T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BAZI CEBİRSEL YAPILARA ESNEK (SOFT) YAKLAŞIM

Gülay OĞUZ

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Aralık 2018

Tezin Başlığı	:	BAZI CEBİRSEL YAPILARA ESNEK (SOFT) YAKLAŞIM
Tezi Hazırlayan	:	Gülay OĞUZ
Sınav Tarihi	:	17.12.2018

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: **Prof.Dr. İlhan İÇEN** ______________

İnönü Üniversitesi

Eş Danışman: **Doç.Dr. M.Habil GÜRSOY** ______________

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Mehmet BARAN ______________

Erciyes Üniversitesi

Prof.Dr. Tamer UĞUR ______________

Atatürk Üniversitesi

Prof.Dr. Muammer KULA ______________

Erciyes Üniversitesi

Doç.Dr. A. Fatih ÖZCAN ______________

İnönü Üniversitesi

Doç.Dr. Murat CANDAN ______________

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. H. İbrahim ADIGÜZEL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Bazı Cebirsel Yapılara Esnek (Soft) Yaklaşım" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Gülay OĞUZ

ÖZET

Doktora Tezi

BAZI CEBİRSEL YAPILARA ESNEK (SOFT) YAKLAŞIM

Gülay OĞUZ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

78+vi sayfa

2018

Danışman : Prof.Dr. İlhan İÇEN
Eş Danışman : Doç.Dr. M.Habil GÜRSOY

Klasik mantığın çözümleyemediği belirsizlik problemlerinin matematiksel olarak modellenmesi için geliştirilen en önemli teorilerden biri soft küme teorisidir. Reel dünyadaki olay ve olguların içerdiği tam ve kesin olmayan kavramlara yeni bir yaklaşım sunan bu teori uzun bir geçmişe sahip olmamasına rağmen bir çok alanda geniş bir çalışma potensiyeline ulaşmıştır. Özellikle matematikteki birçok cebirsel, topolojik ve kategorik yapılara uygulanabilirliği açısından dikkatleri çeken bu teori, büyük bir matematikçi kitlesi tarafından çalışılmaktadır.

Etki, grupoid, grup-grupoid ve çaprazlanmış modül gibi yapılara bir soft yaklaşım sunarak yeni bir kategori denkliğinin elde edilmesini amaçlayan bu tez çalışması beş bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde, tezdeki bilgi akışının sürekliliğini korumak adına bazı temel tanımlar ve teoremler ifade edilmiştir.

İkinci bölümde ise bir grubun bir küme üzerine etkisi kavramından haraketle bir soft grubun bir soft küme üzerine etkisi tanımlanmış ve temel özellikleri incelenmiştir. Ayrıca, soft etki ile yeni bir kavram olarak tanımlanan soft simetrik grup arasındaki ilişkiyi açıklayan önemli sonuçlar elde edilmiştir.

Üçüncü bölümde, grupoid teori ile soft küme teorisine ortak bir zemin kazandıran soft grupoid ve soft grup-grupoid kavramları tanıtılarak bunlara ait bazı özellikler araştırılmıştır. Sırasıyla, $\boldsymbol{SGd}$ ve $\boldsymbol{SGpGd}$ ile gösterilen soft grupoidlerin kategorisi ile soft grup-grupoidlerin kategorisi inşa edilmiştir.

Dördüncü bölümde, önemli bir cebirsel yapı olan çaprazlanmış modüle bir soft yaklaşım sunularak soft çaprazlanmış modül kavramı tanımlanmıştır. Soft çaprazlanmış modüllerin ve onlar arasındaki homomorfizmlerin $\boldsymbol{SCMod}$ kategorisi oluşturulmuştur. Ayrıca, soft grup-grupoidlerin kategorisi ile soft çaprazlanmış modüllerin kategorisinin denkliği de bu bölümde gösterilmiştir.

Son bölümde ise elde edilen sonuçlar genel çerçevede değerlendirilerek konunun sonraki çalışmalar için literatüre kazanımları ile ilgili öneriler sunulmuştur.

ANAHTAR KELİMELER: Soft küme, soft grup, etki, çaprazlanmış modül, kategori, grupoid, grup-grupoid, soft kategori, soft grupoid, soft grup-grupoid, soft etki, soft çaprazlanmış modül.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SOFT APPROACH TO SOME ALGEBRAIC STRUCTURES

Gülay OĞUZ

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

78+vi pages

2018

Supervisor : Prof.Dr. İlhan İÇEN
Co-Supervisor : Assoc.Prof.Dr. M.Habil GÜRSOY

Soft set theory is one of the most important theories developed for mathematical modeling of uncertainty problems which classical logic can not solve. This theory, which presents a new approach to the incomplete and uncertain concepts involved in events and phenomena in the real world, has reached a wide range of working possibilities in many areas, although it has not had a long history. In particular, this theory, which draws attention due to its applicability to many algebraic, topological and categorical structures in mathematics, is being studied by a great numbers of mathematicians.

This thesis, which aims to obtain a new category equivalence by presenting a soft approach to constructions such as action, groupoid, group-groupoid and crossed module, consists of five chapters. In the first chapter, some basic definitions and theorems are expressed in order to preserve the continuity of the flow of information in the thesis.

In the second chapter, the soft action of a soft group on a soft set is defined by using the concept of action of a group on a set and the basic properties are examined. In addition, significant results are obtained that explain the relationship between the soft action and the soft symmetric group which is defined as a new concept.

In the third chapter, the concepts of soft groupoid and soft group-groupoid, which they give a common ground to groupoid theory and soft set theory, are introduced and some properties of them are investigated. The category of soft group-groupoids and the category of soft groupoids are constructed, which denoted by $\boldsymbol{SGd}$ and $\boldsymbol{SGpGd}$, respectively.

In the fourth chapter, the concept of soft crossed module is defined by presenting a soft approach to a crossed module which is an important algebraic structure. The category of soft crossed module is established with soft crossed module morphism, indicated by ***SCMod***. Also, it has been shown that the category of soft group-groupoids and the category of soft crossed modules are equivalent.

In the last chapter, the results obtained are evaluated in the general framework and suggestions about the contribution to the literature for the subsequent studies are discussed.

KEYWORDS: Soft set, soft group, action, crossed module, category, groupoid, group-groupoid, soft category, soft groupoid, soft group-groupoid, soft action, soft crossed module.

TEŞEKKÜR

"Her şeyin en mühim noktası başlangıcıdır" der Antik Yunan filozofu ve ünlü matematikçi Aristokles. Uzun soluklu ve zorlu bir yolculuk olduğunun farkındalığı ile başladığım akademik hayatımın her aşamasında sonsuz sevgi ve desteklerini esirgemeyen değerli aileme en büyük teşekkürü borçluyum.

Bu tez çalışmasının başlangıcından bitişine kadar olan süreçte engin bilgileri ve paha biçilemez akademik tecrübesi ile her daim yol gösteren ve tez danışmanım olmasından büyük onur duyduğum kıymetli hocam Prof.Dr. İlhan İÇEN' e tüm içtenliğimle teşekkür ederim. Ayrıca, bu süreçte ilgisini ve desteğini eksik etmeyerek tezi en ince ayrıntılarına kadar titizlikle okuma sabrı gösteren, akademik bilgisi ve kişiliği ile kendisini tanımaktan ve kendisinin eş danışmanım olmasından övünç ve bahtiyârlık duyduğum sevgili hocam Doç.Dr. Mustafa Habil GÜRSOY' a derin şükranlarımı sunarak Tez İzleme Komitesi Üyeleri olan saygıdeğer hocalarım Doç.Dr.A.Fatih ÖZCAN ve Doç.Dr. Murat CANDAN' a da teşekkürü bir borç bilirim.

Sunulan bu çalışma buz dağının görünen kısmı olup görünmeyen kısmında hayal ettiğim mesleği icra ediyor olmanın mutluluğuna rağmen çalışma odasında geçirilen bir çok gecede sınırları zorlayan çabanın, emeğin, farkında bile olmadan zamansız geçen mevsimler ve yılların yorgunluğunun dayanılmaz noktaya ulaştığı vakitlerde verdikleri büyük destek ve katkıları ile beni motive eden değerli kardeşim İnşaat Mühendisi Feti Ahmet OĞUZ ve kıymetli dostum Dr. Berat KARAAĞAÇ' a canıgönülden teşekkür ederim.

Son olarak, ülkemizde bilimsel ve teknolojik çalışmaları yönlendiren ve bilim insanlarının yetiştirilmesinde teşvik edici bir misyona sahip olan TÜBİTAK'a doktora eğitimim boyunca 2228- B Yüksek Lisans Öğrencileri İçin Doktora Burs Programı kapsamında vermiş olduğu maddi destekten ötürü teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

İtalyan filozof ve matematikçi Galileo'ye ait olduğu bilinen "Evrenin dili matematiktir" sözüne binaen evrenin bir parçası olan yaşadığımız dünyada mevcut matematiksel modellemeler ile çözülebilen birçok problem ile karşılaşılması olasıdır. Ancak, başta fizik, kimya, tıp, mühendislik ve diğer birçok alandaki bazı kompleks problemler için matematik biliminin temelinde var olan tam ve kesin bilgiye dayanarak çözüme ulaşmak her zaman mümkün değildir. Bu noktada, matematikçiler dahil olmak üzere birçok bilim insanı klasik mantığın sınırlarını zorlayarak tam ve kesin olmayan bilgiyi modelleme arayışı içerisine girmişlerdir. Bu arayışlar çok geçmeden sonuç vererek birkaç teori geliştirilmiştir. Bu teorilerden biri de 1999 yılında ünlü Rus matematikçi Molodtsov tarafından ortaya atılan soft (esnek) küme teorisidir [1].

Soft (Esnek) küme teorisi klasik teorilerde karşılaşılan bazı zorlukların üstesinden gelinmesinde yeni bir kapı aralayarak belirsizliği modelleyen bir matematiksel yaklaşım olarak ortaya atılmıştır [1]. Bu teori kısa zamanda matematik başta olmak üzere mühendislik, ekonomi, sosyal ve sağlık bilimleri gibi farklı disiplinlerde geniş bir çalışma alanı yaratmıştır [$2-15$]. Özellikle, matematikteki tam ve kesinlik kavramına yeni bir boyut kazandıran bu teori matematikçiler tarafından cebirsel, topolojik ve kategorik açıdan çalışılmıştır [$3-5, 7-15$].

Topoloji ve cebir matematiğin en önemli dallarından ikisidir. Bu nedenle, birçok matematikçi soft küme teorisinin topolojik ve cebirsel unsurları ile yakından ilgilenmişlerdir. Maji ve arkaşları soft küme teorisi üzerinde cebirsel olarak bazı önemli notasyonlar tanımlamışlardır [3]. Aktaş ve Çağman soft grup tanımını vererek onun ile ilgili bazı özellikleri incelemişlerdir [5]. Bu teori ile ilgili ilk topolojik çalışmaları ise Shabir ve Naz sunmuştur [8]. Onlar soft topolojik uzay tanımını vererek bu uzay üzerinde ayırma aksiyomlarını çalışmışlardır [8]. Sonrasında, Çağman ile arkadaşları, Aygünoğlu ile Aygün ve Min soft topolojik uzay ve bazı cebirsel yapılar üzerinde çalışarak bazı temel sonuçlar elde etmişlerdir [$9-11$].

Bu çalışmalara ek olarak, matematiksel yapıların bir sınıflandırması olarak tanımlanan kategori teoriye bir soft yaklaşım ile bazı yeni kavramlar ortaya çıkmıştır. Bu kavramların başında Sardar ve Gupta' nın soft küme teorisi ile kategori teoriyi ortak tabanda birleştirerek tanımladığı soft kategori kavramı gelir. Onlar soft kategori teorisinin temellerini kurarak bazı kategorik kavramları softlaştırmışlardır [12]. Ayrıca, fuzzy kategori ile soft kategoriyi karşılaştırarak aralarındaki ilişkiyi açıklamışlardır [12]. Oguz, Gursoy ve Icen de Sardar ve Gupta' nın çalışmasının bir adım ötesinde soft kategoriye topolojik yapı ekleyerek yeni bir kavram olan soft topolojik kategoriyi tanımlamışlardır [40]. Bu kavramı örneklendirerek onunla ilgili bazı önemli karakterizasyonları sunmuşlardır. Topolojik kategorinin bazı kavramlarını soft küme teorisine uygulayarak soft topolojik alt kategori ve soft topolojik funktor gibi yeni tanımları vermişlerdir [40]. Buradan hareketle, objeleri soft topolojik kategoriler ve morfizmleri soft topolojik funktorlar olan yeni bir kategori inşa etmişlerdir [40].

Soft küme teorisinin yanısıra buradaki diğer önemli bir kavram da gruptan daha genel bir yapıya sahip olan grupoid kavramıdır. Bu kavram ilk olarak Brandt tarafından "*Uber eine Verallgemeinerungdes Gruppenbegriffes*" başlıklı çalışmada söz edilmiştir [24]. 1945 yılında Eilenberg ve MacLane kategori kavramını tanımladıktan sonra grupoid kavramı her morfizmi bir izomorfizm olan bir kategori olarak yeniden tanımlanmıştır [25, 28, 29]. Sonrasında, yapısal grupoidlerden biri olan grup-grupoid kavramı da Brown ve Spencer tarafından grupoidlerin kategorisinde bir grup nesne olarak verilmiştir [31]. Higgins, Hardy, Danesh-Naruie ve Brown tarafından yapılan birçok çalışma ile grupoid kavramı kategori teorinin bir parçası olmaktan çıkıp başlı başına bir teori olarak literatürde yerini almıştır [28−30]. Günümüzde ise grupoid teori ile ilgili çalışmaların sınırı homotopi teori, ergodik teori, lif demeti teorisi ve diferansiyel geometri gibi matematiğin birçok alanına genişletilmiştir [$34-36, 43, 45, 50$].

Bilimsel olarak kullanılan bazı kavramlar sadece bir alana özgü olmayıp zaman içinde disiplinlerarası bir boyut kazanırlar. Bu kavramlardan biri de grup teoride oldukça önemli bir yere sahip olan etki kavramıdır. Grup etkilerinin başta cebir olmak üzere topoloji, geometri, sayılar teorisi ve analiz gibi birçok matematik dalında çok sayıda örneği ve uygulaması bulunur [$16-22$]. Gruplar üzerinde etki kavramı kullanılarak yeni bir cebirsel yapı olan çaprazlanmış modül kavramı Whitehead tarafından tanımlanmıştır [26]. Bu kavram cebirsel topolojiye farklı bir boyut kazandırarak bazı topolojik problemlerin cebirsel yapılar ile çözüme kavuşturulmasına olanak tanımıştır [$26-27$]. 1976 yılında Brown ve Spencer tarafından çapraz modüllerin kategorisi ile grup-grupoidlerin kategorisinin denk olduğu ispatlanmıştır [31]. Böylece, bu denklik grup-grupoidler üzerinde yapılan çalışmaların daha basit bir cebirsel yapı olan çaprazlanmış modüllere indirgenerek sonuçlandırılmasında büyük kolaylıklar sağlamıştır. Ayrıca, bu denkliğin yüksek boyutlu grupoidlerin kategorisi için de geçerli olduğu Brown ve Spencer tarafından gösterilmiştir [32].

Bu tezin oluşum şemasında bütünlüğü sağlamak amacıyla ilk olarak literatürde var olan bazı temel kavramlar ve önermeler verilmiştir. Sonrasında, ilk özgün bölüm olarak Bölüm 2 de gruplar üzerindeki etki kavramı soft küme teorisindeki yaklaşım ile soft gruplara taşınarak yeni bir kavram olan soft etki tanıtılmıştır. Devamında, örneklendirilerek bazı özelliklerinin incelendiği bu kavramın farklı tipleri sunulmuştur. Ayrıca, etki ile ilgili olan sabitleyici, merkezleştirici ve normalleştirici gibi bazı kavramlar soft yaklaşım altında yeniden tanımlanmıştır. Soft simetrik grup tanımının da verildiği bu bölüm klasik Cayley teoremindeki benzer bir ilişkinin soft simetrik grup ile soft etki arasında da var olduğunun gösterildiği önemli bir sonuç ile sonlandırılmıştır.

Sonraki bölümde, [12] referansında soft kategorinin tanımlanma şekline benzer olarak soft grupoid tanımı verilmiştir. Bu kavram örneklendirilerek soft kategori ile olan ilişkisi detaylı bir şekilde incelenmiştir. Soft grupoid homomorfizmi tanımlanarak $\boldsymbol{SGd}$ ile gösterilen soft grupoidlerin kategorisi inşa edilmiştir. Ayrıca, soft alt grupoid ve normal soft alt grupoid tanımları verilerek onlarla ilgili bazı karakterizasyonlar sunulmuştur. Burada, soft grupoid tanımına ve bunun ile ilgili yapılan işlemlere benzer bir yaklaşım ile soft grup-grupoid kavramı da geniş bir perspektifte çalışılmıştır.

Son özgün bölümde ise Bölüm 2 de tanıtılan soft etki kavramı kullanılarak soft gruplar üzerinde tanımlanan soft çaprazlanmış modül kavramı sunulmuştur. Soft çaprazlanmış modül ve homomorfizminin tanımlanması ile gösterimi $\boldsymbol{SCMod}$ olan soft çaprazlanmış modüllerin kategorisi tanıtılmıştır. Belirlenen bazı özel koşullar ile her soft çaprazlanmış modülden bir soft grup-grupoid ve her soft grup-grupoidden bir soft çaprazlanmış modül elde edilmiştir. Böylece, elde edilen bu sonuçlar yardımı ile bu tezde asıl ulaşılmak istenen nokta olan soft çaprazlanmış modüller ile soft grup-grupoidlerin kategori denkliği ispatlanmıştır.

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Grup ve Etki

Matematik biliminde oldukça önemli bir konuma sahip olan grup teorisi genel anlamda bir simetri çalışması olup fizik, kimya ve mühendislik gibi bilim dallarında da çalışılan disiplinlerarası bir konudur. Burada bu teorinin detaylarını araştırmak yerine genel tanımları ile birlikte bazı temel özellikleri sunulacaktır.

Tanım 1.1.1. *Boştan farklı bir G kümesi üzerinde bir **ikili işlem***

$$\star : G \times G \longrightarrow G,\ (x, y) \longmapsto x \star y$$

*şeklinde tanımlı bir dönüşümdür. Üzerinde bir $\star$ ikili işlemi tanımlanan bir G kümesine bir **matematiksel yapı** denir ve $(G, \star)$ ile gösterilir [18].*

Tanım 1.1.2. *Aşağıdaki şartları sağlayan $(G, \star)$ matematiksel yapısına bir **grup**tur denir [17]:*

i. *Her $x, y, z \in G$ için $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$ (Birleşme özelliği),*

ii. *Her $x \in G$ için $x \star e = e \star x = x$ olacak şekilde bir tek $e \in G$ vardır (Birim eleman),*

iii. *Her $x \in G$ için $x \star x^{-1} = x^{-1} \star x = e$ olacak şekilde bir tek $x^{-1} \in G$ vardır (Ters eleman).*

Dahası, her $x, y \in G$ için $x \star y = y \star x$ şartı sağlanıyorsa $(G, \star)$ ikilisine değişmeli (**abelyan**) grup denir. Kısalık olması açısından $(G, \star)$ grubu G ile ve $x \star y$ işlemi xy ile gösterilecektir. G' nin eleman sayısına G' nin mertebesi denir ve $|G|$ ile gösterilir. Eğer G' nin eleman sayısı sonlu ise G' ye **sonlu** grup denir.

Uyarı 1.1.1. *Sadece **i.** ve **ii.** şartlarını sağlayan $(G, \star)$ ikilisi bir **monoid** olarak adlandırılır.*

Örnek 1.1.1. *$G = \{e\}$ aşikar gruptur [18].*

Örnek 1.1.2. *$G = \mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere $(G, +)$ bir grup yapısına sahiptir [18].*

Örnek 1.1.3. *$G = \mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere G deki $n \times n$ tipindeki tüm karesel matrislerin kümesi G_n^n ile gösterilsin. Bu durumda G_n^n deki tüm tersi alınabilir matrislerin*

$$GL_n(G) = \{A \in G_n^n : detA \neq 0\}$$

*kümesi matris çarpımına göre bir gruptur. Bu grup G üzerinde **genel lineer grup** olarak adlandırılır [18].*

Tanım 1.1.3. *Boştan farklı bir X kümesi üzerinde bire-bir ve örten fonksiyonların kümesi $Sym(X)$ ile gösterilsin. $Sym(X)$ kümesinin her elemanına bir permütasyon denir. $Sym(X)$ kümesi permütasyonların bileşke işlemine göre X üzerinde bir grup olup bu gruba **simetrik grup** veya **permütasyonların grubu** denir [17].*

Özel olarak, $X = \{1, 2, ..., n\}$ ise $Sym(X) = S_n$ ile gösterilir.

Bir G grubunun yapısı alt gruplar ve homomorfizmler aracılığıyla başka gruplara taşınabilir. Burada biz alt grup ve homomorfizm tanımlarını vereceğiz.

Tanım 1.1.4. *G grubunun boştan farklı bir alt kümesi H olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa H' ya G grubunun bir **alt grubu** denir ve $H \leq G$ ile gösterilir [17].*

i. *$\forall x, y \in H$ için $xy \in H$.*

ii. *G grubunun birim elemanı e olmak üzere $e \in H$.*

iii. *$\forall x \in H$ için $x^{-1} \in H$.*

Açıktır ki H alt grubu G grubu üzerindeki ikili işleme göre bir gruptur. Bu tanıma denk olarak aşağıdaki önermeyi verebiliriz.

Önerme 1.1.1. *G bir grup ve G' nin boştan farklı bir alt kümesi H olsun. Bu durumda,*

$$H \leq G \Longleftrightarrow \forall x, y \in H \text{ için } xy^{-1} \in H$$

[18].

Örnek 1.1.4. *Herhangi bir G grubu için $H = G$ ve $H = \{e\}$ aşikar alt gruplardır [16].*

Örnek 1.1.5. *$\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ kümeleri $(\mathbb{C}, +)$' nın birer alt grubudur [18].*

Örnek 1.1.6. *$SL_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathbb{R}_n^n : detA = 1\}$* ***özel lineer grubu*** *$GL_n(\mathbb{R})$ genel lineer grubunun bir alt grubudur [18].*

Tanım 1.1.5. *$H \leq G$ ve $x \in G$ olsun. G' de x' e göre belirlenen H' nın* ***sağ koseti***

$$Hx = \{hx : h \in H\}$$

kümesidir. G' de H' nın ***sağ*** *kosetlerinin kümesi $H \backslash G$ ile gösterilir [20].*

Benzer olarak; H' nın ***sol*** *kosetlerinin kümesi de*

$$xH = \{xh : h \in H\}$$

şeklinde tanımlıdır. G' de H' nın sol kosetlerinin kümesi G/H ile gösterilir.

Özel olarak, $x \in H$ ise $Hx = xH = H$ olduğu açıktır.

Ünlü matematikçi Joseph-Louis Lagrange tarafından 1771 yılında ispatsız olarak verilen ve Cauchy' nin 1812' de simetrik grubun alt gruplarına ilişkin bir kanıt sunmasına rağmen, genel şeklinin Camille Jordan tarafından elde edilmesi 100 yılı bulan Lagrange Teoreminin ifadesi aşağıdaki gibidir.

Teorem 1.1.1. ***(Lagrange)*** *G sonlu bir grup olmak üzere $H \leq G$ ise $|H|$ sayısı $|G|$' yi böler [20].*

Bu teoremin tersi doğru değildir.

Tanım 1.1.6. *Bir G grubu için $H \leq G$ olsun. $x \in G$ için H' nın G' deki* ***normalizeri***

$$N_G(H) = \{x \in G : xH = Hx\}$$

kümesi ve ***merkezleştiricisi*** *ise*

$$C_G(H) = \{x \in G : xh = hx, \forall h \in H\}$$

şeklinde tanımlıdır [17].

Tanım 1.1.7. *G bir grup ve $H \leq G$ olsun. Eğer her $g \in G$ için $Hg = gH$ ise H' ya G' nin bir* ***normal alt grubu*** *denir ve $H \trianglelefteq G$ ile gösterilir [17].*

Özel olarak, G grubu değişmeli ise her alt grubu normaldir. Dahası, G grubunun aşikar normal alt gruplar olarak adlandırılan $H = G$ ve $H = \{e\}$ şeklinde en az iki normal alt grubu vardır.

Örnek 1.1.7. *Bir G grubunun* ***merkezi***

$$Z(G) = \{x \in G : xg = gx, \ \forall g \in G\}$$

alt grubudur. $Z(G)$ alt grubunun G' nin bir normal alt grubu olduğu kolayca ispatlanabilir [20].

Önerme 1.1.2. *G bir grup olmak üzere her $g \in G$ için*

$$H \trianglelefteq G \Longleftrightarrow g^{-1}Hg \subset H$$

[20].

Tanım 1.1.8. *G ve H grupları arasında bir $\varphi : G \longrightarrow H$ dönüşümü her $x, y \in G$ için $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ şartını sağlıyorsa bu dönüşüme bir* ***grup homomorfizmi*** *denir. Bire-bir ve örten olan φ grup homomorfizmine bir* ***izomorfizm****, G ve H gruplarına da* ***izomorfik gruplar*** *denir ve $G \cong H$ ile gösterilir [18].*

Örnek 1.1.8. *$G=\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere $G^*=G-\{0\}$ için*

$$det : GL_n(G) \longrightarrow G^*,\ \ A \longmapsto det(A)$$

dönüşümü bir grup homomorfizmidir [18].

Örnek 1.1.9. *S_n simetrik grup ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere*

$$sign : S_n \longrightarrow \mathbb{Q}^*,\ \ f \longmapsto sign(f) = \prod_{1\leq i<j\leq n} \frac{f(i)-f(j)}{i-j}$$

dönüşümü bir grup homomorfizmidir [18].

Grup teoride önemli bir kavram olan etki ile grup homomorfizmi arasında bir ilişki vardır. Bu ilişkiyi ifade eden Cayley teoremini vermeden önce etki kavramını tanımlayacağız.

Tanım 1.1.9. *G bir grup ve M boştan farklı bir küme olmak üzere M üzerinde bir (**sol**) G-**etkisi** aşağıdaki şartları sağlayan bir*

$$G\times M \longrightarrow M,\ (g,x) \longmapsto g\cdot x$$

*dönüşümüdür öyleki G grubu M kümesi üzerine (**soldan**) etkir denir:*

i. *Her $x\in M$ için $e\cdot x = x$,*

ii. *Her $x\in M$ ve $g,h\in G$ için $g\cdot(h\cdot x)=(gh)\cdot x$.*

Bu durumda, M bir G-***küme*** olarak adlandırılır. [17].

Örnek 1.1.10. *$G=\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere*

$$GL_n(G)\times G^n \longrightarrow G^n,\ \ (A,x) \longmapsto Ax$$

dönüşümü ile $GL_n(G)$ genel lineer grubu G^n üzerine soldan etkir [17].

Uyarı 1.1.2. *Tanım 1.1.9' da özel olarak, M kümesi bir grup olmak üzere **i.** ve **ii.** şartlarına ek olarak aşağıdaki **iii.** şartı da sağlanıyor ise G grubu M grubu üzerine **soldan** etkir denir.*

iii. *Her $x,y\in M$ ve $g\in G$ için $g\cdot(xy)=(g\cdot x)(g\cdot y)$.*

*Bu etki ile birlikte M' ye bir $G-$**grup** denir [46].*

Örnek 1.1.11. *G grubunun kendi üzerinde üç farklı doğal etkisi var olup bu etkiler aşağıdaki gibidir [20]:*

i. *Sol dönüşüm etkisi:* $G \times G \longrightarrow G,\ (g,x) \longmapsto gx.$

ii. *Ters eleman ile sağ dönüşüm etkisi:* $G \times G \longrightarrow G,\ (g,x) \longmapsto xg^{-1}.$

iii. *Konjuge etkisi:* $G \times G \longrightarrow G,\ (g,x) \longmapsto gxg^{-1}.$

Böylece, bu etkiler ile her G grubu bir $G-$**grup**tur.

Tanım 1.1.10. *G ve M iki grup ve $\theta : G \times M \longrightarrow M,\ (g,x) \longmapsto \theta(g,x)$ bir etki dönüşümü olsun. Bu durumda, $G \times M$ üzerinde tanımlanan*

$$\begin{array}{rcl} \circ : (G \times M) \times (G \times M) & \longrightarrow & G \times M \\ ((g,x),(h,y)) & \longmapsto & (gh, x(\theta(g,y))) \end{array}$$

*işlemine göre elde edilen $(G \times M, \circ)$ yapısına G ve M gruplarının **yarı-direkt çarpımı** denir ve $G \ltimes M$ ile gösterilir. Ayrıca, bu şekilde tanımlanan $G \ltimes M$ yapısı bir gruptur [19].*

Tanım 1.1.11. *X bir G- küme olsun. G' nin etkisi altında x' in **yörüngesi***

$$\mathcal{O}(x) = \{g \cdot x : g \in G\}$$

kümesidir [20].

Açıkça söylenebilir ki $\mathcal{O}(x) \subset X$ olup tüm yörüngelerin kümesi X' in bir parçalanışıdır [20].

Tanım 1.1.12. *$x \in X$ olmak üzere x' in G-etkisi altındaki **sabitleyicisi***

$$Stab(x) = \{g \in G : g \cdot x = x\}$$

kümesidir [20].

Önerme 1.1.3. *X bir G-küme olsun. Bu durumda, $x \in X$ için*

$$|\mathcal{O}(x)| = |G/Stab(x)|$$

dir. Eğer G sonlu bir grup ise

$$|\mathcal{O}(x)| = |G|/|Stab(x)|$$

dir [20].

Modern anlamda grup kavramını ilk tanımlayan ünlü matematikçi Arthur Cayley olup kendi adı ile anılan aşağıdaki teoremi cebir alanında oldukça önemli yer tutar.

Teorem 1.1.2. *(**Cayley**) Her grup permütasyonların bir grubuna izomorftur [18].*

1.2 Kategori ve Grupoid

1945 yılında Samuel Eilenberg ve Saunders MacLane tarafından ortaya atılan kategori kavramı günümüzde kendi başına bir teori olarak matematik dünyasındaki yerini almıştır. Bu teori cebirsel topoloji başta olmak üzere homotopi teori, demet teorisi ve diferansiyel geometride geniş bir çalışma alanı yaratarak bazı problemler için daha elverişli ve basit olan çözüm yollarını inşa etmeyi amaçlamaktadır.

Tanım 1.2.1. *Nesnelerin kümesi $Ob(\mathcal{C})$ ve morfizmlerinin kümesi $Mor(\mathcal{C})$ olmak üzere dört yapı dönüşümü ile birlikte aşağıdaki şartları sağlayan*

$$\mathcal{C} = (Mor(\mathcal{C}), Ob(\mathcal{C}), s, t, i, m)$$

*yapısına bir **kategori** denir. Her $x, y, z \in Ob(\mathcal{C})$ çifti için x' den y' ye tüm morfizmlerin sınıfı $Mor(x, y)$ olmak üzere $f \in Mor(x, y)$ ve $g \in Mor(y, z)$ için*

i. *kaynak dönüşümü $s : Mor(\mathcal{C}) \longrightarrow Ob(\mathcal{C})$, $f \longmapsto s(f) = x$,*

ii. *hedef dönüşümü $t : Mor(\mathcal{C}) \longrightarrow Ob(\mathcal{C})$, $f \longmapsto t(f) = y$,*

iii. *nesne dönüşümü $i : Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow Mor(\mathcal{C})$, $x \longmapsto I_x$,*

iv. *kısmî bileşke işlemi $m : Mor(y, z) \times Mor(x, y) \longrightarrow Mor(x, z)$, $(g, f) \longmapsto g \circ f$*

şeklinde tanımlıdır öyleki

• $f \in Mor(x,y)$, $g \in Mor(y,z)$ *ve* $h \in Mor(z,w)$ *için* $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ *dir.*

• $f \in Mor(x,y)$, $g \in Mor(z,x)$ *için* $f \circ I_x = f$ *ve* $I_x \circ g = g$ *olacak şekilde birim morfizm olarak adlandırılan bir* $I_x \in Mor(x,x)$ *morfizmi vardır [41].*

Örnek 1.2.1. *Bir monoid tek nesneli bir kategoridir.* M *bir monoid olmak üzere* $Ob(M) = \{\star\}$ *ve* $Mor(M) = M$*, kısmî bileşke işlemi monoidin işlemi ve birim morfizm olarak da* M*' nin birim elemanı alınırsa tek nesneli bir kategori oluşur [44].*

Bu anlamda, kategori monoidden daha genel bir kavram olup bir kategori çok nesneli bir monoid olarak düşünülebilir.

Aşağıda bazı iyi bilinen kategori örnekleri sunulmuştur.

Örnek 1.2.2. *Nesneleri tüm kümeler, morfizmleri bu kümeler arasındaki fonksiyonlar ve kısmî işlem fonksiyonların bileşke işlemi olarak düşünülürse birim morfizmi özdeşlik fonksiyonu olan bir kategori oluşur. Bu kategori kümelerin kategorisi olarak adlandırılır ve* ***SET*** *ile gösterilir [41].*

Örnek 1.2.3. *Nesnelerin sınıfı topolojik uzaylar, morfizmleri ise topolojik uzaylar arasındaki sürekli fonksiyonlar ve kısmî işlem sürekli fonksiyonların bileşkesi olarak alınırsa birim morfizmi birim fonksiyon olan bir kategori elde edilir. Bu kategoriye topolojik uzayların kategorisi denir ve* ***TOP*** *ile gösterilir [41].*

Örnek 1.2.4. *Nesneleri gruplar, morfizmleri gruplar arasındaki homomorfizmler ve kısmî işlem grup homomorfizmlerinin bileşkesi alınarak oluşturulan kategoriye grupların kategorisi denir ve* ***Gp*** *ile gösterilir [41] .*

Benzer olarak, nesneleri halkalar ve morfizmleri halka homomorfizmleri alınarak halkaların kategorisi elde edilir ve ***Ring*** *ile gösterilir [42].*

Tanım 1.2.2. *$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olmak üzere aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $\mathcal{D}$ kategorisine $\mathcal{C}$' nin bir* ***alt kategorisi*** *denir [41].*

i. *$Ob(\mathcal{D}) \subseteq Ob(\mathcal{C})$.*

ii. *$Mor(\mathcal{D}) \subseteq Mor(\mathcal{C})$.*

iii. *$\mathcal{D}$ deki kısmî bileşke işlemi ile $\mathcal{C}$' deki kısmî bileşke işlemi örtüşür.*

iv. *Her bir $x \in Ob(\mathcal{D})$ için $\mathcal{D}$' deki I_x birim morfizmi, $\mathcal{C}$' deki birim morfizm ile örtüşür.*

Örnek 1.2.5. *Değişmeli halkaların kategorisi, halkaların kategorisinin bir alt kategorisidir [42].*

Tanım 1.2.3. *$\mathcal{D}$ kategorisi $\mathcal{C}$' nin bir alt kategorisi olsun.*

i. *Eğer $Ob(\mathcal{D}) = Ob(\mathcal{C})$ ise $\mathcal{D}$' ye* ***geniş*** *alt kategori denir [42].*

ii. *Eğer $Mor(\mathcal{D}) = Mor(\mathcal{C})$ ise $\mathcal{D}$' ye* ***dolu*** *alt kategori denir [42].*

Örnek 1.2.6. *Değişmeli grupların kategorisi,* **Gp** *kategorisinin bir dolu alt kategorisidir [41].*

Tanım 1.2.4. *$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ birer kategori olmak üzere $\mathcal{C}$' nin her bir x nesnesini $\mathcal{D}$' nin bir $F(x)$ nesnesine, $\mathcal{C}$' nin her bir $f : x \longrightarrow y$ morfizmini ise $\mathcal{D}$' nin bir $F(f) : F(x) \longrightarrow F(y)$ morfizmine dönüştüren ve aşağıdaki şartları sağlayan $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ dönüşümüne $\mathcal{C}$' den $\mathcal{D}$' ye bir* ***funktor*** *denir [44].*

i. *Her $g : y \longrightarrow z$ morfizmi için $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.*

ii. *Her $x \in Ob(\mathcal{C})$ için $F(I_x) = I_{F(x)}$ dir.*

Tanım 1.2.5. *Bir $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funktoru verilsin. Eğer her $x, y \in Ob(\mathcal{C})$ için*

$$\begin{array}{rcl} Mor(x,y) & \longrightarrow & Mor(F(x),F(y)) \\ f & \mapsto & F(f) \end{array}$$

dönüşümü örten ise F' ye ***doludur*** *denir [42].*

Uyarı 1.2.1. *$F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ ve $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{E}$ birer funktor olmak üzere bunların bileşkesi olan $GF : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}$ dönüşümü de $\mathcal{C}$' nin her bir $f : x \longrightarrow y$ ve $g : y \longrightarrow z$ morfizmi için*

$$GF(g \circ f) = G(F(g \circ f)) = G(F(g) \circ F(f)) = G(F(g)) \circ G(F(f)) = GF(g) \circ GF(f)$$

ve her $x \in Ob(\mathcal{C})$ için

$$GF(I_x) = G(F(I_x)) = G(I_{F(x)}) = I_{G(F(x))} = I_{GF(x)}$$

*olduğundan yine bir funktordur. Üstelik, $I : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ birim dönüşümü de bir funktor olup birim funktor olarak adlandırılır. Böylece, nesneleri kategoriler ve morfizmleri funktorlardan oluşan bir kategori elde edilir ve **Cat** ile gösterilir [42].*

Örnek 1.2.7. *Bir topolojik uzayı üzerinde tanımlandığı kümeye götüren $U : TOP \longrightarrow SET$ dönüşümü bir funktordur. Bu gibi nesneler üzerindeki yapıyı unutan funktorlara **unutkan funktor** denir. $U : Gp \longrightarrow SET$ dönüşümü de unutkan funktora bir örnek teşkil eder [42].*

Tanım 1.2.6. *Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $f : x \longrightarrow y$ morfizmi için $g \circ f = I_x$ ve $f \circ g = I_y$ olacak şekilde bir $g : y \longrightarrow x$ morfizmi varsa f morfizmine bir **izomorfizm**, x ile y nesnelerine ise izomorfiktir denir ve $x \cong y$ şeklinde gösterilir. Bu durumda, g morfizmi de bir izomorfizm olup g' ye f' nin tersi denir ve f^{-1} ile gösterilir [42].*

Aşikar olarak, **SET**' de birebir ve örten bir fonksiyon, **Gp**' de bir grup izomorfizmi, **TOP**' da bir homeomorfizm birer izomorfizm örneği olarak verilebilir.

Tanım 1.2.7. *$\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ kategorileri için $F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ birer funktor olsun. $\mathcal{C}$ nin her $x \in Ob(\mathcal{C})$ nesnesini $\mathcal{D}$' nin bir $\eta_x : F(x) \longrightarrow G(x)$ morfizmine karşılık getiren bir dönüşüm $\eta : Ob(\mathcal{C}) \longrightarrow Mor(\mathcal{D})$ olmak üzere eğer $\mathcal{C}$' nin her bir*

$f : x \longrightarrow y$ morfizmi için

$$\begin{tikzcd} F(x) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\eta_x"'] & F(y) \arrow[d, "\eta_y"] \\ G(x) \arrow[r, "G(f)"'] & G(y) \end{tikzcd}$$

*diyagramı değişmeli ise η bir **doğal dönüşüm** olarak adlandırılır ve $\eta : F \longrightarrow G$ ile gösterilir [42].*

Tanım 1.2.8. *$F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ iki funktor olsun. $\eta : F \longrightarrow G$ bir doğal dönüşüm olmak üzere eğer her bir $x \in Ob(\mathcal{C})$ nesnesi için $\eta_x : F(x) \longrightarrow G(x)$ morfizmi, $\mathcal{D}$ de bir izomorfizm ise η' ya bir doğal izomorfizm, F ile G' ye de **doğal olarak denktir** denir ve gösterim olarak $F \simeq G$ şeklinde yazılır [42].*

Teorem 1.2.1. *$F, G : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ birer funktor olsun. Bu durumda,*

$$F \simeq G \Longleftrightarrow \eta \circ \xi = I_G \ \text{ ve } \ \xi \circ \eta = I_F$$

olacak şekilde $\eta : F \longrightarrow G$ ve $\xi : G \longrightarrow F$ doğal dönüşümleri mevcuttur [29].

Tanım 1.2.9. *Bir $F : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ funktoru için $G \circ F = I_{\mathcal{C}}$ ve $F \circ G = I_{\mathcal{D}}$ olacak şekilde bir $G : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$ funktoru var ise bu iki kategoriye **doğal olarak denktir** denir ve $\mathcal{C} \simeq \mathcal{D}$ şeklinde gösterilir [42].*

Tanım 1.2.10. *Bir $\mathcal{C}$ kategorisinde $a \in Ob(\mathcal{C})$ olmak üzere eğer her $x \in Ob(\mathcal{C})$ için bir tek $a \longrightarrow x$ morfizmi varsa bu a nesnesine bir **başlangıç nesnesi**, eğer her $x \in Ob(\mathcal{C})$ için bir tek $x \longrightarrow a$ morfizmi varsa bu a nesnesine bir **bitiş nesnesi** denir. Ayrıca, a nesnesi hem başlangıç hem de bitiş nesnesi ise a' ya bir **sıfır nesne** denir [41].*

Örnek 1.2.8. **SET** *kategorisinde boş küme başlangıç nesnesi ve tek elemanlı küme bitiş nesnesidir.* **Gp** *kategorisinde ise tek elemanlı grup hem başlangıç hem de bitiş nesnesi olup bir sıfır nesnedir [41].*

Önerme 1.2.1. *$\mathcal{C}$ kategorisinde herhangi iki bitiş (veya başlangıç) nesnesi izomorfiktir [41].*

Günümüzde başlı başına bir teori olarak oldukça geniş bir çalışma alanına ulaşan grupoid kavramı ilk olarak 1926 yılında ünlü matematikçi Brandt tarafından "*Uber eine Verallgemeinerungdes Gruppenbegriffes*" başlıklı çalışmasında literatüre kazandırılmıştır. 1945 yılında Eilenberg ve MacLane tarafından kategori kavramı tanımlandıktan sonra her morfizmi bir izomorfizm olan bir kategori olarak yeniden tanımlanan grupoid kavramına ilgi büyük ölçüde artmıştır. Son zamanlarda ise ergodik teori, fonksiyonel analiz, homotopi teori, cebirsel geometri, diferansiyel geometri ve diferansiyel topoloji gibi çok çeşitli matematik alanlarında kullanılmaktadır.

Tanım 1.2.11. *Bir $\mathcal{G}$ kategorisinde her bir $f \in Mor(\mathcal{G})$ için $s(f) = t(f^{-1})$, $t(f) = s(f^{-1})$, $f^{-1} \circ f = I_{s(f)}$ ve $f \circ f^{-1} = I_{t(f)}$ şartlarını sağlayan $f^{-1} \in \mathcal{G}$ varsa $\mathcal{G}$' ye bir* ***grupoid*** *denir ve $\mathcal{G} = (Ob(\mathcal{G}), Mor(\mathcal{G}))$ ile gösterilir.*

Tanımdan da açıktır ki bir grupoid her morfizmi bir izomorfizm olan özel bir kategoridir. Ancak, her kategori bir grupoid yapısına sahip olmak zorunda değildir.

Örnek 1.2.9. *Bir grup tek nesneli bir grupoid olarak düşünülebilir [33].*

Örnek 1.2.10. *Nesneleri tüm kümeler, morfizmleri ise bire-bir ve örten fonkiyonlar seçilerek oluşturulan kategori bir grupoiddir [42].*

Örnek 1.2.11. *Nesneleri topolojik uzaylar, morfizmleri ise homeomorfizmler alınarak oluşturulan kategori bir grupoiddir [42].*

Örnek 1.2.12. *X herhangi bir küme ve G bir grup olsun. $x, y, z \in X$ ve $g, h \in G$ için (x, g, y) üçlüsü x' den y' ye bir morfizm olmak üzere kısmî bileşke işlemi*

$$(y, h, z) \circ (x, g, y) = (x, hg, z)$$

$$x \xrightarrow{(x,g,y)} y \xrightarrow{(y,h,z)} z = x \xrightarrow{(x,hg,z)} z$$

şeklinde tanımlanırsa, $(X, X \times G \times X)$ *yapısı bir grupoid olur.*

Burada bir (x, g, y) *morfizmi için yapı dönüşümleri*

- $s(x, g, y) = x$,
- $t(x, g, y) = y$,
- $I_x = (x, e, x)$,
- $(x, g, y)^{-1} = (y, g^{-1}, x)$

şeklinde tanımlı olup bu grupoide ***aşikar grupoid*** *denir [42].*

Örnek 1.2.13. *X bir küme, G bir grup ve $G \times X \longrightarrow X, (g, x) \longmapsto g \cdot x$ bir etki dönüşümü olsun. (g, x) ikilisi başlangıcı x, bitişi $g \cdot x$ olan bir morfizm ve kısmî bileşke işlemi ise $y = g \cdot x$ olmak üzere*

$$(h, y) \circ (g, x) = (hg, x)$$

şeklinde tanımlanırsa, $(X, G \times X)$ yapısı bir grupoid olur. Burada (g, x) morfizmi için yapı dönüşümleri

- $s(g, x) = x$,
- $t(g, x) = g \cdot x$,
- $I_x = (e, x)$,
- $(g, x)^{-1} = (g^{-1}, g \cdot x)$

şeklinde tanımlıdır.

Bu şekilde oluşturulan grupoide ***etki grupoidi*** *denir. Bu durumda, her $G-$kümeden bu yolla bir grupoid elde edilir [33].*

Önerme 1.2.2. *Bir $\mathcal{G}$ grupoidinde $x \in Ob(\mathcal{G})$ için x' den x' e tüm morfizmlerin sınıfı*

$$\mathcal{G}(x) = \{f : f \in Mor(x, x)\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, grupoiddeki morfizmlerin bileşke işlemiyle birlikte $\mathcal{G}(x)$ bir gruptur. Bu gruba x noktasındaki ***nesne grubu*** *denir [33].*

Uyarı 1.2.2. *Bir $\mathcal{G}$ grupoidinde her $x, y \in Ob(\mathcal{G})$ için bir tek $f : x \longrightarrow y$ morfizmi varsa G grupoidine* ***1-geçişmelidir*** *denir. Eğer $\forall x, y \in Ob(\mathcal{G})$ için $Mor(x, y) \neq \emptyset$ ise G grupoidine* ***geçişmelidir*** *denir. Aksi taktirde, $\forall x, y \in Ob(\mathcal{C})$ için $Mor(x, y) = \emptyset$ ise $\mathcal{G}$ grupoidine* ***tamamen geçişmesizdir*** *denir [37].*

Tanım 1.2.12. *$\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ iki grupoid olsun. Eğer $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$' nın kategorileri üzerinde $F : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ dönüşümü bir funktor ise F' ye bir* ***grupoid homomorfizmi*** *denir [37].*

Bazı kaynaklarda bir F grupoid homomorfizmi, nesne kümeleri arasında $F_0 : Ob(\mathcal{G}) \longrightarrow Ob(\mathcal{H})$ dönüşümü ve morfizm kümeleri arasında $F_1 : Mor(\mathcal{G}) \longrightarrow Mor(\mathcal{H})$ dönüşümü alınarak $F = (F_0, F_1)$ çifti ile gösterilir. Bu notasyon tezin ilerleyen kısımlarında uygunluk açısından bazen kullanılacaktır.

Buradan, objeleri tüm grupoidler ve morfizmleri ise grupoidler arasındaki funktorlar olan yeni bir kategori elde edilir. Bu kategori grupoidlerin kategorisi olarak adlandırılır ve **Gd** ile gösterilir .

Önerme 1.2.3. *$\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ iki grupoid ve $F : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ bir grupoid homomorfizmi olsun. Bu durumda, her $f \in Mor(\mathcal{G})$ için aşağıdaki ifadeler doğrudur [42].*

i. $F(f^{-1}) = F^{-1}(f)$.

ii. $F^{-1}(f) \cong F^{-1}(f^{-1})$.

Tanım 1.2.13. *$\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ iki grupoid olmak üzere bunların çarpımı ile nesnelerinin sınıfı $Ob(\mathcal{G}) \times Ob(\mathcal{H})$ ve morfizmlerinin sınıfı $Mor(\mathcal{G}) \times Mor(\mathcal{H})$ olan bir $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ grupoidi elde edilir. Bu grupoide* ***çarpım grupoidi*** *denir [42].*

Tanım 1.2.14. *$\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$ grupoidinin bir alt kategorisi olsun. Eğer $f \in Mor(\mathcal{H})$ için $f^{-1} \in Mor(\mathcal{H})$ ise $\mathcal{H}$ grupoidine $\mathcal{G}$' nin bir* ***alt grupoidi*** *denir [37].*

Özel olarak, $Ob(\mathcal{H}) = Ob(\mathcal{G})$ ise $\mathcal{H}$ grupoidi $\mathcal{G}$' nin ***geniş alt grupoidi*** *olarak adlandırılır [37].*

Tanım 1.2.15. *$\mathcal{G}$ grupoidinin bir geniş alt grupoidi $\mathcal{N}$ olsun. Eğer $\forall x, y \in Ob(\mathcal{G})$ ve $f \in mor(x, y)$ için*

$$f \circ \mathcal{N}(x) = \mathcal{N}(y) \circ f$$

*şartı sağlanıyorsa $\mathcal{N}$' ye $\mathcal{G}$ grupoidinin bir **normal alt grupoidi** denir [37].*

Örnek 1.2.14. *$\mathcal{G}$ bir grupoid olmak üzere $Ob(\mathcal{N}) = Ob(\mathcal{G})$ ve $\forall x \in Ob(G)$ için $Mor(\mathcal{N}) = \{I_x\}$ şeklinde tanımlanan $\mathcal{N}$ bir grupoid olup $\mathcal{G}$' nin bir normal alt grupoididir [42].*

Tanım 1.2.16. *Bir $\mathcal{G}$ grupoidinin normal alt grupoidi $\mathcal{N}$ olsun. $\mathcal{G}/\mathcal{N}$ yapısı aşağıdaki işlemlere göre bir grupoiddir.*

$$Ob(\mathcal{G}/\mathcal{N}) = Ob(\mathcal{G})$$

ve her $x, y \in \mathcal{G}/\mathcal{N}$ için

$$Mor(x, y) = \{f \circ \mathcal{N}(x) : f \in Mor_{\mathcal{G}}(x, y)\}$$

olmak üzere $f \in Mor_{\mathcal{G}}(x, y)$ ve $g \in Mor_{\mathcal{G}}(y, z)$ ise $\mathcal{N}$ normal olduğundan

$$(g \circ \mathcal{N}(y)) \circ (f \circ \mathcal{N}(x)) = (g \circ f) \circ \mathcal{N}(x)$$

olup

$$Mor(\mathcal{G}/\mathcal{N}) = \bigcup_{x,y \in Ob(\mathcal{G})} Mor(x, y)$$

*dir. Bu şekilde tanımlanan $\mathcal{G}/\mathcal{N}$ grupoidi bir **bölüm grupoidi** olarak adlandırılır [42].*

1.3 Grup-Grupoidler ve Çaprazlanmış Modüller

Brown ve Spencer tarafından grupoid ve grup kavramları kullanılarak inşa edilen grup-grupoidler, grupoidlerin kategorisinde bir grup nesne olarak tanımlanmıştır. Brown ve Spencer ayrıca 2-boyutlu cebirsel yapılar olarak düşünülen çaprazlanmış modüller ile grup-grupoidler arasındaki ilişkiyi inceleyerek bu yapıların kategorilerinin denk olduğunu ispatlamışlardır. Böylece, bazı kategorik problemlerin cebirsel bir yapıya taşınarak çözüme kavuşturulması sağlanmıştır. Bu kısımda bu kategorilerin denkliği verilecektir.

1.3.1 Grup-Grupoidler

Tanım 1.3.1. *$\mathcal{G}$ bir grupoid olmak üzere $Ob(\mathcal{G})$, nesnelerin sınıfı ve $Mor(\mathcal{G})$, morfizmlerin sınıfı birer grup yapısına sahip olsun. $\{*\}$ tek morfizmli bir grupoid ve grup yapısını oluşturan*

i. $m : Mor(\mathcal{G}) \times Mor(\mathcal{G}) \longrightarrow Mor(\mathcal{G})$, $(x, y) \longmapsto xy$ *(grup işlemi),*

ii. $u : Mor(\mathcal{G}) \longrightarrow Mor(\mathcal{G})$, $x \longmapsto x^{-1}$ *(ters eleman dönüşümü),*

iii. $e : \{*\} \longrightarrow Mor(\mathcal{G})$ *(birim eleman dönüşümü)*

*morfizmleri birer funktor ise $\mathcal{G}$' ye bir **grup-grupoid** denir. Burada $a, b \in \mathcal{G}$ için grup çarpımı ab ve grupoiddeki çarpım $b \circ a$ ile gösterilecektir [31].*

O halde, $x, y, x', y' \in Mor(\mathcal{G})$ için $y \circ x$ ve $y' \circ x'$ birleşimleri tanımlı olmak üzere m' nin bir funktor olduğu gerçeğinden yola çıkarak yer değiştirme kuralı (interchange law) olarak bilinen

$$(y \circ x)(y' \circ x') = (yy') \circ (xx')$$

eşitliği elde edilir.

Örnek 1.3.1. *G bir grup olmak üzere $\mathcal{G} = G \times G$ bir grup-grupoid yapısına sahiptir. Burada $(x, y), (y, z) \in Mor(\mathcal{G})$ için kısmî bileşke $(y, z) \circ (x, y) = (x, z)$, herhangi bir (x, y) morfizminin tersi (y, x) ve $x \in G$ noktasındaki birim morfizm ise (x, x) şeklinde tanımlıdır [31].*

Tanım 1.3.2. *$\mathcal{G}$ ve $\mathcal{H}$ grupoidleri arasında $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ bir grupoid homomorfizmi olmak üzere eğer $f : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ grup yapılarını da koruyorsa f' ye bir **grup-grupoid homomorfizmi** denir [39].*

Başka bir deyişle, grup-grupoidlerin bir homomorfizmi, grup yapısını koruyan grupoidlerin bir homomorfizmidir. Böylece nesneleri grup-grupoidler ve morfizmleri bunlar arasındaki homomorfizmler olan bir kategori inşa edilir. Gösterimi ***GpGd*** olan bu kategori ***grup-grupoidlerin kategorisi*** olarak adlandırılır.

Tanım 1.3.3. *$\mathcal{G}$ bir grup-grupoid ve $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$' nin bir alt grupoidi olsun. Eğer $Ob(\mathcal{H}) \leq Ob(\mathcal{G})$ ve $Mor(\mathcal{H}) \leq Mor(\mathcal{G})$ ise $\mathcal{H}$' ya $\mathcal{G}$' nin bir **alt grup-grupoidi** denir [39].*

Tanım 1.3.4. *$\mathcal{G}$ bir grup-grupoid ve $\mathcal{H}$, $\mathcal{G}$' nin bir alt grupoidi olsun. Eğer $Ob(\mathcal{H}) \trianglelefteq Ob(\mathcal{G})$ ve $Mor(\mathcal{H}) \trianglelefteq Mor(\mathcal{G})$ ise $\mathcal{H}$' ya $\mathcal{G}$' nin bir **normal alt grup-grupoidi** denir [39].*

Örnek 1.3.2. *X bir grup ve Y de X' in bir normal alt grubu olsun. Bu durumda, Örnek 1.3.1 daki gibi $\mathcal{N} = Y \times Y$, $\mathcal{G} = X \times X$ olarak seçildiğinde açıktır ki $\mathcal{N}$, $\mathcal{G}$' nin bir normal alt grup-grupoididir [39].*

1.3.2 Çaprazlanmış Modüller

Tanım 1.3.5. *G ve M iki grup ve $\delta : M \longrightarrow G$ sınır dönüşümü olarak adlandırılan bir grup homomorfizmi olsun. G nin M üzerindeki sol-etkisi*

$$\begin{array}{rcl} \theta : G \times M & \to & M \\ (g,m) & \mapsto & \theta(g,m) = g \cdot m \end{array}$$

*şeklinde tanımlansın. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (M, G, δ, θ) dörtlü yapısına (bir grup üzerinde) **çaprazlanmış modül** denir $[25-26]$.*

i. $\forall m \in M, \forall g \in G$ *için* $\delta(g \cdot m) = g\delta(m)g^{-1}$.

ii. $\forall m, m_1 \in M$ *için* $\delta(m) \cdot m_1 = mm_1m^{-1}$.

Çaprazlanmış modül için gerekli olan şartlar aşağıdaki gibi değişmeli diyagramlar cinsinden de ifade edilebilir: ψ_M, ψ_G sırasıyla M ve G üzerindeki konjuge etkileri olmak üzere

$$\begin{tikzcd}
M \times M \arrow[r, "\psi_M"] \arrow[d, "\delta \times 1_M"'] & M \arrow[d, "1_M"] \\
G \times M \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "1_G \times \delta"'] & M \arrow[d, "\delta"] \\
G \times G \arrow[r, "\psi_G"'] & G
\end{tikzcd}$$

diyagramları değişmelidir.

Örnek 1.3.3. *Her G grubundan, grubun kendi üzerine konjuge etkisi ve $I_G : G \longrightarrow G$, $g \longmapsto g$ grup homomorfizmi ile (G, G, I_G, ψ_G) çaprazlanmış modülü elde edilir [46].*

Örnek 1.3.4. *G bir grup ve $N \trianglelefteq G$ olsun. G grubunun N normal alt grubu üzerine konjuge etkisi*

$$\begin{aligned} \theta : G \times N &\rightarrow N \\ (g,n) &\mapsto \theta(g,n) = gng^{-1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \delta : N &\rightarrow G \\ n &\mapsto \delta(n) = n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan grup homomorfizmi ile (N, G, δ, θ) yapısı bir çaprazlanmış modüldür [46].

Örnek 1.3.5. *M bir abelyan grup ve G herhangi bir grup olsun. Bu durumda, herhangi bir $\delta : M \longrightarrow G$ grup homomorfizmi ve*

$$\begin{aligned} \theta : G \times M &\rightarrow M \\ (g,m) &\mapsto \theta(g,m) = m \end{aligned}$$

aşikar etkisi ile birlikte (M, G, δ, θ) dörtlüsü bir çaprazlanmış modül olur [46].

Tanım 1.3.6. *(M,G,δ,θ) ve (M',G',δ',θ') iki çaprazlanmış modül için $f_1 : M \longrightarrow M'$, $f_2 : G \longrightarrow G'$ birer grup homomorfizmi olmak üzere*

i. $f_2\delta = \delta' f_1$

ii. $\forall g \in G$ *ve* $\forall m \in M$ *için* $f_1(g \cdot m) = f_2(g) \cdot' f_1(m)$

şartlarını sağlayan (f_1, f_2) *çiftine* ***çaprazlanmış modül homomorfizmi*** *denir. Ayrıca, değişmeli diyagramlar aracılığıyla*

$$\begin{tikzcd} G \times M \arrow[r, "\theta"] \arrow[d, "f_2 \times f_1"'] & M \arrow[r, "\delta"] \arrow[d, "f_1"'] & G \arrow[d, "f_2"'] \\ G' \times M' \arrow[r, "\theta'"'] & M' \arrow[r, "\delta'"'] & G' \end{tikzcd}$$

şeklinde gösterilip $< f_1, f_2 >: (M,G,\delta,\theta) \longrightarrow (M',G',\delta',\theta')$ *olarak yazılır [46].*

Buradan, nesneleri çaprazlanmış modüller ve morfizmleri ise çaprazlanmış modül homomorfizmleri olan bir kategori elde edilir. Bu kategoriye ***çaprazlanmış modüllerin kategorisi*** denir ve ***CMod*** ile gösterilir.

Önerme 1.3.1. *Kaynak dönüşümü s olan bir $\mathcal{G}$ grup-grupoidi için $M = Kers$ ve $G = Ob(\mathcal{G})$ olsun. Bu durumda, t hedef dönüşümü olmak üzere*

$$\delta = t|_M : M \longrightarrow G$$

kısıtlaması ve

$$\begin{array}{rcl} \theta : G \times M & \rightarrow & M \\ (g,m) & \mapsto & \theta(g,m) = I_g m I_g^{-1} \end{array}$$

şeklinde tanımlanan etki ile (M,G,δ,θ) yapısı bir çaprazlanmış modüldür [31].

İspat. $M = Kers$ ve $G = Ob(\mathcal{G})$ birer grup olup t hedef dönüşümü bir grup homomorfizmi olduğundan $\delta = t|_M$ kısıtlaması da bir grup homomorfizmidir. Ayrıca,

$$\begin{array}{rcl} \theta : G \times M & \rightarrow & M \\ (g,m) & \mapsto & \theta(g,m) = I_g m I_g^{-1} \end{array}$$

dönüşümünün bir etki olduğu açık olup

i. $\delta(g,m)=\delta(I_g m I_g^{-1})=\delta(I_g)\delta(m)\delta(I_g^{-1})=\delta(I_g)\delta(m)\delta(I_{g^{-1}})=g\delta(m)g^{-1}$

ii. $\delta(m)m_1=I_{\delta(m)}m_1 I_{\delta(m)}^{-1}=I_{t(m)}m_1 I_{t(m)}^{-1}=I_g m_1 I_{t(m)}^{-1}=I_g m_1 I_g^{-1}=mm_1m^{-1}$

şartları sağlandığından (M,G,δ,θ) dörtlüsü bir çaprazlanmış modüldür. $\square$

Bu yolla bir grup-grupoidden bir çaprazlanmış modül elde edilmiş olur. Benzer olarak, bir çaprazlanmış modülden de bir grup-grupoid aşağıdaki gibi elde edilebilir:

Önerme 1.3.2. (M,G,δ,θ) *bir çaprazlanmış modül olsun. Nesnelerin kümesi* G*, morfizmlerin kümesi* $G\ltimes M$ *yarı-direkt çarpımı olmak üzere* $\mathcal{G}=(G,G\ltimes M)$ *yapısı bir grup-grupoiddir [31].*

İspat. M ve G birer grup olduğundan Tanım 1.1.10 den $G\ltimes M$ yarı-direkt çarpımı da bir gruptur. $\mathcal{G}$ grupoidi için yapı dönüşümleri ise şu şekilde tanımlıdır:

- ***Kaynak dönüşümü*** $s:G\ltimes M\longrightarrow G,\ (g,m)\longmapsto g$
- ***Hedef dönüşümü*** $t:G\ltimes M\longrightarrow G,\ (g,m)\longmapsto \delta(m)g$
- ***Kısmî çarpım işlemi***

$$\begin{array}{rcl}(G\ltimes M)\times(G\ltimes M) & \to & G\ltimes M\\ ((g,m),(g_1,m_1)) & \mapsto & (g,m_1m)\end{array}$$

$$\begin{tikzcd} g \arrow[r, "{(g,m)}"] \arrow[rr, bend right, "{(g,m_1m)}"'] & \delta(m)g \arrow[r, "{(\delta(m)g,m_1)}"] & \delta(m_1m)g \end{tikzcd}$$

- ***Birim morfizm dönüşümü*** $I_{()}:G\longrightarrow G\ltimes M,\ g\longmapsto(g,e_M)$
- ***Ters eleman dönüşümü*** $f^{-1}:G\ltimes M\longrightarrow G\ltimes M,\ (g,m)\longmapsto(\delta(m)g,m^{-1})$

$$\begin{tikzcd} g \arrow[loop left, "{(g,e_M)}"] \arrow[r, bend left, "{(g,m)}"] & \delta(m)g \arrow[l, bend left, "{(\delta(m)g,m^{-1})}"] \end{tikzcd}$$

Buradan aşikar olarak bu yapı dönüşümlerinin birer grup homomorfizmi olduğu görülür. Böylece; $\mathcal{G} = (G, G \ltimes M)$ çifti çaprazlanmış modülden elde edilen bir grup-grupoid yapısına sahiptir. $\square$

Teorem 1.3.1. *Grup-grupoidlerin kategorisi GpGd ile çaprazlanmış modüllerin kategorisi CMod denk kategorilerdir [31].*

İspat. $P = (M, G, \delta, \theta)$ ve $P' = (M', G', \delta', \theta')$ iki çaprazlanmış modül için $f_1 : M \longrightarrow M'$, $f_2 : G \longrightarrow G'$ olmak üzere $< f_1, f_2 >$ çaprazlanmış modül morfizmi olsun. Bu durumda, nesneler üzerinde $\eta(P) = (G, G \ltimes M)$ ve morfizmler üzerinde

$$\begin{array}{rcl} \eta : CMod & \rightarrow & GpGd \\ (f_1, f_2) & \mapsto & \eta(f_1, f_2) = (f_2, f_2 \times f_1) \end{array}$$

şeklinde tanımlanan η dönüşümü bir funktordur.

$$\begin{tikzcd} G \ltimes M \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] \arrow[d, "f_2 \times f_1"'] & G \arrow[d, "f_2"] \\ G' \ltimes M' \arrow[r, shift left, "s"] \arrow[r, shift right, "t"'] & G' \end{tikzcd}$$

Diğer yandan, $\mathcal{G}$ ve $\mathcal{G}'$ grupoidleri arasında $g = (g_0, g_1) : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ bir grup-grupoid homomorfizmi olsun. Buradan, nesneler üzerinde

$$\xi(\mathcal{G}) = (Kers, Ob(\mathcal{G}), t|_{Kers})$$

ve morfizmler üzerinde

$$\begin{array}{rcl} \xi : GpGd & \rightarrow & CMod \\ (g_0, g_1) & \mapsto & \xi(g_0, g_1) = (g_1|_{Kers}, g_0) \end{array}$$

şeklinde tanımlı ξ bir funktordur.

$$\begin{tikzcd}
Kers \arrow[r, "t|_{Kers}"] \arrow[d, "g_1|_{Kers}"'] & Ob(\mathcal{G}) \arrow[d, "g_0"] \\
Kers \arrow[r, "t|_{Kers}"'] & Ob(\mathcal{G}')
\end{tikzcd}$$

Yukarıda tanımlanan η ve ξ funktorları için kategorik denkliği aşağıdaki gibi göstereceğiz:

$g = (g_0, g_1) : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}'$ grup-grupoid homomorfizmi olmak üzere

$$GpGd \overset{\eta\xi}{\underset{I_{GpGd}}{\Longrightarrow}} GpGd$$

için $S : I_{GpGd} \longrightarrow \eta\xi$ doğal dönüşümü

$$\begin{tikzcd}
I_{GpGd}(\mathcal{G}) \arrow[r, "S_{\mathcal{G}}"] \arrow[d, "I_{(g)}"'] & \eta\xi(\mathcal{G}) \arrow[d, "\eta\xi(g)"] \\
I_{GpGd}(\mathcal{G}') \arrow[r, "S_{\mathcal{G}'}"'] & \eta\xi(\mathcal{G}')
\end{tikzcd}$$

şeklinde tanımlı olup buradan $\eta\xi \simeq I_{GpGd}$ elde edilir.

Ayrıca, $< f_1, f_2 >: P \longrightarrow P'$ çaprazlanmış modül homomorfizmi olmak üzere

$$XMod \overset{\xi\eta}{\underset{I_{CMod}}{\Longrightarrow}} CMod$$

için $T : I_{CMod} \longrightarrow \xi\eta$ doğal dönüşümü ise

$$\begin{tikzcd}
I_{CMod}(P) \arrow[r, "T_P"] \arrow[d, "I_{(f_1,f_2)}"'] & \xi\eta(P) \arrow[d, "\xi\eta(f_1,f_2)"] \\
I_{CMod}(P') \arrow[r, "T_{P'}"] & \xi\eta(P')
\end{tikzcd}$$

şeklinde tanımlı olup $\xi\eta \simeq I_{CMod}$ bulunur.

Böylece, $\eta\xi \simeq I_{GpGd}$ ve $\xi\eta \simeq I_{CMod}$ olup Tanım 1.2.9 den açıkça söylenebilir ki grup-grupoidlerin $GpGd$ kategorisi ile çaprazlanmış modüllerin $CMod$ kategorisi denktir. □

1.4 Soft (Esnek) Küme Teorisi

Bu bölümde, 1999 yılında ünlü Rus matematikçi Molodtsov tarafından belirsizliğe bir matematiksel yaklaşım olarak ortaya atılan soft küme teorisinin temelleri sunularak soft gruplar ve soft kategoriler ile ilgili bazı temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bu teori ile ilgili yapılan diğer çalışmalar için $[2-15]$ referanslarına bakılabilir.

1.4.1 Soft Kümeler

X bir evrensel küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. X' in kuvvet kümesi $P(X)$ ve $A \subset E$ olmak üzere Molodtsov tarafından bir soft kümenin tanımı aşağıdaki gibi verilmiştir.

Tanım 1.4.1. *Herhangi bir $F : A \longrightarrow P(X)$ dönüşümü ile birlikte (F, A) çiftine X üzerinde bir **soft küme** denir [1].*

Bu tanımdan yola çıkarak söylenebilir ki X üzerinde bir soft küme X evrensel kümesinin alt kümelerinin bir parametrelendirilmiş ailesidir. $\alpha \in A$ için $F(\alpha)$ ailesi (F, A) soft kümesinin $\alpha-$***yaklaşımlı*** elemanlarının kümesi olarak düşünülebilir. Burada kolaylık olması açısından bazen X üzerinde bir (F, A) soft kümesi (X, F, A) ile gösterilecektir.

Örnek 1.4.1. *X evrenseli evlerin kümesi olmak üzere E parametrelerin kümesi $E = \{$pahalı, güzel, ahşap, ucuz, bahçeli, modern, yeni, eski$\}$ şeklinde tanımlansın.*

Bu durumda, tanımlanacak bir soft küme; pahalı evleri, güzel evleri,ahşap evleri,... vb şeklinde evleri belirtecektir.

X *evrensel kümesinde* $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ *gibi altı evin olduğu kabul edilsin.* $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ *kümesi için*

e_1 *parametresi 'pahalı',*

e_2 *parametresi 'güzel',*

e_3 *parametresi 'ahşap',*

e_4 *parametresi 'ucuz',*

e_5 *parametresi 'bahçeli' olmak üzere*

$$\begin{aligned} F(e_1) &= \{h_2, h_4\}, \\ F(e_2) &= \{h_1, h_3\}, \\ F(e_3) &= \{h_3, h_4, h_5\}, \\ F(e_4) &= \{h_1, h_3, h_5\}, \\ F(e_5) &= \{h_1\} \end{aligned}$$

olarak tanımlansın. Burada

$F(e_1) = \{h_2, h_4\}$ *pahalı evleri,*

$F(e_2) = \{h_1, h_3\}$ *güzel evleri,*

$F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$ *ahşap evleri,*

$F(e_4) = \{h_1, h_3, h_5\}$ *ucuz evleri,*

$F(e_5) = \{h_1\}$ *bahçeli evleri*

göstermek üzere (F, A) *soft kümesi* X *evrenselinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş bir* $\{F(e_i)\ ,\ i = 1, 2, 3, 4, 5\}$ *ailesidir. Böylece,* (F, A) *soft kümesi yaklaşımların bir koleksiyonu olarak*

$(F, A) = \{$*pahalı evler* $= \{h_2, h_4\}$, *güzel evler* $= \{h_1, h_3\}$, *ahşap evler* $= \{h_3, h_4, h_5\}$, *ucuz evler* $= \{h_1, h_{3,5}\ \}$, *bahçeli evler* $= \{h_1\}\}$

şeklinde yazılabilir [1].

Tanım 1.4.2. *X evrenseli üzerinde (F,A) ve (H,B) iki soft küme olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (H,B)' ye (F,A)' nın bir* ***soft alt kümesi*** *denir ve $(H,B)\widetilde{\subset}(F,A)$ ile gösterilir [3].*

i) *$B \subset A$.*

ii) *Her $\alpha \in B$ için $H(\alpha)$ ve $F(\alpha)$ özdeş yaklaşımlardır.*

Tanım 1.4.3. *X evrenseli üzerinde (F,A) ve (H,B) birer soft küme olmak üzere eğer (F,A), (H,B)' nin bir soft alt kümesi ve (H,B) de (F,A)' nın bir soft alt kümesi ise (F,A) ve (H,B)* ***soft denktir*** *denir [3].*

Örnek 1.4.2. *X evrensel kümesi ve E parametrelerin kümesi Örnek 1.4.1 de verildiği gibi alınmak üzere $B = \{e_1, e_3, e_5\} \subset E$ ve $A = \{e_1, e_2, e_3, e_5\} \subset E$ olsun. $B \subset A$ olduğu açıktır. Ayrıca,*
$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ evrenseli üzerinde (F,A) ve (H,B) soft kümeleri
$H(e_1) = \{h_2,\ h_4\},\ H(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\},\ H(e_5) = \{h_1\}$,
$F(e_1) = \{h_2, h_4\},\ F(e_2) = \{h_1, h_3\},\ F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\},\ F(e_5) = \{h_1\}$,
şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $(H,B)\widetilde{\subset}(F,A)$ olduğu aşikardır [3].

Tanım 1.4.4. *Parametrelerin bir kümesi $E = \{e_1, e_2, e_3, \ldots, e_n\}$ olsun. $\forall i$ için $\rceil e_i = e_i$-* ***değil*** *olmak üzere E'nin* ***değili kümesi*** *$\rceil E = \{\rceil e_1, \rceil e_2, \rceil e_3, \ldots, \rceil e_n\}$ şeklinde tanımlıdır [3].*

Bu tanımdan, aşağıdaki sonuçlara kolaylıkla ulaşılır [3].

Önerme 1.4.1. ***i.*** *$\rceil(\rceil A) = A$.*

ii. *$\rceil(A \cup B) = (\rceil A \cup \rceil B)$.*

iii. *$\rceil(A \cap B) = (\rceil A \cap \rceil B)$.*

Örnek 1.4.3. *Örnek 1.4.1 gözönüne alınsın. Bu durumda, $\rceil E = \{$pahalı değil, güzel değil, ahşap değil, ucuz değil, bahçeli değil$\}$ şeklindedir [3].*

Tanım 1.4.5. *Bir* (F, A) *soft kümesinin* ***tümleyeni*** $(F, A)^c = (F^c, \rceil A)$ *çiftidir öyleki* $\forall\alpha \in \rceil A$ *için*

$$\begin{aligned} F^c : \rceil A &\rightarrow P(X) \\ \alpha &\mapsto F^c(\alpha) = X - F(\rceil\alpha) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır [3].

F^c, F' nin ***soft tümleyen fonksiyonu*** olarak adlandırılarak aşağıdaki eşitlikler açıkça yazılır [3].

- $(F^c)^c = F$
- $((F, A)^c)^c = (F, A)$

Örnek 1.4.4. *Örnek 1.4.1 de verilen* (F, A) *soft kümesi gözönüne alınmak üzere bunun tümleyeni* $(F, A)^c = \{$*pahalı olmayan evler* $= \{h_1, h_3, h_5, h_6\}$, *güzel olmayan evler* $= \{h_2, h_4, h_5, h_6\}$, *ahşap olmayan evler* $= \{h_1, h_2, h_6\}$, *ucuz olmayan evler* $= \{h_2, h_4, h_6\}$, *bahçeli olmayan evler* $= \{h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ *şeklinde tanımlı bir soft küme olarak elde edilir [3].*

Tanım 1.4.6. X *üzerinde* (F, A) *bir soft küme olmak üzere eğer* $\forall\alpha \in A$ *için* $F(\alpha) = \emptyset$ *ise* (F, A) *çifti bir* ***boş (null)*** *soft küme olarak adlandırılır ve* Φ *ile gösterilir [3].*

Örnek 1.4.5. X *evrenseli tahtadan inşa edilen evlerin bir kümesi*

$$X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$$

ve A *parametrelerin kümesi*

$$A = \{\textit{tuğla, toprak, çelik, taş}\}$$

olarak verilsin. Bu durumda, (F, A) *soft kümesi "evlerin inşasını" tanımlamak üzere*

F(tuğla) tuğladan inşa edilen evleri,

F(toprak) topraktan inşa edilen evleri,

F(çelik) çelikten inşa edilen evleri,

F(taş) taştan inşa edilen evleri

*belirtir. Yaklaşımların kolleksiyonu olarak da (F, A) soft kümesi $(F, A) = \{$tuğladan inşa edilen evler $= \emptyset$, topraktan inşa edilen evler $= \emptyset$, çelikten inşa edilen evler $= \emptyset$, taştan inşa edilen evler $= \emptyset\}$ şeklinde yazılır. Buradan açıktır ki (F, A) bir **boş (null)** soft kümedir [3].*

Tanım 1.4.7. *X üzerinde (F, A) bir soft küme olmak üzere eğer $\forall\alpha \in A$ için $F(\alpha) = X$ ise (F, A) çifti bir **mutlak (absolute)** soft küme olarak adlandırılır ve $\tilde{A}$ ile gösterilir [3].*

Açıkça görülür ki $\tilde{A}^c = \emptyset$ ve $\Phi^c = \tilde{A}$.

Örnek 1.4.6. *Evrensel küme olarak $X = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ tahtadan inşa edilen evleri göstermek üzere parametrelerin kümesi*

$$B = \{\textit{tuğla değil, toprak değil, çelik değil, taş değil}\}$$

olsun. Buradan, (H, B) soft kümesi "evlerin inşasını" yani

H(tuğla değil) tuğladan inşa edilmeyen evleri ,

H(toprak değil) topraktan inşa edilmeyen evleri,

H(çelik değil) çelikten inşa edilmeyen evleri,

H(taş değil) taştan inşa edilmeyen evleri

*tanımlar ve yaklaşımların koleksiyonu olarak da $(H, B) = \{$tuğladan inşa edilmeyen evler $= \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$, topraktan inşa edilmeyen evler $= \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$, çelikten inşa edilmeyen evler $= \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$, taştan inşa edilmeyen evler $= \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$ şeklinde gösterilir. Böylece, (H, B)' nin bir **mutlak (absolute)** soft küme olduğu açıktır [3].*

Tanım 1.4.8. *$X \times X$ üzerinde tanımlı bir (F, A) soft kümesine X üzerinde bir **soft bağıntı** denir [47].*

Tanım 1.4.9. (F, A) *soft kümesi* X *üzerinde bir soft bağıntı ve her* $\alpha \in A$ *için* $F(\alpha) \neq \emptyset$ *olsun. Her* $\alpha \in A$ *için* $F(\alpha)$*,* X *üzerinde bir denklik bağıntısı ise* (F, A)*'ya* X *üzerinde bir* ***soft denklik bağıntısı*** *denir [47].*

Örnek 1.4.7. X *evrenseli* $\{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ *gibi altı evin olduğu bir küme ve* E *parametrelerin kümesi*

e_1 *parametresi 'pahalı',*

e_2 *parametresi 'ahşap',*

e_3 *parametresi 'bahçeli',*

e_4 *parametresi 'kerpiç',*

e_5 *parametresi 'ucuz'*

olmak üzere $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ *şeklinde tanımlansın. Bu durumda, tanımlanacak bir soft küme; pahalı evleri, ahşap evleri, bahçeli evleri,... vb şeklinde evlerin bir kategorizasyonunu belirleyecektir.* $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ *kümesi için*

$F(e_1) = \{h_1, h_3\}$,

$F(e_2) = \{h_1, h_3, h_6\}$,

$F(e_3) = \{h_1, h_3, h_4, h_5\}$,

$F(e_4) = \{h_1, h_2, h_3\}$

olarak tanımlansın. Burada

$F(e_1) = \{h_1, h_3\}$ *pahalı evleri,*

$F(e_2) = \{h_1, h_3, h_6\}$ *ahşap evleri,*

$F(e_3) = \{h_1, h_3, h_4, h_5\}$ *bahçeli evleri,*

$F(e_4) = \{h_1, h_2, h_3\}$ *kerpiç evleri*

gösterir. Böylece, A'da verilen parametrelere göre evleri kategorize eden (F, A) *soft kümesinin* X *evrenseli üzerinde bir soft denklik bağıntısı olduğu açıktır. Buna göre, her bir denklik bağıntısı için denklik sınıfları*

$$[F(e_1)] = \{\{h_1, h_3\}, \{h_2, h_4, h_5, h_6\}\}$$

$$[F(e_2)] = \{\{h_1, h_3, h_6\}, \{h_2, h_4, h_5\}\}$$

$$[F(e_3)] = \{\{h_1, h_3, h_4, h_5\}, \{h_2, h_6\}\}$$

$$[F(e_4)] = \{\{h_1, h_2, h_3\}, \{h_4, h_5, h_6\}\}$$

şeklindedir [47].

Tanım 1.4.10. *X üzerinde (F, A) ve (H, B) birer soft küme olmak üzere bunların* ***birleşimi*** *bir (K, C) soft kümesidir öyleki $C = A \cup B$ ve $\forall \alpha \in C$ için*

$$K(\alpha) = \begin{cases} F(\alpha), & \alpha \in A - B \\ H(\alpha), & \alpha \in B - A \\ F(\alpha) \cup H(\alpha), & \alpha \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlı olup $(F, A)\widetilde{\cup}(H, B) = (K, C)$ olarak yazılır [3].

Tanım 1.4.11. *X evrenseli üzerindeki (F, A) and (H, B) soft kümelerinin* ***kesişimi*** *bir (K, C) soft kümesidir öyleki $C = A \cap B$ ve $\forall \alpha \in C$ için $K(\alpha) = F(\alpha) \cap H(\alpha)$ olarak tanımlı olup $(F, A)\widetilde{\cap}(H, B) = (K, C)$ şeklinde gösterilir [3].*

Aşağıdaki önermeler ispatları açık olduğundan doğrudan sunulmuştur [3].

Önerme 1.4.2. i. $(F, A)\widetilde{\cup}(F, A) = (F, A)$

ii. $(F, A)\widetilde{\cap}(F, A) = (F, A)$

iii. *Φ boş soft küme olmak üzere $(F, A)\widetilde{\cup}\Phi = (F, A)$.*

iv. $(F, A)\widetilde{\cap}\Phi = \Phi$

v. *$\tilde{A}$ mutlak soft küme olmak üzere $(F, A)\widetilde{\cup}\tilde{A} = \tilde{A}$.*

vi. $(F, A)\widetilde{\cap}\tilde{A} = (F, A)$

Önerme 1.4.3. i. $((F, A)\widetilde{\cup}(H, B))^c = (F, A)^c\widetilde{\cup}(H, B)^c$

ii. $((F, A)\widetilde{\cap}(H, B))^c = (F, A)^c\widetilde{\cap}(H, B)^c$

Önerme 1.4.4. i. $(F, A)\widetilde{\cup}((H, B)\widetilde{\cup}(K, C)) = ((F, A)\widetilde{\cup}((H, B))\widetilde{\cup}(K, C)$

ii. $(F, A)\widetilde{\cap}((H, B)\widetilde{\cap}(K, C)) = ((F, A)\widetilde{\cap}((H, B))\widetilde{\cap}(K, C)$

iii. $(F, A)\widetilde{\cup}((H, B)\widetilde{\cap}(K, C)) = ((F, A)\widetilde{\cup}(H, B))\widetilde{\cap}((F, A)\widetilde{\cup}(K, C))$

iv. $(F, A)\widetilde{\cap}((H, B)\widetilde{\cup}(K, C)) = ((F, A)\widetilde{\cap}(H, B))\widetilde{\cup}((F, A)\widetilde{\cap}(K, C))$

1.4.2 Soft Gruplar

Soft küme teorisinin tanıtılmasından sonra Aktas and Cagman tarafından soft grup kavramı tanımlanarak bazı özellikleri incelenmiştir. Bu bölümde soft gruplar ile ilgili temel karakterizasyonlar verilecektir.

G bir grup and A boştan farklı bir küme olsun.

Tanım 1.4.12. *(F,A) çifti G üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $\forall\alpha \in A$ için $F(\alpha) \leq G$ ise (F,A)' ya G üzerinde bir **soft grup** denir [5].*

Genel anlamda ise (F,A) soft grubu G grubunun alt gruplarının bir parametrelendirilmiş ailesi olarak tanımlanabilir. Ayrıca, G grubu üzerindeki bir (F,A) soft grubu bazen (G,F,A) gösterimi ile temsil edilecektir.

Örnek 1.4.8. *$G = A = S_3 = \{e,(12),(13),(23),(123),(132)\}$ ve küme-değerli bir fonksiyon olarak*

$$F(x) = \{y \in G : xRy \Longleftrightarrow y = x^n, n \in \mathbb{N}\}$$

alınsın. Buradan, $F(e) = \{e\}, F(12) = \{e,(12)\}, F(13) = \{e,(13)\}, F(23) = \{e,(23)\}, F(123) = F(132) = \{e,(123),(132)\}$ olarak elde edilir ki bu kümelerin herbirinin $G = S_3$' ün birer alt grubu olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece, (F,A) çifti bir soft grup olup G nin alt gruplarının parametrelendirilmiş $\{F(\alpha) : \alpha \in A\}$ ailesidir [5].

Önerme 1.4.5. *G üzerinde (F,A) ve (H,A) iki soft grubunun kesişimi olan $(F,A)\widetilde{\cap}(H,A)$ da G üzerinde bir soft gruptur [5].*

Önerme 1.4.6. *(F,A) ve (H,B) çifti G üzerinde birer soft grup olsun. Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise bunların birleşimi olan $(F,A)\widetilde{\cup}(H,B)$ de G üzerinde bir soft gruptur [5].*

Tanım 1.4.13. *(F,A) çifti G üzerinde bir soft grup olsun. Bu durumda,*

i. *G' nin birim elemanı e olmak üzere $\forall\alpha \in A$ için $F(\alpha) = \{e\}$ ise (F,A)' ya G*

*üzerinde bir **birim soft grup** denir [5].*

ii. *$\forall\alpha \in A$ için $F(\alpha) = G$ ise (F, A)' ya G üzerinde bir **mutlak soft grup** denir [5].*

Önerme 1.4.7. i. *(F, A) çifti G üzerinde bir soft grup ve $f : G \longrightarrow K$ bir homomorfizm olsun. $\forall\alpha \in A$ için $F(\alpha) = Kerf$ ise $(f(F), A)$ çifti K üzerinde birim soft gruptur [5].*

ii. *G üzerinde (F, A) bir mutlak soft grup ve $f : G \longrightarrow K$ bir homomorfizm olmak üzere $(f(F), A)$ da K üzerinde bir mutlak soft gruptur [5].*

Tanım 1.4.14. *(F, A) ve (H, B) ikilileri G üzerinde birer soft grup olsun. Eğer*

i. *$B \subset A$ ve*

ii. *$\forall\alpha \in B$ için $H(\alpha) \leq F(\alpha)$*

*şartları sağlanıyorsa (H, B)' ye (F, A) soft grubunun bir **soft alt grubu** denir ve $(H, B)\tilde{<}(F, A)$ ile gösterilir [5].*

Örnek 1.4.9. *$G = A = S_3$ ve $B = A_3$ olsun.*

$$F(x) = \{y \in S_3 : xRy \Longleftrightarrow y = x^n, n \in \mathbb{N}\}$$

ve

$$H(x) = \{y \in A_3 : xRy \Longleftrightarrow y =< x >\}$$

şeklinde tanımlanırsa bu durumda $A_3 \subset S_3$ ve $\forall\alpha \in A_3$ için $H(\alpha) \leq F(\alpha)$ olduğundan $(H, B)\tilde{<}(F, A)$' dır [5].

Tanım 1.4.15. *G üzerinde (F, A) bir soft grup ve $(H, B)\tilde{<}(F, A)$ olsun. Eğer her $\alpha \in B$ için $H(\alpha)$ grubu $F(\alpha)$' nın bir normal alt grubu yani $H(\alpha) \trianglelefteq F(\alpha)$ ise (H, B)' ye (F, A)' nın bir **normal soft alt grubu** denir ve $(H, B)\tilde{\triangleleft}(F, A)$ şeklinde yazılır [5].*

Önerme 1.4.8. *G üzerinde (F, A) ve (H, B) iki soft grup ve $(F, A)\tilde{<}(H, B)$ olsun. Bu durumda, $f : G \longrightarrow K$ bir homomorfizm ise $(f(F), A)$ ve $(f(H), B)$ ikilisi K üzerinde birer soft grup olup $(f(F), A)\tilde{<}(f(H), B)$ dir [5].*

Tanım 1.4.16. *(F, A) ve (H, B) sırasıyla G ve K üzerinde birer soft grup olmak üzere $f : G \longrightarrow K$ ve $g : A \longrightarrow B$ fonksiyonları verilsin. Eğer*

i. *f örten bir homomorfizm,*

ii. *g örten fonksiyon ve*

iii. *$\forall \alpha \in A$ için $f(F(\alpha)) = H(g(\alpha))$*

*şartları sağlanıyorsa (f, g) çiftine bir **soft homomorfizm** denir. Ayrıca, (F, A) ile (H, B) **soft homomorfik** olarak adlandırılır ve $(F, A) \sim (H, B)$ şeklinde gösterilir [5].*

Bu tanımda, f bir izomorfizm, g bire-bir ve örten bir fonksiyon olarak alınırsa (f, g) çiftine bir ***soft izomorfizm*** denir ve (F, A) ile (H, B) ***soft izomorfik*** olarak adlandırılarak $(F, A) \simeq (H, B)$ şeklinde yazılır [5].

Tanım 1.4.17. *(F, A) ve (H, B) sırasıyla G ve K üzerinde birer soft grup olsun. (F, A) ve (H, B) soft gruplarının çarpımı $\forall(\alpha, \beta) \in A \times B$ için*

$$U(\alpha, \beta) = F(\alpha) \times H(\beta)$$

olmak üzere $(F, A) \times (H, B) = (U, A \times B)$ şeklinde tanımlıdır [5].

Önerme 1.4.9. *(F, A) ve (H, B) sırasıyla G ve K üzerinde birer soft grup olmak üzere bunların çarpımı olan $(F, A) \times (H, B)$ de $G \times K$ üzerinde bir soft gruptur [5].*

İspat. Tanım 1.4.12 ve Tanım 1.4.17 den ispata kolaylıkla ulaşılır. □

1.4.3 Soft Kategori

Belirsizliği modelleyen bir matematiksel araç olarak ortaya atılan soft küme teorisi başta oyun teorisi, olasılık ve ölçüm teorisi olmak üzere birçok dalda geniş bir çalışma alanı yaratmıştır. Matematikçilerin büyük ilgisini çeken bu teori cebirsel, topolojik ve geometrik olarak incelenmiştir. Dahası, kategorik olarak da bu teori ile ilgili çalışmalar yapılmıştır $[12-13,15,40]$. Özellikle, Sardar ve Gupta soft kategori kavramını tanımlayarak soft kategori teorinin temellerini inşa etmişlerdir [12]. Burada, soft kategori ve onun bazı temel özellikleri sunulacaktır.

Tanım 1.4.18. *Bir $\mathcal{C}$ kategorisinin tüm alt kategorilerinin kümesi $\mathcal{P}(\mathcal{C})$ olsun. Parametrelerin kümesi A olmak üzere $\forall\alpha \in A$ için $F(\alpha)$, $\mathcal{C}$' nin bir alt kategorisi olacak şekilde tanımlanan*

$$F : A \longrightarrow \mathcal{P}(\mathcal{C})$$

*dönüşümü ile birlikte (F, A) çiftine bir **soft kategori** denir [12].*

Diğer bir ifadeyle, $\mathcal{C}$ üzerinde bir soft kategori $\mathcal{C}$ kategorisinin alt kategorilerinin parametrelendirilmiş bir ailesi olarak da tanımlanabilir.

Örnek 1.4.10. *U üzerinde (F, A) bir soft küme olsun. U kümesi $Ob(\mathcal{C}) = U$ ve her $x, y \in Ob(\mathcal{C})$ için $Mor(x, x) = I_x$, diğer durumlarda $Mor(x, y) = \emptyset$ şeklinde tanımlanan bir $\mathcal{C}$ kategorisi olarak gözönüne alınsın. (F, A) çifti U üzerinde bir soft küme olduğundan her $\alpha \in A$ için $F(\alpha) \subset U$. Buradan, açıktır ki birim morfizmler ile $F(\alpha)$ kategorisi $\mathcal{C}$' nin bir alt kategorisidir. Böylece, (F, A) çifti $\mathcal{C}$ üzerinde bir soft kategoridir [41].*

Bu durumda, her soft küme U evrenseli üzerinde bir soft kategori olarak düşünülebilir.

Örnek 1.4.11. *$\mathcal{C}$ grupların Gp kategorisi olmak üzere parametrelerin kümesi olarak $A = \{normal, sonlu, abelyan\}$ kümesini düşünelim. Buna göre, her $\alpha \in A$ için $F(\alpha)$ normal, sonlu ve abelyan alt grupları gösterir. Grup homomorfizmleri ile bu alt grupların her biri kategori yapısına sahip olup $\mathcal{C}$' nin birer alt kategorisidir. Böylece, (F, A) çifti $\mathcal{C}$ üzerinde bir soft kategoridir [12].*

Tanım 1.4.19. *$\mathcal{C}$ üzerinde (F, A) ve (H, B) birer soft kategori olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (H, B)' ye (F, A)' nın bir **soft alt kategorisi** denir [12].*

i. *$B \subset A$.*

ii. *Her $\alpha \in B$ için $H(\alpha)$, $F(\alpha)$' nın bir alt kategorisidir.*

Örnek 1.4.12. *(F, A) soft kategorisi Örnek 1.4.11 deki gibi alınsın. Aynı kategori üzerinde (H, B) soft kategorisi de $B = \{abelyan\}$ ve $H(abelyan) =$ tüm sonlu abelyan gruplar şeklinde tanımlansın. Bu durumda, (H, B)' nin (F, A)' nın bir soft alt kategorisi olduğu açıktır [12].*

Önerme 1.4.10. *(H, B) çifti (F, A)' nın ve (K, C) çifti de (H, B)' nin birer soft alt kategorisi ise (K, C) çifti de (F, A)' nın bir soft alt kategorisidir [12].*

İspat. Soft alt kategori tanımından ispat kolaylıkla elde edilir. □

Tanım 1.4.20. *$\mathcal{C}$ üzerinde (F, A) ve (H, B) iki soft kategori olsun . Eğer (F, A) soft kategorisi (H, B)' nin ve (H, B) soft kategorisi (F, A)' nın birer soft alt kategorisi ise (F, A) ve (H, B) **soft denktir** denir [12].*

Tanım 1.4.21. *$\mathcal{C}$ üzerinde (F, A)' nın bir soft alt kategorisi (H, B) olsun. Bu durumda,*

i. *$\forall\alpha \in B$ için $H(\alpha)$ kategorisi $F(\alpha)$' nın bir tam alt kategorisi ise (H, B)' ye (F, A)' nın bir **tam** soft alt kategorisi denir [12].*

ii. *$\forall\alpha \in B$ için $H(\alpha)$ kategorisi $F(\alpha)$' nın bir geniş alt kategorisi ise (H, B)' ye (F, A)' nın bir **geniş** soft alt kategorisi denir [12].*

Örnek 1.4.13. *Örnek 1.4.12 de verilen (H, B) soft alt kategorisi (F, A)' nın bir tam soft alt kategorisidir [12].*

Tanım 1.4.22. *(F, A) ve (H, B) sırasıyla $\mathcal{C}$ ve $\mathcal{D}$ üzerinde birer soft kategori olsun. $g : A \longrightarrow B$ bir dönüşüm ve $\mathfrak{K} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{D}$ bir funktor olmak üzere*

i. *$\mathfrak{K}$ tam bir funktor ve g örten bir dönüşüm,*

ii. *$\forall\alpha \in A$ için $\mathfrak{K}(F(\alpha)) = H(g(\alpha))$*

*şartları sağlanıyor ise $(\mathfrak{K}, g)$ çifti bir **soft funktor** olarak adlandırılır [12].*

Bu durumda, nesneleri soft kategoriler ve morfizmleri ise bu soft kategoriler arasındaki soft funktorlar olan yeni bir kategori elde edilir. Bu kategori ***soft kategorilerin kategorisi*** olarak adlandırılır ve **SCat** ile gösterilir.

Örnek 1.4.14. *$\mathcal{C}$ üzerinde (F, A)' nın bir soft alt kategorisi olarak (H, B) verilsin. $i : B \longrightarrow A$ dahil etme dönüşümü ve $\mathcal{I} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}$ birim funktor olarak alınırsa yukarıdaki tanımdan $(\mathcal{I}, i)$ çifti (H, B)' den (F, A)' ya bir soft funktordur [12].*

Tanım 1.4.23. *$\mathcal{C}$ üzerinde iki soft kategori (F, A) ve (H, B) olsun. $\mathcal{C}$' nin dual kategorisi olarak $\mathcal{C}^{op}$ verilsin. Bu durumda, her $\alpha \in A$ için $F^{op}(\alpha) = (F(\alpha))^{op}$ olmak üzere $(F, A)^{op} = (F^{op}, A)$' ya (F, A)' nın* ***dual soft kategorisi*** *denir. Açıkça $(F, A)^{op}$ da $\mathcal{C}^{op}$ üzerinde bir soft kategoridir [12].*

Kategori teoride dual kategori için var olan sonucun soft versiyonu da geçerli olup aşağıdaki gibidir [12].

Önerme 1.4.11. $((F, A)^{op})^{op} = (F, A)^{op}$

Burada, kategori teoride var olan başlangıç, bitiş ve sıfır nesne kavramları soft kategoriye taşınarak yeniden tanımlanmıştır.

Tanım 1.4.24. *$\mathcal{C}$ üzerinde (F, A) bir soft kategori olsun. Eğer her $\alpha \in A$ için bir kategori olarak $F(\alpha)$ başlangıç nesnesine sahip ise (F, A)* ***başlangıç nesnelerine sahip*** *bir soft kategori olarak adlandırılır [12].*

Burada şu uyarıda bulunmamızda fayda var. $\mathcal{C}$ kategorisinin başlangıç nesnesine sahip olması demek (F, A)' nın da başlangıç nesnelerine sahip bir soft kategori olması anlamına gelmez.

Tanım 1.4.25. *$\mathcal{C}$ üzerinde (F, A) bir soft kategori olsun. Eğer her $\alpha \in A$ için bir kategori olarak $F(\alpha)$ bitiş nesnesine sahip ise (F, A)* ***bitiş nesnelerine sahip*** *bir soft kategori olarak adlandırılır [12].*

Yine belirtmek gerekir ki $\mathcal{C}$ kategorisinin bitiş nesnesine sahip olmasının (F, A)' nın da bitiş nesnelerine sahip bir soft kategori olmasını gerektirmez.

Önerme 1.4.12. *$\mathcal{C}$ üzerinde (F, A) başlangıç (bitiş) nesnelerine sahip bir soft kategori ise $(F, A)^{op}$ da $\mathcal{C}$ üzerinde bitiş (başlangıç) nesnelerine sahip bir soft kategoridir [12].*

İspat. Tanım 1.4.24 (Tanım 1.4.25) den (F, A) başlangıç (bitiş) nesnelerine sahip bir soft kategori ise her $\alpha \in A$ için $F(\alpha)$ kategorisi başlangıç (bitiş) nesnesine sahiptir. Kategori teoriden bilindiği gibi bir kategorinin her başlangıç (bitiş) nesnesi onun dual kategorisinde bitiş (başlangıç) nesnesidir. Bundan dolayı, $\mathcal{C}$ üzerinde $F(\alpha)^{op}$ kategorisi bitiş (başlangıç) nesnesine sahip olur ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

Tanım 1.4.26. *$\mathcal{C}$ üzerinde bir soft kategori (F, A) olmak üzere eğer her $\alpha \in A$ için bir kategori olarak $F(\alpha)$ sıfır nesnesine sahip ise (F, A)' ya **sıfır nesnelerine sahip** bir soft kategori denir [12].*

Önerme 1.4.13. *$\mathcal{C}$ üzerinde bir (F, A) soft kategorisindeki herhangi iki başlangıç (bitiş) nesnesi izomorfiktir [15].*

İspat. $\mathcal{C}$ üzerindeki bir (F, A) soft kategorisinin iki başlangıç (bitiş) nesnesine sahip olduğu kabul edilsin. Bu durumda, $\alpha \in A$ için bir kategori olarak $F(\alpha)$ iki başlangıç (bitiş) nesnesine sahiptir. Kategori teoride bir kategorinin herhangi iki başlangıç (bitiş) nesnesi izomorfik olduğundan istenilen elde edilir. $\square$

Bu önermeden doğrudan aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 1.4.1. *Bir soft kategoride aynı tipteki nesneler izomorfiktir [15].*

Tanım 1.4.27. *$\mathcal{C}$ üzerinde (F, A) bir soft kategori olmak üzere her $\alpha \in A$ için $F(\alpha)$ kategorisi geçişmeli ise (F, A)' ya **geçişmelidir** denir [15].*

Uyarı 1.4.1. *Kategori teoriden bilinir ki bir* $\mathcal{C}$ *kategorisi sıfır nesneye sahiptir gerek ve yeter şart bu kategori geçişmelidir. Aşağıda bu durumun soft karşılığı verilmiştir.*

Sonuç 1.4.2. $\mathcal{C}$ *üzerinde* (F, A) *bir başlangıç ve bir bitiş nesnesine sahip soft kategori olsun. Bu durumda,* (F, A) *bir sıfır nesneye sahiptir gerek ve yeter şart* (F, A) *geçişmelidir [15].*

2. SOFT GRUPLARIN ETKİLERİ

Bu bölümde soft etki kavramı tanımlanarak örneklendirilmiştir. Bu kavram ile ilgili bazı karekterizasyonlar sunularak önemli sonuçlar elde edilmiştir. Soft simetrik grup tanımı verilerek soft etki ile soft simetrik grup arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca, iki soft grubun yarı-direkt çarpımı tanımlanmış ve bu çarpımın yine bir soft grup olduğu gösterilmiştir.

2.1 Soft Etki

Tanım 2.1.1. *$G = (G, F, A)$ bir soft grup ve $X = (X, F', A)$ bir soft küme olsun. Bu durumda, X üzerinde G nin bir (sol)* ***soft G-etkisi*** *bir*

$$\Pi_\alpha : F(\alpha) \times F'(\alpha) \longrightarrow F'(\alpha)$$

ikili işlemidir öyleki her $\alpha \in A$ için

i. *$\forall x \in F'(\alpha)$ için $\Pi_\alpha(e, x) = x$,*

ii. *$\forall x \in F'(\alpha)$ ve $\forall g, h \in F(\alpha)$ için $\Pi_\alpha(g, \Pi_\alpha(h, x)) = \Pi_\alpha(gh, x)$*

şartları sağlanır. Burada, her $\alpha \in A$ için Π_α bir (sol) $G-$etki dönüşümü olup G soft grubunun X soft kümesi üzerine (soldan) ***soft etkisi*** *denir ve X soft kümesi bir* ***G-soft küme*** *olarak adlandırılır.,*

Özel olarak, (X, F', A) soft kümesi bir soft grup olarak alınırsa ve her $\alpha \in A$ için Π_α dönüşümü ***i.*** *ve* ***ii.*** *şartlarına ek olarak*

iii. *$\forall x, y \in F'(\alpha)$ ve $\forall g \in F(\alpha)$ için $\Pi_\alpha(g, xy) = \Pi_\alpha(g, x)\Pi_\alpha(g, y)$*

şartını da sağlıyorsa G soft grubu X soft grubu üzerine (soldan) soft etkir denir. Bu etki ile birlikte X bir ***G-soft grup*** *adını alır.*

Örnek 2.1.1. *$S = \{1, 2, 3\}$ üzerinde permütasyonların grubu S_3 olmak üzere $A = G = S_3$ alınsın. $G = (G, F, A)$ soft grubu*

$$F(e) = \{e\},$$

$$F(12) = \{e, (12)\},$$

$$F(13) = \{e, (13)\},$$

$$F(23) = \{e, (23)\},$$

$$F(123) = F(132) = \{e, (123), (132)\},$$

şeklinde ve $X = \{1, 2, 3\}$ *olmak üzere* $X = (X, F, A)$ *soft kümesi de*

$$F'(e) = \{1\},$$

$$F'(12) = \{1, 2\},$$

$$F'(13) = \{1, 3\},$$

$$F'(23) = \{2, 3\},$$

$$F'(123) = F'(132) = \{1, 2, 3\},$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, her $\alpha \in A$ *için*

$$\begin{array}{rcl} \Pi_\alpha : F(\alpha) \times F'(\alpha) & \longrightarrow & F'(\alpha) \\ (g, x) & \mapsto & \Pi_\alpha(g, x) = \sigma(x) \end{array}$$

dönüşümü bir (sol) grup etkisidir. Açıktır ki $e \in G$ *birim eleman olmak üzere* $\Pi_\alpha(e, x) = x$ *olup her* $g, h \in F(\alpha)$ *için* $\Pi_\alpha(g, \Pi_\alpha(h, x)) = \Pi_\alpha(gh, x)$ *dir. Böylece,* $X = (X, F, A)$ *soft kümesi bir* $G-$*soft kümedir.*

Uyarı 2.1.1. *Yukarıda verilen tanımda her* $\alpha \in A$ *için sol grup etki dönüşümü olan* Π_α *nın yönü değiştirilirse* Π_α *bir sağ grup etkisine dönüşür öyleki* X *üzerinde* G *nin bir sağ soft (grup) etkisi elde edilir.*

Kolaylıkla görüleceği üzere sağ soft (grup) etkileri sol soft (grup) etkilerinden çok farklı değildir. Onlar arasındaki tek fark etkinin yönüdür. Bundan dolayı, sol soft (grup) etkileri için verilen örneklerin duali sağ soft (grup) etkilerine örnek teşkil eder. Sağ soft (grup) etkilerine bir örnek aşağıdaki gibi verilebilir.

Örnek 2.1.2. *H bir G soft grubunun soft alt grubu olsun. H nın bir (sağ) soft koset kümesi*

$$X = \{Hg : \ g \in F(\alpha)\}$$

olmak üzere her $g_1 \in F(\alpha)$ için

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha : F(\alpha)' \times F(\alpha) &\longrightarrow F'(\alpha) \\ (Hg, g_1) &\mapsto \Pi_\alpha(Hg, g_1) = H(gg_1) \end{aligned}$$

dönüşümü bir grup etkisidir. Gerçekten de her $g_1, g_2 \in F(\alpha)$ için

i) $\Pi_\alpha(Hg, e) = H(ge) = Hg$

ii) $$\begin{aligned} \Pi_\alpha(\Pi_\alpha(Hg, g_1), g_2) &= \Pi_\alpha(H(gg_1), g_2) \\ &= H((gg_1)g_2) \\ &= H(g(g_1g_2)) \\ &= Hg(g_1g_2) \\ &= \Pi_\alpha(Hg, g_1g_2) \end{aligned}$$

şartları sağlanır.

Böylece, G soft grubu H' nın sağ soft kosetlerinin kümesi üzerine sağdan etkir. Benzer olarak, G soft grubunun H' nın sol soft kosetlerinin kümesi üzerine soldan etki ettiği de gösterilebilir.

Bundan sonra aksi belirtilmediği müddetçe soft etki denildiğinde sol soft etki olduğu anlaşılmalıdır.

Önerme 2.1.1. *$G = (G, F, A)$ bir soft grup ve $X = (X, F', A)$ bir soft küme olmak üzere X bir $G-$soft küme ve $\forall \alpha \in A$ için $F'(\alpha) = X$ olsun. Her $x, y \in F'(\alpha)$ için*

$$x \sim y \Longleftrightarrow \exists g \in F(\alpha) \text{ vardır } \ni y = \Pi_\alpha(g, x)$$

olarak tanımlanan $\sim$ bağıntısı X üzerinde bir soft denklik bağıntısı oluşturur.

İspat. Her $\alpha \in A$ ve $x, y \in F'(\alpha)$ için

$$\begin{array}{rcl} F'' : A & \longrightarrow & P(X \times X) \\ \alpha & \mapsto & F''(\alpha) = \{(x,y) \in X \times X : x \sim y\} \end{array}$$

şeklinde tanımlansın. Kolaylıkla gösterilebilir ki her $\alpha \in A$ için $F''(\alpha)$, X üzerinde bir denklik bağıntısıdır. Böylece, Tanım 1.4.9'dan (F'', A)'nın X üzerinde bir soft denklik bağıntısı olduğu açıktır. $\square$

Sonuç 2.1.1. *Yukarıda tanımlanan $\sim$ bağıntısına göre x' in* ***yörüngesi***

$$Orb_G(x) = \{y \in F'(\alpha) : x \sim y\} = \{\Pi_\alpha(g, x) : \ g \in F(\alpha)\}$$

şeklinde tanımlı bir G-soft kümedir. Ayrıca, (Orb_G, X) çifti X üzerinde

$$Orb_G : X \longrightarrow P(X)$$

dönüşümü ile bir soft kümedir.

Önerme 2.1.2. *X üzerinde yukarıdaki gibi $\sim$ ile tanımlanan (F'', A) soft denklik bağıntısı için $x \in F'(\alpha)$ olmak üzere $x \in Orb_G(x)$' dir.*

İspat. Açık olarak $x = \Pi_\alpha(e, x) \in Orb_G(x)$' dir. Yani, her eleman kendi yörüngesinin içinde yer alır. $\square$

Yukarıda verilen iki önermeden şu sonuca ulaşabiliriz:

Önerme 2.1.3. *X bir $G-$soft küme olmak üzere ayrık yörüngeleri X soft kümesinin bir parçalanışını oluşturur.*

İspat. Aşağıdaki iki şartın sağlandığını göstermek ispat için yeterlidir.

i. X' in her elemanı herhangi bir yörüngededir.

ii. $Orb_G(x) \cap Orb_G(x') \neq \emptyset$ ise $Orb_G(x) = Orb_G(x')$ sağlanır.

İlk şart Önerme 2.1.2 den açıktır. İkinci şart için ise $y \in Orb_G(x) \cap Orb_G(x')$ olsun. Bu durumda, $y = \Pi_a(g,x) = \Pi_a(h,x')$ olacak şekilde $g, h \in F(a)$ vardır. Böylece,

$$x = \Pi_a(e,x) = \Pi_a(gg^{-1},x) = \Pi_a(g^{-1},\Pi_a(g,x)) = \Pi_a(g^{-1},\Pi_a(h,x')) = \Pi_a(g^{-1}h,x')$$

olup $x \in Orb_G(x') = \{\Pi_a(g_1,x') : g_1 \in F(a)\}$ bulunur. O halde, $g_1 = e$ alındığında

$$\begin{aligned} Orb_G(x) = \{\Pi_a(g',x) : g' \in F(a)\} &\subseteq \{\Pi_a(g',g_1x') : g', g_1 \in F(a)\} \\ &\subseteq \{\Pi_a(g',x') : g' \in F(a)\} = Orb_G(x') \end{aligned}$$

elde edilir. Benzer yol kullanılarak $Orb_G(x') \subseteq Orb_G(x)$ de bulunur ki ispatı tamamlayan $Orb_G(x) = Orb_G(x')$ sonucuna ulaşılır. □

Önerme 2.1.4. *$G = (G,F,A)$ soft grubu $X = (X,F',A)$ soft kümesi üzerine etki etsin. Eğer $x \in F'(\alpha)$, $g \in F(\alpha)$ için $y = \Pi_\alpha(g,x)$ ise $x = \Pi_\alpha(g^{-1},y)$ dir. Ayrıca, $x \neq x'$ ise $\Pi_\alpha(g,x) \neq \Pi_\alpha(g,x')$ dür.*

İspat. $y = \Pi_\alpha(g,x)$ olmak üzere

$$\Pi_\alpha(g^{-1},y) = \Pi_\alpha(g^{-1},\Pi_\alpha(g,x)) = \Pi_\alpha(g^{-1}g,x) = \Pi_\alpha(e,x) = x$$

elde edilir.

Diğer yandan, $x \neq x'$ ise $\Pi_\alpha(g,x) = \Pi_\alpha(g,x')$ olduğunu varsayalım. Bu eşitliğe g^{-1} ile işlem uygulanırsa

$$\Pi_\alpha(g^{-1},\Pi_\alpha(g,x)) = \Pi_\alpha(g^{-1},\Pi_\alpha(g,x'))$$

$$\Pi_\alpha(g^{-1}g,x) = \Pi_\alpha(g^{-1}g,x')$$

$$\Pi_\alpha(e,x) = \Pi_\alpha(e,x')$$

$$x = x'$$

bulunur ki bu da $x \neq x'$ varsayımı ile çelişir. Dolayısıyla, $x \neq x'$ ise $\Pi_\alpha(g,x) \neq \Pi_\alpha(g,x')$ olur. □

Şimdi de soft etkiye birkaç temel örnek verelim.

Örnek 2.1.3. *Her G soft grubu kendi üzerine aşağıdaki gibi etki eder. $X = G$ alınmak üzere her $\alpha \in A$ için*

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha : F(\alpha) \times F(\alpha) &\longrightarrow F(\alpha) \\ (g,h) &\mapsto \Pi_\alpha(g,h) = h \end{aligned}$$

bir etki dönüşümüdür. Bu etki G' nin kendi üzerindeki ***aşikar (trivial) soft etkisi*** *olarak adlandırılır.*

Örnek 2.1.4. *Her G soft grubu aşağıda tanımlanan* ***çarpım*** *aracılığıyla kendi üzerine etki eder. Her $\alpha \in A$ için*

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha : F(\alpha) \times F(\alpha) &\longrightarrow F(\alpha) \\ (g,h) &\mapsto \Pi_\alpha(g,h) = gh \end{aligned}$$

dönüşümünün bir etki olduğu kolaylıkla görülür.

Örnek 2.1.5. *Her G soft grubu aşağıda verilen* ***konjuge*** *işlemiyle kendi üzerinde bir soft etkiye sahiptir. $\forall \alpha \in A$ için*

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha : F(\alpha) \times F(\alpha) &\longrightarrow F(\alpha) \\ (g,h) &\mapsto \Pi_\alpha(g,h) = ghg^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümünün bir etki olduğu açıktır.

Uyarı 2.1.2. *G soft grubu değişmeli(abelyan) ise, G' nin konjuge işlemiyle kendi üzerindeki soft etkisi aşikar soft etkiye dönüşür.*

Bu örneklere ek olarak iki özel örnek aşağıdaki gibidir.

Örnek 2.1.6. *$Y = (Y, F'', A)$ herhangi bir soft küme olmak üzere $G = (G, F, A)$ soft grubunun $X = (X, F', A)$ üzerindeki soft etkisi*

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha : F(\alpha) \times F'(\alpha) &\longrightarrow F'(\alpha) \\ (g,x) &\mapsto \Pi_\alpha(g,x) \end{aligned}$$

olsun. $f : X \longrightarrow Y$ *bire-bir bir dönüşüm ve* $F'' = f(F')$ *olmak üzere her* $\alpha \in A$ *için*

$$\begin{aligned} \Pi'_\alpha : F(\alpha) \times f(F'(\alpha)) &\longrightarrow f(F'(\alpha)) \\ (g, f(x)) &\mapsto \Pi'_\alpha(g, f(x)) = f(\Pi_\alpha(g, x)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm de bir etkidir. Bu soft etki ile (Y, F'', A) *bir* $G-$*soft kümedir denir.*

Örnek 2.1.7. $A = G = S_n$ *için* $G = (G, F, A)$ *bir soft grup ve* $X = (X, F', A)$ *bir soft küme olmak üzere* $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ *kümesinin polinomları* $f(P_1, P_2, \ldots, P_n)$ *ile gösterilsin. Bu durumda,*

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha : F(\alpha) \times F'(\alpha) &\longrightarrow F'(\alpha) \\ (\sigma, f(P_1, P_2, \ldots, P_n)) &\mapsto \Pi_\alpha(\sigma, f(P_1, P_2, \ldots, P_n)) = f(P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, \ldots, P_{\sigma(n)}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm için

i) $\sigma = e$ *için* $\Pi_\alpha(e, f(P_1, P_2, \ldots, P_n)) = f(P_{e(1)}, P_{e(2)}, \ldots, P_{e(n)}) = f(P_1, P_2, \ldots, P_n)$

ii) *Her* $\sigma, \sigma' \in S_n$ *için*

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha(\sigma, \Pi_a(\sigma', f(P_1, P_2, \ldots, P_n))) &= \Pi_\alpha(\sigma, f(P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, \ldots, P_{\sigma(n)})) \\ &= f(P_{\sigma(\sigma'(1))}, P_{\sigma(\sigma'(2))}, \ldots, P_{\sigma(\sigma'(n))}) \\ &= \Pi_\alpha(\sigma\sigma', f(P_1, P_2, \ldots, P_n))) \end{aligned}$$

şartları sağlandığından bu dönüşüm bir etki olup X *bir* $G-$*soft kümedir denir.*

Genel olarak, bir teoride var olan bazı kavramlar uygun dönüşümlerle başka bir teoriye taşınarak yeniden tanımlanabilir. Buradaki asıl amaç ise grup teoride var olan bazı etki tiplerini soft yaklaşım ile yeniden incelemektir.

Tanım 2.1.2. *Bir* (G, F, A) *soft grubunun* (X, F', A) *soft kümesi üzerindeki bir soft etkisinde her* $\alpha \in A$ *ve* $x, y \in F'(\alpha)$ *için bir* $g \in F(\alpha)$ *var olup* $\Pi_\alpha(g, x) = x$ *ise bu soft etkiye* ***geçişmelidir (transitive)*** *denir.*

Tanım 2.1.3. *Bir* (G, F, A) *soft grubunun* (X, F', A) *soft kümesi üzerindeki bir soft etkisinde her* $\alpha \in A$ *ve birbirinden farklı her* $g, h \in F(\alpha)$ *için bir* $x \in F'(\alpha)$ *var olup* $\Pi_\alpha(g, x) \neq \Pi_\alpha(h, x)$ *ise bu soft etkiye* ***efektiftir*** *denir.*

Bu tanıma denk olarak, $F(\alpha)$*' nın farklı elemanları* $F'(\alpha)$ *üzerinde farklı şekilde etki ediyorsa bu soft etkiye* ***efektiftir*** *denir.*

Tanım 2.1.4. *Bir* (G, F, A) *soft grubu* (X, F', A) *soft kümesi üzerinde bir soft etkiye sahip olmak üzere eğer her* $\alpha \in A$ *ve* $g, h \in F(\alpha)$ *için* $\Pi_\alpha(g, x) = \Pi_\alpha(h, x)$ *olacak şekilde bir* $x \in F'(\alpha)$ *var öyleki* $g = h$ *ise bu soft etkiye* ***serbesttir*** *denir.*

Başka bir ifadeyle, bir $x \in F'(\alpha)$ *için* $\Pi_\alpha(g, x) = x$ *olacak şekilde bir* $g \in F(\alpha)$ *var ise bu* g *elemanı birimdir.*

Önerme 2.1.5. *Her serbest soft etki efektiftir.*

İspat. Tanım 2.1.3 ve Tanım 2.1.4 den ispat açıktır. □

Tanım 2.1.5. *Bir* (G, F, A) *soft grubunun* (X, F', A) *soft kümesi üzerindeki soft etkisi hem geçişmeli hem de serbest ise* ***regülerdir*** *denir. Yani, her* $\alpha \in A$ *ve* $x, y \in F'(\alpha)$ *için bir tek* $g \in F(\alpha)$ *vardır öyleki* $\Pi_\alpha(g, x) = y$ *ise bu soft etki* ***regüler*** *olarak adlandırılır.*

Sonuç 2.1.2. *Herhangi bir* G *soft grubunun çarpım aracılığıyla kendi üzerindeki soft etkisi hem regüler hem de efektiftir.*

2.1.1 Soft Etkilerde Sabitleyici, Merkezleştirici ve Normalleştirici

Bu bölümde, soft etki ile ilgili sabitleyici, merkezleştirici ve normalleştirici gibi kavramlar tanımlanarak bunlar arasındaki ilişki incelenmiştir. Ayrıca bu çalışmanın odağında yer alan bir kavram olan soft simetrik grup tanıtılarak bu kavramın soft etki ile olan ilişkisini açıklayan önemli bir sonuç verilmiştir.

Tanım 2.1.6. *$X = (X, F', A)$ bir $G-$soft küme olsun. Her $\alpha \in A$ ve $x \in F'(\alpha)$ için*

$$Stab_G(x) = \{g \in F(\alpha) : \Pi_\alpha(g, x) = x\}$$

*kümesine x' in **sabitleyicisi** denir.*

Genel olarak, herhangi bir $Y \widetilde{\subseteq} X$ soft alt kümesinin sabitleyicisi de

$$Fix_G Y = \{g \in F(\alpha) : \Pi_\alpha(g, x) = x, \ x \in F'(\alpha) \cap Y\}$$

şeklinde tanımlıdır.

Önerme 2.1.6. *Yukarıdaki tanımda verilen $Stab_G(x)$ ve $Fix_G Y$ kümeleri G üzerinde birer soft gruptur.*

İspat. Her $x \in X$ için

$$\begin{aligned} Stab_G : X &\longrightarrow P(G) \\ x &\mapsto Stab_G(x) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup $Stab_G(x)$' in G' nin bir alt grubu olduğu kolayca gösterilebilir. Böylece, $(G, Stab_G, X)$ yapısı bir soft gruptur. Benzer olarak, her $x \in Y$ için

$$\begin{aligned} Fix_G : Y &\longrightarrow P(G) \\ x &\mapsto Fix_G(x) \end{aligned}$$

olarak tanımlanır öyleki $Fix_G(x)$' in G' nin bir alt grubu olduğu açıktır. Buradan, (Fix_G, Y) çifti G üzerinde bir soft grup olarak elde edilir. □

Uyarı 2.1.3. *Klasik teoriden farklı olarak $Stab_G(x)$ ve $Fix_G Y$ soft grupları G soft grubunun birer soft alt grubu değildir.*

Önerme 2.1.7. *Yukarıda tanımlanan $Stab_G(x)$ ve $Fix_G Y$ için*

$$Fix_G Y = \cap_{x \in F'(\alpha) \cap Y} Stab_G(x)$$

İspat. $g \in Fix_G Y$ alınsın. Tanımdan, her $x \in F'(\alpha) \cap Y$ için $\Pi_\alpha(g,x) = x$ olup $g \in Stab_G(x)$ bulunur. Buradan, $g \in \cap_{x \in F'(\alpha) \cap Y} Stab_G(x)$ olur. Böylece, $Fix_G Y \subseteq \cap_{x \in F'(\alpha) \cup Y} Stab_G(x)$ elde edilir.

Tersine, $g \in \cap_{x \in F'(\alpha) \cap Y} Stab_G(x)$ alınsın. Bu durumda, her $x \in F'(\alpha) \cap Y$ için $g \in Stab_G(x)$ olup $\Pi_\alpha(g,x) = x$ bulunur. Böylece, $g \in Fix_G Y$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

Tanım 2.1.7. $G = (G, F, A)$ *soft grubu kendi üzerine konjuge etki etsin. Her* $\alpha \in A$ *ve* $h \in F(\alpha)$ *için* h*' nın yörüngelerinin*

$$C_G(h) = \{g \in F(\alpha) : \Pi_\alpha(g,h) = \Pi_\alpha(h,g)\}$$

kümesi h*' nın* ***merkezleştiricisi*** *olarak adlandırılır.*

Dahası, $F(\alpha)$ *daki tüm elemanların merkezleştiricilerinin kesişimi*

$$Z(G) = \{g \in F(\alpha) : \Pi_\alpha(g,h) = \Pi_\alpha(h,g), \forall h \in F(\alpha)\}$$

şeklinde tanımlı olup $Z(G)$*' ye* G *soft grubunun* ***merkezi*** *denir.*

Önerme 2.1.8. (C_G, G, G) *yapısı bir soft gruptur.*

İspat. Her $h \in F(\alpha)$ için

$$\begin{aligned} C_G : G &\longrightarrow P(G) \\ h &\mapsto C_G(h). \end{aligned}$$

şeklinde tanımlı olup $C_G(h)$' nın G' nin bir alt grubu olduğu açıktır. Dolayısıyla, (C_G, G) çifti G üzerinde bir soft gruptur. $\square$

Tanım 2.1.8. $G = (G, F, A)$ *soft grubu kendi üzerine konjuge etki etsin ve* H *kümesi* G*' nin bir soft alt kümesi olsun. Her* $\alpha \in A$ *için izotropi soft alt grubu*

$$N_G(H) = \{g \in F(\alpha) : \Pi_\alpha(g,h) = h,\ h \in F(\alpha) \cap H\}$$

şeklinde tanımlı olup G*' de* H*' nın* ***normalleştiricisi*** *olarak adlandırılır.*

Açıkça yazılabilir ki H soft alt kümesi G' nin bir soft alt grubu ise H aynı zamanda $N_G(H)$' nın da bir soft alt grubudur. Dahası, H soft alt kümesi G' nin bir normal soft alt grubu ise, $N_G(H)$ kümesi G' nin en geniş soft alt grubudur.

Önemli bir kavram olan soft simetrik grubun tanımı aşağıdaki gibi verilir:

Tanım 2.1.9. *X bir küme ve A parametrelerin kümesi olsun. X kümesinin permütasyonlarının grubu $Sym(X)$ olmak üzere bu grubun tüm alt gruplarının kümesi $P(Sym(X))$ ile gösterilsin. Bu durumda, $\alpha \in A$ için*

$$F : A \longrightarrow P(Sym(X))$$

dönüşümü ile $F(\alpha)$ kümesi $Sym(X)$ in bir alt grubu ise $(Sym(X), F, A)$ yapısına bir ***soft simetrik grup*** *denir.*

Grup teoride, simetrik grup ile etki arasındaki ilişki Cayley teoremi ile verilmiştir. Soft simetrik grup ile soft etki arasında da benzer bir ilişkinin varlığı aşağıdaki gibidir.

Teorem 2.1.1. *$G = (G, F, A)$ soft grubu $X = (X, F', A)$ soft kümesine etki etsin. Bu durumda, G' den $Sym(X)$' e bir soft homomorfizm vardır.*

İspat. Kabul edilsin ki $G = (G, F, A)$ soft grubu $X = (X, F', A)$ üzerinde bir soft etki olsun. Buradan, her $\alpha \in A$

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha : F(\alpha) \times F'(\alpha) &\longrightarrow F'(\alpha) \\ (g, x) &\mapsto \Pi_\alpha(g, x) = \sigma(x) \end{aligned}$$

dönüşümü bir etkidir. Ayrıca, her $g \in F(\alpha)$ için

$$\begin{aligned} \sigma_g : F'(\alpha) &\longrightarrow F'(\alpha) \\ x &\mapsto \sigma_g(x) = \Pi_\alpha(g, x) \end{aligned}$$

dönüşümü de $F'(\alpha)$ nın bir permütasyonudur. Dahası, her $\alpha \in A$ için

$$\begin{array}{rcl} F(\alpha) & \longrightarrow & Sym(F'(\alpha)) \\ g & \mapsto & \sigma_g \end{array}$$

dönüşümü bir homomorfizmdir. Böylece, $G \longrightarrow Sym(X)$ bir soft grup homomorfizmi elde edilir. □

Teorem 2.1.2. *Sonlu bir grup üzerinde tanımlı her soft grup bir soft simetrik grup içine gömülebilir.*

İspat. G sonlu bir grup olmak üzere $G = (G, F, A)$ soft grubu kendi üzerine her $\alpha \in A$ için

$$\begin{array}{rcl} \Pi_\alpha : F(\alpha) \times F(\alpha) & \longrightarrow & F(\alpha) \\ (g, h) & \mapsto & \Pi_\alpha(g, h) = gh \end{array}$$

çarpımı ile etkisin. Ayrıca , her $g \in F(\alpha)$ için

$$\begin{array}{rcl} \ell_g : F(\alpha) & \longrightarrow & F(\alpha) \\ h & \mapsto & \ell_g(h) = gh \end{array}$$

dönüşümü $F(\alpha)$ nın bir permütasyonudur. Dahası, her $\alpha \in A$ için

$$\begin{array}{rcl} F(\alpha) & \longrightarrow & Sym(F(\alpha)) \\ g & \mapsto & \ell_g \end{array}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir homomorfizmdir. Bu homomorfizm bire-bir ve $F(\alpha)$ kümesi $Sym(F(\alpha))$' nın bir alt grubu olduğundan bir dahil etme dönüşümüdür. Böylece, G soft grubu $Sym(G)$ soft simetrik grubun içinde yatar. □

Bu teoremlerden sonra, bir soft grubun bir soft küme üzerindeki etkisini ifade etmenin farklı bir yolu olarak aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 2.1.3. *$G = (G, F, A)$ soft grubunun $X = (X, F', A)$ soft kümesi üzerindeki soft etkisi $G \longrightarrow Sym(X)$ soft homomorfizmi ile aynıdır.*

2.1.2 Soft Grupların Yarı-Direkt Çarpımı

Tanım 2.1.10. *$G = (G, F, A)$ ve (H, F', A) iki soft grup olsun. G ve H gruplarının yarı-direkt çarpımı olan $G \ltimes H$ grubundan indirgenen işlem ve G' nin H üzerine etkisinden indirgenen kısıtlanmış etkiler ile $\forall\alpha \in A$ için $F''(\alpha) = F(\alpha) \ltimes F'(\beta)$ birer grup olmak üzere bu iki soft grubun* ***yarı-direkt çarpımı***

$$(G, F, A) \ltimes (H, F', A) = (G \ltimes H, F'', A)$$

şeklinde tanımlıdır.

Önerme 2.1.9. *İki soft grubun yarı-direkt çarpımı yine bir soft gruptur.*

İspat. (G, F, A) ve (H, F', A) iki soft grup ve bunların yarı-direkt çarpımı

$$(G, F, A) \ltimes (H, F', A) = (G \ltimes H, F'', A)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} F'' : A &\longrightarrow P(G \ltimes H) \\ \alpha &\mapsto F''(\alpha) = f(\alpha) \ltimes F'(\alpha) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Grup teoriden bilindiği üzere G ve H grubunun yarı-direkt çarpımı olan $G \ltimes H$ da yine bir gruptur. Dahası, $\forall\alpha \in A$ için $F(\alpha)$ ve $F'(\alpha)$ birer grup olup $G \ltimes H$ grubunun işlemi ve indirgenen etki dönüşümü ile $F(\alpha) \times F'(\alpha)$ da bir grup yapısına sahiptir. Bu grup $F(\alpha) \ltimes F'(\alpha)$ ile gösterilen yarı-direkt çarpım grubu olup $\forall\alpha \in A$ için $F(\alpha) \ltimes F'(\alpha) \leq G \ltimes H$ olduğu açıktır. Böylece, $(G \ltimes H, F'', A)$ yapısı bir soft gruptur. $\square$

3. SOFT GRUPOİDLER VE SOFT GRUP-GRUPOİDLER

3.1 Soft Grupoidler

Her morfizmi bir izomorfizm olan özel bir kategori olarak tanımlanan grupoid kavramı ilk olarak Brandt tarafından 1926 yılında ortaya atılmıştır [24]. Zaman içinde, kategori teoride önemli bir kavram olmanın ötesine geçen grupoid, matematiğin her alanında kullanılan disiplinlerarası bir kavram haline gelmiştir. Bu bölümde ise groupoid kavramına bir soft yaklaşım sunularak yeni bir kategori olan soft groupoidlerin kategorisi inşa edilmiştir. Soft grupoid ile soft kategori arasındaki ilişki incelenerek soft alt grupoid ve normal soft alt grupoid tanımları sunulmuştur.

Tanım 3.1.1. *A parametrelerin kümesi ve $\mathcal{G}$ bir grupoid olmak üzere bu grupoidin tüm alt grupoidlerinin ailesi $P(\mathcal{G})$ ile gösterilsin. Her $\alpha \in A$ için*

$$F : A \longrightarrow P(\mathcal{G})$$

dönüşümü ile $F(\alpha)$ kümesi $\mathcal{G}$' nin bir alt grupoidi ise (F, A) çifti $\mathcal{G}$ üzerinde bir ***soft grupoid*** *olarak adlandırılır.*

Özel olarak, her $\alpha \in A$ için bir grupoid olarak $F(\alpha)$ geçişmeli ise $\mathcal{G}$ soft grupoidine ***geçişmelidir*** denir. $\mathcal{G}$ geçişmeli bir grupoid ise üzerinde tanımlı her soft grupoid de geçişmelidir. Aksi taktirde, her $\alpha \in A$ için $F(\alpha)$ grupoidi tamamen geçişmesiz ise $\mathcal{G}$ soft grupoidine ***tamamen geçişmesizdir*** denir. $\mathcal{G}$ grupoidi tamamen geçişmesiz ise üzerinde tanımlı bir soft grupoidin de tamamen geçişmesiz olduğu açıktır.

Genel anlamda, bir (F, A) soft grupoidi $\mathcal{G}$ grupoidinin alt grupoidlerinin bir paremetrelendirilmiş ailesi olarak kabul edilebilir. Bu çalışmada kullanışlı olması bakımından $\mathcal{G}$ grupoidi üzerindeki bir (F, A) soft grupoidi $(\mathcal{G}, F, A)$ yapısı ile gösterilecektir.

Örnek 3.1.1. *Her soft kümeden bir soft groupoid elde edilebilir. Açık olarak, U üzerinde bir soft küme olarak (F, A) ele alınsın. Nesneler kümesi olarak U evrenselini düşünürsek her $x, y \in U = Ob(\mathcal{G})$ için*

$$Mor(x,y) = \begin{cases} I_x & , \quad x = y \\ \emptyset & , \quad x \neq y \end{cases}$$

olarak tanımlandığında U kümesi bir grupoid yapısına sahip olur. (F, A) bir soft küme olduğundan $\alpha \in A$ için $F(\alpha) \subset U$ dur. Bu durumda, açıktır ki her bir $F(\alpha)$ birim morfizmler ile göz önüne alınırsa $\mathcal{G} = U$ grupoidinin birer alt grupoidi olarak elde edilir. Böylece, $(\mathcal{G}, F, A)$ yapısı bir soft grupoiddir.

Örnek 3.1.2. *Her soft grup bir soft grupoiddir. Burada (G, F, A) soft grubunu gözönüne alalım. Bu durumda, her $\alpha \in A$ için $F(\alpha) \leq G$ dir. Grupoid teoriden bilindiği üzere her grup tek nesneli bir groupoid olduğundan G grubu da bir grupoiddir. Ayrıca, kolaylıkla söylenebilir ki her bir $F(\alpha)$ alt grubu da birer grupoid olup G grupoidinin birer alt grupoididir. Buradan, $(\mathcal{G}, F, A)$ soft grupoid yapısı elde edilir.*

Örnek 3.1.3. *$\mathcal{G}$ nesneleri tüm gruplar ve morfizmleri grup izomorfizmleri olan bir grupoid olsun. Parametre kümesi olarak*

$$A = \{abelyan, sonlu, devirli, normal\}$$

seçilsin. Bu durumda, $F : A \longrightarrow P(\mathcal{G})$ dönüşümü ile $F(\alpha)$ sırasıyla abelyan, sonlu, devirli, normal grupları gösterir. Bu grupların her biri $Ob(\mathcal{G})$' nin birer alt grubudur. Aynı zamanda, her grup tek nesneli bir grupoid olduğundan bu gruplar birer grupoid olup $\mathcal{G}$' nin birer alt grupoididir. Böylece, $(\mathcal{G}, F, A)$ yapısı bir soft grupoid olur.

Örnek 3.1.4. *(G,F,A) bir soft grup ve (X,F',A) bir soft küme olsun. Bu durumda,*

$$\begin{aligned} F : A &\longrightarrow P(G) \\ \alpha &\mapsto F(\alpha) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F' : A &\longrightarrow P(X) \\ \alpha &\mapsto F'(\alpha) \end{aligned}$$

dönüşümleri verilmiş olup $X \times G \times X$ aşikar grupoidi üzerinde

$$\begin{aligned} F'' : A &\longrightarrow P(X \times G \times X) \\ \alpha &\mapsto F''(\alpha) = F'(\alpha) \times F(\alpha) \times F'(\alpha) \end{aligned}$$

*şeklinde tanımlansın. Burada, her $\alpha \in A$ için $F'(\alpha) \times F(\alpha) \times F'(\alpha) \subset X \times G \times X$ olup $X \times G \times X$ aşikar grupoidinden indirgenen yapı dönüşümleri ile $F'(\alpha) \times F(\alpha) \times F'(\alpha)$ da bir grupoid yapısına sahiptir. Yani, her bir $F'(\alpha) \times F(\alpha) \times F'(\alpha)$ grupoidi $X \times G \times X$ ' in bir alt grupoididir. O halde, $(X \times G \times X, F'', A)$ üçlüsü bir soft grupoid olup **aşikar (trivial) soft grupoid** olarak adlandırılır.*

Soft etki grupoidi de aşağıdaki gibi verilebilir.

Örnek 3.1.5. *(G,F,A) bir soft grup ve (X,F',A) bir soft küme olmak üzere*

$$\begin{aligned} F : A &\longrightarrow P(G) \\ \alpha &\mapsto F(\alpha) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F' : A &\longrightarrow P(X) \\ \alpha &\mapsto F'(\alpha) \end{aligned}$$

dönüşümlerini kullanarak

$$\begin{aligned} F'' : A &\longrightarrow P(G \times X) \\ \alpha &\mapsto F''(\alpha) = F(\alpha) \times F'(\alpha) \end{aligned}$$

dönüşümünü tanımlayalım.

G grubunun X kümesi üzerindeki etkisi aşağıdaki gibi verilsin.

$$\begin{aligned} : G \times X &\longrightarrow X \\ (g,x) &\mapsto g \cdot x \end{aligned}$$

*Bu etki kullanılarak, (g,x) çifti başlangıç noktası x ve bitiş noktası $g \cdot x$ olan bir morfizmi göstermek üzere $(h,y) \circ (g,x) = (hg,x)$ kısmî bileşke işlemi ile $G \times X$ bir grupoid yapısına sahiptir. Her $\alpha \in A$ için $F(\alpha) \times F'(\alpha) \subset G \times X$ olduğundan $G \times X$ grupoidinden indirgenen yapı dönüşümleri ile $F''(\alpha)$ bir grupoiddir. Her bir $F''(\alpha)$ grupoidi $G \times X$' in birer alt grupoidi olup $(G \times X, F'', A)$ bir soft grupoid olarak elde edilir ki buna **soft etki grupoidi** deriz.*

Uyarı 3.1.1. *Bu yolla, her G-soft kümeden bir soft grupoid elde edilebilir.*

Bilindiği gibi, grupoid ile kategori arasında bir ilişki var olup her grupoid özel bir kategori olduğu halde her kategori bir grupoid olmayabilir. Soft kategori ile soft grupoid arasında da benzer bir ilişkinin var olduğu aşağıda gösterilmiştir.

Önerme 3.1.1. *Her soft grupoid bir soft kategoridir.*

İspat. $(\mathcal{G}, F, A)$ bir soft grupoid olsun. Bu durumda, her $\alpha \in A$ için $F(\alpha)$ kümesi $\mathcal{G}$ grupoidinin bir alt grupoididir. Her grupoid bir kategori olduğundan, her bir $F(\alpha)$ aslında $\mathcal{G}$ kategorisinin birer alt kategorisidir. Buradan, $(\mathcal{G}, F, A)$ bir soft kategoridir. $\square$

Bu durumun tersi doğru değildir. Çünkü, her kategori bir grupoid olmadığından her soft kategori de bir soft grupoid olmayabilir.

Tanım 3.1.2. *$(\mathcal{G}, F, A)$ ve $(\mathcal{H}, F', B)$ iki soft grupoid olmak üzere $g : A \longrightarrow B$ örten bir dönüşüm ve $\mathfrak{K} : \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ bir funktor olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $(\mathfrak{K}, g)$ çiftine bir* ***soft grupoid homomorfizmi*** *denir.*

i. *$\mathfrak{K}$ funktoru doludur.*

ii. *$\forall \alpha \in A$ için $\mathfrak{K}(F(\alpha)) = F'(g(\alpha))$.*

Bu tanımdan yola çıkarak, nesneleri soft grupoidler ve morfizmleri bunlar arasındaki soft grupoid homomorfizmleri olan yeni bir kategori elde edilir. Bu kategori ***soft grupoidlerin kategorisi*** olarak adlandırılır ve ***SGd*** şeklinde gösterilir.

Örnek 3.1.6. *(f, g) çifti (G, F, A) ve (H, F', B) soft grupları arasında Tanım 1.4.16' de verildiği gibi bir soft grup homomorfizmi olsun. Örnek 3.1.2' den bilindiği gibi her soft grup aslında bir soft grupoiddir. Bundan dolayı, (G, F, A) ve (H, F', B) soft grupları birer soft grupoid olup (f, g) soft homomorfizmi de bir soft grupoid homomorfizmidir.*

Önerme 3.1.2. *$(\mathfrak{K}, g)$ çifti $(\mathcal{G}, F, A)$ soft grupoidi ve $(\mathcal{H}, F', B)$ soft kategorisi arasında bir soft funktor olsun. Bu durumda, $(\mathcal{H}, F', B)$ bir soft grupoiddir.*

İspat. $(\mathfrak{K}, g)$ çiftinin verildiği gibi bir soft funktor olduğu kabul edilsin. Buradan, $\mathfrak{K}$ funktoru dolu olduğundan $\mathfrak{K}$ morfizmler üzerinde örten olup $(\mathcal{H}, F', B)$ soft kategorisi bir soft grupoid yapısına sahip olur. □

Önerme 3.1.3. *$(\mathcal{G}, F, A)$ ve $(\mathcal{H}, F', B)$ soft grupoidleri arasında $(\mathfrak{K}, g)$ bir soft grupoid homomorfizmi olsun. Bu durumda, her $\alpha \in A$ ve $\varphi \in Mor(F(\alpha))$ için*

i. $\mathfrak{K}(\varphi^{-1}) = [\mathfrak{K}(\varphi)]^{-1}$

ii. $\mathfrak{K}^{-1}(\varphi) \cong \mathfrak{K}^{-1}(\varphi^{-1})$

şartları sağlanır.

İspat. $(\mathfrak{K}, g)$ bir soft grupoid homomorfizmi olsun. O halde, $\mathfrak{K}$ bir funktor ve her $\alpha \in A$ için $F(\alpha)$ bir grupoiddir. Grupoid teoriden, her $\varphi \in Mor(F(\alpha))$ için

$$\mathfrak{K}(\varphi^{-1}) \circ \mathfrak{K}(\varphi) = \mathfrak{K}(\varphi^{-1} \circ \varphi) = \mathfrak{K}(I_{\alpha(\varphi)}) = I_{\mathfrak{K}(\alpha(\varphi))}$$

ve

$$\mathfrak{K}(\varphi) \circ \mathfrak{K}(\varphi^{-1}) = \mathfrak{K}(\varphi \circ \varphi^{-1}) = \mathfrak{K}(I_{\beta(\varphi)}) = I_{\mathfrak{K}(\beta(\varphi))}$$

yazılabilir. Bu ise $\mathfrak{K}(\varphi^{-1}) = [\mathfrak{K}(\varphi)]^{-1}$ olduğunu ispatlar.

İkinci şart da aşağıdaki şekilde gösterilebilir.

Her $\psi \in \mathfrak{K}^{-1}(\varphi)$ için

$$\begin{aligned} \mathfrak{K}_\psi : \mathfrak{K}^{-1}(\varphi) &\longrightarrow \mathfrak{K}^{-1}(\varphi^{-1}) \\ \psi &\mapsto \psi^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümü göz önüne alınsın. Buradan, açıktır ki $\mathfrak{K}_\psi$ bire-bir bir dönüşüm olup bir izomorfizmdir. Böylece, $\mathfrak{K}^{-1}(\varphi) \cong \mathfrak{K}^{-1}(\varphi^{-1})$ sağlanmış olur. □

Tanım 3.1.3. *$(\mathcal{G}, F, A)$ ve $(\mathcal{H}, F', B)$ birer soft grupoid olsun. Bunların çarpımı, her $(\alpha, \beta) \in A \times B$ için $F''(\alpha, \beta) = F(\alpha) \times F'(\beta)$ olmak üzere*

$$(\mathcal{G}, F, A) \times (\mathcal{H}, F', B) = (\mathcal{G} \times \mathcal{H}, F'', A \times B)$$

şeklinde tanımlıdır.

Önerme 3.1.4. *Herhangi iki soft grupoidin çarpımı yine bir soft grupoiddir.*

İspat. $(\mathcal{G}, F, A)$ ve $(\mathcal{H}, F', B)$ soft grupoidleri ele alınsın. O halde,

$$\begin{aligned} F : A &\longrightarrow P(\mathcal{G}) \\ \alpha &\mapsto F(\alpha) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} F' : B &\longrightarrow P(\mathcal{H}) \\ \beta &\mapsto F'(\beta) \end{aligned}$$

dönüşümleri mevcut olup her $\alpha \in A$ için $F(\alpha)$ kümesi $\mathcal{G}$ grupoidinin bir alt grupoidi ve her $\beta \in B$ için de $F(\beta)$ kümesi $\mathcal{H}$ grupoidinin bir alt grupoididir. Grupoid teoriden, kolaylıkla söylenebilir ki her $(\alpha, \beta) \in A \times B$ için $F(\alpha) \times F'(\beta)$ de $\mathcal{G} \times \mathcal{H}$ çarpım grupoidinin bir alt grupoididir. Ayrıca, F ve F' dönüşümleri kullanılarak

$$\begin{aligned} F'' : A \times B &\longrightarrow P(\mathcal{G} \times \mathcal{H}) \\ (\alpha, \beta) &\mapsto F''(\alpha, \beta) = F(\alpha) \times F'(\beta) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan F'' dönüşümü ile birlikte $(\mathcal{G} \times \mathcal{H}, F'', A \times B)$ yapısı bir soft grupoid olup ***soft çarpım grupoidi*** olarak adlandırılır. □

3.1.1 Soft Alt Grupoidler

Bu bölümde soft alt grupoidler ve onların bazı özellikleri çalışılacaktır.

Tanım 3.1.4. $(\mathcal{G}, F, A)$ *ve* $(\mathcal{H}, F', B)$ *iki soft grupoid olsun. Eğer* $B \subset A$ *ve her* $\alpha \in B$ *için* $F'(\alpha)$ *grupoidi* $F(\alpha)$*' nın bir alt grupoidi ise* $(\mathcal{H}, F', B)$*' ye* $(\mathcal{G}, F, A)$*' nın bir* ***soft alt grupoidi*** *denir.*

Örnek 3.1.7. $(\mathcal{G}, F, A)$ *soft grupoidi için* I *nesne dönüşümü olmak üzere her* $\alpha \in A$ *için*

$$\mathcal{H} = \{I_x : x \in Ob(F(\alpha))\}$$

grupoidi ele alınsın. Buradan, kolayca gösterilebilir ki $(\mathcal{H}, F, A)$ *soft grupoidi* $(\mathcal{G}, F, A)$*' nın bir soft alt grupoididir.*

Tanım 3.1.5. $(\mathcal{G}, F, A)$ *soft grupoidinin bir soft alt grupoidi* $(\mathcal{H}, F', B)$ *olsun. Bu durumda, her* $\alpha \in B$ *için*

i. $F'(\alpha)$ *grupoidi* $F(\alpha)$*' nın bir dolu alt grupoidi ise* $(\mathcal{H}, F', B)$*' ye* $(\mathcal{G}, F, A)$ *nın bir* ***dolu soft alt grupoidi*** *denir.*

ii. $F'(\alpha)$ *grupoidi* $F(\alpha)$*' nın bir geniş alt grupoidi ise* $(\mathcal{H}, F', B)$*' ye* $(\mathcal{G}, F, A)$

*nın bir **geniş soft alt grupoidi** denir.*

iii. *$F'(\alpha)$ grupoidi $F(\alpha)$' nın bir normal alt grupoidi ise $(\mathcal{H}, F', B)$' ye $(\mathcal{G}, F, A)$ nın bir **normal soft alt grupoidi** denir.*

Örnek 3.1.8. *Örnek 3.1.7' de verilen $(\mathcal{H}, F, A)$ soft alt grupoidi $(\mathcal{G}, F, A)$ nın hem geniş hem de normal soft alt grupoididir.*

Tanım 3.1.6. *Tamamen geçişmesiz bir $(\mathcal{H}, F', B)$ soft grupoidi, $(\mathcal{G}, F, A)$' nın bir soft alt grupoidi olsun. Bu durumda, $\mathcal{G}/\mathcal{H}$ bölüm grupoidinden indirgenen yapı dönüşümleri ve*

$$\begin{aligned} F'' : B &\longrightarrow P(\mathcal{G}/\mathcal{H}) \\ \alpha &\mapsto F''(\alpha) = F(\alpha)/F'(\alpha) \end{aligned}$$

*şeklinde tanımlanan dönüşüm ile birlikte her $\alpha \in B$ için $F(\alpha)/F'(\alpha)$ yapısı bir bölüm grupoidi ise $(\mathcal{G}/\mathcal{H}, F'', B)$ yapısı **soft bölüm grupoidi** olarak adlandırılır.*

3.2 Soft Grup-Grupoidler

Yapılı grupoidlerden biri olan grup-grupoidlere soft yaklaşımın sunulduğu bu bölümde, soft grup ve soft grupoid kavramları kullanılarak soft grup-grupoid kavramı tanımlanmıştır. Soft grup-grupoid homomorfizmi aracılığıyla soft grup-grupoidlerin kategorisi kurulmuştur.

Tanım 3.2.1. *$\mathcal{G}$ bir grup-grupoid ve $P(\mathcal{G})$ de $\mathcal{G}$ nin tüm alt grup-grupoidlerinin kümesi olsun. A parametrelerin bir kümesi olmak üzere $F : A \longrightarrow P(\mathcal{G})$ dönüşümünde her $\alpha \in A$ için $F(\alpha)$ kümesi $\mathcal{G}$' nin bir alt grup-grupoidi ise (F, A) çiftine $\mathcal{G}$ üzerinde bir soft grup-grupoid denir. Kısaca; $(\mathcal{G}, F, A)$ yapısı ile gösterilir.*

Genel anlamda, $\mathcal{G}$ grup-grupoidi üzerindeki bir soft grup-grupoid aslında $\mathcal{G}$ grup-grupoidinin alt grup-grupoidlerinin parametrelendirilmiş bir ailesi olarak tanımlanabilir.

Uyarı 3.2.1. *Her grup-grupoid bir grupoid yapısına sahip olduğundan her soft grup-grupoid de bir soft grupoid yapısına sahiptir.*

Örnek 3.2.1. (F, A) *bir* G *abelyan grubu üzerinde soft grup olsun. Bu durumda, her* $\alpha \in A$ *için* $F(\alpha)$*,* G*' nin bir alt grubudur.* G *abelyan olduğundan her bir* $F(\alpha)$ *da abelyandır. Grupoid teoride her abelyan grup bir grup-grupoid olarak düşünüldüğünden* G *ve her bir* $F(\alpha)$ *da grup-grupoid yapısına sahiptir [49]. Üstelik, her* $\alpha \in A$ *için* $F(\alpha)$*,* G *grup-grupoidinin bir alt grup-grupoididir. Böylece,* G *abelyan grubu üzerindeki* (F, A) *soft grubu bir soft grup-grupoiddir.*

Örnek 3.2.2. *Örnek 3.1.4 de sunulan* $(X \times G \times X, F'', A)$ *soft grupoidi göz önüne alınsın. Bu soft grupoid yapısında* X *bir grup ve* G *bir abelyan grup olarak seçildiğinde* $(X \times G \times X, F'', A)$ *yapısı bir soft grup-grupoid olarak elde edilir.*

Tanım 3.2.2. $(\mathcal{G}, F, A)$ *ve* $(\mathcal{H}, F', B)$ *iki soft grup-grupoid olmak üzere bunların soft grupoid yapıları üzerinde*

$$(\mathfrak{K}, g) : (\mathcal{G}, F, A) \longrightarrow (\mathcal{H}, F', B)$$

dönüşümü bir soft grupoid homomorfizmi olsun. Eğer $(\mathfrak{K}, g)$ *dönüşümü soft grup yapılarını da koruyorsa (yani bir soft homomorfizm ise) bu* $(\mathfrak{K}, g)$ *çiftine bir* ***soft grup-grupoid homomorfizmi*** *denir.*

Böylece, nesneleri soft grup-grupoidler ve morfizmleri bunlar arasındaki soft grup-grupoid homomorfizmleri alınarak yeni bir kategori elde edilir. Bu kategoriye ***soft grup-grupoidlerin kategorisi*** denir ve gösterim olarak ***SGpGd*** şeklinde yazılır.

Örnek 3.2.3. G *ve* H *birer abelyan grup olmak üzere* (G, F, A) *ve* (H, F', B) *soft grupları arasında* (f, g) *çifti Tanım 1.4.16' da verildiği gibi bir soft grup homomorfizmi olsun. Örnek 3.2.1' den bilindiği gibi bir abelyan grup üzerinde tanımlı bir soft grup aslında bir soft grup-grupoiddir. Bundan dolayı,* (G, F, A) *ve*

(H, F', B) *soft grupları birer soft grup-grupoid olup* (f, g) *soft homomorfizmi de bir soft grup-grupoid homomorfizmidir.*

Tanım 3.2.3. $(\mathcal{G}, F, A)$ *bir soft grup-grupoid ve* $(\mathcal{H}, F', B)$ *yapısı da* $(\mathcal{G}, F, A)$ *nın bir soft alt grupoidi olsun. Eğer her* $\alpha \in B$ *için* $Ob(F'(\alpha)) \leq Ob(F(\alpha))$ *ve* $Mor(F'(\alpha)) \leq Mor(F(\alpha))$ *alt grup olma şartları sağlanıyorsa* $(\mathcal{H}, F', B)$*' ye* $(\mathcal{G}, F, A)$*' nın bir* ***soft alt grup-grupoidi*** *denir.*

Tanım 3.2.4. $(\mathcal{G}, F, A)$ *soft grup-grupoidinin bir soft alt grupoidi* $(\mathcal{H}, F', B)$ *olsun. Eğer her* $\alpha \in B$ *için* $Ob(F'(\alpha)) \trianglelefteq Ob(F(\alpha))$ *ve* $Mor(F'(\alpha)) \trianglelefteq Mor(F(\alpha))$ *ise* $(\mathcal{H}, F', B)$*' ye* $(\mathcal{G}, F, A)$*' nın bir* ***normal soft alt grup-grupoidi*** *denir.*

4. SOFT ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Çaprazlanmış modül kavramı Whitehead tarafından tanımlanan önemli bir cebirsel yapıdır [26]. Bu yapı ile ilgili birçok çalışma mevcut olup en dikkat çekeni Brown ve Spencer tarafından verilen çapraz modüller ile grup-grupoidlerin kategori denkliğidir [31]. Bu denklik topolojik anlamda çözümü açık olmayan bazı problemlerin cebirsel yapılar ile çözümünde kolaylıklar sağlamıştır. Bu bölümde ise çaprazlanmış modül yapısı soft yaklaşım altında incelenerek soft çaprazlanmış modül tanımı verilmiştir. Soft çaprazlanmış modüllerin kategorisi tanımlanarak bu tezin odağında yer alan soft grup-grupoidler ile soft çaprazlanmış modüllerin kategorik olarak denk olduğu gösterilmiştir.

4.1 Soft Çaprazlanmış Modüllerin Kategorisi

Tanım 4.1.1. *$H = (H, F', A)$ ve $G = (G, F, A)$ birer soft grup olmak üzere bunlar arasında $\delta = (\delta_0, g_0) : H \longrightarrow G$ dönüşümü bir soft homomorfizm olsun. G nin H üzerine $\pi : G \times H \longrightarrow H$ (sol) soft $G-$etkisi her $\alpha \in A$ için*

$$\begin{aligned} \Pi_\alpha : F(\alpha) \times F'(\alpha) &\longrightarrow F'(\alpha) \\ (g, h) &\mapsto \Pi_\alpha(g, h) = g \cdot h \end{aligned}$$

şeklinde gösterilsin. Eğer her $\alpha \in A$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (H, G, δ, A) dörtlüsüne bir ***soft çaprazlanmış modül*** *denir.*

i. *$\forall h \in F'(\alpha)$ ve $\forall g \in F(g_0(\alpha))$ için $\delta_0(g \cdot h) = g\delta_0(h)g^{-1}$,*

ii. *$\forall h, h_1 \in F'(\alpha)$ için $\delta_0(h) \cdot h_1 = hh_1h^{-1}$.*

Uyarı 4.1.1. *Yukarıdaki tanımda verilen soft çaprazlanmış modül yapısı her $\alpha \in A$ için $F(\alpha) = G$ ve $F'(\alpha) = H$ alındığında klasik anlamda bilinen çaprazlanmış modüle dönüşür.*

Örnek 4.1.1. *H bir abelyan grup olmak üzere (H,F',A) ve (G,F,A) birer soft grup olsun. Bu durumda, $\delta:(H,F',A)\longrightarrow(G,F,A)$ bir soft homomorfizm ve her $\alpha\in A$ için*

$$\begin{aligned}\Pi_\alpha: F(\alpha)\times F'(\alpha) &\longrightarrow F'(\alpha)\\ (g,h) &\mapsto \Pi_\alpha(g,h)=h\end{aligned}$$

aşikar etkisi ile birlikte (H,G,δ,A) yapısı bir soft çaprazlanmış modüldür.

Örnek 4.1.2. *(G,F,A) soft grubu kendi üzerine konjuge etki ile etki etsin. $I=(I_G,I_A):G\longrightarrow G$ soft homomorfizmi ile (G,G,I,A) dörtlüsü bir soft çaprazlanmış modül yapısına sahiptir.*

Tanım 4.1.2. *(H,G,δ,A) ve (H',G',δ',B) iki soft çaprazlanmış modül olmak üzere*

$$f=(f_1,g_1):(H,K,A)\longrightarrow(H',K',B)$$

ve

$$f^\star=(f_2,g_2):(G,F,A)\longrightarrow(G',F',B)$$

birer soft homomorfizm olsun. Eğer her $\alpha\in A$ için

i. $f_2\delta=\delta' f_1$

ii. $\forall g\in F(\alpha)$ *ve* $\forall h\in K(\alpha)$ *olmak üzere* $f_1(g\cdot h)=f_2(g)\cdot' f_1(h)$

iii. $(f_2\times f_1)(F(\alpha),K(\alpha))=(F'\times K')(g_2(\alpha),g_1(\alpha))$

*şartları sağlanıyorsa $(f,f^\star)$ çiftine bir **soft çaprazlanmış modül homomorfizmi** denir ve $<f,f^\star>:(H,G,\delta,A)\longrightarrow(H',G',\delta',B)$ ile gösterilir.*

Böylece, nesneleri soft çaprazlanmış modüller ve morfizmleri bunlar arasındaki soft çaprazlanmış modül homomorfizmleri olan yeni bir kategori inşa edilir. Bu kategoriye ***soft çaprazlanmış modüllerin kategorisi*** denir ve ***SCMod*** ile gösterilir.

4.2 Soft Çaprazlanmış Modüller ile Soft Grup-Grupoidlerin Kategori Denkliği

Brown ve Spencer tarafından 1976 yılında çaprazlanmış modüllerin kategorisi ile grup-grupoidlerin kategorisinin denk olduğu ispatlanmıştır. Burada ise soft çaprazlanmış modüller ile soft grup-grupoidler arasındaki kategorik ilişki incelenmiştir.

Önerme 4.2.1. *Her soft çaprazlanmış modülden bir soft grup-grupoid yapısı elde edilebilir.*

İspat. (H, G, δ, A) bir soft çaprazlanmış modül olsun. Bu durumda, H ve G birer grup olup (H, F', A) ve (G, F, A) birer soft gruptur. Önerme 1.3.2' den, nesnelerin kümesi G ve morfizmlerin kümesi G ve H gruplarının yarı-direkt çarpımı $G \ltimes H$ alınarak $\mathcal{N} = (G, G \ltimes H)$ grup-grupoidi elde edilir. Ayrıca, Önerme 2.1.9'den (H, F', A) ve (G, F, A) soft gruplarının yarı direkt çarpımında her $\alpha \in A$ için $F(\alpha) \ltimes F'(\alpha)$ yapısı $G \ltimes H$ grubunun bir alt grubudur. Bu durumda, $\mathcal{N}$' den indirgenen yapı dönüşümleri ve

$$\begin{aligned} F'' : A &\longrightarrow P(\mathcal{N}) \\ \alpha &\mapsto F''(\alpha) = (F(\alpha), F(\alpha) \ltimes F'(\alpha)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm ile her $\alpha \in A$ için $N_\alpha = (F(\alpha), F(\alpha) \ltimes F'(\alpha))$ birer grup-grupoid yapısına sahip olup $\mathcal{N} = (G, G \ltimes H)$' nin bir alt grup-grupoidi olduğu açıktır. Böylece, $(\mathcal{N}, F'', A)$ yapısı bir soft grup-grupoiddir. □

Sonuç 4.2.1. *Her soft çaprazlanmış modülden yukarıdaki yolla bir soft grup-grupoid elde edilir. Benzer olarak, her soft grup-grupoidden de aşağıdaki şekilde bir soft çaprazlanmış modül elde edilebilir.*

Önerme 4.2.2. *Her soft grup-grupoidden bir soft çaprazlanmış modül elde edilebilir.*

İspat. $(\mathcal{G}, F, A)$ bir soft grup-grupoid olsun. Bu durumda, her $\alpha \in A$ için $F : A \longrightarrow P(\mathcal{G})$ olmak üzere $F(\alpha), \mathcal{G}$ nin bir alt grup-grupoididir. $\mathcal{G}$ bir grup-grupoid olduğundan $Ob(\mathcal{G})$ bir grup yapısına sahip olup

$$\begin{aligned} F' : A &\longrightarrow P(Ob(\mathcal{G})) \\ \alpha &\mapsto F'(\alpha) = Ob(F(\alpha)) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan F' dönüşümünde her $\alpha \in A$ için $Ob(F(\alpha)) \leq Ob(\mathcal{G})$ dir. Böylece, $(Ob(\mathcal{G}), F', A)$ yapısı bir soft gruptur.

Diğer yandan, $\mathcal{G}$ ve $F(\alpha)$ birer grup-grupoid olduğundan

$$s : Mor(\mathcal{G}) \longrightarrow Ob(\mathcal{G}) \;\; \text{ve} \;\; s_\alpha : Mor(F(\alpha)) \longrightarrow Ob(F(\alpha))$$

kaynak dönüşümleri olmak üzere $Kers$ ve $Kers_\alpha$ birer gruptur. Buradan, $Kers$ grubunun tüm alt gruplarının kümesi $P(Kers)$ olmak üzere

$$\begin{aligned} F'' : A &\longrightarrow P(Kers) \\ \alpha &\mapsto F''(\alpha) = Kers_\alpha \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşümde her $\alpha \in A$ için $Kers_\alpha \leq Kers$ olup $(Kers, F'', A)$ yapısı bir soft gruptur.

$g_0 : A \longrightarrow A$ örten bir dönüşüm olmak üzere $t : Mor(\mathcal{G}) \longrightarrow Ob(\mathcal{G})$ hedef dönüşümü için

$$\big(t|_{Kers}\big) = \delta_0 : Kers \longrightarrow Ob(\mathcal{G})$$

dönüşümü bir grup homomorfizmidir. Ayrıca,

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "F''"] \arrow[d, "g_0"'] & P(Kers) \arrow[d, "\delta_0"] \\ A \arrow[r, "F'"'] & P(Ob(\mathcal{G})) \end{tikzcd}$$

diyagramı değişimli olduğundan $\delta_0 F'' = F' g_0$ olup

$$\delta = (\delta_0, g_0) : (Kers, F'', A) \quad \longrightarrow \quad (Ob(\mathcal{G}), F', A)$$

dönüşümü bir soft grup homomorfizmidir.

Ayrıca, her $\alpha \in A$ için açıktır ki

$$\begin{aligned} \pi_\alpha : Ob(\mathcal{F}(\alpha)) \times Kers_\alpha \quad &\longrightarrow \quad Kers_\alpha \\ (x, k) \quad &\mapsto \quad \pi_\alpha(x, k) = x \cdot k = I_x k I_x^{-1} \end{aligned}$$

dönüşümü bir etkidir öyleki $(Ob(\mathcal{G}), F', A)$ soft grubu $(Kers, F'', A)$ soft grubu üzerinde bir soft etkiye sahiptir. Diğer yandan, her $\alpha \in A$ ve $t(k) = x$ için

$$\delta_0(x \cdot k) = \delta_0(I_x k I_x^{-1}) = \delta_0(I_x)\delta_0(k)\delta_0(I_x^{-1}) = \delta_0(I_x)\delta_0(k)\delta_0(I_{x^{-1}}) = x\delta_0(k)x^{-1}$$

ve

$$\delta_0(k) \cdot k_1 = I_{\delta_0(k)} k_1 I_{\delta_0(k)}^{-1} = I_{t(k)} k_1 I_{t(k)}^{-1} = I_x k_1 I_x^{-1} = k k_1 k^{-1}$$

olur ki böylece $(Kers, Ob(\mathcal{G}), \delta, A)$ dörtlüsü bir soft çaprazlanmış modül yapısı olarak elde edilir. □

Bu tez yukarıdaki iki önermeden yararlanılarak yeni bir kategori denkliğinin ispatlandığı aşağıdaki önemli teorem ile tamamlanmıştır.

Teorem 4.2.1. *Soft grup-grupoidlerin kategorisi SGpGd ile soft çaprazlanmış modüllerin kategorisi SCMod denktir.*

İspat. $HG = (H, G, \delta, A)$ ve $H'G' = (H', G', \delta', B)$ iki soft çaprazlanmış modül ve

$$f = (f_1, g_1) : H \longrightarrow H' \;\; \text{ve} \;\; f^* = (f_2, g_2) : G \longrightarrow G'$$

olacak şekilde $< f, f^* >$ soft çaprazlanmış modül homomorfizmi olsun. Buna göre; Önerme 4.2.1' den elde edilen sonuçlardan nesneler üzerinde $\eta(HG) = (\mathcal{N}, F', A)$

ve morfizmler üzerinde $\mathfrak{K} = (f_2, f_2 \times f_1)$ bir funktor olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \eta : SCMod & \longrightarrow & SGpGd \\ (f, f^*) & \mapsto & (\mathfrak{K}, g_2) \end{array}$$

şeklinde tanımlı olup η bir funktordur.

Diğer yandan, $\mathcal{G} = (\mathcal{G}, F, A)$ ve $\mathcal{H} = (\mathcal{H}, F', B)$ birer grup-grupoid olmak üzere $\mathfrak{K} = (\mathfrak{K}_0, \mathfrak{K}_1)$ funktoru için

$$(\mathfrak{K}, g) : (\mathcal{G}, F, A) \longrightarrow (\mathcal{H}, F', B)$$

bir soft grup-grupoid homomorfizmi olsun. Bu durumda, Önerme 4.2.2' den nesneler üzerinde $\xi(\mathcal{G}) = (Kers, Ob(\mathcal{G}), \delta, A)$ ve morfizmler üzerinde $f = (\mathfrak{K}_1|_{Ker_{\mathcal{G}}s}, g)$ ve $f^* = (\mathfrak{K}_0, g)$ olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \xi : SGpGd & \longrightarrow & SCMod \\ (\mathfrak{K}, g) & \mapsto & (f, f^*) \end{array}$$

şeklinde tanımlı ξ bir funktordur.

ξ ve η birer funktor olduğundan bunların bileşkesi olan $\xi\eta$ ve $\eta\xi$ da birer funktor olup I_{SCMod} ve I_{SGpGd} birim funktorlardır.

Tanım 1.2.9' den $SCMod \simeq SGpGd$ denkliğini göstermek için $\xi\eta \simeq I_{SCMod}$ ve $\eta\xi \simeq I_{SGpGd}$ olduğunu göstermek yeterlidir.

İlk olarak, $SCMod$ için $\xi\eta, I_{SCMod} : SCMod \longrightarrow SCMod$ birer funktor olmak üzere

$$\Phi_{HG} : \xi\eta(HG) \longrightarrow I_{SCMod}(HG)$$

dönüşümü tanımlansın. Bu durumda, her bir $f = (f_1, g_1) : HG \longrightarrow H'G'$ soft çaprazlanmış modül homomorfizmi için

$$\begin{tikzcd} \xi\eta(HG) \arrow[r, "\xi\eta(f)"] \arrow[d, "\Phi_{HG}"'] & \xi\eta(H'G') \arrow[d, "\Phi_{H'G'}"] \\ I_{SCMod}(HG) \arrow[r, "I(f)"] & I_{SCMod}(H'G') \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olduğundan $\Phi : \xi\eta \longrightarrow I_{SCMod}$ bir doğal dönüşüm olup $\xi\eta \simeq I_{SCMod}$ bulunur.

Diğer taraftan, $SGpGd$ için $\eta\xi, I_{SGpGd} : SGpGd \longrightarrow SGpGd$ birer funktor olmak üzere

$$\Psi_{\mathcal{G}} : \eta\xi(\mathcal{G}) \longrightarrow I_{SCMod}(\mathcal{G})$$

dönüşümü tanımlansın. Burada, her bir $\mathcal{K} = (\mathfrak{K}, g) : (\mathcal{G}, F, A) \longrightarrow (\mathcal{H}, F', B)$ soft grup-grupoid homomorfizmi için

$$\begin{tikzcd}
\eta\xi(\mathcal{G}) \arrow[r, "\eta\xi(\mathcal{K})"] \arrow[d, "\Psi_{\mathcal{G}}"'] & \eta\xi(\mathcal{H}) \arrow[d, "\Psi_{\mathcal{H}}"] \\
I_{SGpGd}(\mathcal{G}) \arrow[r, "I(\mathcal{K})"] & I_{SGpGd}(\mathcal{H})
\end{tikzcd}$$

diyagramı değişmeli olduğundan $\Psi : \eta\xi \longrightarrow I_{SGpGd}$ bir doğal dönüşüm olup $\eta\xi \simeq I_{SGpGd}$ elde edilir.

Sonuç olarak, $\xi\eta \simeq I_{SCMod}$ ve $\eta\xi \simeq I_{SGpGd}$ olup buradan açıkça söylenebilir ki soft grup-grupoidlerin kategorisi ile soft çaprazlanmış modüllerin kategorisi denk kategorilerdir. $\square$

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Kategori teoride önemli bir yer tutan kategori denklikleri bazı topolojik problemlerin cebirsel problemlere dönüştürülerek çözüme ulaştırılmasında oldukça kolaylıklar sağlamaktadır. Bu denklikler içinde en bilineni grup-grupoidler ile çaprazlanmış modüllerin kategori denkliği olup bunların topolojik versiyonu için de denkliğin var olduğu gösterilmiştir [31, 48]. Dahası, yüksek boyutlu kategorilerde de bu denkliğin sağlandığı ispatlanmıştır [32]. Ancak, literatürde soft küme teorisi ile ilgili kategorik anlamda bazı incelemeler yapılmasına rağmen buradaki bazı topolojik yapılar ile cebirsel yapılar arasında geçiş sağlayacak herhangi bir çalışma mevcut değildir. Literatürdeki bu boşluğu gidermeyi amaçlayan bu tez çalışmasında soft grup-grupoidlerin kategorisi ve soft çaprazlanmış modüllerin kategorisi olarak adlandırılan iki yeni kategori tanımlanarak bunlar için bir kategori denkliği elde edilmiştir. Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar sırasıyla şu şekilde ifade edilebilir:

i. Bir soft grubun hem bir soft küme hem de bir soft grup üzerindeki etkisi tanımlanmış ve özel örnekler verilerek bu soft etki kavramı güçlendirilmiştir. Grup teorinin temel yapılarından biri olan simetrik grup kavramı soft küme teorisine taşınarak soft simetrik grup ile soft etki arasındaki ilişkinin bilinen Cayley teoremindekine benzer olduğu gösterilmiştir. Bu anlamda sunulan farklı cebirsel bakış açısı ile soft küme teorisine yeni bir boyut kazandırılmıştır.

ii. Bir grupoidin tüm alt grupoidlerinin bir parametrelendirilmiş ailesi olarak tanımlanan soft grupoid kavramı örneklendirilerek bazı özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiştir. Tanımlanan soft grupoid homomorfizmi aracılığıyla soft grupoidlerin kategorisi inşa edilmiştir. Ayrıca, bir yapısal grupoid olan grup-grupoid kavramı kullanılarak soft grup-grupoid tanımı verilmiştir. Devamında, Soft grup-grupoid ile soft grupoid arasındaki ilişki açıklanarak soft grup-grupoidlerin kategorisi kurulmuştur. Böylece, kategori teoride önemli bir yeri olan grupoid yapısına bir soft yaklaşım sunularak soft grupoid teori olarak adlandırılan yeni bir teorinin ortaya çıkmasına zemin hazırlanmıştır.

iii. Soft etki ve soft grup yapıları kullanılarak bir soft grup üzerinde soft çaprazlanmış modül yapısı sunulmuştur. Kategorisi tanımlanan bu yapının soft grup-grupoidler ile olan ilişkisinin detayları ile çalışılmasının bir sonucu olarak yeni bir kategori denkliği elde edilmiştir. Bu denklik soft topolojik yapılar ve soft cebirsel yapılar arasındaki köprü inşaasının başlangıç noktası olarak görülebilir.

5.2 Öneriler

Bu tez çalışmasında tanımlanan soft grupoidlere benzer şekilde Brown ve Spencer tarafından verilen katlı grupoidlere soft yaklaşım sunularak soft katlı grupoidler tanımlanabilir. Soft katlı grupoidler ile soft çaprazlanmış modüllerin kategorik denkliği gösterilebilir.

Soft gruplar üzerinde tanımlanan soft çaprazlanmış modül yapısına benzer olarak soft halkalar üzerinde de yeni bir yapı tanımlanarak bu yapının soft halka-grupoidleri ile arasındaki kategorik ilişki incelenebilir.

Soft çaprazlanmış modül için soft alt çaprazlanmış modül ve normal soft alt çaprazlanmış modül kavramları tanımlanarak bu kavramların kategorileri inşa edilebilir. Ayrıca, bazı özel koşullar altında soft alt çaprazlanmış modüller ile soft alt grup-grupoidlerin ve normal soft alt çaprazlanmış modüller ile normal soft altgrup-grupoidlerin kategorik anlamda denklikleri araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] D. A. Molodtsov, *Soft set theory-First results*, **Comput. Math. Appl.,** 37(4-5) (1999) 19-31.

[2] P. K. Maji, R. Biswas and R. Roy, *An application of soft sets in a decision making problem*, **Comput. Math. Appl.,** 44 (2002) 1077-1083.

[3] P. K. Maji, R. Biswas and R. Roy, *Soft set theory*, **Comput. Math. Appl.,** 45(4-5)(2003) 555-562.

[4] D. Pie and D. Miao, From soft sets to information systems. in: X. Hu, Q. Liu, A. Skowron, T.Y. Lin, R.R. Yager, B. Zhang (Eds.), Proceedings of Granular Computing, Vol.2, IEEE, (2005), pp. 617-621.

[5] H. Aktas and N. Cagman, *Soft sets and soft groups*, **Inform. Sci.,** 77(13)(2007) 2726-2735.

[6] Y. Zou, Z. Xiao, *Data analysis approaches of soft sets under incomplete information*, **Knowl.Based Syst.,** 21 (2008) 941-945.

[7] A. O. Atagun, A.Sezgin, *Soft substructures of rings, fields and modules*, **Comput. Math. Appl.,** 61 (2011)592-601.

[8] M. Shabir, M. Naz, *On soft topological spaces*, **Comput. Math. Appl.,** 61(7) (2011) 1786-1799.

[9] W. K. Min, *A Note on Soft Topological Spaces*, **Comput. Math. Appl.,** 62 (2011) 3524-3528.

[10] N. Cagman, S. Karatas and S. Enginoglu, *Soft topology*, **Comput. Math. Appl.,** 62(1) (2011) 351-358.

[11] A. Aygunoglu, A. Aygun, *Some notes on soft topological spaces*, **Neural Comput. Appl.,** 22(1) (2012) 113-119.

[12] S. K. Sardar, S. Gupta, *Soft category theory-an introduction*, **J. hyperstructures,** 2 (2013) 118-135.

[13] O. Zahiri, *Category of soft sets*, **An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.,** 40(2) (2013) 154-166.

[14] T. Shah, S. Shaheen, *Soft topological groups and rings*, **Ann. Fuzzy Math. Inform.,** 7(5)(2014) 725-743.

[15] S. Oztunc, *Some properties of soft categories*, **IJMO,** 6(2) (2016) 91-95.

[16] H. Zassenhaus, *The Theory of Groups*, 2nd ed., Chelsea Publishing Company, New York, 1958, 288 p.

[17] J. L. Alperın, R. B. Bell, *Groups and representations*, Vol. 162, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1995, 196 p.

[18] D. J. S. Robinson, *A Course in the Theory of Groups*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, Springer–Verlag, New York, 1996, 502 p.

[19] W. F. Santos, A. Rittatore, *Actions and Invariants of Algebraic Groups*, CRC press, 2005, 472 p.

[20] J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, 4th ed., Springer, New York, 1995, 517 p.

[21] L. A. Veress, *Group actions on sets and automata theory*, **Appl. Math. Comput.,** 113(2-3) (2000) 289-304.

[22] M. W. Hirsch, S. Smale and R. L. Devaney, *Differential Equations, Dynamical Systems and an Introduction to Chaos*, Academic Press, 2003, 425 p.

[23] R. Brown, P.J. Higgins and R. Sivera, *Nonabelian Algebraic Topology: Filter sapaces, crossed complexes and cubical homotopy groupoids*, Vol. 15, EMS Tracts in Mathematics, 2011, 703 p.

[24] H. Brandt, *Uber eine Verallgemeinerungdes Gruppenbegriffes*, **Math. Ann.,** 96 (1926) 360- 366.

[25] S. Eilenberg, S. MacLane, *General Theory of Natural Equivalences*, **Trans. Amer. Math. Soc.,** 58(2) (1945) 231-294.

[26] J. H. C. Whitehead, *Note on a previous paper entitled On adding relations to homotopy group*, **Ann. of Math.** 47(4) (1946) 806- 810.

[27] J. H. C. Whitehead, *Combinatorial homotopy II*, **Bull. Amer. Math. Soc.,** 55 (1949) 453- 496.

[28] P. J. Higgins, *Categories and Groupoids*, Vol.32, Van Nostrand Mathematical Studies, New York, 1971, 195 p.

[29] R. Brown, J. P. L. Hardy, *Topological Groupoids I: Universal Constructions*, **Math. Nachr.,** 71 (1976) 273-286.

[30] R. Brown, G. Danesh-Naruie and J. P. L. Hardy, *Topological groupoids II: Covering Morphisms and G-spaces*, **Math. Nachr.,** 74 (1976) 143-156.

[31] R. Brown, C. B. Spencer, *G-groupoids, crossed modules and the fundamental groupoid of a topological group*, **Proc. Konn. Ned. Akad. v. Wet.,** 79 (1976) 296-302.

[32] R. Brown, C. B. Spencer, *Double groupoids and crossed modules*, **Cah. Top. Géom. Diff.,** 17(4) (1976) 343-362.

[33] R. Brown, *From groups to groupoids: a brief survey*, **Bull. London Math. Soc.,** 19 (1987) 113- 134.

[34] R. Brown, I. Icen and O. Mucuk, *Holonomy And Monodromy Groupoids, Lie Algebroids* , vol.54, Banach Center Publications, Institute of Mathematics, Polish Academy of Science, Warsaw, (2001), p.9-20.

[35] R. Brown, I. Icen, *Lie local subgroupoids and their holonomy and monodromy Lie groupoids*, **Topology Appl.,** 115 (2001) 125-138.

[36] K. C. H. Mackenzie, *General Theory of Lie Groupoids and Lie Algebroids*, London Mathematical Society Lecture Note Series 213, Cambridge University Press, Cambridge, 2005, 540 p.

[37] R. Brown, *Topology and Groupoids*, BookSurge LLC, North Carolina, 2006.

[38] I. Icen, M. H. Gursoy and A. F. Ozcan, *Coverings of Lie groupoids*, **Turk. J. Math.,** 35 (2011) 207 - 218.

[39] O. Mucuk, T. Sahan and N. Alemdar, *Normality and quotients in crossed modules and group-groupoids*, **Appl. Categor. Struct.,** 23 (2015) 415-428.

[40] G. Oguz, M. H. Gursoy and I. Icen, *On Soft Topological Categories*, **Hacet. J. Math. Stat.,** (2018)(Kabul edildi).

[41] S. Awodey, *Category Theory*, Oxford University Press, 2006, 256 p.

[42] O. Mucuk, *Topoloji ve Kategori*, Nobel Yayın Dagıtım, 2010, 472 p.

[43] I. Icen, A. F. Ozcan and M. H. Gursoy, *Topological group-groupoids and their coverings*, **Indian J. Pure Appl. Math.,** 36 (2005) 493 - 502.

[44] S. MacLane, *Categories for Working Mathematician*, Vol. 5, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, 1971, 317 p.

[45] A. F. Ozcan, I. Icen and M. H. Gursoy, *The equivalence of topological 2-groupoids and topological crossed modules*, **Algebras Groups Geom.,** 22 (2005) 447 - 456.

[46] R. Brown, P. J. Higgins and R. Sivera, *Nonabelian Algebraic Topology: Filter sapaces, crossed complexes and cubical homotopy groupoids*, Vol. 15, EMS Tracts in Mathematics, 2011, 703 p.

[47] M. I. Ali, *A note on soft sets, rough soft sets and fuzzy soft sets*, **Appl. Soft Comput.,** 11 (2011) 3329–3332.

[48] I. Icen, A. F. Ozcan, *Topological crossed modules and G-groupoids*, **Algebras Groups Geom.,** 18 (2001) 401 - 410.

[49] S. Temel, Topolojik Grup-2-Grupoidler, Doktora Tezi, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, 2016.

[50] I. Icen, *The equivalence of 2-groupoids and crossed modules*, **Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.,** 49(2000) 39-48.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı-Soyadı: Gülay OĞUZ
Doğum Tarihi ve Yeri: 25.08.1990, Ergani-Diyarbakır
Yabancı Dili: İngilizce
İş Adresi: Siirt Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, SİİRT
Tel: (0484)2121111
E-mail: gulay.oguz@siirt.edu.tr

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Bölüm/Yıl	Kurum
Lisans	Matematik (2007-2011)	Erciyes Üniversitesi, Fen Fakültesi
Tezsiz Y. Lisans	Matematik (2010-2011)	Erciyes Üniversitesi, Eğitim Fakültesi
ÖYP Dil Eğitimi	İngilizce (2011-2012)	Odtü, Yabancı Diller Yüksek Okulu
Y. Lisans	Matematik (2012-2014)	Anadolu Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü
Doktora	Matematik (2014-2018)	İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü

MESLEKİ DENEYİMLER

Görev Unvanı	Yıl	Kurum
ÖYP Araştırma Görevlisi	2011	Siirt Üniversitesi
ÖYP Araştırma Görevlisi (39. Madde)	2012	Odtü
ÖYP Araştırma Görevlisi (35. Madde)	2012-2014	Anadolu Üniversitesi
ÖYP Araştırma Görevlisi(35. Madde)	2014-2018	İnönü Üniversitesi

ESERLER

Uluslararası hakemli dergilerde yayınlanan-kabul edilen yayınlar :

1. Oguz, G., Icen, I. and Gursoy, M.H., On s-sheaves, *Int. J. Appl. Math. Stat.*, 56(3) (2017) 74–82.

2. Oguz, G., Icen, I. and Gursoy, M.H., Lie Rough Groups, *Filomat*, (2018) Accepted (SCI-Expanded).

3. Oguz, G., Gursoy, M.H. and Icen, I., On Soft Topological Categories, *Hacet. J. Math. Stat.,* (2018) Accepted (SCI-Expanded).

4. Oguz, G., Icen, I. and Gursoy, M.H., Actions of Soft Groups, *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, (2018) Accepted (ESCI).

5. Oguz, G., Icen, I. and Gursoy, M.H., A New Concept in the Soft Theory : Soft Groupoids, *SEAMS Bulletin*, (2018) Accepted (ESCI).

6. Oguz, G., Gursoy, M.H. and Icen, I., A Soft Approach to Ring-Groupoids, *ITM web conf.,* 22 (2018).

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan bildiriler :

1. Oguz, G., Icen, I. and Gursoy, M.H., On s-Sheaves, *International Conference: The 9th Dynamical Systems and Applications*, July 20-23, 2016 Antalya, Turkey.

2. Oguz, G., Icen, I. and Gursoy, M.H., Actions of Soft Groups, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling*, July 03-04, 2017 Istanbul, Turkey.

3. Oguz, G., Gursoy, M.H. and Icen, I., Semi-Topological Rough Groups, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling*,July 03-04, 2017 Istanbul, Turkey.

4. Oguz, G., Icen, I. and Gursoy, M.H., Lie Rough Groups, *International Conference on Advances in Natural and Applied Sciences*, April 18-21, 2017 Antalya, Turkey.

5. Gursoy, M.H., **Oguz, G.** and Icen, I., On Soft Topological Categories, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education*, May 11-13, 2017 Şanlıurfa, Turkey.

6. Oguz, G., Gursoy, M.H. and Icen, I., A Soft Approach to Ring-Groupoids, *Third International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences*, May 04-06, 2018 Girne, Kıbrıs.

7. Icen, I., **Oguz, G.**, and Gursoy, M.H., On the Construction of a Novel Categorical Structure, *Third International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences*, May 04-06, 2018 Girne, Kıbrıs.

8. Gursoy, M.H., **Oguz, G.**, and Icen, I., Notes on the Structure of Soft Crossed Module, *Third International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences*, May 04-06, 2018 Girne, Kıbrıs.

9. Oguz, G., Icen, I. and Gursoy, M. H., The Equivalence of Soft Group-Groupoids and Soft Crossed Modules, *Third International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences*, May 04-06, 2018 Girne, Kıbrıs.