17

DÜZLEMSEL KİNEMATİKTE HOMOTETİK HAREKETLER İÇİN HOLDİTCH TEOREMİ

Ayhan TUTAR

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav
Yönergesi'nin
Matematik Anabilim Dalı için öngördüğü
BİLİM UZMANLIĞI TEZİ
olarak hazırlanmıştır.

MALATYA
Haziran, 1989

Fen-Bilimleri Enstitüsü Müdürlüğüne

İş bu çalışma, jürimiz tarafından Matematik Anabilim Dalında

BİLİM UZMANLIĞI TEZİ

olarak kabul edilmiştir.

Başkan Prof. Dr. Fethi ÇALLIALP

Üye Doç. Dr. Nuri KURUOĞLU

Üye Yrd. Doç. Dr. Mustafa ÇALIŞKAN

Onay

Yukarıdaki izmaların, adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

...../...../198...

Prof.Dr. A.Nihat BOZCUK
Fen Bilimleri Enstitüsü Müdürü

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın hazırlanmasında bütün imkanlarıyla bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen Hocam, Sayın Doç.Dr. Nuri KURUOĞLU' na sonsuz şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

I. BÖLÜM

DÜZLEM KİNEMATİĞİ

I.1 BİR-PARAMETRELİ HAREKETLER

Birbiri üzerinde hareket eden iki düzlem düşünelim, bunlar E ve E' olsunlar. Burada E hareketli, E' ise sabit düzlemdir.

Hareketi inceleyebilmek için bir $O' \varepsilon E'$ başlangıç noktasını alalım ve bu noktaya $\{\vec{e}_1', \vec{e}_2'\}$ koordinat sistemini tesbit edelim. Aynı şekilde E-düzleminde alınan O başlangıç noktasına $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ koordinat sistemini tesbit edelim. Bu iki koordinat sistemini, E ve E'-düzlemlerinin temsilcisi olarak kabul edecek ve hareketli koordinat sisteminin sabit koordinat sistemine göre hareketini inceleyeceğiz.

Bu koordinat sistemlerinin çeşitli konumları, şu iki büyüklük yardımı ile tarif olunabilir. (Şekil I-1.1).

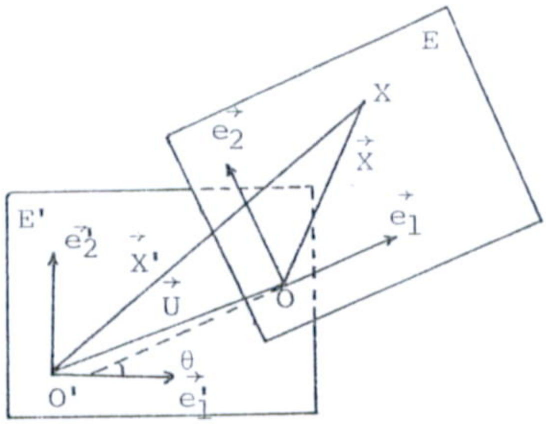
i) Hareketli sistemin başlangıç noktasından sabit sistemin başlangıç noktasına giden $\vec{OO'} = \vec{U}$ öteleme vektörü,

ii) Her iki koordinat sisteminin birbirine nazaran dönme açısı.

I.1.1 <u>Tanım</u>(Dönme açısı): Sabit ve hareketli sistemin aynı indisli birim vektörleri arasındaki θ açısına denir.

$\vec{OO'} = \vec{U}$ öteleme vektörü, aşağıdaki gibi hareketli sistemin $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ doğrultularındaki iki bileşenine ayrılabilir.

$$\vec{U} = u_1\vec{e}_1 + u_2\vec{e}_2 \qquad (I.1.1)$$



Şekil I.1.1

I.1.2 <u>Tanım</u> (Bir-parametreli düzlemsel hareket):E-hareketli düzleminin E' sabit düzlemine göre hareketi B= E/E' ile gösterilmek üzere B hareketinin θ dönme açısı ve $\vec{U}$ öteleme vektörünün u_1,u_2 bileşenleri $\theta=\theta(t)$, $u_1=u_1(t)$, $u_2=u_2(t)$ şeklinde reel bir t parametresinin fonksiyonu iseler B=E/E' hareketine bir-parametreli düzlemsel hareket denir. Buradaki t parametresi genel olarak zaman olarak alınır.

$O=O'$ olduğu zaman, $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ vektörleri $\vec{e}'_1$ ve $\vec{e}'_2$ doğrultularında bileşenlerine ayrılabilir ve buradan

$$\vec{e}_1 = \mathrm{Cos}\,\theta\,\vec{e}'_1 + \mathrm{Sin}\,\theta\,\vec{e}'_2$$

$$\vec{e}_2 = -\mathrm{Sin}\,\theta\,\vec{e}'_1 + \mathrm{Cos}\,\theta\,\vec{e}'_2 \qquad \text{(I.1.2)}$$

eşitlikleri elde edilir. Ayrıca $\vec{e}'_1$ ve $\vec{e}'_2$ vektörlerinin $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ vektörleri doğrultusundaki bileşenleri için de

$$\vec{e}'_1 = \mathrm{Cos}\,\theta\,\vec{e}_1 - \mathrm{Sin}\,\theta\,\vec{e}_2$$

$$\vec{e}'_2 = \mathrm{Sin}\,\theta\,\vec{e}_1 + \mathrm{Cos}\,\theta\,\vec{e}_2 \qquad \text{(I.1.3)}$$

eşitlikleri yazılabilir.

I.2 TÜREV DENKLEMLERİ

Bir X noktasının her iki E,E'-düzlemlerine nazaran hızlarını araştırmak için önce hareketimizin türev denklemlerini teşkil edeceğiz. (I.1.2) denklemlerinde, $\vec{e}_1'$ ve $\vec{e}_2'$ vektörlerini sabit kabul ederek, t zamanına göre türevleri alınırsa

$$\frac{d\vec{e}_1}{dt}=\dot{\vec{e}}_1=-\vec{e}_1'\dot{\theta}\mathrm{Sin}\theta+\vec{e}_2'\dot{\theta}\mathrm{Cos}\theta=(-\vec{e}_1'\mathrm{Sin}\theta+\vec{e}_2'\mathrm{Cos}\theta)\dot{\theta}$$

$$\frac{d\vec{e}_2}{dt}=\dot{\vec{e}}_2=-\vec{e}_1'\dot{\theta}\mathrm{Cos}\theta-\vec{e}_2'\dot{\theta}\mathrm{Sin}\theta=-(\vec{e}_1'\mathrm{Cos}\theta+\vec{e}_2'\mathrm{Sin}\theta)\dot{\theta}$$

bulunur. Bunları kısaca şöyle yazabiliriz:

$$\dot{\vec{e}}_1=\vec{e}_2\dot{\theta},\quad \dot{\vec{e}}_2=-\vec{e}_1\dot{\theta} \qquad \text{(I.2.1)}$$

Benzer olarak (I.1.1) denkleminin t ye göre türevi alınırsa

$$\frac{d\vec{U}}{dt}=\dot{\vec{U}}=\dot{\vec{e}}_1u_1+\vec{e}_1\dot{u}_1+\dot{\vec{e}}_2u_2+\vec{e}_2\dot{u}_2$$

elde edilir. $\dot{\vec{e}}_1$ ve $\dot{\vec{e}}_2$ nin (I.2.1) deki değerleri burada yerlerine konursa

$$\dot{\vec{U}}=\vec{e}_2u_1\dot{\theta}+\vec{e}_2\dot{u}_1-\vec{e}_1u_2\dot{\theta}+\vec{e}_2\dot{u}_2$$

veya

$$\dot{\vec{U}}=\vec{e}_1(\dot{u}_1-u_2\dot{\theta})+\vec{e}_2(\dot{u}_2+u_1\dot{\theta}) \qquad \text{(I.2.2)}$$

bulunur.

(I.2.1) ve (I.2.2) denklemlerine B=E/E' hareketinin türev denklemleri denir.

I.3 HIZLAR VE HIZLARIN TERKİBİ

E- düzleminin bizzat kendisi E'- düzlemine göre bir-parametreli hareket yaparken, bir X noktasıda hareketli E-düzlemindeki yerini t zamanı ile değiştirsin. İşte bu suretle iki hareketi bir araya getiriyor ve burada hızların nasıl terkip edileceğini araştırıyoruz.

I.3.1 <u>Tanım</u>(Relatif hız): X noktasının E-düzlemine göre hız vektörüne, yani X noktası E-deki yörüngesini çizerken sahip olduğu vektörel hıza X noktasının relatif(izafi) hızı denir ve $\vec{V}_r$ ile gösterilir. Bu hız için

$$\vec{X} = x_1\vec{e}_1 + x_2\vec{e}_2$$

denkleminden, $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ yi sabit tutarak, türev almak suretiyle

$$\vec{V}_r = \dot{x}_1\vec{e}_1 + \dot{x}_2\vec{e}_2 \qquad \text{(I.3.1)}$$

bulunur. Eğer X noktası E-de sabit ise $\vec{V}_r$ relatif hızı sıfırdır.

I.3.2 <u>Tanım</u> (Mutlak hız): X noktasının E'-ne göre hız vektörüne, X noktasının mutlak hızı denir ve $\vec{V}_a$ ile gösterilir.

$$\vec{X}' = \overrightarrow{O'X} = \overrightarrow{OO'} + \overrightarrow{OX} = \overrightarrow{OX} - \overrightarrow{OO'} = -\vec{U} + \vec{X} = (-u_1+x_1)\vec{e}_1 + (-u_2+x_2)\vec{e}_2 \qquad \text{(I.3.2)}$$

eşitliğinin t ye göre türevi alınırsa $\vec{V}_a$ için şu elde edilir:

$$\vec{V}_a = (-\dot{u}_1+\dot{x}_1)\vec{e}_1 + (-u_1+x_1)\dot{\vec{e}}_1 + (-\dot{u}_2+\dot{x}_2)\vec{e}_2 + (-u_2+x_2)\dot{\vec{e}}_2.$$

Burada $\dot{\vec{e}}_1$ ve $\dot{\vec{e}}_2$ nin (I.2.1) deki değerleri dikkate alınırsa,

$$\vec{V}_a = (-\dot{u}_1+\dot{x}_1)\vec{e}_1+(-u_1+x_1)\dot{\theta}\vec{e}_2+(-\dot{u}_2+\dot{x}_2)\vec{e}_2+(-u_2+x_2)(-\dot{\theta}\vec{e}_1)$$

$$\vec{V}_a = \{-\dot{u}_1+(u_2-x_2)\dot{\theta}\}\vec{e}_1+\{-\dot{u}_2+(-u_1+x_1)\dot{\theta}\}\vec{e}_2+\dot{x}_1\vec{e}_1+\dot{x}_2\vec{e}_2$$

$$\vec{V}_a = \{-\dot{u}_1+(u_2-x_2)\dot{\theta}\}\vec{e}_1+\{-\dot{u}_2+(-u_1+x_1)\dot{\theta}\}\vec{e}_2+\vec{v}_r$$

elde edilir. Burada

$$\vec{V}_f = \{-\dot{u}_1+(u_2-x_2)\dot{\theta}\}\vec{e}_1+\{-u_2+(-u_1\ x_1)\theta\}\vec{e}_2 \qquad (I.3.3)$$

ile gösterilen vektöre X noktasının sürüklenme hız vektörü denir.

O halde hızların terkibine ait şu teorem verilebilir:

I.3.1 Teorem: Eğer X noktası her iki sisteme göre hareketli ise hız vertörleri arasında

$$\vec{V}_a = \vec{V}_f + \vec{V}_r \qquad (I.3.4)$$

bağıntısı vardır.

I.3.3 <u>Tanım</u>(Açısal hız): Dönme açısının $d\theta : dt = \dot{\theta}$ türevine B hareketinin açısal hızı denir.

Bundan sonra $\dot{\theta} \neq 0$ kabul edeceğiz.

Şimdi B hareketinin her t anında sürüklenme hızı sıfır olan noktalarının araştırılması problemini ele alalım.

Böyle noktalar t anında, yalnız hareketli E-düzleminde değil aynı zamanda E'-düzleminde de, sükûnette bulunmak zorundadırlar. O halde (I.3.3) e göre

$$\vec{V}_f = 0$$

veya

$$-\dot{u}_1+(u_2-x_2)\dot{\theta}=0, \quad -\dot{u}_2+(-u_1+x_1)\dot{\theta}=0$$

olmak zorundadır.

$\dot{\theta}\neq 0$ olduğuna göre bu iki denklem her zaman tek anlamlı olarak çözülebilir. Bu çözümlere p_1 ve p_2 dersek

$$p_1=x_1=u_1+\frac{\dot{u}_2}{\dot{\theta}}=u_1+\frac{du_2}{d\theta}$$
$$p_2=x_2=u_2-\frac{\dot{u}_1}{\dot{\theta}}=u_2-\frac{du_1}{d\theta} \qquad (I.3.5)$$

bulunur.

I.3.4 Tanım(Pol=Kutup Noktası): $\vec{OP}=\vec{P}=\vec{e}_1 p_1+\vec{e}_2 p_2$ yer vektörüne takabül eden $P(p_1,p_2)$ noktasına $B=E/E'$ hareketinin t anındaki pol(kutup) noktası denir.

Bundan dolayı aşağıdaki şu teorem verilebilir:

I.3.2 Teorem: Açısal hızı sıfır olmayan bir harekette, her t anında, sürüklenme hızı sıfır olan yani her iki düzlemde sükûnette kalan bir tek nokta(pol noktası) vardır.

P pol noktası yardımı ile herhangi bir X noktasının $\vec{v}_f$ sürüklenme hızını başka şekilde de yazabiliriz: Bunun için(I.3.5) den

$$\dot{u}_1=(u_2-p_2)\dot{\theta},\quad \dot{u}_2=-(u_1-p_1)\dot{\theta}$$

ifadelerini hesaplar(I.3.3) de yerine yazarsak

$$\vec{V}_f=\{(p_2-u_2)\dot{\theta}-(x_2-u_2)\dot{\theta}\}\vec{e}_1+\{-(p_1-u_1)\dot{\theta}+(x_1-u_1)\dot{\theta}\}\vec{e}_2$$
$$\vec{V}_f=\{-(x_2-p_2)\vec{e}_1+(x_1-p_1)\vec{e}_2\}\dot{\theta} \qquad (I.3.6)$$

elde edilir.

X noktasının sürüklenme hızının bu şekildeki ifadesinden önemli iki sonuç çıkartılabilir: (Şekil I.3.1 ile de mukayese)

I.3.1 <u>Sonuç</u>: P polünden X noktasına giden pol ışınının

$$\vec{PX} = (x_1-p_1)\vec{e_1} + (x_2-p_2)\vec{e_2}$$

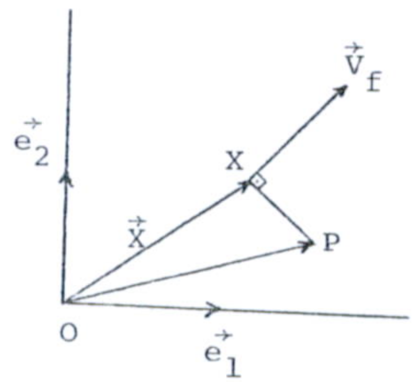
vektörü $\vec{V_f}$ ye diktir; çünkü

$$\langle \vec{PX}, \vec{V_f} \rangle = -(x_2-p_2)(x_1-p_1) + (x_1-p_1)(x_2-p_2) = 0$$

dır. Yani pol ışını hareketin her t anında sürüklenme hızına diktir.

I.3.2 <u>Sonuç</u>: $\vec{V_f}$ vektörünün uzunluğu(mutlak değeri) için şu bağıntı vardır:

$$\|\vec{V_f}\| = \sqrt{(x_1-p_1)^2 + (x_2-p_2)^2}\ \dot{\theta} = \|\vec{PX}\|\ \dot{\theta}$$



Şekil I.3.1

I.3.5 <u>Tanım</u>(Sabit ve hareketli pol eğrileri): Her t anına bir P pol noktası ait olacağından B hareketi esnasında P noktası her iki E ve E'-düzlemlerinde muhtelif konumlar alır. P noktasının hareketli E-düzlemindeki geometrik yeri genel olarak bir eğridir, bu eğriye B nin hareketli pol eğrisi denir ve(P) ile gösterilir. P noktasının E'-düzlemindeki geometrik yerine ise B nin sabit pol eğrisi denir ve (P') ile gösterilir.

I.4 İVMELER VE İVMELERİN TERKİBİ

E- düzleminin E'-düzlemine göre yaptığı bir B hareketi mevcut olsun. Bu hareketin seyri esnasında ayrıca E-düzlemine ve dolayısı ile E'-düzlemine göre de genel olarak bir hareket yapan X noktasının ivmesini araştıralım.

I.4.1 <u>Tanım</u>(Relatif ivme vektörü): X noktasının E-düzlemine göre olan ivme vektörüne relatif ivme vektörü denir ve $\vec{b}_r$ ile gösterilir.

X noktasının E-düzlemine nazaran $\vec{V}_r$ vektörel hızının t zamanına göre türevi alınarak bu vektörel ivme bulunur. Yani

$$\vec{b}_r=\dot{\vec{V}}_r=\ddot{x}_1\vec{e}_1+\ddot{x}_2\vec{e}_2 \qquad (I.4.1)$$

dir. Burada $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ sabit kabul edilmiştir.

I.4.2 <u>Tanım</u>(Mutlak ivme vektörü): X noktasının E'-düzlemine göre olan ivme vektörüne mutlak ivme vektörü denir ve $\vec{b}_a$ ile gösterilir.

$$\vec{V}_a=\vec{V}_f+\vec{V}_r=\{-\vec{e}_1(x_2-p_2)+\vec{e}_2(x_1-p_1)\}\dot{\theta}+\vec{e}_1\dot{x}_1+\vec{e}_2\dot{x}_2$$

mutlak hızının t zamanına göre türevi alınarak bu vektörel ivme bulunur.

$$\vec{b}_a=\dot{\vec{V}}_a=\{-\dot{\vec{e}}_1(x_2-p_2)-\vec{e}_1(\dot{x}_2-\dot{p}_2)+\dot{\vec{e}}_2(x_1-p_1)+\vec{e}_2(\dot{x}_1-\dot{p}_1)\}\dot{\theta}$$
$$+\{-\vec{e}_1(x_2-p_2)+\vec{e}_2(x_1-p_1)\}\ddot{\theta}+\dot{\vec{e}}_1\dot{x}_1+\vec{e}_1\ddot{x}_1+\dot{\vec{e}}_2\dot{x}_2+\vec{e}_2\ddot{x}_2$$

elde edilir. $\dot{\vec{e}}_1$ ve $\dot{\vec{e}}_2$ nin (I.2.1) deki değerlerini yerlerine yazarsak,

$$\vec{b}_a=\{-\vec{e}_2\dot{\theta}(x_2-p_2)-(\dot{x}_2-\dot{p}_2)\vec{e}_1-\vec{e}_1\dot{\theta}(x_1-p_1)+\vec{e}_2(\dot{x}_1-\dot{p}_1)\}\dot{\theta}$$
$$+\{-\vec{e}_1(x_2-p_2)+\vec{e}_2(x_1-p_1)\}\ddot{\theta}+\vec{e}_2\dot{\theta}\dot{x}_1+\vec{e}_1\ddot{x}_1-\vec{e}_1\dot{\theta}\dot{x}_2+\vec{e}_2\ddot{x}_2$$

veya

$$\vec{b}_a = \vec{e}_1\{\dot{p}_2\dot{\theta} - (x_1-p_1)\dot{\theta}^2 - (x_2-p_2)\ddot{\theta}\} + \vec{e}_2\{-\dot{p}_1\dot{\theta} - (x_2-p_2)\dot{\theta}^2 + (x_1-p_1)\ddot{\theta}\}$$

$$+2\dot{\theta}\{-\vec{e}_1\dot{x}_2 + \vec{e}_2\dot{x}_1\} + \vec{b}_r \qquad (I.4.2)$$

elde edilir.

(I.4.2) ifadesindeki

$$\vec{b}_f = \vec{e}_1\{\dot{p}_2\dot{\theta} - (x_1-p_1)\dot{\theta}^2 - (x_2-p_2)\ddot{\theta}\} + \vec{e}_2\{-\dot{p}_1\dot{\theta} - (x_2-p_2)\dot{\theta}^2$$

$$+(x_1-p_1)\ddot{\theta}\} \qquad (I.4.3)$$

vektörüne X noktasının sürüklenme ivme vektörü denir. O halde sürüklenme ivme vektörü hareketli sistemdeki sabit noktaların sabit sisteme göre ivmesidir. Gerçekte bu taktirde x_1, x_2 sayıları sabit ve $\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ddot{x}_1, \ddot{x}_2$ türevleri sıfır olur.

$$\vec{b}_c = 2\dot{\theta}\{-\vec{e}_1\dot{x}_2 + \vec{e}_2\dot{x}_1\}$$

ile gösterilen $\vec{b}_c$ vektörüne ise Coriolis-ivme vektörü denir.

O halde ivmelerin terkibi şu teoremle ifade edilir:

I.4.1 Teorem: İki hareketin terkibinde bir noktanın mutlak ivme vektörü, sürüklenme ivme vektörü ile Coriolis-ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün toplamına eşittir:

$$\vec{b}_a = \vec{b}_f + \vec{b}_c + \vec{b}_r$$

I.4.1 <u>Sonuç</u>: $\vec{b}_c$ Coriolis-ivmesi $\vec{V}_r$ relatif hızına diktir. Çünkü,

$$\langle \vec{b}_c, \vec{V}_r \rangle = 2\dot{\theta}(-\dot{x}_2\dot{x}_1 + \dot{x}_1\dot{x}_2) = 0$$

dır.

Bundan başka (I.4.4) den şunu görürüz: E-de sabit olmayan bir X noktasının Coriolis-ivmesi ancak ve ancak $\dot{\theta}\equiv 0$, yani B hareketi bir kaymaya(ötelenmeye) uğradığı zaman t nin bütün değerleri için sıfır olur. Bu taktirde (I.3.3) ve (I.3.4) den dolayı

$$\vec{V}_a=\vec{V}_f+\vec{V}_r=\vec{e}_1(-\dot{u}_1+\dot{x}_1)+\vec{e}_2(-\dot{u}_2+\dot{x}_2)$$

ve buradan türev alarak

$$\vec{b}_a=\vec{b}_f+\vec{b}_r=\vec{e}_1(-\ddot{u}_1+\ddot{x}_1)+\vec{e}_2(-\ddot{u}_2+\ddot{x}_2)$$

bulunur. Demek ki ancak bir kayma hareketi halinde ivmeler hızlar gibi terkip olunurlar.

Şimdi genel bir B hareketinde, t zamanında, sürüklenme ivmesi sıfır olan noktaları araştıralım. $\vec{b}_f=0$ dan şunlar elde olunur:

$$(x_1-p_1)\dot{\theta}^2+(x_2-p_2)\ddot{\theta}=\dot{p}_2\dot{\theta}$$

$$(x_1-p_1)\ddot{\theta}-(x_2-p_2)\dot{\theta}^2=\dot{p}_1\dot{\theta}\ ,$$

$\dot{\theta}\neq 0$ ise, (x_1-p_1) ve (x_2-p_2) büyüklüklerine göre homogen olmayan denklem sisteminin Δ ile gösterilen katsayılar determinantı şuna eşittir:

$$\Delta=\begin{vmatrix}\dot{\theta}^2 & \ddot{\theta}\\ \ddot{\theta} & -\dot{\theta}^2\end{vmatrix}=-(\dot{\theta}^4+\ddot{\theta}^2)\neq 0\ ;$$

buna göre yukarıdaki denklem sistemi çözülebilir.

I.4.3 <u>Tanım</u>(ivme polü): $\dot{\theta}\neq 0$ olmak üzere sürüklenme ivmesi sıfır olan bir tek nokta vardır. Bu noktaya ivme polü denir.

$$x_1-p_1=\frac{\begin{vmatrix}\dot{p}_2\dot{\theta} & \ddot{\theta}\\ \dot{p}_1\dot{\theta} & -\dot{\theta}^2\end{vmatrix}}{-(\dot{\theta}^4+\ddot{\theta}^2)}=\frac{-\dot{p}_2\dot{\theta}^3-\dot{p}_1\dot{\theta}^2}{-(\dot{\theta}^4+\ddot{\theta}^2)}$$

$$x_2-p_2=\frac{\begin{vmatrix}\dot\theta^2 & \dot p_2\dot\theta\\ \ddot\theta & \dot p_1\dot\theta\end{vmatrix}}{-(\dot\theta^4+\ddot\theta^2)}=\frac{\dot\theta(\dot p_1\dot\theta^2-\dot p_2\ddot\theta)}{-(\dot\theta^4+\ddot\theta^2)}$$

veya

$$x_1=p_1+\frac{\dot\theta(\dot p_2\dot\theta^2+\dot p_1\dot\theta^2)}{\dot\theta^4+\ddot\theta^2}$$

$$x_2=p_2-\frac{\dot\theta(\dot p_1\dot\theta^2-\dot p_2\ddot\theta)}{\dot\theta^4+\ddot\theta^2} \qquad (I.4.5)$$

dir.

I.5 KAPALI HAREKETLER

Bu kesimde, hareketin bütünü gözönüne alınması halinde bir-parametreli hareketler üzerinde duracağız. Burada ilk plânda hareket esnasında özel bir vektörün taradığı alanın yüzölçümü sözkonusudur.

I.5.1 <u>Tanım</u>(Bir-parametreli kapalı düzlemsel hareket):

u_1,u_2 ve θ; bir t reel parametresinin kafi derecede türetilebilen fonksiyonları olmak üzere

$$u_1=u_1(t),\quad u_2=u_2(t),\quad \theta=\theta(t)$$

fonksiyonları aynı $t_o\leq t\leq t_1$ aralığında tarif edilmiş olsun. Ayrıca

$$u_j(t+T)=u_j(t),\ (j=1,2)$$
$$\theta(t+T)=\theta(t)+2\pi\nu$$

bağıntıları sağlanacak şekilde T>0 en küçük sayı ise; E/E' hareketine T peryotlu ve ν dönme sayılı bir-parametreli kapalı düzlemsel hareket denir.

Burada ν bir tam sayıdır ve E'-ye göre E-düzleminin ilk durumuna gelinceye kadar(T zamanında) kaç tam dever yaptığını gösterir.

X noktasının E'-ye göre $\vec{dX}'$ değişimi, X noktasının sürüklenme hızına tekabül eder. (I.3.6) dan

$$\vec{dX}' = \{-(x_2-p_2)\vec{e}_1+(x_1-p_1)\vec{e}_2\}\ d\theta \qquad (I.5.1)$$

I .6 KAPALI BİR HAREKETİN YÖRÜNGE ALANI

İlk olarak çevre eğrisi, X noktasının kapalı yörünge eğrileri olan yüzeylerin f_X yüzölçümünü hesabetmek istiyoruz. Yani kısacası X noktasının f_X yörünge alanını hesaplamak istiyoruz. Bunun için

$$f_X = \frac{1}{2} \int (x_1^1 dx_2^1 - x_2^1 dx_1^1) \qquad (I.6.1)$$

Stokes alan formülünden faydalanacağız. Burada eğri integrali kapalı çevre eğrisi üzerinde alınır. Şimdi

$$<\vec{X}',\vec{dX}'> = \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ dx_1' & dx_2' \end{vmatrix} = x_1^1 dx_2^1 - x_2^1 dx_1^1$$

eşitliği gözönüne alınırsa(I.6.1) bağıntısı yerine,

$$f_X = \frac{1}{2} \int <\vec{X}',\vec{dX}'> \qquad (I.6.2)$$

yazılabilir. (I.6.2) ifadesinde (I.3.2) ve (I.5.1) bağıntıları kullanılırsa ;

$$<\vec{X}',\vec{dX}'> = \begin{vmatrix} -u_1+x_1 & -u_2+x_2 \\ -(x_2-p_2) & x_1-p_1 \end{vmatrix} d\theta$$

$$= \{(-u_1+x_1)(x_1-p_1)+(x_2-p_2)(-u_2+x_2)\}d\theta$$

$$= \{x_1^2+x_2^2-x_1p_1-x_2p_2-x_1u_1-x_2u_2+u_1p_1+u_2p_2\}d\theta$$

$$(I.6.3)$$

elde edilir. (I.3.5) denklemleri u_1 ve u_2 ye göre düzenlenirse

$$u_1=p_1-\frac{du_2}{d\theta} \qquad (I.6.4)$$
$$u_2=p_2+\frac{du_1}{d\theta}$$

bulunur. Bu değerler (I.6.3) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\langle \vec{x}', d\vec{x}' \rangle = \{x_1^2+x_2^2-x_1p_1-x_2p_2-x_1(p_1-\frac{du_2}{d\theta})$$
$$-x_2(p_2+\frac{du_1}{d\theta})+u_1p_1+u_2p_2\}d\theta$$
$$=\{x_1^2+x_2^2-2x_1p_1-2x_2p_2+x_1\frac{du_2}{d\theta}-x_2\frac{du_1}{d\theta}+u_1p_1+u_2p_2\}d\theta$$

elde edilir. Burada iki tarafın integrali alınır ve (I.6.1) eşitliği gözönüne alınırsa;

$$2f_x=(x_1^2+x_2^2)\int d\theta-2x_1\int p_1d\theta-2x_2\int p_2d\theta+x_1\int du_2-x_2\int du_1$$
$$+\int(u_1p_1+u_2p_2)d\theta \qquad (I.6.5)$$

eşitliği elde edilir.

Diğer taraftan, $O(x_1=x_2=0)$ koordinat başlangıcının yörünge alanı hesaplanırsa

$$f_O=\frac{1}{2}\int\begin{vmatrix}-u_1 & -u_2\\ p_2 & -p_1\end{vmatrix}d\theta$$

$$f_O=\frac{1}{2}\int(u_1p_1+u_2p_2)d\theta \Rightarrow 2f_O=\int(u_1p_1+u_2p_2)d\theta$$

bulunur.

Düzlemsel hareket kapalı olduğundan; $t=0$ için

$$\theta(T)=\theta(0)+2\pi\nu \Rightarrow \theta(T)-\theta(0)=2\pi\nu$$

$$\int_0^T d\theta(t)=\theta(t)\Big|_0^T=\theta(T)-\theta(0)=2\pi\nu$$

dir. Aynı şekilde t=0 için:

$$u_j(t+T)=u_j(t)$$

eşitliğinden,

$$u_j(T)-u_j(0)=0$$

yazılabilir. Buradan

$$\int_0^T du_j(t)=u_j(t)\Big|_0^T=u_j(T)-u_j(0)=0$$

elde edilir. Bulunan bu değerler (I.6.5) de yerlerine yazılırsa,

$$2f_x=2\pi\nu(x_1^2+x_2^2)-2x_1\int p_1 d\theta-2x_2\int p_2 d\theta+2f_0$$

veya

$$f_x=\pi\nu(x_1^2+x_2^2)-x_1\int p_1 d\theta-x_2\int p_2 d\theta+f_0 \qquad (I.6.6)$$

bulunur.

$\nu\neq 0$ ise, S Steiner noktasını elde ederiz.

I.6.1 Tanım(Steiner noktası): $d\theta$ kitle elementli kitle örtülmesinde hareketli(P) pol eğrisinin ağırlık merkezine Steiner noktası denir ve S ile gösterilir.

O halde (P) nin P noktalarına, bu noktalara ait $d\theta$ dönme açısının ağırlığının(veya kitlesinin) kitle elemanını yerleştirilmiş olarak düşünelim. Bu taktirde bu tarz örtülmüş hareketli pol eğrisinin ağırlık merkezi Steiner noktasıdır. S nin koordinatları s_1 ve s_2 olmak üzere

$$s_j=\frac{\int p_j d\theta}{\int d\theta}=\frac{1}{2\pi\nu}\int p_j d\theta \quad (j=1,2) \qquad (I.6.7)$$

dir. Burada pay koordinat eksenlerine göre statik momenti, payda ise bu suretle örtülmüş(P) pol eğrisinin bütün kitlesini gösterir.

(I.6.6) dan X noktasının yörünge alanı için

$$f_X = \pi\nu(x_1^2+x_2^2-2s_1x_1-2s_2x_2) + f_o \qquad (I.6.8)$$

Steiner formülü elde edilir.

I.7 GEOMETRİK SONUÇLAR

f_X sabit olarak kabul edilirse, (I.6.8) den çember denklemi tipinde x_1 ve x_2 ye göre karesel

$$x_1^2+x_2^2-2s_1x_1-2s_2x_2 + \frac{f_o-f_X}{\pi\nu} = 0 \qquad (I.7.1)$$

denklemi elde edilir. Buradan şu sonuç verilebilir:

I.7.1 <u>Sonuç</u>: E/E' hareketinde E hareketli düzleminin aynı f_X yüzey alanını çevreleyen bütün X noktaları bir çember üzerinde bulunurlar. Bu tesbit edilmiş f_X alanının muhtelif değerlerine, S Steiner noktası ortak merkez olmak üzere, iç içe çemberler tekabül eder.

Özel olarak $f_X=0$ alınırsa(I.7.1) den

$$x_1^2+x_2^2-2s_1x_1-2s_2x_2 + \frac{f_o}{\pi\nu} = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemle verilen bir (Ç) çemberini tetkik edelim. $\frac{1}{\pi\nu} f_X$ ifadesi X(herhangi (Ç) çemberi üzerinde bulunmayan) noktasının(Ç) çemberine göre kuvveti olarak alınabilir. Böylece şu sonuç verilebilir:

I.7.2 <u>Sonuç</u>: E-nin X noktasının f_X yörünge yüzeyi esas itibariyle (yani $1/\pi\nu$ çarpan farkıyla) hareketli E-düzleminin bir (Ç) çeberine göre X in kuvveti olarak gösterilebilir. Bu (Ç) çemberinin merkezi S Steiner noktasıdır ve kuvvetin sıfır olmasıyla karekterize edilir.

$B=E/E'$ düzlemsel hareketi $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ koordinat sisteminin seçilişinden bağımsızdır. Bu nedenle "O" başlangıç noktasını S Steiner noktasına götürelim. O zaman

$$s_1=s_2=0$$

olur ve dolayısıyla (I.6.8) formülü

$$f_X=\pi\nu(x_1^2+x_2^2)+f_S \qquad (I.7.2)$$

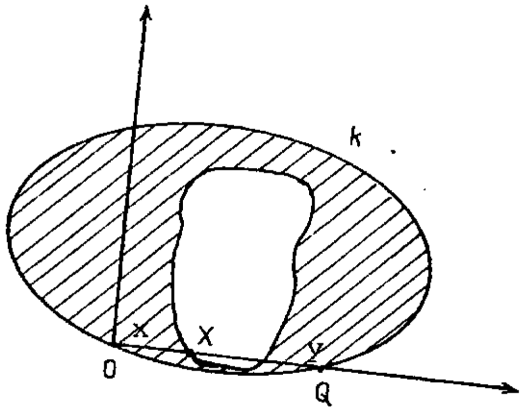
şeklinde sadeleştirilir. Burada f_S, S Steiner noktasının sabit E' düzleminde çizdiği yörünge eğrisinin yüzölçümünü ifade eder.

I.7.1 Tanım(oval): Düzlemde dış bükey kapalı eğrilerle sınırlanan bölgeye oval denir.

I.8 HOLDITCH TEOREMİ

E/E' düzlem hareketinde E'-düzleminde bir k ovali verilsin. Uzunluğu sabit olan bir doğru parçasının iki ucunu bu oval üzerinde hareket ettirelim. Doğru parçası üzerinde tesbit edilen bir X noktasının E/E' düzlemsel hareketi esnasında çizdiği kapalı eğri ile k ovali arasındaki bölgenin alanı sadece X noktasının doğru parçası üzerinde seçilişine bağlıdır. Yani bu alan k ovaline ve E/E' düzlemsel hareketine bağlı değildir [3].

İspat: Şekil I.8.1 de verilen k ovalini ve $\overline{OQ}$ doğru parçasını ele alalım. $\overline{OQ}$ doğru parçasının uzunluğuda q olsun. $\overline{OQ}$ doğru parçasının O ve Q uç noktaları k yı tam bir defa katedecek şekilde hareket etsin. Bu durumda $\nu=1$ dönme sayılı kapalı bir hareket meydana gelir.



Şekil I.8.1

O, bir $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ dik koordinat sisteminin başlangıcı olarak seçilirse, X noktasının koordinatları (x,0) olur. Bu durumda X noktasının yörünge alanı için(I.6.8) Steiner alan formülünden

$$f_X = \pi(x^2-2s_1x)+f_O$$

elde edilir. O ve Q noktaları aynı k ovalini çizdiği için O ve Q noktalarının yörünge alanları için

$$f_Q=f_O=\pi(q^2-2s_1q)+f_O$$

bulunur. Buradan da $\pi(q^2-2s_1q)= 0$ veya $q= 2s_1$ elde edilir. Şekil I.8.1 de $q-x= y$ veya $x\ y= q$ olduğundan

$$f_X= \pi\{x^2-(x\ y)x\}+f_O=\pi\{x^2-x^2-xy\}+f_O$$

veya

$$f_X=f_O-\pi xy$$

bulunur.

k ovali ile X noktasının kapalı yörünge eğrisi arasındaki taralı bölgenin alanını F ile gösterirsek,

$$F=f_O-f_X$$

olduğundan

$$F=\pi xy$$

bulunur.

O halde taralı bölgemizin alanı k nın seçilişine değil, yalnız X noktasının k ovalinin içini tarayan $\overline{OQ}$ doğru parçasının O ve Q uç noktalarından olan uzaklığına, yani X noktasının $\overline{OQ}$ doğru parçası üzerindeki yerine bağlıdır.

II. BÖLÜM

DÜZLEMSEL KİNEMATİKTE HOMOTETİK HAREKETLER

II. 1. HOMOTETİK HAREKETLER

II.1.1 Tanım (Homotetik Hareket): n-boyutlu öklid uzayında bir cismin homotetik hareketi

$$\begin{bmatrix} X' \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h.A & U \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \text{(II.1.1)}$$

dönüşümü ile ifade edilir. Burada A, (nxn)-tipinde ortogonal bir matris, $h=hI_n$ bir skaler matris ve X',X,U birer (n-1)-tipinde matrislerdir [1].

Bu çalışmada; n=2 özel haline karşılık gelen düzlemsel halde, hareketli bir E-düzleminin sabit E'-düzlemine göre homotetik hareketini inceleyeceğiz.

E-düzleminde hareketli koordinat sistemi $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ ve E'-düzleminde sabit koordinat sistemi $\{O';\vec{e}_1{}',\vec{e}_2{}'\}$ olsun.

Şimdi E-düzleminde alınan sabit bir X noktasının, herhangi bir t anında

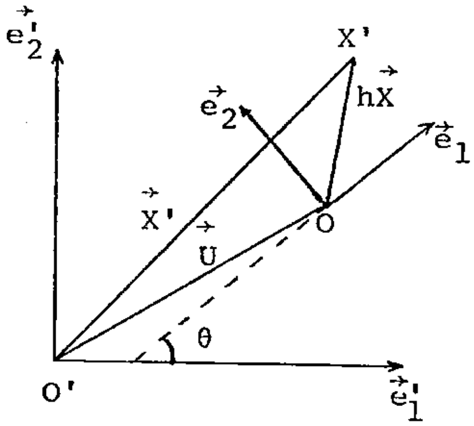
$$\vec{X}'=h\vec{X}-\vec{U}=(hx_1-u_1)\vec{e}_1+(hx_2-u_2)\vec{e}_2 \qquad \text{(II.1.2)}$$

denklemi ile tanımlanan homotetik hareketini inceleyelim. Burada; h, t nin reel bir fonksiyonudur.

Hareketli sistemin başlangıç noktasından sabit sistemin başlangıç noktasına giden $\vec{OO'}=\vec{U}$ vektörü

$$\vec{U}= u_1\vec{e}_1+u_2\vec{e}_2 \qquad \text{(II.1.3)}$$

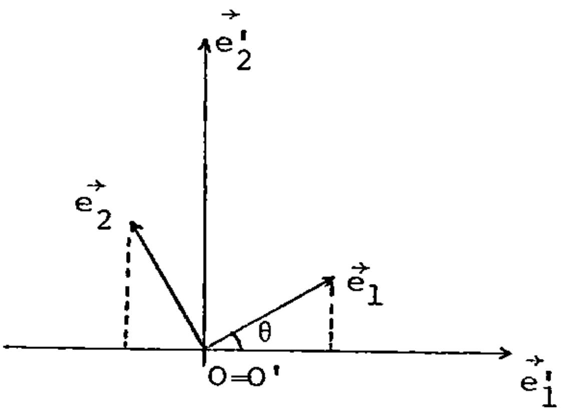
şeklinde ifade edilebilir.



Şekil II.1.1

Hareketli düzlemin sabit düzleme nazaran dönme açısı θ dır.

Bir an için her iki koordinat sistemini çakışacak şekilde kaydırılmış olarak düşünelim.



Şekil II.1.2

Bu durumda $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ vektörleri $\vec{e}_1'$ ve $\vec{e}_2'$ doğrultularında bileşenlerine ayrılabilir. ve

$$\vec{e}_1 = \cos\theta\vec{e}_1' + \sin\theta\vec{e}_2'$$
$$\vec{e}_2 = -\sin\theta\vec{e}_1' + \cos\theta\vec{e}_2' \qquad (II.1.4)$$

II.2 KAPALI DÜZLEMSEL HOMOTETİK HAREKET

II.2.1 Tanım(Kapalı düzlemsel homotetik hareket): u_1, u_2, θ ve h, bir t reel parametresinin kafi derecede türetilebilen fonksiyonları olmak üzere

$$u_1=u_1(t),\quad u_2=u_2(t),\quad \theta=\theta(t),\quad h=h(t)$$

fonksiyonları aynı $t_0\leq t\leq t_1$ aralığında tarif edilmiş olsun. Ayrıca

$$u_j(t+T)=u_j(t),\quad (j=1,2)$$

$$\theta(t+T)=\theta(t)+2\pi\nu,\quad (\nu=\text{ dönme sayısı})$$

bağıntıları sağlanacak şekilde $T>0$ en küçük sayı ise,

$$\vec{X}'=(hx_1-u_1)\vec{e}_1+(hx_2-u_2)\vec{e}_2$$

denklemi ile tanımlanan harekete, T peryotlu ve ν dönme sayılı kapalı düzlemsel homotetik hareket denir ve E-düzleminin E'-düzlemine göre kapalı homotetik hareketini B=E/E' ile gösterelim.

X noktasının hareketli sistemdeki koordinatları (x_1,x_2) olmak üzere

$$\vec{X}=x_1\vec{e}_1+x_2\vec{e}_2 \tag{II.2.1}$$

yazılabilir.

II.3 HIZLAR VE HIZLARIN TERKİBİ

E- düzlemi E'-düzlemine göre bir-parametreli kapalı homotetik hareket yapsın. Ayrıca X noktasıda hareketli E-düzlemindeki yerine t zamanı ile değiştirsin. Bu durumda iki hareket birleştirilmiş olur.

X noktasının E- ve E'-düzlemlerine göre hızlarını hesaplamak için önce B hareketinin türev denklemlerini teşkil edelim. Bunun için (II.1.4) denklemlerinin t ye göre türevini alırsak (I.2.1) den dolayı

$$\dot{\vec{e}}_1=\dot{\theta}\vec{e}_2, \quad \dot{\vec{e}}_2=-\dot{\theta}\vec{e}_1 \tag{II.3.1}$$

veya

$$d\vec{e}_1=d\theta\vec{e}_2, \quad d\vec{e}_2=-d\theta\vec{e}_1 \tag{II.3.2}$$

olur. Benzer düşünceyle (II.1.3) eşitliğinden türev alınırsa, (I.2.2) den dolayı

$$\dot{\vec{U}}= (\dot{u}_1-u_2\dot{\theta})\vec{e}_1+(\dot{u}_2+u_1\dot{\theta})\vec{e}_2 \tag{II.3.3}$$

veya

$$d\vec{U}=(du_1-u_2d\theta)\vec{e}_1+(du_2+u_1d\theta)\vec{e}_2 \tag{II.3.4}$$

elde edilir. Bu (II.3.1) ve (II.3.3) eşitliklerine B hareketinin türev denklemleri denir.

B hareketinin relatif hızı, (II.2.1) den türev alınarak

$$\vec{V}_r=\dot{x}_1\vec{e}_1+\dot{x}_2\vec{e}_2 \tag{II.3.5}$$

ve mutlak hız ise; (II.1.2) den türev alınarak

$$\frac{d\vec{X}'}{dt}=\vec{V}_a= (\dot{h}x_1+h\dot{x}_1-\dot{u}_1)\vec{e}_1+(hx_1-u_1)\dot{\vec{e}}_1+(\dot{h}x_2+h\dot{x}_2-\dot{u}_2)\vec{e}_2+(hx_2-u_2)\dot{\vec{e}}_2$$

$$\vec{V}_a= (\dot{h}x_1+h\dot{x}_1-\dot{u}_1)\vec{e}_1-(hx_1-u_1)(\dot{\theta}\vec{e}_2)-(\dot{h}x_2+h\dot{x}_2-\dot{u}_2)\vec{e}_2+(hx_2-u_2)(-\dot{\theta}\vec{e}_1)$$

$$\vec{V}_a=\{-\dot{u}_1+(u_2-hx_2)\dot{\theta}+\dot{h}x_1\}\vec{e}_1+\{-\dot{u}_2+(hx_1-u_1)\dot{\theta}+\dot{h}x_2\}\vec{e}_2+h\vec{V}_r \tag{II.3.6}$$

olarak bulunur. (II.3.6) eşitliğinde

$$\vec{V}_f= \{-\dot{u}_1+(u_2-hx_2)\dot{\theta}+\dot{h}x_1\}\vec{e}_1+\{-\dot{u}_2+(hx_1-u_1)\dot{\theta}+\dot{h}x_2\}\vec{e}_2 \qquad \text{(II.3.)}$$

vektörüne X noktasının sürüklenme hız vektörü denir. Eğer X noktası E-düzleminde sabit ise, yani $\vec{V}_r=0$ ise, bu durumda mutlak hız, sürüklenme hızına eşit olur. O halde hızlar arasında

$$\vec{V}_a=\vec{V}_f+\vec{V}_r\cdot h$$

bağıntısı vardır.

Dönme açısının $d\theta:dt=\dot{\theta}$ türevine B hareketinin açısal hızı denildiğini tanım(I.3.3) den biliyoruz. Bundan sonra kapalı düzlemsel homotetik hareketler için $\dot{\theta}\neq 0$ kabul edeceğiz.

Şimdi sürüklenme hızının sıfır olduğu noktaları araştıralım. Böyle noktalar t anında yalnız hareketli E-düzleminde değil aynı zamanda E'-düzleminde de sükunette bulunmak zorundadır. Buna göre (II.3.7) den

$$\vec{V}_f=0$$

veya

$$-\dot{u}_1+(u_2-hx_2)\dot{\theta}+\dot{h}x_1=0$$

$$-\dot{u}_2+(hx_1-u_1)\dot{\theta}+\dot{h}x_2=0$$

olur. Bu denklemleri x_1 ve x_2 ye göre düzenlersek,

$$\dot{h}x_1-h\dot{\theta}x_2=\dot{u}_1-u_2\dot{\theta}$$

$$h\dot{\theta}x_1+\dot{h}x_2=\dot{u}_2+u_1\dot{\theta}$$

elde edilir. Bu denklem sisteminin çözümünden de

$$x_1 = \frac{\dot{h}(\dot{u}_1 - u_2\dot{\theta}) + h\dot{\theta}(\dot{u}_2 + u_1\dot{\theta})}{\dot{h}^2 + h^2\,\dot{\theta}^2}$$

$$x_2 = \frac{\dot{h}(\dot{u}_2 + u_1\dot{\theta}) - h\dot{\theta}(\dot{u}_1 - u_2\dot{\theta})}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} \qquad \text{(II.3.8)}$$

bulunur. (II.3.8) eşitliğinde $x_1 = p_1$, $x_2 = p_2$ denilirse

$$p_1 = \frac{\dot{h}(\dot{u}_1 - u_2\dot{\theta}) + h\dot{\theta}(u_2 + u_2\dot{\theta})}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2}$$

$$p_2 = \frac{\dot{h}(\dot{u}_2 + u_1\dot{\theta}) - h\dot{\theta}(u_1 - u_2\dot{\theta})}{\dot{h}^2 + h^2\dot{\theta}^2} \qquad \text{(II.3.9)}$$

veya

$$p_1 = \frac{dh(du_1 - u_2 d\theta) + hd\theta(du_2 + u_1 d\theta)}{dh^2 + h^2\, d\theta^2}$$

$$p_2 = \frac{dh(du_2 + u_1 d\theta) - hd\theta(du_1 - u_2 d\theta)}{dh^2 + h^2 d\theta^2} \qquad \text{(II.3.10)}$$

yazılabilir.

II.3.1 <u>Tanım</u> (Pol kutup noktası): $\vec{OP} = \vec{P} = p_1 e_1 + p_2 e_2$ vektörüne karşılık gelen $P(p_1, p_2)$ noktasına B hareketinin t anındaki pol noktası denir.

Bu pol noktasından faydalanarak X noktasının (II.3.7) denklemi ile tanımlanan sürüklenme hızı aşağıdaki gibi de ifade edilebilir. Bunun için (II.3.9) dan $\dot{u}_1$ ve $\dot{u}_2$ değerleri hesaplanırsa

$$\dot h\dot u_1-\dot h u_2\dot\theta+h\dot\theta\dot u_2+h\dot\theta^2u_1=p_1(\dot h^2+h^2\dot\theta^2)$$

$$\dot h\dot u_2+\dot h u_1\dot\theta-h\dot\theta\dot u_1+h\dot\theta^2u_2=p_2(\dot h^2+h^2\dot\theta^2)$$

$$\dot h\dot u_1+h\dot\theta\dot u_2=p_1(\dot h^2+h^2\dot\theta^2)+\dot h u_2\dot\theta-h\dot\theta^2u_1$$

$$-h\dot\theta\dot u_1+\dot h\dot u_2=p_2(\dot h^2+h^2\dot\theta^2)-\dot h u_1\dot\theta-h\dot\theta^2u_2$$

$$\dot u_1=\frac{p_1\dot h^3+p_1\dot h h^2\dot\theta^2+\dot h^2u_2\dot\theta-h\dot h\dot\theta^2u_1-p_2\dot h^2h\dot\theta-p_2h^3\dot\theta^3+h\dot h\dot\theta^2u_1+h^2\dot\theta^3u_2}{\dot h^2+h^2\dot\theta^2}$$

$$\dot u_1=\frac{\dot h^2(p_1\dot h+u_2\dot\theta-p_2h\dot\theta)+h^2\dot\theta^2(p_1\dot h-p_2h\dot\theta+u_2\dot\theta)}{\dot h^2+h^2\dot\theta^2}$$

$$\dot u_1=\frac{(p_1\dot h+u_2\dot\theta-p_2h\dot\theta)(\dot h^2+h^2\dot\theta^2)}{(\dot h^2+h^2\dot\theta^2)}=p_1\dot h+u_2\dot\theta-p_2h\dot\theta$$

$$\dot u_2=\frac{p_2\dot h^3+p_2h^2\dot h\dot\theta^2-\dot h^2u_1\dot\theta-h\dot h\dot\theta^2u_2+p_1h\dot h^2\dot\theta+p_1h^3\dot\theta^3+h\dot h\dot\theta^2u_2-h^2\dot\theta^3u_1}{\dot h^2+h^2\dot\theta^2}$$

$$\dot u_2=\frac{\dot h^2(p_2\dot h-u_1\dot\theta+p_1h\dot\theta)+h^2\dot\theta^2(p_2\dot h+p_1h\dot\theta-u_1\dot\theta)}{\dot h^2+h^2\dot\theta^2}$$

$$\dot u_2=\frac{(\dot h^2+h^2\dot\theta^2)(p_2\dot h+p_1h\dot\theta-u_1\dot\theta)}{\dot h^2+h^2\dot\theta^2}=p_2\dot h-u_1\dot\theta+p_1h\dot\theta$$

bulunur. O halde

$$\begin{aligned}\dot u_1&=p_1\dot h-p_2h\dot\theta+u_2\dot\theta\\ \dot u_2&=p_1h\dot\theta+p_2\dot h-u_1\dot\theta\end{aligned}\qquad\text{(II.3.11)}$$

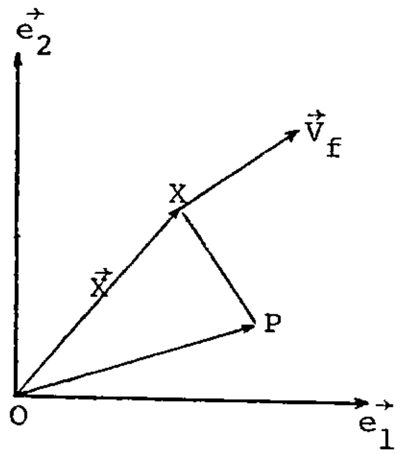
elde edilir. Bu değerleri (II.3.7) de yerine yazarsak

$$\vec{V}_f = \{-p_1\dot{h}+p_2h\dot{\theta}-u_2\dot{\theta}+(u_2-hx_2)\dot{\theta}+\dot{h}x_1\}\vec{e}_1+\{-p_1h\dot{\theta}-p_2\dot{h}-u_1\dot{\theta}+(hx_1-u_1)\dot{\theta}+\dot{h}x_2\}\vec{e}_2$$

$$\vec{V}_f = \{(x_1-p_1)\dot{h}-(x_2-p_2)h\dot{\theta}\}\vec{e}_1+\{(x_1-p_1)h\dot{\theta}+(x_2-p_2)\dot{h}\}\vec{e}_2 \qquad (II.3.12)$$

bulunur. Sürüklenme hızının bu ifadesinden aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

II.3.1 <u>Sonuç</u>:



Şekil II.3.1

Şekil II.3.1 den görüldüğü gibi P polünden X noktasına giden

$$\overrightarrow{PX} = (hx_1-p_1)\vec{e}_1+(hx_2-p_2)\vec{e}_2$$

pol ışını ile $\vec{V}_f$ nin iç çarpımı

$$\langle \vec{V}_f, \overrightarrow{PX} \rangle = (hx_1-p_1)(x_1-p_1)\dot{h}-(hx_1-p_1)(x_2-p_2)h\dot{\theta}$$
$$+(hx_2-p_2)(x_1-p_1)h\dot{\theta}+(hx_2-p_2)(x_2-p_2)\dot{h}$$

dır. Burada özel olarak $h=1$ alınırsa

$$\langle \vec{V}_f, \overrightarrow{PX} \rangle = (x_1-p_1)(x_1-p_1).0-(x_1-p_1)(x_2-p_2)\dot{\theta}$$
$$+(x_2-p_2)(x_1-p_1)\dot{\theta}$$
$$=0$$

bulunur. Bu ise h=1 için $\vec{PX}$ pol ışınının her t anında $\vec{V}_f$ ye dik olduğunu gösterir. Yani

$$<\vec{V}_f, \vec{PX}> = 0$$

dır.

II.3.2 <u>Sonuç:</u> $\vec{V}_f$ vektörünün uzunluğu (II.3.12) den

$$\|\vec{V}_f\|^2 = [(x_1-p_1)\dot{h}-(x_2-p_2)h\dot{\theta}]^2+[(x_1-p_1)h\dot{\theta}+(x_2-p_2)\dot{h}]^2$$

$$= (x_1-p_1)^2\dot{h}^2+(x_2-p_2)^2h^2\dot{\theta}^2-2(x_1-p_1)(x_2-p_2)h\dot{h}\dot{\theta}$$

$$+(x_1-p_1)^2h^2\dot{\theta}^2+(x_2-p_2)^2\dot{h}^2+2(x_1-p_1)(x_2-p_2)h\dot{h}\dot{\theta}$$

$$= (x_1-p_1)^2(\dot{h}^2+h^2\dot{\theta}^2)+(x_2-p_2)^2(h^2\dot{\theta}^2+\dot{h}^2)$$

$$\|\vec{V}_f\| = \sqrt{(\dot{h}^2+h^2\dot{\theta}^2)[(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2]}$$

olarak elde edilir. Eğer bu son eşitlikte h=1 özel hali alınırsa düzlemsel hareketden iyi bilinen

$$\|\vec{V}_f\| = \sqrt{(x_1-p_1)^2+(x_2-p_2)^2}\;\dot{\theta} = \|\vec{PX}\|\;\dot{\theta}$$

ifadesini elde ederiz.

II.4 İVMELER VE İVMELERİN TERKİBİ

B kapalı homotetik hareketinin ivmelerini bulmak için (II.3.5) ve (II.3.6) ifadelerinin t ye göre türevlerini almalıyız. (II.3.5) ifadesinin t ye göre türevi alınırsa

$$\vec{b}_r = \dot{\vec{V}}_r = \ddot{x}_1\vec{e}_1+\dot{x}_1\dot{\vec{e}}_1+\ddot{x}_2\vec{e}_2+\dot{x}_2\dot{\vec{e}}_2$$

elde edilir. Burada $\vec{e}_1$ ve $\vec{e}_2$ hareketli sisteme göre sabit olduğundan $\dot{\vec{e}}_1=\dot{\vec{e}}_2=0$ dır. Dolayısıyla $\vec{b}_r$ relatif ivme vektörü için

$$\vec{b}_r=\ddot{x}_1\vec{e}_1+\ddot{x}_2\vec{e}_2 \qquad \text{(II.4.1)}$$

bulunur.

X noktasının E'-düzlemine göre olan $\vec{b}_a$ mutlak ivme vektörü için (II.3.6) dan t ye göre türev alınırsa,

$$\begin{aligned}\vec{b}_a= &\{(\dot{x}_1-\dot{p}_1)\dot{h}+(x_1-p_1)\ddot{h}-(\dot{x}_2-\dot{p}_2)h\dot{\theta}-(x_2-p_2)\dot{h}\dot{\theta}-(x_2-p_2)h\ddot{\theta}\}\vec{e}_1\\ &+\{(x_1-p_1)\dot{h}-(x_2-p_2)h\dot{\theta}\}\dot{\vec{e}}_1+\{(\dot{x}_1-\dot{p}_1)h\dot{\theta}+(x_1-p_1)\dot{h}\dot{\theta}+(x_1-p_1)h\ddot{\theta}\\ &+(\dot{x}_2-\dot{p}_2)\dot{h}+(x_2-p_2)\ddot{h}\}\,\vec{e}_2\\ &+\{(x_1-p_1)h\dot{\theta}+(x_2-p_2)\dot{h}\}\,\dot{\vec{e}}_2+\dot{h}(\dot{x}_1\vec{e}_1+\dot{x}_2\vec{e}_2)+h(\ddot{x}_1\vec{e}_1+\dot{x}_1\dot{\theta}\vec{e}_2\\ &+\ddot{x}_2\vec{e}_2-\dot{x}_2\dot{\theta}\vec{e}_1)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{b}_a= &\{-\dot{p}_1\dot{h}+(x_1-p_1)\ddot{h}+\dot{p}_2h\dot{\theta}-(x_2-p_2)\dot{h}\dot{\theta}-(x_2-p_2)h\ddot{\theta}-(x_1-p_1)h\dot{\theta}^2\\ &-(x_2-p_2)\dot{h}\dot{\theta}\}\vec{e}_1\\ &+\{(x_1-p_1)\dot{h}\dot{\theta}-(x_2-p_2)h\dot{\theta}^2-\dot{p}_1h\dot{\theta}+(x_1-p_1)\dot{h}\dot{\theta}+(x_1-p_1)h\ddot{\theta}\\ &+(x_2-p_2)\ddot{h}-\dot{h}\dot{p}_2\}\vec{e}_2\\ &+\{\dot{x}_1\dot{h}+\dot{h}\dot{x}_1-h\dot{x}_2\dot{\theta}-h\dot{x}_2\dot{\theta}\}\vec{e}_1+\{\dot{x}_1\dot{\theta}h+\dot{x}_1\dot{\theta}h+\dot{h}\dot{x}_2+\dot{h}\dot{x}_2\}\vec{e}_2+(\ddot{x}_1\vec{e}_1+\ddot{x}_2\vec{e}_2)h\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{b}_a= &\{(x_1-p_1)(\ddot{h}-h\dot{\theta}^2)+(x_2-p_2)(-2\dot{h}\dot{\theta}-h\ddot{\theta})-\dot{p}_1\dot{h}+\dot{p}_2h\dot{\theta}\}\vec{e}_1\\ &+\{(x_1-p_1)(2\dot{h}\dot{\theta}+h\ddot{\theta})+(x_2-p_2)(\ddot{h}-h\dot{\theta}^2)-\dot{h}\dot{p}_2-\dot{p}_1h\dot{\theta}\}\vec{e}_2 \qquad \text{(II.4.2)}\\ &+2(\dot{h}\dot{x}_1-h\dot{x}_2\dot{\theta})\vec{e}_1+2(\dot{x}_1\dot{\theta}h+\dot{h}\dot{x}_2)\vec{e}_2+h\vec{b}_r\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son ifadede

$$\vec{b}_f = \{(x_1-p_1)(\ddot{h}-h\dot{\theta}^2)+(x_2-p_2)(-2\dot{h}\dot{\theta}-h\ddot{\theta})-\dot{p}_1\dot{h}+\dot{p}_2h\dot{\theta}\}\vec{e}_1$$
$$+\{(x_1-p_1)(2\dot{h}\dot{\theta}+h\ddot{\theta})+(x_2-p_2)(\ddot{h}-h\dot{\theta}^2)-h\dot{p}_1\dot{\theta}-\dot{h}\dot{p}_2\}\vec{e}_2 \qquad \text{(II.4.3)}$$

vektörüne sürüklenme ivme vektörü denir. Ayrıca

$$\vec{b}_c = 2(\dot{h}\dot{x}_1-h\dot{x}_2\dot{\theta})\vec{e}_1+2(\dot{h}\dot{x}_2+h\dot{x}_1\dot{\theta})\vec{e}_2 \qquad \text{(II.4.4)}$$

vektörüne de Coriolis-ivme vektörü denir. O halde aşağıdaki teoremi verebiliriz.

II.4.1 Teorem: İki hareketin terkibinde bir noktanın mutlak ivme vektörü, sürüklenme ivme vektörü ile Coriolis-ivme vektörü ve relatif ivme vektörünün h katının toplamına eşittir [2].

$$\vec{b}_a=\vec{b}_f+\vec{b}_c+h\vec{b}_r \qquad \text{(II.4.5)}$$

II.4.1 <u>Sonuç:</u> Özel olarak (II.4.5) ifadesinde h=1 alınırsa $\dot{h}$ ve $\ddot{h}$ türevleri sıfır olacağından $\vec{b}_a$ mutlak ivme vektörü için

$$\vec{b}_a = \{-(x_1-p_1)\dot{\theta}^2-(x_2-p_2)\ddot{\theta}+\dot{p}_2\dot{\theta}\}\vec{e}_1+\{(x_1-p_1)\ddot{\theta}-(x_2-p_2)\dot{\theta}^2-\dot{p}_1\dot{\theta}\}\vec{e}_2$$
$$+2\dot{\theta}(-\dot{x}_2\vec{e}_1+\dot{x}_1\vec{e}_2)+\vec{b}_r$$

elde edilir. Bu ise bir-parametreli düzlemsel harekette mutlak ivme vektörüdür.

II.4.2 <u>Sonuç</u>: h=1 özel hali için

$$\langle\vec{b}_c,\vec{V}_r\rangle = 0$$

dır. O halde $\vec{b}_c$ ivme vektörü, $\vec{V}_r$ relatif hızına diktir.

Şimdi düzlemsel hareketler için verilen ivme pollerinin koordinatlarını homotetik hareketlere genelleştiren bir teorem vereceğiz.

II.4.2 Teorem: Genel bir B düzlemsel homotetik hareketinde ivme polünün koordinatları aşağıdaki eşitliklerle verilir:

$$x_1=p_1+\frac{\dot p_1\dot h\ddot h+\dot p_1 h\dot h\dot\theta^2-\dot p_2 h\ddot h\dot\theta+\dot p_2 h^2\dot\theta^3+2\dot p_2\dot h^2\dot\theta+\dot p_1 h^2\dot\theta\ddot\theta+\dot p_2 h\dot h\ddot\theta}{(\ddot h-h\dot\theta^2)^2+(2\dot h\dot\theta+h\ddot\theta)^2}$$

$$x_2=p_1+\frac{\dot p_2\dot h\ddot h+\dot p_1 h\ddot h\dot\theta-\dot p_1 h^2\dot\theta^3+\dot p_2 h\dot h\dot\theta^2-2\dot p_1\dot h^2\dot\theta-\dot p_1 h\dot h\ddot\theta+\dot p_2 h\dot\theta\ddot\theta}{(\ddot h-h\dot\theta^2)^2+(2\dot h\dot\theta+h\ddot\theta)^2} \tag{II.4.6}$$

İspat: Sürüklenme ivme vektörünün sıfır olduğu noktalar ivme pollerini verdiği için (II.4.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned}(x_1-p_1)(\ddot h-h\dot\theta^2)+(x_2-p_2)(-2\dot h\dot\theta-h\ddot\theta)&=\dot p_1\dot h-\dot p_2 h\dot\theta\\(x_1-p_1)(2\dot h\dot\theta+h\ddot\theta)+(x_2-p_2)(\ddot h-h\dot\theta^2)&=h\dot p_1\dot\theta+\dot h\dot p_2\end{aligned} \tag{II.4.7}$$

elde edilir. Bu ise homogen olmayan bir lineer denklem sistemidir. Sistemin aşikar olmayan bir çözümünün olması için

$$\Delta=\begin{vmatrix}\ddot h-h\dot\theta^2 & -2\dot h\dot\theta-h\ddot\theta\\ 2\dot h\dot\theta+h\ddot\theta & \ddot h-h\dot\theta^2\end{vmatrix}$$

katsayılar determinantının sıfırdan farklı olması gerekir. $\dot h\neq 0$ ve $\dot\theta\neq 0$ olduğundan $\Delta\neq 0$ dır. O halde(II.4.7) sisteminin çözümünden

$$x_1-p_1=\frac{\begin{vmatrix}\dot p_1\dot h-\dot p_2 h\dot\theta & -2\dot h\dot\theta-h\ddot\theta\\ h\dot p_1\dot\theta+\dot h\dot p_2 & \ddot h-h\dot\theta^2\end{vmatrix}}{(\ddot h-h\dot\theta^2)^2+(2\dot h\dot\theta+h\ddot\theta)^2},$$

$$x_2-p_2=\frac{\begin{vmatrix} \ddot{h}-h\dot{\theta}^2 & \dot{p}_1\dot{h}-\dot{p}_2h\dot{\theta} \\ 2\dot{h}\dot{\theta}+h\ddot{\theta} & h\dot{p}_1\dot{\theta}+\dot{h}\dot{p}_2 \end{vmatrix}}{(\ddot{h}-h\dot{\theta}^2)^2+(2\dot{h}\dot{\theta}+h\ddot{\theta})^2}$$

eşitlikleri, veya

$$x_1-p_1=\frac{\dot{p}_1\dot{h}\ddot{h}-\dot{p}_1h\dot{h}\dot{\theta}^2-\dot{p}_2h\ddot{h}\dot{\theta}+\dot{p}_2h^2\dot{\theta}^3+2\dot{p}_1h\dot{h}\dot{\theta}^2+2\dot{p}_2\dot{h}^2\dot{\theta}+\dot{p}_1h^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+\dot{p}_2h\dot{h}\ddot{\theta}}{(\ddot{h}-h\dot{\theta}^2)^2+(2\dot{h}\dot{\theta}+h\ddot{\theta})^2}$$

$$x_2-p_2=\frac{\dot{p}_1h\ddot{h}\dot{\theta}+\dot{p}_2\dot{h}\ddot{h}-\dot{p}_1h^2\dot{\theta}^3-\dot{p}_2h\dot{h}\dot{\theta}^2-2\dot{p}_1\dot{h}^2\dot{\theta}-\dot{p}_1h\dot{h}\ddot{\theta}+2\dot{p}_2h\dot{h}\dot{\theta}^2+\dot{p}_2h^2\dot{\theta}\ddot{\theta}}{(\ddot{h}-h\dot{\theta}^2)^2+(2\dot{h}\dot{\theta}+h\ddot{\theta})^2}$$

$$x_1=p_1+\frac{p_1\dot{h}\ddot{h}+\dot{p}_1h\dot{h}\dot{\theta}^2-\dot{p}_2h\ddot{h}\dot{\theta}+\dot{p}_2h^2\dot{\theta}^3+2\dot{p}_2\dot{h}^2\dot{\theta}+\dot{p}_1h^2\dot{\theta}\ddot{\theta}+\dot{p}_2h\dot{h}\ddot{\theta}}{(\ddot{h}-h\dot{\theta}^2)^2+(2\dot{h}\dot{\theta}+h\ddot{\theta})^2}$$

$$x_2=p_2+\frac{\dot{p}_2\dot{h}\ddot{h}+\dot{p}_1h\ddot{h}\dot{\theta}-\dot{p}_1h^2\dot{\theta}^3+\dot{p}_2h\dot{h}\dot{\theta}^2-2\dot{p}_2\dot{h}^2\dot{\theta}-\dot{p}_1h\dot{h}\ddot{\theta}+\dot{p}_2h^2\dot{\theta}\ddot{\theta}}{(\ddot{h}-h\dot{\theta}^2)^2+(2\dot{h}\dot{\theta}+h\ddot{\theta})^2}$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar.

II.4.3 Sonuç: Özel olarak (II.4.6) eşitliklerinde $h=1$ alınırsa

$$x_1=p_1+\frac{\dot{\theta}(\dot{p}_1\ddot{\theta}-\dot{p}_2\dot{\theta}^2)}{\dot{\theta}^4+\ddot{\theta}^2}$$

$$x_2=p_2-\frac{\dot{\theta}(\dot{p}_1\dot{\theta}^2-\dot{p}_2\ddot{\theta})}{\dot{\theta}^4+\ddot{\theta}^2}$$

elde edilir. Bu ise bir-parametreli E/E' kapalı düzlemsel hareketinde ivme polünün koordinatlarıdır.

II.5 KAPALI BİR HOMOTETİK HAREKETİN YÖRÜNGE ALANI

X noktasının E'-düzlemine göre $\vec{dX}'$ değişimi X noktasının sürüklenme hızını verdiğinden (II.3.12) den dolayı

$$\vec{dX}'= \{(x_1-p_1)dh-(x_2-p_2)hd\theta\}\vec{e}_1+\{(x_1-p_1)+(x_2-p_2)dh\}\vec{e}_2 \tag{II.5.1}$$

yazılabilir.

X noktasının f_X yörünge alanını hesaplamak için

$$f_X= \frac{1}{2}\int(x_1'dx_2'-x_2'dx_1') \tag{II.5.2}$$

Stokes alan formülünden faydalanacağız [3].

Burada eğri integrali kapalı çevre eğrisi üzerinde alınır.

$$<\vec{X}',\vec{dX}'>= \begin{vmatrix} x_1' & x_2' \\ dx_1' & dx_2' \end{vmatrix} = x_1'dx_2'-x_2'dx_1'$$

eşitliğini gözönüne alalım. Böylece(II.5.2) bağıntısı yerine

$$f_X= \frac{1}{2}\int<\vec{X}',\vec{dX}'> \tag{II.5.3}$$

yazılabilir. (II.5.2) ifadesinde (II.1.2) ve (II.1.4) bağıntıları gözönüne alınırsa

$$\langle \vec{X}', d\vec{X}' \rangle = \begin{vmatrix} hx_1-u_1 & hx_2-u_2 \\ (x_1-p_1)dh-(x_2-p_2)hd\theta & (x_1-p_1)hd\theta+(x_2-p_2)dh \end{vmatrix}$$

$$= h^2x_1^2d\theta-h^2x_1p_1d\theta+hx_1x_2dh-hx_1p_2dh-hx_1u_1d\theta$$
$$+u_1p_1hd\theta-x_2u_1dh+u_1p_2dh-hx_1x_2dh+hx_2p_1dh$$
$$+h^2x_2^2d\theta-h^2x_2p_2d\theta+x_1u_2dh-p_1u_2dh-hx_2u_2d\theta+hu_2p_2d\theta$$
$$= (x_1^2+x_2^2)h^2d\theta-x_1p_1h^2d\theta-x_2p_2h^2d\theta+u_1p_1hd\theta+u_2p_2hd\theta$$
$$+u_1p_2dh-u_2p_1dh+u_2x_1dh-hp_2x_1dh-u_1x_2dh+hp_1x_2dh$$
$$-u_1x_1hd\theta-u_2x_2hd\theta$$

(II.5.4)

elde edilir. (II.3.10) denklemleri u_1 ve u_2 ye göre düzenlenirse

$$u_1hd\theta^2-u_2dhd\theta= p_1(dh^2+h^2d\theta^2)-dhdu_1-hdu_2d\theta$$
$$u_1dhd\theta+u_2hd\theta^2= p_2(dh^2+h^2d\theta^2)+hdu_1d\theta-dhdu_2$$

bulunur. Burada u_1 ve u_2 çözülürse

$$u_1= \frac{\begin{vmatrix} p_1(dh^2+h^2d\theta^2)-dhdu_1-hdu_2d\theta & -dhd\theta \\ p_2(dh^2+h^2d\theta^2)+hdu_1-dhdu_2 & hd\theta^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} hd\theta^2 & -dhd\theta \\ dhd\theta & hd\theta^2 \end{vmatrix}}$$

$$= \frac{p_1h(dh^2d\theta^2+h^2d\theta^4)-hdhdu_1d\theta^2-h^2du_2d\theta^3+p_2dhd\theta(dh^2+h^2d\theta^2)}{h^2d\theta^4+dh^2\,d\theta^2}$$

$$+\frac{hdhdu_1d\theta^2-dh^2du_2d\theta}{h^2d\theta^4+dh^2d\theta^2}$$

$$=p_1h+\frac{p_2dh}{d\theta}-\frac{h^2du_2d\theta^3+dh^2du_2d\theta}{h^2d\theta^4+dh^2d\theta^2}=p_1h+\frac{p_2dh}{d\theta}-\frac{du_2(h^2d\theta^3+dh^2d\theta)}{d\theta(h^2d\theta^3+dh^2d\theta)}$$

$$u_1=p_1h+\frac{p_2dh}{d\theta}-\frac{du_2}{d\theta}$$

ve

$$u_2=\frac{\begin{vmatrix} hd\theta^2 & p_1(dh^2+h^2d\theta^2)-dhdu_1-hdu_2d\theta \\ dhd\theta & p_2(dh^2+h^2d\theta^2)+hdu_1d\theta-dhdu_2 \end{vmatrix}}{h^2d\theta^4+dh^2d\theta^2}$$

$$=\frac{p_2h(dh^2d\theta^2+h^2d\theta^4)+h^2du_1d\theta^3-hdhdu_2d\theta^2-p_1dhd\theta(dh^2+h^2d\theta^2)}{h^2d\theta^4+dh^2d\theta^2}$$

$$+\frac{dh^2du_1d\theta+hdu_2dhd\theta^2}{h^2d\theta^4+dh^2d\theta^2}$$

$$=p_2h-\frac{p_1dh}{d\theta}+\frac{du_1(h^2d\theta^3+dh^2d\theta)}{d\theta(h^2d\theta^3+dh^2d\theta)}$$

$$u_2=p_2h-\frac{p_1dh}{d\theta}+\frac{du_1}{d\theta}$$

bulunur. O halde u_1 ve u_2 için

$$u_1=p_1h+\frac{p_2dh}{d\theta}-\frac{du_2}{d\theta}$$

$$u_2=p_2h-\frac{p_1dh}{d\theta}+\frac{du_1}{d\theta} \qquad \text{(II.5.5)}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Bu (II.5.5) değerleri (II.5.4) denkleminde yerine yazılırsa,

$$<\vec{X}',d\vec{X}'>=(x_1^2+x_2^2)h^2d\theta-x_1p_1h^2d\theta-x_2p_2h^2d\theta+u_1p_1hd\theta+u_2p_2hd\theta+u_1p_2dh$$

$$-u_2p_1dh+u_2x_1dh-hp_2x_1dh-u_1x_2dh+hp_1x_2dh$$

$$-(p_1h+\frac{p_2dh}{d\theta}-\frac{du_2}{d\theta})x_1hd\theta-(p_2h-\frac{p_1dh}{d\theta}+\frac{du_1}{d\theta})x_2hd\theta$$

$$=(x_1^2+x_2^2)h^2d\theta-2x_1p_1h^2d\theta-2x_2p_2h^2d\theta+u_1p_1hd\theta+u_2p_2hd\theta$$

$$+u_1p_2dh-u_2p_1dh+(u_2dh-2hp_2dh+hdu_2)x_1+(-u_1dh+2p_1hdh-hdu_1)x_2$$

bulunur. Burada iki tarafın integrali alınır ve (II.5.3) eşitliği gözönünde tutulursa;

$$2f_X=(x_1^2+x_2^2)\int h^2d\theta-2x_1\int p_1h^2d\theta-2x_2\int p_2h^2d\theta$$

$$+\int(u_1p_1hd\theta+u_2p_2hd\theta+u_1p_2dh-u_2p_1dh)$$

$$+x_1\int(u_2dh-2p_2hdh+hdu_2)+x_2\int(2p_1hdh-u_1dh-hdu_1) \qquad \text{(II.5.6)}$$

ifadesi elde edilir. Bu son eşitlikte $u_j(t)$ ler periyodik olduğundan

$$u_j(t+T)=u_j(t)$$

$$u_j(t+T)-u_j(t)=0$$

dır. Bu sebeple

$$\int_t^T du_j=u_j\Big|_t^T=u_j(T)-u_j(t)$$

yazılabilir. Burada $t=0$ için

$$\int_0^T du_j=0$$

dır. Fakat

$$\int h du_j \neq 0$$

dır.

Diğer taraftan, $O(x_1=x_2=0)$ koordinat başlangıcının yörünge alanı için

$$f_O = \frac{1}{2}\int \begin{vmatrix} -u_1 & -u_2 \\ -p_1dh+p_2hd\theta & -p_1hd\theta-p_2dh \end{vmatrix}$$

veya

$$2f_O = \int (u_1p_1hd\theta+u_1p_2dh-u_2p_1dh+u_2p_2hd\theta) \quad (II.5.7)$$

bulunur.

Homotetik hareket kapalı olduğundan

$$\theta(t+T) = \theta(t)+2\pi\nu$$

dir. $t=0$ için

$$\theta(T) = \theta(0)+2\pi\nu$$

ve

$$\int d\theta = \theta(t)\Big|_0^T = \theta(T)-\theta(0)$$

olduğundan

$$\int d\theta = 2\pi\nu$$

bulunur. Burada ν dönme sayısını gösterir. Böylece,

$$\int h^2 d\theta = 2k\pi \quad (II.5.8)$$

diyebiliriz. Burada $h=1$ için $k=\nu$ dür.

$\nu\neq 0$ ve $k\neq 0$ için kapalı homotetik hareketin S Steiner noktasını elde edelim.

II.5.1 Tanım (Steiner noktası): $h^2 d\theta$ kitle elementli kitle örtülmesinde hareketli (P) pol eğrisinin ağırlık merkezine Steiner noktası denir ve kısaca S ile gösterilir.

S nin koordinatları s_1 ve s_2 ile gösterilirse

$$\vec{S}=\overrightarrow{OS}=s_1\vec{e}_1+s_2\vec{e}_2$$

veya

$$\vec{S} = \frac{\int h^2 p_1 d\theta}{\int h^2 d\theta}\vec{e}_1 + \frac{\int h^2 p_2 d\theta}{\int h^2 d\theta}\vec{e}_2$$

yazılabilir. O halde S nin bileşenleri için

$$s_j=\frac{\int h^2 p_j d\theta}{\int h^2 d\theta} \quad (j= 1,2) \qquad \text{(II.5.9)}$$

bulunur. Burada (II.5.8) eşitliği gözönüne alınırsa,

$$s_j= \frac{1}{2k\pi} \int h^2 p_j d\theta$$

olur. (II.5.7), (II.5.8) ve (II.5.9) neticeleri (II.5.6) da yerlerine yazılırsa

$$2f_X= 2k\pi(x_1^2+x_2^2)-2k\pi 2s_1x_1-2k\pi 2s_2x_2+2f_O$$
$$+x_1\int(-2hp_2dh+hdu_2+u_2dh)+x_2\int(2hp_1dh-hdu_1-u_1dh)$$

veya

$$f_X= k\pi(x_1^2+x_2^2-2s_1x_1-2s_2x_2)+ f_O+\frac{1}{2}x_1\int(-2hp_2dh+hdu_2+u_2dh)$$
$$+\frac{1}{2}x_2\int(2hp_1dh-hdu_1-u_1dh) \qquad \text{(II.5.10)}$$

bulunur [2].

Bu son eşitlikte özel olarak h=1 alınırsa k=ν olduğundan

$$\frac{1}{2}\, x_1 \int(-2hp_2dh+hdu_2-u_2dh) = \frac{1}{2}\, x_2 \int(2hp_1dh-hdu_1-u_1dh) = 0$$

neticesi elde edilir. Buradan da düzlemsel harekette iyi bilinen

$$f_X = \pi\nu(x_1^2+x_2^2-2s_1x_1-2s_2x_2)+f_O$$

sonucu bulunur.

$$\frac{1}{2}\, x_1 \int(-2hp_2dh+hdu_2+u_2dh)+\frac{1}{2}\, x_2 \int(2hp_1dh-hdu_1-u_1dh) = \mu$$

diyelim. O zaman (II.5.10) ifadesi yerine

$$f_X = k\pi(x_1^2+x_2^2-2s_1x_1-2s_2x_2)+f_O+\mu \qquad (II.5.11)$$

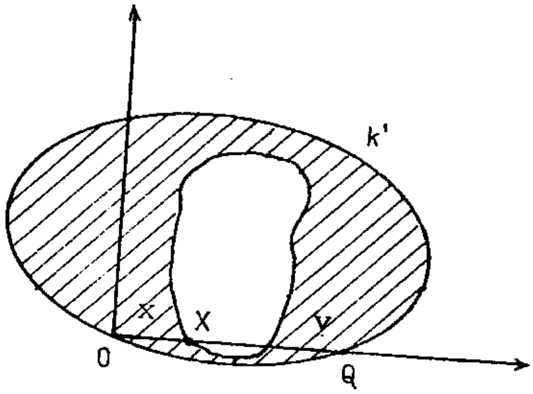
yazılabilir. Bu ifade kapalı düzlemsel homotetik hareketler için Steiner formülüdür [2].

II.6 DÜZLEMSEL KİNEMATİKTE HOMOTETİK HAREKETLER İÇİN HOLDİTCH TEOREMİ

Bu kesimde düzlemsel kinematikten çok iyi bilinen Holditch Teoremini düzlemsel homotetik hareketler için genelleştireceğiz.

II.6.1 Teorem(Holditch Teoremi): E/E' düzlemsel homotetik hareketinde E' düzleminde bir k' ovali verilsin. Uzunluğu sabit bir doğru parçasının iki ucunu bu oval üzerinde hareket ettirelim. Doğru parçası üzerinde tesbit edilen bir X noktasının E/E' düzlemsel homotetik hareketler esnasında çizdiği kapalı eğri ile k' ovali arasındaki bölgenin alanı sadece X noktasının doğru parçası üzerinde seçilişine bağlıdır.

İspat:



Şekil II.6.1

Yukarıdaki şekilde verilen k' ovalini ve uzunluğu q olan $\overline{OQ}$ doğru parçasını gözönüne alalım. $\overline{OQ}$ doğru parçasının O ve Q uç noktaları k' ovalini tam bir defa katedecek şekilde hareket etsin. Bu durumda k=1 dönme sayılı kapalı bir hareket meydana gelir.

O, bir $\{O;\vec{e}_1,\vec{e}_2\}$ dik koordinat sisteminin başlangıç noktası olarak seçilirse, X noktasının koordinatları (x,0) olur. Bu durumda X noktasının yörünge alanı için (II.5.10) dan

$$f_X = \pi(x^2-2s_1x)+f_O+\frac{1}{2}\,x\int(-2hp_2dh+hdu_2+u_2dh)$$

eşitliği elde edilir. Burada

$$\int(-2hp_2dh+hdu_2+u_2dh)=\mu$$

denilirse

$$f_X = \pi(x^2-2s_1x)+f_O+\frac{1}{2}\,x\mu \qquad \text{(II.6.1)}$$

bulunur.

O ve Q aynı k' ovalini çizdiği için

$$f_Q = f_O = \pi(q^2-2s_1q)+f_O+\frac{1}{2}\,q\mu$$

dir. Buradan da

$$\{\pi(q-2s_1)+\frac{1}{2}\mu\}q=0$$

sonucunu elde ederiz. Bu eşitlikten s_1 çözülürse

$$s_1=\frac{q}{2}+\frac{\mu}{4\pi}$$

bulunur. Bu değeri (II.6.1) de yerine yazarsak

$$f_X=\pi\{x^2-qx-\frac{\mu}{2\pi}x\}+f_0+\frac{1}{2}x\mu$$

$$f_X=\pi x^2-\pi qx-\frac{\mu}{2}x+f_0+\frac{1}{2}x\mu$$

$$f_X=\pi(x^2-qx)+f_0$$

elde edilir. k' ovali ile X noktasının kapalı yörünge eğrisi arasındaki alanı F ile gösterirsek,

$$F=f_0-f_X$$

olduğundan

$$F=f_0-\pi(x^2-qx)-f_0=-\pi(x^2-qx)$$

veya

$$F=-\pi[x^2-(x+y)x]$$

$$F=-\pi(x^2-x^2-xy)$$

$$F=\pi xy$$

elde edilir.

ÖZET

Bu tez iki kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda düzlemsel kinematikte hareketler için temel kavramlar ve teoremlere yer verildi.

İkinci kısımda, düzlemsel kinematikte kapalı homotetik hareketler için temel kavramlar verildi. Ayrıca, düzlemsel kinematikte hareketler için iyi bilinen ivme polleri ve Holditch Teoremi kapalı homotetik hareketler için genelleştirildi.

ABSTRACT

This thesis consists of two parts. In the first part the basic definitions and theorems for motions in the planer kinematics are given.

In the second part, the basic concepts for closed homotetic motion in the planer kinematics are given. Aftermore, acceleration poles and Holditch's Theorem which is known for motions in the planer kinematics are generalized to closed homotetic motions.

KAYNAKLAR

[1] HACISALİHOĞLU, H.H., On the Rolling of one Curve or Surfaces Upon Another. Royal Irısh Academy, DUBLİN, 1971.

[2] HACISALİHOĞLU, H.H., ÖZDEMİR, M., Düzlemsel Kinematikte Homotetik Hareketler İçin Steiner Formülü. Gazi Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Dergisi, Cilt 1 Sayı 1, Mayıs 1984.

[3] SPIVAK, M., Calculus On Manifolds. W.A. Benjamin, Inc., 1965, NEWYORK.

[4] MÜLLER, H.R., Kinematik Dersleri. Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları. Um. 96-Mat.27, 1963.