C_e(G)$ ve $g \in G(w,z)$ olsun. Böylece; $g \in G(w,z)$, $T_x \in G(x,e)$ ve $-g \in G(-w,-z)$ olmak üzere $g + T_x - g \in G(w+x-w, z+e-z)$ ve buradan $g + T_x - g \in G(w+x-w, e)$ olup $g + a - g \in G(w+x-w, z+y-z)$ bulunur. Dolayısıyla, $g+a-g \in C_e(G)$ olup, $C_e(G)$ Lie normal altgruptur. $\square$

Teorem 3.2.2. *Bir G Lie grup-grupoidinde bütün karakteristik gruplar birbirine lineer olarak diffeomorftur.*

İspat. Her $x \in G_0$ için $G\{x\}$ nesne grubunun $G\{e\}$ verteks grubuna izomorf olduğunu göstermek yeterlidir. Sol değişim(left translation) dönüşümünün tanımından $L_{1_x} : G\{e\} \to G\{x\}$, $a \mapsto 1_x + a$ ve diğer taraftan değiştirme kuralı yardımıyla $L_{1_x}(b \circ a) = 1_x + (b \circ a) = (1_x \circ 1_x) + (b \circ a) = (1_x + b) \circ (1_x + a)$ yazılabilir. Bundan dolayı L_{1_x} bir morfizmdir. Ayrıca, $+$ ve $\circ$ işlemleri, sırasıyla Lie grubun ve Lie grupoidin işlemleri olup diferensiyellenebilirdir. Yani L_{1_x} diferensiyellenebilirdir. Ayrıca, L_{1_x} in tersi var ve o da diferensiyellenebilirdir. $\square$

Bir G Lie grup-grupoidi için, eğer onun temelini oluşturan Lie grupoidi sırasıyla bağlantılı, 1-bağlantılı veya basit bağlantılı ise G ye *bağlantılıdır, 1-bağlantılıdır* veya *basit bağlantılıdır* denir.

G ve H iki Lie grup-grupoid olsun. Lie grup-grupoidlerin bir $f : H \to G$ morfizmi, G ve H nın temelini oluşturan Lie grupoidlerin, Lie grup yapısını koruyan morfizmidir. Yani, $a, b \in H$ için $f(a+b) = f(a) + f(b)$ dir. Lie grup-grupoidlerin bir $f : H \to G$ morfizmi için, eğer f, G ve H nın temelini oluşturan Lie grupoidlerin örtü morfizmi ise f ye *Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmi* denir.

Önerme 3.2.2. *Temelini oluşturan manifoldu bağlantılı olan bir Lie grup M olsun. Bu durumda, $\pi_1 M$ bir Lie grup-grupoiddir.*

İspat. $\pi_1 M$ nin bir grup-grupoid olduğu Örnek 1.1.4 de gösterilmişti. M manifoldunu diferensiyellenebilir yapan ve yükseltilebilir harita tanım kümelerinden meydana gelen atlası $\mathcal{A}$ ile gösterelim. M bağlantılı bir manifold olduğundan Örnek 2.3.1' den $\pi_1(M)$ nin Lie esas grupoid olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\pi_1(M)$ üzerinde, onu diferensiyellenebilir manifold yapan ve $\mathcal{A}$' dan yükseltilen $\widetilde{\mathcal{A}}$ yükseltilmiş atlası mevcuttur. Şimdi $\pi_1(M)$' nin Lie grup-grupoid olduğunu gösterebiliriz. Bunun için $\pi_1 m : \pi_1(M) \times \pi_1(M) \to \pi_1(M)$ grup işleminin diferensiyellenebilir olduğunu göstermek yeterlidir.

$m : M \times M \to M$ Lie grubun toplama işlemi olduğundan diferensiyellenebilirdir. Bunu aşağıdaki diyagram aracılığıyla kolayca görebiliriz.

$$\begin{tikzcd}
M \times M \arrow[r, "m"] \arrow[d, "\varphi\times\varphi"'] & M \arrow[d, "\varphi"] \\
\mathbb{R}^{2n} \arrow[r, "pr_1"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Bu diyagramda φ, M' nin $\mathcal{A}$ yükseltilebilir atlasından seçilen U tanım kümeli bir koordinat haritasıdır. Dolayısıyla φ, $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ açık kümesi üzerine bir diffeomorfizmdir. Buradan $\varphi \times \varphi$ de diferensiyellenebilirdir. Ayrıca pr_1 izdüşüm dönüşümü olduğundan diferensiyellenebilirdir. Böylece $m = \varphi^{-1} \circ pr_1 \circ (\varphi \times \varphi)$ olup m diferensiyellenebilirdir.

$\pi_1(M)$, M üzerinde Lie grupoid olduğundan ve $M \times M$ çarpım manifoldunun örtü manifoldu olduğundan yukarıdaki diyagramın yükseltilmesi olan aşağıdaki diyagramı verebiliriz.

$$\begin{tikzcd}
\pi_1(M) \times \pi_1(M) \arrow[r, "\pi_1 m"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}\times\widetilde{\varphi}"'] & \pi_1 M \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\
\mathbb{R}^{4n} \arrow[r, "pr_{1,2}"] & \mathbb{R}^{2n}
\end{tikzcd}$$

$\widetilde{\varphi}$, φ harita dönüşümünden yükseltilen harita dönüşümüdür. Dolayısıyla $\widetilde{\varphi}$ ve buradan $\widetilde{\varphi} \times \widetilde{\varphi}$ dönüşümleri diferensiyellenebilirdir. Ayrıca $pr_{1,2}$ izdüşüm dönüşümü olduğundan diferensiyellenebilirdir. Buradan $\pi_1 m$ diferensiyellenebilirdir. Böylece $\pi_1 M$ bir Lie grup-grupoiddir. □

Aşağıdaki önermeden $\pi_1 G$ Lie grup-grupoidi funktoryaldır.

Önerme 3.2.3. *$f : H \to G$ bağlantılı Lie grupların morfizmi olsun. f den indirgenmiş $\pi_1 f : \pi_1 H \to \pi_1 G$ morfizmi Lie grup-grupoidlerin morfizmidir.*

İspat. $\pi_1 f$' nin grup-grupoidlerin bir morfizmi olduğu Mucuk [21] tarafından ispatlanmıştı. Dolayısıyla sadece $\pi_1 f$' nin diferensiyellenebilirliğini göstermek yeterlidir. $f : H \to G$ diferensiyellenebilir olduğundan H üzerindeki (U, φ) ve G üzerindeki (V, ψ) haritaları için $f(U) \subset V$ dir ve $\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$ bir diferensiyellenebilir dönüşümdür.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & G \arrow[d, "\psi"] \\
\mathbb{R}^n \arrow[r, "I"] & \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

H' ya karşılık $\pi_1 H$ ve G' ye karşılık $\pi_1 G$ Lie esas grupoidleri vardır. Dolayısıyla (U, φ) ve (V, ψ) haritalarının yükseltmeleri olan $(\widetilde{U}, \widetilde{\varphi})$ ve $(\widetilde{V}, \widetilde{\psi})$ yükseltilmiş haritaları aracılığıyla $\pi_1 f$ grupoid morfizmini $\widetilde{\psi}^{-1} \circ Id \circ \widetilde{\varphi}$ şeklinde tanımlayabiliriz. $\widetilde{\psi}$ ve $\widetilde{\varphi}$ sırasıyla $\pi_1 G$ ve $\pi_1 H$ Lie grupoidlerinin harita dönüşümleri olduğundan diferensiyellenebilirdir. Ayrıca Id birim dönüşümü de diferensiyellenebilir olduğundan $\pi_1 f$ diferensiyellenebilirdir.

□

Önerme 3.2.4. *Bağlantılı Lie grupların $p : \tilde{M} \to M$ örtü morfizmi verilsin. Bu durumda, $\pi_1 p : \pi_1 \tilde{M} \to \pi_1 M$ morfizmi de Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmidir.*

İspat. $\tilde{M}$ ve M bağlantılı olmak üzere, Lie grupların $p : \tilde{M} \to M$ örtü morfizmi verilsin. p açıkça diferensiyellenebilirdir ve bir Lie grup homomorfizmidir. $\tilde{M}$ ve M bağlantılı Lie gruplar olduğundan Önerme 3.2.2 den $\pi_1\tilde{M}$ ve $\pi_1 M$ birer Lie grup-grupoiddir ve Örnek 2.1.2 den $\pi_1 p : \pi_1\tilde{M} \to \pi_1 M$ grupoidlerin örtü morfizmidir. Ayrıca Önerme 3.2.3 den $\pi_1 p$, Lie grup-grupoidlerin morfizmidir. Şimdi $\pi_1 p$' nin Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmi olduğunu gösterelim. $\pi_1 p$, Lie grup-grupoid morfizmi ve α, Lie grup-grupoidin kaynak dönüşümü olduğundan diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla,

$$(\pi_1 p, \alpha) : \pi_1\tilde{M} \to \pi_1 M \;{}_{\alpha}\times_p \tilde{M}$$

dönüşümü diferensiyellenebilirdir ve $\pi_1 p$ grup-grupoidlerin örtü morfizmi olduğundan $(\pi_1 p, \alpha)$ bire-bir ve örtendir. Dolayısıyla $(\pi_1 p, \alpha)$' nın $s_{\pi_1 p} : \pi_1 M \;{}_{\alpha}\times_p \tilde{M} \to \pi_1\tilde{M}$ tersi mevcuttur. $s_{\pi_1 p}$, her bir $([a], \widetilde{x})$ ikilisini $\widetilde{x}$ da başlayan ve $\pi_1 p([h]) = [a]$ olacak şekildeki h diferensiyellenebilir eğrilerinin bir tek $[h]_{\widetilde{x}}$ homotopi sınıfına götüren fonksiyondur. Homotopi yükseltme özelliği ve tek yükseltme özelliğinden $s_{\pi_1 p}$ nin iyi tanımlı olduğu açıktır. Ayrıca $s_{\pi_1 p}$,

$$\begin{array}{ccccccc}
\pi_1 M \;{}_{\alpha}\times_p \tilde{M} & \xrightarrow{I\times\epsilon} & \pi_1 M \times \pi_1\widetilde{M} & \xrightarrow{I\times L_{\widetilde{a}}} & \pi_1 M \times \pi_1\widetilde{M} & \xrightarrow{pr_2} & \pi_1\widetilde{M} \\
([a], \widetilde{x}) & \longrightarrow & ([a], [1_{\widetilde{x}}]) & \longrightarrow & ([a], [\widetilde{a}]) & \longrightarrow & [\widetilde{a}]
\end{array}$$

diyagramındaki gibi diferensiyellenebilir dönüşümlerin bileşkesi olarak yazılabileceğinden diferensiyellenebilirdir. Böylece $(\pi_1 p, \alpha)$ bir diffeomorfizm olup $\pi_1 p$ Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmidir.

□

G bir Lie grup-grupoid olsun. Bu durumda, nesneleri Lie grup-grupoidlerin $p : H \to G$ örtü morfizmleri olan $LGGdCov(G)$ kategorisini elde ederiz. Bu kategoride, bir $p : H \to G$ nesnesinden $q : K \to G$ nesnesine bir morfizm, $p = q \circ r$ şartını sağlayan Lie grup-grupoidlerin bir $r : H \to K$ morfizmidir.

$$\begin{tikzcd}
H \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & K \arrow[dl, "q"] \\
& G &
\end{tikzcd}$$

Kategorinin kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : H \to H$ ile tanımlıdır. Nesne dönüşümü için aşağıdaki değişimli diyagram verilir.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "1_{(p)}"] \arrow[dr, "p"'] & & H \arrow[dl, "p"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Son olarak komposizyon,

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "q"'] & K \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "p"] & K' \arrow[dl, "q'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

Tanım 3.2.2. *G bir Lie grup-grupoid ve M bir Lie grup olsun. G Lie grup-grupoidinin M Lie grubu üzerine $w : M \to G_0$ diferensiyellenebilir grup morfizmi aracılığıyla etkisi, G nin temelini oluşturan Lie grupoidin M nin temelini oluşturan diferensiyellenebilir manifold üzerine $w : M \to G_0$ diferensiyellenebilir dönüşümü aracılığıyla $w({}^a x) = \beta(a)$, ${}^b({}^a x) = {}^{b \circ a}x$ ve ${}^{1_{w(x)}}x = x$ şartlarını sağlayan etkisinden oluşur ve aşağıdaki değiştirme kuralı sağlanır.*

$$({}^b y) + ({}^a x) = {}^{b+a}(y + x).$$

Böyle bir etki (M, w) ile gösterilir.

Örnek 3.2.2. *Eğer G bir Lie grup-grupoid ise G, $w = p_0 : M = G_0 \to G_0$ birim morfizmi vasıtasıyla $M = G_0$ üzerine etki eder. Gerçekten, p Lie grup-grupoidlerin birim morfizmi olduğundan, p ve p_0 birer diferensiyellenebilir grup morfizmidir. Dolayısıyla w diferensiyellenebilir bir grup morfizmidir. pr_1 birinci izdüşümü ile Lie grup-grupoidin hedef dönüşümünün bileşkesi, $(a, x) = {}^a x = \beta(a)$ ile tanımlı $\beta \circ pr_1 = \phi : G_\alpha \times_w G_0 \to G_0$ etkisini verir. pr_1 ve β diferensiyellenebilir olduğundan $\beta \circ pr_1 = \phi$ bileşkesi de diferensiyellenebilirdir. Ayrıca, w birim morfizm olduğundan $w({}^a x) = w(\beta(a)) = \beta(a)$ olur. Yani ilk şart sağlanır. ${}^b({}^a x) = {}^b(\beta(a)) = \beta(b)$ ve ${}^{b \circ a}x = \beta(b \circ a) = \beta(b)$ olup ikinci şart sağlanır. Son olarak ${}^{1_{w(x)}}x = \beta(1_{w(x)=x}) = x$ bulunur. Ayrıca, $({}^b y) + ({}^a x) = \beta(b) + \beta(a) = \beta(b + a)$ ve ${}^{(b+a)}(y + x) = \beta(b + a)$ olup değiştirme kuralı sağlanır. Böylece, diferensiyellenebilir etki şartları sağlanır.*

Örnek 3.2.3. *$p : \tilde{G} \to G$ Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmi olsun. Bu durumda, G Lie grup-grupoidinin $M = \tilde{G}_0$ Lie grubu üzerine $w = p_0 : \tilde{G}_0 \to G_0$ diferensiyellenebilir grup morfizmi aracılığıyla etkisi vardır. Gerçekten, p Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmi olduğundan $p, p_0 = w$ birer Lie grup morfizmidir ve $s_p : G_\alpha \times_{p_0} \tilde{G}_0 \to \tilde{G}$ diffeomorfizmi vardır. s_p ile $\tilde{\beta}$ diferensiyellenebilir olduğundan, $\tilde{\beta} : \tilde{G} \to \tilde{G}_0$ ile s_p nin bileşkesi, $\phi = \tilde{\beta} \circ s_p : G\ {}_\alpha\times_{p_0} \tilde{G}_0 \to \tilde{G}_0$, $(a, \tilde{x}) \mapsto {}^a\tilde{x} = \tilde{\beta}(\tilde{a})$ diferensiyellenebilir etkisini verir. Örnek 2.3.3 den, G nin temelini oluşturan Lie grupoidin $M = \tilde{G}_0$ ın temelini oluşturan manifold üzerine $w = p_0 : \tilde{G}_0 \to G_0$ aracılığıyla etkisi vardır. Dolayısıyla, etki şartları sağlanır. Böylece, diferensiyellenebilir etki şartları sağlanır.*

Örnek 3.2.4. *G, M Lie grubu üzerine $w : M \to G_0$ diferensiyellenebilir grup morfizmi aracılığıyla etki eden bir Lie grup-grupoid olsun. Bu durumda, Örnek 2.3.2 den nesnelerinin kümesi M Lie grubu olan $G \ltimes M$ Lie etki grupoidi tanımlıdır. Ayrıca $G \ltimes M$ Lie etki grupoidi, G Lie grup-grupoidinin grup işlemi ile tanımlı $(a, x) + (b, y) = (a + b, x + y)$ işlemiyle bir Lie grup-grupoiddir. Önerme 2.3.5 den, $G \ltimes M$ ve G nin temelini oluşturan Lie grupoidlerin $p : G \ltimes M \to G$ örtü morfizmi tanımlıdır. Şimdi, p nin Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmi olduğunu gösterelim. Bunun için p nin grup yapısını koruduğunu göstermeliyiz. p izdüşüm olduğundan,*

$$\begin{aligned} p((a, x) + (b, y)) &= p(a + b, x + y) \\ &= a + b \\ &= p(a, x) + p(b, y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, p bir diferensiyellenebilir grup morfizmidir. Sonuç olarak p, Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmidir.

G bir Lie grup-grupoid olsun. Böylece G nin Lie gruplar üzerine diferensiyellenebilir etkilerinin $LGGdOp(G)$ kategorisini elde ederiz. Burada, (M, w) dan (M', w') ne bir morfizm, $w' \circ f = w$ ve $f({}^a x) = {}^a f(x)$ şartlarını sağlayan Lie grupların bir $f : M \to M'$ morfizmidir.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "w"'] & & M' \arrow[dl, "w'"] \\ & G_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\alpha \times_w M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times f"'] & M \arrow[d, "f"] \\ G_\alpha \times_{w'} M' \arrow[r, "\phi'"'] & M' \end{tikzcd}$$

Bu kategorinin kaynak dönüşümü $\alpha(f) = (M, w)$, hedef dönüşümü $\beta(f) = (M', w')$ ve nesne dönüşümü $1_{(M,w)} : (M, w) \to (M, w)$ ile tanımlıdır. Nesne dönüşümü için aşağıdaki diyagram verilebilir.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "1_{(M,w)}"] \arrow[dr, "w"'] & & M \arrow[dl, "w"] \\ & G_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\alpha \times_w M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times 1"'] & M \arrow[d, "1"] \\ G_\alpha \times_w M \arrow[r, "\phi"'] & M \end{tikzcd}$$

Son olarak komposizyon,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "w"'] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "w'"] & M'' \arrow[dl, "w''"] \\ & G_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G_\alpha \times_w M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times f"'] & M \arrow[d, "f"] \\ G_\alpha \times_{w'} M' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "1\times f'"'] & M' \arrow[d, "f'"] \\ G_\alpha \times_{w''} M'' \arrow[r, "\phi''"] & M'' \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramları ile tanımlıdır.

Önerme 3.2.5. *G, temelini oluşturan grupoidi geçişli bir Lie grup-grupoid olsun. $e \in G_0$, G_0 ın birim elemanı ve $N\{e\}$ de $G\{e\}$ nin bir kapalı Lie altgrubu olsun. Bu durumda $\tilde{e} = N\{e\}$, H_0 ın birimi ile bir H Lie grup-grupoidi ve Lie grup-grupoidlerin bir $p : H \to G$ diferensiyellenebilir örtü morfizmi vardır ve $p(H\{\tilde{e}\}) = N\{e\}$ dir.*

İspat. $M = \{a \circ N\{e\} \mid a \in G_e\}$ olsun. M üzerinde

$$(a \circ N\{e\}) + (b \circ N\{e\}) = (a + b) \circ N\{e\}$$

ile bir grup yapısı tanımlanır. Ayrıca, M üzerindeki işlem G Lie grubunun işlemi ve Lie grupoidin kompozisyonu ile tanımlandığından diferensiyellenebilirdir. O halde, M bir Lie gruptur. Bu grubun birim elemanı $1_e \circ N\{e\}$ ve $-a$, a nın G grubundaki tersi olmak üzere $a \circ N\{e\}$ nin tersi $-a \circ N\{e\}$ dir. $w : M \to G_0,\ a \circ N\{e\} \mapsto \beta(a)$ ile tanımlansın. Bu durumda,

$$\begin{aligned} w((a \circ N\{e\}) + (b \circ N\{e\})) &= w(a + b \circ N\{e\}) \\ &= \beta(a + b) = \beta(a) + \beta(b) \\ &= w(a \circ N\{e\}) + w(b \circ N\{e\}) \end{aligned}$$

olup, $w : M \to G_0$ bir grup morfizmidir ve w, G Lie grup-grupoidin hedef dönüşümü ile tanımlandığından diferensiyellenebilirdir. Etki

$$\phi : G\ {}_{\alpha}\times_{w} M \to M,\ (b, a \circ N\{e\}) \mapsto b \circ a \circ N\{e\}$$

ile tanımlansın. $a \in G(e, y)$ ve $b \in G(y, z)$ için $\alpha(b) = w(a \circ N\{e\}) = \beta(a)$ olup $b \circ a$ tanımlıdır ve $b \circ a \in G_e$ olur. Ayrıca,

$$w({}^{b}(a \circ N\{e\})) = w(b \circ a \circ N\{e\}) = \beta(b \circ a) = \beta(b)$$

olup etkinin ilk şartı sağlanır. $c \in G(z, z')$ ise

$$\begin{aligned} {}^{c}({}^{b}(a \circ N\{e\})) &= {}^{c}(b \circ a \circ N\{e\}) \\ &= c \circ (b \circ a \circ N\{e\}) \\ &= (c \circ b) \circ (a \circ N\{e\}) \\ &= {}^{(cob)}(a \circ N\{e\}) \end{aligned}$$

olup ikinci şart sağlanır. Son olarak ${}^{1_y}(a \circ N\{e\}) = 1_y \circ a \circ N\{e\} = a \circ N\{e\}$ olup üçüncü şart da sağlanır. ϕ etkisinin diferensiyellenebilirliği Önerme 2.3.6 dan kolayca görülür. Böylece, nesne kümesi $(G \ltimes M)_0 = M$ olan bir $G \ltimes M$ Lie grup-grupoidini elde ederiz. Bu grupoidde, bir $a \circ N\{e\}$ nesnesinden $a' \circ N\{e\}$ nesnesine morfizm, ${}^{b}(a \circ N\{e\}) = a' \circ N\{e\}$ şartını sağlayan $(b, a \circ N\{e\})$ ikilisidir. Kaynak dönüşümü $\alpha(b, a \circ N\{e\}) = a \circ N\{e\}$, hedef dönüşümü $\beta(b, a \circ N\{e\}) = b \circ a \circ N\{e\}$, nesne dönüşümü $a \circ N\{e\} \mapsto (1_{\beta(a)}, a \circ N\{e\})$, ters dönüşümü $(b, a \circ N\{e\}) \mapsto (b^{-1}, {}^{b}(a \circ N\{e\}))$ ve kompozisyonu $(b, a' \circ N\{e\}) \circ (c, a \circ N\{e\}) = (b \circ c, a \circ N\{e\})$ ile tanımlıdır. Açıkça, M bir Lie gruptur.

$$(b, a' \circ N\{e\}) + (c, a \circ N\{e\}) = (b + c, (a' + a) \circ N\{e\})$$

grup işlemi ve $G \times M$ nin çarpım manifoldundan indirgenen manifold yapısıyla $G \ltimes M$ de bir Lie gruptur. Bu grubun birim elemanı $(1_e, 1_e \circ N\{e\})$ ve b ile a nın gruptaki tersleri, sırasıyla $-b, -a$ olmak üzere $(b, a \circ N\{e\})$ nin tersi $(-b, -a \circ N\{e\})$ şeklindedir. Grupoid yapı dönüşümlerinin diferensiyellenebilirliği Önerme 2.3.6 dan açıktır. Böylece $G \ltimes M$ bir Lie grup-grupoiddir. $p : G \ltimes M \to G$ morfizmler üzerinde

$(b, a \circ N\{e\}) \mapsto b$ ve nesneler üzerinde w ile verilsin. p_0, w ile verildiğinden Lie grupların bir morfizmidir ve p izdüşüm olduğundan diferensiyellenebilirdir. Ayrıca,

$$
\begin{aligned}
p((b, a' \circ N\{e\}) \circ (c, a \circ N\{e\})) &= p(b \circ c, a \circ N\{e\}) \\
&= b \circ c \\
&= p(b, a' \circ N\{e\}) \circ p(c, a \circ N\{e\})
\end{aligned}
$$

olup p bir Lie grupoid morfizmidir ve

$$
\begin{aligned}
p((b, a' \circ N\{e\}) + (c, a \circ N\{e\})) &= p((b + c, (a' + a) \circ N\{e\})) \\
&= b + c \\
&= p(b, a' \circ N\{e\}) + p(c, a \circ N\{e\})
\end{aligned}
$$

olduğundan grup yapısını korur. O halde p, Lie grup-grupoidlerin bir morfizmidir. $s_p : G\ {}_{\alpha} \times_{p_0} (G \ltimes M)_0 \to G \ltimes M$ olup, $p_0 = w$ ve $(G \ltimes M)_0 = M$ olduğundan, $s_p : G_{\alpha} \times_{p_0} M \to G \ltimes M$ birimdir ve dolayısıyla bire-bir, örten ve diferensiyellenebilirdir. Ayrıca, p diferensiyellenebilir ve α da Lie grup-grupoidin kaynak dönüşümü olduğundan, s_p nin tersi $(p, \alpha) : G \ltimes M \to G_{\alpha} \times_{p_0} (G \ltimes M)_0$ diferensiyellenebilirdir. Böylece, s_p bir diffeomorfizmdir. Sonuç olarak, $p : G \ltimes M \to G$ Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmidir. Eğer $H = G \ltimes M$ ve $\tilde{x} = N\{x\}$ alırsak $p(H\{\tilde{x}\} = N\{x\}$ dir. $\square$

Şimdi $\tilde{M}, M$ bağlantılı Lie gruplar olsun. $LGCov(M)$ kategorisi, nesneleri $p : \tilde{M} \to M$ Lie grupların örtü morfizmleri ve $p : \tilde{M} \to M$ nesnesinden $q : \tilde{N} \to M$ nesnesine morfizmi, $p = q \circ r$ şartını sağlayan Lie grupların $r : \tilde{M} \to \tilde{N}$ morfizmi olan bir kategoridir.

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{M} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{N} \arrow[dl, "q"] \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

Bu kategoride; kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : \tilde{M} \to \tilde{M}$ birimi ile tanımlıdır. Nesne dönüşümü için aşağıdaki değişimli diyagramı verebiliriz.

$$
\begin{tikzcd}
\tilde{M} \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{M} \arrow[dl, "p"] \\
& M &
\end{tikzcd}
$$

$r : \tilde{M} \to \tilde{N}$ ve $r' : \tilde{N} \to \tilde{P}$ iki morfizm olmak üzere kompozisyon,

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{N} \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & \tilde{P} \arrow[dl, "p'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

M bağlantılı Lie grup ise Önerme 3.2.2 den $\pi_1 M$ esas grupoidi bir Lie grup-grupoiddir. Böylece $LGGdCov(\pi_1 M)$ kategorisi, $\tilde{M} = \tilde{G}_0$ bağlantılı olmak üzere, nesneleri Lie grup-grupoidlerin $p : \tilde{G} \to \pi_1 M$ örtü morfizmleri ve $p : \tilde{G} \to \pi_1 M$ nesnesinden $q : \tilde{H} \to \pi_1 M$ nesnesine morfizmi, $p = q \circ r$ şartını sağlayan Lie grup-grupoidlerin $r : \tilde{G} \to \tilde{H}$ morfizmi olan bir kategoridir.

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{H} \arrow[dl, "q"] \\ & \pi_1 M & \end{tikzcd}$$

Bu kategoride; kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : \tilde{G} \to \tilde{G}$ ile tanımlıdır. Nesne dönüşümü için aşağıdaki değişimli diyagramı verebiliriz.

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[rr, "1_{(p)}"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{G} \arrow[dl, "p"] \\ & \pi_1 M & \end{tikzcd}$$

$r : \tilde{G} \to \tilde{H}$ ve $r' : \tilde{H} \to \tilde{K}$ iki morfizm olmak üzere kompozisyon,

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{H} \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & \tilde{K} \arrow[dl, "p'"] \\ & \pi_1 M & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

Teorem 3.2.3. *M bağlantılı Lie grup olsun. Bu takdirde M Lie grubunun diferensiyellenebilir örtülerinin $LGCov(M)$ kategorisi, $\pi_1 M$ Lie grup-grupoidinin örtülerinin $LGGdCov(\pi_1 M)$ kategorisine denktir.*

İspat. $\Gamma : LGCov(M) \to LGGdCov(\pi_1 M)$ funktorunu aşağıdaki gibi tanımlayalım: $M, \tilde{M}$ bağlantılı olmak üzere $p : \tilde{M} \to M$ morfizmi, Lie grupların örtü morfizmi ise Önerme 3.2.4 den $\pi_1 p : \pi_1 \tilde{M} \to \pi_1 M$ Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmidir. Böylece $\Gamma(p) = \pi_1 p$, Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmidir. $p : \tilde{M} \to M$ den $q : \tilde{N} \to M$ ye Lie grupların örtü morfizmlerinin morfizmi $r : \tilde{M} \to \tilde{N}$ ise $LGCov(M)$ kategorisinin tanımından, r de Lie grupların örtü morfizmidir ve $\tilde{M}, \tilde{N}$ bağlantılı olduğundan $\pi_1 r$ de Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmidir. Açıkça $\Gamma(r)$, $\pi_1 p$ den $\pi_1 q$ ya Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmlerinin morfizmidir. $q' : \tilde{P} \to M$ olmak üzere Lie grupların örtü morfizmlerinin diğer bir morfizmi de $r' : \tilde{N} \to \tilde{P}$ olsun. r ve r' Lie grupların örtü morfizmi olacağından bunların bileşkesi de $r' \circ r : \tilde{M} \to \tilde{P}$ Lie grupların örtü morfizmidir ve açıkça p den q' ne Lie grupların örtü morfizmlerinin morfizmidir. Ayrıca $\tilde{M}, \tilde{P}$ bağlantılı olduğundan $\pi_1(r' \circ r) = \pi_1 r' \circ \pi_1 r$ de Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmidir ve $\pi_1 p$ den $\pi_1 q'$ ne Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmlerinin morfizmidir. Böylece $\Gamma(r' \circ r) = \Gamma(r') \circ \Gamma(r)$ olup Γ bir funktordur.

Şimdi de $\Phi : LGGdCov(\pi_1 M) \to LGCov(M)$ funktorunu oluşturalım. $\tilde{G}_0 = \tilde{M}$ bağlantılı olmak üzere $q : \tilde{G} \to \pi_1 M$ Lie grup-grupoidlerin diferensiyellenebilir örtü morfizmi olsun. M bağlantılı olduğundan Önerme 2.3.2 ye göre $p = q_0 : \tilde{M} \to M$ için $\tilde{M}$ üzerinde, p yi M ve $\tilde{M}$ nın temelini oluşturan manifoldlar üzerinde diferensiyellenebilir örtü dönüşümü yapan yükseltilmiş manifold ve bir $r : \tilde{G} \to \pi_1 \tilde{M}$ izomorfizmi vardır. Ayrıca, $p = q_0$ ve q da Lie grup-grupoid morfizmi olduğundan p de Lie grupların morfizmidir. Böylece, $\Phi(q) = q_0 = p$ Lie grupların örtü morfizmidir. $q : \tilde{G} \to \pi_1 M$ den $q' : \tilde{H} \to \pi_1 M$ ye Lie grup-grupoidlerin diferensiyellenebilir örtü morfizmlerinin bir morfizmi $f : \tilde{G} \to \tilde{H}$ olsun. Önerme 3.2.2' den M üzerindeki $\mathcal{A}$ yükseltilebilir atlası için $\tilde{M} = \tilde{G}_0$ üzerinde $\widetilde{\mathcal{A}}_q$ ve $\tilde{N} = \tilde{H}_0$ üzerinde $\widetilde{\mathcal{A}}_{q'}$ yükseltilmiş atlasları mevcuttur. Bu atlaslar $\widetilde{M}$ ve $\widetilde{N}$ manifoldlarını diferensiyellenebilir yapan yükseltilmiş haritalardan oluşur. $\widetilde{x} \in \widetilde{M}$ ve $\widetilde{U}_{q'}$ de $f(\widetilde{x})$' yı içeren $\widetilde{\mathcal{A}}_{q'}$' nün bir elemanı olsun. Bu durumda $U = q'(\widetilde{U}'_q) \in \mathcal{A}$ dır ve U, $\widetilde{x}$' yı içeren $\widetilde{\mathcal{A}}_q$' nun bir tek $\widetilde{U}_q$ elemanına yükseltilir. Ayrıca $f(\widetilde{U}_q) = \widetilde{U}_{q'}$ olur. Böylece $f : \widetilde{M} \to \widetilde{N}$ diferensiyellenebilirdir. Yani $\Phi(f)$ Lie grupların örtü morfizmlerinin morfizmidir. $q'' : \tilde{H}' \to \pi_1 M$ olmak üzere q' den q'' ne bir diğer morfizm $f' : \tilde{H} \to \tilde{H}'$ olsun. f, f' Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmi olduğundan $f' \circ f$ de

Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmidir ve açıkça, q dan q'' ne Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmlerinin morfizmidir. Ayrıca, yukarıdaki gibi, $\Phi(f' \circ f)$ Lie grupların örtü morfizmlerinin morfizmidir ve buradan, $\Phi(f' \circ f) = \Phi(f') \circ \Phi(f)$ bulunur. O halde, Φ bir funktordur.

Şimdi $\Gamma\Phi \cong 1_{LGGdCov(\pi_1 M)}$ ve $\Phi\Gamma \cong 1_{LGCov(M)}$ doğal denkliklerini gösterelim. $q : \tilde{G} \to \pi_1 M$ ve $q' : \tilde{H} \to \pi_1 M$ Lie grup-grupoidlerin diferensiyellenebilir örtü morfizmleri için yukarıdaki gibi M bağlantılı olduğundan $p = q_0 : \tilde{M} \to M$ ve $p' = q'_0 : \tilde{N} \to M$ diferensiyellenebilir manifoldların örtü dönüşümleri ve $r : \tilde{G} \to \pi_1 \tilde{M}$ ve $r' : \tilde{H} \to \pi_1 \tilde{N}$ izomorfizmleri vardır. Şimdi aşağıdaki diyagramın değişimli olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{G} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"'] & \pi_1 \tilde{M} \arrow[d, "\pi_1 f_0"] \\
\tilde{H} \arrow[r, "r'"'] & \pi_1 \tilde{N}
\end{tikzcd}$$

Bunun için, r nin tanımını incelememiz gerekir. $\tilde{a}$, $\tilde{G}$ nın $\tilde{x}$ da başlayan bir elemanı ve $q(\tilde{a}) \in \pi_1 M$ nin bir temsilcisi $a : I \to M$ olsun. Bu takdirde a, $\pi_1 a : \pi_1 I \to \pi_1 M$, $\pi_1 a(\imath) = q(\tilde{a})$, morfizmine indirgenir. Ayrıca $\pi_1 a$ bir tek $a' : (\pi_1 I, 0) \to (\tilde{G}, \tilde{x})$ morfizmine yükseltilir. Bu durumda $r(\tilde{a})$, $a'_0 : I \to \tilde{M}$ yolunun denklik sınıfıdır. $\tilde{b} = f(\tilde{a})$ olsun ve $b = f_0(a)$ olmak üzere $b' : (\pi_1 I, 0) \to (\tilde{H}, f(\tilde{x}))$ yı elde etmek için aynı yöntemi kullanalım. b', b tarafından tek türlü belirlendiğinden $r' f(\tilde{a}) = (\pi_1 f_0) r(\tilde{a})$ bulunur. Yani, $\Gamma\Phi \cong 1_{LGGdCov(\pi_1 M)}$ bulunur. Son olarak $\Phi\Gamma \cong 1_{LGCov(M)}$ olduğunu göstermeliyiz. Fakat $\tilde{M} = (\pi_1 \tilde{M})_0$ ve $\tilde{M}$ nın manifold yapısı yükseltilmiş manifold olduğundan $\Phi\Gamma = 1_{LGCov(M)}$ olup ispat tamamlanır. □

Teorem 3.2.4. *Bir G Lie grup-grupoidi için, G nin örtülerinin $LGGdCov(G)$ kategorisi ile G nin Lie gruplar üzerine diferensiyellenebilir etkilerinin $LGGdOp(G)$ kategorisi denktir.*

İspat. $\Gamma : LGGdOp(G) \to LGGdCov(G)$ funktoru aşağıdaki gibi tanımlansın: G Lie grup-grupoidinin M Lie grubu üzerine $w : M \to G_0$ diferensiyellenebilir grup morfizmi aracılığıyla diferensiyellenebilir etkisi $\phi : G\ {}_{\alpha}\times_{w} M \to M,\ (a, x) \mapsto \phi(a, x) = {}^{a}x$ olsun. Bu durumda Örnek 3.2.4 den nesnelerinin manifoldu M Lie grubu olan $G \ltimes M$ Lie grup-grupoidi tanımlıdır. $p : G \ltimes M \to G$ morfizmler üzerinde $(a, x) \mapsto a$ ve nesneler üzerinde w ile verildiğinden, yine Örnek 3.2.4 den Lie grup-grupoidlerin bir örtü morfizmidir. Yani $\Gamma(M, w)$, Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmidir. (M, w) ve (M', w') birer diferensiyellenebilir etki ise $\Gamma(M, w)$ ve $\Gamma(M', w')$ Lie grup-grupoidlerin diferensiyellenebilir örtü morfizmidir. Bu diferensiyellenebilir örtü morfizmleri, sırasıyla $p : G \ltimes M \to G$ ve $q : G \ltimes M' \to G$ olsun. Eğer $f : M \to M'$ diferensiyellenebilir etkilerin bir morfizmi ise $r_0 = f$ ve $r = 1 \times f$ ile $\Gamma(f) = r$ de diferensiyellenebilir örtü morfizmlerinin morfizmidir. Gerçekten

$$\begin{tikzcd} G \ltimes M \arrow[rr, "r=1\times f"] \arrow[dr, "p"'] & & G \ltimes M' \arrow[dl, "q"] \\ & G & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (a,x) \arrow[rr, "r=1\times f"] \arrow[dr, "p"'] & & (a, f(x)) \arrow[dl, "q"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişimlidir. Bununla beraber, $f : M \to M'$ ve $g : M' \to N$ diferensiyellenebilir etkilerin morfizmi ise $\Gamma(g \circ f) = \Gamma(g) \circ \Gamma(f)$ dir. $\Gamma(M, w) = G \ltimes M$, $\Gamma(M', w') = G \ltimes M'$, $\Gamma(N, w'') = G \ltimes N$, $\Gamma(f) = r$ ve $\Gamma(g) = r'$ olmak üzere $g \circ f : M \to N$ olup $\Gamma(g \circ f) = r' \circ r = \Gamma(g) \circ \Gamma(f)$ bulunur. Bu durum, aşağıdaki değişimli diyagramlardan açıkça görülür.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "w"'] & M' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "w'"] & N \arrow[dl, "w''"] \\ & G_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} G \ltimes M \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & G \ltimes M' \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & G \ltimes N \arrow[dl, "q'"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

Böylece Γ bir funktordur.

$\Phi : LGGdCov(G) \to LGGdOp(G)$ funktorunu aşağıdaki gibi tanımlayalım. $p : \tilde{G} \to G$ Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmi için $M = \tilde{G}_0$ ve $w = p_0 : \tilde{G}_0 \to G_0$ olsun. Bu durumda, Örnek 3.2.3 den $(M = \tilde{G}_0, w = p_0)$ diferensiyellenebilir etkisi elde edilir. Yani $\Phi(p)$, G Lie grup-grupoidinin bir Lie grup üzerine etkisidir. $p : \tilde{G} \to G$ ve $q : H \to G$ Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmleri ise $\Phi(p)$ ve $\Phi(q)$, sırasıyla G Lie grup-grupoidinin $\tilde{G}_0$ ve H_0 Lie grupları üzerine p_0 ve q_0 diferensiyellenebilir grup morfizmleri aracılığıyla etkisidir. Bu diferensiyellenebilir etkiler sırasıyla $(\tilde{G}_0, p_0)$ ve (H_0, q_0) olsun. p ve q Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmi ise $r : \tilde{G} \to H$ de Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmidir. Böylece, r diferensiyellenebilir örtü morfizmlerinin bir morfizmi ise $r_0 = f$ ile $\Phi(r) = f$ de diferensiyellenebilir etkilerin morfizmidir. Gerçekten,

$$\begin{tikzcd} \tilde{G}_0 \arrow[rr, "r_0=f"] \arrow[dr, "p_0"'] & & H_0 \arrow[dl, "q_0"] \\ & G_0 & \end{tikzcd}$$

diyagramı, r diferensiyellenebilir örtü morfizmlerinin morfizmi ve $f = r_0$ ile verildiğinden değişimlidir. Ayrıca, r diferensiyellenebilir örtü morfizmlerinin morfizmi olduğundan $p = q \circ r$ ve $p_0 = q_0 \circ r_0$ dır. Etkinin korunduğu aşağıdaki diyagramdan kolayca görülür.

$$\begin{tikzcd} G_\alpha \times_{p_0} \tilde{G}_0 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times r_0"'] & \tilde{G}_0 \arrow[d, "f=r_0"] \\ G_\alpha \times_{q_0} H_0 \arrow[r, "\phi'"'] & H_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (a, \tilde{x}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times r_0"'] & {}^{a}\tilde{x} \arrow[d, "f=r_0"] \\ (a, r_0(\tilde{x}) = f(\tilde{x})) \arrow[r, "\phi'"'] & f({}^{a}\tilde{x}) =^{a} f(\tilde{x}) \end{tikzcd}$$

Bununla beraber, $p : \tilde{G} \to G$ den $q : H \to G$ ya morfizmi $r : \tilde{G} \to H$ ve $q : H \to G$ dan $p' : H' \to G$ ne morfizmi $r' : H \to H'$ ise $\Phi(r' \circ r) = \Phi(r') \circ \Phi(r)$ dir. $\Phi(p) = (\tilde{G}, p_0)$, $\Phi(q) = (H_0, q_0)$, $\Phi(p') = (H'_0, p'_0)$, $\Phi(r) = f$ ve $\Phi(r') = f'$ olmak üzere $r' \circ r : \tilde{G} \to H'$ olup Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmidir ve $\Phi(r' \circ r) = f' \circ f = \Phi(r') \circ \Phi(r)$ bulunur. Bu durum, aşağıdaki değişimli diyagramlardan açıkça görülür.

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & H \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & H' \arrow[dl, "p'"] \\ & G & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} \tilde{G}_0 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_0"'] & H_0 \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "q_0"] & H'_0 \arrow[dl, "p'_0"] \\ & G_0 & \end{tikzcd}$$

Böylece Φ bir funktordur.

Şimdi de $\Phi\Gamma \cong 1_{LGGdOp(G)}$ ve $\Gamma\Phi \cong 1_{LGGdCov(G)}$ doğal denkliklerini gösterelim. Eğer (M, w) diferensiyellenebilir etkisi verilmiş ise, Örnek 3.2.4 den nesne manifoldu $(G \ltimes M)_0 = M$ Lie grubu olan $G \ltimes M$ Lie grup-grupoidi ve Lie grup-grupoidlerin $p : G \ltimes M \to G$ örtü morfizmi vardır. Ayrıca $\Phi(\Gamma(M, w))$, G Lie grup-grupoidinin $(G \ltimes M)_0 = M$ Lie grubu üzerine $p_0 = w : (G \ltimes M)_0 = M \to G_0$ diferensiyellenebilir grup morfizmi aracılığıyla diferensiyellenebilir etkisini verir. Yani $\Phi(\Gamma(M,w)) = (M,w)$ dır. Böylece, $\Phi\Gamma = 1_{LGGdOp(G)}$ elde edilir.

Tersine, $p:\tilde{G}\to G$ Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmi ise $\Phi(p)$, G Lie grup-grupoidinin $\tilde{G}_0$ Lie grubu üzerine $p_0:\tilde{G}_0\to G_0$ diferensiyellenebilir grup morfizmi aracılığıyla $\phi: G\ {}_{\alpha}\times_{p_0} \tilde{G}_0 \to \tilde{G}_0$ diferensiyellenebilir etkisidir. Ayrıca, nesnelerin manifoldu $\tilde{G}_0$ ve morfizmlerin manifoldu $G\ltimes\tilde{G}_0$ olmak üzere, $\Gamma(\Phi(p))$ de $p':G\ltimes\tilde{G}_0\to G$ Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmidir. Şimdi, $T':1_{LGGdCov(G)}\to\Gamma\Phi$ doğal dönüşümünü tanımlayalım. Eğer $p:\tilde{G}\to G$ Lie grup-grupoidlerin diferensiyellenebilir örtü morfizmi ise $T'_p:\tilde{G}\to\Gamma\Phi(p)=G\ltimes\tilde{G}_0$ dönüşümü nesneler üzerinde özdeş ve $\tilde{a}$, a nın yükseltmesi olmak üzere morfizmler üzerinde $\tilde{a}\mapsto(a,\tilde{x})$ ile tanımlıdır (burada $\tilde{x}$, $\tilde{a}$ nın kaynağıdır) ve p, p' diferensiyellenebilir örtü morfizmi olduğundan Önerme 2.1.2 ye göre T'_p de bir diferensiyellenebilir örtü morfizmidir. $\tilde{a}\in\tilde{G}$ için $p(\tilde{a})=a$ ve $p'(T'_p(\tilde{a}))=p'(a,\tilde{x})=a$ dır, yani aşağıdaki diyagram değişimlidir.

$$\begin{tikzcd} & G\ltimes\tilde{G}_0 \arrow[d, "p'"] \\ \tilde{G} \arrow[ur, "T'_p"] \arrow[r, "p"'] & G \end{tikzcd}$$

Dolayısıyla, T'_p Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmlerinin bir morfizmidir. Eğer $q:H\to G$ Lie grup-grupoidlerin bir diğer örtü morfizmi ve $r:\tilde{G}\to H$ diferensiyellenebilir örtü morfizmlerinin morfizmi ise aşağıdaki diyagram değişimlidir.

$$\begin{tikzcd} \tilde{G} \arrow[r, "T'_p"] \arrow[d, "r"'] & G\ltimes\tilde{G}_0 \arrow[d, "\Gamma\Phi(r)=1\times r_0"] \\ H \arrow[r, "T'_q"'] & G\ltimes H_0 \end{tikzcd}$$

Açıkça, T'_p nin tersi, nesneler üzerinde özdeş ve morfizmler üzerinde $(a,\tilde{x})\mapsto\tilde{a}$ ile tanımlı $(T'_p)^{-1}: G\ltimes\tilde{G}_0\to\tilde{G}$ morfizmidir. Böylece, T' bir doğal denkliktir. Dolayısıyla $1_{LGGdCov(G)}\cong\Gamma\Phi$ dir. $\square$

BÖLÜM 4

LIE HALKA-GRUPOİDLERİN ÖRTÜLERİ VE ETKİLERİ

Bölüm 1 de cebirsel anlamda halka-grupoid kavramı ve gerekli olan bazı temel örnek ve teoremler verildi. Her Lie halka-grupoid bir topolojik halka-grupoid olduğundan, bu bölümde sırasıyla topolojik halka-grupoidler ile ilgili temel kavramlar, topolojik halka-grupoidlerin örtüleri ve etkilerinin kategorilerinin denkliği ve son olarak Lie halka-grupoidlerin tanımı ile örtüleri ve etkilerinin kategorilerinin denkliği verilecektir.

4.1 Topolojik Halka-Grupoidlerin Örtüleri Ve Etkileri

Topolojik halka-grupoidlerin örtüleri ve etkilerini vermeden önce topolojik halka-grupoidlerle ilgili temel tanım ve kavramları verelim.

Bölüm 1 de verilen topolojik halka ve topolojik halkaların morfizmi kavramlarını tekrar hatırlatalım.

Tanım 4.1.1. *Bir topolojik halka, temelini oluşturan küme topolojiye sahip ve* $(x, y) \to x + y$ *ile tanımlı* $m : R \times R \to R$ *grup işlemi,* $(x, y) \to xy$ *ile tanımlı* $n : R \times R \to R$ *halka işlemi,* $x \to -x$ *ile tanımlı* $\bar{u} : R \to R$ *ters dönüşümleri sürekli olan bir* R *halkasıdır.*

H dan R ye topolojik halkaların bir morfizmi, H ve R nin temelini oluşturan halkaların sürekli bir $p : H \to R$ halka morfizmidir. Topolojik halkaların bir morfizmi $p : H \to R$ olmak üzere p, H ve R nin temelini oluşturan topolojik uzayların örtü dönüşümü ise p ye *topolojik halkaların örtü morfizmi* denir.

Tanım 4.1.2. *Bir* R *topolojik halka-grupoidi, aşağıdaki halka yapı dönüşümleri birer topolojik grupoid morfizmi olan ve bir topolojik halka yapısıyla donatılmış bir topolojik grupoiddir [9].*

i. $m : R \times R \to R,\ (a, b) \to a + b$, *grup işlemi,*

ii. $n : R \times R \to R,\ (a, b) \to ab$, *halka işlemi,*

iii. $\bar{u} : R \to R,\ a \to -a$, *grup tersi,*

iv. $e : * \to R$.

Bir R topolojik halka-grupoidinde hem halka hem de grupoid yapısı olduğundan bu yapılar arasında bir uyumluluk şartı olmalıdır. Bunu

1. $(c \circ a) + (d \circ b) = (c + d) \circ (a + b)$

2. $(c \circ a)(d \circ b) = (cd) \circ (ab)$

değiştirme kuralları ile veririz.

$\tilde{R}$ ve R iki topolojik halka-grupoid olsun. $\tilde{R}$ den R ye topolojik halka-grupoidlerin bir $f : \tilde{R} \to R$ morfizmi, temeli oluşturan topolojik grupoidlerin, topolojik halka yapısını koruyan bir morfizmidir. Yani f, f_0 sürekli ve $f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$, $f(a + b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$ sağlanır.

Topolojik halka-grupoidlerin aşikar bir örneği kartezyen çarpım ile verilir.

Örnek 4.1.1. *R bir topolojik halka olsun. Bu takdirde, $(z, y) \circ (y, x) = (z, x)$ kompozisyonu ve $(x, y)+(z, t) = (x+z, y+t)$, $(x, y)(z, t) = (xz, yt)$ işlemleriyle nesne kümesi R topolojik halkası ve morfizm kümesi $R \times R$ olan bir topolojik halka-grupoidi vardır [9].*

Böylece, topolojik halkaların $TRing$ kategorisinden topolojik halka-grupoidlerin $TRGd$ kategorisine bir funktor elde ederiz.

Önerme 4.1.1. *Topolojik halkaların $TRing$ kategorisinden topolojik halka-grupoidlerin $TRGd$ kategorisine bir $\Gamma : TRing \to TRGd$ funktoru vardır [9].*

Teorem 4.1.1. *Eğer X, temelini oluşturan uzayı evrensel örtüye sahip topolojik halka ise $\pi_1 X$ esas grupoidi bir topolojik halka-grupoiddir [9].*

İspat. $\pi_1 X$ in bir halka-grupoid olduğunu Önerme 1.1.5 de göstermiştik. Yine $\pi_1 X$ in topolojik grup-grupoid olduğu Önerme 3.1.2 de gösterilmişti. O halde, halka işleminin sürekli olduğunu göstermeliyiz. X evrensel örtüye sahip olduğundan $\pi_1 X$ üzerinde yükseltilmiş topoloji vardır. $\mathcal{U}$, X nin bütün açık, yol bağlantılı U altkümelerinden meydana gelen açık örtüsü olsun ve $i : U \to X$ dahil etme dönüşümü, U nun herbir esas grubunu trivial gruba dönüştürsün. Bu durumda, her $U, V \in \mathcal{U}$ için $x \in U$ ve $y \in V$ olmak üzere $\tilde{U}_x[a]\tilde{V}_y^{-1}$ kümeleri $\pi_1 X$ üzerindeki yükseltilmiş topoloji için komşuluklar tabanını oluşturur. $n : \pi_1 X \times \pi_1 X \to \pi_1 X$ halka işleminin sürekliliğini gösterebiliriz. $[a] \in \pi_1 X(x, y)$ ve $[b] \in \pi_1 X(y, z)$ olmak üzere $n([a], [b]) = [ab]$ ve $\tilde{U}_{yz}[ab]\tilde{U}_{xy}^{-1}$ lerde $[ab] \in \pi_1 G(xy, yz)$ nin temel komşulukları olsun. Böylece, herhangi bir $U \in \mathcal{U}$ ve $y \in U$ için $n((\tilde{U}_y[a]\tilde{U}_x^{-1}), (\tilde{U}_z[b]\tilde{U}_y^{-1})) = \tilde{U}_{yz}[ab]\tilde{U}_{xy}^{-1}$ olup n süreklidir. O halde, $\pi_1 X$ topolojik halka-grupoiddir. $\square$

Bir R topolojik halka-grupoidinin yapısı ile ilgili iki önermeyi ifade edelim. Bu önermelerin ispatı Özcan [9] tarafından verilmiştir.

Önerme 4.1.2. *R bir topolojik halka-grupoid ve R_0 ın birimi e olsun. Bu durumda, e nin $C_e(R)$ geçişli bileşeni bir topolojik halka-grupoiddir.*

Önerme 4.1.3. *R bir topolojik halka-grupoid ve R_0 ın birimi e olsun. O zaman R_e bir topolojik halkadır.*

Tanım 4.1.3. *Topolojik halka-grupoidlerin bir morfizmi $p : \tilde{R} \to R$ olsun. Eğer p, $\tilde{R}$ ve R nin temelini oluşturan topolojik grupoidlerin örtü morfizmi ise p morfizmine topolojik halka-grupoidlerin örtü morfizmi denir. Yani, $\tilde{R}$ ve R nin temelini oluşturan topolojik grupoidler üzerinde tanımlı $s_p : R_\alpha \times_{p_0} \tilde{R}_0 \to \tilde{R}$ morfizmi bir homeomorfizm ise p ye topolojik halka-grupoidlerin örtü morfizmi denir. s_p nin tersi $(p, \alpha) : \tilde{R} \to R_\alpha \times_{p_0} \tilde{R}_0$ dir [9].*

Örnek 4.1.2. *$p : R \to R$ topolojik halka-grupoidlerin birim morfizmi ise topolojik halka-grupoidlerin örtü morfizmidir [9].*

Topolojik halkaların örtü morfizmlerinden topolojik halka-grupoidlerin örtü morfizmlerine geçişi sağlayan bir önermeyi ispatsız olarak verelim.

Önerme 4.1.4. *X ve $\tilde{X}$, temellerini oluşturan topolojik uzayları evrensel örtüye sahip topolojik halkalar ve $p : \tilde{X} \to X$ de topolojik halkaların örtü morfizmi ise $\pi_1 p : \pi_1\tilde{X} \to \pi_1 X$ indirgenmiş morfizmi topolojik halka-grupoidlerin örtü morfizmidir [9].*

R bir topolojik halka-grupoid olsun. Bu durumda, nesneleri topolojik halka-grupoidlerin $p : H \to R$ örtü morfizmleri ve $p : H \to R$ den $q : K \to R$ ye bir morfizmi, $p = q \circ r$ şartını sağlayan topolojik halka-grupoidlerin bir $r : H \to K$ morfizmi olan, R nin örtülerinin $TRGdCov(R)$ kategorisini elde ederiz.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & K \arrow[dl, "q"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Bu kategoride kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : H \to H$ ile tanımlıdır. Nesne dönüşümü için aşağıdaki diyagram verilebilir.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "1_{(p)}"] \arrow[dr, "p"'] & & H \arrow[dl, "p"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Komposizyon ise,

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "q"'] & K \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "p"] & K' \arrow[dl, "q'"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

Tanım 4.1.4. *R bir topolojik halka-grupoid ve X bir topolojik halka olsun. R' nin X üzerine $w : X \to R_0$ sürekli halka morfizmi vasıtasıyla etkisi, R nin temelini oluşturan topolojik grupoidin X in temelini oluşturan topolojik uzay üzerine $w : X \to R_0$ sürekli dönüşümü vasıtasıyla $w({}^a x) = \beta(a)$, ${}^b({}^a x) = {}^{b \circ a}x$ ve ${}^{1_{w(x)}}x = x$ şartlarını sağlayan $\phi : G_\alpha \times_w X \to X$ sürekli dönüşümüdür ve aşağıdaki değiştirme kuralları sağlanır [9]:*

$({}^b y) + ({}^a x) = {}^{b+a}(y + x)$

$({}^b y)({}^a x) = {}^{ba}(yx)$.

Aşağıdaki örneklerin ayrıntıları [9]' da verilmiştir.

Örnek 4.1.3. *Eğer R bir topolojik halka-grupoid ise R, $w = p_0 : X = R_0 \rightarrow R_0$ birim morfizmi vasıtasıyla $X = R_0$ üzerine topolojik olarak etki eder.*

Örnek 4.1.4. *$p : \tilde{R} \rightarrow R$ topolojik halka-grupoidlerin örtü morfizmi ise R topolojik halka-grupoidi $X = \tilde{R}_0$ topolojik halkası üzerine $w = p_0 : \tilde{R}_0 \rightarrow R_0$ sürekli halka morfizmi vasıtasıyla etki eder.*

Örnek 4.1.5. *R topolojik halka-grupoidi X topolojik halkası üzerine $w : X \rightarrow R_0$ sürekli halka morfizmi vasıtasıyla etki etsin. Bu takdirde, nesnelerin kümesi X olan $G \ltimes X$ topolojik halka-grupoidi tanımlıdır.*

R bir topolojik halka-grupoid olsun. R nin X topolojik halkası üzerine $w : X \rightarrow R_0$ sürekli halka morfizmi vasıtasıyla sürekli etkisi (X, w) ile gösterilir. (X, w) dan (X', w') ne bir morfizm, $w' \circ f = w$ ve $f({}^a x) = {}^a f(x)$ şartlarını sağlayan topolojik halkaların bir $f : X \rightarrow X'$ morfizmidir.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "w"'] & & X' \arrow[dl, "w'"] \\ & R_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R_\alpha \times_w X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ R_\alpha \times_{w'} X' \arrow[r, "\phi'"'] & X' \end{tikzcd}$$

Böylece, R nin topolojik halkalar üzerine etkilerinin $TRGdOp(R)$ kategorisini elde ederiz. Bu kategoride kaynak dönüşümü $\alpha(f) = (X, w)$, hedef dönüşümü $\beta(f) = (X', w')$ ve nesne dönüşümü $1_{(X,w)} : (X, w) \rightarrow (X, w)$ birimi ile tanımlıdır. Nesne dönüşümü için aşağıdaki değişimli diyagramları verebiliriz.

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "1"] \arrow[dr, "w"'] & & X \arrow[dl, "w"] \\ & R_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R_\alpha \times_w X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times 1"'] & X \arrow[d, "1"] \\ R_\alpha \times_w X \arrow[r, "\phi"'] & X \end{tikzcd}$$

Son olarak komposizyon,

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "w"'] & X' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "w'"] & X'' \arrow[dl, "w''"] \\ & R_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R_\alpha \times_w X \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times f"'] & X \arrow[d, "f"] \\ R_\alpha \times_{w'} X' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "1\times f'"'] & X' \arrow[d, "f'"] \\ R_\alpha \times_{w''} X'' \arrow[r, "\phi''"] & X'' \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramları ile tanımlıdır.

Verilen bir topolojik halka-grupoidden yararlanarak yeni bir topolojik halka-grupoidinin nasıl elde edildiğini bir önerme ile verelim. Bu önermenin ispatı Özcan [9] tarafından yapılmıştır.

Önerme 4.1.5. *R, temelini oluşturan grupoidi geçişli ve nesne uzayı Hausdorff olan bir topolojik halka-grupoid olsun.* $e \in R_0$, R_0 *nin birim elemanı ve* $N\{e\}$ *de* $R\{e\}$ *nin bir altgrubu olsun. Bu durumda,* H_0 *ın birimi* $\tilde{e} = N\{e\}$ *olmak üzere bir* H *topolojik halka-grupoidi ve topolojik halka-grupoidlerin bir* $p : H \to R$ *topolojik örtü morfizmi vardır ve* $p(H\{\tilde{e}\}) = N\{e\}$ *dir.*

$\tilde{X}$ ve X, temelini oluşturan uzayları evrensel örtüye sahip topolojik halkalar olsun. $UTRCov(X)$ kategorisi, nesneleri $p : \tilde{X} \to X$ topolojik halkaların örtü morfizmleri ve $p : \tilde{X} \to X$ nesnesinden $q : \tilde{Y} \to X$ nesnesine morfizmi, $p = q \circ r$ şartını sağlayan topolojik halkaların $r : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ morfizmi olan bir kategoridir.

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{Y} \arrow[dl, "q"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

Bu kategoride; kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : \tilde{X} \to \tilde{X}$ ile tanımlıdır. Nesne dönüşümü için aşağıdaki değişimli diyagramı verebiliriz.

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[rr, "1_{(p)}"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{X} \arrow[dl, "p"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

$r : \tilde{X} \to \tilde{Y}$ ve $r' : \tilde{Y} \to \tilde{Z}$ iki morfizm olmak üzere kompozisyon,

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{Y} \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & \tilde{Z} \arrow[dl, "p'"] \\ & X & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

X evrensel örtüye sahip topolojik halka ise Teorem 4.1.1 den $\pi_1 X$ esas grupoidi bir topolojik halka-grupoiddir. $UTRGdCov(\pi_1 X)$ kategorisi; X ve $\tilde{X} = \tilde{R}_0$ evrensel örtüye sahip olmak üzere, nesneleri $p : \tilde{R} \to \pi_1 X$ topolojik halka-grupoidlerin örtü morfizmleri ve $p : \tilde{R} \to \pi_1 X$ nesnesinden $q : \tilde{H} \to \pi_1 X$ nesnesine bir morfizmi, topolojik halka-grupoidlerin $p = q \circ r$ şartını sağlayan topolojik halka-grupoidlerin $r : \tilde{R} \to \tilde{H}$ morfizmi olan bir kategoridir.

$$\begin{tikzcd} \tilde{R} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{H} \arrow[dl, "q"] \\ & \pi_1 X & \end{tikzcd}$$

Bu kategoride; kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : \tilde{R} \to \tilde{R}$ birimi ile tanımlıdır. Nesne dönüşümü için aşağıdaki değişimli diyagramı verebiliriz.

$$\begin{tikzcd} \tilde{R} \arrow[rr, "1_{(p)}"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{R} \arrow[dl, "p"] \\ & \pi_1 X & \end{tikzcd}$$

$r : \tilde{R} \to \tilde{H}$ ve $r' : \tilde{H} \to \tilde{K}$ iki morfizm olmak üzere kompozisyon,

$$\begin{tikzcd} \tilde{R} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{H} \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & \tilde{K} \arrow[dl, "p'"] \\ & \pi_1 X & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

X ve $\tilde{X}$, temelini oluşturan uzayları evrensel örtüye sahip topolojik halkalar olsun. Böylece Özcan [9] tarafından ispatlanan aşağıdaki önermeyi ve teoremi ifade edebiliriz.

Önerme 4.1.6. *X evrensel örtüye sahip topolojik halka olsun. Bu durumda, X in topolojik örtülerinin $UTRCov(X)$ kategorisi, $\pi_1 X$ topolojik halka-grupoidinin örtülerinin $UTRGdCov(\pi_1 X)$ kategorisine denktir.*

Teorem 4.1.2. *Bir R topolojik halka-grupoidi için, R nin örtülerinin $TRGdCov(R)$ kategorisi ile R nin topolojik halkalar üzerine topolojik etkilerinin $TRGdOp(R)$ kategorisi denktir.*

4.2 Lie Halka-Grupoidlerin Örtüleri Ve Etkileri

Bu kısımda öncelikle Lie halka-grupoid kavramı ve bazı temel özellikleri verilecektir. Daha sonra Lie halka-grupoidlerin örtüleri ve etkilerinin kategorileri oluşturularak bu kategorilerin denk olduğu gösterilecektir.

Bir Lie halka grupoidin temelinde var olan Lie halka tanımını verelim.

Tanım 4.2.1. *Bir R Lie halka , temelini oluşturan küme diferensiyellenebilir manifold yapısına sahip ve $(x, y) \to x+y$ ile tanımlı $m : R \times R \to R$ grup işlemi, $(x, y) \to xy$ ile tanımlı $n : R \times R \to R$ halka işlemi, $x \to -x$ ile tanımlı $\bar{u} : R \to R$ ters dönüşümleri diferensiyellenebilir olan bir R halkasıdır.*

H dan R ye Lie halkaların bir morfizmi, H ve R nin temelini oluşturan halkaların diferensiyellenebilir bir $p : H \to R$ halka morfizmidir. Lie halkaların bir morfizmi $p : H \to R$ olmak üzere p, H ve R nin temelini oluşturan diferensiyellenebilir manifoldların örtü dönüşümü ise p ye *Lie halkaların örtü morfizmi* denir.

Tanım 4.2.2. *Bir R Lie halka-grupoidi, aşağıdaki halka yapı dönüşümleri birer Lie grupoid morfizmi olan ve bir Lie halka yapısıyla donatılmış bir Lie grupoiddir.*

i. $m : R \times R \to R,\ (a, b) \to a + b$, *grup işlemi,*

ii. $n : R \times R \to R,\ (a, b) \to ab$, *halka işlemi,*

iii. $\bar{u} : R \to R,\ a \to -a$, *grup tersi,*

iv. $e : * \to R$.

Açıkca bir R Lie halka-grupoidinde aşağıdaki değiştirme kuralları vardır.

1. $(c \circ a) + (d \circ b) = (c + d) \circ (a + b)$
2. $(c \circ a)(d \circ b) = (cd) \circ (ab)$

$\tilde{R}$ ve R iki Lie halka-grupoid olsun. $\tilde{R}$ den R ye Lie halka-grupoidlerin bir $f : \tilde{R} \to R$ morfizmi, temeli oluşturan Lie grupoidlerin, Lie halka yapısını koruyan bir morfizmidir. Yani f, f_0 diferensiyellenebilir ve $f(a \circ b) = f(a) \circ f(b)$, $f(a+b) = f(a) + f(b)$, $f(ab) = f(a)f(b)$ sağlanır.

Örnek 4.2.1. *R bir Lie halka olsun. Bu durumda, Örnek 1.1.5 den $(z, y) \circ (y, x) = (z, x)$ kompozisyonu ve $(x, y)+(z, t) = (x+z, y+t)$, $(x, y)(z, t) = (xz, yt)$ işlemleriyle nesne kümesi R halkası ve morfizm kümesi $R \times R$ olan bir halka-grupoid vardır. Nesne kümesi R, Lie halka olduğundan $R \times R$ de çarpım manifoldu ile bir diferensiyellenebilir manifolddur. Grupoid yapı dönüşümlerinin diferensiyellenebilirliği, Örnek 1.3.14 den kolayca elde edilir. Ayrıca, $R \times R$ halkasının yapı dönüşümleri R Lie halkasının yapı dönüşümlerinin $m \times m$, $n \times n$, $\bar{u} \times \bar{u}$ ve $e \times e$ çarpımları ile tanımlandığından diferensiyellenebilirdir. Böylece, $R \times R$ Lie halka-grupoiddir.*

Böylece Lie halkaların *LRing* kategorisinden Lie halka-grupoidlerin *LRGd* kategorisine bir funktor elde ederiz.

Önerme 4.2.1. *Lie halkaların LRing kategorisinden Lie halka-grupoidlerin LRGd kategorisine bir $\Gamma : LRing \to LRGd$ funktoru vardır.*

İspat. R bir Lie halka olsun. Bu durumda, Örnek 4.2.1' den, $R \times R$ bir Lie halka-grupoiddir. Eğer $f : R \to H$ Lie halkaların bir morfizmi ise $\Gamma(f) : R \times R \to H \times H$ de Lie halka-grupoidlerin morfizmidir. Önerme 1.1.4' den $\Gamma(f)$ halka-grupoidlerin morfizmidir ve f diferensiyellenebilir olduğundan $\Gamma(f) = f \times f$ de diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla $\Gamma(f)$ Lie halka-grupoidlerin morfizmidir. Ayrıca, Önerme 1.1.4 den Γ bir funktordur. □

Teorem 4.2.1. *Eğer R, temelini oluşturan manifoldu bağlantılı olan Lie halka ise $\pi_1 R$ esas grupoidi bir Lie halka-grupoiddir.*

İspat. $\pi_1 R$ nin bir halka-grupoid olduğunu Önerme 1.1.5 de göstermiştik. Yine $\pi_1 R$ nin Lie grup-grupoid olduğu Önerme 3.2.2 de gösterilmişti. Dolayısıyla $\pi_1 n : \pi_1 R \times \pi_1 R \to \pi_1 R$ halka işleminin diferensiyellenebilir olduğunu göstermek yeterlidir. R manifoldunu diferensiyellenebilir yapan ve yükseltilebilir harita tanım kümelerinden meydana gelen atlası $\mathcal{A}$ ile gösterelim. R bağlantılı bir manifold olduğundan Örnek 2.3.1' den $\pi_1(R)$ nin Lie esas grupoid olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla $\pi_1(R)$ üzerinde, onu diferensiyellenebilir manifold yapan ve $\mathcal{A}$' dan yükseltilen $\widetilde{\mathcal{A}}$ yükseltilmiş atlası mevcuttur.

$n : R \times R \to R$ Lie halka işlemi olduğundan diferensiyellenebilirdir. Bunu aşağıdaki diyagram aracılığıyla kolayca görebiliriz.

$$\begin{tikzcd} R \times R \arrow[r, "n"] \arrow[d, "\varphi\times\varphi"'] & R \arrow[d, "\varphi"] \\ \mathbb{R}^{2n} \arrow[r, "pr_1"] & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

$\pi_1(R)$, R üzerinde Lie grupoid olduğundan ve $R \times R$ çarpım manifoldunun örtü manifoldu olduğundan yukarıdaki diyagramın yükseltilmesi olan aşağıdaki diyagramı verebiliriz.

$$\begin{tikzcd} \pi_1(R) \times \pi_1(R) \arrow[r, "\pi_1 n"] \arrow[d, "\widetilde{\varphi}\times\widetilde{\varphi}"'] & \pi_1 R \arrow[d, "\widetilde{\varphi}"] \\ \mathbb{R}^{4n} \arrow[r, "pr_{1,2}"] & \mathbb{R}^{2n} \end{tikzcd}$$

$\widetilde{\varphi}$, φ harita dönüşümünden yükseltilen harita dönüşümü olduğundan $\widetilde{\varphi}$ ve buradan $\widetilde{\varphi}\times\widetilde{\varphi}$ dönüşümleri diferensiyellenebilirdir. Ayrıca $pr_{1,2}$ izdüşüm dönüşümü olduğundan diferensiyellenebilirdir. Buradan $\pi_1 n$ diferensiyellenebilirdir. Böylece $\pi_1 R$ bir Lie halka-grupoiddir.

□

Önerme 4.2.2. *R bir Lie halka-grupoid ve R_0 ın birimi e olsun. Bu durumda, e nin $C_e(R)$ geçişli bileşeni bir Lie halka-grupoiddir.*

İspat. Teorem 3.2.1 den $C_e(R)$ bağlantılı bileşeninin bir Lie grup-grupoid olduğunu biliyoruz. Şimdi, $C_e(R)$ nin Lie halka-grupoid olduğunu gösterelim. $C_e(R)_0$ dan seçilen her nesne için $T_x \in R(x,e)$ morfizmi ve $a \in R(x,y)$,$b \in R(x',y')$ olmak üzere $a,b \in C_e(R)$ olsun. Böylece, $T_xT_{x'} \in R(xx',e)$ ve $T_yT_{y'} \in R(yy',e)$ olmak üzere $ab \in R(xx',yy')$ elde edilir. Buradan, $xx',yy' \in C_e(R)_0$ ve $ab \in C_e(R)$

bulunur. Benzer düşünceyle, dağılma özelliği de gösterilebilir. Sonuç olarak, $C_e(R)$ bir halka-grupoiddir. Açıkça Lie althalkadır. Çünkü $C_e(R)$ deki toplama ve çarpma işlemleri, R Lie halkasının toplama ve çarpma işlemlerinin kısıtlamaları olduğundan diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla $C_e(R)$, bir Lie halka-grupoiddir. □

Önerme 4.2.3. *R bir Lie halka-grupoid ve R_0 ın birimi e olsun. O zaman R_e bir Lie halkadır.*

İspat. R deki halka işlemlerinden indirgenen işlemler ile R_e nin bir halka olduğunu gösterelim. $a, b \in R_e$ ise $a \in R(e, x)$ ve $b \in R(e, y)$ dir ve $a + b \in R(e + e, x + y) = R(e, x + y)$ olup $a + b \in R_e$ bulunur. Açıkça, toplama işleminin birimi $1_e \in R(e, e)$ ve bir $a \in R_e$ nin tersi $-a \in R(e, -x)$ dir. Ayrıca, $a, b \in R_e$ için $ab \in R(ee, xy) = R(e, xy)$ olup $ab \in R_e$ dir. $a(b + c) \in R(e(e + e), x(y + z)) = R(e, x(y + z)) = R(e, xy + xz)$, $ab \in R(ee, xy) = R(e, xy)$ ve $ac \in R(ee, xz) = R(e, xz)$ olup $ab + ac \in R(e + e, xy + xz) = R(e, xy + xz)$ olacağından $a(b + c) = ab + ac$ bulunur. Böylece, R_e bir halkadır. R_e üzerinde R Lie halka-grupoidin diferensiyellenebilir yapısından indirgenen diferensiyellenebilir yapı vardır ve R_e nin halka yapı dönüşümleri R deki Lie halka yapı dönüşümlerinin R_e ye kısıtlamaları olup diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla R_e bir Lie halkadır. □

Tanım 4.2.3. *Lie halka-grupoidlerin bir morfizmi $p : \tilde{R} \to R$ olsun. Eğer p, $\tilde{R}$ ve R nin temelini oluşturan Lie grupoidlerin örtü morfizmi ise p morfizmine Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmi denir. Yani, $\tilde{R}$ ve R nin temelini oluşturan Lie grupoidler üzerinde tanımlı $s_p : R_\alpha \times_{p_0} \tilde{R}_0 \to \tilde{R}$ morfizmi bir diffeomorfizm ise p ye Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmi denir. s_p nin tersi $(p, \alpha) : \tilde{R} \to R_\alpha \times_{p_0} \tilde{R}_0$ dir.*

Örnek 4.2.2. *$p : R \to R$ Lie halka-grupoidlerin birim morfizmi ise $s_p : R_\alpha \times_{p_0} R_0 \to R$ izdüşümü açıkça bire-bir, örten ve diferensiyellenebilirdir. Ayrıca, p Lie halka-grupoidlerin morfizmi ve α Lie halka-grupoidin kaynak dönüşümü olduğundan diferensiyellenebilirdir. Dolayısıyla, s_p nin $(p, \alpha) : R \to R_\alpha \times_{p_0} R_0$ tersi diferensiyellenebilirdir ve böylece, s_p bir diffeomorfizmdir. Sonuç olarak, p Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmidir.*

Önerme 4.2.4. *R ve $\tilde{R}$, temellerini oluşturan diferensiyellenebilir manifoldları bağlantılı Lie halkalar ve $p : \tilde{R} \to R$ de Lie halkaların örtü morfizmi ise $\pi_1 p : \pi_1\tilde{R} \to \pi_1 R$ indirgenmiş morfizmi Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmidir.*

İspat. R ve $\tilde{R}$ bağlantılı olduğundan, Teorem 4.2.1 e göre $\pi_1\tilde{R}$ ve $\pi_1 R$ birer Lie halka-grupoiddir. p Lie halkaların morfizmi olduğundan nesneler üzerinde halka yapısı korunur. Morfizmler üzerinde ise,

$$\begin{aligned}(\pi_1 p)[a+b] = [p(a+b)] &= [p(a)+p(b)]\\ &= [p(a)]+[p(b)]\\ &= (\pi_1 p)([a]) + (\pi_1 p)([b])\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\pi_1 p)[ab] = [p(ab)] &= [p(a)p(b)]\\ &= [p(a)][p(b)]\\ &= (\pi_1 p)([a])(\pi_1 p)([b])\end{aligned}$$

olup, halka yapısı korunur. Dolayısıyla, $\pi_1 p$ bir halka-grupoid morfizmidir. Şimdi, $\pi_1 p$ nin Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmi olduğunu gösterelim. Bunun için, $\pi_1 p$ nin $\pi_1\tilde{R}$ ve $\pi_1 R$ nin temelini oluşturan Lie grupoidlerin örtü morfizmi olduğunu göstermeliyiz. $\pi_1 p$, Önerme 3.1.4 den Lie grup-grupoidlerin bir morfizmidir. Yani $\pi_1\tilde{R}$ ve $\pi_1 R$ nin temelini oluşturan Lie grupoidlerin örtü morfizmidir. Dolayısıyla, $\pi_1 p$ diferensiyellenebilirdir ve $(\pi_1 p, \alpha) : \pi_1\tilde{R} \to \pi_1 R_\alpha \times_{(\pi_1 p)_0} \tilde{R}$ bir diffeomorfizmdir. Böylece, $\pi_1 p$ Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmidir. □

R bir Lie halka-grupoid olsun. Bu durumda, nesneleri Lie halka-grupoidlerin $p : H \to R$ örtü morfizmleri ve $p : H \to R$ den $q : K \to R$ ye bir morfizmi, $p = q \circ r$ şartını sağlayan Lie halka-grupoidlerin bir $r : H \to K$ morfizmi olan, R nin örtülerinin $LRGdCov(R)$ kategorisini elde ederiz.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & K \arrow[dl, "q"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Bu kategoride kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : H \to H$ ile tanımlıdır. Nesne dönüşümü için aşağıdaki diyagram verilebilir.

$$\begin{tikzcd} H \arrow[rr, "1_{(p)}"] \arrow[dr, "p"'] & & H \arrow[dl, "p"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Komposizyon ise,

$$\begin{tikzcd} H \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "q"'] & K \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "p"] & K' \arrow[dl, "q'"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

Tanım 4.2.4. *R bir Lie halka-grupoid ve M bir Lie halka olsun. R Lie halka-grupoidinin M Lie halkası üzerine $w : M \to R_0$ diferensiyellenebilir halka morfizmi vasıtasıyla etkisi, R nin temelini oluşturan Lie grupoidin M nin temelini oluşturan manifold üzerine $w : M \to R_0$ diferensiyellenebilir dönüşümü vasıtasıyla $w({}^a x) = \beta(a)$, ${}^b({}^a x) = {}^{b \circ a}x$ ve ${}^{1_{w(x)}}x = x$ şartlarını sağlayan $\phi : R_\alpha \times_w M \to M$ diferensiyellenebilir dönüşümüdür ve aşağıdaki değiştirme kuralları sağlanır:*

$({}^b y) + ({}^a x) = {}^{b+a}(y + x)$

$({}^b y)({}^a x) = {}^{ba}(yx)$.

Örnek 4.2.3. *Eğer R bir Lie halka-grupoid ise R, $w = p_0 : M = R_0 \to R_0$ birim morfizmi vasıtasıyla $M = R_0$ üzerine diferensiyellenebilir olarak etki eder. Gerçekten p, Lie halka-grupoidlerin birim morfizmi olduğundan p ve p_0 birer Lie halka morfizmidir. Dolayısıyla, w diferensiyellenebilir halka morfizmidir. Etki $\phi : R_\alpha \times_w R_0 \to R_0$, $(a, x) = {}^a x = \beta(a)$, ile tanımlansın. Örnek 3.1.2 den etki şartlarının sağlandığı kolayca görülür. Etki, birinci izdüşüm ile Lie halka-grupoidin hedef dönüşümünün bileşkesi olduğundan diferensiyellenebilirdir. Ayrıca $({}^b y)+({}^a x) = \beta(b) + \beta(a) = \beta(b + a)$ ve ${}^{(b+a)}(y + x) = \beta(b + a)$ olup ilk değiştirme kuralı sağlanır. ${}^{(ba)}(yx) = \beta(ba)$ ve $({}^b y)({}^a x) = \beta(b)\beta(a) = \beta(ba)$ olup ikinci değiştirme kuralı da sağlanır.*

Örnek 4.2.4. *$p : \tilde{R} \to R$ Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmi ise R Lie halka-grupoidi $M = \tilde{R}_0$ Lie halkası üzerine $w = p_0 : \tilde{R}_0 \to R_0$ diferensiyellenebilir halka morfizmi vasıtasıyla etki eder. Gerçekten, p Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmi olduğundan p, $p_0 = w$ birer diferensiyellenebilir halka morfizmidir ve $s_p : R_\alpha \times_{p_0} \tilde{R}_0 \to \tilde{R}$ diffeomorfizmi vardır. Böylece w, diferensiyellenebilir halka morfizmidir ve Lie halka-grupoidin $\tilde{\beta} : \tilde{R} \to \tilde{R}_0$ hedef dönüşümü ile s_p nin bileşkesi $\phi = \tilde{\beta} \circ s_p : R_\alpha \times_{p_0} \tilde{R}_0 \to \tilde{R}_0$, $(a, \tilde{x}) \mapsto {}^a\tilde{x} = \tilde{\beta}(\tilde{a})$ etkisini verir. Bu dönüşümler diferensiyellenebilir olduğundan etki de diferensiyellenebilirdir. Örnek 2.3.3 den, R nin temelini oluşturan Lie grupoidin $M = \tilde{R}_0$ ın temelini oluşturan manifold üzerine $w = p_0 : \tilde{R}_0 \to R_0$ vasıtasıyla diferensiyellenebilir etkisi vardır. Dolayısıyla, etki şartları sağlanır. $({}^by) + ({}^ax) = \tilde{\beta}(\tilde{b}) + \tilde{\beta}(\tilde{a}) = \tilde{\beta}(\tilde{b} + \tilde{a}) = {}^{b+a}(y + x)$ ve $({}^by)({}^ax) = \tilde{\beta}(\tilde{b})\tilde{\beta}(\tilde{a}) = \tilde{\beta}(\tilde{b}\tilde{a}) = {}^{ba}(yx)$ olup değiştirme kuralları da sağlanır. Böylece diferensiyellenebilir etki şartları sağlanır.*

Örnek 4.2.5. *R Lie halka-grupoidi M Lie halkası üzerine $w : M \to R_0$ diferensiyellenebilir halka morfizmi vasıtasıyla etki etsin. Bu durumda, Örnek 3.2.4 den nesnelerinin kümesi M olan $R \ltimes M$ Lie grup-grupoidi tanımlıdır. Şimdi, bu Lie grup-grupoidin bir Lie halka-grupoid olduğunu gösterelim. $R \ltimes M$ Lie grup-grupoidi, R ve M Lie halkalarının işlemleri ile tanımlı*

$$(a, x)(b, y) = (ab, xy)$$

işlemiyle bir Lie halka-grupoiddir. Nesneler üzerinde w ve morfizmler üzerinde $(a, x) \mapsto a$ ile tanımlanan $p : R \ltimes M \longrightarrow R$ izdüşümü Örnek 2.3.2 den, $R \ltimes M$ ve R nin temelini oluşturan Lie grupoidlerin örtü dönüşümüdür. Ayrıca $p_0 = w$ ve p de izdüşüm olduğundan birer halka morfizmidir. Böylece p Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmidir.

R bir Lie halka-grupoid olsun. R nin M Lie halkası üzerine $w : M \to R_0$ diferensiyellenebilir halka morfizmi vasıtasıyla diferensiyellenebilir etkisi (M, w) ile gösterilir. (M, w) dan (M', w') ne bir morfizm, $w' \circ f = w$ ve $f({}^ax) = {}^af(x)$ şartlarını sağlayan Lie halkaların bir $f : M \to M'$ morfizmidir.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "w"'] & & M' \arrow[dl, "w'"] \\ & R_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R_\alpha \times_w M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times f"'] & M \arrow[d, "f"] \\ R_\alpha \times_{w'} M' \arrow[r, "\phi'"'] & M' \end{tikzcd}$$

Böylece R nin Lie halkalar üzerine etkilerinin $LRGdOp(R)$ kategorisini elde ederiz. Kaynak dönüşümü $\alpha(f) = (M, w)$, hedef dönüşümü $\beta(f) = (M', w')$ ve nesne dönüşümü $1_{(M,w)} : (M, w) \to (M, w)$ birimi ile tanımlıdır. Nesne dönüşümü için aşağıdaki değişimli diyagramları verebiliriz.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[rr, "1_{(M,w)}"] \arrow[dr, "w"'] & & M \arrow[dl, "w"] \\ & R_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R_\alpha \times_w M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times 1"'] & M \arrow[d, "1"] \\ R_\alpha \times_w M \arrow[r, "\phi"'] & M \end{tikzcd}$$

Son olarak komposizyon,

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "w"'] & M' \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "w'"'] & M'' \arrow[dl, "w''"] \\ & R_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R_\alpha \times_w M \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times f"'] & M \arrow[d, "f"] \\ R_\alpha \times_{w'} M' \arrow[r, "\phi'"] \arrow[d, "1\times f'"'] & M' \arrow[d, "f'"] \\ R_\alpha \times_{w''} M'' \arrow[r, "\phi''"] & M'' \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramları ile tanımlıdır.

Önerme 4.2.5. *R, temelini oluşturan grupoidi geçişli bir Lie halka-grupoid olsun. $e \in R_0$, R_0 nin birim elemanı ve $N\{e\}$ de $R\{e\}$ nin bir kapalı Lie altgrubu olsun. Bu durumda, H_0 ın birimi $\tilde{e} = N\{e\}$ olmak üzere bir H Lie halka-grupoidi ve Lie halka-grupoidlerin bir $p : H \to R$ diferensiyellenebilir örtü morfizmi vardır ve $p(H\{\tilde{e}\}) = N\{e\}$ dir.*

İspat. $M = \{a \circ N\{e\} \mid a \in R_e\}$ olsun. M üzerinde

$$(a \circ N\{e\}) + (b \circ N\{e\}) = (a + b) \circ N\{e\} \text{ ve } (a \circ N\{e\})(b \circ N\{e\}) = (ab) \circ N\{e\}$$

ile bir halka yapısı tanımlanır. $M = R_e/N\{e\}$ olup, bölüm manifolduyla bir diferensiyellenebilir manifolddur. Ayrıca M üzerindeki halka işlemleri, R Lie halkasının işlemleri ve Lie grupoidin kompozisyonu ile tanımlandığından diferensiyellenebilirdir. O halde, M bir Lie halkadır. Önerme 3.2.5 den R nin temelini oluşturan Lie grupoidin M nin temelini oluşturan manifold üzerine $w : M \to R_0,\ a \circ N\{e\} \mapsto \beta(a)$ vasıtasıyla $(b, a \circ N\{e\}) \mapsto\ {}^{b}(a \circ N\{e\}) = b \circ a \circ N\{e\}$ ile tanımlı $\phi : R_{\alpha} \times_{w} M \to M$ diferensiyellenebilir etkisi vardır ve

$$\begin{aligned} w((a \circ N\{e\})(b \circ N\{e\})) &= w(ab \circ N\{e\}) \\ &= \beta(ab) \\ &= \beta(a)\beta(b) \\ &= w(a \circ N\{e\})w(b \circ N\{e\}) \end{aligned}$$

olduğundan, $w : M \to R_0$ bir Lie halka morfizmidir. Böylece R Lie halka-grupoidi, M Lie halkası üzerine w diferensiyellenebilir halka morfizmi vasıtasıyla etki eder. O halde, nesne kümesi $(R \ltimes M)_0 = M$ olan bir $R \ltimes M$ Lie halka-grupoidini elde ederiz. Gerçekten, Önerme 3.2.5 den $R \ltimes M$ bir Lie grup-grupoiddir. Ayrıca, R Lie halkasının işlemi ile tanımlanan,

$$(b, a' \circ N\{e\})(c, a \circ N\{e\}) = (bc, (a'a) \circ N\{e\})$$

işlemiyle $R \ltimes M$, bir Lie halka-grupoiddir.

$p : R \ltimes M \to R$, morfizmler üzerinde $(b, a \circ N\{e\}) \mapsto b$ ve nesneler üzerinde w ile verilsin. Bu durumda, Önerme 3.2.5 den p, Lie grup-grupoidlerin örtü morfizmidir. Ayrıca p_0, w ile verildiğinden ve

$$\begin{aligned} p((b, a' \circ N\{e\})(c, a \circ N\{e\})) &= p((bc, (a'a) \circ N\{e\})) = bc \\ &= p(b, a' \circ N\{e\})p(c, a \circ N\{e\}) \end{aligned}$$

olduğundan p, Lie halka morfizmidir. Sonuç olarak, $p : R \ltimes M \to R$ Lie halka-grupoidlerin bir örtü morfizmidir. Eğer $H = R \ltimes M$ ve $\tilde{x} = N\{x\}$ alırsak, $p(H\{\tilde{x}\}) = N\{x\}$ bulunur. □

$\tilde{M}$ ve M, temelini oluşturan manifoldları bağlantılı olan Lie halkalar olsun. $LRCov(M)$ kategorisi, nesneleri $p : \tilde{M} \to M$ Lie halkaların örtü morfizmleri ve $p : \tilde{M} \to M$ nesnesinden $q : \tilde{N} \to M$ nesnesine morfizmi, $p = q \circ r$ şartını sağlayan Lie halkaların $r : \tilde{M} \to \tilde{N}$ morfizmi olan bir kategoridir.

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{N} \arrow[dl, "q"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

Bu kategoride; kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : \tilde{M} \to \tilde{M}$ ile tanımlıdır. Nesne dönüşümü için aşağıdaki değişimli diyagramı verebiliriz.

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[rr, "1_{(p)}"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{M} \arrow[dl, "p"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

$r : \tilde{M} \to \tilde{N}$ ve $r' : \tilde{N} \to \tilde{P}$ iki morfizm olmak üzere kompozisyon,

$$\begin{tikzcd} \tilde{M} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{N} \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & \tilde{P} \arrow[dl, "p'"] \\ & M & \end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

M aynı zamanda bağlantılı olan Lie halka ise Teorem 4.2.1 den $\pi_1 M$ esas grupoidi bir Lie halka-grupoiddir. $LRGdCov(\pi_1 M)$ kategorisi; M ve $\tilde{M} = \tilde{R}_0$ bağlantılı olmak üzere, nesneleri $p : \tilde{R} \to \pi_1 M$ Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmleri ve $p : \tilde{R} \to \pi_1 M$ nesnesinden $q : \tilde{H} \to \pi_1 M$ nesnesine bir morfizmi, Lie halka-grupoidlerin $p = q \circ r$ şartını sağlayan Lie halka-grupoidlerin $r : \tilde{R} \to \tilde{H}$ morfizmi olan bir kategoridir.

$$\begin{tikzcd} \tilde{R} \arrow[rr, "r"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{H} \arrow[dl, "q"] \\ & \pi_1 M & \end{tikzcd}$$

Bu kategoride; kaynak dönüşümü $\alpha(r) = p$, hedef dönüşümü $\beta(r) = q$ ve nesne dönüşümü $1_{(p)} : \tilde{R} \to \tilde{R}$ birimi ile tanımlıdır. Nesne dönüşümü için aşağıdaki değişimli diyagramı verebiliriz.

$$\begin{tikzcd} \tilde{R} \arrow[rr, "1_{(p)}"] \arrow[dr, "p"'] & & \tilde{R} \arrow[dl, "p"] \\ & \pi_1 M & \end{tikzcd}$$

$r : \tilde{R} \to \tilde{H}$ ve $r' : \tilde{H} \to \tilde{K}$ iki morfizm olmak üzere kompozisyon,

$$\begin{tikzcd}
\tilde{R} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & \tilde{H} \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & \tilde{K} \arrow[dl, "p'"] \\
& \pi_1 M &
\end{tikzcd}$$

değişimli diyagramı ile tanımlıdır.

M ve $\tilde{M}$, temelini oluşturan manifoldları bağlantılı olan Lie halkalar olsun. Böylece aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 4.2.6. *M bağlantılı olan bir Lie halka olsun. Bu durumda, M nin diferensiyellenebilir örtülerinin $LRCov(M)$ kategorisi, $\pi_1 M$ Lie halka-grupoidinin örtülerinin $LRGdCov(\pi_1 M)$ kategorisine denktir.*

İspat. $\Gamma : LRCov(M) \to LRGdCov(\pi_1 M)$ funktorunu aşağıdaki gibi tanımlayalım: $M, \tilde{M}$ bağlantılı olmak üzere, Lie halkaların örtü morfizmi $p : \tilde{M} \to M$ olsun. Önerme 4.2.4 den, $\pi_1 p : \pi_1 \tilde{M} \to \pi_1 M$ Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmidir. O halde, $\Gamma(p) = \pi_1 p$ Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmidir. $p : \tilde{M} \to M$ den $q : \tilde{N} \to M$ ya Lie halkaların örtü morfizmlerinin morfizmi $r : \tilde{M} \to \tilde{N}$ olsun. $LRCov(M)$ kategorisinin tanımından, r de Lie halkaların örtü morfizmidir ve $\tilde{M}, \tilde{N}$ bağlantılı olduğundan, $\pi_1 r$ de Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmidir. Açıkça $\Gamma(r)$, $\pi_1 p$ den $\pi_1 q$ ya diferensiyellenebilir örtü morfizmlerinin morfizmidir. $q' : \tilde{P} \to M$ olmak üzere, Lie halkaların örtü morfizmlerinin diğer bir morfizmi de $r' : \tilde{N} \to \tilde{P}$ olsun. r ve r' Lie halkaların örtü morfizmi olacağından bunların bileşkesi de $r' \circ r : \tilde{M} \to \tilde{P}$ Lie halkaların örtü morfizmidir ve açıkça p den q' ne Lie halkaların örtü morfizmlerinin morfizmidir. Ayrıca, $\tilde{M}, \tilde{P}$ bağlantılı olduğundan $\pi_1(r' \circ r) = \pi_1 r' \circ \pi_1 r$ de Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmidir ve $\pi_1 p$ den $\pi_1 q'$ ne Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmlerinin morfizmidir. Böylece, $\Gamma(r' \circ r) = \Gamma(r') \circ \Gamma(r)$ olup Γ bir funktordur.

Şimdi, $\Phi : LRGdCov(\pi_1 M) \to LRCov(M)$ funktorunu oluşturalım. $\tilde{R}_0 = \tilde{M}$ bağlantılı olmak üzere, Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmi $q : \tilde{R} \to \pi_1 M$ olsun. M bağlantılı olduğundan Önerme 2.3.2 ye göre $p = q_0 : \tilde{M} \to M$ için $\tilde{M}$ üzerinde p yi M, $\tilde{M}$ nın temelini oluşturan manifoldlar üzerinde örtü dönüşümü yapan yükseltilmiş atlas ve $r : \tilde{G} \to \pi_1\tilde{M}$ izomorfizmi vardır. Ayrıca, $p = q_0$ ve q da Lie halka-grupoidlerin morfizmi olduğundan, p de Lie halkaların morfizmidir. Böylece, $\Phi(q) = q_0 = p$ Lie halkaların örtü morfizmidir. $q : \tilde{R} \to \pi_1 M$ dan $q' : \tilde{H} \to \pi_1 M$ ne Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmlerinin bir morfizmi $f : \tilde{R} \to \tilde{H}$ olsun. Teorem 3.2.3 den $f_0 : \tilde{M} \to \tilde{N}$ diferensiyellenebilirdir. Yani $\Phi(f)$, Lie halkaların örtü morfizmlerinin morfizmidir. $q'' : \tilde{H}' \to \pi_1 M$ olmak üzere q' den q'' ne bir diğer morfizm $f' : \tilde{H} \to \tilde{H}'$ olsun. f, f' Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmi olduğundan, $f' \circ f$ de Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmidir ve açıkça, q dan q'' ne Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmlerinin morfizmidir. Ayrıca, yukarıdaki gibi $\Phi(f' \circ f)$ Lie halkaların örtü morfizmlerinin morfizmidir. Buradan, $\Phi(f' \circ f) = \Phi(f') \circ \Phi(f)$ bulunur. O halde, Φ bir funktordur.

Şimdi, $\Gamma\Phi \cong 1_{LRGdCov(\pi_1 M)}$ ve $\Phi\Gamma \cong 1_{LRCov(M)}$ doğal denkliklerini gösterelim. $q : \tilde{R} \to \pi_1 M$ ve $q' : \tilde{H} \to \pi_1 M$ Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmleri için, yukarıdaki gibi M bağlantılı olduğundan, $p = q_0 : \tilde{M} \to M$ ve $p' = q'_0 : \tilde{N} \to M$ diferensiyellenebilir manifoldların örtü dönüşümleri ve $r : \tilde{R} \to \pi_1\tilde{M}$ ve $r' : \tilde{H} \to \pi_1\tilde{N}$ izomorfizmleri vardır. Şimdi, aşağıdaki diyagramın değişimli olduğunu gösterelim.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{R} \arrow[r, "r"] \arrow[d, "f"'] & \pi_1\tilde{M} \arrow[d, "\pi_1 f_0"] \\
\tilde{H} \arrow[r, "r'"'] & \pi_1\tilde{N}
\end{tikzcd}$$

Bunun için, r nin tanımını incelememiz gerekir. $\tilde{a}$, $\tilde{R}$ nın $\tilde{x}$ da başlayan bir elemanı ve $q(\tilde{a}) \in \pi_1 M$ nin bir temsilcisi $a : I \to M$ olsun. Bu durumda a, $\pi_1 a : \pi_1 I \to \pi_1 M$, $\pi_1 a(\imath) = q(\tilde{a})$, morfizmine indirgenir. Ayrıca $\pi_1 a$, bir tek $a' : (\pi_1 I, 0) \to (\tilde{G}, \tilde{x})$ morfizmine yükseltilir. Böylece $r(\tilde{a})$, $a'_0 : I \to \tilde{M}$ yolunun denklik sınıfıdır. $\tilde{b} = f(\tilde{a})$ olsun ve $b = f_0(a)$ olmak üzere, $b' : (\pi_1 I, 0) \to (\tilde{H}, f(\tilde{x}))$ yı elde etmek için aynı yöntemi kullanalım. b', b tarafından tek türlü belirlendiğinden, $r' f(\tilde{a}) = (\pi_1 f_0) r(\tilde{a})$ bulunur. Yani, $\Gamma\Phi \cong 1_{LRGdCov(\pi_1 M)}$ bulunur. Son olarak, $\Phi\Gamma \cong 1_{LRCov(M)}$ olduğunu göstermeliyiz. Fakat, $\tilde{M} = (\pi_1\tilde{M})_0$ ve $\tilde{M}$ nın diferensiyellenebilir yapısı yükseltilmiş atlastan geldiği için $\Phi\Gamma = 1_{LRCov(M)}$ olup ispat tamamlanır. $\square$

Son olarak bu bölümün ana teoremini verelim.

Teorem 4.2.2. *Bir R Lie halka-grupoidi için, R nin örtülerinin $LRGdCov(R)$ kategorisi ile R nin Lie halkalar üzerine diferensiyellenebilir etkilerinin $LRGdOp(R)$ kategorisi denktir.*

İspat. $\Gamma : LRGdOp(R) \to LRGdCov(R)$ funktoru aşağıdaki gibi tanımlansın: R Lie halka-grupoidinin M Lie halkası üzerine $w : M \to R_0$ diferensiyellenebilir halka morfizmi vasıtasıyla diferensiyellenebilir etkisi $\phi : R_\alpha \times_w M \to M$, $(a, x) \mapsto \phi(a, x) = {}^a x$, olsun. Bu durumda, Örnek 4.2.5 den nesnelerinin kümesi M Lie halkası olan $R \ltimes M$ Lie halka-grupoidi tanımlıdır. Yine, Örnek 4.2.5 den morfizmler üzerinde $(a, x) \mapsto a$ ve nesneler üzerinde w ile verilen $p : R \ltimes M \to R$ Lie halka-grupoidlerin bir örtü morfizmi vardır. Yani $\Gamma(M, w)$, Lie halka-grupoidlerin diferensiyellenebilir örtü morfizmidir. (M, w) ve (M', w') birer diferensiyellenebilir etki ise $\Gamma(M, w)$ ve $\Gamma(M', w')$ Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmidir. Bu diferensiyellenebilir örtü morfizmleri, sırasıyla $p : R \ltimes M \to R$ ve $q : R \ltimes M' \to R$ olsun. Eğer $f : M \to M'$ diferensiyellenebilir etkilerin bir morfizmi ise $r_0 = f$ ve $r = 1 \times f$ ile $\Gamma(f) = r$ de diferensiyellenebilir örtü morfizmlerinin morfizmidir. Gerçekten

$$\begin{tikzcd} R \ltimes M \arrow[rr, "r=1\times f"] \arrow[dr, "p"'] & & R \ltimes M' \arrow[dl, "q"] \\ & R & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (a,x) \arrow[rr, "r=1\times f"] \arrow[dr, "p"'] & & (a, f(x)) \arrow[dl, "q"] \\ & a & \end{tikzcd}$$

diyagramı değişimlidir. Bununla beraber, $f : M \to M'$ ve $g : M' \to N$ diferensiyellenebilir etkilerin morfizmi ise $\Gamma(g \circ f) = \Gamma(g) \circ \Gamma(f)$ dir. $\Gamma(M, w) = R \ltimes M$, $\Gamma(M', w') = R \ltimes M'$, $\Gamma(N, w'') = R \ltimes N$, $\Gamma(f) = r$ ve $\Gamma(g) = r'$ olmak üzere $g \circ f : M \to N$ olup $\Gamma(g \circ f) = r' \circ r = \Gamma(g) \circ \Gamma(f)$ bulunur. Bu, aşağıdaki değişimli diyagramlardan açıkça görülür.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "w"'] & M' \arrow[r, "g"] \arrow[d, "w'"] & N \arrow[dl, "w''"] \\ & R_0 & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} R \ltimes M \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & R \ltimes M' \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & R \ltimes N \arrow[dl, "q'"] \\ & R & \end{tikzcd}$$

Böylece Γ bir funktordur.

$\Phi : LRGdCov(R) \to LRGdOp(R)$ funktoru aşağıdaki gibi tanımlansın: $p : \tilde{R} \to R$ Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmi için $M = \tilde{R}_0$ ve $w = p_0 : \tilde{R}_0 \to R_0$ olsun.Bu takdirde Örnek 4.2.4 den R Lie halka-grupoidinin $M = \tilde{R}_0$ Lie halkası üzerine $w = p_0$ diferensiyellenebilir halka morfizmi vasıtasıyla $\phi : R_\alpha \times_{p_0} \tilde{R}_0 \to \tilde{R}_0$, $(a, \tilde{x}) \mapsto^a \tilde{x} = \tilde{\beta}(\tilde{a})$ diferensiyellenebilir etkisini $s_p : R_\alpha \times_{p_0} \tilde{R}_0 \to \tilde{R}$ diffeomorfizmi ile Lie halka-grupoidinin diferensiyellenebilir $\beta : \tilde{R} \to \tilde{R}_0$ hedef dönüşümünün bileşkesinden elde ederiz. Dolayısıyla etki diferensiyellenebilirdir. Böylece, $(M = \tilde{R}_0, w = p_0)$ diferensiyellenebilir etkisini elde ederiz. Yani $\Phi(p)$, R Lie halka-grupoidinin bir halka üzerine etkisidir. $p : \tilde{R} \to R$ ve $q : H \to R$ Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmleri ise $\Phi(p)$ ve $\Phi(q)$, sırasıyla R Lie halka-grupoidinin $\tilde{R}_0$ ve H_0 Lie halkaları üzerine p_0 ve q_0 diferensiyellenebilir halka morfizmleri vasıtasıyla etkisidir. Bu diferensiyellenebilir etkiler sırasıyla $(\tilde{R}_0, p_0)$ ve (H_0, q_0) olsun. p ve q Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmi ise $r : \tilde{R} \to H$ de Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmidir. Böylece, r diferensiyellenebilir örtü morfizmlerinin bir morfizmi ise $r_0 = f$ ile $\Phi(r) = f$ de diferensiyellenebilir etkilerin morfizmidir. Gerçekten,

$$\begin{tikzcd} \tilde{R}_0 \arrow[rr, "r_0=f"] \arrow[dr, "p_0"'] & & H_0 \arrow[dl, "q_0"] \\ & R_0 & \end{tikzcd}$$

diyagramı r diferensiyellenebilir örtü morfizmlerinin morfizmi ve f, r_0 ile verildiğinden değişimlidir. Ayrıca, r diferensiyellenebilir örtü morfizmlerinin morfizmi olduğundan, $p = q \circ r$ ve $p_0 = q_0 \circ r_0$ dir. Etkinin korunduğu aşağıdaki diyagramdan kolayca görülür.

$$\begin{tikzcd} R_\alpha \times_{p_0} \tilde{R}_0 \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times r_0"'] & \tilde{R}_0 \arrow[d, "f=r_0"] \\ R_\alpha \times_{q_0} H_0 \arrow[r, "\phi'"'] & H_0 \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} (a, \tilde{x}) \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "1\times r_0"'] & {}^a\tilde{x} \arrow[d, "f=r_0"] \\ (a, r_0(\tilde{x}) = f(\tilde{x})) \arrow[r, "\phi'"'] & f({}^a\tilde{x}) = {}^a f(\tilde{x}) \end{tikzcd}$$

Bununla beraber, $p : \tilde{R} \to R$ den $q : H \to R$ ya morfizmi $r : \tilde{R} \to H$ ve $q : H \to R$ dan $p' : H' \to R$ ye morfizmi $r' : H \to H'$ ise $\Phi(r' \circ r) = \Phi(r') \circ \Phi(r)$ dir. $\Phi(p) = (\tilde{R}_0, p_0)$, $\Phi(q) = (H_0, q_0)$, $\Phi(p') = (H'_0, p'_0)$, $\Phi(r) = f$ ve $\Phi(r') = f'$ olmak üzere $r' \circ r : \tilde{R} \to H'$ olup Lie halka-grupoidlerin örtü morfizmidir ve $\Phi(r' \circ r) = f' \circ f = \Phi(r') \circ \Phi(r)$ bulunur. Bu, aşağıdaki değişimli diyagramlardan açıkça görülür.

$$\begin{tikzcd}
\tilde{R} \arrow[r, "r"] \arrow[dr, "p"'] & H \arrow[r, "r'"] \arrow[d, "q"] & H' \arrow[dl, "p'"] \\
& R &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\tilde{R}_0 \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "p_0"'] & H_0 \arrow[r, "f'"] \arrow[d, "q_0"] & H'_0 \arrow[dl, "p'_0"] \\
& R_0 &
\end{tikzcd}$$

Böylece Φ bir funktordur.

$\Gamma\Phi \cong 1_{LRGdCov(R)}$ ve $\Phi\Gamma \cong 1_{LRGdOp(R)}$ doğal denklikleri Teorem 3.2.4 de olduğu gibi kolayca elde edilir. $\square$

KAYNAKLAR

[1] P.J.Higgins, *Categories and Groupoids*, Van Nostrand, New York, 1971

[2] T.S.Blyth, *Categories*, University of St. Andrews, Scotland, 1986

[3] M.H.Gürsoy, *Topolojik 2-Grupoidler*, Y.Lisans Tezi, İnönü University, Turkey, 2002

[4] S.Mac Lane, *Categories for the Working Mathematician*, Springer, Berlin, 1971

[5] K.C.H.Mackenzie, *Lie Groupoids and Lie Algebroids in Differential Geometry*, London Math. Soc. Lecture Notes Series 124, Cambridge University Press, 1988

[6] R.Brown, *Topology and Groupoids*, BookSurge LLC, Deganwy, United Kingdom, 2006

[7] J.M.Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2002

[8] J.M.Lee, *Introduction to Topological Manifolds*, Springer-Verlag, New York, 2000

[9] A.F.Özcan, *Topolojik Örtü Grupoidleri* PhD. Thesis, İnönü University, Turkey, 2004

[10] I.Moerdijk and J.Mrcun, *Introduction to Foliations and Lie Groupoids*, Cambridge University Press, New York, 2003

[11] G.Ivan, *Principal Fibre Bundles with Structural Lie Groupoid*,Balkan Journal of Geometry and Its Applications, Vol.6, No.2, (2001), 39-48

[12] D.S.Zhong and L.G.He, *On the Action of a Groupoid on a Manifolds*, Acta Mathematica Sinica, English Series, Vol.19, No.4, (2003), 745-756

[13] J.Kubarski, *Topological Lie Subgroupoids*, Demonstratio Mathematica, Vol.13, No.3, (1980), 585-597

[14] F.W.Warner, *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Springer-Verlag, New York, 1983

[15] V.V.Gorbatsevich, A.L.Onishchik and E.B.Vinberg, *Foundations of Lie Theory and Lie Transformation Groups*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1997

[16] D.I.Ponte, *Lie Groups and Groupoids and Jacobi Structures*, La Laguna, 2003

[17] O. Mucuk, *Covering groups of non-connected topological groups and the monodromy groupoid of a topological groupoid*, PhD Thesis, University of Wales, England, 1993

[18] O. Mucuk and İ. İçen, *Coverings of Groupoids*, Hadronic J. Suppl., 16, No.2, (2001) 183-196

[19] J. P. L. Hardy, *Topological groupoids: Coverings and Universal Constructions*, PhD Thesis, University College of North Wales, England, 1974

[20] R. Brown and O. Mucuk, *Covering groups of non-connected topological groups revisited*, Math. Proc. Camb. Phill. Soc., 115, (1994), 97-110

[21] O. Mucuk, *Coverings and Ring-Groupoids,* Georgian Math. J., Vol:5, No:5, (1998), 475-482

[22] İ. İçen, *Sheaves, Local Subgroupoids and Holonomy Groupoids*, University of Wales, Report 1996.

[23] E. H. Spanier, *Algebraic Topology*, Tata Mc Graw-Hill Publishing Company, Ltd., 1976

[24] S. Balcı, *Homotopi ve Bir Uzayın Esas Grubu,* Y.Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi Ankara, 1978

[25] O. Mucuk and İ. İçen, *Holonomy, Extendibility, and Star Universal Cover of a Topological Groupoid,* Appl. Gen. Topol., Vol.1, No.1, (2003), 79-89

[26] I.Icen and A.F. Ozcan, *Topological Crossed Modules and G-groupoids*, Algebras Groups and Geom. 18, (2001), 401-410

[27] İ. İçen, *Demetler Üzerine,* Y.Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi Malatya, 1989.

[28] R. Brown, G. Danesh-Naruie, *The Fundamental Groupoid as a Topological Groupoid*, Proc. Edinb. Math. Soc., Vol. 19, (series 2), Part 3, (1975), 237-244

[29] R. Brown and C. B. Spencer, *G-groupoids, Crossed Modules and the Fundamental Groupoid of a Topological Group*, Proc. Konn. Ned. Akad. v. Wet., 79, (1976) 196-302

[30] R. Brown, G. Danesh-Naruie and J. P. L. Hardy, *Topological groupoids II: Covering morphisms and G-spaces*, Math. Nachr., 74, (1976) 143-145

[31] L.S. Pontrjagin, *Topological Groups*, Translated from the Russian by Edna Lehmer, Oxford University Pres, London, 1946

[32] A. K. Seda, *Topological Groupoids,* Measures and Representation, Ph.D. Thesis, University of Wales England, 1974.

[33] M.E.-S.A.F.,AOF , *Topological Aspects of Holonomy Groupoids*, University of Wales Ph.D. Thesis, U.C.N.W. Maths Preprint, 88.10, 1987.

[34] O. Mucuk and M. Özdemir, *A Monodromy Principle for Universal Coverings of Topological Rings,* Indian J. Pure Appl. Math.,(2004)

[35] D. K. Biss, *The Topological Fundamental Group and Generalized Covering Spaces*, Topology Appl., 124, (2002) 355-371

[36] W.S.Massey, *Algebraic Topology:An Introduction.*,Springer-Verlag, New York, 1989

[37] A.J.Sieradski, *An Introduction to Topology and Homotopy*,PWS-Kent, Boston, 1992

[38] F.Brickell and R.S.Clark, *Differentiable Manifolds: An Introduction*,Van Nostrand, London, 1970

[39] A.Sabuncuoğlu, *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayınları , Ankara, 2004

[40] D.Martin, *Manifold Theory An Introduction for Mathematical Physicist*,Ellis Horwood, England, 1991

[41] G.D.Naruie, *Theory of Topological Groupoids* PhD. Thesis, University of Southampton , England, 1970

[42] R.Abraham,J.E.Marsden and T.Ratiu, *Manifolds, Tensor Analysis and Applications (Applied Mathematical Sciences)*,Springer-Verlag, New York, 2001

[43] M.Zhang, *Some Problems on Anosov Endomorphisms* Master Thesis, Peking University, Peking, 1986

[44] C.M.Marle, *Lie, Symplectic and Poisson Groupoids and Their Lie Algebroids*, Encyclopedia of Mathematical Physics, Elsevier, (2006), 312-320

[45] A.Arvanitoyeorgos, *An Introduction to Lie Groups and the Geometry of Homogeneous Spaces*, American Mathematical Society, USA, 2003

[46] İ. İçen, A.F.Özcan and M.H. Gürsoy *Topological Group-Groupoids and Their Coverings,* Indian J.pure appl. Math, 36(9), (2005), 493-502

[47] D.Milicic, *Lectures on Lie Groups*, http://www.math.purdue.edu/ clharris/lie.pdf, 2007

[48] P. Gabriel and M. Zisman, *Categories of Fractions and Homotopy Theory*, Springer-Verlag, Heidelberg, 1967

ÖZGEÇMİŞ

25 Kasım 1977 tarihinde Adıyaman'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Bursa, Erzurum ve Adıyaman' da tamamladı. 1995 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve Haziran 1999'da mezun oldu. Eylül 1999'da İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans programına kayıt yaptırdı. Yine Kasım 1999'da, İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak göreve başladı. 2002 yılında yüksek lisans öğrenimini tamamladı ve doktora programına kayıt yaptırdı. Evli olup halen İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.