T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN α-KOSİMPLEKTİK f-MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Selahattin BEYENDİ

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MART 2016

Tezin Başlığı : Hemen Hemen α-Kosimplektik f-Manifoldların Geometrisi Üzerine

Tezi Hazırlayan : Selahattin BEYENDİ

Sınav Tarihi : 03.03.2016

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Ali İhsan Sivridağ**
İnönü Üniversitesi ....

Prof. Dr. Hacı Bayram KARADAĞ
İnönü Üniversitesi ....

Doç. Dr. Mehmet Zeki SARIKAYA
Düzce Üniversitesi ....

Doç. Dr. Erdal ÖZÜSAĞLAM
Aksaray Üniversitesi ....

Doç. Dr. Emine Nesligül AKSAN
İnönü Üniversitesi ....

Prof. Dr. Alaattin ESEN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum ”Hemen Hemen α-Kosimplektik f-Manifoldların Geometrisi Üzerine” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Selahattin BEYENDİ

ÖZET

Doktora Tezi

HEMEN HEMEN α-KOSİMPLEKTİK f-MANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Selahattin BEYENDİ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

87+vi sayfa

2016

Danışmanlar: Prof. Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ
Prof. Dr. Nesip AKTAN

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, konunun tarihsel gelişimi ve bu tezde ele alınan problemlerin tanıtımı yapılmaktadır. İkinci bölümde diğer bölümlere faydalı olacak temel tanım ve kavramlar ele alınmaktadır.

Üçüncü bölümde, hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların bir alt sınıfı olan invaryant altmanifoldlar çalışılmaktadır. Bu tür altmanifoldlar için eğrilik özellikleri ve bu özellikler kullanılarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca bu bölümde hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların yarı-invaryant altmanifoldlarının bazı özellikleri ile distribüsyonların integrallenebilirliği incelenip bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldlar üzerinde çeyrek-simetrik metrik konneksiyon tanımlanmaktadır. Çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun eğrilik tensörü ve Ricci tensörü ile skaler eğriliği elde edilmiştir. Ayrıca bu konneksiyona göre genelleştirilmiş rekürent, $\varphi-$ rekürent hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldlarının var olmadığı gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldlar üzerinde yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon tanımlanmaktadır. Ayrıca bu konneksiyona göre hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların Riemann eğrilik tensörü ve Ricci eğrilik tensörü incelenip bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Altıncı bölümde, hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldlar üzerinde yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyona göre yarı-invaryant alt manifoldları tanımlanıp bazı sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca distribüsyonların integrallenebilirliği ile ilgili de bazı sonuçlar elde edilmiştir

ANAHTAR KELİMELER: Hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldlar, Çeyrek simetrik metrik konneksiyon, İnvaryant alt manifold, Yarı-invaryant alt manifold, Yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon.

ABSTRACT

Doctorate Thesis

ON THE GEOMETRY OF ALMOST α-COSYMPLECTIC f-MANIFOLDS

Selahattin BEYENDİ

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

87+vi pages
2016
Supervisors: Prof. Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ
Prof. Dr. Nesip AKTAN

This thesis consists of six chapters. In the first chapter, the motivation of the problems and their background are presented. In the second chapter, we give some notions and definitions which will be used in the others chapters.

In the third chapter, we define the invariant submanifold of almost $\alpha-$cosymplectic $f-$manifolds. We have investigate the curvature properties and have given some results for invariant submanifolds of almost $\alpha-$cosymplectic $f-$manifolds. We also present some theorems for semi-invariant submanifolds of almost $\alpha-$cosymplectic $f-$manifolds and investigate the integrability of the distributions.

In the fourth chapter, we define almost $\alpha-$cosymplectic $f-$manifolds endowed with a quarter-symmetric metric connection. We have calculated the curvature, the Ricci tensor and the scaler curvature with respect to a quarter-symmetric metric connection. Moreover, we show that there is not generalized recurrent, $\varphi-$recurrent $\alpha-$cosymplectic $f-$manifolds.

In the fifth chapter, we introduce almost $\alpha-$cosymplectic $f-$manifolds endowed with a semi-symmetric non-metric connection. We also investigate the Riemann curvature tensor field, the ricci tensor field and give some theorems for almost $\alpha-$cosymplectic $f-$manifolds.

In the sixth chapter, we define semi-invariant submanifold of almost $\alpha-$cosymplectic $f-$manifolds endowed with a semi-symmetric non-metric connection and obtain some results. Moreover, we obtain the integrability of distributions and their results.

KEYWORDS: Almost $\alpha-$ cosymplectic $f-$ manifolds, quarter symmetric metric connection, invariant submanifold, semi-invariant submanifold, semi-symmetric non-metric connection.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Tez konumu veren ve bu çalışmanın her aşamasında yardım, öneri ve desteklerini esirgemeden beni yönlendiren danışman hocalarım sayın Prof. Dr. Ali İhsan SİVRİDAĞ'a ve sayın Prof. Dr. Nesip AKTAN'a müteşekkirim. Ayrıca doktora eğitimim boyunca beni yönlendiren Matematik Bölüm Başkanı sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e ve her zaman desteklerini gördüğüm Geometri Anabilim Dalı öğretim üyelerine ve tezle ilgili teknik konularda yardımlarını esirgemeyen değerli arkadaşım Yrd. Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL'a şükranlarımı sunarım.

Eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen aileme, gösterdiği sabır ve anlayışla her zaman yanımda olan sevgili eşim Ayşegül BEYENDİ'ye, canım oğlum Yusuf BEYENDİ'ye ve canım kızım Zeynep ikbal BEYENDİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Selahattin BEYENDİ

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\widetilde{M}$	Manifold
M	Altmanifold
g	Metrik Tensör
η	1-Form
T_pM	Tanjant Uzay
TM	Tanjant Demet
$\chi(M)$ veya $\Gamma(TM)$	M manifoldunun Vektör Alanlarınının Uzayı
F_*	Türev Dönüşümü
$\mathcal{D}$	Distribüsyon
$\widetilde{\nabla}$	Levi-Civita Konneksiyonu
∇	Altmanifoldun Levi-Civita Konneksiyonu
$\overline{\nabla}$	Çeyrek-Simetrik Metrik Konneksiyonu
∇^*	Yarı-Simetrik Metrik Olmayan Konneksiyonu
$\overset{\circ}{\nabla}$	Altmanifoldun Yarı-Simetrik Metrik Olmayan Konneksiyonu
$\hat{\nabla}$	Van der Waerden-Bortolotti Konneksiyonu
$\widetilde{R}$	Riemann Christoffel Eğrilik Tensörü
R	Altmanifoldun Riemann Christoffel Eğrilik Tensörü
$\overline{R}$	Çeyrek-Simetrik Metrik Konneksiyonun Riemann Christoffel Eğrilik Tensörü
S	Ricci Tensörü
$\overline{S}$	Çeyrek-Simetrik Metrik Konneksiyonun Ricci Tensörü
r	Skaler Eğrilik
$\bar{r}$	Çeyrek-Simetrik Metrik Konneksiyonun Skaler Eğriliği
$[,]$	Lie Braket (Parantez) Operatörü
Ω	Temel 2-form
H	Ortalama Eğrilik Vektör Alanı
φ	f-Yapı

1. GİRİŞ

Değme geometri bundan iki yüzyıl önce, Huygens, Hamilton ve Jakobi'nin geometrik optikler üzerindeki çalışmalarından doğmuştur. Sophus Lie, Elie Carton ve Darbox gibi pek çok önemli matematikçi bu alanda çalışmalar yapmıştır. Değme geometrinin köklerine, 1872 de Lie'nin değme transformasyonu diferensiyel denklem sistemlerinin çalışılmasında geometrik bir araç olarak ifade edilmesiyle tanımlanır. Değme geometrinin uygulamalarına optik, mekanik ve termodinamik gibi alanlarda da rastlanmaktadır. Manifoldlar teorisinde hemen hemen değme manifoldlar çok önemli bir yere sahiptir. $(2n+1)$-boyutlu bir C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir M manifoldunun tanjant demetlerinin grup yapısı $U(n)\times 1$ tipine indirgenebiliyorsa M ye hemen hemen değme manifold denir. İlk olarak, 1959 yılında Gray tek boyutlu manifoldlar üzerinde yaptığı çalışmada $U(n)\times 1$ yapısal grubunun bir indirgenmesiyle hemen hemen değme yapılarını tanımlamıştır. Buna göre, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen değme yapısı

$$\varphi^2 X = -X + \eta(X)\xi, \qquad \eta(\xi) = 1$$

denklemlerini sağlayan $(1,1)$-tipli bir tensör alanı φ, bir vektör alanı ξ ve bir 1-form olan η ile oluşturulan (φ,ξ,η)-üçlüsü ile ifade edilir. Daha sonra 1960 yılında Sasaki (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı üzerinde

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$
$$\eta(X) = g(X,\xi)$$

denklemleriyle verilen uygun bir g metriği tanımlayarak hemen hemen değme metrik yapıyı tam olarak ifade etmiştir. 1961 yılında Sasaki ve Hatakeyama hemen hemen değme manifoldlar için normallik şartının J kompleks yapısının $J^2 = -I$ integrallenebilmesi olduğunu ispatlamışlardır.

1963 de Yano, hemen hemen kompleks ve hemen hemen değme yapıların bir genellemesi olan f-yapıyı tanımladı[24]. 1969 da Goldberg ve Yano, kosimplektik manifoldu tanımlamışlardır[25]. Bu tanımlamayı takip eden yıllarda özellikle Olszak kosimplektik manifoldlar üzerinde bir çok çalışmaya imza atmıştır([34],[35], [36]). 1972 yılında

Kenmotsu hemen hemen değme metrik manifoldlar üzerinde yeni bir karakterizasyon ve sınıflama ortaya koymuştur. Bu sınıflama Kenmotsu manifold olarak adlandırılmıştır[31]. 1981 yılında Vanhecke hemen hemen değme yapılarını ele aldığı çalışmasında hemen hemen Kenmotsu manifoldlarını genişleterek hemen hemen f-Kenmotsu manifoldları tanımlamıştır[26].

2005 yılında Kim ve Pak hemen hemen α-Kenmotsu ve hemen hemen kosimplektik yapılarını birleştirerek hemen hemen değme metrik manifoldların geniş bir alt sınıfı olan hemen hemen α-kosimplektik manifold kavramını tanımlamışlardır[30]. (M,φ,ξ,η,g), (2n+1)-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik yapısı

$$d\eta = 0, \quad d\Phi = 2\alpha\eta \wedge \Phi$$

şartlarını sağlar. Burada α, keyfi bir reel sayı ve Φ, temel 2-formdur. Özel olarak $\alpha = 0$ durumunda hemen hemen kosimplektik veya $\alpha \neq 0$ durumunda ise hemen hemen α-Kenmotsu manifoldları elde edilir. Normallik şartı altında ise α-kosimplektik manifold ya kosimplektik ya da α-Kenmotsu manifoldudur.

2014 yılında Öztürk ve arkadaşları yukarıda sözü edilen yapıları genelleştirerek çatılı manifoldların yeni bir sınıfı olan hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldları tanımlayarak bu manifoldlar üzerinde bazı tensör alanlarını çalışmışlardır[41]. $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$, $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold yapısı

$$d\eta^i = 0, \quad d\Phi = 2\alpha\bar{\eta} \wedge \Phi$$

şartlarını sağlar. Burada α, keyfi bir reel sayı Φ, temel 2-form $\bar{\eta} = \sum_{i=1}^{s} \eta^i$ dır. Özel olarak, bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold,

(i) $\alpha = 0$ ise hemen hemen C-manifold,

(ii) $\alpha = 1$ ise hemen hemen genelleştirilmiş Kenmotsu manifold,

(iii) $\alpha = 0, \; s = 1$ ise hemen hemen kosimplektik manifold,

(iv) $\alpha = 1, \; s = 1$ ise hemen hemen Kenmotsu manifold,

(v) $\alpha \neq 0, \; s = 1$ ise hemen hemen α-Kenmotsu manifold

olur[48].

İnvaryant ve anti-invaryant altmanifoldlar 1976 da Yano ve Kon tarafından tanımlandı ve Sasakian manifoldun bir invaryant altmanifoldunun yine Sasakian yapıya sahip olduğu görüldü([33], [47]). Yarı-paralel immersiyon tanımı ilk kez 1985 de Deprez tarafından verildi[18]. Deprez çalışmasında Öklid uzayında yarı-paralel hiperyüzeyleri sınıflandırdı. Daha sonra Arslan et al. tarafından[4] 2-yarı-paralel immersiyonlar tanıtıldı. Yano ve Kon bir altmanifoldun ikinci temel formu paralel, 2-paralel veya yarı-paralel olduğunda bu altmanifoldun tamamen jeodezik olduğunu gösterdiler([33], [48]). 1978 yılında Bejancu bir hemen hemen Hermityen manifoldun invaryant ve anti-invaryant altmanifoldlarını da içeren CR-altmanifoldlarını tanımladı[5]. Bu kavram Bejancu ve Papaghuic tarafından hemen hemen değme manifoldlara genişletildi ve yarı-invaryant altmanifold olarak adlandırılan yeni bir altmanifold sınıfı tanımlandı[7]. Daha sonra farklı tipteki altmanifoldların yarı-invaryant altmanifoldları pek çok yazar tarafından çalışıldı. 2004 de Kim et al. tarafından nearly trans-Sasakian manifoldların Yarı-invaryant altmanifoldları incelenip bu altmanifoldlar üzerinde tanımlanan distribüsyonların integrallenebilirliği ile ilgili bazı sonuçlar elde edildi[29].
İlk kez 1975 yılında Golab tarafından tanımlanan çeyrek-simetrik metrik konneksiyon tanımlandı[22]. 2007 de Özgür tarafından genelleştirilmiş rekürent Kenmotsu manifoldları çalışıldı[39]. 2008 de Sular et al. tarafından çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre Kenmotsu manifoldlar çalışıldı[45].
Bir Riemann manifold üzerinde yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon tanımı Agashe ve Chafle tarafından verilmiştir([1],[2]). Sonraki çalışmalarda De, Kamilya, Sengaptu ve Binh tarafından üzerinde yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon tanımlı Riemann manifoldların farklı özellikleri elde edilmiştir([16], [42], [43]).

Bu tez çalışması hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların geometrisi üzerine inşaa edilmiştir. Altı bölümden oluşan bu tezin ilk bölümü konu hakkında genel bir fikir verme ve konunun tarihi gelişimi ile ilgili bilgi vermek üzere giriş bölümüne ayrılmıştır. İkinci bölümde konu ile ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir.

Tezin orjinal bölümleri üçüncü bölümden itibaren başlamaktadır. Üçüncü bölümde iki alt kısımdan ibarettir. Birinci alt kısımda, hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların bir alt sınıfı olan invaryant altmanifoldları incelenmiştir. Bu tür altmanifoldlar için eğrilik özellikleri ve bu özellikler kullanılarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. İkinci alt kısımda, hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların yarı-invaryant altmanifoldlarının bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca distribüsyonların integrallenebilirliği incelenmiş olup bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Dördüncü bölümde, hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldlar üzerinde çeyrek-simetrik metrik konneksiyon tanımlanmaktadır. Çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun eğrilik tensörü ve Ricci tensörü ile skaler eğriliği elde edilmiştir. Ayrıca çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre genelleştirilmiş rekürent ve φ-rekürent hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldlarının var olmadığı gösterilmiştir.

Beşinci bölümde, yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların tanımı yapılarak bazı sonuçlar elde edildi. Ayrıca yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların Riemann eğrilik tensörü ve Ricci eğrilik tensörü icelenmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Son bölümde ise, yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların yarı-invaryant altmanifoldarı ele alındı. Bu bölüm iki alt kısımdan oluşmuştur. Birinci alt kısımda yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların yarı-invaryant altmanifoldarı tanımlanarak bazı sonuçlar elde edildi . İkinci alt kısımda ise, distribüsyonların integrallenebilirliği incelenip bazı sonuçlar elde edilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Riemann Manifoldları

Tanım 2.1.1. M bir C^∞ manifold olsun. M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den R ye C^∞ fonksiyonlarının uzayı $C^\infty(M,R)$ olmak üzere

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M,R)$$

şeklinde tanımlanan pozitif, simetrik, 2-lineer Riemann metriği g ile birlikte M ye bir **Riemann manifoldu** adı verilir [20].

Tanım 2.1.2. M, n-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold ve M üzerindeki C^∞ vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$
$$(X,Y) \to \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ ve $\forall f,g \in C^\infty(M,R)$ için,

(i) $\nabla_X(Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(ii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$,

(iii) $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$

özelliklerini sağlıyor ise ∇ ya M üzerinde bir **Afin Konneksiyon** adı verilir [12].

Tanım 2.1.3. M bir manifold ve M üzerindeki konneksiyon ∇ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} T : \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X,Y) &\to T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y] \end{aligned}$$

olarak tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonunun **torsiyon tensörü** denir [12].

Tanım 2.1.4. M bir manifold ve M üzerindeki ∇ konneksiyonunun torsiyon tensörü T olsun. Eğer $T = 0$ ise ∇ konneksiyonuna simetriktir veya sıfır torsiyonludur denir [12].

Tanım 2.1.5. M bir C^∞ manifold ve ∇ da M^n üzerinde bir afin konneksiyon olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ olmak üzere, ∇ dönüşümü

(i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ (Sıfır torsiyon özelliği),

(ii) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$ (Metrikle bağdaşabilme özelliği)

şartlarını sağlıyorsa, ∇ ya M üzerinde **Riemann konneksiyonu** veya **Levi-Civita konneksiyonu** adı verilir [48].

Tanım 2.1.6. (M^n, g) bir Riemann manifoldu, ∇ da M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun.

$$R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$R(X,Y,Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{2.1.1}$$

ile tanımlanan R fonksiyonu M üzerinde bir $(1,3)$-tensör alanıdır ve M^n nin **Riemann eğrilik tensörü** olarak adlandırılır. Ayrıca $R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$ tensörüne M nin **Riemann-Christoffel eğrilik tensörü** adı verilir.

$\forall X,Y,Z,V,W \in \chi(M)$ için Riemann eğrilik tensörü R;

(i) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$,

(ii) $g(R(X,Y)V,W) = -g(R(X,Y)W,V)$,

(iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,

(iv) $g(R(X,Y)V,W) = g(R(V,W)X,Y)$,

(v) $g(X, R(Y,Z)W) = R(Y,Z,W,X)$

özelliklerine sahiptir [37].

Önerme 2.1.1. *(M^n, g) bir Riemann manifold, ∇ da M^n üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu ve E, $(1,1)$-tipli bir tensör alanı olsun. Bu durumda,*

$$(\nabla_X E)Y = \nabla_X EY - E(\nabla_X Y)$$

dir [37].

Önerme 2.1.2. *(M^n, g) bir Riemann manifold olsun. F simetrik bir tensör alanı olmak üzere, $\forall X,Y,Z$ vektör alanları için,*

$$g((\nabla_X F)Y, Z) = g(Y, (\nabla_X F)Z)$$

eşitliği geçerlidir [37].

Önerme 2.1.3. (M^n, g) *bir Riemann manifold olsun. G ters simetrik bir tensör alanı olmak üzere,* $\forall X, Y, Z$ *vektör alanları için,*

$$g((\nabla_X G)Y, Z) = -g(Y, (\nabla_X G)Z)$$

dir [37].

Tanım 2.1.7. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, ..., e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları $\chi(M)$ nin bir bazı olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} S : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, R) \\ (X, Y) \to S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i) \end{aligned} \tag{2.1.2}$$

şeklinde tanımlı $(0,2)$-tipindeki S tensör alanına, M üzerinde **Ricci eğrilik tensörü** adı verilir. Ayrıca Q Ricci operatörü

$$g(QX, Y) = S(X, Y)$$

biçiminde tanımlanır [19].

Tanım 2.1.8. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, ..., e_n\}$ lokal ortonormal vektör alanları $\chi(M)$ nin bir bazı olmak üzere,

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) \tag{2.1.3}$$

değerine M^n nin **skaler eğriliği** denir [48].

Tanım 2.1.9. (M^n, g) bir Riemann manifoldu ve $k \geq 1$ için $(0, k)$-tipinde bir tensör alanı T olsun. T nin kovaryant türevi ∇T olmak üzere $\forall X, X_1, ..., X_k \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned} (\nabla T)(X_1, X_2, ..., X_k; X) &= (\nabla_X T)(X_1, X_2, ..., X_k) \\ &= \nabla_X (T(X_1, X_2, ..., X_k)) - \sum_{i=1}^{k} T(X_1, ..., \nabla_X X_i, ..., X_k) \end{aligned} \tag{2.1.4}$$

biçiminde tanımlanır[19].

Tanım 2.1.10. M, n-boyutlu bir manifold olsun. Bu durumda M nin her noktasına r-boyutlu bir lineer altuzay karşılık getiren ve

$$\begin{aligned} D : M &\longrightarrow \cup T_pM \\ p &\longrightarrow D_p \subset T_pM \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan D dönüşümüne M üzerinde **distribüsyon (dağılım)** denir. Eğer her $p \in M$ noktası için D_p de r-tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise D distribüsyonuna diferensiyellenebilirdir denir. Eğer $\forall p \in M$ için $D_p = T_pM$ ise D ye **integrallenebilirdir** denir [27].

Tanım 2.1.11. M^n, diferensiyellenebilir bir manifold ve M^n üzerinde (r,s)-tipinde simetrik bir tensör A olsun. Bu durumda, $1 \leq a < b \leq s$ reel sayıları ve keyfi bir r değeri için;

$$\begin{aligned} C_{ab} &: \chi_s^r(M) \to \chi_{s-2}^r(M) \\ (C_{ab}A)^{i_1\ldots i_r}_{j_1\ldots j_{s-2}} &= \sum_{p,q} g^{pq} A^{i_1,\ldots,i_r}_{j_1\ldots \underset{a.bilesen}{p} \ldots \underset{b.bilesen}{q} \ldots j_{s-2}} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan C_{ab} operatörüne a. ve b. bileşenlere göre A tensörünün **metrik kontraksiyonu** adı verilir. Böylece kontraksiyon operatörü, (r,s)-tipindeki bir tensörü $(r-1,s-1)$- tipindeki bir tensöre dönüştürür [37].

Tanım 2.1.12. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n nin R eğrilik tensörü $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W = 0 \tag{2.1.5}$$

koşulunu sağlıyorsa M ye **lokal simetriktir** denir [9].

Tanım 2.1.13. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M^n üzerinde bir U tanjant vektör alanını, $A \neq 0$ 1-formu yardımı ile

$$g(X,U) = A(X)$$

biçiminde tanımlayalım. M^n nin R eğrilik tensörü $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W = A(X)R(Y,Z)W \tag{2.1.6}$$

eşitliğini sağlıyorsa M ye **reküренttir** denir [9].

Tanım 2.1.14. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde U ve V tanjant vektör alanlarını, A ve $\beta \neq 0$, 1-formları yardımı ile

$$g(X,U) = A(X), \quad g(X,V) = \beta(X)$$

biçiminde tanımlayalım. M nin R eğrilik tensörü $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için,

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W = A(X)R(Y,Z)W + \beta(X)[g(Z,W)Y - g(Y,W)Z] \tag{2.1.7}$$

eşitliğini sağlıyorsa M ye **genelleştirilmiş rekürenttir** denir [15].

Tanım 2.1.15. M^n bir C^∞ manifold ve M^n üzerindeki bir vektör alanı X olmak üzere, X ile gerilmiş lokal dönüşümlü bir 1-parametreli grup φ_t olsun. Bu durumda, K bir tensör alanı olmak üzere $P \in M^n$ için,

$$(L_X K)_P = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}[K_P - (\varphi_t K)_P] \tag{2.1.8}$$

şeklinde tanımlanan $L_X K$ dönüşümüne X yönünde K nın **Lie türevi** denir ve $L_X K$ ile gösterilir[48].

Önerme 2.1.4. *M^n bir C^∞ manifold ve M^n üzerindeki bir X vektör alanı yönündeki Lie türevi için,*

(i) *$L_X(Y \otimes Z) = (L_X Y) \otimes Z + Y \otimes (L_X Z)$, ($Y$, Z herhangi tensör alanları)*

(ii) *$L_X f = X(f)$, (f, K cismi üzerinde bir fonksiyon)*

(iii) *$L_X V = [X,V]$, $V \in \chi(M^n)$,*

özellikleri geçerlidir [48].

Tanım 2.1.16. (M^n, g) bir Riemann manifoldu olsun. Her X vektör alanı için, $L_X g = 0$ ise X vektör alanına bir **Kiling vektör alanı** denir [48].

2.2 Riemann Manifoldlarının Altmanifoldları

Tanım 2.2.1. M, n-boyutlu bir manifold ve $\widetilde{M}$, $(n+d)$-boyutlu manifold olsun. $f : M \to \widetilde{M}$, C^∞ dönüşümü için, $boy(f_*(T_pM)) = q$ ise f nin $p \in M$ noktasındaki rankı q olup, $rank(f) = q$ ile gösterilir. Eğer $boy(M) = rank(f)$ ise f ye **immersiyon** (daldırma) denir. Bu durumda M ye de $\widetilde{M}$ nin **immersed altmanifoldu** denir.

f immersiyonu $1-1$ ise f ye **imbedding** (gömme), M ye de $\widetilde{M}$ nin gömülen altmanifoldu ya da sadece altmanifoldu denir [10].

Tanım 2.2.2. M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla n ve $(n+d)$-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ nın altmanifoldu olsun. $f : M \to \widetilde{M}$ immersiyon olsun. $\forall X, Y \in \Gamma(T_pM)$ için,

$$g(X,Y) = \tilde{g}(f_*X, f_*Y)$$

ise f ye **izometrik immersiyon** (metrik koruyan immersiyon) adı verilir [10].

Tanım 2.2.3. M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla n ve $(n+d)$-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ nın altmanifoldu olsun. ∇ ve $\widetilde{\nabla}$ sırası ile M ve $\widetilde{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonları olsun. Böylece X ve Y, M üzerinde vektör alanları olmak üzere,

$$B : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi^{\perp}(M)$$

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y) \tag{2.2.1}$$

yazılır. (2.2.1) denklemine **Gauss eşitliği** denir. Burada $\nabla_X Y$ ve $B(X,Y)$, sırasıyla $\widetilde{\nabla}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir. Burada B ye M nin **ikinci temel formu** adı verilir [10].

Tanım 2.2.4. $B = 0$ ise M ye **total jeodezik altmanifoldu** denir [10].

Tanım 2.2.5. M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla n ve $(n+d)$-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ nın altmanifoldu olsun. M ye normal birim vektör alanı N ve $-A_NX$, $\nabla^{\perp}_X N$ sırasıyla $\widetilde{\nabla}_X N$ nin teğet ve normal bileşenleri olmak üzere,

$$A : \chi^{\perp}(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$\widetilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^{\perp}_X N \tag{2.2.2}$$

yazılır. (2.2.2) denklemine **Weingarten denklemi** denir. Burada A_N ye **şekil operatörü**, $\nabla^{\perp}$ konneksiyonuna da M nin $T^{\perp}M$ normal demetindeki **normal konneksiyon** adı verilir [10].

Aşağıdaki lemma ikinci temel form ve şekil operatörü arasındaki ilişkiyi vermektedir.

Lemma 2.2.1. *M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla n ve $(n+d)$-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ nın altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \chi(M)$ ve $N \in \chi^{\perp}(M)$ için*

$$g(A_N X, Y) = g(B(X,Y), N) \tag{2.2.3}$$

dir [10].

Tanım 2.2.6. M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla n ve $(n+d)$-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ nın altmanifoldu olsun. M nin eğrilik tensörü R ve $\widetilde{M}$ nin eğrilik tensörü $\widetilde{R}$ olmak üzere Gauss ve Weingarten formüllerini kullanarak $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$\widetilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - A_{B(Y,Z)}X + A_{B(X,Z)}Y + (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) \tag{2.2.4}$$

elde edilir. Eğer W vektör alanı M ye teğet alınırsa,

$$g(\widetilde{R}(X,Y)Z,W) = g(R(X,Y)Z,W) + g(B(Y,W),B(X,Z)) - g(B(X,W),B(Y,Z)) \tag{2.2.5}$$

olur. Burada (2.2.5) ile tanımlanan denkleme **Gauss denklemi** adı verilir. Gauss denkleminin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla,

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^T = R(X,Y)Z + A_{B(X,Z)}Y - A_{B(Y,Z)}X \tag{2.2.6}$$

ve

$$(\widetilde{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\overline{\nabla}_X B)(Y,Z) - (\overline{\nabla}_Y B)(X,Z) \tag{2.2.7}$$

biçiminde olup (2.2.7) denklemine **Codazzi denklemi** denir [48].

Tanım 2.2.7. M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla n ve $(n+d)$-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ nın alt manifoldu olsun. M üzerindeki bir $x \in M$ için T_xM nin lokal ortonormal çatısı $\{e_1, ..., e_n\}$ olsun. Bu durumda

$$H = \frac{1}{n} izB = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i) \tag{2.2.8}$$

biçiminde tanımlı H vektör alanına M nin **ortalama eğrilik vektör alanı** denir [10]. Eğer $H = 0$ ise M ye **minimal altmanifold** denir [10].

Tanım 2.2.8. M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla n ve $(n+d)$-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ nın altmanifoldu olsun. $\forall X, Y \in \chi(M)$ olmak üzere

$$B(X,Y) = g(X,Y)H \tag{2.2.9}$$

eşitliği sağlanıyorsa M ye **total umbilik altmanifold** adı verilir [10].

Tanım 2.2.9. M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla n ve $(n+d)$-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ nın altmanifoldu olsun. B ikinci temel formu $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için B nin X yönündeki kovaryant türevi $\hat{\nabla} B$,

$$(\hat{\nabla}_X B)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X (B(Y,Z)) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z) \tag{2.2.10}$$

şeklinde tanımlıdır. $\hat{\nabla} B$ $(0,3)$-tipli bir tensör alanıdır ve M altmanifoldunun **üçüncü temel formu** olarak adlandırılır. Ayrıca, $\hat{\nabla}$ ya **Van der Waerden-Bortolotti** konneksiyonu adı verilir. Eğer $\hat{\nabla} B = 0$ ise M^n altmanifoldu **paralel ikinci temel formludur** denir.

Tanım 2.2.10. M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla n ve $(n+d)$-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ nın altmanifoldu olsun. $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için $\hat{R}.B$;

$$\begin{aligned}(\hat{R}(X,Y).B)(Z,W) = R^{\perp}(X,Y)B(Z,W) &- B(R(X,Y)Z,W) \\ &- B(Z,R(X,Y)W)\end{aligned} \tag{2.2.11}$$

ile tanımlanır[18]. Eğer M nin her noktasında

$$\hat{R}.B = 0$$

ise M ye $\widetilde{M}$ nın **semiparalel altmanifoldu** adı verilir.

Tanım 2.2.11. M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla n ve $(n+d)$-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ nın altmanifoldu olsun. M altmanifoldunun B ikinci temel formunun $\hat{\nabla}^2 B$ kovaryant türevi $\hat{\nabla}^2$, $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}(\hat{\nabla}^2 B)(Z,W,X,Y) =& (\hat{\nabla}_X \hat{\nabla}_Y B)(Z,W) \\ &= \nabla^{\perp}_X((\hat{\nabla}_Y B)(Z,W)) - (\hat{\nabla}_Y B)(\nabla_X Z,W) \\ &- (\hat{\nabla}_X B)(Z,\nabla_Y W) - (\hat{\nabla}_{\nabla_X Y} B)(Z,W)\end{aligned} \tag{2.2.12}$$

şeklinde tanımlıdır. Eğer

$$\hat{\nabla}^2 B = 0 \tag{2.2.13}$$

ise M ye **paralel üçüncü temel formlu** veya **2-paraleldir** denir [10].

Tanım 2.2.12. M ve $\widetilde{M}$ sırasıyla n ve $(n+d)$-boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere M, $\widetilde{M}$ nın altmanifoldu olsun. $\forall X,Y,Z,W,U \in \chi(M)$ için $\hat{R}\cdot\hat{\nabla}B$;

$$\begin{aligned}(\hat{R}(X,Y)\cdot\hat{\nabla}B)(Z,W,U) = & R^{\perp}(X,Y)(\hat{\nabla}B(Z,W,U)) \\ &- (\hat{\nabla}B)(R(X,Y)Z,W,U) \\ &- (\hat{\nabla}B)(Z,R(X,Y)W,U) \\ &- (\hat{\nabla}B)(Z,W,R(X,Y)U)\end{aligned} \tag{2.2.14}$$

ile tanımlanır. Eğer M nin her noktasında

$$\hat{R}\cdot\hat{\nabla}B = 0 \tag{2.2.15}$$

ise M ye **2-semiparalel altmanifold** adı verilir [4].

2.3 Hemen Hemen Değme Metrik manifoldlar

Tanım 2.3.1. M, $(2n+1)$-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. $\varphi, (1,1)$-tipinde bir tensör alanı, ξ, bir vektör alanı ve η, M üzerinde bir diferensiyellenebilir

1-form olmak üzere, $\forall X \in \chi(M)$ için (φ, ξ, η) üçlüsü;

$$\eta(\xi) = 1, \tag{2.3.1}$$

$$\varphi^2(X) = -X + \eta(X)\xi, \tag{2.3.2}$$

koşullarını sağlıyor ise bu üçlüye M de **hemen hemen değme yapı** ve (M, φ, ξ, η) dörtlüsüne de **hemen hemen değme manifold** denir [48].

Burada

$$\varphi : \chi(M) \ \underset{\text{1:1 ve örten}}{\overset{\text{lineer}}{\longrightarrow}} \ \chi(M)$$

$$\eta : \chi(M) \ \underrightarrow{\text{dif.bilir}} \ C^{\infty}(M, R)$$

$$\xi : M \ \rightarrow \ \chi(M)$$

dır.

Tanım 2.3.2. M, $(2n+1)$-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde her noktada,

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0 \tag{2.3.3}$$

şartını sağlayan bir η diferensiyel 1-formu varsa η ya M nin **değme yapısı**, (M, η) ikilisine de **değme manifold** denir. Ayrıca $\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$ bağıntısı M manifoldu üzerinde bir hacim elementine karşılık gelir. Burada $(d\eta)^n$, $d\eta$ nın kendisi ile n-defa dış çarpımını gösterir, yani

$$(d\eta)^n = \underbrace{d\eta \wedge d\eta \wedge \ldots \wedge d\eta}_{n\text{-defa}}$$

dır. η, 1-form olduğundan $d\eta$, 2-form ve $\eta \wedge (d\eta)^n$ ifadesi $(2n+1)$-form olur. Bu sebepten dolayı değme manifoldlar $(2n+1)$-boyutlu manifoldlardır[8].

Tanım 2.3.3. M hemen hemen değme manifoldu üzerinde $X \neq \xi$ için,

$$\eta(\xi) = 1 \quad \text{ve} \quad d\eta(\xi, X) = 0$$

olacak biçimde bir tek $\xi \in \chi(M)$ vektör alanı var ise; ξ ye η-değme yapısının **karakteristik vektör alanı** denir [8].

Örnek 2.3.1. M, 3-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Her x,y,z noktası civarında $\eta = \cos z dx + \sin z dy$ diferensiyel 1-formu için Tanım 2.3.3 deki şartları sağlayan bir tek $\xi \in \chi(M)$ vektör alanı

$$\xi = \cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y}$$

dır. Buradan

$$d\eta = \sin z dx \wedge dz + \cos z dz \wedge dy$$

olup bir $X \in \chi(M)$ için;

$$\begin{aligned}
d\eta(X,\xi) &= (sinzdx \wedge dz + \cos z dz \wedge dy)(X,\xi) \\
&= \sin z[dx(X)dz(\xi) - dx(\xi)dz(X)] + \cos z[dz(X)dy(\xi) - dz(\xi)dy(X)] \\
&= sinz[dx(X)dz(\cos z\frac{\partial}{\partial x} + \sin z\frac{\partial}{\partial y}) - dx(\cos z\frac{\partial}{\partial x} + \sin z\frac{\partial}{\partial y})dz(X)] \\
&+ \cos z[dz(X)dy(\cos z\frac{\partial}{\partial x} + \sin z\frac{\partial}{\partial y}) - dz(\cos z\frac{\partial}{\partial x} + \sin z\frac{\partial}{\partial y})dy(X)] \\
&= -\sin^2 z dx(X)dz(\frac{\partial}{\partial x}) + \sin z\cos z dx(X)dz(\frac{\partial}{\partial y}) - \sin z\cos z dx(\frac{\partial}{\partial x})dz(X) \\
&- \sin^2 z dx(\frac{\partial}{\partial y})dz(X) + \cos^2 z dz(X)dy(\frac{\partial}{\partial x}) + \cos z\sin z dz(X)dy(\frac{\partial}{\partial y}) \\
&+ \cos z\sin z dz(\frac{\partial}{\partial x})dy(X) - \cos^2 z dz(\frac{\partial}{\partial y})dy(X) \\
&= -\sin z\cos z dx(\frac{\partial}{\partial x})dz(X) + \cos z\sin z dz(X)dy(\frac{\partial}{\partial y}) \\
&= -\sin z\cos z dz(X) + \cos z\sin z dz(X)
\end{aligned}$$

denklemi yardımıyla

$$d\eta(X,\xi) = 0$$

bulunur. Ayrıca

$$\eta(\xi) = (\cos z dx + \sin z dy)(\cos z \frac{\partial}{\partial x} + \sin z \frac{\partial}{\partial y})$$
$$= \cos^2 z dx(\frac{\partial}{\partial x}) + \cos z \sin z dx(\frac{\partial}{\partial y}) + \sin z \cos z dy(\frac{\partial}{\partial x}) + \sin^2 z dy(\frac{\partial}{\partial y})$$
$$= \cos^2 z + \sin^2 z$$
$$= 1$$

dır. Dolayısıyla ξ, η değme yapısının karakteristik vektör alanı olur [32].

Teorem 2.3.1. (M, φ, ξ, η) *dörtlüsü hemen hemen değme manifold olmak üzere* $X, \xi \in \chi(M)$, $X \neq \xi$ *ve* $\varphi : \chi(M) \underrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$ *dönüşümü için,*

$$\varphi(\xi) = 0,$$
$$\eta o \varphi = 0,$$
$$rank\varphi = 2n$$

eşitlikleri sağlanır [48].

Tanım 2.3.4. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta)$ bir hemen hemen değme yapısı ile verilsin. M^{2n+1} üzerinde bir g Riemann metriği

$$\eta(X) = g(X, \xi) \tag{2.3.4}$$
$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.3.5}$$

koşullarını sağlıyorsa g metriğine M^{2n+1} üzerinde **hemen hemen değme metrik**, (φ, ξ, η, g) yapısına **hemen hemen değme metrik yapı** ve (φ, ξ, η, g) yapısı ile M^{2n+1} ye de **hemen hemen değme metrik manifold** denir [48].

Teorem 2.3.2. $(2n+1)$*-boyutlu M hemen hemen değme manifoldu üzerinde* $\forall X, Y \in \chi(M)$ *için,*

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g Riemann metriği daima vardır [48].

Sonuç 2.3.1. $(2n+1)$-boyutlu M hemen hemen değme manifoldu verilmiş olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$g(\varphi X,Y) = -g(X,\varphi Y) \tag{2.3.6}$$

dır. Yani φ, g ye göre anti-simetrik tensör alanıdır [48].

Teorem 2.3.3. $(2n+1)$*-boyutlu M hemen hemen değme manifoldu verilmiş olsun. M üzerinde bir η, değme yapısı verildiğinde, $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,*

$$\varphi : \chi(M) \xrightarrow{\text{lineer}} \chi(M)$$
$$g(X,\varphi Y) = d\eta(X,Y)$$

olacak şekilde (φ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısı vardır [48].

Önerme 2.3.1. *$(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen değme metrik manifold ve ∇, M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu olsun. $\forall X,Y,\in \chi(M)$ için;*

(i) $(\nabla_X\Phi)(Y,Z) = g(Y,(\nabla_X\varphi)Z)$

(ii) $(\nabla_X\Phi)(Y,Z) + (\nabla_X\Phi)(\varphi Y,\varphi Z) = \eta(Z)(\nabla_X\eta)\varphi Y - \eta(Y)(\nabla_X\eta)\varphi Z$

(iii)$(\nabla_X\eta)Y = g(Y,\nabla_X\xi) = (\nabla_X\Phi)(\xi,\varphi Y)$

(iv) $2d\eta(X,Y) = (\nabla_X\eta)Y - (\nabla_Y\eta)X)$

(v) $3d\Phi(X,Y,Z) = \underset{X,Y,Z}{\oplus}(\nabla_X\Phi)(Y,Z)$

eşitlikleri geçerlidir. Burada $\underset{X,Y,Z}{\oplus}(\nabla_X\Phi)$, X,Y,Z vektör alanları üzerinde alınan devirli toplamı göstermektedir [11].

Tanım 2.3.5. M^n bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere, M^n üzerinde $(1,1)$-tipli bir tensör alanı F olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$N_F(X,Y) = F^2[X,Y] + [FX,FY] - F[FX,Y] - F[X,FY] \tag{2.3.7}$$

şeklinde tanımlı N_F tensör alanına F tensör alanına göre **Nijenhuis torsiyon tensörü** denir [48].

J, M^n üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olsun. (2.3.7) denklemi yardımıyla M^n üzerinde J tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörü

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \\ &= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY] \end{aligned}$$

şeklindedir [48].

Tanım 2.3.6. (M^{2n},J) hemen hemen kompleks manifold olsun. O zaman, $N_J = 0$ ise J dönüşümüne **integrallenebilirdir** denir [48].

Tanım 2.3.7. Eğer $M^{2n} \times R$ üzerindeki Bir J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (φ,ξ,η) hemen hemen değme yapısına **normaldir** denir [48].

Önerme 2.3.2. M^{2n+1} *üzerinde* (φ,ξ,η) *hemen hemen değme yapısının normal olması için gerek ve yeter koşul*

$$N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Burada N_φ*,* φ *tensör alanına göre Nijenhuis torsiyon tensörüdür [48].*

Tanım 2.3.8. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$\Phi(X,Y) = g(X,\varphi Y) \tag{2.3.8}$$

biçiminde tanımlı Φ dönüşümüne (φ,ξ,η,g) hemen hemen değme metrik yapısının **temel 2-formu** denir [8].

Tanım 2.3.9. $(M^{2n+1},\varphi,\xi,\eta,g)$, bir hemen hemen değme metrik manifold olsun. O zaman, verilen bu yapı

$$d\Phi = 0 \text{ (Φ kapalıdır)}, \quad d\eta = 0 \text{ (η kapalıdır)}$$

şartlarını sağlıyorsa M^{2n+1} manifolduna **hemen hemen kosimplektik manifold** denir. Eğer bir hemen hemen kosimplektik manifoldu normal ise bu manifolda **kosimplektik manifold** denir [34].

Teorem 2.3.4. $(M^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *bir hemen hemen değme metrik manifold olsun.* M^{2n+1} *manifoldunun bir kosimplektik manifold olması için gerek ve yeter koşul* $\nabla\Phi$ *ve* $\nabla\eta$ *kovaryant türevlerinin sıfıra eşit olmasıdır [34].*

2.4 f-Manifoldlar

Bu kısımda, f-manifoldlar ile ilgili temel kavramlar verilmiştir. İlk olarak, Goldberg ve Yano CR-manifoldlar yardımıyla hemen hemen değme metrik yapıları kullanarak, metrik çatılı manifoldları aşağıdaki önermeye dayanarak tanımlamışlardır [24].

Önerme 2.4.1. *Her CR-manifold bir* f*-yapıya sahiptir. Başka bir değişle,* $f^3+f=0$ *olacak şekilde bir* $(1,1)$*-tipli* f*-tensör alanı mevcuttur[24].*

Tanım 2.4.1. M bir reel $(2n+s)$-boyutlu diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M manifoldunun tanjant demeti üzerinde bir $(1,1)$-tipli null olmayan diferensiyellenebilir φ tensör alanı mevcutsa M-manifoldu bir f-yapı üretir ve

$$\varphi^3+\varphi=0, \;\; rank\varphi=2n$$

eşitlikleri sağlanır. Bir f-yapı hemen hemen kompleks $(s=0)$ ve hemen hemen değme $(s=1)$ yapılarının bir genelleştirilmesidir. Ayrıca, M nin yönlendirilebilir olduğunu söyleyebiliriz. P ve Q operatörlerini

$$P=-\varphi^2, \;\; Q=\varphi^2+I$$

şeklinde tanımlayalım. Burada I birim operatördür. O halde,

$$boy(D)=2n, \;\; boy(D^{\perp})=s$$

olacak şekilde iki dağılım vardır. Bu dağılımlar

$$\varphi P=P\varphi=\varphi, \;\; \varphi Q=Q\varphi=0, \;\; \varphi^2P=P, \;\; \varphi^2Q=0$$

eşitliklerini sağlar. Böylece bir hemen hemen kompleks dağılımı $(J=\varphi_{|D}, J^2=-I)$ vardır ve φ tensör alanı $D^{\perp}$ üzerinde bir null operatör gibi rol oynar. Ayrıca,

$$TM=D\oplus D^{\perp}, \;\; D\cap D^{\perp}=\{0\}$$

dır.

Tanım 2.4.2. M, $(2n+s)$-boyutlu bir manifold ve φ de M üzerinde bir f-yapı olsun. M üzerinde s tane vektör alanı $\{\xi_i\}$ s tane η^i 1-formları olmak üzere

$$\varphi^2 = -I + \sum_{i=1}^{s} \eta^i \otimes \xi_i \tag{2.4.1}$$

olacak şekilde $(1,1)$-tipinde bir φ tensör alanı varsa M ye **çatılı manifold** denir ve kısaca **f-manifold** olarak adlandırılır. Bu manifoldun çatı yapısı ise (M,φ,ξ_i,η^i) ile sembolize edilir. (2.4.1) denkleminden

$$\varphi\xi_i = 0, \;\; \eta^i o\varphi = 0, \;\; \eta^i(\xi_j) = \delta_i^j \tag{2.4.2}$$

elde edilir. Ayrıca f-yapının varlığı $U(n)\times O(s)$ yapısına indirgenebilen TM uzayının yapı grubuna denktir. Bu grup $U(n)\times I_s$ tipine indirgenebilir[21].

Tanım 2.4.3. M üzerindeki f-yapıya g Riemann metriği eklenirse,

$$\eta^i(X) = g(X,\xi_i), \tag{2.4.3}$$

$$g(X,\varphi Y)+g(\varphi X,Y) = 0, \tag{2.4.4}$$

$$g(\varphi X,\varphi Y) = g(X,Y) - \sum_{i=1}^{s} \eta^i(X)\eta^i(Y) \tag{2.4.5}$$

denklemleri elde edilir. Böylece (2.4.3), (2.4.4) ve (2.4.5) denklemleri ile verilen $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ yapısına **metrik f-yapı** denir [21].

(M,φ,ξ_i,η^i) çatılı yapısının torsiyon tensörü olan N özdeş olarak sıfır ise **normal f-yapı** olarak adlandırılır. Yani,

$$N = N_\varphi + 2\sum_{i=1}^{s} d\eta^i \otimes \xi_i = 0$$

dır. Burada $N\varphi$, φ tensör alanının Nijenhuis tensör alanıdır. M üzerinde $\forall X,Y$ vektör alanları için $\Phi(X,Y) = g(X,\varphi Y)$ olacak şekilde Φ, 2-formunu göz önüne alalım. ∇, bir metrik f-manifoldun Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere;

$$\begin{aligned}2g((\nabla_X\varphi)Y,Z) &= 3d\Phi(X,\varphi Y,\varphi Z) - 3d\Phi(X,Y,Z)\\ &\quad + g(N_\varphi(Y,Z),\varphi X) + N_j^2(Y,Z)\eta^j(X)\\ &\quad + 2d\eta^j(\varphi Y,X)\eta^j(Z) - 2d\eta^j(\varphi Z,X)\eta^j(Y)\end{aligned}$$

eşitliği geçerlidir. Burada $N_j^2(X,Y)$ tensör alanı $\forall j \in \{1,...,s\}$ için,

$$N_j^2(X,Y) = (L_{\varphi X}\eta^j)Y - (L_{\varphi Y}\eta^j)X = 2d\eta^j(\varphi X,Y) - 2d\eta^j(\varphi Y,X)$$

olarak tanımlıdır.

Bundan sonra işlemlerin kolaylığı adına $\bar{\eta} = \eta^1 + \eta^2 + ... + \eta^s$, $\bar{\xi} = \xi^1 + \xi^2 + ... + \xi^s$ ve $\bar{\delta}_i^j = \delta_i^1 + \delta_i^2 + ... + \delta_i^s$ olarak alınacaktır.

2.5 Hemen Hemen α-Kosimplektik f-Manifoldlar

Tanım 2.5.1. $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$, $(2n+s)$-boyutlu bir metrik f-manifold olsun. Her α reel sayısı için,

$$d\eta^i = 0, \;\; d\Phi = 2\alpha\bar{\eta} \wedge \Phi \tag{2.5.1}$$

şartlarını sağlayan M manifolduna bir **hemen hemen α-kosimplektik f-manifold** denir[41].

Önerme 2.5.1. *$(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$, $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. Bu durumda, $\forall X,Y,Z$ vektör alanları için Levi-Civita konneksiyonu,*

$$\begin{aligned} 2g((\nabla_X\varphi)Y,Z) = 2\alpha g\left(\sum_{i=1}^{s}(g(\varphi X,Y)\xi_i - \eta^i(Y)\varphi X),Z\right) \\ + g(N(Y,Z),\varphi X) \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

denklemi ile verilir. Burada $X = \xi_i$ alınırsa $\nabla_{\xi_i}\varphi = 0$ elde edilir. Bu sonuç $\nabla_{\xi_i}\xi_j \in D^{\perp}$ olmasını gerektirir. Ayrıca $[\xi_i,\xi_j] = 0$ olduğundan $\nabla_{\xi_i}\xi_j = \nabla_{\xi_j}\xi_i$ dır. Bunun yanısıra, D distribüsyonu integrallenebilir olduğundan $\forall X \in D$ için, $L_{\xi_i}\eta^j = 0$, $[\xi_i,\xi_j] \in D$ ve $[X,\xi_i] \in D$ dır.

$A_iX = -\nabla_X\xi_i$ ve $h_i = \frac{1}{2}(L_{\xi_i}\varphi)$ eşitlikleri ile tanımlanan $(1,1)$-tipli tensör alanlarını gözönüne alalım. Burada L, Lie anlamında türev operatörüdür. Buna göre aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 2.5.2. *A_i ve h_i $(1,1)$-tipli simetrik operatörleri olmak üzere,*

$$A_i(\xi_j) = 0 \ \ ve \ \ h_i(\xi_j) = 0 \tag{2.5.3}$$

$$A_i o\varphi + \varphi o A_i = -2\alpha n, \ \ h_i o\varphi + \varphi o h_i = 0 \tag{2.5.4}$$

$$\dot{I}z(A_i) = -2\alpha n, \ \ \dot{I}z(h_i) = 0 \ \ ve \ \ \dot{I}z(\varphi h_i) = 0 \tag{2.5.5}$$

$$\nabla_X \xi_i = -\alpha\varphi^2 X - \varphi h_i X \tag{2.5.6}$$

denklemleri sağlanır. Burada $i, j \in \{1, ..., s\}$ dır [41] .

Lemma 2.5.1. *$(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$, $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun Kaehler liflere sahip olması için gerek ve yeter şart*

$$(\nabla_X \varphi)Y = \sum_{i=1}^{s} \left[-g(\varphi A_i X, Y)\xi_i + \eta^i(Y)\varphi A_i X \right]$$

veya

$$(\nabla_X \varphi)Y = \sum_{i=1}^{s} \left[\alpha \left(g(\varphi X, Y)\xi_i - \eta^i(Y)\varphi X \right) + g(h_i X, Y)\xi_i - \eta^i(Y) h_i X \right] \tag{2.5.7}$$

dır[14].

Önerme 2.5.3. *$(M, \varphi, \xi_i, \eta^i, g)$, $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. D distribüsyonun integral manifoldları ortalama eğrilik vektör alanı $H = -\alpha\bar{\xi}$ olan hemen hemen Kaehler manifoldlarıdır[41].*

İspat. $\widetilde{M}$, D distribüsyonun bir integral manifoldu olsun. D distribüsyonu hemen hemen kompleks bir dağılım olduğundan $\widetilde{M}$ üzerine indirgenmiş bir $\tilde{g}$ Hermityen metriği vardır. O halde, $\forall X, Y \in \chi(\widetilde{M})$ için, $\widetilde{M}$ üzerine indirgenmiş bir $\widetilde{\Omega}$ 2-formu $\widetilde{\Omega}(X,Y) = \tilde{g}(X, JY) = g(X, \varphi Y) = \Omega(X,Y)$ olacak şekilde tanımlanabilir. Ayrıca, $d\widetilde{\Omega} = 0$ eşitliği sağlanır. Böylece $\widetilde{M}$ bir hemen hemen Kaehler manifoldudur.

A_i operatörleri ξ_i vektör alanları yönündeki Weingarten operatörleri olduğundan (2.5.5) ve (2.5.6) denklemleri yardımıyla

$$B(X,Y) = \sum_{i=1}^{s} g(A_i X, Y)\xi_i = \sum_{i=1}^{s} [-\alpha g(X,Y)\xi_i + g(\varphi h_i X, Y)\xi_i] \tag{2.5.8}$$

elde edilir. Burada B, $\widetilde{M}$ nin ikinci temel formudur. $\{e_1,...,e_{2n}\}$, $\widetilde{M}$ integral manifoldunun tanjant uzayında $e_{l+n}=\varphi e_l$, $l=1,...,n$ olacak şekilde bir lokal ortonormal çatı alanı olsun. (2.5.8) denkleminde $X=Y=e_p$ seçilir ve $p=1,...,2n$ üzerinden toplam alınırsa istenen sonuç elde edilir. □

Önerme 2.5.4. *$(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold ve D distribüsyonun bir integral manifoldu $\widetilde{M}$ olsun. Bu taktirde,*

(i) *$\alpha=0$ durumunda $\widetilde{M}$ manifoldu total jeodeziktir ancak ve ancak $h_i=0$ dır.*

(ii) *$\alpha\neq 0$ durumunda $\widetilde{M}$ manifoldu total umbiliktir ancak ve ancak $h_i=0$ dır,*

şartları geçerlidir[41].

İspat. (2.5.8) denkleminden ispat elde edilir. □

Önerme 2.5.5. *M bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. Bu durumda,*

$$\begin{aligned} R(X,Y)\xi_i = {} & \alpha^2\sum_{k=1}^{s}\{\eta^k(Y)\varphi^2X-\eta^k(X)\varphi^2Y\} \\ & -\alpha\sum_{k=1}^{s}\{\eta^k(X)\varphi h_kY-\eta^k(Y)\varphi h_kX\} \\ & +(\nabla_Y\varphi h_i)X-(\nabla_X\varphi h_i)Y \end{aligned} \tag{2.5.9}$$

eşitliği sağlanır[41].

İspat. (2.1.1) ve (2.5.6) denklemi kullanılarak (2.5.9) denklemi elde edilir. □

(2.5.6) ve (2.5.9) denklemleri kullanılarak aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 2.5.6. *$(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. Bu durumda $\forall X\in\Gamma(TM)$ için*

$$\begin{aligned} R(X,\xi_j)\xi_i = {} & \sum_{k=1}^{s}\delta_j^k\{\alpha^2\varphi^2X+\alpha\varphi h_kX\} \\ & +\alpha\varphi h_iX-h_ih_jX+\varphi(\nabla_{\xi_j}h_i)X \end{aligned} \tag{2.5.10}$$

$$R(\xi_j,X)\xi_i-\varphi R(\xi_j,\varphi X)\xi_i = 2(-\alpha^2\varphi^2X+h_ih_jX) \tag{2.5.11}$$

$$S(X,\xi_i) = -2n\alpha^2\sum_{k=1}^{s}\eta^k(X)-(div\varphi h_i)X \tag{2.5.12}$$

$$S(\xi_i,\xi_j) = -2n\alpha^2-\dot{I}z(h_jh_i) \tag{2.5.13}$$

denklemleri geçerlidir[41].

Teorem 2.5.1. *M, $(2n+s)$-boyutlu bir C manifoldu, bir M_1^{2n} Kaehler manifoldu ile bir M_2^s değişmeli Lie grubunun bir lokal çarpımıdır[41].*

3. HEMEN HEMEN α-KOSİMPLEKTİK f-MANİFOLDLARIN ALTMANİFOLDLARI

Bu bölüm iki alt kısımdan oluşmaktadır. Birinci alt kısımda hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların bir alt sınıfı olan invaryant altmanifoldları incelenmiştir. Bu tür altmanifoldlar için eğrilik özellikleri ve bu özellikler kullanılarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. İkinci alt kısımda ise hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların yarı-invaryant altmanifoldlarının bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca distribüsyonların integrallenebilirliği incelenmiş olup bazı sonuçlar elde edilmiştir.

3.1 Hemen Hemen α-Kosimplektik f-Manifoldların İnvaryant Altmanifoldları

Bu kısımda invaryant altmanifold yapısı kullanılarak eğrilik tensörü ve ikinci temel form yardımıyla bazı sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 3.1.1. $\widetilde{M}$, $(2n+s)$-boyutlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifold ve M de $\widetilde{M}$ nın bir altmanifoldu olsun. Eğer $\forall i \in \{1,...,s\}$ için M de her ξ_i yapı vektör alanı M ye teğet ise $\widetilde{M}$ nın M altmanifolduna **invaryantır** denir. $\forall p \in M$ için,

$$\varphi(T_pM) \subset T_pM$$

dır.

Önerme 3.1.1. *$\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun bir invaryant altmanifoldu M olmak üzere*

$$(\widetilde{\nabla}_X\varphi)Y = (\nabla_X\varphi)Y \tag{3.1.1}$$

ve

$$B(X,\varphi Y) = \varphi B(X,Y) = B(\varphi X,Y) \tag{3.1.2}$$

eşitlikleri geçerlidir. Burada B, M nin ikinci temel formudur.

İspat. (2.2.1) denklemi gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_X\varphi)Y &= \widetilde{\nabla}_X\varphi Y - \varphi\widetilde{\nabla}_X Y\\ &= \nabla_X\varphi Y + B(X,\varphi Y) - \varphi\nabla_X Y - \varphi B(X,Y)\\ &= (\nabla_X\varphi)Y + B(X,\varphi Y) - \varphi B(X,Y)\end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemin teğet ve normal kısımları birbirlerine eşitlenirse $B(X,\varphi Y) = \varphi B(X,Y)$ denklemi elde edilir. Benzer şekilde B nin simetrikliği kullanılarak $B(\varphi X,Y) = \varphi B(X,Y)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

B nin simetrikliğini ve (3.1.2) denklemini kullanarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.1.1. $\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun bir invaryant altmanifoldu M olsun. $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere,

$$B(\varphi X,\varphi Y) = -B(X,Y) \tag{3.1.3}$$

dır.

Tanım 3.1.2. $\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için $B(X,Y) = 0$ ise M altmanifolduna **total jeodeziktir** denir.

Önerme 3.1.2. *$\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun bir invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda,*

$$\widetilde{\nabla}_X\xi_j = \nabla_X\xi_j \tag{3.1.4}$$

ve

$$B(X,\xi_j) = 0 \tag{3.1.5}$$

dır.

İspat. $\forall X \in \Gamma(TM)$ için (3.1.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\widetilde{\nabla}_X\varphi)\xi_j = (\nabla_X\varphi)\xi_j \quad &\Rightarrow \varphi\widetilde{\nabla}_X\xi_j = \varphi\nabla_X\xi_j\\ &\Rightarrow \widetilde{\nabla}_X\xi_j = \nabla_X\xi_j\end{aligned}$$

elde edilir. (2.2.1) denkleminde (3.1.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X \xi_j &= \nabla_X \xi_j + B(X,\xi_j) \\ &\Rightarrow B(X,\xi_j) = 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Önerme 3.1.3. *İntegral altmanifoldları Kaehler liflere sahip bir hemen hemen* α*-kosimplektik* f*-manifoldun invaryant altmanifoldu da Kaehler liflere sahip bir hemen hemen hemen* α*-kosimplektik* f*-manifolddur.*

İspat. (2.2.1) denkleminden

$$\begin{aligned} (\widetilde{\nabla}_X \varphi)Y &= \widetilde{\nabla}_X \varphi Y - \varphi(\widetilde{\nabla}_X Y) \\ &= \nabla_X \varphi Y + B(X,\varphi Y) - \varphi(\nabla_X Y) - \varphi B(X,Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde teğet ve normal bileşenler karşılaştırılıp ve ayrıca (2.5.7) denklemi dikkate alınırsa

$$(\nabla_X \varphi)Y = \sum_{i=1}^{s} \left[\alpha\left(g(\varphi X,Y)\xi_i - \eta^i(Y)\varphi X\right) + g(h_i X,Y)\xi_i - \eta^i(Y)h_i X\right]$$

bulunur. Buradan ispat tamamlanır. □

Teorem 3.1.1. *Hemen hemen* α*-kosimplektik* f*-manifoldun her invaryant altmanifoldu minimaldir.*

İspat. $\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun bir minimal altmanifoldu M ve $boyM = 2m + s(m < n)$ olsun. (2.2.3) denklemi kullanılırsa

$$(2m+s)\text{İz}(A_N) = \sum_{i=1}^{m} g(B(e_i,e_i),N) + \sum_{i=1}^{m} g(B(\varphi e_i,\varphi e_i),N) + \sum_{i=1}^{s} g(B(\xi_i,\xi_i),N) = 0$$

elde edilir. Yukarıdaki denklemde gerekli işlemler yapılırsa $\text{İz}(A_N) = 0$ bulunur. Buradan da M nin ortalama eğriliği $H = 0$ olup M minimal altmanifolddur. □

Önerme 3.1.4. *$\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun bir invaryant altmanifoldu M olsun. $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,*

$$\widetilde{R}(X,Y)\xi_i = R(X,Y)\xi_i \tag{3.1.6}$$

dır.

İspat. $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için (2.2.4) denleminde Gauss eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)\xi_i &= R(X,Y)\xi_i - A_{B(Y,\xi_i)}X + A_{B(X,\xi_i)}Y + (\nabla_X B)(Y,\xi_i) - (\nabla_Y B)(X,\xi_i) \\
&= R(X,Y)\xi_i - B(Y,\nabla_X\xi_i) + B(X,\nabla_Y\xi_i) \\
&= R(X,Y)\xi_i + \alpha\varphi^2 B(Y,X) - \alpha\varphi^2 B(X,Y) + \varphi B(Y,h_iX) - \varphi B(X,h_iY) \\
&= R(X,Y)\xi_i
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (3.1.6) denklemi elde edilir. □

Sonuç 3.1.2. $\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun bir invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \Gamma(M)$ ve $i \in \{1,...,s\}$ için, $\widetilde{R}(X,Y)\xi_i$ eğrilik tensörü M ye teğettir.

Önerme 3.1.5. *$\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun bir invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda*

$$\widetilde{R}(\xi_j,X)\xi_i = R(\xi_j,X)\xi_i, \tag{3.1.7}$$

$$\widetilde{R}(X,\xi_j)\xi_i = R(X,\xi_j)\xi_i, \tag{3.1.8}$$

$$\widetilde{R}(\xi_k,\xi_j)\xi_i = R(\xi_k,\xi_j)\xi_i = 0, \tag{3.1.9}$$

$$\widetilde{R}(\xi_j,X)Y = R(\xi_j,X)Y \tag{3.1.10}$$

dır.

Önerme 3.1.6. *$\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun bir invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda*

$$\varphi(A_N X) = A_{\varphi N} X = -A_N \varphi X \tag{3.1.11}$$

dır.

İspat. $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ olmak üzere (2.2.3) ve (3.1.2) denklemlerinden

$$\begin{aligned} g(\varphi(A_N X),Y) &= -g(A_N X,\varphi Y) \\ &= -g(B(X,\varphi Y),N) \\ &= -g(B(\varphi X,Y),N) \\ &= -g(A_N \varphi X,Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\varphi(A_N X) = -A_N \varphi X$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} g(\varphi(A_N X),Y) &= -g(B(X,\varphi Y),N) \\ &= -g(\varphi B(X,Y),N) \end{aligned}$$

ve

$$g(A_{\varphi N} X,Y) = g(B(X,Y),\varphi N) = -g(\varphi B(X,Y),N)$$

denklemleri birleştirilirse

$$\varphi(A_N X) = A_{\varphi N} X$$

denklemi elde edilir. Buradan ispat tamamlanır. □

Önerme 3.1.7. *$\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun bir invaryant altmanifoldu M olmak üzere $\forall X \in \Gamma(TM)$ için,*

$$g(R(X,\varphi X)\varphi X,X) = g(\widetilde{R}(X,\varphi X)\varphi X,X) - 2g(B(X,X),B(X,X)) \tag{3.1.12}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Gauss denkleminde $Z = Y = \varphi X$ ve $W = X$ alınırsa (3.1.12) denklemi elde edilir. □

Önerme 3.1.8. *$\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun bir invaryant altmanifoldu M ve $\widetilde{M}$ sabit φ kesitsel eğriliğine sahip olsun. Bu durumda M manifoldunun total jeodezik olması için gerek ve yeter şart sabit φ kesitsel eğriliğine sahip olmasıdır.*

İspat. M, $\widetilde{M}$ nın total jeodezik altmanifoldu olsun. (3.1.12) denkleminden M ve $\widetilde{M}$ aynı kesitsel eğriliğe sahip olur. Tersine $\forall X \in \Gamma(TM)$ için M ve $\widetilde{M}$ manifoldları $\{X, \varphi X\}$ ile belirlenen φ kesitsel eğriliğine sahip olsun. Bu durumda (3.1.12) denkleminden $B(X,X) = 0$ olur. Buradan $B = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Önerme 3.1.9. *$\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun bir invaryant altmanifoldu M ve $\alpha = 0$ olsun. B nin paralel olması için gerek ve yeter şart M nin total jeodezik olmasıdır.*

İspat. (2.2.10) denkleminde $Z = \xi_j$ alınıp (3.1.5) denklemi ve (2.5.6) denklemi kullanılırsa

$$(\nabla_X B)(Y, \xi_i) = -\alpha B(Y,X) + h_i \varphi B(Y,X)$$

elde edilir. Dolayısıyla $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için B paralel ise $B(Y,X) = 0$ olur. Tersine eğer $B = 0$ olursa bu durumda $\nabla B = 0$ olur. Böylece B nin paralel olduğu sonucuna varılır. Buradan ispat tamamlanır. □

Teorem 3.1.2. *$\widetilde{M}$, α-kosimplektik f-manifoldunun bir invaryant altmanifoldu M olsun. Eğer M, semiparalel alt manifold ise bu durumda*

(i) $\alpha = 0$ *durumunda M total jeodezik ve $\widetilde{M}$ bir hemen hemen Kaehler manifoldu $\widetilde{M}_1^{2n}$ ile değişmeli $\widetilde{M}_2^s$ Lie grubunun bir lokal aşikar çarpımıdır.*

(ii) $\alpha \neq 0$ *durumunda M altmanifoldu total jeodeziktir.*

İspat. $\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun bir invaryant altmanifoldu M olsun. $\forall X,Y,Z,U \in \Gamma(TM)$ için,

$$(\hat{R}(X,Y)B)(Z,U) = R^{\perp}(X,Y)B(Z,U) - B(R(X,Y)Z,U) - B(Z,R(X,Y)U) \quad (3.1.13)$$

denklemi geçerlidir. M invaryant altmanifoldu semiparalel olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için $\hat{R}(X,Y)B = 0$ eşitliği yazılır. (3.1.13) denkleminden,

$$R^{\perp}(X,Y)B(Z,U) - B(R(X,Y)Z,U) - B(Z,R(X,Y)U) = 0 \quad (3.1.14)$$

elde edilir. (3.1.14) denkleminde $X=\xi_i$ ve $U=\xi_j$ alınırsa

$$R^{\perp}(\xi_i,Y)B(Z,\xi_j)-B(R(\xi_i,Y)Z,\xi_j)-B(Z,R(\xi_i,Y)\xi_j)=0 \tag{3.1.15}$$

bulunur. (3.1.5) denklemi (3.1.15) denkleminde yerine yazılarak

$$B(Z,R(\xi_i,Y)\xi_j)=0 \tag{3.1.16}$$

denklemi elde edilir. Son denklemden $\alpha^2 B(Z,Y)=0$ bulunur. Buradan $\alpha=0$ veya $B=0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

3.2 Hemen Hemen α-Kosimplektik f-Manifoldların Yarı-İnvaryant Altmanifoldları

Bu bölümde hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların yarı-invaryant altmanifoldları tanımlanıp örnek verilmiştir. Ayrıca hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların yarı-invaryant altmanifoldları için bazı sonuçlar elde edilip distribüsyonların integrallenebilirliği incelenmiştir.

Tanım 3.2.1. $\widetilde{M}$, $(2n+s)$-boyutlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifold ve M de $\widetilde{M}$ nın bir altmanifoldu olsun. Eğer M de diferensiyellenebilir distribüsyonların bir $(D,D^{\perp})$ ortogonal çifti için aşağıdaki şartlar varsa M ye $\widetilde{M}$ nın **yarı-invaryant altmanifoldu** denir[6].

(i) $TM=D\oplus D^{\perp}\oplus Sp\{\xi_1,...,\xi_s\}$,

(ii) D distribüsyonu, φ ye göre invaryanttır, yani $\forall x\in M$ için $\varphi D_x=D_X$ dır.

(iii) $D^{\perp}$ distribüsyonu φ ye göre anti-invaryanttır, yani $\forall x\in M$ için $\varphi D_x^{\perp}\subset T_xM^{\perp}$ dır.

Bir M yarı-invaryant altmanifoldda $\forall x\in M$ için eğer $D_x^{\perp}=0$ ise M ye invaryant altmanifold, $D_x=0$ ise M ye anti-invaryant altmanifold denir. Eğer yarı-invaryant altmanifoldu ne invaryant ne de anti-invaryant ise M ye **has yarı-invaryant altmanifold** denir.

$\widetilde{M}$ bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold ve M de $\widetilde{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. TM nin D ve $D^{\perp}$ distribüsyonlarının projeksiyonlarını sırasıyla P ve Q ile gösteririz. Bu durumda $\forall X \in \Gamma(TM)$, $\forall N \in \Gamma(TM^{\perp})$ için,

$$X = PX + QX + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(X)\xi_i \tag{3.2.1}$$

$$\varphi N = CN + DN \tag{3.2.2}$$

ve

$$h_i X = t_i X + f_i X \tag{3.2.3}$$

yazabiliriz. Burada CN ve DN sırasıyla φN nin teğet ve normal bileşenleridir. $t_i X$ ve $f_i X$ de sırasıyla $h_i X$ in teğet ve normal bileşenlerini göstermektedir.

Şimdi hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların yarı-invaryant altmanifoldları için bir örnek verelim.

Örnek 3.2.1. R^{2n+s} nin standart koordinatlarını $(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n,z_1,...,z_s)$ ve

$$\widetilde{M} = \{(x_1,...,x_n,y_1,...,y_n,z_1,...,z_s) | z_1,...,z_s \neq 0, \ \ n \in N, n \geq 1\}$$

tarafından tanımlanan $(2n+s)$-boyutlu $\widetilde{M} \subset R^{2n+s}$ manifoldunu alalım. $\widetilde{M}$ nin bir global bazı olarak

$$X_i = e^{\sum_{i=1}^{n} z_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad \xi_j = \frac{\partial}{\partial z_j}, \ \ i = 1,...,n, \ \ j = 1,...,s.$$

vektör alanlarını alalım. Bu vektör alanlarının Lie braketleri $\forall i,k \in \{1,...,n\}$ ve $j \in \{1,...,s\}$ için

$$[\xi_j, X_i] = e^{\sum_{i=1}^{n} z_i} \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad [\xi_j, Y_i] = [X_k, X_i] = [X_i, Y_k] = [Y_i, Y_k] = 0$$

şeklindedir. Eğer

$$\eta^j = dz_j, \qquad g = \sum_{i=1}^{n} [e^{-2(z_1+...+z_s)} dx_i^2 + dy_i^2] + \sum_{j=1}^{s} dz_j^2,$$

$$\varphi(\xi_j) = 0, \qquad \varphi(\frac{\partial}{\partial x_i}) = e^{-(z_1+...+z_s)} \frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad \varphi(\frac{\partial}{\partial y_i}) = -e^{(z_1+...+z_s)} \frac{\partial}{\partial x_i}$$

olarak alınırsa, $\widetilde{M}$ üzerinde (φ,ξ_i,η^i,g) hemen hemen değme metrik f-yapısının sağlandığı görülür. Buradan da $(\widetilde{M},\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olduğu görülür. Üstelik, $\eta^j = dz_j$ ise $d\eta^j = d^2z_j = 0$ dır. Poinkare metriğinden $d\eta^j = 0$ olduğu bulunur. Şimdi $d\Phi = 2\alpha\bar{\eta}\wedge\Phi$ koşulunu sağlayalım. $\Phi_{ii} = g(\frac{\partial}{\partial x_i},\varphi\frac{\partial}{\partial y_i}) = -e^{-(z_1+...+z_s)}$ dışındaki tüm Φ_{ij} ler sıfırdır, bu nedenle

$$\Phi = -\frac{1}{e^{(z_1+...+z_s)}}\sum_{i=1}^{n} dx_i\wedge dy_i$$

olur. Φ nin $d\Phi$ dış türevi,

$$d\Phi = -e^{-(z_1+...+z_s)}\sum_{i=1}^{n} dx_i\wedge dy_i\wedge(dz_1+...+dz_s)$$
$$d\Phi = e^{-(z_1+...+z_s)}e^{(z_1+...+z_s)}\Phi\wedge(\eta^1+...+\eta^s)$$
$$d\Phi = \bar{\eta}\wedge\Phi = 2(\frac{1}{2})\bar{\eta}\wedge\Phi$$

elde edilir. O halde φ nin Nijenhuis torsiyon tensörünün sıfır olmaması nedeniyle, manifold hemen hemen $(\frac{1}{2})$-kosimplektik f-manifolddur.

Şimdi de $\widetilde{M}$ nın altmanifoldunun D ve $D^\perp$ distribüsyonları

$$D = Sp\{X_1,Y_1,X_2,Y_2,...,X_m,Y_m\}$$

ve

$$D^\perp = Sp\{X_{m+1},...,X_{m+p}\}(m<n)$$

olarak tanımlansın. $TM = D\oplus D^\perp\oplus Sp\{\xi_1,...,\xi_s\}$, $boyM = 2m+p+s$ olduğu açıktır. $TM^\perp$ vektör alanı

$$TM^\perp = \{Y_{m+1},...,Y_{m+p},Y_{m+p+1},...,Y_n,X_{m+p+1},...,X_n\}$$

olarak alınırsa $\varphi D = D$ ve $\varphi D^\perp \subset TM^\perp$ elde edilir. Sonuç olarak, M bir hemen hemen $(\frac{1}{2})$-kosimplektik f-manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu olur.

Şimdi $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ için,

$$u(X,Y) = \nabla_X\varphi PY - A_{\varphi QY}X \tag{3.2.4}$$

denklemini kullanarak aşağıdaki lemmayı ispatlayalım.

Lemma 3.2.1. *$\widetilde{M}$, integral altmanifoldları Kaehler liflere sahip hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,*

$$P(u(X,Y)) = \varphi P\nabla_X Y - \sum_{i=1}^{s}[\alpha\eta^i(Y)\varphi PX + \eta^i(Y)Pt_iX] \tag{3.2.5}$$

$$Q(u(X,Y)) = QCB(X,Y) - \sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)Qt_iX \tag{3.2.6}$$

$$\begin{aligned} B(X,\varphi PY) + \nabla^{\perp}_X\varphi QY &= \varphi Q\nabla_X Y + DB(X,Y) \\ &- \sum_{i=1}^{s}[\alpha\eta^i(Y)\varphi QX - \eta^i(Y)f_iX] \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

$$\begin{aligned} \eta^i(u(X,Y))\xi_i &= \sum_{i=1}^{s}[\alpha g(\varphi PX,Y)\xi_i + g(h_iX,Y)\xi_i] \\ &- \sum_{i,j=1}^{s}\eta^i(Y)\eta^j(t_iX)\xi_i \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

denklemleri geçerlidir.

İspat. $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3) denklemleri (2.5.7) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} (\widetilde{\nabla}_X\varphi)Y &= \sum_{i=1}^{s}[\alpha(g(\varphi PX,Y)\xi_i - \eta^i(Y)\varphi PX - \eta^i(Y)\varphi QX) \\ &+ g(h_iX,Y)\xi_i - \eta^i(Y)h_iX] \\ &= \sum_{i=1}^{s}[\alpha(g(\varphi PX,Y)\xi_i - \eta^i(Y)\varphi PX - \eta^i(Y)\varphi QX) + g(h_iX,Y)\xi_i \\ &- \eta^i(Y)Pt_iX - \eta^i(Y)Qt_iX - \eta^i(Y)\sum_{j=1}^{s}\eta^j(t_iX)\xi_j - \eta^i(Y)f_iX \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

elde edilir. Diğer taraftan (2.2.1) ve (2.2.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\widetilde{\nabla}_X\varphi)Y &= \widetilde{\nabla}_X\varphi Y - \varphi\widetilde{\nabla}_X Y \\ &= \widetilde{\nabla}_X\varphi PY + \widetilde{\nabla}_X\varphi QY - \varphi(\nabla_X Y + B(X,Y)) \\ &= \nabla_X\varphi PY + B(X,\varphi PY) - A_{\varphi QY}X + \nabla^{\perp}_X\varphi QY \\ &- \varphi P\nabla_X Y - \varphi Q\nabla_X Y - CB(X,Y) - DB(X,Y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\nabla}_X \varphi)Y = & P\nabla_X \varphi PY + Q\nabla_X \varphi PY + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(\nabla_X \varphi PY)\xi_i + B(X,\varphi PY) \\
& - PA_{\varphi QY}X - QA_{\varphi QY}X + \nabla_X^{\perp}\varphi QY - \sum_{i=1}^{s} \eta^i(A_{\varphi QY}X)\xi_i \\
& - \varphi P\nabla_X Y - \varphi Q\nabla_X Y - CB(X,Y) - DB(X,Y) \qquad (3.2.10)
\end{aligned}
$$

bulunur. (3.2.9) ve (3.2.10) denklemleri eşitlenip $D, D^{\perp}$, ξ_i ve $TM^{\perp}$' in vektör alanları dikkate alınıp (3.2.4) denklemi kullanılarak ispat tamamlanır. □

Lemma 3.2.2. *$\widetilde{M}$, integral altmanifoldları Kaehler liflere sahip hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(TM^{\perp})$ için,*

$$
\begin{aligned}
\varphi P(A_N X) + P(\nabla_X CN) &= P(A_{DN}X) && (3.2.11)\\
Q((C\nabla_X^{\perp}N) + A_{DN}X - \nabla_X CN) &= 0 && (3.2.12)\\
\eta(A_{DN}X - \nabla_X CN) &= \alpha g(X,CN) + g(h_i X,N)\xi_i && (3.2.13)\\
B(X,CN) + \varphi Q(A_N X) + \nabla_X^{\perp} DN &= D\nabla_X^{\perp} N && (3.2.14)
\end{aligned}
$$

denklemleri geçerlidir.

İspat. $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $N \in TM^{\perp}$ için (2.5.7) denkleminde $Y = N$ alınırsa

$$
(\widetilde{\nabla}_X \varphi)N = \sum_{i=1}^{s} [\alpha(g(\varphi X,N)\xi_i - \eta^i(N)\varphi X) + g(h_i X,N)\xi_i + \eta^i(N)h_i X]
$$

olur. Buradan (2.2.1), (2.2.2), (3.2.1) ve (3.2.2) denklemleri kullanılarak

$$
\widetilde{\nabla}_X \varphi N - \varphi \widetilde{\nabla}_X N = \sum_{i=1}^{s} [\alpha g(\varphi X,N)\xi_i + g(h_i X,N)\xi_i]
$$

$$
\nabla_X CN + B(X,CN) - A_{DN}X + \nabla_X^{\perp} DN + \varphi A_N X - \varphi \nabla_X^{\perp} N = \sum_{i=1}^{s} [\alpha g(\varphi X,N)\xi_i + g(h_i X,N)\xi_i]
$$

$$
\begin{aligned}
&= P\nabla_X CN + Q\nabla_X CN + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(\nabla_X CN)\xi_i + B(X,CN) - PA_{DN}X - QA_{DN}X - \sum_{i=1}^{s} (A_{DN}X)\xi_i \\
&+ \nabla_X^{\perp} DN + \varphi PA_N X + \varphi QA_N X - C\nabla_X^{\perp} N - D\nabla_X^{\perp} N \\
&= -\sum_{i=1}^{s} [\alpha g(X,CN)\xi_i + g(h_i X,N)\xi_i]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu son denklem $D, D^{\perp}, \xi_i$ ve $TM^{\perp}$ vektör alanlarına göre düzenlenirse ispat tamamlanmış olur. □

Lemma 3.2.3. *$\widetilde{M}$, hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda*

$$\nabla_X \xi_i = \alpha X - \varphi t_i X - C f_i X, \;\; B(X, \xi_i) = -D f_i X \;\; \forall X \in \Gamma(D) \tag{3.2.15}$$

$$\nabla_X \xi_i = \alpha X - \varphi t_i X - C f_i X, \;\; B(X, \xi_i) = -D f_i X \;\; \forall X \in \Gamma(D^{\perp}) \tag{3.2.16}$$

$$\nabla_{\xi_i} \xi_j = 0, \;\; B(\xi_i, \xi_j) = 0 \tag{3.2.17}$$

denklemleri geçerlidir.

İspat. $\forall X \in \Gamma(TM)$ için (2.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X \xi_i = \nabla_X \xi_i + B(X, \xi_i) &= -\alpha \varphi^2 X - \varphi h_i X \\
&= \alpha X - \alpha \sum_{i=1}^{s} \eta^i(X) \xi_i - \varphi h_i X \\
&= \alpha X - \alpha \sum_{i=1}^{s} \eta^i(X) \xi_i - \varphi t_i X - \varphi f_i X \\
&= \alpha X - \alpha \sum_{i=1}^{s} \eta^i(X) \xi_i - \varphi t_i X - C f_i X - D f_i X
\end{aligned} \tag{3.2.18}$$

elde edilir. (3.2.18) denkleminde gerekli sadeleştirmeler yapılırsa ispat tamamlanır. □

Lemma 3.2.4. *$\widetilde{M}$, integral altmanifoldları Kaehler liflere sahip hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için,*

$$A_{\varphi X} Y = A_{\varphi Y} X \tag{3.2.19}$$

dır.

İspat. $\forall X,Y \in \Gamma(D^{\perp})$ ve $Z \in \Gamma(TM)$ için (2.2.1) ve (2.2.3) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
g(A_{\varphi X}Y,Z) &= g(B(Y,Z),\varphi X) \\
&= g(\widetilde{\nabla}_Z Y,\varphi X) \\
&= -g(\varphi\widetilde{\nabla}_Z Y,X) \\
&= -g(\widetilde{\nabla}_Z \varphi Y - (\widetilde{\nabla}_Z \varphi)Y,X) \\
&= -g(\widetilde{\nabla}_Z \varphi Y,X) \\
&= g(\varphi Y,\widetilde{\nabla}_Z X) \\
&= g(\varphi Y,B(Z,X)) \\
&= g(A_{\varphi Y}X,Z)
\end{aligned}$$

olur. Buradan (3.2.19) elde edilir. □

Lemma 3.2.5. *$\widetilde{M}$, hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $i \in \{1,\ldots,s\}$ olmak üzere $\forall U \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma(D^{\perp})$ için,*

$$\nabla_{\xi_i}U \in \Gamma(D), \tag{3.2.20}$$

$$\nabla_{\xi_i}V \in \Gamma(D^{\perp}), \tag{3.2.21}$$

$$[U,\xi_i] \in \Gamma(D), \tag{3.2.22}$$

$$[V,\xi_i] \in \Gamma(D^{\perp}) \tag{3.2.23}$$

denklemleri geçerlidir.

İspat. $\forall U \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma(D^{\perp})$ için,

$$g(\nabla_{\xi_i}U,\xi_j) = \xi_i g(U,\xi_j) - g(U,\nabla_{\xi_i}\xi_j) = 0 \tag{3.2.24}$$

ve

$$\begin{aligned}
g(\nabla_{\xi_i}U,V) &= \xi_i g(U,V) - g(U,\nabla_{\xi_i}V) \\
&= g(\varphi^2 U,\nabla_{\xi_i}V)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_{\xi_i}U,V) &= -g(\varphi U,\varphi\nabla_{\xi_i}V) \\
&= -g(\varphi U,\nabla_{\xi_i}\varphi V) \\
&= g(\nabla_{\xi_i}\varphi U,\varphi V) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{3.2.25}
$$

olur. Böylece (3.2.24) ve (3.2.25) denklemlerinden (3.2.20) elde edilir. Benzer şekilde (3.2.21) denklemi de elde edilir. Diğer taraftan (3.2.15) ve (3.2.16) denklemlerini kullanarak

$$g([U,\xi_i],\xi_j) = g(\nabla_U\xi_i - \nabla_{\xi_i}U,\xi_j) = 0 \tag{3.2.26}$$

ve

$$g([U,\xi_i],V) = g(\nabla_U\xi_i,V) - g(\nabla_{\xi_i}U,V) = 0 \tag{3.2.27}$$

bulunur. (3.2.26) ve (3.2.27) denklemlerinden (3.2.22) denklemi elde edilir. Benzer şekilde (3.2.23) denklemi de elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Lemma 3.2.6. *$\widetilde{M}$, hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,*

$$g(X,t_iY) = g(t_iX,Y), \tag{3.2.28}$$

$$\varphi t_iX + t_i\varphi X + Cf_iX = 0, \tag{3.2.29}$$

$$Df_iX + f_i\varphi X = 0 \tag{3.2.30}$$

denklemleri geçerlidir.

İspat. h_i nin simetrikliği kullanılarak ve $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$
\begin{aligned}
g(X,h_iY) &= g(h_iX,Y) \\
g(X,t_iY + f_iY) &= g(t_iX,Y) + g(f_iX,Y) \\
g(X,t_iY) + g(X,f_iY) &= g(t_iX,Y) + g(f_iX,Y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (3.2.28) denklemi elde edilir. (2.5.4), (3.2.2) ve (3.2.3) denklemleri kullanılırsa

$$\varphi t_i X + t_i \varphi X + C f_i X + D f_i X + f_i \varphi X = 0 \tag{3.2.31}$$

denklemi elde edilir. (3.2.31) denkleminin teğet ve normal bileşenleri karşılaştırılırsa (3.2.30) ve (3.2.31) denklemleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Şimdi yukarıdaki lemmayı kullanarak aşağıdaki teoremi ispatlayalım.

Teorem 3.2.1. *$\widetilde{M}$, hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda D distribüsyonu integrallenemez.*

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma(D)$ için (3.2.15) ve (3.2.29) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
g([X,Y],\xi_i) &= g(\nabla_X Y, \xi_i) - g(\nabla_Y X, \xi_i) \\
&= -g(Y, \nabla_X \xi_i) + g(X, \nabla_Y \xi_i) \\
&= -g(Y, \alpha X - \varphi t_i X - C f_i X) + g(X, \alpha Y - \varphi t_i Y - C f_i Y) \\
&= g(Y, \varphi t_i X) + g(Y, C f_i X) - g(X, \varphi t_i Y) - g(X, C f_i Y) \\
&= g(Y, \varphi t_i X + C f_i X) - g(X, \varphi t_i Y + C f_i Y) \\
&= -g(Y, t_i \varphi X) + g(X, t_i \varphi Y) \\
&= -g(t_i Y, \varphi X) + g(t_i X, \varphi Y) \\
&= -g(Y, t_i \varphi X) - g(\varphi t_i X, Y) \\
&= -g(Y, t_i \varphi X + \varphi t_i X) \\
&= g(Y, C f_i X) \neq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan D distribüsyonun integrallenemediği açık bir şekilde görülür. □

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 3.2.1. $\widetilde{M}$, hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $D \oplus D^{\perp}$ distribüsyonu integrallenemez.

Teorem 3.2.2. *$\widetilde{M}$, integral altmanifoldları Kaehler liflere sahip hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $D \oplus Sp\{\xi_1, ..., \xi_s\}$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart*

$$B(X, \varphi Y) = B(\varphi X, Y) \tag{3.2.32}$$

dır.

İspat. $\forall X, Y \in D \oplus Sp\{\xi_1, ..., \xi_s\}$ için, (3.2.7) denklemi kullanılırsa

$$B(X, \varphi PY) = \varphi Q \nabla_X Y + DB(X, Y) \tag{3.2.33}$$

elde edilir. (3.2.33) denkleminde X ile Y vektör alanlarının yerleri değiştirilirse

$$B(Y, \varphi PX) = \varphi Q \nabla_Y X + DB(Y, X) \tag{3.2.34}$$

bulunur. (3.2.33) ve (3.2.34) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$B(X, \varphi PY) - B(Y, \varphi PX) = \varphi Q[X, Y] = 0$$

sonucu elde edilir. Buradan ispat tamamlanır. □

Teorem 3.2.3. *$\widetilde{M}$, integral altmanifoldları Kaehler liflere sahip hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $D^{\perp}$ distribüsyonu integrallenebilirdir.*

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için (3.2.4) denklemi kullanılırsa

$$U(X, Y) = -A_{\varphi QY} X \tag{3.2.35}$$

elde edilir. (3.2.5) denklemine φ uygulanır (3.2.35) denklemi yerine yazılırsa

$$-\varphi P(A_{\varphi QY} X) = \varphi^2 P \nabla_X Y = -P \nabla_X Y + \sum_{i=1}^{s} \eta^i (P \nabla_X Y) \xi_i \tag{3.2.36}$$

bulunur. Buradan

$$P \nabla_X Y = \varphi P(A_{\varphi QY} X) \tag{3.2.37}$$

elde edilir. (3.2.36) denkleminde X ile Y nin yerleri değiştirilerek

$$P\nabla_Y X = \varphi P(A_{\varphi QX} Y) \tag{3.2.38}$$

bulunur. (3.2.37) ve (3.2.38) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\varphi P(A_{\varphi Y} X - A_{\varphi X} Y) = P[X,Y] \tag{3.2.39}$$

olur. (3.2.19) denklemi (3.2.39) denkleminde kullanılırsa $P([X,Y]) = 0$ elde edilir. Buradan da $[X,Y] \in \Gamma(D^{\perp})$ olduğu sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Tanım 3.2.2. Bir $\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldun M yarı-invaryant altmanifoldunun ikinci temel formu B olsun. Eğer $\forall X \in D$ ve $Y \in D^{\perp}$ için $B(X,Y) = 0$ ise M ye **karışık total jeodezik altmanifold** denir[6].

Teorem 3.2.4. *$\widetilde{M}$, hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. $\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldun karışık total altmanifoldunun M olması için gerek ve yeter şart*

$$A_V X \in \Gamma(D) \ (\forall X \in \Gamma(D),\ V \in \Gamma(TM)^{\perp}) \tag{3.2.40}$$

ve

$$A_V X \in \Gamma(D)^{\perp} \ (\forall X \in \Gamma(D)^{\perp},\ V \in \Gamma(TM)^{\perp}) \tag{3.2.41}$$

dır.

İspat. $\forall X \in \Gamma(D), V \in \Gamma(TM^{\perp})$ ve $Y \in \Gamma(D^{\perp})$ olsun. (2.2.3) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(B(X,Y),V) &= g(A_V X,Y) \\ &= 0 \Leftrightarrow A_V X \in \Gamma(D). \end{aligned}$$

Diğer taraftan $A_V X \in \Gamma(D)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} g(A_V X,V) &= g(B(X,Y),V) \\ &= 0 \Leftrightarrow B(X,Y) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (3.2.40) ispatlanmış olur. Benzer şekilde (3.2.41) denklemi de gösterilebilir. □

4. HEMEN HEMEN α-KOSİMPLEKTİK f-MANİFOLDLAR ÜZERİNDE ÇEYREK-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYON

Bu bölümde, hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldlar üzerinde çeyrek-simetrik metrik konneksiyon tanımlanmaktadır. Çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun eğrilik tensörü ve Ricci tensörü ile skaler eğriliği elde edilmiştir. Ayrıca çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre genelleştirilmiş rekürent ve φ-rekürent hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldlarının var olmadığı gösterilmiştir.

4.1 Hemen Hemen α-Kosimplektik f-Manifoldlar Üzerinde Çeyrek-Simetrik Metrik Konneksiyon

Tanım 4.1.1. M bir Riemann manifold olsun. Eğer M nin $\overline{\nabla}$ lineer konneksiyonuna ait

$$T(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X - [X,Y] \tag{4.1.1}$$

biçiminde tanımlı torsiyon tensörü $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için,

$$T(X,Y) = \bar{\eta}(Y)\varphi X - \bar{\eta}(X)\varphi Y; \qquad \bar{\eta} = \eta_1 + ... + \eta_s \tag{4.1.2}$$

şartını sağlıyor ise $\overline{\nabla}$ ya **çeyrek-simetrik konneksiyon** adı verilir. Burada $\bar{\eta}$ diferensiyellenebilir bir 1-form ve φ $(1,1)$-tipinde bir tensör alanıdır[22].

Eğer M Riemann manifoldu üzerinde g Riemann metriğine göre $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$$(\overline{\nabla}_X g)(Y,Z) = 0 \tag{4.1.3}$$

şartı sağlanıyor ise $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna **çeyrek-simetrik metrik konneksiyon** denir[46].

$M,(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldu olsun. ∇ ve $\overline{\nabla}$ sırası ile M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu ve çeyrek-simetrik metrik konneksiyonu göstermek üzere, ∇ ile $\overline{\nabla}$ arasındaki bağıntı $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D(X,Y) \tag{4.1.4}$$

denklemi yardımı ile verilir[46].

Burada $D, (1,1)$-tipindeki tensör alanı M üzerindeki $\overline{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$D(X,Y) = \frac{1}{2}[T(X,Y) + T'(X,Y) + T'(Y,X)] \tag{4.1.5}$$

biçiminde tanımlı olup, $(1,1)$-tipindeki T' tensör alanı ise

$$g(T'(X,Y),Z) = g(T(Z,X),Y) \tag{4.1.6}$$

denklemi yardımı ile verilir[46].

Tanım 4.1.2. (M,g) n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde bir U tanjant vektör alanını, $A \neq 0$ 1-formu yardımı ile

$$g(X,U) = A(X)$$

biçiminde tanımlayalım. $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için M nin eğrilik tensörü R,

$$\varphi^2((\nabla_X R)(Y,Z)W) = A(X)R(Y,Z)W \tag{4.1.7}$$

şartını sağlıyorsa M ye **φ-rekürent** adı verilir.

Önerme 4.1.1. *$(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold M üzerinde ∇ Levi-Civita konneksiyonu ile $\overline{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik konneksiyon arasındaki bağıntı,*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \bar{\eta}(X)\varphi Y \tag{4.1.8}$$

biçimindedir[45].

İspat. $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldu üzerinde $\overline{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik konneksiyona ait (4.1.2) denklemi ile verilen torsiyon tensörü (4.1.6) denklemi ile kullanıldığında

$$\begin{aligned} g(T'(X,Y),Z) &= g(\bar{\eta}(X)\varphi Z - \bar{\eta}(Z)\varphi X, Y) \\ &= \bar{\eta}(X)g(\varphi Z,Y) - \bar{\eta}(Z)g(\varphi X,Y) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan da $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$T'(X,Y) = g(X,\varphi Y)\bar{\xi} - \bar{\eta}(X)\varphi Y \tag{4.1.9}$$

elde edilir. (4.1.2), (4.1.9) denklemleri (4.1.5) denkleminde yerine yazıldığında ve φ tensör alanının anti-simetrik özelliği kullanıldığında

$$\begin{aligned} D(X,Y) &= \frac{1}{2}[\bar{\eta}(Y)\varphi X - \bar{\eta}(X)\varphi Y + g(\varphi Y, X)\bar{\xi} \\ &\quad - \bar{\eta}(X)\varphi Y + g(\varphi X, Y)\bar{\xi} - \bar{\eta}(Y)\varphi X] \\ &= -\bar{\eta}(X)\varphi Y \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da son denklem (4.1.4) denkleminde yerine yazıldığında $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \bar{\eta}(X)\varphi Y$$

olur. $\square$

(4.1.8) denkleminde $Y = \xi_j$ alındığında bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold üzerinde

$$\overline{\nabla}_X \xi_j = \nabla_X \xi_j - \bar{\eta}(X)\varphi \xi_j$$

olur. Buradan da

$$\overline{\nabla}_X \xi_j = \nabla_X \xi_j \tag{4.1.10}$$

elde edilir.

Önerme 4.1.2. *$(2n+s)$-boyutlu bir M hemen hemen α-kosimplektik f-manifold üzerinde ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre eğrilik tensörü R ve $\overline{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre eğrilik tensörü $\overline{R}$ olmak üzere, R ve $\overline{R}$ arasındaki bağıntı*

$$\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \bar{\eta}(X)(\nabla_Y \varphi)Z - \bar{\eta}(Y)(\nabla_X \varphi)Z \tag{4.1.11}$$

şeklindedir.

İspat. $\overline{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre eğrilik tensörü $\overline{R}$ olmak üzere, $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için,

$$\overline{R}(X,Y)Z = \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z \tag{4.1.12}$$

dır. (4.1.12) denkleminde (4.1.8) denklemini kullanıp (4.1.12) denkleminin sağ tarafını ayrı ayrı hesaplarsak,

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z &= \overline{\nabla}_X (\nabla_Y Z - \bar{\eta}(Y)\varphi Z) \\ &= \overline{\nabla}_X (\nabla_Y Z) - \overline{\nabla}_X (\bar{\eta}(Y)\varphi Z) \\ &= \nabla_X (\nabla_Y Z) - \bar{\eta}(X)\varphi \nabla_Y Z - \nabla_X (\bar{\eta}(Y)\varphi Z) + \bar{\eta}(X)\bar{\eta}(Y)\varphi^2 Z \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

olur. (4.1.13) denkleminde (2.5.6) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_X (\bar{\eta}(Y)\varphi Z) &= \bar{\eta}(Y)\nabla_X \varphi Z + (\nabla_X \bar{\eta}(Y))\varphi Z \\ &= \bar{\eta}(Y)\nabla_X \varphi Z + (\nabla_X (\sum_{i=1}^{s} g(\xi_i, Y)))\varphi Z \\ &= \bar{\eta}(Y)\nabla_X \varphi Z + (\sum_{i=1}^{s} (g(\nabla_X \xi_i, Y) + g(\nabla_X Y, \xi_i))\varphi Z) \\ &= \bar{\eta}(Y)\nabla_X \varphi Z + \sum_{i=1}^{s} g(\nabla_X \xi_i, Y)\varphi Z + \sum_{i=1}^{s} g(\xi_i, \nabla_X Y)\varphi Z \\ &= \bar{\eta}(Y)\nabla_X \varphi Z + \sum_{i=1}^{s} g(-\alpha\varphi^2 X - \varphi h_i X, Y)\varphi Z + \bar{\eta}(\nabla_X Y)\varphi Z \\ &= \bar{\eta}(Y)\nabla_X \varphi Z + \sum_{i=1}^{s} (g(-\alpha\varphi^2 X, Y)\varphi Z + g(-\varphi h_i X, Y)\varphi Z) + \bar{\eta}(\nabla_X Y)\varphi Z \\ &= \bar{\eta}(Y)\nabla_X \varphi Z + \alpha s.g(\varphi X, \varphi Y)\varphi Z - \sum_{i=1}^{s} g(\varphi h_i X, Y)\varphi Z + \bar{\eta}(\nabla_X Y)\varphi Z \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

elde edilir. (4.1.14) denklemi (4.1.13) denkleminde yazılırsa,

$$\begin{aligned} \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z = {} & \nabla_X (\nabla_Y Z) - \bar{\eta}(X)\varphi \nabla_Y Z - \bar{\eta}(Y)\nabla_X \varphi Z - \alpha s.g(\varphi X, \varphi Y)\varphi Z \\ & + \sum_{i=1}^{s} g(\varphi h_i X, Y)\varphi Z - \bar{\eta}(\nabla_X Y)\varphi Z + \bar{\eta}(X)\bar{\eta}(Y)\varphi^2 Z \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.1.15) denkleminde X ile Y nin yerleri değiştirilirse

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_Y\overline{\nabla}_X Z &= \nabla_Y(\nabla_X Z) - \bar{\eta}(Y)\varphi\nabla_X Z - \bar{\eta}(X)\nabla_Y\varphi Z - \alpha s.g(\varphi Y,\varphi X)\varphi Z \\ &+ \sum_{i=1}^{s} g(\varphi h_i Y, X)\varphi Z - \bar{\eta}(\nabla_Y X)\varphi Z + \bar{\eta}(Y)\bar{\eta}(X)\varphi^2 Z \end{aligned} \tag{4.1.16}$$

olur. Son olarak,

$$\overline{\nabla}_{[X,Y]}Z = \nabla_{[X,Y]}Z - \bar{\eta}([X,Y])\varphi Z \tag{4.1.17}$$

bulunur. (4.1.15), (4.1.16) ve (4.1.17) denklemleri (4.1.12) denkleminde yerine yazılıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (4.1.11) denklemi elde edilir. □

Sonuç 4.1.1. M, integral altmanifoldları Kaehler liflere sahip çeyrek-simetrik metrik konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. Bu durumda,

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + \alpha\bar{\eta}(X)[g(\varphi Y,Z)\bar{\xi} - \bar{\eta}(Z)\varphi Y] - \alpha\bar{\eta}(Y)[g(\varphi X,Z)\bar{\xi} - \bar{\eta}(Z)\varphi X] \\ &+ \bar{\eta}(X)\sum_{i=1}^{s}(g(h_i Y,Z)\xi_i - \eta^i(Z)h_i Y) - \bar{\eta}(Y)\sum_{i=1}^{s}(g(h_i X,Z)\xi_i - \eta^i(Z)h_i X)\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

dır.

Önerme 4.1.3. *$(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold M üzerinde ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre eğrilik tensörü R ve $\overline{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre eğrilik tensörü $\overline{R}$ olmak üzere, $\forall X,Y \in \chi(M)$ ve $i,j \in \{1,...,s\}$ için,*

$$\overline{R}(X,Y)\xi_i = R(X,Y)\xi_i + \alpha[\bar{\eta}(Y)\varphi X - \bar{\eta}(X)\varphi Y] + \bar{\eta}(Y)h_i X - \bar{\eta}(X)h_i Y \tag{4.1.19}$$

$$\overline{R}(X,\xi_i)Y = R(X,\xi_i)Y - (\nabla_X\varphi)Y \tag{4.1.20}$$

$$\overline{R}(\xi_i,X)\xi_j = R(\xi_i,X)\xi_j - \alpha\varphi X - h_j X \tag{4.1.21}$$

dır.

İspat. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için (4.1.11) denkleminde $Z = \xi_i$ alındığında ve (2.5.6) denklemi yardımıyla

$$
\begin{aligned}
\overline{R}(X,Y)\xi_i &= R(X,Y)\xi_i + \bar{\eta}(X)(\nabla_Y\varphi)\xi_i - \bar{\eta}(Y)(\nabla_X\varphi)\xi_i \\
&= R(X,Y)\xi_i + \bar{\eta}(X)(-\varphi\nabla_Y\xi_i) + \bar{\eta}(Y)(\varphi\nabla_X\xi_i) \\
&= R(X,Y)\xi_i + \bar{\eta}(X)[-\varphi(-\alpha\varphi^2 Y - \varphi h_i Y)] + \bar{\eta}(Y)[\varphi(-\alpha\varphi^2 X - \varphi h_i X)] \\
&= R(X,Y)\xi_i + \bar{\eta}(X)(\alpha\varphi^3 Y + \varphi^2 h_i Y) + \bar{\eta}(Y)(-\alpha\varphi^3 X - \varphi^2 h_i X) \\
&= R(X,Y)\xi_i + \bar{\eta}(X)(-\alpha\varphi Y - h_i Y) + \bar{\eta}(Y)(\alpha\varphi X + h_i X)
\end{aligned}
$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.1.19) denklemi elde edilir. Benzer şekilde (4.1.11) denkleminde $Y = \xi_i$ ve $Z = Y$ alınırsa,

$$
\overline{R}(X,\xi_i)Y = R(X,\xi_i)Y + \bar{\eta}(X)(\nabla_{\xi_i}\varphi)Y - \bar{\eta}(\xi_i)(\nabla_X\varphi)Y
$$

bulunur. Gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.1.20) denklemi elde edilir. Benzer şekilde (4.1.11) denklemi kullanılır ve $X = \xi_i$, $Y = X$, $Z = \xi_j$ alınırsa,

$$
\begin{aligned}
\overline{R}(\xi_i,X)\xi_j &= R(\xi_i,X)\xi_j + \bar{\eta}(\xi_i)(\nabla_X\varphi)\xi_j - \bar{\eta}(X)(\nabla_{\xi_i}\varphi)\xi_j \\
&= R(\xi_i,X)\xi_j - \varphi\nabla_X\xi_j \\
&= R(\xi_i,X)\xi_j - \varphi(-\alpha\varphi^2 X - \varphi h_j X) \\
&= R(\xi_i,X)\xi_j + \alpha\varphi^3 X + \varphi^2 h_j X \\
&= R(\xi_i,X)\xi_j - \alpha\varphi X - h_j X
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Sonuç 4.1.2. M, integral altmanifoldları Kaehler liflere sahip çeyrek-simetrik metrik konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
\overline{R}(X,\xi_i)Y = R(X,\xi_i)Y - \sum_{i=1}^{s}\{&\alpha\left(g(\varphi X,Y)\xi_i - \eta^i(Y)\varphi X\right) \\
&+ g(h_i X,Y)\xi_i - \eta^i(Y)h_i X\}
\end{aligned} \tag{4.1.22}
$$

denklemi geçerlidir.

Önerme 4.1.4. *$(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold M üzerinde $\overline{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre Ricci eğrilik tensörü ve skaler eğriliği sırasıyla $\overline{S}$ ve $\bar{r}$ olmak üzere*

$$\overline{S}(Y,Z) = S(Y,Z) + \sum_{i=1}^{s} g((\nabla_Y \varphi)Z, \xi_i) - \bar{\eta}(Y)(div\varphi)Z \tag{4.1.23}$$

ve

$$\bar{r} = r \tag{4.1.24}$$

dır.

İspat. (4.1.11) denkleminin her iki tarafı $W \in \chi(M)$ ile çarpıma alındığında

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + \overline{\eta}(X)g((\nabla_Y \varphi)Z, W) \\ - \overline{\eta}(Y)g((\nabla_X \varphi)Z, W)\end{aligned} \tag{4.1.25}$$

yazılabilir. $\{E_1, ..., E_n, \varphi E_1, ..., \varphi E_n, \xi_1, ..., \xi_s\}$, M nin ortonormal bazı olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}\overline{S}(Y,Z) &= \sum_{i=1}^{2n+s} g(\overline{R}(E_i,Y)Z, E_i) \\ &= \sum_{i=1}^{2n+s} \{g(R(E_i,Y)Z, E_i) + \bar{\eta}(E_i)g((\nabla_Y \varphi)Z, E_i) - \bar{\eta}(Y)g((\nabla_{E_i}\varphi)Z, E_i)\}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\overline{S}(Y,Z) = S(Y,Z) + \sum_{i=1}^{s} g((\nabla_Y \varphi)Z, \xi_i) - \bar{\eta}(Y) \sum_{i=1}^{2n+s} g((\nabla_{E_i}\varphi)Z, E_i) \tag{4.1.26}$$

$$\overline{S}(Y,Z) = S(Y,Z) + \sum_{i=1}^{s} g((\nabla_Y \varphi)Z, \xi_i) - \bar{\eta}(Y)(div\varphi)Z \tag{4.1.27}$$

dır. (4.1.27) denkleminde de Y ve Z vektör alanlarına göre kontraksiyon alınır ve (2.5.5) denklemi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\overline{r} = \sum_{j=1}^{2n+s} \overline{S}(E_j,E_j) &= \sum_{j=1}^{2n+s} S(E_j,E_j) + \sum_{j=1}^{2n+s} \{\sum_{i=1}^{s} g((\nabla_{E_j}\varphi)E_j,\xi_i)\} - \sum_{j=1}^{2n+s} \bar{\eta}(E_j) div\varphi E_j \\
&= r + \sum_{j=1}^{2n+s} \{\sum_{i=1}^{s} g(\nabla_{E_j}\varphi E_j,\xi_i)\} - \sum_{j=1}^{2n+s} \bar{\eta}(E_j)(div\varphi)E_j \\
&= r + \sum_{j=1}^{2n+s} \{\sum_{i=1}^{s} g(\nabla_{E_j}\varphi E_j,\xi_i)\} \\
&= r - \sum_{j=1}^{2n+s} \{\sum_{i=1}^{s} g(\varphi E_j,\nabla_{E_j}\xi_i)\}
\end{aligned}
$$

olur. Gerekli işlemler yapılırsa

$$\overline{r} = r$$

bulunur. Buradan ispat tamamlanır. □

Böylece, yukarıdaki önermeden aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.1.3. M, integral altmanifoldları Kaehler liflere sahip bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. Eğer M çeyrek-simetrik metrik konneksiyona sahipse bu durumda, $\forall Y, Z \in \chi(TM)$ için

$$\overline{S}(Y,Z) = S(Y,Z) + \alpha s.g(\varphi Y,Z) + \sum_{i=1}^{s} g(h_i Y,Z) \tag{4.1.28}$$

ve

$$\overline{r} = r \tag{4.1.29}$$

dır.

İspat. (4.1.26) denkleminde (2.5.7) denklemi yazılırsa

$$
\begin{aligned}
\overline{S}(Y,Z) = S(Y,Z) &+ \sum_{i=1}^{s} g(\sum_{j=1}^{s} (\alpha(g(\varphi Y,Z)\xi_j - \eta^j(Z)\varphi Y) + g(h_j Y,Z)\xi_j - \eta^j(Z)h_j Y),\xi_i) \\
&- \bar{\eta}(Y) \sum_{\gamma=1}^{2n+s} g(\sum_{j=1}^{s} (\alpha(g(\varphi E_\gamma,Z)\xi_j - \eta^j(Z)\varphi E_\gamma) + g(h_j E_\gamma,Z)\xi_j - \eta^j(Z)h_j E_\gamma),E_\gamma) \\
&= S(Y,Z) + \alpha s g(\varphi Y,Z) + \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=1}^{s} g(h_j Y,Z)g(\xi_j,\xi_i) + \bar{\eta}(Y) \sum_{i=1}^{2n+s}\sum_{j=1}^{s} \eta^j(Z)g(h_j E_i,E_i)
\end{aligned}
$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (4.1.28) elde edilir. (4.1.28) denkleminde Y ve Z vektör alanları üzerinden kontraksiyon uygulanırsa (4.1.29) denklemi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Önerme 4.1.5. *M, $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. M üzerinde $\overline{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için;*

(i) $\overline{R}(X,Y,Z,W)+\overline{R}(X,Y,W,Z)=0$

(ii) $\overline{R}(X,Y,Z,W)+\overline{R}(Y,X,Z,W)=0$

dır.

İspat. $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold M üzerinde ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre eğrilik tensörü R ve $\overline{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre eğrilik tensörü $\overline{R}$ olmak üzere, $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için,

$$\overline{R}(X,Y,Z,W)=R(X,Y,Z,W)+\bar{\eta}(X)g((\nabla_Y\varphi)Z,W)-\bar{\eta}(Y)g((\nabla_X\varphi)Z,W) \quad (4.1.30)$$

dır. Ayrıca (4.1.30) denkleminde W ile Z vektör alanlarının yerleri değiştirildiğinde

$$\overline{R}(X,Y,W,Z)=R(X,Y,W,Z)+\bar{\eta}(X)g((\nabla_Y\varphi)W,Z)-\bar{\eta}(Y)g((\nabla_X\varphi)W,Z) \quad (4.1.31)$$

elde edilir. (4.1.30) ile (4.1.31) denklemleri taraf tarafa toplandığında

$$\begin{aligned}\overline{R}(X,Y,Z,W)+\overline{R}(X,Y,W,Z) &= R(X,Y,Z,W)+R(X,Y,W,Z)\\ &\quad+\bar{\eta}(X)\{(g(\nabla_Y\varphi)Z,W)+(g(\nabla_Y\varphi)W,Z)\}\\ &\quad-\bar{\eta}(Y)\{(g(\nabla_X\varphi)Z,W)+g((\nabla_X\varphi)W,Z)\} \qquad (4.1.32)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (2.5.2) denklemi kullanılırsa

$$2g((\nabla_Y\varphi)Z,W)+2g((\nabla_Y\varphi)W,Z)=2\alpha g(\sum_{j=1}^{s}(g(\varphi Y,Z)\xi_j-\eta^j(Z)\varphi(Y)),W)$$
$$+g(N(Z,W),\varphi Y)+2\alpha g(\sum_{j=1}^{s}g(\varphi Y,W)\xi_j-\eta^j(W)\varphi Y,Z)+g(N(W,Z),\varphi Y)$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\alpha\sum_{j=1}^{s} g(\varphi Y,Z)\eta^j(W) - 2\alpha\sum_{j=1}^{s} g(\varphi Y,W)\eta^j(Z) + g(N(Z,W),\varphi Y)\\
&+ 2\alpha\sum_{j=1}^{s} g(\varphi Y,W)\eta^j(Z) - 2\alpha g(\varphi Y,Z)\eta^j(W) + g(N(W,Z),\varphi Y)\\
&= g(N(Z,W),\varphi Y) + g(N(W,Z),\varphi Y)\\
&= g(N(Z,W)+N(W,Z),\varphi Y) = 0 \qquad (4.1.33)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
2g((\nabla_X\varphi)Z,W) + 2g((\nabla_X\varphi)W,Z) &= 2\alpha g(\sum_{j=1}^{s}(g(\varphi X,Z)\xi_j - \eta^j(Z)\varphi(Y)),W) + g(N(Z,W),\varphi X)\\
&+ 2\alpha g(\sum_{j=}^{s} g(\varphi X,W)\xi_j - \eta^j(W)\varphi X,Z) + g(N(W,Z),\varphi X)\\
&= 0 \qquad (4.1.34)
\end{aligned}
$$

olur. (4.1.33) ve (4.1.34) denklemleri (4.1.32) denkleminde yazılırsa

$$\overline{R}(X,Y,Z,W) + \overline{R}(X,Y,W,Z) = R(X,Y,Z,W) + R(X,Y,W,Z)$$

bulunur. ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre R eğrilik tensörünün özellikleri kullanılırsa

$$\overline{R}(X,Y,Z,W) + \overline{R}(X,Y,W,Z) = 0$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.1.30) denkleminde $Y = X$ olarak alındığında

$$\overline{R}(Y,X,Z,W) = R(Y,X,Z,W) + \bar{\eta}(Y)g((\nabla_X\varphi)Z,W) - \bar{\eta}(X)g((\nabla_Y\varphi)Z,W) \qquad (4.1.35)$$

yazılır. (4.1.30) ve (4.1.35) denklemleri taraf tarafa toplandığında

$$\overline{R}(X,Y,Z,W) + \overline{R}(Y,X,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + R(Y,X,Z,W) = 0$$

olur. Buradan da ∇ Levi-Civita konneksiyonuna göre R eğrilik tensörünün özellikleri kullanılırsa

$$\overline{R}(X,Y,Z,W) + \overline{R}(Y,X,Z,W) = 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.1.1. *M, $\overline{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre bir α-kosimplektik f-manifold olsun. Bu durumda*

(i) $\alpha = 0$ *durumunda D dağılımının integral altmanifoldu total jeodezik ve M^{2n+s}, M_1^{2n} Kaehler manifoldu ile bir M_2^s değişmeli Lie grubunun bir lokal çarpımıdır.*

(ii) $\alpha \neq 0$ *durumunda D dağılımının integral altmanifoldu total umbiliktir ve* $r = -2\alpha^2 ns(2n-1)$ *dır.*

İspat. M, $\overline{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik konneksiyonuna göre lokal simetrik olduğundan (2.1.5) denklemi yardımıyla $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için,

$$(\overline{\nabla}_X \overline{R})(Y,Z)W = 0 \tag{4.1.36}$$

yazılabilir. (4.1.36) denklemi $U \in \chi(M)$ ile çarpıldığında

$$(\overline{\nabla}_X \overline{R})(Y,Z,W,U) = 0$$

olur. Buradan da Y ve U vektör alanlarına göre kontraksiyon alındığında

$$(\overline{\nabla}_X \overline{S})(Z,W) = 0 \tag{4.1.37}$$

elde edilir. Diğer taraftan çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre (2.1.4) denklemi kullanıldığında (4.1.37) denklemi

$$\overline{\nabla}_X \overline{S}(Z,W) - \overline{S}(\overline{\nabla}_X Z,W) - \overline{S}(Z,\overline{\nabla}_X W) = 0 \tag{4.1.38}$$

şekline dönüşür. (4.1.38) denkleminde $W = \xi_i$ olarak alındığında

$$\overline{\nabla}_X \overline{S}(Z,\xi_i) - \overline{S}(\overline{\nabla}_X Z,\xi_i) - \overline{S}(Z,\overline{\nabla}_X \xi_i) = 0$$

olup (4.1.8) ve (4.1.23) denklemleri kullanıldığında

$$\begin{aligned}
&\overline{\nabla}_X(-2n\alpha^2\sum_{k=1}^{s}\eta^k(Z))-(-2n\alpha^2\sum_{k=1}^{s}\eta^k(\overline{\nabla}_X Z))-\overline{S}(Z,-\alpha\varphi^2X)\\
&=-2n\alpha^2\sum_{k=1}^{s}\overline{\nabla}_X\eta^k(Z)+2n\alpha^2\sum_{k=1}^{s}\eta^k(\overline{\nabla}_X Z)-\overline{S}(Z,\alpha X-\alpha\sum_{k=1}^{s}\eta^i(X)\xi_i)\\
&=-2n\alpha^2\sum_{k=1}^{s}\eta^k(\overline{\nabla}_X Z)-2n\alpha^2\sum_{k=1}^{s}g(Z,\overline{\nabla}_X\xi_k))+2n\alpha^2\sum_{k=1}^{s}\eta^k(\overline{\nabla}_X Z)\\
&-\alpha\overline{S}(Z,X)+\alpha\sum_{i=1}^{s}\eta^i(X)\overline{S}(Z,\xi_i)\\
&=0
\end{aligned}$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılır (4.1.10) ve (4.1.26) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&-2n\alpha^2\sum_{k=1}^{s}g(Z,-\alpha\varphi^2X)-\alpha\overline{S}(Z,X)+\alpha\sum_{i=1}^{s}\sum_{k=1}^{s}(-2n\alpha^2\eta^k(Z)\eta^i(X))\\
&=2n\alpha^3\sum_{k=1}^{s}g(Z,\varphi^2X)-\alpha\overline{S}(Z,X)-2n\alpha^3\sum_{i,k=1}s\eta^k(Z)\eta^i(X)\\
&=-2n\alpha^3\sum_{k=1}^{s}g(\varphi Z,\varphi X)-\alpha(S(Z,X)+\alpha sg(\varphi Z,X))-2n\alpha^3\sum_{i,k=1}^{s}\eta^k(Z)\eta^i(X)\\
&=-2n\alpha^3s.g(\varphi Z,\varphi X)-\alpha S(Z,X)-\alpha^2s.g(\varphi Z,X)-2n\alpha^3\sum_{i,k=1}^{s}\eta^k(Z)\eta^i(X)\\
&=0
\end{aligned}\tag{4.1.39}$$

bulunur. (4.1.39) denkleminde X ve Z vektör alanları üzerinde kontraksiyon alındığında

$$\begin{aligned}
&-4n^2s\alpha^3-\alpha r-2\alpha^3ns\\
&=\alpha[-4n^2s\alpha^2-r-2\alpha^2ns]=0
\end{aligned}\tag{4.1.40}$$

olur. (4.1.40) denkleminden

$$\alpha=0\quad\text{veya}\quad r=-2\alpha^2ns(2n-1)$$

elde edilir. Önerme (2.5.4) den teoremin ispatı tamamlanmış olur. □

Teorem 4.1.2. $\overline{\nabla}$ *çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre genelleştirilmiş bir rekürent* α*-kosimplektik* f*-manifold yoktur.*

İspat. $M, \overline{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre genelleştirilmiş bir rekürent α-kosimplektik f-manifold olsun. Bu durumda (2.1.7) denklemi yardımıyla $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için,

$$(\overline{\nabla}_X \overline{R})(Y,Z)W = A(X)\overline{R}(Y,Z)W + \beta(X)[g(Z,W)Y - g(Y,W)Z)] \tag{4.1.41}$$

yazılabilir. (4.1.41) denkleminde $Y = \xi_i$, $W = \xi_j$ olarak alındığında

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X \overline{R})(\xi_i,Z)\xi_j &= A(X)\overline{R}(\xi_i,Z)\xi_j + \beta(X)[g(Z,\xi_j)\xi_i - g(\xi_i,\xi_j)Z)] \\ &= A(X)\overline{R}(\xi_i,Z)\xi_j + \beta(X)[\eta^j(Z)\xi_i - \delta_{ij}Z]\end{aligned}$$

olur. $i = j$ için (2.5.9) ve (4.1.21) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X \overline{R})(\xi_i,Z)\xi_i &= A(X)\overline{R}(\xi_i,Z)\xi_i + \beta(X)[\eta^i(Z)\xi_i - Z] \\ &= A(X)[R(\xi_i,Z)\xi_i - \alpha\varphi Z] + \beta(X)[\eta^i(Z)\xi_i - Z] \\ &= A(X)[-\alpha^2\varphi^2 Z - \alpha\varphi Z] + \beta(X)[\eta^i(Z)\xi_i - Z]\end{aligned} \tag{4.1.42}$$

yazılabilir. Diğer taraftan (2.1.4) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X \overline{R})(\xi_i,Z)\xi_i = \overline{\nabla}_X \overline{R}(\xi_i,Z)\xi_i - \overline{R}(\overline{\nabla}_X\xi_i,Z)\xi_i \\ - \overline{R}(\xi_i,\overline{\nabla}_X Z)\xi_i - \overline{R}(\xi_i,Z)\overline{\nabla}_X\xi_i\end{aligned} \tag{4.1.43}$$

elde edilir. (4.1.43) denkleminin sağ tarafı açılırsa, (2.5.9) ve (4.1.21) denklemleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X \overline{R}(\xi_i,Z)\xi_i &= \overline{\nabla}_X(R(\xi_i,Z)\xi_i - \alpha\varphi Z) \\ &= \overline{\nabla}_X(-\alpha^2\varphi^2 Z - \alpha\varphi Z) \\ &= \overline{\nabla}_X(-\alpha^2\varphi^2 Z) - \overline{\nabla}_X(\alpha\varphi Z) \\ &= -\alpha^2\overline{\nabla}_X(\varphi^2 Z) - \alpha\overline{\nabla}_X\varphi Z\end{aligned} \tag{4.1.44}$$

olur. (4.1.8) denklemi (4.1.44) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned}\overline{\nabla}_X \overline{R}(\xi_i,Z)\xi_i &= -\alpha^2[\nabla_X\varphi^2 Z - \bar{\eta}(X)\varphi^3 Z] - \alpha[\nabla_X\varphi Z - \bar{\eta}(X)\varphi^2 Z] \\ &= \alpha^2\nabla_X Z - \alpha^2\sum_{k=1}^{s}\eta^k(\nabla_X Z)\xi_k + \alpha^3 g(Z,\varphi^2 X)\bar{\xi} + \alpha^3\bar{\eta}(Z)\varphi^2 X \\ &\quad - \alpha^2\bar{\eta}(X)\varphi Z - \alpha\nabla_X\varphi Z + \alpha\bar{\eta}(X)\varphi^2 Z\end{aligned} \tag{4.1.45}$$

elde edilir. Ayrıca (4.1.10) ve (4.1.19) denklemleri göz önüne alındığında

$$
\begin{aligned}
\overline{R}(\overline{\nabla}_X\xi_i,Z)\xi_i &= \overline{R}(\nabla_X\xi_i,Z)\xi_i \\
&= \overline{R}(-\alpha\varphi^2X,Z)\xi_i \\
&= -\alpha\overline{R}(\varphi^2X,Z)\xi_i \\
&= -\alpha[R(\varphi^2X,Z)\xi_i - \alpha\bar{\eta}(\varphi^2X)\varphi Z + \alpha\bar{\eta}(Z)\varphi^3X] \\
&= -\alpha[R(\varphi^2X,Z)\xi_i - \alpha\bar{\eta}(Z)\varphi X] \\
&= -\alpha[\alpha^2\sum_{k=1}^{s}\eta^k(Z)\varphi^4X - \alpha\bar{\eta}(Z)\varphi X] \\
&= \alpha^3\bar{\eta}(Z)\varphi^2X + \alpha^2\bar{\eta}(Z)\varphi X \qquad (4.1.46)
\end{aligned}
$$

sonucu elde edilir. Benzer şekilde (4.1.8) ve (4.1.21) denklemleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\overline{R}(\xi_i,\overline{\nabla}_XZ)\xi_i &= R(\xi_i,\overline{\nabla}_XZ)\xi_i - \alpha\varphi\overline{\nabla}_XZ \\
&= R(\xi_i,\nabla_XZ - \bar{\eta}(X)\varphi Z)\xi_i - \alpha\varphi(\nabla_XZ - \bar{\eta}(X)\varphi Z) \\
&= R(\xi_i,\nabla_XZ)\xi_i - \bar{\eta}(X)R(\xi_i,\varphi Z)\xi_i - \alpha\varphi\nabla_XZ + \alpha\bar{\eta}(X)\varphi^2Z \\
&= -\alpha^2\varphi^2\nabla_XZ - \bar{\eta}(X)(-\alpha^2\varphi^3Z) - \alpha\varphi\nabla_XZ + \alpha\bar{\eta}(X)\varphi^2Z \\
&= -\alpha^2\varphi^2\nabla_XZ - \alpha^2\bar{\eta}(X)\varphi Z - \alpha\varphi\nabla_XZ + \alpha\bar{\eta}(X)\varphi^2Z \qquad (4.1.47)
\end{aligned}
$$

olur. Son olarak (4.1.10) ve (4.1.22) denklemleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\overline{R}(\xi_i,Z)\overline{\nabla}_X\xi_i &= \overline{R}(\xi_i,Z)\nabla_X\xi_i \\
&= -\overline{R}(Z,\xi_i)\nabla_X\xi_i \\
&= -[R(Z,\xi_i)\nabla_X\xi_i - \alpha\{g(\varphi Z,\nabla_X\xi_i)\bar{\xi} - \bar{\eta}(\nabla_X\xi_i)\varphi Z\}] \\
&= -R(Z,\xi_i)\nabla_X\xi_i + \alpha g(\varphi Z,\nabla_X\xi_i)\bar{\xi} - \alpha\bar{\eta}(\nabla_X\xi_i)\varphi Z \\
&= -R(Z,\xi_i)(-\alpha\varphi^2X) + \alpha g(\varphi Z,-\alpha\varphi^2X)\bar{\xi} - \bar{\eta}(-\alpha\varphi^2X)\varphi Z \\
&= \alpha R(Z,\xi_i)\varphi^2X - \alpha^2g(Z,\varphi X)\bar{\xi} \\
&= \alpha[\alpha^2\sum_{k=1}^{s}\{\eta^k(\varphi^2X)\varphi^2Z - g(\varphi^4X,Z)\xi_k\}] - \alpha^2g(Z,\varphi X)\bar{\xi} \\
&= \alpha^3g(\varphi^2X,Z)\bar{\xi} - \alpha^2g(Z,\varphi X)\bar{\xi} \qquad (4.1.48)
\end{aligned}
$$

bulunur. (4.1.45), (4.1.46), (4.1.47) ve (4.1.48) denklemleri (4.1.43) denkleminde yerlerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_X\overline{R})(\xi_i,Z)\xi_i &= \alpha^2\nabla_X Z-\alpha^2\sum_{k=1}^{s}\eta^k(\nabla_X Z)\xi_k+\alpha^3 g(Z,\varphi^2X)\bar{\xi}\\
&\quad+\alpha^3\bar{\eta}(Z)\varphi^2X-\alpha^2\bar{\eta}(X)\varphi Z-\alpha\nabla_X\varphi Z+\alpha\bar{\eta}(X)\varphi^2 Z\\
&\quad-\alpha^3\bar{\eta}(Z)\varphi^2X-\alpha^2\bar{\eta}(Z)\varphi X+\alpha^2\varphi^2\nabla_X Z+\alpha^2\bar{\eta}(X)\varphi Z\\
&\quad+\alpha\varphi\nabla_X Z-\alpha\bar{\eta}(X)\varphi^2 Z-\alpha^3 g(\varphi^2X,Z)\bar{\xi}+\alpha^2 g(Z,\varphi X)\bar{\xi}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Gerekli sadeleştirmeler yapılır ve (2.4.1) denklemi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_X\overline{R})(\xi_i,Z)\xi_i &= -\alpha\nabla_X\varphi Z-\alpha^2\bar{\eta}(Z)\varphi X+\alpha\varphi\nabla_X Z+\alpha^2 g(Z,\varphi X)\bar{\xi}\\
&= -\alpha(\nabla_X\varphi)Z-\alpha^2\bar{\eta}(Z)\varphi X+\alpha^2 g(Z,\varphi X)\bar{\xi}\\
&= -\alpha[\alpha(g(\varphi X,Z)\bar{\xi}-\bar{\eta}(Z)\varphi X)]-\alpha^2\bar{\eta}(Z)\varphi X+\alpha^2 g(Z,\varphi X)\bar{\xi}\\
&= -\alpha^2 g(\varphi X,Z)\bar{\xi}+\alpha^2\bar{\eta}(Z)\varphi X-\alpha^2\eta(Z)\varphi X+\alpha^2 g(Z,\varphi X)\bar{\xi}\\
&= 0
\end{aligned}
\tag{4.1.49}
$$

olur. (4.1.49) denklemi (4.1.42) denkleminde yerine yazılırsa

$$
A(X)[-\alpha^2\varphi^2 Z-\alpha\varphi Z]+\beta(X)[\eta^i(Z)\xi_i-Z]=0 \tag{4.1.50}
$$

elde edilir. (4.1.50) denkleminde $Z=\varphi Z$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
&A(X)[-\alpha^2\varphi^3 Z-\alpha\varphi^2 Z]+\beta(X)(-\varphi Z)=0\\
&=-\alpha^2 A(X)\varphi Z+\alpha A(X)\varphi^2 Z+\beta(X)\varphi Z=0\\
&=[-\alpha^2 A(X)+\beta(X)]\varphi Z-\alpha A(X)\varphi^2 Z=0
\end{aligned}
\tag{4.1.51}
$$

bulunur. (4.1.51) denkleminde Z vektör alanı üzerinden kontraksiyon uygulanırsa

$$
[-\alpha^2 A(X)+\beta(X)]g(\varphi E_i,E_i)-\alpha A(X)g(\varphi^2 E_i,E_i)=\alpha A(X)g(\varphi E_i,\varphi E_i)=0
$$

elde edilir. Buradan

$$
\alpha s.A(X)=0\Rightarrow\alpha A(X)=0 \tag{4.1.52}
$$

dır. (4.1.51) denkleminde $Z = \varphi Z$ alınıp kontraksiyon uygulanırsa

$$[-\alpha^2 A(X) + \beta(X)]g(\varphi^2 E_i, E_i) - \alpha A(X) g(\varphi^3 E_i, E_i) = -s[-\alpha^2 A(X) + \beta(X)] = 0$$

bulunur. Buradan

$$\alpha^2 A(X) = \beta(X) \tag{4.1.53}$$

elde edilir. (4.1.52) ve (4.1.53) denklemlerinden $\beta(X) = 0$ sonucu elde edilir. Ancak tanım gereği $\beta \neq 0$ olduğundan bu sonuç varsayımla çelişir. Böylece çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre genelleştirilmiş rekürent α-kosimplektik f-manifold olmadığı sonucuna ulaşılır. □

Teorem 4.1.3. *$M, \overline{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre α-kosimplektik f-manifold olsun. Eğer $\alpha \neq 0$ ise φ-rekürent α-kosimplektik f-manifold yoktur.*

İspat. $M, \overline{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre φ-rekürent α-kosimplektik f-manifold olsun. Dolayısıyla (4.1.7) denklemi yardımıyla $\forall X, Y, Z, W \in \chi(M)$ için,

$$\varphi^2(\overline{\nabla}_X \overline{R})(Y, Z)W = A(X)\overline{R}(Y, Z)W \tag{4.1.54}$$

yazılabilir. Buradan da M hemen hemen değme metrik manifold olduğundan (4.1.54) denkleminde (2.4.1) eşitliği kullanıldığında

$$-(\overline{\nabla}_X \overline{R})(Y, Z)W + \sum_{k=1}^{s} (\eta^k(\overline{\nabla}_X \overline{R}(Y, Z)W)\xi_k = A(X)\overline{R}(Y, Z))W \tag{4.1.55}$$

elde edilir. (4.1.55) denkleminde $Y = W = \xi_i$ olarak alınırsa

$$-(\overline{\nabla}_X \overline{R})(\xi_i, Z)\xi_i + \sum_{k=1}^{s} (\eta^k(\overline{\nabla}_X \overline{R})(\xi_i, Z)\xi_i)\xi_k = A(X)\overline{R}(\xi_i, Z)\xi_i \tag{4.1.56}$$

bulunur. (4.1.49) denklemi kullanılarak

$$A(X)\overline{R}(\xi_i, Z)\xi_i = 0 \tag{4.1.57}$$

elde edilir. (4.1.21) ve (2.5.9) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} &A(X)[R(\xi_i, Z)\xi_i - \alpha\varphi Z] \\ &= A(X)[-\alpha^2\varphi^2 Z - \alpha\varphi Z] = 0 \end{aligned} \tag{4.1.58}$$

yazılır. (4.1.58) denkleminde Z vektör alanı üzerinden kontraksiyon alınırsa

$$\alpha^2 sA(X) = 0 \tag{4.1.59}$$

bulunur. (4.1.59) denklemi bize $\forall X \in \chi(M)$ için $A(X) = 0$ olduğunu gösterir. Ancak tanım gereği $A \neq 0$ olduğundan bu durum varsayımla çelişir. Böylece çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre φ-rekürent α-kosimplektik f-manifold olmadığı sonucuna ulaşılır. $\square$

Sonuç 4.1.4. $\overline{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre lokal simetrik hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. $İz(h_i h_j) \neq (2n+s)\alpha^2$ şartı sağlanıyor ise φ-rekürent hemen hemen α-kosimplektik f-manifold yoktur.

İspat. $M, \overline{\nabla}$ çeyrek-simetrik metrik konneksiyona göre φ-rekürent bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. (4.1.7) denklemi kullanılarak

$$\varphi^2((\overline{\nabla}_X \overline{R})(Y,Z)W) = A(X)\overline{R}(Y,Z)W \tag{4.1.60}$$

yazılabilir. M, bir hemen hemen değme metrik manifold olduğundan (4.1.60) denkleminde (2.4.1) denklemi kullanılırsa

$$-(\overline{\nabla}_X \overline{R})(Y,Z)W + \sum_{i=1}^{s} \eta^i((\overline{\nabla}_X \overline{R})(Y,Z)W)\xi_i = A(X)\overline{R}(Y,Z)W \tag{4.1.61}$$

elde edilir. M lokal simetri olduğundan $\overline{\nabla}\overline{R} = 0$ dır. Buradan

$$A(X)\overline{R}(Y,Z)W = 0$$

(4.1.61) denkleminde $Y = \xi_i$, $W = \xi_j$ alınırsa

$$A(X)\overline{R}(\xi_i,Z)\xi_j = 0 \tag{4.1.62}$$

olur. (4.1.21) denklemi (4.1.62) denkleminde yerine yazılırsa

$$A(X)(R(\xi_i,Z)\xi_j - \alpha\varphi Z - h_j Z) = 0 \tag{4.1.63}$$

elde edilir. (4.1.63) denklemi ard arda iki kere φ ile çarpılırsa

$$A(X)(\varphi R(\xi_i,Z)\xi_j-\alpha\varphi^2 Z-\varphi h_j Z)=0$$
$$A(X)(\varphi R(\xi_i,\varphi Z)\xi_j-\alpha\varphi^3 Z-\varphi h_j\varphi Z)=0$$
$$A(X)(\varphi R(\xi_i,\varphi Z)\xi_j+\alpha\varphi Z-h_j Z)=0 \tag{4.1.64}$$

bulunur. (4.1.63) denkleminden (4.1.64) denklemi çıkarılırsa

$$A(X)(R(\xi_i,Z)\xi_j-\varphi R(\xi_i,\varphi Z)\xi_j-2\alpha\varphi Z)=0 \tag{4.1.65}$$

elde edilir. (4.1.65) denkleminde (2.5.11) denklemi kullanılırsa

$$A(X)(-2\alpha^2\varphi^2 Z+2h_j h_i Z-2\alpha\varphi Z)=0 \tag{4.1.66}$$

olup (4.1.66) denkleminde Z vektör alanına göre kontraksiyon alınırsa

$$A(X)\sum_{k=1}^{2n+s}(2\alpha^2 g(\varphi E_i,\varphi E_i)+2g(h_j h_i E_i,E_i)-2\alpha g(\varphi E_i,E_i))=0$$

sonucu elde edilir. Son denklem düzenlenirse

$$A(X)[2(2n+s)\alpha^2+2\dot{\mathrm{I}}z(h_j h_i)]=0 \tag{4.1.67}$$

elde edilir. (4.1.67) denkleminde $A(X)=0$ veya $2(2n+s)\alpha^2+2\dot{\mathrm{I}}z(h_j h_i)=0$ dır. Tanım gereği $A\neq 0$ olduğundan bu durum varsayımla çelişir. Böylece $\dot{\mathrm{I}}z(h_j h_i)\neq(2n+s)\alpha^2$ olması durumunda φ-rekürent hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olmadığı sonucuna varılır. □

5. YARI-SİMETRİK METRİK OLMAYAN KONNEKSİYONLU HEMEN HEMEN α-KOSİMPLEKTİK f-MANİFOLDLAR

Bu bölümde yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların tanımı yapılarak bazı sonuçlar elde edildi. Ayrıca yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların Riemann eğrilik tensörü ve Ricci eğrilik tensörü icelenmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir.

5.1 Yarı-Simetrik Metrik Olmayan Konneksiyon

Tanım 5.1.1. M, $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. Hemen hemen α-kosimplektik f-manifold üzerinde Levi-Civita konneksiyonu ∇ olmak üzere, M üzerinde ∇^* konneksiyonu

$$\begin{aligned} \nabla^* : & \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M) \\ & (X,Y) \to \nabla^*_X Y = \nabla_X Y + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Y) X \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 5.1.1. *M, $(2n+s)$-boyutlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,*

$$\nabla^*_X Y = \nabla_X Y + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Y) X$$

olarak tanımlanan ∇^* konneksiyonu M üzerinde lineerdir.

İspat. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ ve $f \in C(M,R)$ için (5.1.1) denklemi kullanılarak,

$$\begin{aligned} \nabla^*_{X+Y} Z &= \nabla_{X+Y} Z + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Z)(X+Y) \\ &= \nabla_X Z + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Z) X + \nabla_Y Z + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Z) Y \\ &= \nabla^*_X Z + \nabla^*_Y Z \end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
\nabla^*_X(Y+Z) &= \nabla_X(Y+Z)+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y+Z)X \\
&= \nabla_X Y+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)X+\nabla_X Z+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(Z)X \\
&= \nabla^*_X Y+\nabla^*_X Z
\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca,

$$\begin{aligned}
\nabla^*_{fX}Y &= \nabla_{fX}Y+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)fX \\
&= f(\nabla_X Y+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)X) \\
&= f(\nabla^*_X Y)
\end{aligned}$$

dır. Son olarak

$$\begin{aligned}
\nabla^*_X(fY) &= X[f]Y+f(\nabla_X Y+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)X) \\
&= X[f]Y+f(\nabla^*_X Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan ∇^*, M üzerinde bir lineer konneksiyondur. □

Teorem 5.1.2. *M, $(2n+s)$-boyutlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. (5.1.1) ile tanımlanan lineer konneksiyon ∇^*, M üzerinde yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyondur.*

İspat. ∇^* lineer konneksiyonun torsiyon tensör alanı T^* olsun. $\forall X,Y\in\chi(M)$ için,

$$\begin{aligned}
T^*(X,Y) &= \nabla^*_X Y-\nabla^*_Y X-[X,Y] \\
&= \nabla_X Y+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)X-(\nabla_Y X+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(X)Y)-[X,Y] \\
&= T(X,Y)+\sum_{i=1}^{s}(\eta^i(Y)X-\eta^i(X)Y) \\
&= \sum_{i=1}^{s}(\eta^i(Y)X-\eta^i(X)Y) \qquad (5.1.2)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada T, M üzerinde ∇ Levi-Civita konneksiyonun torsiyon tensör alanıdır. Bu durumda lineer konneksiyon ∇^*, M üzerinde yarı-simetrik bir konneksiyondur. Şimdi ∇^* lineer konneksiyonun M üzerinde tanımlı g Riemann metrik tensörüyle bağdaşabilir olmadığı gösterilecektir. Metrikle bağdaşabilir olmayan konneksiyon için kısaca metrik olmayan konneksiyon ifadesi kullanılacaktır. $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$\begin{aligned}(\nabla^*_X g)(Y,Z) &= X[g(Y,Z)] - g(\nabla^*_X Y,Z) - g(Y,\nabla^*_X Z) \\ &= X[g(Y,Z)] - g(\nabla_X Y + \sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)X,Z) - g(Y,\nabla_X Z + \sum_{i=1}^{s}\eta^i(Z)X) \\ &= \sum_{i=1}^{s}(\eta^i(Y)g(X,Z) + \eta^i(Z)g(Y,X)) \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

elde edilir. Bu durumda lineer konneksiyon ∇^*, M üzerinde bir metrik olmayan konneksiyondur. O halde (5.1.2) ve (5.1.3) denklemlerinden ∇^* lineer konneksiyonu M üzerinde yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyondur. □

Sonuç 5.1.1. M, $(2n+s)$-boyutlu yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. Bu durmda $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$\nabla^*_X \xi_i = -\alpha\varphi^2 X - \varphi h_i X + X \tag{5.1.4}$$

ve

$$(\nabla^*_X \bar{\eta})Y = (\nabla_X \bar{\eta})Y - \bar{\eta}(X)\bar{\eta}(Y) \tag{5.1.5}$$

dır.

İspat. (5.1.1) denkleminde $Y = \xi_i$ alınır ve (2.5.6) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}\nabla^*_X \xi_i &= \nabla_X \xi_i + \bar{\eta}(\xi_i)X \\ &= -\alpha\varphi^2 X - \varphi h_i X + X\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan (2.5.6) ve (5.1.1) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla^*_X\eta^i)Y &= X(\eta^i(Y)) - \eta^i(\nabla^*_X Y) \\
&= Xg(Y,\xi_i) - \eta^i(\nabla^*_X Y) \\
&= g(\nabla_X Y,\xi_i) + g(Y,\nabla_X\xi_i) - \eta^i(\nabla_X Y) - \bar{\eta}(Y)\eta^i(X) \\
&= \eta^i(\nabla_X Y) + g(Y,\nabla_X\xi_i) - \eta^i(\nabla_X Y) - \bar{\eta}(Y)\eta^i(X) \\
&= g(Y,\nabla_X\xi_i) - \bar{\eta}(Y)\eta^i(X)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\sum_{i=1}^{s}(\nabla^*_X\eta^i)Y = \sum_{i=1}^{s} g(Y,\nabla_X\xi_i) - \sum_{i=1}^{s}\eta^i(X)\bar{\eta}(Y)$$
$$(\nabla^*_X\bar{\eta})Y = (\nabla_X\bar{\eta})Y - \bar{\eta}(X)\bar{\eta}(Y)$$

bulunur. Buradan ispat tamamlanır. □

Teorem 5.1.3. *M, $(2n+s)$-boyutlu yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu Kaehler liflere sahip bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,*

$$(\nabla^*_X\varphi)Y = \sum_{i=1}^{s}\big(\alpha g(\varphi X,Y)\xi_i + g(h_iX,Y)\xi_i - (\alpha+1)(\eta^i(Y)\varphi X) - \eta^i(Y)h_iX\big) \quad (5.1.6)$$

dır.

İspat. (5.1.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla^*_X\varphi)Y &= \nabla^*_X\varphi Y - \varphi\nabla^*_X Y \\
&= \nabla_X\varphi Y + \bar{\eta}(\varphi Y)X - \varphi(\nabla_X Y + \bar{\eta}(Y)X) \\
&= \varphi\nabla_X Y + (\nabla_X\varphi)Y - \varphi\nabla_X Y - \bar{\eta}(Y)\varphi X \\
&= (\nabla_X\varphi)Y - \bar{\eta}(Y)\varphi X \qquad (5.1.7)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.5.7) denklemi (5.1.7) denkleminde yazılırsa (5.1.6) denklemi elde edilir. □

Teorem 5.1.4. *M, $(2n+s)$-boyutlu yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. Bu durumda $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için,*

$$R^*(X,Y)Z = R(X,Y)Z + ((\nabla_X \bar{\eta})Z)Y + \bar{\eta}(Z)\bar{\eta}(Y)X - ((\nabla_Y \bar{\eta})Z)X - \bar{\eta}(Z)\bar{\eta}(X)Y \quad (5.1.8)$$

dır. Burada R, Levi-Civita ∇ konneksiyonun eğrilik tensörüdür.

İspat. ∇^* konneksiyonunun eğrilik tensörünün denklemi yazılırsa

$$R^*(X,Y,Z) = \nabla^*_X \nabla^*_Y Z - \nabla^*_Y \nabla^*_X Z - \nabla^*_{[X,Y]} Z \quad (5.1.9)$$

elde edilir. Şimdi (5.1.9) denkleminin terimlerini tek tek bulalım. (5.1.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla^*_X \nabla^*_Y Z &= \nabla^*_X (\nabla_Y Z + \bar{\eta}(Z)Y) \\ &= \nabla^*_X (\nabla_Y Z) + \nabla^*_X (\bar{\eta}(Z)Y) \\ &= \nabla_X (\nabla_Y Z) + \bar{\eta}(\nabla_Y Z)X + \nabla_X (\bar{\eta}(Z)Y) + \bar{\eta}(\bar{\eta}(Z)Y)X \\ &= \nabla_X \nabla_Y Z + \bar{\eta}(\nabla_Y Z)X + \bar{\eta}(\nabla_X Z)Y + \sum_{i=1}^{s} g(Z, \nabla_X \xi_i)Y \\ &+ \bar{\eta}(Z)\nabla_X Y + \bar{\eta}(Z)\bar{\eta}(Y)X \end{aligned} \quad (5.1.10)$$

dır. Benzer şekilde (5.1.10) denkleminde X ile Y nin yerleri değiştirilirse

$$\begin{aligned} \nabla^*_Y \nabla^*_X Z &= \nabla_Y \nabla_X Z + \bar{\eta}(\nabla_X Z)Y + \bar{\eta}(\nabla_Y Z)X \\ &+ \sum_{i=1}^{s} (Z, \nabla_Y \xi_i)X + \bar{\eta}(Z)\nabla_Y X + \bar{\eta}(Z)\bar{\eta}(X)Y \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

bulunur. Son olarak

$$\nabla^*_{[X,Y]} Z = \nabla_{[X,Y]} Z + \bar{\eta}(Z)[X,Y] \quad (5.1.12)$$

elde edilir. (5.1.10), (5.1.11) ve (5.1.12) denklemlerinden gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} R^*(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + \sum_{i=1}^{s} g(Z, \nabla_X \xi_i)Y + \bar{\eta}(Z)\bar{\eta}(Y)X \\ &- \sum_{i=1}^{s} g(\nabla_Y \xi_i, Z)X - \bar{\eta}(Z)\bar{\eta}(X)Y \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

bulunur. (5.1.13) denkleminde (2.5.6) denklemi kullanılırsa

$$R^*(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \alpha.sg(\varphi Z, \varphi X)Y + \sum_{i=1}^{s} g(\varphi Z, h_i X)Y + \bar{\eta}(Z)\bar{\eta}(Y)X$$
$$- \alpha.sg(\varphi Z, \varphi Y)X - \sum_{i=1}^{s} g(\varphi Z, h_i Y)X - \bar{\eta}(Z)\bar{\eta}(X)Y \qquad (5.1.14)$$

elde edilir.

$$(\nabla_X \bar{\eta})Y = \sum_{i=1}^{s} g(Y, \nabla_X \xi_i)$$

eşitliği göz önüne alınıp (5.1.13) denkleminde yazılırsa (5.1.8) denklemi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Şimdi $(0,2)$-tipli tensör alanı $\mathcal{A}$ ile gösterilsin. (5.1.1) denklemi kullanılarak $\mathcal{A}$ tensör alanı

$$\mathcal{A}(X,Y) = (\nabla^*_X \bar{\eta})Y = (\nabla_X \bar{\eta})Y - \bar{\eta}(X)\bar{\eta}(Y) \qquad (5.1.15)$$

şeklinde yazılırsa (5.1.8) denklemi

$$R^*(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \mathcal{A}(X,Z)Y - \mathcal{A}(Y,Z)X \qquad (5.1.16)$$

olarak elde edilir.

Sonuç 5.1.2. M, $(2n+s)$-boyutlu yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifold ve $\mathcal{A}$, $(0,2)$-tipli tensör alanı olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için,

$$\mathcal{A}(\xi_i, Y) = -\bar{\eta}(Y), \qquad (5.1.17)$$
$$\mathcal{A}(X, \xi_i) = -\bar{\eta}(X), \qquad (5.1.18)$$
$$\mathcal{A}(\xi_i, \xi_j) = -\delta_{ij}, \qquad (5.1.19)$$
$$\mathcal{A}(X,Y) = \mathcal{A}(Y,X), \qquad (5.1.20)$$
$$\mathcal{A}(\varphi X, \varphi Y) = \mathcal{A}(X,Y) + \bar{\eta}(X)\bar{\eta}(Y) \qquad (5.1.21)$$

dır.

İspat. (5.1.15) denkleminde $X=\xi_i$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}(\xi_i,Y) =&(\nabla_{\xi_i}\bar{\eta})Y-\bar{\eta}(\xi_i)\bar{\eta}(Y)\\
=&\nabla_{\xi_i}\bar{\eta}(Y)-\bar{\eta}(\nabla_{\xi_i}Y)-\bar{\eta}(Y)\\
=&\sum_{j=1}^{k}\nabla_{\xi_i}g(Y,\xi_j)-\bar{\eta}(\nabla_{\xi_i}Y)-\bar{\eta}(Y)\\
=&\bar{\eta}(\nabla_{\xi_i}Y)+\sum_{j=1}^{k}g(Y,\nabla_{\xi_i}\xi_j)-\bar{\eta}(\nabla_{\xi_i}Y)-\bar{\eta}(Y)\\
=&-\bar{\eta}(Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (5.1.17) denklemi elde edilir. Benzer şekilde (5.1.18), (5.1.19), (5.1.20) ve (5.1.21) denklemleri de elde edilir. □

Sonuç 5.1.3. M, $(2n+s)$-boyutlu yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifold ve $\mathcal{A}$, $(0,2)$-tipli tensör alanı olsun. Bu durumda $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için,

$$R^*(X,Y)\xi_i=R(X,Y)\xi_i-\bar{\eta}(X)Y+\bar{\eta}(Y)X \tag{5.1.22}$$

$$R^*(X,\xi_i)Z=R(X,\xi_i)Z+\mathcal{A}(X,Z)\xi_i+\bar{\eta}(Z)X \tag{5.1.23}$$

$$R^*(X,\xi_j)\xi_i=R(X,\xi_j)\xi_i-\bar{\eta}(X)\xi_j+X \tag{5.1.24}$$

$$R^*(\xi_j,X)\xi_i=R(\xi_j,X)\xi_i+\bar{\eta}(X)\xi_j-X \tag{5.1.25}$$

$$R^*(\xi_j,\xi_k)\xi_i=\xi_j-\xi_k;\quad k\neq j \tag{5.1.26}$$

dır.

İspat. (5.1.16) denkleminde (5.1.17) ve (5.1.18) denklemleri kullanılırsa yukarıdaki ifadeler kolayca elde edilir. □

Teorem 5.1.5. *M, $(2n+s)$-boyutlu yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifold ve $\mathcal{A}$, $(0,2)$-tipli tensör alanı olsun. Bu durumda $\forall X,Y,Z,W\in\chi(M)$ için,*

$$R^*(X,Y,Z,W)=R(X,Y,Z,W)+\mathcal{A}(X,Z)g(Y,W)-\mathcal{A}(Y,Z)g(X,W) \tag{5.1.27}$$

dır.

İspat. (5.1.16) denkleminin her iki tarafı W vektör alanı ile çarpılırsa (5.1.27) denklemi elde edilir. $\square$

Teorem 5.1.6. *M, $(2n+s)$-boyutlu yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifold ve $\mathcal{A}$, $(0,2)$-tipli tensör alanı olsun. Bu durumda $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için,*

$$R^*(X,Y,W,Z) = R(X,Y,W,Z) + \mathcal{A}(X,W)g(Y,Z) - \mathcal{A}(Y,W)g(X,Z) \tag{5.1.28}$$

dır.

İspat. (5.1.27) denkleminde Z ile W vektör alanlarının yerleri değiştirilirse (5.1.28) denklemi elde edilir. $\square$

Teorem 5.1.7. *M, $(2n+s)$-boyutlu yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifold ve $\mathcal{A}$, $(0,2)$-tipli tensör alanı olsun. Bu durumda $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için,*

$$\begin{aligned} R^*(X,Y,Z,W) + R^*(X,Y,W,Z) &= \mathcal{A}(X,Z)g(Y,W) - \mathcal{A}(Y,Z)g(X,W) \\ &\quad + \mathcal{A}(X,W)g(Y,Z) - \mathcal{A}(Y,W)g(X,Z) \end{aligned} \tag{5.1.29}$$

dır.

İspat. (5.1.27) ve (5.1.28) denklemleri taraf tarafa toplanıp Riemann eğrilik tensör özelliği kullanılırsa (5.1.29) denklemi elde edilir. $\square$

Teorem 5.1.8. *M, $(2n+s)$-boyutlu yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifold ve $\mathcal{A}$, $(0,2)$-tipli tensör alanı olsun. Bu durumda $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için,*

$$\begin{aligned} R^*(X,Y,Z,W) - R^*(Z,W,X,Y) &= \mathcal{A}(X,Z)g(Y,W) - \mathcal{A}(Y,Z)g(X,W) \\ &\quad - \mathcal{A}(Z,X)g(W,Y) + \mathcal{A}(W,X)g(Z,Y) \end{aligned} \tag{5.1.30}$$

dır.

İspat. (5.1.27) denklemi kullanılırsa

$$R^*(Z,W,X,Y) = R(Z,W,X,Y) + \mathcal{A}(Z,X)g(W,Y) - \mathcal{A}(W,X)g(Z,Y) \tag{5.1.31}$$

elde edilir. (5.1.27) ve (5.1.31) denklemleri taraf tarafa çıkarılıp Riemann eğrilik tensör özelliği kullanılırsa (5.1.30) denklemi elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 5.1.9. *M, $(2n+s)$-boyutlu yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \chi(M)$ ve $i,j \in \{1,...,s\}$ için,*

$$R^*(\xi_j,X,\xi_i,Y) = R(\xi_j,X,\xi_i,Y) + \bar{\eta}(X)\eta^j(Y) - g(X,Y) \tag{5.1.32}$$

dır.

İspat. (5.1.25) denklemi Y vektör alanı ile çarpılırsa

$$g(R^*(\xi_j,X)\xi_i,Y) = g(R(\xi_j,X)\xi_i,Y) + \bar{\eta}(X)\eta^j(Y) - g(X,Y)$$
$$R^*(\xi_j,X,\xi_i,Y) = R(\xi_j,X,\xi_i,Y) + \bar{\eta}(X)\eta^j(Y) - g(X,Y)$$

bulunur. Buradan ispat tamamlanır. □

Tanım 5.1.2. $(2n+s)$-boyutlu yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold $(M,\varphi,\xi_i,\eta^i,g)$ ve M nin ortonormal bir bazı $\{E_1,...,E_{2n},\xi_1,...,\xi_s\}$ olsun. Yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu M manifoldunun Ricci eğrilik tensörü

$$S^*(X,Y) = \sum_{k=1}^{2n} g(R^*(E_k,X,Y,E_k)) + \sum_{r=1}^{s} g(R^*(\xi_r,X,Y,\xi_r)) \tag{5.1.33}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 5.1.10. *M, $(2n+s)$-boyutlu yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,*

$$\begin{aligned} S^*(X,Y) &= S(X,Y) - (2n+s)\mathcal{A}(X,Y) \\ &\quad + \sum_{k=1}^{2n} \mathcal{A}(E_k,Y)g(X,E_k) - \sum_{r=1}^{s} \bar{\eta}(Y)\eta^r(X) \end{aligned} \tag{5.1.34}$$

dır.

İspat. (5.1.33) denkleminde (5.1.27) kullanılır ve gerekli düzeltmeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
S^*(X,Y) &= \sum_{k=1}^{2n} R^*(E_k,X,Y,E_k) + \sum_{r=1}^{s} R^*(\xi_r,X,Y,\xi_r) \\
&= \sum_{k=1}^{2n} [R(E_k,X,Y,E_k) + \mathcal{A}(E_k,Y)g(X,E_k) - \mathcal{A}(X,Y)g(E_k,E_k)] \\
&+ \sum_{r=1}^{s} [R(\xi_r,X,Y,\xi_r) + \mathcal{A}(\xi_r,Y)g(X,\xi_r) - \mathcal{A}(X,Y)g(\xi_r,\xi_r)] \\
&= S(X,Y) + \sum_{k=1}^{2n} [\mathcal{A}(E_k,Y)g(X,E_k) - \mathcal{A}(X,Y)g(E_k,E_k)] \\
&+ \sum_{r=1}^{s} [\mathcal{A}(\xi_r,Y)g(X,\xi_r) - \mathcal{A}(X,Y)g(\xi_r,\xi_r)] \\
&= S(X,Y) + \sum_{k=1}^{2n} \mathcal{A}(E_k,Y)g(X,E_k) - 2n.\mathcal{A}(X,Y) + \sum_{r=1}^{s} \bar{\eta}(Y)\eta^r(X) - s.\mathcal{A}(X,Y) \\
&= S(X,Y) - (2n+s)\mathcal{A}(X,Y) + \sum_{k=1}^{2n} \mathcal{A}(E_k,Y)g(X,E_k) - \sum_{r=1}^{s} \bar{\eta}(Y)\eta^r(X)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan ispat tamamlanır. □

Sonuç 5.1.4. *M*, $(2n+s)$-boyutlu yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,

$$S^*(X,\xi_j) = S(X,\xi_j) + (2n+s-1)\bar{\eta}(X), \tag{5.1.35}$$

$$S^*(\varphi X,\xi_j) = S(\varphi X,\xi_j) = -(div\varphi h_i)\varphi X, \tag{5.1.36}$$

$$S^*(\xi_i,\xi_j) = S(\xi_i,\xi_j) + (2n+s-1) \tag{5.1.37}$$

dır.

İspat. (5.1.34) denkleminde $Y = \xi_j$ alınır ve (5.1.17) denklemi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
S^*(X,\xi_j) &= S(X,\xi_j) - (2n+s)\mathcal{A}(X,\xi_j) + \sum_{i=1}^{2n} \mathcal{A}(E_i,\xi_j)g(X,E_i) - \sum_{r=1}^{s} \bar{\eta}(\xi_j)\eta^r(X) \\
&= S(X,\xi_j) + (2n+s-1)\bar{\eta}(X)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Benzer şekilde (5.1.36) ve (5.1.37) denklemleri de kolayca elde edilebilir. □

Teorem 5.1.11. *M, $(2n+s)$-boyutlu yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \chi(M)$ için,*

$$\begin{aligned} S^*(X,Y) - S^*(Y,X) = & \sum_{k=1}^{2n} [\mathcal{A}(E_k,Y)g(X,E_k) - \mathcal{A}(E_k,X)g(Y,E_k)] \\ & - \sum_{r=1}^{s} [\bar{\eta}(Y)\eta^r(X) - \bar{\eta}(X)\eta^r(Y)] \end{aligned} \tag{5.1.38}$$

dır.

İspat. (5.1.34) denkleminde X ile Y vektör alanlarının yerleri değiştirilirse

$$S^*(Y,X) = S(Y,X) - (2n+s)\mathcal{A}(Y,X) + \sum_{k=1}^{2n} \mathcal{A}(E_k,X)g(Y,E_k) - \sum_{r=1}^{s} \bar{\eta}(X)\eta^r(Y) \tag{5.1.39}$$

bulunur. (5.1.34) denklemi ile (5.1.39) denklemi taraf tarafa çıkarılırsa. □

Sonuç 5.1.5. *M*, $(2n+s)$-boyutlu yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold olsun. Bu durumda $\forall X \in \chi(M)$ için,

$$S^*(X,\xi_i) = S^*(\xi_i,X) \tag{5.1.40}$$

dır.

İspat. (5.1.38) denkleminde $Y = \xi_i$ alınır ve (5.1.17) denklemi kullanılırsa (5.1.40) denklemi elde edilir. □

6. YARI-SİMETRİK METRİK OLMAYAN KONNEKSİYONLU HEMEN HEMEN α-KOSİMPLEKTİK f-MANİFOLDLARIN YARI-İNVARYANT ALTMANİFOLDLARI

Son olarak bu bölüm iki alt kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonlu hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldların yarı-invaryant altmanifoldarı tanımlanarak bazı sonuçlar elde edildi. İkinci kısımda da distribüsyonların integrallenebilirliği incelenip bazı sonuçlar elde edilmiştir.

6.1 Yarı-Simetrik Metrik Olmayan Konneksiyonlu Hemen Hemen α-Kosimplektik f-Manifoldların Yarı-İnvaryant Altmanifoldları

$(2n+s)$-boyutlu $\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun bir altmanifoldu M olsun. $\widetilde{M}$ de indirgenmiş bir g metriği ile $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunu alalım. Bu durumda Gauss ve Weingarten formülleri; $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(TM^{\perp})$ için,

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y) \tag{6.1.1}$$

$$\widetilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^{\perp} N \tag{6.1.2}$$

olarak tanımlanır. Burada $\nabla^{\perp}$ normal kısım, B ikinci temel form, A_N şekil operatörüdür. İkinci temel form ile şekil operatörü arasında

$$g(B(X,Y),N) = g(A_N X,Y) \tag{6.1.3}$$

eşitliği vardır.

Şimdi bir yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyonu tanımlayıp doğruluğunu gösterelim. $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X^* Y = \widetilde{\nabla}_X Y + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Y) X \tag{6.1.4}$$

dır. Burada $\widetilde{\nabla}$ Riemann konneksiyonu olduğundan, $\widetilde{\nabla} g = 0$ dır. O halde

$$(\widetilde{\nabla}_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(\widetilde{\nabla}_X Y,Z) - g(Y,\widetilde{\nabla}_X Z) = 0$$

olur. Buradan

$$
\begin{aligned}
Xg(Y,Z) &= g(\widetilde{\nabla}_X Y,Z) + g((Y,\widetilde{\nabla}_X Z) \\
&= g(\nabla^*_X Y - \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Y)X,Z) + g(Y,\nabla^*_X Z - \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Z)X) \\
&= g(\nabla^*_X Y,Z) + g(\nabla^*_X Z,Y) - \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Y)g(X,Z) - \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Z)g(X,Y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
Xg(Y,Z) - g(\nabla^*_X Y,Z) - g(Y,\nabla^*_X Z) = -\sum_{i=1}^{s} \eta^i(Y)g(X,Z) - \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Z)g(X,Y)
$$

olup buradan

$$
(\nabla^*_X g)(Y,Z) = -\sum_{i=1}^{s} \{g(X,Y)\eta^i(Z) + g(X,Z)\eta^i(Y)\} \tag{6.1.5}
$$

elde edilir. O halde ∇^* metrik konneksiyon değildir. Diğer taraftan $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu simetrik olduğundan $\widetilde{T}(X,Y) = 0$ dır. Bu durumda

$$
\widetilde{T}(X,Y) = \widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X - [X,Y] = 0
$$

olduğundan

$$
[X,Y] = \widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X
$$

olur. Buradan da

$$
\begin{aligned}
[X,Y] &= \nabla^*_X Y - \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Y)X - \nabla^*_Y X + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(X)Y \\
\nabla^*_X Y - \nabla^*_Y X - [X,Y] &= \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Y)X - \sum_{i=1}^{s} \eta^i(X)Y \\
T^*(X,Y) &= \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Y)X - \sum_{i=1}^{s} \eta^i(X)Y
\end{aligned}
$$

bulunur. $T^*(X,Y) \neq 0$ olduğundan ∇^* yarı-simetrik konneksiyondur.

Teorem 6.1.1. *M, yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı $\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,*

$$
(\nabla^*_X \varphi)Y = (\widetilde{\nabla}_X \varphi)Y - \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Y)\varphi X \tag{6.1.6}
$$

dır.

İspat. (2.4.2) ve (6.1.4) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
(\nabla^*_X\varphi)Y =&\nabla^*_X\varphi Y-\varphi\nabla^*_X Y\\
=&\widetilde{\nabla}_X\varphi Y+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(\varphi Y)X-\varphi(\widetilde{\nabla}_X Y+\sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)X)\\
=&\widetilde{\nabla}_X\varphi Y-\varphi\widetilde{\nabla}_X Y-\varphi\sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)X\\
=&(\widetilde{\nabla}_X\varphi)Y-\sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)\varphi X
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Eğer $\widetilde{M}$ Kaehler liflere sahip $(2n+s)$-boyutlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold ise (2.5.7) ve (6.1.6) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
(\nabla^*_X\varphi)Y =& \sum_{i=1}^{s}\left[\alpha\left(g(\varphi X,Y)\xi_i-\eta^i(Y)\varphi X\right)+g(h_iX,Y)\xi_i-\eta^i(Y)h_iX\right]\\
&-\sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)\varphi X
\end{aligned}\tag{6.1.7}$$

elde edilir.

Sonuç 6.1.1. M, yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı $\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ için,

$$\nabla^*_X\xi_i=-\alpha\varphi^2X-\varphi h_iX+X \tag{6.1.8}$$

ve

$$(\nabla^*_X\bar{\eta})Y=(\widetilde{\nabla}_X\bar{\eta})Y-\bar{\eta}(X)\bar{\eta}(Y) \tag{6.1.9}$$

denklemleri geçerlidir.

$\widetilde{M}$ ve M üzerindeki metrik g olsun. $\widetilde{M}$ üzerinde yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ∇^* ve M üzerine indirgenmiş konneksiyon $\overset{\circ}{\nabla}$ olsun. Bu durumda M yarı-invaryant altmanifoldu üzerinde $(0,2)$-tipinden tensör alanı m olmak üzere,

$$(\nabla^*_XY)=\overset{\circ}{\nabla}_XY+m(X,Y) \tag{6.1.10}$$

olarak tanımlansın. (6.1.1) ve 6.1.4 denklemleri kullanılırsa

$$\overset{\circ}{\nabla}_X Y + m(X,Y) = \nabla_X Y + B(X,Y) + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Y)X \tag{6.1.11}$$

olur. (6.1.11) denkleminin teğet ve normal kısımları ayrı ayrı hesaplanırsa,

$$\overset{\circ}{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(Y)X \tag{6.1.12}$$

ve

$$m(X,Y) = B(X,Y) \tag{6.1.13}$$

olur. (6.1.2) ve (6.1.12) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \overset{\circ}{\nabla}_X N &= \nabla_X N + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(N)X \\ &= -A_N X + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(N)X \\ &= (-A_N + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(N))X \end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu için Gauss ve Weingarten formülleri $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(TM^{\perp})$ için,

$$\nabla^*_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + B(X,Y) \tag{6.1.14}$$

ve

$$\begin{aligned} \nabla^*_X N &= (-A_N + \sum_{i=1}^{s} \eta^i(N))X + \overset{\circ}{\nabla}{}^{\perp}{}_X N \\ &= -A_N X + \overset{\circ}{\nabla}{}^{\perp}{}_N X \end{aligned} \tag{6.1.15}$$

dır. Burada B; M nin ikinci temel formu, A_N; N nin şekil operatörüdür.

Teorem 6.1.2. *Yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu üzerine indirgenmiş konneksiyon da yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyondur.*

Lemma 6.1.1. *İntegral altmanifoldları Kaehler liflere sahip yarı-simetrik konneksiyonlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold $\widetilde{M}$ nın yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ için,*

$$P(u(X,Y)) = \varphi P\overset{\circ}{\nabla}_X Y - \sum_{i=1}^{s}[(\alpha+1)\eta^i(Y)\varphi PX + \eta^i(Y)Pt_iX] \tag{6.1.16}$$

$$Q(u(X,Y)) = QCB(X,Y) - \sum_{i=1}^{s}\eta^i(Y)Qt_iX \tag{6.1.17}$$

$$\begin{aligned} B(X,\varphi PY) + \overset{\circ}{\nabla}{}^{\perp}{}_X\varphi QY &= \varphi Q\overset{\circ}{\nabla}_X Y + DB(X,Y) \\ &\quad - \sum_{i=1}^{s}[(\alpha+1)\eta^i(Y)\varphi QX - \eta^i(Y)f_iX] \end{aligned} \tag{6.1.18}$$

$$\begin{aligned} \eta^i(u(X,Y))\xi_i &= \sum_{i=1}^{s}[\alpha g(\varphi PX,Y)\xi_i + g(h_iX,Y)\xi_i] \\ &\quad - \sum_{i,j=1}^{s}\eta^i(Y)\eta^j(t_iX)\xi_i \end{aligned} \tag{6.1.19}$$

denklemleri geçerlidir.

İspat. $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ için (3.2.1), (3.2.2) ve (3.2.3) denklemleri (6.1.7) denkleminde yazılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla^*_X\varphi)Y = \sum_{i=1}^{s}[&\alpha(g(\varphi PX,Y)\xi_i - \eta^i(Y)\varphi PX - \eta^i(Y)\varphi QX) + g(h_iX,Y)\xi_i \\ &- \eta^i(Y)Pt_iX - \eta^i(Y)Qt_iX - \eta^i(Y)\sum_{j=1}^{s}\eta^j(t_iX)\xi_j - \eta^j(Y)f_iX \\ &- \eta^i(Y)\varphi PX - \eta^i(Y)\varphi QX] \end{aligned} \tag{6.1.20}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.2.1), (6.1.14) ve (6.1.15) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla^*_X\varphi)Y &= \nabla^*_X\varphi Y - \varphi\nabla^*_X Y \\ &= \nabla^*_X\varphi PY + \nabla^*_X\varphi QY - \varphi(\overset{\circ}{\nabla}_X Y + B(X,Y)) \\ &= \overset{\circ}{\nabla}_X\varphi PY + B(X,\varphi PY) - A_{\varphi QY}X + \overset{\circ}{\nabla}{}^{\perp}{}_X\varphi QY \\ &\quad - \varphi P\overset{\circ}{\nabla}_X Y - \varphi Q\overset{\circ}{\nabla}_X Y - CB(X,Y) - DB(X,Y) \end{aligned}$$

$$(\nabla^*_X\varphi)Y = P\overset{\circ}{\nabla}_X\varphi PY + Q\overset{\circ}{\nabla}_X\varphi PY + \sum_{i=1}^{s}\eta^i(\overset{\circ}{\nabla}_X\varphi PY)\xi_i + B(X,\varphi PY)$$
$$- PA_{\varphi QY}X - QA_{\varphi QY}X + \overset{\circ}{\nabla}{}^{\perp}{}_X\varphi QY - \sum_{i=1}^{s}\eta^i(A_{\varphi QY}X)\xi_i$$
$$- \varphi P\overset{\circ}{\nabla}_X Y - \varphi Q\overset{\circ}{\nabla}_X Y - CB(X,Y) - DB(X,Y) \tag{6.1.21}$$

elde edilir. (6.1.20) ve (6.1.21) denklemleri eşitlenip D, $D^{\perp}$, ξ_i ve $TM^{\perp}$ in vektör alanları dikkate alınıp (3.2.4) denklemi kullanılarak ispat tamamlanır. □

Lemma 6.1.2. *İntegral altmanifoldları Kaehler liflere sahip yarı-simetrik konneksiyonlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold $\widetilde{M}$ nın yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,*

$$\begin{aligned}
\varphi P(A_N X) + P(\overset{\circ}{\nabla}_X CN) &= P(A_{DN}X,) && (6.1.22)\\
Q((C\overset{\circ}{\nabla}{}^{\perp}N) + A_{DN}X - \overset{\circ}{\nabla}_X CN) &= 0, && (6.1.23)\\
\eta(A_{DN}X - \overset{\circ}{\nabla}_X CN) &= \alpha g(X,CN) + g(h_iX,N)\xi_i, && (6.1.24)\\
B(X,CN) + \varphi Q(A_N X) + \overset{\circ}{\nabla}{}^{\perp}{}_X DN &= D\overset{\circ}{\nabla}{}^{\perp}{}_X N && (6.1.25)
\end{aligned}$$

denklemleri geçerlidir.

İspat. $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $N \in TM^{\perp}$ için (6.1.7) denkleminde $Y = N$ alınırsa

$$(\nabla^*_X\varphi)N = \sum_{i=1}^{s}[\alpha(g(\varphi X,N)\xi_i - \eta^i(N)\varphi X) + g(h_iX,N)\xi_i + \eta^i(N)h_iX] \tag{6.1.26}$$

elde edilir. (6.1.26) denkleminde (3.2.1), (3.2.2), (6.1.14) ve (6.1.15) denklemleri kullanılırsa

$$(\nabla^*_X\varphi)N = \nabla^*_X\varphi N - \varphi\nabla^*_X N = \sum_{i=1}^{s}[\alpha g(\varphi X,N)\xi_i + g(h_iX,N)\xi_i]$$
$$\overset{\circ}{\nabla}_X CN + B(X,CN) - A_{DN}X + \overset{\circ}{\nabla}{}^{\perp}{}_X DN + \varphi A_N X - \varphi\overset{\circ}{\nabla}{}^{\perp}N = \sum_{i=1}^{s}[\alpha g(\varphi X,N)\xi_i + g(h_iX,N)\xi_i]$$
$$= P\overset{\circ}{\nabla}_X CN + Q\overset{\circ}{\nabla}_X CN + \sum_{i=1}^{s}\eta^i(\overset{\circ}{\nabla}_X CN)\xi_i + B(X,CN) - PA_{DN}X - QA_{DN}X - \sum_{i=1}^{s}(A_{DN}X)\xi_i$$
$$+ \overset{\circ}{\nabla}{}^{\perp}DN + \varphi PA_N X + \varphi QA_N X - C\overset{\circ}{\nabla}{}^{\perp}{}_X N - D\overset{\circ}{\nabla}{}^{\perp}{}_X N$$
$$= -\sum_{i=1}^{s}[\alpha g(X,CN)\xi_i + g(h_iX,N)\xi_i] \tag{6.1.27}$$

olur. (6.1.27) denkleminde $D, D^{\perp}, \xi_i$ ve $TM^{\perp}$ vektör alanlarına göre düzenlenirse ispat tamamlanır. □

Lemma 6.1.3. *M, Yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldun yarı-invaryant altmanifoldu olsun. $\forall X \in \Gamma(D)$ veya $X \in \Gamma(D^{\perp})$ için,*

$$\overset{\circ}{\nabla}_X \xi_i = (\alpha+1)X - \varphi t_i X - C f_i X, \;\; B(X,\xi_i) = -D f_i X \tag{6.1.28}$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\xi_i} \xi_j = 0, \;\; B(\xi_i,\xi_j) = 0 \tag{6.1.29}$$

denklemleri geçerlidir.

İspat. $\forall X \in \Gamma(TM)$ için (3.2.2), (3.2.3), (6.1.8) ve (6.1.14) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \nabla^*_X \xi_i = \overset{\circ}{\nabla}_X \xi_i + B(X,\xi_i) &= -\alpha\varphi^2 X - \varphi h_i X + X \\ &= \alpha X - \alpha \sum_{i=1}^{s} \eta^i(X)\xi_i - \varphi h_i X + X \\ &= \alpha X - \alpha \sum_{i=1}^{s} \eta^i(X)\xi_i - \varphi t_i X - \varphi f_i X + X \\ &= \alpha X - \alpha \sum_{i=1}^{s} \eta^i(X)\xi_i - \varphi t_i X - C f_i X - D f_i X + X \end{aligned} \tag{6.1.30}$$

elde edilir. (6.1.30) denkleminden (6.1.28) ve (6.1.29) denklemleri bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Lemma 6.1.4. *İntegral altmanifoldları Kaehler liflere sahip yarı-simetrik konneksiyonlu bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold $\widetilde{M}$ nın yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için,*

$$A_{\varphi X} Y = A_{\varphi Y} X \tag{6.1.31}$$

dır.

İspat. $\forall X, Y \in \Gamma(D^{\perp})$ ve $\forall Z \in \Gamma(TM)$ için, (6.1.3), (6.1.7) ve (6.1.14) denklemleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
g(A_{\varphi X}Y,Z) &= g(B(Y,Z),\varphi X)\\
&= g(\nabla^*_Z Y,\varphi X)\\
&= -g(\varphi\nabla^*_Z Y,X)\\
&= -g(\nabla^*_Z\varphi Y-(\nabla^*_Z\varphi)Y,X)\\
&= -g(\nabla^*_Z\varphi Y,X)-g((\nabla^*_Z\varphi)Y,X)\\
&= -g(\nabla^*_Z\varphi Y,X)\\
&= g(\varphi Y,\nabla^*_Z X)\\
&= g(\varphi Y,B(Z,X))\\
&= g(A_{\varphi Y}X,Z)
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan ispat tamamlanır. □

Lemma 6.1.5. *M, yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı $\widetilde{M}$ hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun bir yarı-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda $i\in\{1,...,s\}$ olmak üzere $\forall U\in\Gamma(D)$ ve $V\in\Gamma(D^{\perp})$ için,*

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\xi_k}U\in\Gamma(D) \tag{6.1.32}$$

$$\overset{\circ}{\nabla}_{\xi_i}V\in\Gamma(D^{\perp}) \tag{6.1.33}$$

dır.

İspat. $\forall X,Y,Z\in\Gamma(TM), U\in\Gamma(D)$ ve $V\in\Gamma(D^{\perp})$ için,

$$
\begin{aligned}
(\nabla^*_X g)(Y,Z) &= -\sum_{i=1}^{s}\{g(X,Y)\eta^i(Z)+g(X,Z)\eta^i(Y)\}\\
&= Xg(Y,Z)-g(\nabla^*_X Y,Z)-g(Y,\nabla^*_X Z)
\end{aligned} \tag{6.1.34}
$$

dır. $k,\ell\in\{1,...,s\}$ olmak üzere (6.1.34) denkleminde $Y=U\in D$, $X=\xi_k$ ve $Z=\xi_\ell$ alınırsa,

$$
\begin{aligned}
(\nabla^*_{\xi_k}g)(U,\xi_\ell) &= -\sum_{i=1}^{s}\{g(\xi_k,U)\eta^i(\xi_\ell)+g(\xi_k,\xi_\ell)\eta^i(U)\}\\
&= \xi_k g(U,\xi_\ell)-g(\nabla^*_{\xi_k}U,Z)-g(U,\nabla^*_{\xi_k}\xi_\ell)
\end{aligned}
$$

elde edilip,

$$g(\overset{\circ}{\nabla}_{\xi_k}U,\xi_\ell)=0$$

bulunur. Ayrıca (6.1.34) denkleminde $X=\xi_k\;\; Y=U\in D\; Z=V\in D^\perp$ alınırsa,

$$\begin{aligned}
g\nabla^*_{\xi_k}U,V) &= -g(U,\nabla^*_{\xi_k}V)\\
&= g(\varphi^2U,\nabla^*_{\xi_k}V)\\
&= -g(\varphi U,\varphi\nabla^*_{\xi_i}\varphi V)\\
&= -g(\varphi U,\nabla^*_{\xi_k}\varphi V)\\
&= g(\nabla^*_{\xi_i}\varphi U,\varphi V)\\
&= 0.
\end{aligned}$$

elde edilir ve $g(\overset{\circ}{\nabla}_{\xi_k}U,V)=0$, bulunur. Buradan (6.1.32) denklemi elde edilir. Benzer şekilde (6.1.33) denklemi de elde edilebilir. □

Lemma 6.1.6. *M, Yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifoldunun yarı-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall X\in\Gamma(D)$ ve $X\in\Gamma(D^\perp)$ için,*

$$g(X,t_iY)=g(t_iX,Y), \tag{6.1.35}$$

$$\varphi t_iX+t_i\varphi X+Cf_iX=0, \tag{6.1.36}$$

$$Df_iX+f_i\varphi X=0 \tag{6.1.37}$$

denklemleri geçerlidir.

İspat. $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ için, h_i nin simetrikliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
g(X,h_iY) &= g(h_iX,Y)\\
g(X,t_iY+f_iY) &= g(t_iX,Y)+g(f_iX,Y)\\
g(X,t_iY)+g(X,f_iY) &= g(t_iX,Y)+g(f_iX,Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa (6.1.35) denklemi elde edilir. (2.5.4), (3.2.2) ve (3.2.3) denklemleri kullanılırsa

$$\varphi t_iX+t_i\varphi X+Cf_iX+Df_iX+f_i\varphi X=0 \tag{6.1.38}$$

denklemi elde edilir. (6.1.37) denkleminin teğet ve normal bileşenleri karşılaştırılırsa (6.1.36) ve (6.1.37) denklemleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

6.2 Distribüsyonların İntegrallenebilirliği

Teorem 6.2.1. *M, yarı-simetrik metrik olmayan konneksiyon ile tanımlı bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold $\widetilde{M}$ nın yarı-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda D distribüsyonu integrallenemez.*

İspat. $\forall X,Y \in \Gamma(D)$ için (6.1.28) ve (6.1.36) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
g([X,Y],\xi_i) &= g(\overset{\circ}{\nabla}_X Y,\xi_i) - g(\overset{\circ}{\nabla}_Y X,\xi_i)\\
&= -g(Y,\overset{\circ}{\nabla}_X \xi_i) + g(X,\overset{\circ}{\nabla}_Y \xi_i)\\
&= -g(Y,\alpha X - \varphi t_i X - Cf_i X) + g(X,\alpha Y - \varphi t_i Y - Cf_i Y)\\
&= g(Y,\varphi t_i X) + g(Y,Cf_i X) - g(X,\varphi t_i Y) - g(X,Cf_i Y)\\
&= g(Y,\varphi t_i X + Cf_i X) - g(X,\varphi t_i Y + Cf_i Y)\\
&= -g(Y,t_i\varphi X) + g(X,t_i\varphi Y)\\
&= -g(t_i Y,\varphi X) + g(t_i X,\varphi Y)\\
&= -g(Y,t_i\varphi X) - g(\varphi t_i X,Y)\\
&= -g(Y,t_i\varphi X + \varphi t_i X)\\
&= g(Y,Cf_i X) \neq 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da D distribüsyonun integrallenemediği açık bir şekilde görülür. □

Teorem 6.2.2. *İntegral altmanifoldları Kaehler liflere sahip yarı-simetrik konneksiyon ile tanımlı bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold $\widetilde{M}$ nın yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $D \oplus Sp\{\xi_1,\ldots,\xi_s\}$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart*

$$B(X,\varphi Y) = B(\varphi X,Y) \tag{6.2.1}$$

dır.

İspat. $\forall X,Y \in D\oplus Sp\{\xi_1,...,\xi_s\}$ için, (6.1.18) denkleminden

$$B(X,\varphi PY) = \varphi Q\overset{\circ}{\nabla}_X Y + DB(X,Y) \tag{6.2.2}$$

elde edilir. (6.2.2) denkleminde X ile Y nin yerleri değiştirilirse

$$B(Y,\varphi PX) = \varphi Q\overset{\circ}{\nabla}_Y X + DB(Y,X) \tag{6.2.3}$$

bulunur. (6.2.2) ve (6.2.3) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$B(X,\varphi PY) - B(Y,\varphi PX) = \varphi Q[X,Y] = 0$$

sonucu elde edilir. □

Teorem 6.2.3. *İntegral altmanifoldları Kaehler liflere sahip yarı-simetrik konneksiyon ile tanımlı bir hemen hemen α-kosimplektik f-manifold $\widetilde{M}$ nin yarı-invaryant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $D^{\perp}$ distribüsyonu integrallenebilirdir.*

İspat. $\forall X,Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için (3.2.4) denklemi kullanılırsa

$$U(X,Y) = -A_{\varphi QY}X \tag{6.2.4}$$

elde edilir. (6.1.16) denklemine φ uygulanır (6.2.4) denkleminde yerine yazılırsa

$$-\varphi P(A_{\varphi QY}X) = \varphi^2 P\overset{\circ}{\nabla}_X Y = -P\overset{\circ}{\nabla}_X Y + \sum_{i=1}^{s}\eta^i(P\overset{\circ}{\nabla}_X Y)\xi_i \tag{6.2.5}$$

bulunur. Buradan

$$P\overset{\circ}{\nabla}_X Y = \varphi P(A_{\varphi QY}X) \tag{6.2.6}$$

elde edilir. (6.2.5) denkleminde X ile Y nin yerleri değiştirilerek

$$P\overset{\circ}{\nabla}_Y X = \varphi P(A_{\varphi QX}Y) \tag{6.2.7}$$

yazılır. (6.2.6) ve(6.2.7) denklemleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$\varphi P(A_{\varphi Y}X - A_{\varphi X}Y) = P[X,Y] \tag{6.2.8}$$

bulunur. (6.1.31) denklemi (6.2.8) denkleminde yazılırsa $P([X,Y]) = 0$ elde edilir. Buradan da $[X,Y] \in \Gamma(D^{\perp})$ olduğu sonucu elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

□

KAYNAKLAR

[1] N. S. Ageshe and M. R. Chafle, *A semi-symmetric non-metric connection on a Riemann manifold,* **Indian J. Pure Appl. Math.** 23-6, 399-409 (1992).

[2] N. S. Ageshe and M. R. Chafle, *On submanifolds of a Riemannian manifold with a semi-symmetric non-metric connection,* **Tensor (N.S.)** 55. no 2, 120-130 (1994).

[3] N. Aktan, M. Yıldırım, and C. Murathan, *Almost f-cosymplectic manifolds,* **Mediterr. J. Math.** DOI 10. 1007/s00009-013-0329-2, (2013).

[4] K. Arslan, U. Lumiste, C. Murathan and C. Özgür, *2-semiparallel surfaces in space forms*, **Two particular cases. Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math.** 49, no. 3, 139-148, (2000).

[5] A. Bejancu, *CR-submanifolds of a Kaehler manifold,* **Proc. Amer. Math. Soc.** 69(1), 135-142. (1978).

[6] A. Bejancu, *Geometry of CR-submanifolds*, D.Reidel Publ. Co., Holland, 169p. (1986).

[7] A. Bejancu, and N. Papaghuic, *Semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold*, **An. St. Univ. Al. I. Cuza Iasi.** 27, 163-170. (1981).

[8] D. E. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in Mathematics, 203. Birkhauser Boston, Inc., Boston MA, (2002).

[9] M. C. Chaki, *On pseudo symmetric manifolds*, **An. Stiint. Univ. Al. I. Cuza Iasi Sect. I a Mat.** 33, no. 1, 53-58, (1987).

[10] B. Y. Chen, *Geometry of Submanifolds*, Marcel Dekker, New York, (1973).

[11] D. Chinea, C. Gonzalez, *A classification of almost contact metric manifolds*, **Analidi Matematica pura ed applicata.** 156(4), 15-36, (1990).

[12] M. P. Do Carmo, *Riemannian Geometry*, Birkhauser Boston, (1992).

[13] G. Dileo, A. M. Pastore, *Almost Kenmotsu manifolds and localy symmetry,* **Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.** 14, 343-354, (2007).

[14] K. I. Erken, P. Dacko and C. Murathan, *Almost* α*-paracosymplectic* f*-manifolds*, ar Xiv: 1402.6930v1[Math.DG] 27 Feb (2014).

[15] U. C. De, and N. Guha, *On generalised recurrent manifolds*, **Proc. Math. Soc.** 7, 7-11, (1991).

[16] U. C. De, D. J. Kamilya, *Hypersurfaces of a Riemannian manifold with semi-symmetric non-metric connection,* **J. Indian Inst. Sci.** 75, no. 6, 707-710, (1995).

[17] U. C. De, A. Yıldız, and A. F. Yalınız, *On* φ*-recurrent Kenmotsu manifolds,* **Turkish journal of Mathematics.** 33, 17-25, (2009).

[18] R. Deprez, *Semiparallel surfaces in Euclidean space,* **J. Geom.** 25, no.2, 192-200, (1985).

[19] R. Deszcz, *On pseudosymmetric spaces*, **Bull. Soc. Math. Belg. Ser.** A 44, no.1, 1-34, (1992).

[20] H. H. Hacısalihoğlu., N. Ekmekçi., *Tensör Geometri*, İnönü Üniv. Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, (2003).

[21] M. Falcitelli, M. Pastore f*-structure of Kenmotsu type*, **Mediterr. J. Math.** 3, 549-564, (2006).

[22] S. Golab, *On semi-symmetric and quarter-symmetric linear connections*, **Tensor (N.S.)** 29, no.3, 249-254, (1975).

[23] S. I. Goldberg, *Integrability of almost Kaehler manifolds*, **Proceedings of the American Math. Soc.** 21(1), 96-100. (1969).

[24] S. I. Goldberg, K. Yano, *Globally framed f-manifolds*, **IIIinois J. Math.** 15, 456-474, (1963).

[25] S. I. Goldberg, K. Yano, *Integrability of almost cosymplectic structure*, **Pacific J. Math.** 31, 373-382, (1969).

[26] D. Janssens, L. Vanhecke, *Almost contact structures and curvature tensors*, **Kodai Math J.** 4, 1-27, (1981).

[27] J. M. Lee, *Introduction to Smooth Manifolds*, Library of Congrees Cataloging in Pub. Data, (1950).

[28] H. B. Karadağ, M. Atçeken, *Invariant submanifolds of Sasakian manifolds*, **Balkan Journal of Geometry and Its Applications.** Vol:12, No:1, 68-75, (2007).

[29] S. J. Kim, X. Liu and M. M. Tripathi. *On semi-invariant submanifolds of nearly trans-Sasakian manifolds,* **Int. J. Pure and Appl. Mat. Sci.** 1, 15-34, (2004).

[30] T. W. Kim, H. K. Pak *Canonical foliations of certain classes of almost contact metric structures,* **Acta Math. Sinica, Eng. Ser. Aug.** 21(4), 841-846, (2005).

[31] K. Kenmotsu *A class of contact Riemannian manifold,* **Tohoku Math. Journal.** 24, 93-103, (1972).

[32] H. Kocayiğit, *Lorentz 3-Manifoldlarında Biharmonik Eğriler ve Kontakt Geometry*, Doktora Tezi, (2004).

[33] M. Kon, *Invariant submanifolds in Sasakian manifolds*, **Matt. Ann.** 219, 277-290, (1976).

[34] Z. Olszak, *On almost cosymplectic manifolds*, **Kodai Math.** 4(2), 239-250, (1981).

[35] Z. Olszak, *Almost cosymplectic manifolds with Kaehlerian leaves*, **Tensor N. S.** 46, 117-124, (1987).

[36] Z. Olszak, *Locally conformal almost cosymplectic manifolds,* **Kodai Math.** 4(2), 239-250, (1989).

[37] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, (1983).

[38] S. Nırmala, Agashe and Mangala R. Chafle. *A semi-symmetric non-metric connection on a Riemannıan manifold,* **Indian J. Pure appl. Math.** 23(6): 399-409, (1992).

[39] C. Özgür, *On generalized reccurent Kenmotsu manifolds*, **World Appl. Sci. J.** 2(1), 29-33, (2007).

[40] C. Özgür, C. Murathan, *On invariant submanifolds of Lorentzian para-Sasakian manifolds,* **Arab J. Sci. Eng. Sect. A Sci.** 34(2), 177-185, (2009).

[41] H. Öztürk, C. Murathan, N. Aktan, A. T. Vanlı, *Almost* α*-cosymplectic* f*-manifolds*, **Analele stıtıfice ale unıversıtatı 'AI.I Cuza' Dın ıaşı (S.N.) Matematica.** Tomul LX, f.1. (2014).

[42] J. Sengaptu, U. C. De, *On a type of semi-symmetric non-metric*, **Bull Calcutta Math. Soc.** 92, no. 5, 375-384, (2000).

[43] J. Sengaptu, U. C. De, and T. Q. Bınh, *On a type of semi-symmetric non-metric on a Riemann manifold,* **Indian J. Pure appl. Math.** 31(12), 1659-1670, (2001).

[44] S. Sular, *Kenmotsu manifoldlar ve bunların bazı altmanifoldları*, Doktora tezi. Balıkesir Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilimdalı. Balıkesir. (2009).

[45] S. Sular, C. Özgür and U. C. De, *Quarter-symmetric metric connection in a Kenmotsu manifold*, **SUT Journal of Math.** 44, no.2, 297-306, (2008).

[46] K. Yano, *On semi-symmetric metric connection*, **Rev. Roumaine Math. Pures Appl.** 15, 1579-1586, (1970).

[47] K. Yano and M. Kon, *Anti-invariant submanifold,* **Lect. Notes Pure Applied Math.** 21, Mercel-Dekker, New York. (1976).

[48] K. Yano and M. Kon, *Structures on Manifolds*, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd. (1984).

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Selahattin BEYENDİ

Doğum Yeri ve Tarihi : Kahta. 26. 04. 1974.

Adres : İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, MALATYA

E-Posta : selahattinbeyendi@gmail.com

Lisans : İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik Öğretmenliği Bölümü (1995-1999).

Yüksek Lisans : İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı Geometri Bilim Dalı (2006-2009).

Mesleki Deneyim :

1999-2002	Koyuncu İlköğretim Okulu	Matematik Öğretmeni
2002-2015	Cengiz Topel İlköğretim Okulu	Matematik Öğretmeni
2015-...	Kazım Karabekir Orta Okulu	Matematik Öğretmeni

Yayın Listesi :

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR:

1. **Beyendi S**, Aktan N. and Sivridağ A. İ., (2015): On invariant submanifolds of almost $\alpha-$cosymplectic $f-$manifolds, Konuralp Journal of Mathematics, Volume 3 No. 2(2015).
2. **Beyendi S**, Aktan N. and Sivridağ A. İ., (2016): Almost $\alpha-$cosymplectic $f-$manifolds endowed with a quarter-symmetric metric connection, International Journal of Mathematics and Statistics, (In press), (2016).