T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KÜME DEĞERLİ FONKSİYON UZAYLARI ÜZERİNDEKİ OPERATÖRLER VE BAZI UYGULAMALARI

Halise Keziban LEVENT

DOKTORA TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2019

Tezin Başlığı : KÜME DEĞERLİ FONKSİYON UZAYLARI ÜZERİNDEKİ OPERATÖRLER VE BAZI UYGULAMALARI

Tezi Hazırlayan : Halise Keziban LEVENT

Sınav Tarihi : 07.01.2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: **Prof.Dr. Yılmaz YILMAZ** ______________

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Rıfat ÇOLAK ______________

Fırat Üniversitesi

Prof.Dr. Bilal ALTAY ______________

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Hıfsı ALTINOK ______________

Fırat Üniversitesi

Doç.Dr. M. Habil GÜRSOY ______________

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. H. İbrahim Adıgüzel

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Küme Değerli Fonksiyon Uzayları Üzerindeki Operatörler ve Bazı Uygulamaları" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Halise Keziban LEVENT

ÖZET

Doktora Tezi

KÜME DEĞERLİ FONKSİYON UZAYLARI ÜZERİNDEKİ OPERATÖRLER VE BAZI UYGULAMALARI

Halise Keziban LEVENT

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

130+vii sayfa

2019

Danışman : Prof.Dr. Yılmaz YILMAZ

"Küme Değerli Fonksiyon Uzayları Üzerindeki Operatörler ve Bazı Uygulamaları" isimli bu tez çalışmasının ilk bölümünde interval analizi ile ilgili literatür özeti verilmiştir. Ayrıca bu çalışmanın uygulama alanlarından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve teoremler verilmiştir. Ayrıca $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^p(\mathbb{R})$ fonksiyon uzayları ve bu uzayların bazı önemli özellikleri incelenmiştir. Daha sonra ise sinyal işlemenin bazı temel kavramları sunulmuştur.

Üçüncü bölümde küme-değerli dönüşümlerin ölçülebilirliği, sürekliliği ve Aumann integralinden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde quasilineer uzay, quasilineer operatör ve quasilineer iç çarpım uzayları tanıtılmış ve bu uzaylarla ilgili temel sonuçlar verilmiştir.

Beşinci bölümde ilk olarak interval sinyal kavramı tanıtılmış ve kompleks interval tanımı verilmiştir. Daha sonra kompleks intervallerin oluşturduğu uzayın quasilineer uzay yapısına sahip olduğu gösterilmiştir. Ayrıca bu uzayın bazı karakteristik özellikleri incelenmiştir. Son olarak da interval sinyal kavramı ile ilgili bir uygulama verilmiştir.

Altıncı bölümde reel sayılar kümesinden kompleks sayıların tüm kompakt-konveks alt kümelerinin ailesine tanımlı ve normlarının p-inci kuvveti integrallenebilen küme-değerli dönüşümlerin uzayı olan $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayları tanıtılmıştır. Ayrıca Aumann integral yardımıyla $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlanmış ve bu uzayın bir Hilbert quasilineer uzay olduğu gösterilmiştir. Daha sonra $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayı üzerindeki öteleme, genişletme ve değiştirme operatörleri verilmiştir.

Yedinci ve son bölümde öncelikle $L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayı üzerinde Fourier dönüşümü tanımlanmış ve daha sonra bu tanım $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayına genişletilmiştir. Son olarak bir interval sinyalin Fourier dönüşümüne ilişkin bir uygulamaya yer verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Küme Değerli Fonksiyonlar, Aumann İntegral, İnterval Sinyaller, Kompleks İntervallerin Uzayı, Quasilineer Uzaylar, Quasilineer Operatörler, Quasilineer İç Çarpım Uzayları, Öteleme, Değiştirme ve Genişletme Operatörleri, Küme-Değerli Fourier Dönüşümü.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

THE OPERATORS ON THE SET VALUED FUNCTION SPACES AND SOME APPLICATIONS

Halise Keziban LEVENT

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

130+vii pages

2019

Supervisor : Prof.Dr. Yılmaz YILMAZ

In the first chapter of this study entitled "The Operators on the Set Valued Function Spaces and Some Applications " a summary of the literature related to the interval analysis is given. Further, the application areas of this study are presented.

In the second chapter, some fundametal definitions and theorems used in the next chapter are given. Morever, the spaces $L^p(\mathbb{R}), 1 \leq p < \infty$ and some important properties of these spaces ara analyzed. Next, the basic concept of the signal processing are presented.

In the third chapter, the measurability, continuity and Aumann integral of the set-valued functions are mentioned.

In the fourth chapter, quasilinear spaces, quasilinear operators and quasilinear inner product spaces are introduced. Also, some basic results related to these spaces are given.

In the fifth chapter, first the notion of interval signal is introduced and the definition of a complex interval is given. Then, it is shown that the space of the complex intervals has the quasilinear space structure. Further, the characteristical properties of this space are examined. Last, an application with respect to the notion of interval signal is given.

In the sixth chapter, the spaces $L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})), 1 \leq p < \infty$ that are defined from the set of real numbers to the space of all compact-convex subsets of complex numbers for which the pth power of their norm is integrable are investigated. Further, an inner-product on $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ is defined by the aid of Aumann integral and it is shown that $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ is a Hilbert quasilinear space. Next, translation, modulation and dilation operators on the space $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ are given.

In the seventh and last chapter, primarily Fourier transform on the space $L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ is described. After the notion of the Fourier transform is expanded to the space $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$. Finally, an application regarding the Fourier transform of an interval signal is given.

KEYWORDS: Set Valued Functions, Aumann Integral, Interval Signals, The Spaces of Complex Intervals, Quasilinear Spaces, Quasilinear Operators, Quasilinear Inner Product Spaces, Translation, Modulation and Dilation Operators, Set-Valued Fourier Transform.

TEŞEKKÜR

Altı yıllık lisansüstü çalışmam sırasında kıymetli bilgi, birikim ve tecrübeleriyle bana yol gösterici ve destek olan kıymetli danışman hocam sayın Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ'a teşekkürü bir borç biliyor ve şükranlarımı sunuyorum.

İlgisini ve önerilerini göstermektan kaçınmayan Matematik Anabilim Dalı Başkanı sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e, tez yazım sürecinde yardım, bilgi ve tecrübeleriyle destek olan sayın Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e, güler yüzlerini esirgemeyen tüm Matematik Bölümü Öğretim Üyelerine ve katkılarından dolayı değerli jüri üyelerine sonsuz teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

Benden hiçbir zaman desteğini esirgemeyen ve hayattaki en büyük şansım olan eşim Akın LEVENT'e, bugünlere gelmemde büyük payı olan babam İsmet BANAZILI' ya, tüm aileme ve dostlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca 2228-B: Yüksek Lisans Öğrencileri İçin Doktora Burs Programı kapsamında maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK-Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığına teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

İnterval analizi ilk olarak bir denklemin çözümlerinin tam olarak bilinmediği durumlarda bu çözümlerin bazı tahminlere dayanarak bir aralık ile temsil edebilme fikri ile ortaya çıkmıştır. Bu yol, bir denklemin çözümlerini tam olarak bilemesek bile tam çözümünün kabul edilebilir bir hata ile belirli bir aralıkta olduğuna dair bir bağlantı kurulabilmesini sağlamıştır. Bundan başka 1962 yılında Ramon Moore interval analizini, matematiksel bir probleme nümerik bir yaklaşım kullanılmasından kaynaklanan kesme hataları, yuvarlama hataları veya giriş hatalarını otomatik olarak kontrol etmesi için bir araç olarak kullanmıştır, [9]. Global optimizasyon problemlerini çözmeye ve bazı çözümlerin varlığını araştırmaya imkan veren fonksiyonların değer aralıklarını inceleme, interval analizin en önemli uygulamalarından biridir. Reel sayıların $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ şeklindeki bir alt kümesine *interval* denir ve $[a, b]$ şeklinde gösterilir.

İnterval analizin gelişimi için bilinen önemli makalelerden biri Japon bilim adamı Teruo Sunaga'ya aittir, [5]. Sunaga bu çalışmasında intervallerle ilgili temel aritmetik işlemleri tanıtmış ve bu işlemlerin sistematiğini kurmuştur. Bu çalışmadan sonra 1962 yılında R. E. Moore doktora tezinde bazı dijital hesaplamalarda meydana gelen hata analizini intervaller aracılığıyla yapmıştır, [9]. Daha sonra Moore tarafından 1966 yılında interval analizin sistematiği bir kitap haline getirilmiştir, [10]. İnterval analizin gelişimine en büyük katkıyı sağlayan bu kitap, günümüzde de interval analizi ile ilgilenenlerin en temel başvuru kaynaklarından biri olmuştur. Bundan başka interval analizi ile ilgili önemli çalışmalardan biri U. Kulisch tarafından yapıldı, [6]. Bu makale üzerine yazılan kitap [7], 1983 yılında İngilizce'ye çevrildi, [8].

Son yıllarda interval-değerli fonksiyonlar ve uygulamaları üzerine olan ilgi oldukça artmaktadır. Bunun en büyük sebebi, interval analizinin kimya ve inşaat mühendisliği, ekonomi, kontrol devre dizaynı, global optimizasyon, robotik, ekoloji ve sinyal işleme gibi uygulama alanlarında etkili bir araç olmasından kaynaklanır. Biz bu çalışmada interval analizin sinyal işleme alanındaki bazı uygulamalarından bahsedeceğiz. Bir sinyal, herhangi bir fiziksel değere ait değişkenlik olarak tanımlanabilir. Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse bir sinyal; zaman, konum, sıcaklık, basınç, ses gibi bağımsız değişkenlerin bir fonksiyonudur. Özel olarak, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinden $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesine tanımlı olan bir fonksiyona *sürekli-zaman sinyali* ve $\mathbb{Z}$ tam sayılar kümesinden $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesine tanımlı olan bir fonksiyona da *ayrık-zaman sinyali* denir. Mühendislik alanında ise bir sürekli-zaman sinyaline analog sinyal, ayrık-zaman sinyaline ise dijital sinyal denir. Karşılaştığımız çoğu sinyal doğal olarak üretilir. Fakat yapay olarak veya bilgisayar aracılığıyla üretilen sinyaller de mevcuttur. Aslında doğal olarak üretilen sinyaller birer analog sinyal ve yapay olarak üretilen sinyaller ise birer dijital sinyaldir. Örneğin hava basıncının uzayda bir konumda zamanın bir fonksiyonu olarak temsil edilen ses sinyali bir analog sinyal iken beyindeki milyarlarca sinir hücresinin rastgele uyarılmasıyla oluşan elektiksel aktiviteyi temsil eden Elektroensephologram (EEG) sinyali bir dijital sinyaldir. Sinyal işleme ile ilgili daha ayrıntılı bilgiler Bölüm-2 de verilecektir.

Sinyal işlemede, bir süreçte oluşan hata ya da beklenen değişimle ilgili özellikler hakkındaki güvenilir bilgilere ulaşmak oldukça zordur. Örneğin otomatik kontrol alanında Kalman filtrelemesinde olduğu gibi kontrol altında tutulan çoğu tahmini süreçler, kontrol uzmanları için dahi çözülmesi oldukça zor olan parametreler kümesini içeren karmaşık algoritmaların ortaya çıkmasına sebep olabilir, [27]. Brito, böylesi durumlarla başa çıkabilmek için kesin bir değer ile uğraşmak yerine bir interval ile uğraşmayı uygun görmüştür, [14]. Benzer şekilde Denoeux, interval-değerli data vasıtasıyla kullandığı istatistiksel araçların daha gelişmiş olanını tasarlamıştır, [15].

Ancak interval temelli olan bu yeni sinyal işleme alanında elde edilen bir gözlem sonucundaki her bir değişkenliğin temsili için gerekli olan araçlar henüz geliştirilememiştir. İşte bu tez çalışması başta mühendislik olmak üzere daha diğer birçok uygulama alanına bu anlamda katkı sağlamak amacıyla yeni bir matematiksel yöntem olarak *interval-değerli sinyal işleme* fikrini ortaya çıkarmıştır. Bu konuyla ilgili ayrıntılı bilgiler Bölüm-5 te verilecektir.

İnterval-değerli sinyallerin uzayında gerekli analizleri yapmak oldukça zordur ve bu teori henüz ilerletilememiştir. Bunun temel sebebi interval-değerli sinyallerin uzayının bir vektör uzayı yapısına sahip olmamasıdır. Ancak bununla birlikte interval-değerli sinyallerin uzayı, lineer uzayların bir genelleştirmesi olan *quasilineer uzay* yapısına sahiptir. Quasilineer uzay kavramı 1986 yılında S. M. Aseev tarafından ortaya atılmıştır, [30]. Bu çalışma, küme diferansiyel denklemlerin çözüm kümelerinin analizi ve denklemlerin modellenmesi için de önemli bir adım olmuştur.

Sinyal işleme deyince ilk akla gelen araçlardan biri hiç şüphesiz Fourier dönüşümüdür. Bu dönüşüm telekomunikasyondan kristalografiye, konuşmanın tanımlanmasından astronomiye, meteorolojiden astrofiziğe kadar sayısız uygulama alanına sahiptir. Bütün sinyal işleme endüstrisi varlığını Fourier dönüşümüne borçludur. Bunun nedeni bir sinyalin yoğunluğunu onu oluşturan dalgalara bağlamasıdır. Yaptığımız şeylerin çoğu ses veya ışık dalgalarını içerdiğinden Fourier dönüşümünün uygulamaları evrenseldir. Bir fonksiyonun Fourier dönüşümünün hesaplanması, 1960'lı yıllarda kullanılmaya başlanan bilgisayarlara verilen ilk görevlerden birisi olması bakımından oldukça önemlidir. Biz de bu çalışmada interval-değerli sinyal işlemenin temel yapı taşlarından olan *küme-değerli Fourier dönüşüm*nü tanımlayacağız.

Yedi bölümden oluşan tezin ikinci bölümünde çalışmalarımıza temel teşkil edecek topoloji, cebir, reel analiz ve fonksiyonel analize ilişkin temel tanım ve teoremlere yer verilecektir. Yine bu bölümde $L^2(\mathbb{R})$ Hilbert uzayı ve bu uzay üzerindeki başta Fourier dönüşümü olmak üzere bazı önemli lineer operatörlerden bahsedilecektir. Ayrıca bu bölümde klasik sinyal işlemenin bazı temel kavramları tanıtılacaktır. Üçüncü bölümde ise altıncı ve yedinci bölümlerde kullanılacak olan küme-değerli dönüşümlerin sürekliliği, ölçülebilirliği ve Aumann integralinden bahsedilecektir. Dördüncü bölümde ise Aseev'in ortaya attığı quasilineer uzay ve quasilineer operatör kavramlarına yer verilecektir. Ayrıca bu bölümde quasilineer analizin gelişimi için önemli çalışmalardan olan quasilineer iç çarpım uzayları verilecektir. Beşinci bölümde interval sinyaller tanıtılacak ve bu sinyallerin oluşturduğu uzay incelenecektir. Altıncı bölümde ise $L^2(\mathbb{R})$ Hilbert uzayına paralel olarak düşünülen ve üzerinde küme-değerli Fourier dönüşümünün tanımlanacağı $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayı incelenmiş ve bu uzaylar üzerindeki bazı önemli operatörlerden bahsedilmiştir. Bu uzayı aynı zamanda interval sinyalleri içinde barındıran önemli bir küme olarak da sembolize ediyoruz. Son olarak yedinci bölümde ise küme-değerli fonksiyonlar için Fourier dönüşümü tanımlanmış ve bir interval sinyalin Fourier dönüşümüne ilişkin bir uygulamaya yer verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Topoloji, Cebir ve Fonksiyonel Analize İlişkin Bilinen Bazı Kavramlar

Bu bölümde tezde ihtiyaç duyulan topoloji, lineer cebir, fonksiyonel analiz ve reel analizin bazı temel tanım ve teoremlerine yer verilecektir. Ayrıca bu kısımda sinyal işleme alanındaki bazı kavramlar tanıtılacaktır.

2.1.1 Kısmi Sıralı Kümeler

Tanım 2.1.1. *[2] Boş olmayan bir X kümesi üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan "$\preceq$" bağıntısına bir **kısmi sıralama bağıntısı**, $(X, \preceq)$ kümesine de bir **kısmi sıralı küme** veya **poset** denir:*

$$\forall x \in X \text{ için } x \preceq x,$$

$$\forall x,\ y,\ z \in X \text{ için } x \preceq y,\ y \preceq z \Rightarrow x \preceq z,$$

$$\forall x,\ y \in X \text{ için } x \preceq y,\ y \preceq x \Rightarrow x = y.$$

Tanım 2.1.2. *[2] $(X, \preceq)$ kısmi sıralı kümesinde $x, y \in X$ için,*

$$x \preceq y \text{ ya da } y \preceq x$$

*önermesini sağlayan x ve y elemanlarına **karşılaştırılabilir elemanlar** denir. Her iki elemanı karşılaştırılabilir olan bir kısmi sıralı kümeye de **tam sıralı küme** veya **zincir** denir.*

Tanım 2.1.3. *[2] $(X, \preceq)$ bir kısmi sıralı küme ve $M \subset X$ olsun.*

- *Bir $m \in M$ için $n \preceq m$ olacak şekilde m den farklı bir $n \in M$ bulunamıyorsa m elemanına M kümesinin bir **minimal elemanı**,*

- *Bir $u \in M$ için $u \preceq v$ olacak şekilde u dan farklı bir $v \in M$ bulunamıyorsa u elemanına M kümesinin bir* ***maksimal elemanı****,*

- *Her $m \in M$ için $a \preceq m$ olacak şekilde bir $a \in M$ varsa a elemanına M kümesinin* ***en küçük elemanı*** *veya* ***minimumu****,*

- *Her $m \in M$ için $m \preceq b$ olacak şekilde bir $b \in M$ varsa b elemanına M kümesinin* ***en büyük elemanı*** *veya* ***maksimumu*** *denir.*

Örnek 2.1.1. *Bir X kümesinin kuvvet kümesi olan $\mathcal{P}(X)$ ailesi, $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için,*

$$A \preceq B \Leftrightarrow A \subseteq B$$

bağıntısı ile bir kısmi sıralı kümedir, fakat bir zincir değildir. Ayrıca $\mathcal{P}(X)$ in tek maksimal elemanı X kümesidir.

Lemma 2.1.1. *[2]* ***(Zorn Lemması)*** *$M \neq \emptyset$ bir kısmi sıralı küme olmak üzere M deki her C zincirinin bir üst sınıra sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda M kümesi en az bir maksimal elemana sahiptir.*

2.1.2 Topolojik Uzaylar

Tanım 2.1.4. *[16] X boş olmayan bir küme ve τ, X in altkümelerinin bir ailesi olsun. Eğer τ ailesi,*

(i) $\emptyset, X \in \tau$,

(ii) $A_1, A_2, ..., A_n \in \tau$ *için* $\bigcap_{i=1}^{n} A_i \in \tau$,

(iii) *I herhangi bir indis kümesi olmak üzere her bir $\alpha \in I$ için $A_\alpha \in \tau$ olduğunda* $\bigcup_{\alpha \in I} A_\alpha \in \tau$

şartlarını sağlıyorsa τ ailesine X kümesi üzerinde bir ***topoloji (topolojik yapı)*** *ve (X, τ) ikilisine* ***topolojik uzay*** *denir.*

Tanım 2.1.5. *[23] (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subseteq X$ ve I herhangi bir indis kümesi olsun. Eğer X in alt kümelerinin bir $\mathcal{A} = \{A_i : i \in I\}$ ailesi için*

$$A \subseteq \bigcup_{i\in I} A_i$$

*ise $\mathcal{A}$ ailesine A kümesi için bir **örtü** denir. $\mathcal{A}$ nın sayılabilir olması durumunda $\mathcal{A}$ ya sayılabilir örtü, $\mathcal{A}$ nın sonlu olması durumunda $\mathcal{A}$ ya sonlu örtü, $\mathcal{A} \subseteq \tau$ olması durumunda $\mathcal{A}$ ya açık örtü denir. Eğer bir $J \subseteq I$ için $A \subseteq \bigcup_{i\in J} A_i$ ise $\{A_i : i \in J\}$ ailesine $\mathcal{A}$ örtüsünün bir alt örtüsü denir.*

Tanım 2.1.6. *[23] (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer A nın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa A ya **kompakt küme** denir.*

2.1.3 Metrik Uzaylar

Tanım 2.1.7. *[21] X boş olmayan bir küme olmak üzere, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. d fonksiyonu $\forall x,y,z \in X$ için*

$$d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x,y) = d(y,x)$$

$$d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$$

*şartlarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir **metrik**, (X,d) ikilisine ise bir **metrik uzay** denir.*

Örnek 2.1.2. $\mathbb{R}$ *reel sayılar kümesi alışılmış $d(x,y) = |x-y|$ fonksiyonuyla bir metrik uzaydır. Bu metriğe $\mathbb{R}$ **nin alışılmış metriği (mutlak değer metriği)** denir. Ayrıca $\mathbb{R}^2$ üzerinde $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere*

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2 + (x_2-y_2)^2}$$

*fonksiyonu bir metrik tanımlar. Bu metriğe de $\mathbb{R}^2$ **nin Euclid metriği** denir.*

Örnek 2.1.3. *ω tüm kompleks terimli dizilerin lineer uzayı olmak üzere*

$$\ell_\infty = \left\{ x \in \omega : \sup_n |x_n| < \infty \right\}$$

kümesi üzerinde

$$d\left(x, y\right) = \sup_n |x_n - y_n|$$

fonksiyonu metrik tanımlar. Dolayısıyla (ℓ_∞, d) bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.8. *[2] (X, d) bir metrik uzay ve $x_0 \in X$ olsun. $\delta > 0$ olmak üzere*

$$B_\delta(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) < \delta\}$$

*kümesine x_0 merkezli δ yarıçaplı **açık yuvar**,*

$$\bar{B}_\delta(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) \leq \delta\}$$

*kümesine x_0 merkezli δ yarıçaplı **kapalı yuvar** ve*

$$S_\delta(x_0) = \{x \in X : d(x, x_0) = \delta\}$$

*kümesine de x_0 merkezli δ yarıçaplı **yuvar yüzeyi** denir.*

Tanım 2.1.9. *[21] (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A nın her noktasını içeren bir açık yuvar A nın bir alt kümesi ise A ya **açık küme** denir. X e göre tümleyeni açık olan kümeye de **kapalı küme** denir.*

Tanım 2.1.10. *[21] (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun.*

- *A kümesinin kapsadığı tüm açık kümelerin birleşimine A kümesinin **içi** denir ve $\mathring{A}$ veya $int(A)$ ile gösterilir.*

- *A kümesini içeren tüm kapalı kümelerin ara kesitine A kümesinin **kapanışı** denir ve $\bar{A}$ veya $cl(A)$ ile gösterilir.*

Tanım 2.1.11. *[2] (X, d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\bar{A} = X$ ise A kümesine X de **yoğundur** denir.*

$\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar kümesi $\mathbb{R}$ de yoğundur.

Tanım 2.1.12. *[2] Eğer bir metrik uzay sayılabilir ve yoğun bir alt kümeye sahip ise o metrik uzaya **ayrılabilirdir** denir.*

$\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi alışılmış metriğe göre ayrılabilirdir.

Tanım 2.1.13. *[21] (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı için $(B_\delta(x_0) \backslash \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$ ise x_0 elemanına A kümesinin bir **yığılma noktası** denir. A nın yığılma noktalarının kümesi A' ile gösterilir.*

Tanım 2.1.14. *[2] (X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olsun. Eğer her $x, y \in A$ için $d(x, y) \leq K$ olacak şekilde bir $K > 0$ sayısı mevcut ise A kümesine **sınırlıdır** denir.*

Tanım 2.1.15. *[2] (X, d) bir metrik uzay, (x_n) ise X de bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $n > N_\varepsilon$ olacak şekildeki her n doğal sayısı için $d(x_n, x) < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı bir N_ε doğal sayısı mevcut ise (x_n) dizisi x noktasına **yakınsaktır** denir ve $x_n \to x$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir.*

Teorem 2.1.1. *[2] (X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $x \in X$ olsun.*

(i) *$x \in \bar{A}$ olması için gerek ve yeter şart $x_n \to x$ olacak şekilde A kümesinde bir (x_n) dizisinin var olmasıdır.*

(ii) *A nın kapalı olması için gerek ve yeter şart A kümesinde A nın her noktasına yakınsayan bir dizinin mevcut olmasıdır.*

Tanım 2.1.16. *[2] (X, d) bir metrik uzay ve (x_n) ise X de bir dizi olsun. $\forall \varepsilon > 0$ için,*

$$m, n > N_\varepsilon \text{ iken } d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

*olacak şekilde ε na bağlı bir N_ε sayısı varsa (x_n) dizisine bir **Cauchy dizisi** denir. Eğer X deki her (x_n) Cauchy dizisi X de yakınsaksa (X, d) uzayına **tam metrik uzay** denir.*

Örnek 2.1.4. $p \geq 1$ *olmak üzere*

$$\ell_p = \{x = (x_n) \subset \mathbb{C} : \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p < \infty\}$$

kümesi

$$d(x, y) = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p)^{1/p}$$

metriği ile bir metrik uzaydır ve bu metriğe göre tamdır.

Tanım 2.1.17. *[23]* (X, d) *bir metrik uzay ve* $A \subseteq X$ *olsun. Eğer* A *kümesindeki her dizinin yakınsak bir alt dizisi var ise* A *kümesine* ***dizisel kompakt küme*** *denir. Eğer* A *nın her sayılabilir açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa* A *kümesine* ***sayılabilir kompakt küme*** *denir.*

Metrik uzaylarda kompaktlık, sayılabilir kompaktlık ve dizisel kompaktlık kavramları birbirine denktir.

Teorem 2.1.2. *[17]* ***(Heine-Borel Teoremi)*** $A \subseteq \mathbb{R}^n$ *kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart* A *nın kapalı ve sınırlı olmasıdır.*

Tanım 2.1.18. *[2]* $X = (X, d_1)$ *ve* $Y = (Y, d_2)$ *birer metrik uzay,* $T : X \to Y$ *bir dönüşüm ve* $x_0 \in X$ *olsun. Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için* $d_1(x, x_0) < \delta$ *iken* $d_2(Tx, Tx_0) < \varepsilon$ *olacak şekilde bir* $\delta > 0$ *sayısı varsa* T *ye* x_0 *noktasında* ***sürekli dönüşüm*** *denir. Eğer* T, X *in her noktasında sürekli ise* T *ye* X ***üzerinde süreklidir*** *denir.*

Tanım 2.1.19. *[16]* X *ve* Y *metrik uzaylar ve* $f : X \to Y$ *bir dönüşüm olsun. Eğer* f *sürekli, tersi var ve tersi de sürekli bir dönüşüm ise* f *ye* ***homeomorfizm*** *(topolojik eş yapı dönüşümü) denir. Bu durumda* X *ve* Y *uzaylarına* ***homeomorf uzaylar*** *denir.*

Teorem 2.1.3. *[2]* X *ve* Y *birer metrik uzay ve* $T : X \to Y$ *sürekli bir dönüşüm olsun.* X *in kompakt bir* A *alt kümesinin* T *altındaki görüntüsü de kompakttır.*

Teorem 2.1.4. *[2] Bir* X *metrik uzayının kompakt bir* A *alt kümesini,* $\mathbb{R}$ *nin içine dönüştüren sürekli bir* T *dönüşümü,* A *nın bazı noktalarında bir maksimuma ve bir minimuma sahiptir.*

2.1.4 Lineer Uzaylar

Tanım 2.1.20. *[2] X boştan farklı bir küme ve $\mathbb{K}$ reel veya kompleks bir cisim olsun. X üzerinde "+" toplama ve "$\cdot$" skalerle çarpma diye adlandırılan işlemleri sırasıyla*

$$+ : X \times X \to X \ , \ (x, y) \to x + y$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X \ , \ (\alpha, x) \to \alpha \cdot x$$

*olarak tanımlayalım. Eğer $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa X e $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir **lineer uzay (vektör uzayı)** denir:*

$$(x + y) + z = x + (y + z)\,,$$

$$x + y = y + x,$$

$x + \theta = x$ *olacak şekilde X in **birim elemanı** denen bir $\theta \in X$ vardır,*

$\forall x \in X$ *için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde x in **tersi denen** bir $-x \in X$ vardır,*

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y,$$

$$(\alpha + \beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x,$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha\beta) \cdot x,$$

$$1 \cdot x = x.$$

$\mathbb{K} = \mathbb{R}$ olması durumunda X e reel lineer uzay, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ olması durumunda X e kompleks lineer uzay denir.

Örnek 2.1.5. *$p \geq 1$ olmak üzere ℓ_p kümesi dizilerin koordinatsal toplamı ve bir dizinin bir skalerle çarpımı işlemlerine göre bir lineer uzaydır.*

Tanım 2.1.21. *[2] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle bir lineer uzay olsun. $Y \subseteq X$ alt kümesi de aynı işlemlerle $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay yapısına sahipse Y uzayına X in bir **alt vektör uzayı** denir.*

Teorem 2.1.5. *[2] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $Y \subseteq X$ alt kümesi verilsin.*

Y *bir alt vektör uzayıdır* $\Longleftrightarrow \forall y_1, y_2 \in Y, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *için* $\alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 \in Y$ *dir.*

Tanım 2.1.22. *[2] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.*

$$[x, y] = \{\lambda x + (1 - \lambda) y : \lambda \in [0, 1]\}$$

kümesine x ile y noktalarını birleştiren ***doğru parçası (segment)*** *denir.*

Tanım 2.1.23. *[2] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\forall x, y \in A$ için $[x, y] \subseteq A$ oluyorsa A ya* ***konveks küme*** *denir.*

Örnek 2.1.6. $\mathbb{R}$ *vektör uzayında*

$$[a, b] = \{x : a \leq x \leq b, a, b \in \mathbb{R}\}$$

kümesi konveks bir kümedir.

Örnek 2.1.7. $\mathbb{R}^2$ *nin birim yuvarı olan*

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

kümesi $\mathbb{R}^2$ *nin konveks bir alt kümesidir.*

2.1.5 Normlu Uzaylar

Tanım 2.1.24. *[20] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olmak üzere $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna aşağıdaki şartların sağlanması durumunda X üzerinde bir* ***norm,*** *$(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise bir* ***normlu uzay*** *denir: $\forall x,\ y \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{K}$ için*

$$\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$\|\alpha \cdot x\| = |\alpha| \cdot \|x\|,$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

Teorem 2.1.6. *[20] $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun.*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad d\,(x, y) = \|x - y\|$$

olarak tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir metrik tanımlar.

Bu teoremde tanımlanan d metriğine **normun ürettiği metrik** ya da **norm metriği** denir.

Her normlu uzay, norm metriğiyle bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.25. *[2] $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay, (x_n) ise X de bir dizi ve $x \in X$ olmak üzere $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ ise (x_n) dizisi x noktasına **yakınsaktır** ve $x_n \to x$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ şeklinde gösterilir.*

Tanım 2.1.26. *[2] $(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve (x_n) ise X de bir dizi olsun. $\forall\varepsilon > 0$ için,*

$$m, n > N_\varepsilon \text{ iken } \|x_m - x_n\| < \varepsilon$$

*olacak şekilde ε a bağlı bir N_ε sayısı varsa (x_n) dizisine bir **Cauchy dizisi** denir.*

Tanım 2.1.27. *[2] Eğer X normlu uzayı norm metriğine göre tam ise X e **Banach uzayı** denir.*

Örnek 2.1.8. *$p \geq 1$ olmak üzere ℓ_p lineer uzayı*

$$\|x\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p)^{1/p}$$

normu ile bir normlu uzaydır ve bu uzay

$$d(x, y) = \|x - y\| = (\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - y_n|^p)^{1/p}$$

norm metriğine göre tam olduğundan bir Banach uzayıdır.

Tanım 2.1.28. *$(X, \|.\|)$ bir normlu uzay ve (x_k), X de bir dizi olsun. Bu (x_k) dizisiyle, $n = 1, 2, ...$ olmak üzere,*

$$S_n = x_1 + x_2 + ... + x_n$$

kısmi toplamlarından oluşan (S_n) *dizisi eşleyebilinir. Eğer* (S_n) *dizisi yakınsak ise yani* $n \to \infty$ *için* $\|S_n - s\| \to 0$ *ise* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *serisine* ***yakınsaktır*** *denir ve bu* s *değerine serinin toplamı denir.* $\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ *serisinin yakınsak olması halinde* $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ *serisine* ***mutlak yakınsaktır*** *denir.*

Teorem 2.1.7. *[19] X normlu uzayının tam olması için gerek ve yeter şart X deki mutlak yakınsak her serinin yakınsak olmasıdır.*

Lemma 2.1.2. *[3]* X*,* $\mathbb{K}$ *cismi üzerinde bir normlu uzay ve* $\lambda \in \mathbb{K}$ *olmak üzere* $\overline{\lambda A} = \lambda \overline{A}$ *dır.*

Tanım 2.1.29. *[18]* $(X, \|.\|)$ *bir normlu uzay ve* A*,* X *in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Eğer her* $x \in A$ *için* $\|x\| \leq K$ *olacak şekilde bir* $K > 0$ *sayısı mevcut ise* A *ya* ***sınırlı küme*** *denir.*

Teorem 2.1.8. *[18] Normlu bir* X *uzayının sonlu boyutlu her* Y *alt uzayı* X *de kapalıdır.*

Teorem 2.1.9. *[19] Bir metrik uzayın kompakt her alt kümesi kapalı ve sınırlıdır.*

Bu teoremin tersi genelde doğru değildir. Aşağıdaki teorem, bu teoremin tersinin mevcut olması için gerekli şartları verir.

Teorem 2.1.10. *[19] Sonlu boyutlu normlu bir* X *uzayında herhangi bir* A *alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart* A *nın kapalı ve sınırlı olmasıdır.*

Lemma 2.1.3. *[23] Bir metrik uzayda sınırlı bir kümenin kapanışı da sınırlıdır.*

Teorem 2.1.11. *[18] Normlu uzaylarda kompakt kümelerin toplamı ve bir kompakt kümenin bir kompleks skalerle çarpımı kompakt kümedir.*

2.1.6 İç Çarpım Uzayları

Tanım 2.1.30. *[20]* $\mathbb{K}$ *reel veya kompleks bir cisim olmak üzere* X, $\mathbb{K}$ *cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.* $\langle .,. \rangle : X \times X \to \mathbb{K}$ *fonksiyonuna aşağıdaki şartları sağlaması durumunda bir* ***iç çarpım fonksiyonu*** *ve* $(X, \langle .,. \rangle)$ *ikilisine de bir* ***iç çarpım uzayı*** *denir:* $\forall x, y, z \in X$ *ve* $\lambda \in \mathbb{K}$ *için*

$$\langle x, x \rangle \geq 0 \text{ ve } \langle x, x \rangle = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$$

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle},$$

$$\langle \lambda \cdot x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle,$$

$$\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle.$$

Örnek 2.1.9. $x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{C}^n$ *ve* $y = (y_1, y_2, ..., y_n) \in \mathbb{C}^n$ *olmak üzere*

$$\langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i \overline{y_i}$$

eşitliği $\mathbb{C}^n$ *üzerinde bir iç çarpım tanımlar ve bu iç çarpıma* ***Hermit iç çarpımı*** *denir. Böylece* $\mathbb{C}^n$ *bir iç çarpım uzayıdır.*

Önerme 2.1.1. *[21]* X, $\mathbb{K}$ *cismi üzerinde bir iç çarpım uzayı olmak üzere* $x, y, z \in X$ *ve* $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ *için aşağıdaki eşitlikler doğrudur:*

(i) $\langle x, \theta \rangle = \langle \theta, y \rangle = 0,$

(ii) $\langle x, \alpha \cdot y + \beta \cdot z \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle + \bar{\beta} \langle x, z \rangle,$

(iii) *Her* $x \in X$ *için* $\langle x, y \rangle = \langle x, z \rangle$ *ise* $y = z$ *dir.*

Teorem 2.1.12. *[2]* $(X, \langle .,. \rangle)$ *bir iç çarpım uzayı olsun.*

$$\|.\| : X \to \mathbb{R}, \qquad \|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$$

olarak tanımlanan $\|.\|$ *fonksiyonu* X *üzerinde bir norm tanımlar.*

Bu teoremde adı geçen $\|.\|$ normuna **iç çarpımın ürettiği norm** ya da **iç çarpım normu** denir. Bir iç çarpım normu paralelkenar özelliğini sağlar.

Tanım 2.1.31. *[2] Eğer bir H iç çarpım uzayı iç çarpım normuna göre bir Banach uzayı ise H ya* ***Hilbert uzay*** *denir.*

Örnek 2.1.10. $\mathbb{C}^n$ *uzayı, Hermit iç çarpımına göre bir Hilbert uzayıdır.*

Teorem 2.1.13. *[20]* ***(Cauchy-Shwarz Eşitsizliği)*** *Bir X iç çarpım uzayında her $x, y \in X$ için*

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\| \, \|y\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.1.14. *[20]* ***(Üçgen Eşitisizliği)*** *Bir X iç çarpım uzayında her $x, y \in X$ için*

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 2.1.15. *[20]* ***(Paralelkenar Özelliği)*** *Bir X iç çarpım uzayında her $x, y \in X$ için*

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 2.1.16. *[2]* ***(Polarizasyon Eşitliği)*** *X bir iç çarpım uzayı olsun.*

- *X in kompleks vektör uzayı olması durumunda her $x, y \in X$ için*

  $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i(\|x+iy\|^2 - \|x-iy\|^2))$$

  eşitsizliği sağlanır.

- *X in reel vektör uzayı olması durumunda her $x, y \in X$ için*

  $$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2)$$

  eşitliği sağlanır.

Önerme 2.1.2. *[2] Bir X iç çarpım uzayında $x_n \to x$ ve $y_n \to y$ ise $\langle x_n, y_n \rangle \to \langle x, y \rangle$ dir.*

2.1.7 Sınırlı Lineer Operatörler

Tanım 2.1.32. *[2] Bir T lineer operatörü aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşümdür:*

(i) T nin $D(T)$ tanım kümesi bir vektör uzayıdır ve $R(T)$ görüntü kümesi $D(T)$ vektör uzayı ile aynı cisim üzerindeki bir vektör uzayının içindedir.

(ii) Her $x, y \in D(T)$ ve α skaleri için

$$T(x+y) = Tx + Ty,$$

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

dir.

Örnek 2.1.11. *X vektör uzayı üzerinde*

$$I_X : X \to X \quad , \quad I_x(x) = x$$

şeklinde tanımlı özdeşlik operatörü lineerdir.

Tanım 2.1.33. *[2] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.*

$$f : X \to \mathbb{K}$$

*dönüşümü lineer ise f ye bir **lineer fonksiyonel** denir.*

Tanım 2.1.34. *[2] X ve Y normlu uzaylar ve $T : X \to Y$ lineer operatör olsun. Eğer $\forall x \in X$ için*

$$\|T(x)\|_Y \leq k \|x\|_X$$

*olacak şekilde bir $k \in \mathbb{R}^+$ sayısı varsa T ye **sınırlı lineer operatör** denir.*

Tanım 2.1.35. *[2] X ve Y birer normlu uzay olsunlar. $T : X \to Y$ sınırlı lineer operatörü verilsin.*

$$\sup_{x \neq \theta} \left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \right\}$$

*değerine T sınırlı lineer operatörünün **normu** denir. Yani*

$$\|T\| = \sup_{x \neq \theta} \left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \right\}$$

dir.

Önerme 2.1.3. *[2] $\|T\| = \sup \{ \|T(x)\|_Y : \|x\|_X = 1 \}$ dir.*

Teorem 2.1.17. *[2] X ve Y birer normlu uzay ve $T : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda,*

(i) *T süreklidir. $\Leftrightarrow$ T sınırlıdır.*

(ii) *T bir noktada sürekliyse her noktada süreklidir.*

Teorem 2.1.18. *[2]* ***(Sınırlı Lineer Operatörün Genişlemesi)*** *V_1 ve V_2 birer Banach uzaylar, W ise V_1 in yoğun bir alt uzayı ve $T : W \to V_2$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu durumda her $v \in W$ için $\tilde{T}v = Tv$ olacak şekilde bir tek $\tilde{T} : V_1 \to V_2$ sınırlı lineer operatörü vardır ve $\|T\| = \left\|\tilde{T}\right\|$ dır.*

Tanım 2.1.36. *[2] H_1 ve H_2 Hilbert uzaylar ve $T : H_1 \to H_2$ sınırlı lineer operatör olsun. T nin T^* ile gösterilen Hilbert-adjoint operatörü, her $x \in H_1$ ve her $y \in H_2$ için*

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, T^*y \rangle$$

olacak şekildeki $T^* : H_2 \to H_1$ operatörüdür.

Teorem 2.1.19. *[2] Hilbert uzayları arasında tanımlı bir T sınırlı lineer operatörünün Hilbert-adjoint operatörü tek türlü mevcuttur ve*

$$\|T\| = \|T^*\|$$

olup T^* operatörü de sınırlı lineerdir.

Tanım 2.1.37. *[2] H bir Hilbert uzay ve $T : H \to H$ sınırlı lineer bir operatör olsun. Eğer*

- *$T^* = T$ ise T ye self-adjoint (Hermityen),*
- *T birebir, örten ve $T^* = T^{-1}$ ise T ye üniter,*
- *$TT^* = T^*T$ ise T ye normal operatör*

  adı verilir.

2.1.8 Ölçülebilir Fonksiyonlar

Tanım 2.1.38. *[22] X bir küme ve $\mathcal{A}$ ise X in alt kümelerinin bir ailesi olsun. Aşağıdaki şartların sağlanması durumunda $\mathcal{A}$ ailesine X kümesi üzerinde σ-**cebiri** denir:*

(i) $\emptyset \in \mathcal{A}$,

(ii) $A \in \mathcal{A}$ *ise* $X \backslash A \in \mathcal{A}$,

(iii) $n = 1, 2, ...$ *için* $A_n \in \mathcal{A}$ *ise* $\underset{n \geq 1}{\cup} A_n \in \mathcal{A}$

dir.

*Ayrıca $(X, \mathcal{A})$ ikilisine **ölçülebilir uzay** ve $\mathcal{A}$ nın herbir elemanına **ölçülebilir küme** denir.*

Örnek 2.1.12. *[22] Bir X kümesinin tüm alt kümelerinin ailesi olan $P(X)$ kuvvet kümesi, X üzerinde bir σ-cebiridir.*

Tanım 2.1.39. *[22] $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay olmak üzere $\mathcal{A}$ üzerinde tanımlı genişletilmiş reel değerli bir μ fonksiyonuna aşağıdaki şartları sağlaması durumunda bir **ölçü fonksiyonu** veya kısaca **ölçü** denir:*

(i) $\mu(\emptyset) = 0$,

(ii) *Her* $A \in \mathcal{A}$ *için* $\mu(A) \geq 0$,

(iii) $\mathcal{A}$ *daki her ayrık* (A_n) *dizisi için* $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$

dir. Ayrıca $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *üçlüsüne* ***ölçü uzayı*** *denir.*

Eğer her $A \in \mathcal{A}$ *için* $\mu(A) < \infty$ *ise* μ *ye bir* ***sonlu ölçü*** *denir.* X *kümesi, herbiri sonlu ölçüye sahip sayılabilir sayıdaki kümelerin birleşimi olarak yazılabiliyorsa* μ *ölçüsüne* σ***-sonludur*** *denir. Ayrıca* $\mu(A) = 0$ *şartını sağlayan her* $A \in \mathcal{A}$ *kümesinin herhangi bir* $A_1 \subset A$ *alt kümesi* $\mathcal{A}$ *nın bir elemanı ise* $\mathcal{A}$ *ya* ***tamdır*** *(veya* μ***-tamdır****) denir.*

Örnek 2.1.13. *[22]* $X \neq \emptyset$ *olmak üzere* $\mathcal{A} = P(X)$ *olsun. Her* $E \in \mathcal{A}$ *için* $\mu(E) = 0$ *biçiminde tanımlanan* μ *fonksiyonu bir ölçüdür. Aynı zamanda da* σ*-sonlu bir ölçüdür.*

Tanım 2.1.40. *[22] Bir* X *kümesi için* $P(X)$ *üzerinde tanımlı, genişletilmiş reel değerli bir* μ^* *fonksiyonuna aşağıdaki şartları sağlaması durumunda* X *üzerinde bir* ***dış ölçü*** *denir:*

(i) $\mu^*(\emptyset) = 0$,

(ii) *Her* $E \in P(X)$ *için* $\mu^*(E) \geq 0$,

(iii) $A \subset B \subset X$ *için* $\mu^*(A) \leq \mu^*(B)$,

(iv) $n = 1, 2, ...$ *için* $E_n \in P(X)$ *ise* $\mu(\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n) \leq \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(E_n)$

dir.

Örnek 2.1.14. *[22]* (I_k), $\mathbb{R}$ *nin sınırlı ve açık alt aralıklarının bir dizisi ve*

$$\tau_A = \{(I_k) : A \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k\}$$

olsun. Herbir $k = 1, 2, ...$ *için* $\ell(I_k)$, I_k *aralığının uzunluğu göstermek üzere* $P(\mathbb{R})$ *üzerinde*

$$\lambda^*(A) = \inf\{\sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_k) : (I_k) \in \tau_A\}$$

biçiminde tanımlanan λ^* *bir dış ölçüdür. Bu ölçüye* ***Lebesque dış ölçüsü*** *denir. Tüm Lebesque ölçülebilir alt kümelerin ailesi Lebesque dış ölçüsüne göre tamdır. Ayrıca Lebesque ölçüsü* σ*-sonludur.*

Tanım 2.1.41. *[1]* $(X, \mathcal{A}, \mu)$ *bir ölçü uzayı ve* $A \in \mathcal{A}$ *olsun. Eğer* $\mu(A) > 0$ *ve* $A_1 \subset A$ *olacak şekildeki ölçülebilir her* A_1 *kümesi için ya* $\mu(A_1) = 0$ *ya da* $\mu(A_1) = \mu(A)$ *oluyorsa* A *ya* ***atom*** *denir. Eğer* $\mathcal{A}$ *ailesi herhangi bir atom içermiyorsa* μ *ölçüsüne* ***nonatomik*** *denir.*

Örnek 2.1.15. *Lebesque ölçüsü nonatomiktir.*

Tanım 2.1.42. *[22]* $(X, \mathcal{A})$ *ölçülebilir uzay ve* $f : X \to \mathbb{R}$ *bir fonksiyon olsun. Eğer her* $\alpha \in \mathbb{R}$ *için*

$$f^{-1}((\alpha, \infty)) = \{x \in X : f(x) > \alpha\}$$

kümesi $\mathcal{A}$ *nın bir elemanı ise* f *fonksiyonuna* $\mathcal{A}$ ***ölçülebilir fonksiyon*** *(kısaca ölçülebilir fonksiyon) denir.*

Örnek 2.1.16. *[22] Bir* E *kümesi için*

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in E; \\ 0 & , \quad x \notin E \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan χ_E *fonksiyonuna* E *kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. Eğer* E *ölçülebilir küme ise* χ_E *ölçülebilir fonksiyondur.*

Tanım 2.1.43. *[22] Görüntü kümesi sonlu sayıda elemandan oluşan fonksiyona* ***basit fonksiyon*** *denir.* X *üzerinde tanımlı, reel değerli ve* $\mathcal{A}$ *ölçülebilir basit fonksiyonların kümesi* $S = S(X, \mathcal{A})$ *ile gösterilir.* S *deki negatif olmayan fonksiyonların kümesi* S^+ *ile gösterilir.*

Tanım 2.1.44. *[22] $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı olsun. $k=1,2,...,n$ için a_k negatif olmayan reel sayı ve herbir A_k ayrık ölçülebilir bir küme olmak üzere*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{n} a_k \chi_{A_k}$$

standart gösterimine sahip ölçülebilir, basit ve negatif olmayan bir φ fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali,

$$\int_X \varphi d\mu = \sum_{k=1}^{n} a_k \mu(A_k)$$

genişletilmiş reel sayısıdır.

Tanım 2.1.45. *[22] $(X,\mathcal{A},\mu)$ bir ölçü uzayı ve f fonksiyonu X üzerinde tanımlı, ölçülebilir ve pozitif bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun μ ölçüsüne göre integrali,*

$$\int_X f d\mu = \sup\{\int_X \varphi d\mu : \varphi \leq f, \varphi \in S^+\}$$

genişletilmiş reel sayısıdır.

Tanım 2.1.46. *[22] f fonksiyonu bir X kümesinden genişletilmiş reel sayılar kümesine tanımlı bir fonksiyon olsun.*

$$f^+(x) = \max\{f(x), 0\}$$

ve

$$f^-(x) = \max\{-f(x), 0\}$$

biçiminde tanımlanan f^+ ve f^- fonksiyonlarına sırasıyla f fonksiyonunun pozitif ve negatif parçası denir. Dikkat edilirse bu fonksiyonlar negatif olmayan fonksiyonlardır.

Şimdi bu tanımlar ışığında Lebesque integralinin tanımını vereceğiz.

Tanım 2.1.47. *[22] $\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ nin Borel alt kümelerinin oluşturduğu σ-cebiri ve μ Lebesque öçüsü olmak üzere $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu)$ ölçü uzayını düşünelim. f fonksiyonu*

$\mathbb{R}^n$ üzerinde tanımlı ve Borel ölçülebilir fonksiyon olsun. Eğer $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^+ d\mu$ ve $\int\limits_{\mathbb{R}^n} f^- d\mu$ integrallerinin her ikisi de sonlu ise f ye ***Lebesque integrallenebilirdir*** *denir ve bu integral*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} f d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^+ d\mu + \int\limits_{\mathbb{R}^n} f^- d\mu$$

olup ***Lebesque integrali*** *adını alır ve $\int f(x)dx$ ile gösterilir.*

Teorem 2.1.20. ***(Monoton Yakınsaklık Teoremi)*** *[22] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ de pozitif ve integrallenebilen fonksiyonların monoton artan bir dizisi olsun. Eğer $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi f fonksiyonuna yakınsak ise*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu$$

dir.

Teorem 2.1.21. ***(Lebesque Yakınsaklık Teoremi)*** *[22] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı, g pozitif ve integrallenebilen bir fonksiyon ve $f, f_1, f_2, ...$ fonksiyonları da X üzerinde tanımlı, ölçülebilir ve genişletilmiş reel değerli fonksiyonlar olsun. Eğer hemen hemen her x için $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq g(x)$ ise bu durumda f ve f_n fonksiyonları da integrallenebilirdir ve*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_X f_n d\mu = \int\limits_X f d\mu$$

dir.

Teorem 2.1.22. *[22]$(X, \mathcal{A}, \mu)$ bir ölçü uzayı ve $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde integrallenebilir olsun. Bu taktirde hemen hemen her x için $|f(x)| < \infty$ dur.*

2.2 $L^2(\mathbb{R})$ Hilbert Uzayı ve Bu Uzay Üzerindeki Bazı Önemli Operatörler

Bu bölümde fonksiyonel analizin en önemli konularından olan $L^p(\mathbb{R})$, $1 \leq p < \infty$ fonksiyon uzayını tanıtacağız. $L^p(\mathbb{R})$ uzayları arasında en önemli olanı

$L^2(\mathbb{R})$ dir. Bu uzay, $L^p(\mathbb{R})$ uzayları arasında Hilbert uzay olan tek uzaydır. $L^2(\mathbb{R})$ uzayını önemli kılan bir başka husus ise uygulamada sıkça kullanılan Fourier dönüşümü gibi daha birçok operatörün tanımlanmasına imkan vermesidir. Ayrıca bu bölümde $L^2(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde tanımlanan bazı önemli lineer operatörlerden de bahsedeceğiz.

2.2.1 $L^p(\mathbb{R})$ $(1 \leq p < \infty)$ Uzayları ve Bazı Sürekli Fonksiyonların Oluşturduğu Vektör Uzayları

İntegrallenebilir fonksiyon tanımıyla başlayalım.

Tanım 2.2.1. *[37] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ ölçülebilir bir fonksiyon olmak üzere eğer*

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)dx$$

Lebesque integrali mevcut ise f ye integrallenebilirdir denir.

Tanım 2.2.2. *[37] $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, kompleks değerli, ölçülebilir ve mutlak değerinin p-inci kuvveti integrallenebilen tüm fonksiyonların uzayı $L^p(\mathbb{R})$ ile gösterilir:*

$$L^p(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx < \infty\}.$$

Örnek 2.2.1. *Sinyal işleme alanında önemli yer tutan*

$$sinc(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t = 0; \\ \frac{\sin t}{t} & , \quad diğer \end{cases}$$

şeklinde tanımlı sinc fonksiyonu $L^2(\mathbb{R})$ uzayına ait bir fonksiyon örneğidir.

$L^p(\mathbb{R})$ kümesi, hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

toplama işlemi ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

skalerle çarpma işlemlerine göre bir vektör uzayıdır, [37].

Her bir $p \in [1, \infty)$ için

$$\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx)^{1/p}$$

eşitliği $L^p(\mathbb{R})$ üzerinde bir norm tanımlar ve $L^p(\mathbb{R})$ uzayı bu normla bir Banach uzayıdır, [37].

$L^2(\mathbb{R})$ vektör uzayı

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}dx \quad , \; f, g \in L^2(\mathbb{R})$$

ile tanımlı iç çarpım ile bir iç çarpım uzayıdır. Bu iç çarpımdan gelen norm

$$\|f\|_2 = (\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx)^{1/2}$$

olup $L^2(\mathbb{R})$ bu norma göre Banach uzayı olduğundan $L^2(\mathbb{R})$ bir Hilbert uzayıdır, [37].

Şimdi bazı özel sürekli fonksiyonların tanımlarını ve bu fonksiyonların oluşturduğu vektör uzaylarını vereceğiz.

Tanım 2.2.3. *[37] $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin.*

- *f fonksiyonunun **desteği (support)**,*

  $$suppf = \overline{\{x \in \mathbb{R} : f(x) \neq 0\}}$$

  kümesidir.

- *Eğer $suppf$ sınırlı bir küme ise yani bir $[a, b]$ intervali tarafından kapsanıyorsa f fonksiyonuna **kompakt desteğe sahip** denir.*

- *Tüm sürekli ve kompakt desteğe sahip fonksiyonların uzayı $C_c(\mathbb{R})$ ile gösterilir:*

  $$C_c(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ sürekli ve kompakt desteğe sahip}\}.$$

► *Tüm sürekli ve $x \to \pm\infty$ iken sıfıra yaklaşan fonksiyonların uzayı $C_0(\mathbb{R})$ ile gösterilir:*

$$C_0(\mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : f \text{ sürekli ve } f(x) \to 0,\ x \to \pm\infty\}.$$

$C_c(\mathbb{R})$ ve $C_0(\mathbb{R})$ uzayları, fonksiyonların bilinen toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre birer vektör uzayıdır. Ayrıca, dikkat edilirse kompakt desteğe sahip bir fonksiyon sonlu bir interval dışında sıfıra eşit olan fonksiyondur. Buradan da anlaşılır ki $C_c(\mathbb{R}) \subset C_0(\mathbb{R})$ dir.

Örnek 2.2.2.

$$f(x) = \begin{cases} x & , \quad x \in [0,1); \\ 2-x & , \quad x \in [1,2]; \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

fonksiyonu için $\text{supp} f = [0,2]$ *olduğundan* f *kompakt desteğe sahiptir. Ayrıca* f *sürekli olduğundan* $f \in C_c(\mathbb{R})$ *dir. Bundan başka*

$$g(x) = \begin{cases} 1 & , \quad x \in [-1,1]; \\ \frac{1}{|x|} & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

şeklindeki g *fonksiyonu kompakt desteğe sahip olmadığından* $g \notin C_c(\mathbb{R})$ *dir. Fakat* g *sürekli ve* $x \to \pm\infty$ *iken* $g(x) \to 0$ *olduğundan* $g \in C_0(\mathbb{R})$ *dir.*

Teorem 2.2.1. *[37]* $f \in C_0(\mathbb{R})$ *olmak üzere*

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}} |f(x)|$$

eşitliği $C_0(\mathbb{R})$ *üzerinde bir norm tanımlar ve* $C_0(\mathbb{R})$ *bu normla bir Banach uzayıdır.*

$C_c(\mathbb{R})$ vektör uzayı $C_0(\mathbb{R})$ nin bir alt uzayıdır. $C_c(\mathbb{R})$, $C_0(\mathbb{R})$ nin normuyla bir normlu uzaydır. Fakat bir Banach uzayı değildir [37].

Şimdi $C_c(\mathbb{R})$ ile $L^p(\mathbb{R})$ uzayları arasındaki ilişkiyi ifade eden aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 2.2.2. *[37] Her bir* $p \in [1,\infty)$ *için* $C_c(\mathbb{R})$ *vektör uzayı* $L^p(\mathbb{R})$ *de yoğun bir alt uzaydır.*

2.2.2 $L^2(\mathbb{R})$ Uzayı Üzerindeki Lineer Operatörler

Bu kısımda $L^2(\mathbb{R})$ Hilbert uzayı üzerinde tanımlanan öteleme, değiştirme ve genişletme operatörlerini vereceğiz. Sinyal işleme alanında önemli bir yer tutan bu operatörler genellikle radyo, lazer, optik ve bilgisayar ağlarındaki elektromanyetik sinyallere uygulanırlar. Örneğin öteleme operatörü bir sürekli zaman sinyalinin aynı doğrultuda yer değiştirmesini sağlar, değiştirme operatörü düşük frekanslı bir sinyalin bir haberleşme kanalı üzerinden etkin bir şekilde iletilebilmesi için verilen sinyali daha yüksek frekanslı bir sinyale dönüştürür ve genişletme operatörü ise görüntü işlemede gelen sinyalin daha net algılanmasına yardımcı olur.

Tanım 2.2.4. *[37] a ve b birer reel sayı ve $c > 0$ olmak üzere*

- *a ile öteleme operatörü (translation operator) $T_a : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$(T_a f)(x) = f(x - a)$$

  ile tanımlanır.

- *b ile değiştirme operatörü (modulation operator) $E_b : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$(E_b f)(x) = e^{2\pi i b x} f(x)$$

  ile tanımlanır.

- *c ile genişletme operatörü (dilation operator) $D_c : L^2(\mathbb{R}) \to L^2(\mathbb{R})$, her $x \in \mathbb{R}$ için*

$$(D_c f)(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} f(\frac{x}{c})$$

  ile tanımlanır.

Örnek 2.2.3.

$$\varphi(x) = e^{-x^2}$$

ile verilen φ fonksiyonu $L^2(\mathbb{R})$ de olup bu fonksiyon için 1 *ile öteleme,* $-1/3$ *ile değiştirme ve* $1/4$ *ile genişletme operatörleri sırasıyla*

$$T_1\varphi(x) = e^{-(x-1)^2},$$

$$E_{-1/3}\varphi(x) = e^{\frac{-2}{3}\pi ix - x^2}$$

ve

$$D_{1/4}\varphi(x) = 2e^{-16x^2}$$

şeklindedir.

Şimdi bu operatörlerin bazı önemli özelliklerini vereceğiz.

Lemma 2.2.1. *[37] Öteleme, değiştirme ve genişletme operatörleri sınırlı ve lineer operatörlerdir. Ayrıca bu operatörler üniter olup aşağıdaki eşitlikler vardır:*

(i) $T_a^{-1} = T_{-a} = (T_a)^*$,

(ii) $E_b^{-1} = E_{-b} = (E_b)^*$,

(iii) $D_c^{-1} = D_{1/c} = (D_c)^*$.

İspat. İspatı T_a öteleme operaötürü için vereceğiz. Diğer operatörler için de ispat benzer şekilde yapılabilir. İlk olarak $f, g \in L^2(\mathbb{R})$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ ve her $x \in \mathbb{R}$ için,

$$\begin{aligned} T_a(\alpha f + \beta g)(x) &= (\alpha f + \beta g)(x-a) \\ &= \alpha f(x-a) + \beta g(x-a) \\ &= \alpha T_a f(x) + \beta T_a g(x) \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$T_a(\alpha f + \beta g) = \alpha T_a f + \beta T_a g$$

olduğundan T_a lineerdir. Ayrıca, her $f \in L^2(\mathbb{R})$ için $z = x - a$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{R}} |T_a f(x)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x-a)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} |f(z)|^2 \, dz$$

olup

$$\|T_a f\|_2 = \|f\|_2$$

dir. Bu ise T_a nın sınırlı olması demektir. Şimdi T_a nın üniter olduğunu ispatlayacağız. $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ için $z = x - a$ olmak üzere

$$\langle T_a f, g\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} f(x-a)\overline{g(x)}dx = \int\limits_{\mathbb{R}} f(z)\overline{g(z+a)}dz = \langle f, T_{-a} g\rangle$$

yazılabilir. Tanım 2.1.36 den

$$(T_a)^* = T_{-a}$$

olur. Ayrıca

$$T_a T_a^* = T_a T_{-a} = I$$

ve

$$T_a^* T_a = T_{-a} T_a = I$$

olduğundan T_a üniterdir. Sonuç olarak

$$T_a^{-1} = T_{-a} = (T_a)^*$$

olup ispat tamamlanır. □

Lemma 2.2.2. *[37] Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $c > 0$ için,*

$$(T_a E_b f)(x) = e^{2\pi i b(x-a)} f(x-a) = e^{-2\pi i b a}(E_b T_a f)(x),$$

$$(T_a D_c f)(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} f(\frac{x}{c} - \frac{a}{c}) = (D_c T_{a/c} f)(x)$$

ve

$$(D_c E_b f)(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} e^{2\pi i x b/c} f(\frac{x}{c}) = (E_{b/c} D_c f)(x)$$

dir.

Lemma 2.2.3. *[37] $f \in L^2(\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda*

$$\|T_a f - f\|_2 \to 0, \quad a \to 0$$

dır.

2.2.3 Fourier Dönüşümü

Fourier dönüşümü sinyal işlemenin en önemli konularından biridir. Bu dönüşüm, bir sinyali *zaman alanı*ndan (time domain), *frekans alanı*na (frequency domain) çevirmeye yarar. Bu sayede zaman alanında başarılması zor olan işler, frekans alanına çevrilerek başarılabilinir. Örneğin, bir sinyali parazitlerden arındırmak için yapılan sinyal süzgeçlemede (filtering) kullanılan konvolusyon işlemini ele alalım. Zaman alanında yapılan bu işlemin hesapsal yükü oldukça fazladır. Ancak frekans uzayına geçildiğinde konvolusyon işlemi, çarpma işlemine dönüşeceğinden (Sinyal işlemede zaman ve frekans alanlarındaki bu ilişkiye *duallik* denir.) hesapsal yük hafifleyecek ve böylece frekans uzayında süzgeçleme işlemi daha güvenilir hale gelecektir. Burada bahsi geçen iki önemli unsur, zaman alanı ve frekans alanı ile neyin kastedildiğidir. Kısaca ifade etmek gerekirse zaman alanındaki bir sinyal, verilen bir t zamanı için t ye bağlı bir fonksiyondur. Periyodik ve sonlu değer alabilen her fonksiyon, değişik frekanslarda titreşen sinüs ve cosinüs fonksiyonlarının toplamı şeklinde yazılabilir. Bir sinyal bu şekilde yazıldığında zamana bağlı olmayan bir fonksiyon elde edilir. Bu durumda frekans alanındaki bir sinyal, bir gerçek bir de sanal kısımdan oluşmakta ve bu değerler birer frekans olarak temsil edilmektedir. İşte frekans alanına geçmek için Fourier dönüşümü kullanılmaktadır.

Bu tez çalışmasında ağırlıklı olarak sürekli zaman sinyalleri ele alındığından sürekli zaman Fourier dönüşümünden bahsedeceğiz.

Tanım 2.2.5. *[37] Fourier dönüşümü, her bir $f \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonuna*

$$\hat{f}(w) = \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-2\pi i w x} dx \quad , \, w \in \mathbb{R} \tag{2.2.1}$$

ile verilen $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fonksiyonunu karşılık getirir. f nin Fourier dönüşümü

$$(\mathcal{F}f)(w) = \hat{f}(w)$$

ile tanımlanır.

♣ Fourier dönüşümü iyi tanımlıdır: $f \in L^1(\mathbb{R})$ olduğundan

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \left|f(x)e^{-2\pi iwx}\right| dx = \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|\, dx < \infty$$

olur. Mutlak integrallenebilirlik, integrallenebilirliği gerektirdiğinden $\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi iwx}dx$ integrali mevcuttur.

♣ Fourier dönüşümü lineer bir dönüşümdür.

Örnek 2.2.4. *[37] t_0 herhangi bir pozitif tek tam sayı olmak üzere*

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{t_0}} & , \quad |x| \leq \frac{1}{2}t_0; \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı fonksiyona box (kutu) fonksiyonu *denir. Bu fonksiyonunun Fourier dönüşümü*

$$\begin{aligned} \hat{f}(w) &= \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi iwx}dx = \int\limits_{-t_0/2}^{t_0/2} \frac{1}{\sqrt{t_0}} e^{-2\pi iwx}dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{t_0}} \frac{e^{2\pi iwt_0/2} - e^{-2\pi iwt_0/2}}{2\pi iw} = \frac{t_0}{\sqrt{t_0}} sinc(\pi t_0 w) \end{aligned}$$

şeklindedir.

Tanım 2.2.5 de görüldüğü gibi Fourier dönüşümü $L^1(\mathbb{R})$ üzerinde tanımlanmış, fakat görüntü uzayından bahsedilmemiştir. Aşağıdaki lemma Fourier dönüşümünün görüntü uzayı hakkında bilgi verir.

Lemma 2.2.4. *[37]* ***(Riemann-Lebesque Lemması)*** *$f \in L^1(\mathbb{R})$ ise $\hat{f}$ fonksiyonu sürekli ve $w \to \pm\infty$ iken $\hat{f}(w) \to 0$ dır, yani $\hat{f} \in C_0(\mathbb{R})$ dir.*

Sonuç 2.2.1. *[37] $\mathcal{F}$ Fourier dönüşümü $L^1(\mathbb{R})$ den $C_0(\mathbb{R})$ ye giden sınırlı lineer bir operatördür ve $f \in L^1(\mathbb{R})$ için*

$$\|\mathcal{F}f\|_\infty \leq \|f\|_1$$

dir.

Şu ana kadar Fourier dönüşümü $L^1(\mathbb{R})$ uzayı üzerinde tanımlanmıştı. Şimdi ise Fourier dönüşümünün $L^2(\mathbb{R})$ den $L^2(\mathbb{R})$ ye giden bir fonksiyona genişletilebileceğini göreceğiz. Bunun için bir lemma ile başlıyoruz.

Lemma 2.2.5. *[37]* ***($C_c(\mathbb{R})$ üzerindeki Fourier Dönüşümü)*** *Her $f \in C_c(\mathbb{R})$ için,*

$$\int_{\mathbb{R}} \left|\hat{f}(w)\right|^2 dw = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx$$

dir.

Bu lemmanın bir sonucu olarak şunu söyleyebiliriz. $C_c(\mathbb{R})$ uzayını $L^2(\mathbb{R})$ nin normuyla donatırsak Fourier transformu, $C_c(\mathbb{R})$ den $L^2(\mathbb{R})$ ye bir izometridir.

$C_c(\mathbb{R})$ uzayının $L^2(\mathbb{R})$ de yoğun olduğu gözönüne alınırsa aşağıdaki önemli teorem verilebilir:

Teorem 2.2.3. *[37] Fourier dönüşümü $L^2(\mathbb{R})$ den $L^2(\mathbb{R})$ ye bir üniter dönüşüme genişletilebilir. Bu genişleme operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar:*

(i) *Her $f \in L_2(\mathbb{R})$ için,*

$$\left\|\hat{f}\right\|_2 = \|f\|_2 \tag{2.2.2}$$

dir.

(ii) *Her $f, g \in L_2(\mathbb{R})$ için,*

$$\left\langle \hat{f}, \hat{g} \right\rangle = \langle f, g \rangle \tag{2.2.3}$$

dir.

İspat. Öncelikle Lemma 2.2.5 den her $f \in C_c(\mathbb{R})$ için

$$\|\mathcal{F}f\|_2 = \|f\|_2$$

yazılabilir. Teorem 2.1.18 den ve $C_c(\mathbb{R})$ nin $L^2(\mathbb{R})$ de yoğun olması gerçeğinden $\mathcal{F}$ Fourier dönüşümü $L^2(\mathbb{R})$ den $L^2(\mathbb{R})$ ye genişletilebilir. Yine Teorem 2.1.18 den (2.2.2) eşitliğinin her $f \in L_2(\mathbb{R})$ için sağlandığını görebiliriz. Ayrıca (2.2.2) eşitliği ve Teorem 2.1.16 kullanılarak (2.2.3) eşitliği elde edilir. □

Yukarıdaki teoremde (2.2.2) eşitliğine *Plancherel eşitliği, (2.2.3)* eşitliğine ise *Parseval eşitliği* denir.

2.3 Sinyal İşlemenin Temelleri

Sinyal, fiziksel dünyada bir sistemde yaşanan zamandaki veya uzaydaki bir değişimi gösterir. Daha açık olarak doğadaki bir olay hakkında bilgi taşıyan, bir veya birden fazla değişken içeren fonksiyona *sinyal denir.* Böylece sinyal, bir fonksiyona benzetilmiş ve bu sayede üzerinde işlem yapılabilmiştir. *Sinyal işleme* ise verilen bir sinyale bilgisayar veya özel olarak üretilmiş birtakım yapılar sayesinde o sinyali istenilen hale getirme işlemidir. Sinyaller ikiye ayrılır:

- Ayrık-zaman sinyali (discrete-time signal)
- Sürekli-zaman sinyali (continuous-time signal)

Mühendislik alanında bir ayrık zaman sinyaline *dijital sinyal*, sürekli zaman sinyaline ise *analog sinyal* denir.

Tanım 2.3.1. *[13] $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesinden $\mathbb{C}$ ye tanımlı bir fonksiyona sinyal denir. Eğer bu alt küme $\mathbb{Z}$ olursa bu sinyale **ayrık-zaman sinyali**, $\mathbb{R}$ olursa bu sinyale **sürekli-zaman sinyali** denir. Bir ayrık zamanlı x sinyali,*

$$x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}} = (..., x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, ...)$$

şeklinde iki-taraflı bir dizi olarak yazılır. Bir $x = (x_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ ayrık zaman sinyalinin her bir üyesi olan x_k ya bir "örnek "denir.

Tanımdan da anlaşılacağı gibi ayrık-zaman sinyalini bir dizi olarak, sürekli-zaman sinyalini ise bir fonksiyon olarak düşünebiliriz. Aralarındaki fark, ayrık-zaman sinyali zamanın belirli anlarında tanımlı iken sürekli-zaman sinyalinin zamanın her anında tanımlı olmasıdır. Doğada sıkça karşılaşılan ve uygulamada en çok yer tutan sinyaller sürekli-zaman sinyalleridir. Bundan dolayı bu tez çalışması sürekli-zaman sinyalleri temel alınarak oluşturulmuştur. Ancak açıklayıcı olması bakımından bir ayrık-zamanlı sinyal örneği verelim:

Örnek 2.3.1. *[13] n_0 herhangi bir tek pozitif tam sayı olmak üzere*

$$w_n = \begin{cases} 1/\sqrt{n_0} & , \quad |n| \leq \frac{1}{2}(n_0 - 1); \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

ya da bir başka deyişle

$$w = (..., 0, \frac{1}{\sqrt{n_0}}, ..., \boxed{\tfrac{1}{\sqrt{n_0}}}, ..., \frac{1}{\sqrt{n_0}}, 0, ...)$$

şeklinde tanımlı $w = (w_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ dizisine box (kutu) dizisi denir ve bu dizi bir ayrık-zaman sinyalidir. Burada çerçeve içine alınan terim w_0 terimine karşılık gelir ve dizinin merkezleyeni adını alır.

Şimdi de sinyal işleme alanında en çok karşılaşılan bir sürekli-zaman sinyali örneği verelim.

Örnek 2.3.2. *[13]* ***(Box fonksiyonu)*** *Herhangi bir t_0 pozitif reel sayısı için*

$$w(t) = \begin{cases} 1/\sqrt{t_0} & , \quad |t| \leq \frac{1}{2}t_0; \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

ile verilen box (kutu) fonksiyonu bir sürekli zaman sinyalidir.

Şimdi bir sinyalin işlenmesini sağlayan yapılardan bahsedeceğiz. İstenilen özelliklere sahip sinyalleri üreten bu yapılara *sistem* denir. Matematiksel olarak ifade etmek gerekirse bir sistem, ya iki dizi uzayı arasında ya da iki fonksiyon uzayı arasında tanımlı bir operatördür.

Tanım 2.3.2. *[13] Bir x input (girdi) dizisini, bir y output (çıktı) dizisine dönüştüren*

$$y = T(x)$$

şeklinde tanımlı T operatörüne ***ayrık-zaman sistemi (discrete-time sistem)*** *denir. Benzer şekilde bir x input (girdi) fonksiyonunu, bir y output (çıktı) fonksiyonuna dönüştüren T operatörüne* ***sürekli-zaman sistemi (continuous-time sistem)*** *denir.*

Sistemlerin bazı tipleri vardır:

- Lineer Sistemler
- Memoryless Sistemler
- Casual Sistemler
- Shift-Invariant Sistemler
- BIBO-Stable Sistemler

Uygulamada en çok karşılaşılan sistemler lineer sistemler ve shift-invariant sistemlerdir. Bu iki özelliği de aynı anda barındıran sistemlere *lineer shift-invariant sistem* (kısaca LSI sistem) denir. Şimdi LSI sistemin tanımını yapacağız.

Tanım 2.3.3. *[13] Her x inputu ve her $k \in \mathbb{R}$ için*

$$y = T(x) \text{ iken } y^{'} = T(x^{'})$$

oluyorsa T sürekli-zaman sistemine shift-invariant sistem denir, burada $x^{'}(t) = x(t-k)$ ve $y^{'}(t) = y(t-k)$ dır. Lineer olan bir shift-invariant operatöre ***LSI-sistem*** *denir.*

Örnek 2.3.3. *[13] Bir $t_0 \in \mathbb{R}$ için*

$$y(t) = x(t - t_0) \quad , \, t \in \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlı operatöre t_0 ile gecikme (shift-by-t_0) operatörü denir. Bu operatör bir LSI-sistemdir.

Sinyal işleme alanında kullanılan en yaygın yöntemlerden biri filtreleme (filtering, sinyal süzme) işlemidir. Filtreler, bir sinyali parazitlerden (istenmeyen sinyaller) arındırma veya belirli frekansları birbirinden ayırma gibi işlemlerde kullanılır. Örneğin, bir dinleme cihazında algılanan sesi gürültüden ayırt etmek için filtrelere ihtiyaç vardır. Burada ses bir sinyal iken gürültü bir parazittir. Bunlardan başka filtreleme işlemi, bir sinyali biçimlerdirmede ve gelen sinyali ihtiyaca göre zayıflatmada veya güçlendirmede kullanılır.

Tanım 2.3.4. *[13] Her $t \in \mathbb{R}$ için*

$$\delta(t) = \begin{cases} 1 & , \quad t = 0; \\ 0 & , \quad t \neq 0 \end{cases}$$

ile verilen Dirac Delta fonksiyonunun *bir LSI-sistem altındaki görüntüsüne sistemin* ***impulse cevabı*** *denir. Bir sistemin impulse cevabına ise* ***filtre (filter)*** *denir.*

Tanım 2.3.5. *[13] h ve x fonksiyonlarının konvolusyonu,*

$$(Hx)(t) = (h * x)(t) = \int_{\mathbb{R}} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{\mathbb{R}} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$

olarak tanımlanır. Burada H ya h ile ***konvolusyon operatörü*** *denir.*

Tanım 2.3.6. *[13] Verilen bir sinyalin filter ile konvolusyonuna* ***filtreleme (filtering)*** *denir.*

Filtreme işlemi bir sinyali parazitlerinden arındırmak için kullanılır.

3. KÜME-DEĞERLİ DÖNÜŞÜMLER VE BAZI ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanacağımız küme-değerli dönüşümlerin bazı önemli özelliklerini sunacağız. Bu amaç doğrultusunda küme-değerli dönüşümlerin sürekliliğini, ölçülebilirliğini ve integrallenebilirliliğini alt bölümler halinde vereceğiz. Ayrıca bu bölümde küme-değerli dönüşümlerin integraline büyük katkı sağlayan *Aumann integralini* tanıtacağız.

3.1 Temel Tanımlar

Tanım 3.1.1. *[1] X ve Y topolojik uzaylar olsun. Eğer her bir $x \in X$ elemanına $F(x) \subset Y$ olacak şekilde bir $F(x)$ kümesi karşılık geliyorsa F fonksiyonuna X den Y ye bir* ***küme-değerli dönüşüm*** *(set-valued mapping) denir ve $F : X \rightsquigarrow Y$ şeklinde gösterilir.*

Bazı kaynaklarda küme-değerli bir dönüşüm *multi-fonksiyon* ya da *multivalued fonksiyon* olarak da adlandırılır ve X den Y ye giden bir küme-değerli dönüşüm $F : X \to 2^Y$ veya $F : X \rightrightarrows Y$ şeklinde de gösterilebilir. Literatürde en çok tanımda verilen şekliyle karşılaştığımız için tanımda geçen notasyonları kullanacağız.

Örnek 3.1.1. *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonunu düşünelim. Bu fonksiyon klasik tek değerli (single valued) bir fonksiyondur. Bir $y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ elemanının ters görüntüsü,*

$$f^{-1}(y) = \{-\sqrt{y}, \sqrt{y}\}$$

kümesidir. Dikkat edilirse her bir $y \in \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ elemana $f^{-1}(y)$ kümesi karşılık geldiğinden f^{-1} ters fonksiyonu küme-değerli bir fonksiyondur.

Tanım 3.1.2. *[1] X ve Y metrik uzaylar ve $F : X \rightsquigarrow Y$ küme-değerli dönüşüm olsun.*

♦ *F nin tanım kümesi*

$$Dom(F) = \{x \in X : F(x) \neq \emptyset\};$$

♦ *F nin değer kümesi*

$$Rang(F) = \bigcup_{x \in DomF} F(x);$$

♦ *F nin grafiği*

$$Graph(F) = \{(x,t) : x \in DomF, t \in F(x)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.3. *[39] X ve Y topolojik uzaylar ve $F : X \rightsquigarrow Y$ küme-değerli dönüşüm olsun.*

(i) *Eğer her bir $x \in X$ için $F(x)$ kümesi Y nin kapalı (açık, kompakt) bir alt kümesi ise F ye **kapalı değerli (açık değerli, kompakt değerli)** denir. Ayrıca Y bir topolojik vektör uzayı olmak üzere her bir $x \in X$ için $F(x)$ kümesi Y nin konveks bir alt kümesi ise F ye **konveks değerli** denir.*

(ii) *Eğer F nin grafiği olan $Graph(F)$ kümesi $X \times Y$ nin çarpım topolojisine göre kapalı (açık, kompakt) bir küme ise F ye **kapalı küme-değerli (açık küme-değerli, kompakt küme-değerli) dönüşüm** denir. Eğer X ve Y topolojik vektör uzayları olmak üzere $Graph(F)$ kümesi $X \times Y$ nin konveks bir alt kümesi ise F ye **konveks küme-değerli dönüşüm** denir.*

Tanım 3.1.4. *[39] X ve Y topolojik uzaylar ve $F : X \rightsquigarrow Y$ küme-değerli dönüşüm olsun. F **nin kapanışı**,*

$$cl(F) : X \rightsquigarrow Y \quad , \; cl(F)(x) = cl(F(x))$$

*ve F **nin içi,***

$$int(F) : X \rightsquigarrow Y \quad , int(F)(x) = int(F(x))$$

küme-değerli dönüşümüdür.

Örnek 3.1.2. *Örnek 3.1.1 deki f fonksiyonu için $F = f^{-1}$ olsun. Yani $F : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightsquigarrow \mathbb{R}$, $F(x) = \{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\}$ küme-değerli dönüşümünü düşünelim. Bu dönüşüm için $cl(F), int(F) : \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ olup*

$$cl(F)(x) = \{-\sqrt{x}, \sqrt{x}\}$$

ve

$$int(F)(x) = \emptyset$$

dir.

Tanım 3.1.5. *[38] $F : X \rightsquigarrow Y$ küme-değerli dönüşümü için bir $A \subset X$ alt kümesinin F altındaki görüntüsü*

$$F(A) = \bigcup_{x \in A} F(x)$$

kümesidir.

Önerme 3.1.1. *[38] X ve Y topolojik uzaylar, $F : X \rightsquigarrow Y$ küme-değerli dönüşüm ve $A, B \subset X$ olsun. Bu durumda*

(i) $F(A) \cup F(B) = F(A \cup B)$;

(ii) $F(A \cap B) \subset F(A) \cap F(B)$;

(iii) *Eğer $A \subset B$ ise $F(A) \subset F(B)$ dir.*

Tanım 3.1.6. *[38] X ve Y topolojik uzaylar, $F_1, F_2 : X \rightsquigarrow Y$ küme-değerli dönüşümler olsun.*

- *F_1 ve F_2 nin birleşimi,*

$$(F_1 \cup F_2)(x) = F_1(x) \cup F_2(x);$$

- *F_1 ve F_2 nin kesişimi,*

$$(F_1 \cap F_2)(x) = F_1(x) \cap F_2(x);$$

- *Y lineer uzay olmak üzere F_1 ile F_2 nin toplamı ve farkı,*

$$(F_1 \pm F_2)(x) = F_1(x) \pm F_2(x)$$

  olarak tanımlanır, burada

$$F_1(x) \pm F_2(x) = \{a \pm b : a \in F_1(x), b \in F_2(x)\}$$

  dır.

3.2 Küme-Değerli Dönüşümlerin Sürekliliği

Bu kısımda X ve Y Hausdorff topolojik uzaylar olarak alınacaktır.

Tanım 3.2.1. *[1] $F : X \rightsquigarrow Y$ küme-değerli dönüşüm ve $x_0 \in Dom(F)$ olsun. Eğer $F(x_0) \subset V$ olacak şekildeki her $V \subset Y$ açık alt kümesi ve her $x \in U$ için*

$$F(x) \subset V$$

*olacak şekilde x_0 ın bir U komşuluğu var ise F ye x_0 noktasında **üst-yarı sürekli**dir denir. Eğer F, X in her noktasında üst-yarı sürekli ise F ye X üzerinde üst-yarı süreklidir denir.*

Tanım 3.2.2. *[1] $F : X \rightsquigarrow Y$ küme-değerli dönüşüm ve $x_0 \in Dom(F)$ olsun. Eğer $F(x_0) \cap V \neq \emptyset$ olacak şekildeki her $V \subset Y$ açık alt kümesi ve her $x \in U$ için*

$$F(x) \cap V \neq \emptyset$$

olacak şekilde x_0 ın bir U komşuluğu var ise F ye x_0 noktasında ***alt-yarı süreklidir*** *denir. Eğer F, X in her noktasında alt-yarı sürekli ise F ye X üzerinde alt-yarı süreklidir denir.*

Tanım 3.2.3. *[1] Bir $x \in Dom(F)$ noktasında hem alt-yarı hem de üst-yarı sürekli olan bir F küme-değerli dönüşümüne x noktasında* ***süreklidir*** *denir.*

Örnek 3.2.1.

$$F(x) = \begin{cases} [1,4] & , \quad x = 0; \\ [2,3] & , \quad x \neq 0 \end{cases}$$

eşitliği ile verilen $F : \mathbb{R} \rightsquigarrow \mathbb{R}$ küme-değerli dönüşümü $x = 0$ noktasında üst-yarı sürekli iken alt-yarı sürekli değildir. F nin $x = 0$ da üst-yarı sürekli olduğunu gösterebilmek için öncelikle

$$F(0) \subset V$$

olacak şekilde herhangi bir $V \subset \mathbb{R}$ alalım. Bu durumda $[1,4] \subset V$ yazılabilir. $x = 0$ noktasının herhangi bir U komşuluğu verilsin. $x \in U$ ise ya $F(x) = [1,4]$ ya da $F(x) = [2,3]$ dür. O halde her $x \in U$ için

$$F(x) \subset [1,4] \subset V$$

olur. Bu ise F nin $x = 0$ noktasında üst-yarı sürekli olması demektir. Şimdi $3 < r < 4$ olmak üzere bir $r \in F(0) = [1,4]$ sayısı ve yeteri kadar küçük $\varepsilon > 0$ sayısı için

$$V = (r - \varepsilon, r + \varepsilon)$$

olsun. Dikkat edilirse $F(0) \cap V \neq \emptyset$ dur. Ayrıca $x = 0$ noktasının herhangi bir U komşuluğundaki x ler için ya $F(x) = [1,4]$ ya da $F(x) = [2,3]$ idi. Eğer bu komşulukta $x \neq 0$ ise $F(x) = [2,3]$ olduğundan

$$F(x) \cap V = \emptyset$$

olur. Dolayısıyla F, $x = 0$ noktasında alt-yarı sürekli değildir. Böylece F fonksiyonu $x = 0$ noktasında sürekli olamaz.

3.3 Küme-Değerli Dönüşümlerin Ölçülebilirliği

Tanım 3.3.1. *[1] $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay, Y ayrılabilir tam metrik uzay ve küme-değerli $F : X \rightsquigarrow Y$ dönüşümü kapalı değerli olsun. Eğer her $U \subset Y$ açık alt kümesi için*

$$F^{-1}(U) = \{x \in X : F(x) \cap U \neq \emptyset\}$$

*kümesi $\mathcal{A}$ ya ait ise F ye **ölçülebilirdir** denir.*

Tanım 3.3.2. *[1] $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay, Y ayrılabilir tam metrik uzay ve $F : X \rightsquigarrow Y$ küme-değerli dönüşüm olsun. Her $x \in X$ için*

$$f(x) \in F(x)$$

*şartını sağlayan ölçülebilir $f : X \to Y$ fonksiyonuna F nin **ölçülebilir selektörü** denir.*

Aşağıdaki teorem ölçülebilir küme-değerli bir dönüşümün ölçülebilir bir selektöre sahip olması için gerekli şartları ifade eder:

Teorem 3.3.1. *[39] $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay, Y ayrılabilir tam metrik uzay ve $F : X \rightsquigarrow Y$ küme-değerli dönüşümü ölçülebilir olsun. Eğer F kapalı değerli ise F nin ölçülebilir bir selektörü vardır.*

Teorem 3.3.2. *[1] **(Karakterizasyon Teoremi)** $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tam σ-sonlu ölçü uzayı, Y ayrılabilir tam metrik uzay ve küme-değerli $F : X \rightsquigarrow Y$ dönüşümü kapalı değerli olsun. Aşağıdaki önermeler birbirine denktir:*

(i) *F ölçülebilirdir.*

(ii) *Her $C \subset Y$ kapalı alt kümesi için $F^{-1}(C) \in \mathcal{A}$ dır.*

(iii) *Her $B \subset Y$ Borel alt kümesi için $F^{-1}(B) \in \mathcal{A}$ dır.*

(iv) *F nin ölçülebilir selektörlerinin bir $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır öyle ki her $x \in X$ için*

$$F(x) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(x)}$$

dir.

Tanım 3.3.3. *[1] $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tam σ-sonlu ölçü uzayı, Y tam ayrılabilir metrik uzay ve küme-değerli $F : X \rightsquigarrow Y$ dönüşümü kapalı değerli olsun. Eğer her $x \in X$ için*

$$F(x) = \overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} f_n(x)}$$

*olacak şekilde F nin ölçülebilir selektörlerinden oluşan bir $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi var ise $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ selektörler ailesine F de **noktasal yoğundur** denir.*

Önerme 3.3.1. *[1] X bir metrik uzay ve $(X, \mathcal{A}, \mu)$ tam σ-sonlu ölçü uzayı olsun ve $\mathcal{A}$, X in tüm açık alt kümelerini içersin. Ayrıca Y tam ayrılabilir metrik uzay ve küme-değerli $F : X \rightsquigarrow Y$ dönüşümü kapalı değerli olsun. Eğer F üst-yarı sürekli (ya da alt-yarı sürekli) ise F ölçülebilirdir.*

Teorem 3.3.3. *[1] $(X, \mathcal{A})$ ölçülebilir uzay ve Y Banach uzayı olmak üzere*

i) *Eğer $F_1 : X \rightsquigarrow Y$ ve $F_2 : X \rightsquigarrow Y$ ölçülebilir ise $F_1 + F_2$ fonksiyonu da ölçülebilirdir.*

ii) *Eğer $F : X \rightsquigarrow Y$ ölçülebilir ve $\gamma \in \mathbb{R}$ ise γF fonksiyonu da ölçülebilirdir.*

3.4 Küme-Değerli Dönüşümlerin Aumann İntegrali

Küme-değerli bir dönüşümün integrali ilk olarak Robert J. Aumann tarafından 1965 yılında tanımlanmıştır [26]. Aumann' a göre bu tanım şöyle verilmiştir:

$I = [0, 1]$ ve $F : I \rightsquigarrow \mathbb{R}^n$ küme-değerli dönüşüm olsun. Ayrıca $\mathcal{L}$, F nin I üzerinde integrallenebilir tüm f selektörlerinin kümesi olmak üzere F küme-değerli dönüşümünün integrali

$$\int_I F(t)dt = \{\int_I f(t)dt : f \in \mathcal{L}\}$$

şeklinde tanımlanır. Bu bölümde [1, 39, 40, 41] kaynakları referans alınarak bir X tam σ-sonlu ölçü uzayından, bir Y ayrılabilir Banach uzayının tüm kapalı-sınırlı alt kümelerinin ailesi olan $\Omega(Y)$ ye tanımlı küme-değerli bir dönüşümün integrali ve bu integralin temel özellikleri verilecektir.

Notasyon 3.4.1. *$(X, \mathcal{A}, \mu)$ tam σ-sonlu ölçü uzayı ve Y ayrılabilir Banach uzayı olarak alınacaktır. Ayrıca Y nin tüm kapalı-sınırlı alt kümelerinin ailesi $\Omega(Y)$ ve Y nin tüm kapalı-sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesi $\Omega_C(Y)$ ile gösterilecektir. Bu küme aileleri daha sonraki bölümde ayrıntılı olarak incelenecektir. Her bir $x \in X$ elemanına Y nin kapalı-sınırlı bir alt kümesini karşılık getiren bir F küme-değerli fonksiyonunu $F : X \to \Omega(Y)$ ile göstereceğiz.*

Tanım 3.4.1. *[1] $1 \leq p < \infty$ için*

$$L^p(X; Y, \mu) = \{f : X \to Y \mid f \text{ ölçülebilir ve } \int_X \|f\|^p \, d\mu < \infty\}$$

olarak tanımlanır. Dikkat edilirse $X = \mathbb{R}$, $Y = \mathbb{C}$ ve μ Lebesque ölçüsü ise $L^p(X; Y, \mu)$ uzayı bilinen $L^p(\mathbb{R})$ Banach uzayıdır.

Tanım 3.4.2. *[40] Ölçülebilir bir $F : X \rightsquigarrow Y$ küme-değerli dönüşümünün $f \in L^p(X; Y, \mu)$ olacak şekildeki tüm f selektörlerinin kümesi $S^p(F)$ ile gösterilir, yani;*

$$S^p(F) = \{f : X \to Y : \int_X \|f\|^p \, d\mu < \infty \text{ ve } f(x) \in F(x), \forall x \in X\}.$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.4.3. *[1] $F : X \to \Omega(Y)$ dönüşümü ve hemen hemen her $x \in X$ için*

$$F(x) \subset f(x)B$$

*olacak şekilde negatif olmayan bir $f \in L^1(X;Y,\mu)$ fonksiyonu varsa F ye **integrably sınırlı** denir; burada B, X in birim yuvarıdır.*

Tanım 3.4.4. *[1] $F : X \to \Omega(Y)$ küme-değerli dönüşümünün integrali*

$$\int_X F d\mu = \{\int_X f d\mu : f \in S^1(F)\} \tag{3.4.1}$$

*olarak tanımlanır. Eğer $\{\int_\Gamma f d\mu \ : \ f \ \in \ S^1(F)\}$ kümesi boştan farklı ise F ye **Aumann anlamında integrallenebilir fonksiyon** denir.*

Lebesque integralinden ayrılması açısından F nin Aumann integrali $\overset{(A)}{\int_X} F d\mu$ şeklinde gösterilecektir.

$\mathcal{B}(\mathbb{R})$, $\mathbb{R}$ nin Borel alt kümelerinin oluşturduğu σ-cebiri ve μ Lebesque öçüsü olmak üzere $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \mu)$ ölçü üzayının tam σ-sonlu ölçü uzayı ve $\mathbb{C}$ nin klasik normuyla ayrılabilir bir Banach uzayı olduğu göz önüne alınırsa $F : \mathbb{R} \to \Omega(\mathbb{C})$ dönüşümünün integrali de (3.4.1) eşitliğiyle verilir. Böylece bu dönüşümün integrali $\mathbb{C}$ nin bir alt kümesi olur.

Önerme 3.4.1. *[39] $G : X \to \Omega(Y)$ Aumann integrallenebilir fonksiyon ve hemen hemen her $x \in X$ için $G(x) \subset F(x)$ olsun. Bu durumda F fonksiyonu da Aumann integrallenebilirdir ve*

$$\overset{(A)}{\int_X} G(x)dx \subseteq \overset{(A)}{\int_X} F(x)dx$$

dir.

Önerme 3.4.2. *[39] Eğer $F, F_1, F_2 : X \to \Omega(Y)$ Aumann integrallenebilir fonksiyonlar ise $F_1 + F_2$ ve λF fonksiyonları da Aumann integrallenebilirdir ve*

$$\overset{(A)}{\int_X} (F_1 + F_2)(x)dx = \overset{(A)}{\int_X} F_1(x)dx + \overset{(A)}{\int_X} F_2(x)dx,$$

$$\overset{(A)}{\int_X} (\lambda F)(x)dx = \lambda \overset{(A)}{\int_X} F(x)dx$$

dir.

Önerme 3.4.3. *[39] Eğer $F:\mathbb{R}\to\Omega(X)$ Aumann integrallenebilir fonksiyon ve F nin integrali kompakt ise*

$$\left\|\int_{\mathbb{R}}^{(A)} F(x)dx\right\|_{\Omega} \leq \int_{\mathbb{R}}^{(A)} \|F(x)\|_{\Omega}\, dx$$

dir.

Teorem 3.4.1. *[1] $(X,\mathcal{A},\mu)$ tam σ-sonlu ölçü uzayı ve $F:X\to\Omega(\mathbb{R}^n)$ dönüşümü ölçülebilir olsun. Eğer μ nonatomik ve F integrably sınırlı ise F nin Aumann integrali kompakttır.*

Teorem 3.4.2. *[4] **(Castaing Temsil Teoremi)** $F:[a,b]\to\Omega_C(\mathbb{R})$ küme-değerli dönüşümünün F de noktasal yoğun olan bir $(f_i)_{i=1}^{\infty}$ integrallenebilir selektörlerinin ailesi mevcut ise*

$$\int_{[a,b]}^{(A)} F(x)dx = \overline{\{\int_a^b f_i(x)dx : i=1,2,...\}}$$

dir.

4. QUASİLİNEER UZAYLAR VE QUASİLİNEER OPERATÖRLER

Quasilineer uzay kavramı 1986 yılında S. M. Aseev tarafından ortaya atılmıştır, [30]. Aseev' in bu çalışması, birçok doğa problemlerini kurgulamada temel teşkil eden ve lineer uzay yapısına sahip olmayan küme-değerli fonksiyonların uzayının analizini yapmak için etkili bir araç olmuştur. Aseev, quasilineer uzay tanımını yaparken bir kısmi sıralama bağıntısı kullanmış ve bu sayede fonksiyonel analizdeki birçok tanım ve teoremlerin quasilineer karşılıklarını verebilmiştir. Bir quasilineer uzayın en belirgin özelliği her elemanın tersinin mevcut olmayışıdır. Eğer bir quasilineer uzayda her elemanın tersi mevcut ise bu uzaydaki kısmi sıralama bağıntısı eşitlikle verilir ve böylece bahsi geçen bu uzay bir lineer uzay olur. Yani quasilineer uzaylar, lineer uzayların bir genelleştirilmesidir. Dolayısıyla herhangi bir lineer uzay bir quasilineer uzay örneği teşkil eder. Aseev' in bu yaklaşımı klasik fonksiyonel analize daha geniş bir bakış açısı kazandırmıştır. Aseev dışında Markow da [31] ve [32] numaralı çalışmalarında quasilineer uzay adını verdiği bir uzay çeşidiyle çalışmıştır. Fakat Aseev' in quasilineer uzay kavramını ortaya atarken kullanmış olduğu kısmi sıralama bağıntısının sağladığı avantajlardan dolayı bu çalışmayı Aseev' in tanımını kullanarak oluşturduk.

Lineer uzay teşkil etmeyen ve uygulamada sıkça rastlanan en önemli küme aileleri $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ dir. Bu küme aileleri üzerindeki quasilineer yapıyı daha iyi analiz etmek amacıyla öncelikle bu ailelerin bazı temel özelliklerini vereceğiz. Daha sonra sırasıyla quasilineer uzaylar, normlu quasilineer uzaylar, iç çarpım quasilineer uzayları ve quasilineer operatörleri tanıtacağız.

4.1 $\mathbb{R}^n$ nin Kompakt ve Kompakt-Konveks Alt Kümelerinin Aileleri

$\mathbb{R}^n$ nin tüm boştan farklı kompakt alt kümelerinin ailesini $\Omega(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ nin tüm boştan farklı kompakt-konveks alt kümelerinin ailesini ise $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğiz.

Tanım 4.1.1. *[4] A ve B kümeleri $\mathbb{R}^n$ nin boştan farklı herhangi iki alt kümesi olsun. $\lambda \in \mathbb{R}$ alalım. Bu kümeler arasında **Minkowski** toplamı ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla*

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

$$\lambda \cdot A = \{\lambda a : a \in A\}$$

şekilde tanımlanır.

Önerme 4.1.1. *[4] $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ küme aileleleri yukarıda tanımlanan işlemlere göre kapalıdır. Ayrıca aşağıdaki özellikler sağlanır: $\forall A, B, C \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve*

$\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için,

$$A + \theta = \theta + A = A \text{ olacak şekilde } \theta = \{0\} \text{ birim eleman vardır.}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + B = B + A$$

$$A + B = A + C \Rightarrow B = C$$

$$1 \cdot A = A$$

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$$

$$(\lambda + \mu) \cdot A \subseteq \lambda \cdot A + \mu \cdot A$$

olur.

Uyarı 4.1.1. *Genel olarak* $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ *nin bir* A *elemanı için* $A + (-1) \cdot A \neq \theta$ *eşitsizliği doğrudur. Örneğin;* $n = 1$ *için* $A = [-2, 1] \in \Omega_C(\mathbb{R})$*olsun. O halde* $(-1) \cdot A = [-1, 2]$ *olur. Buradan,*

$$A + (-1) \cdot A = [-2, 1] + [-1, 2] = [-3, 3]$$

elde edilir. Görüldüğü gibi $A + (-1) \cdot A = [-3, 3] \neq \theta$ *dır.*

Yukarıdaki örnekten anlaşılacağı üzere $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ nin bir elemanının -1 katının kendisiyle toplamı birim eleman $\theta = \{0\}$ ı vermek zorunda değildir. Bu ise $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega(\mathbb{R}^n)$ küme ailelerinin lineer uzay yapısına sahip olamayacaklarını gösterir. İşte bundan dolayı bu kümeler ailesi, lineer uzay kavramının kapsamlı genelleştirmesi olan quasilineer uzay yapısına uymaktadırlar, [24].

Uyarı 4.1.2. *[24] Genel olarak* $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ *de*

$$(\lambda + \mu) \cdot A = \lambda \cdot A + \mu \cdot A$$

şartı sağlanmaz. Örneğin; $n = 1$ *için* $A = [-1, 1]$ *olsun.*

$$(1 + (-1)) \cdot [-1, 1] = 0 \cdot [-1, 1] = \{0\}$$

iken

$$1 \cdot [-1, 1] + (-1) \cdot [-1, 1] = [-1, 1] + [-1, 1] = [-2, 2]$$

olur ki $\{0\} \subset [-2, 2]$ *olduğundan*

$$(1 + (-1)) \cdot [-1, 1] \subset 1 \cdot [-1, 1] + (-1) \cdot [-1, 1]$$

dir.

4.2 Quasilineer Uzaylar

Tanım 4.2.1. *[30]* X *boştan farklı bir küme olmak üzere* X *üzerinde* $\forall x, y, z, v \in X$ *ve* $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *için aşağıdaki şartları sağlayan bir "*$\preceq$*" kısmi* *sıralama bağıntısı, bir "+" cebirsel toplama işlemi ve bir "·" reel skalerle çarpma işlemi tanımlıysa X kümesine* ***quasilineer uzay*** *denir ve $(X, \preceq)$ şeklinde gösterilir:*

$$x \preceq x$$

$$x \preceq y,\ y \preceq z \Rightarrow x \leq z$$

$$x \preceq y,\ y \preceq x \Rightarrow x = y$$

$$x + y = y + x$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z;$$

$$x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ vardır.}$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$$

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

$$1 \cdot x = x$$

$$0 \cdot x = \theta$$

$$(\alpha + \beta) \cdot x \preceq \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

$$x \preceq y,\ z \preceq v \Rightarrow x + z \preceq y + v$$

$$x \preceq y \Rightarrow \alpha \cdot x \preceq \alpha \cdot y$$

Burada θ, X in "+" işlemine göre birim elemanıdır.

Uyarı 4.2.1. *Dikkat edilirse quasilineer uzay kavramı sadece reel sayılar cismi üzerinde tanımlanmıştır. Ancak çalışmalarımızın ilerleyen bölümleri, quasilineer uzay tanımının genel bir $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$) cismi üzerinde verilmesi gereksinimini ortaya çıkarmıştır. Bu yaklaşımın interval-değerli data analizi ve sinyal işlemedeki uygulamalar açısından daha uygun olduğunu görmekteyiz. Şimdi bu tanımı verelim.*

Tanım 4.2.2. *X boştan farklı bir küme olmak üzere X üzerinde $\forall x, y, z, v \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir "$\preceq$" kısmi sıralama bağıntısı, bir "$+$" cebirsel toplama işlemi ve bir "$\cdot$" reel skalerle çarpma işlemi tanımlıysa X kümesine $\mathbb{K}$* ***cismi üzerinde bir quasilineer uzay*** *denir ve $(X, \preceq)$ şeklinde gösterilir:*

$$x \preceq x \tag{4.2.1}$$

$$x \preceq y,\ y \preceq z \Rightarrow x \leq z \tag{4.2.2}$$

$$x \preceq y,\ y \preceq x \Rightarrow x = y \tag{4.2.3}$$

$$x + y = y + x \tag{4.2.4}$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z; \tag{4.2.5}$$

$$x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ vardır.} \tag{4.2.6}$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x \tag{4.2.7}$$

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \tag{4.2.8}$$

$$1 \cdot x = x \tag{4.2.9}$$

$$0 \cdot x = \theta \tag{4.2.10}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot x \preceq \alpha \cdot x + \beta \cdot x \tag{4.2.11}$$

$$x \preceq y,\ z \preceq v \Rightarrow x + z \preceq y + v \tag{4.2.12}$$

$$x \preceq y \Rightarrow \alpha \cdot x \preceq \alpha \cdot y \tag{4.2.13}$$

$\mathbb{K}$ ya X quasilineer uzayının skaler cismi denir. Eğer $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ise X e reel quasilineer uzay, $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ise X e kompleks quasilineer uzay denir.

Örnek 4.2.1. *[30] Her lineer uzay*

$$x \preceq y \Leftrightarrow x = y$$

kısmi sıralama bağıntısı ile bir quasilineer uzaydır.

Örnek 4.2.2. *[30] E herhangi bir normlu lineer uzay olmak üzere E nin boştan farklı tüm kapalı-sınırlı altkümelerinin ailesini $\Omega(E)$, E nin tüm boştan farklı kapalı-sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesini $\Omega_C(E)$ ile gösterelim. Bu $\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$ kümeleri "$\subseteq$" kısmi sıralama bağıntısı,*

$$A + B = \overline{\{a + b : a \in A, b \in B\}}$$

cebirsel toplama işlemi ve

$$\lambda \cdot A = \{\lambda a : a \in A\}$$

skalerle çarpma işlemleriyle birlikte birer quasilineer uzaydır. Burada eğer E sonlu boyutlu ise cebirsel toplama işlemi

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

şeklinde tanımlıdır, yani kapanışa ihtiyaç yoktur.

Örnek 4.2.3. *$a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere reel sayıların $\{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$ şeklindeki bir alt kümesine interval denir ve $[a, b]$ şeklinde gösterilir. $\mathbb{R}$ deki tüm intervallerin kümesi, $\mathbb{R}$ nin tüm boştan farklı kapalı-sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesi olan $\Omega_C(\mathbb{R})$ kümesidir. Ancak tez çalışması boyunca intervallerin uzayını $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ile göstereceğiz. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ kümesi "$\subseteq$" içerme bağıntısı,*

$$[a, b] + [c, d] = [a + c, b + d]$$

toplama işlemi ve

$$\lambda \cdot [a, b] = \begin{cases} [\lambda a, \lambda b] & , \quad \lambda \geq 0; \\ [\lambda b, \lambda a] & , \quad \lambda < 0 \end{cases}$$

skalerle çarpma işlemi ile bir quasilineer uzaydır.

Lemma 4.2.1. *[30] Bir X quasilineer uzayında θ elemanı minimaldir. Yani,*

$$x \preceq \theta \Rightarrow x = \theta$$

olur.

Tanım 4.2.3. *[30] Bir X quasilineer uzayında $x'+x=\theta$ olacak şekilde bir $x'\in X$ var ise x' elemanına x in* ***tersi*** *denir.*

Eğer ters eleman mevcutsa tektir.

Lemma 4.2.2. *[30] Bir X quasilineer uzayında her elemanın tersi mevcut ise X deki kısmi sıralama bağıntısı eşitlik ile belirlenir ve dağılma özellikleri sağlanır. Böylece X bir lineer uzay olur.*

İspat. $x \preceq y$ olsun. $y' \preceq y'$ olduğunu biliyoruz. (4.2.12) şartından $x+y' \preceq y+y'$ diyebiliriz. Kabul gereği her elemanın tersi mevcut olduğundan $x+y' \preceq \theta$ elde ederiz. θ minimal eleman olduğundan $x+y'=\theta$ olur. Ters eleman tek olduğundan $x=y$ dir. Böylece X deki kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısı halini alır. Bu durumda (4.2.11) şartı dağılma özelliği şartına dönüşür ve (4.2.12) ile (4.2.13) şartları otomatik olarak sağlanır. Dolayısıyla X bir lineer uzay olur. $\square$

Sonuç 4.2.1. *Her reel lineer uzay bir quasilineer uzaydır. Ancak bunun karşıtı her zaman doğru değildir.*

Sonuç 4.2.2. *Bir reel lineer uzayda (4.2.1)-(4.2.13) şartlarını sağlayacak şekilde bir kısmi sıralama bağıntısı sadece eşitlik ile elde edilir.*

İlerleyen konularda $-x=(-1)\cdot x$ eşitliğini kabul edeceğiz.

Tanım 4.2.4. *[36] Bir X quasilineer uzayında $x\in X$ elemanının tersi mevcut ise x e* ***regüler,*** *mevcut değilse* ***singüler eleman*** *denir. X in tüm regüler ve singüler elemanlarının kümeler sırasıyla X_r ve X_s ile gösterilir.*

Önerme 4.2.1. *[36] Bir X quasilineer uzayında her regüler eleman minimaldir.*

Tanım 4.2.5. *[36] X bir quasilineer uzay olsun. $Y\subseteq X$ verilsin. Eğer Y kümesi de X deki aynı işlemler ve aynı kısmi sıralama bağıntısıyla bir quasilineer uzay teşkil ediyorsa Y ye X* ***in bir alt quasilineer uzayı*** *(kısaca alt uzayı) denir.*

Örnek 4.2.4. *E bir reel normlu lineer uzay olmak üzere $\Omega_C(E)$, $\Omega(E)$ nin bir alt uzayıdır.*

Teorem 4.2.1. *[36] X bir quasilineer uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Y nin alt uzay olması için gerek ve yeter şart her $x, y \in Y$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için $\alpha \cdot x + \beta \cdot y \in Y$ olmasıdır.*

Bu teoremin ispatı, klasik lineer cebirdeki karşılığının ispatına oldukça benzerdir.

Lemma 4.2.3. *[36] X bir quasilineer uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Y kümesindeki her bir x elemanının $x' \in Y$ olacak şekilde tersi mevcut ise Lemma 4.2.2 den Y kümesi üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı "$=$" bağıntısına dönüşür. Bu nedenle Y üzerindeki dağılma şartları sağlanır ve Y, X in lineer alt uzayı olur.*

Tanım 4.2.6. *[36] X bir quasilineer uzay olsun. Eğer bir $x \in X$ için*

$$-x = x$$

*ise x elemanına **simetrik eleman** denir. X in tüm simetrik elemanlarının kümesi X_d ile gösterilir.*

Teorem 4.2.2. *[36] X_r, X_d ve $X_s \cup \{\theta\}$ kümeleri X quasilineer uzayının alt uzaylarıdır.*

X_r, X_d ve $X_s \cup \{\{\theta\}\}$ uzaylarına sırasıyla X in **regüler, simetrik** ve **singüler alt uzayları** denir.

Uyarı 4.2.2. *X_r, X in lineer bir alt uzayı iken $X_s \cup \{\theta\}$ lineer olmayan alt uzayıdır.*

Örnek 4.2.5. *$X = \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ olmak üzere,*

$$V = \{\{0\}\} \cup \{[a, b] : a < b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

kümesi X in singüler alt uzayıdır. Öte yandan

$$W = \{\{a\} : a \in \mathbb{R}\}$$

kümesi ise X in regüler alt uzayıdır. Daha genel olarak herhangi bir E normlu lineer uzayı için $a \in E$ olmak üzere, her bir tek nokta kümesi $\{a\}$ şeklinde yazılır. E nin tek nokta kümelerinden oluşan bu aile hem $\Omega(E)$ hem de $\Omega_C(E)$ ailelerinin regüler alt uzayı olup bu uzay E ye izometrik izomorfiktir. E nin tek nokta kümelerinin ailesi E nin bir kopyası olarak görülebilir. Sözgelimi $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ intervallerinin uzayının regüler alt uzayı $\mathbb{R}$ dir. Ayrıca $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ nin regüler alt uzayındaki her bir elemana bir ***dejenere interval*** *denir.*

Şimdi quasilineer uzayların önemli bir çeşiti olan *konsolide quasilineer uzayı* tanımını vereceğiz. Bu uzayların en avantajlı özelliği, üzerinde bir iç çarpım tanımlanabilmesine imkan vermesidir. Konsolide quasilineer uzay tanımını vermeden önce gerekli olan bazı tanımları verelim.

Tanım 4.2.7. *[25] $(X, \preceq)$ bir quasilineer uzay, $M \subseteq X$ ve $x \in M$ olsun. "$\preceq$" kısmi sıralama bağıntısına göre x elemanından önce gelen M kümesindeki tüm regüler elemanların kümesine x elemanının M deki zemini, x elemanından önce gelen X kümesindeki tüm regüler elemanların kümesine x elemanının X deki zemini denir ve sırasıyla $\boldsymbol{F}_x^M$ ve $\boldsymbol{F}_x^X$ ile gösterilir. Buna göre*

$$\boldsymbol{F}_x^M = \{y \in M_r : y \preceq x\}$$

ve

$$\boldsymbol{F}_x^X = \{y \in X_r : y \preceq x\}$$

dir. Daha sade olarak bir x elemanının X deki zemini $\boldsymbol{F}_x$ ile göstereceğiz.

Uyarı 4.2.3. *Lineer uzaylarda bir elemanın zemini sadece kendisinden oluşan tek nokta kümesidir. Bu nedenle zemin kavramı, lineer olmayan quasilineer uzaylarda daha anlamlıdır.*

Tanım 4.2.8. *[25] X bir quasilineer uzay ve $M \subseteq X$ olsun. M kümesinin zemini, M kümesindeki tüm elemanların M deki zeminlerinin birleşiminden oluşan kümedir* *ve $\mathcal{F}_M$ ile gösterilir. Yani,*

$$\mathcal{F}_M = \bigcup_{x \in M} \boldsymbol{F}_x^M$$

dir.

M kümesinin X deki zemini, M kümesindeki tüm elemanların X deki zeminlerinin birleşiminden oluşan kümedir ve $\mathcal{F}_M^X$ ile gösterilir. Yani,

$$\mathcal{F}_M^X = \bigcup_{x \in M} \boldsymbol{F}_x$$

dir.

Bir X quasilineer uzayının zemini ise X deki tüm elemanların zeminlerinin birleşiminden oluşan kümedir ve $\mathcal{F}_X$ ile gösterilir. Yani,

$$\mathcal{F}_X = \bigcup_{x \in X} \boldsymbol{F}_x$$

dir.

Sonuç 4.2.3. *[25] Bir X quasilineer uzayının zemini olan $\mathcal{F}_X$ kümesi X in bir alt uzayıdır.*

Uyarı 4.2.4. *[25] Bir X quasilineer uzayında bir $x \in X$ elemanının zemini olan $\boldsymbol{F}_x$ kümesi alt uzay olmayabilir.*

Tanım 4.2.9. *[34] Bir X quasilineer uzayında her $y \in X$ için $\sup \boldsymbol{F}_y$ mevcut ve*

$$y = \sup_{"\preceq"} \boldsymbol{F}_y = \sup_{"\preceq"} \{x \in X_r : x \preceq y\}$$

*oluyorsa X uzayına **konsolide (consolidate) quasilineer uzay** aksi halde **konsolide olmayan (non-consolidate) quasilineer uzay** denir. Burada $\sup\limits_{"\preceq"}$ gösterimi ile kastedilen, supremumun "$\preceq$" bağıntısına göre alınmasıdır.*

Örnek 4.2.6. *[34] E normlu lineer uzay olmak üzere $\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$ quasilineer uzayları konsolide quasilineer uzaylardır.*

Ayrıca $y = [-2,3] \in (\mathbb{I}_\mathbb{R})_s \cup \{\{0\}\}$ *elemanı için*

$$\sup_{"\subseteq"} \{x \in ((\mathbb{I}_\mathbb{R})_s \cup \{\{0\}\})_r : x \subseteq y\} = \{0\} \neq y$$

dir. Bundan başka $z = [1,3] \in (\mathbb{I}_\mathbb{R})_s \cup \{\{0\}\}$ *elemanı için* $x \subseteq z$ *olacak şekilde* $(\mathbb{I}_\mathbb{R})_s \cup \{\{0\}\}$ *kümesinin hiçbir elemanı yoktur. O halde* $(\mathbb{I}_\mathbb{R})_s \cup \{\{0\}\}$ *uzayı, konsolide olmayan quasilineer uzaydır.*

Tanım 4.2.10. *[34] X bir quasilineer uzay olsun. Eğer X, bir Y konsolide quasilineer uzayının bir alt uzayı ve Y, X i ihtiva eden en dar quasilineer uzay ise Y ye X in* ***konsolidasyonu*** *denir ve bu uzay $\hat{X}$ ile gösterilir.*

Bir başka deyişle X in konsolidasyonu, X i içeren en dar konsolide quasilineer uzaydır.

Bu tanımdan anlıyoruz ki eğer $\hat{X} = Y$ ise Y üzerindeki quasilineer uzay olma işlemleri ve kısmi sıralama bağıntısı, X üzerindeki işlemler ve sıralama bağıntısıyla aynıdır. Ayrıca Z, X i alt uzay kabul eden başka bir konsolide quasilineer uzay ise Y, Z nin bir alt uzayıdır.

Eğer X konsolide quasilineer uzay ise $\hat{X} = X$ dir.

Örnek 4.2.7. *$X = (\mathbb{I}_\mathbb{R})_s \cup \{\{0\}\}$ quasilineer uzayının konsolide olmayan bir quasilineer uzay olduğunu biliyoruz. X in konsolidasyonunun $\mathbb{I}_\mathbb{R}$ olduğunu göstereceğiz: Şimdi kabul edelim ki Z, X i alt uzay kabul eden ve $\mathbb{I}_\mathbb{R}$ den farklı bir konsolide quasilineer uzay olsun. Keyfi bir $x \in \mathbb{I}_\mathbb{R}$ alalım. $x \in Z$ olduğunu göstermeliyiz. $x \in X$ ise durum aşikardır. Çünkü, kabule göre X, Z nin bir alt uzayı idi. $x \notin X$ ise $x \in (\mathbb{I}_\mathbb{R})_r$ olmak zorundadır. O halde $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $x = \{a\}$ şeklinde yazılabilir. Kabul edelim ki $\{a\} \notin Z$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon > 0$ için $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \in X$ ve dolayısıyla $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \in Z$ dir. Z konsolide quasilineer uzay olduğundan her $\varepsilon > 0$ için*

$$[a-\varepsilon, a+\varepsilon] = \sup_{"\subseteq"}\{y \in Z_r : y \subseteq [a-\varepsilon, a+\varepsilon]\}$$

dir. Bu bize her $\varepsilon > 0$ için $u_\varepsilon \subseteq [a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ olacak şekilde bir $u_\varepsilon \in Z_r$ olduğunu söyler. Buradan $\{a\} \in Z_r$ olduğu sonucuna ulaşırız. Çünkü aksi halde $[a-\varepsilon, a+\varepsilon]$ kümesi bir kapalı küme olamaz ki bu da $[a-\varepsilon, a+\varepsilon] \in X$ olması ile çelişir. Böylece $\{a\} \notin Z$ kabulü yanlıştır. O halde

$$\widehat{(\mathbb{I}_\mathbb{R})_s \cup \{\{0\}\}} = \mathbb{I}_\mathbb{R}$$

dir.

Daha genel olarak $\Omega_C\widehat{(\mathbb{R}^n)_s \cup \{\{\theta\}\}} = \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ dir.

4.3 Normlu Quasilineer Uzaylar

Tanım 4.3.1. *[30] X bir quasilineer uzay olsun. Bir $\|.\|_X : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in X$ için*

$$x \neq \theta \Rightarrow \|x\|_X > 0 \tag{4.3.1}$$

$$\|x+y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X \tag{4.3.2}$$

$$\|\alpha \cdot x\|_X = |\alpha| \cdot \|x\|_X \tag{4.3.3}$$

$$x \preceq y \Rightarrow \|x\|_X \leq \|y\|_X \tag{4.3.4}$$

$$\text{her } \varepsilon > 0 \text{ için } x \preceq y + x_\varepsilon \text{ ve } \|x_\varepsilon\|_X \leq \varepsilon$$

$$\text{olacak şekilde en az bir } x_\varepsilon \in X \text{ var ise } x \preceq y \text{ olur.} \tag{4.3.5}$$

*şartlarını sağlıyorsa $\|.\|_X$ fonksiyonuna X üzerinde bir **norm**, $(X, \|.\|_X)$ ikilisine de **normlu quasilineer uzay** denir.*

Tanım 4.3.2. *[30] X bir normlu quasilineer uzay olmak üzere her $x, y \in X$ için*

$$h_X(x,y) = \inf\{r \geq 0 : x \preceq y + a_1^r,\ y \preceq x + a_2^r,\ \|a_i^r\|_X \leq r\} \tag{4.3.6}$$

*fonksiyonu X üzerinde bir metrik tanımlar. Bu metriğe **Hausdorff metrik** ya da **norm metriği** denir. Burada a_i^r ile kastedilen X quasilineer uzayının $r \geq 0$*

sayısına karşılık gelen ve $\|a_i^r\|_X \leq r$ şartını sağlayan elemanı olmasıdır. Eğer bir normlu quasilineer uzay, norm metriğine göre tam ise ***tam normlu quasilineer uzay*** *adını alır.*

Bir X normlu uzayında herhangi $x, y \in X$ elemanları için

$$x \preceq y + (x - y) \text{ ve } y \preceq x + (y - x) \tag{4.3.7}$$

bağıntıları doğru olduğundan, $h_X(x, y)$ değeri her zaman tanımlıdır. Tanımdan dolayı, $\forall\ x, y \in X$ için $h_X(x, y) \leq \|x - y\|_X$ eşitsizliği doğrudur. Ayrıca her ne kadar h_X Hausdorff metriği norm yardımıyla elde edilmiş olsa da $h_X(x, y) = \|x - y\|_X$ olmayabilir.

Örnek 4.3.1. *[30] X bir reel tam normlu lineer uzay (bir reel Banach uzayı) olsun. Bu durumda X bir tam normlu quasilineer uzaydır. X i quasilineer uzay yapısına kavuşturan kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısıdır. Diğer taraftan, eğer X bir tam normlu quasilineer uzay ise ve $\forall\ x \in X$ için bir $x' \in X$ ters elemanı mevcut ise bu durumda X bir reel Banach uzayı olur ve kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısına dönüşür. Ayrıca*

$$h_X(x, y) = \|x - y\|_X$$

eşitliği sağlanır.

Örnek 4.3.2. *[30] Örnek 4.2.2 de verilen $\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$ quasilineer uzayları*

$$\|A\|_\Omega = \sup_{a \in A} \|a\|_E \tag{4.3.8}$$

normu ile birer normlu quasilineer uzaylardır. E nin θ merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvarı $S_r(\theta)$ olmak üzere bu uzaylar üzerindeki Hausdorff metrik

$$h_\Omega(A, B) = \inf\{r \geq 0 : A \subseteq B + S_r(\theta), B \subseteq A + S_r(\theta)\}$$

şeklindedir.

Önerme 4.3.1. *[4] $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ uzayları Hausdorff metriğe göre tam ve ayrılabilir metrik uzaylardır.*

Örnek 4.3.3. *[11] $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ intervallerin uzayı üzerindeki norm (4.3.8) eşitliğiyle verilir. $x = [a, b]$ ve $y = [c, d]$ intervalleri için bu uzay üzerindeki Hausdorff metrik*

$$h(x, y) = \max\{|a - c|, |b - d|\}$$

şeklinde tanımlı h fonksiyonuyla kolayca belirlenebilir.

Lemma 4.3.1. *[30] X bir normlu quasilineer uzay olsun. Cebirsel toplama ve reel sayılarla çarpma işlemleri Hausdorff metriğe göre süreklidirler. Ayrıca X üzerindeki norm fonksiyonu Hausdorff metriğe göre süreklidir.*

Lemma 4.3.2. *[30] Bir X normlu quasilineer uzayı için h_X Hausdorff metriği aşağıdaki özellikleri sağlar:*

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } h_X(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = |\alpha| \cdot h_X(x, y) \tag{4.3.9}$$

$$h_X(x + y, z + v) \leq h_X(x, z) + h_X(y, v) \tag{4.3.10}$$

$$\|x\|_X = h_X(x, \theta). \tag{4.3.11}$$

Lemma 4.3.3. *[30] X bir normlu quasilineer uzay olsun.*

a) *$x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq y_n$ olsun. Bu durumda $x_0 \preceq y_0$ olur.*

b) *$x_n \to x_0$ ve $z_n \to x_0$ olsun. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \preceq y_n \preceq z_n$ ise $y_n \to x_0$ olur.*

c) *$x_n + y_n \to x_0$ ve $y_n \to \theta$ olsun. Bu durumda $x_n \to x_0$ olur.*

Tanım 4.3.3. *[30] X bir normlu quasilineer uzay olsun. Eğer*

$$\|x\|_X \leq \|B_X\|_X \Rightarrow x \preceq B_X \tag{4.3.12}$$

*olacak şekilde X e ait bir $B_X \neq \theta$ elemanı var ise X normlu quasilineer uzayına bir $\Omega-$**uzayı** denir. Bu durumda $t \geq 0$ iken*

$$\|x\|_X \leq t \|B_X\|_X \text{ eşitsizliği } x \preceq t \cdot B_X \text{ bağıntısını gerektirir.}$$

X bir $\Omega-$uzayı ise

$$B_X : [0, +\infty) \to X$$
$$t \to B_X(t) = t \cdot B_X$$

biçiminde tanımlanan B_X dönüşümü şu şartları sağlar, [30]:

$$x \preceq B_X(\|x\|_X),$$

$$t \leq s \Rightarrow B_X(t) \preceq B_X(s),$$

$$B_X(t) = t \cdot B_X,$$

$$B_X(t+s) = B_X(t) + B_X(s).$$

Örnek 4.3.4. *[30] E bir reel normlu lineer uzay ise $\Omega(E)$ bir $\Omega-$uzayıdır.*

Uyarı 4.3.1. *Normlu lineer uzay olan bir quasilineer uzay bir $\Omega-$uzayı değildir. Çünkü bir X normlu lineer uzayı için*

$$\|x\| \leq \|y\| \text{ olması } x = y$$

olmasını gerektirmez. Burada X normlu lineer uzayını quasilineer uzay yapısına kavuşturan kısmi sıralama bağıntısının "$=$" bağıntısı olduğunu hatırlayınız.

Örnek 4.3.5. *[30] S bir kompakt topolojik uzay, X ise bir tam $\Omega-$uzayı olsun.*

$$C(S, X) = \{f : S \to X \mid f \text{ sürekli}\}$$

fonksiyonlar kümesini düşünelim. Bu küme

$$f_1 \lesssim f_2 \Leftrightarrow \forall s \in S \text{ için } f_1(s) \preceq f_2(s)$$

sıralama bağıntısı,

$$(f_1 + f_2)(s) = f_1(s) + f_2(s)$$

toplama işlemi ve

$$(\alpha \cdot f)(s) = \alpha \cdot f(s)$$

skalerle çarpma işlemine göre bir quasilineer uzaydır. Bu uzay üzerindeki norm

$$\|f\|_C = \max_{s \in S} \|f(s)\|_X$$

olup $C(S, X)$ *bir* $\Omega-$*uzayıdır.*

4.4 Quasilineer İç Çarpım Uzayları

Quasilineer uzay teorisinin gelişimi için en önemli katkılardan biri [25] numaralı kaynakta quasilineer iç çarpım uzayı ve Hilbert quasilineer uzay tanımı yapılarak sağlanmıştır. Bu kaynakta sadece reel quasilineer uzaylar için quasilineer iç çarpım uzayı tanımı verilmiştir. Çalışmaların ilerleyen bölümlerinde kompleks quasilineer uzaylar için de bir iç çarpım fonksiyonunun tanımlanması gereksinimi ortaya çıkmıştır. Böylece bu bölüme genel bir $\mathbb{K}$ cismi üzerindeki bir quasilineer uzay için iç çarpım tanımını vererek başlıyoruz.

Tanım 4.4.1. X, $\mathbb{K}$ *cismi üzerinde bir quasilineer uzay olmak üzere* X *uzayı bir* $\hat{X}$ *konsolidasyonuna sahip olsun. Her* $x, y, z \in X$ *ve* $\alpha \in \mathbb{K}$ *için aşağıdaki şartları sağlayan bir* $\langle \ , \ \rangle : X \times X \to \Omega(\mathbb{K})$ *fonksiyonuna* ***iç çarpım fonksiyonu****,* X *e bu iç çarpım ile birlikte* ***quasilineer iç çarpım uzayı*** *denir:*

$$x, y \in X_r \text{ ise } \langle x, y \rangle \in (\Omega(\mathbb{K}))_r \equiv \mathbb{K}, \tag{4.4.1}$$

$$\langle x + y, z \rangle \subseteq \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle, \tag{4.4.2}$$

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle, \tag{4.4.3}$$

$$\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \tag{4.4.4}$$

$$x \in X_r \text{ için } \langle x,x\rangle \geq 0 \text{ ve } \langle x,x\rangle = 0 \Leftrightarrow x=\theta, \tag{4.4.5}$$

$$\|\langle x,y\rangle\|_{\Omega} = \sup\left\{\|\langle a,b\rangle\|_{\Omega} : a \in F_x^{\widehat{X}}, b \in F_y^{\widehat{X}}\right\}, \tag{4.4.6}$$

$$x \preceq y \text{ ve } u \preceq v \text{ ise } \langle x,u\rangle \subseteq \langle y,v\rangle\,, \tag{4.4.7}$$

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için bir } x_\varepsilon \in X \text{ vardır öyle ki} \tag{4.4.8}$$

$$x \preceq y + x_\varepsilon \text{ ve } \langle x_\varepsilon, x_\varepsilon\rangle \subseteq S_\varepsilon(\theta) \text{ ise } x \preceq y \text{ dir.}$$

Burada $S_\varepsilon(\theta)$ kümesi $\Omega(\mathbb{K})$ da θ merkezli ve ε yarıçaplı bir küreyi göstermektedir.

Uyarı 4.4.1. *Eğer X bir lineer uzay ise (4.4.1)-(4.4.8) şartları bilinen iç çarpım uzayı şartlarına dönüşür. Böylece bir quasilineer iç çarpım uzayının, lineer iç çarpım uzaylarının bir genelleştirmesi olduğu söylenilebilir. Ayrıca bir X quasilineer iç çarpım uzayının regüler alt uzayı olan X_r, aynı iç çarpım ile bir (lineer) iç çarpım uzayıdır.*

Tanım 4.4.2. *[25] X quasilineer uzayı üzerinde $x \in X$ için*

$$\|x\| = \sqrt{\|\langle x,x\rangle\|_{\Omega}}$$

eşitliği norm tanımlar ve bu norma ***iç çarpım normu*** *denir.*

Tanım 4.4.3. *[25] Bir X quasilineer iç çarpım uzayı, iç çarpım normundan türetilen norm metriği (Hausdorff metriği) ne göre tam ise X e* ***Hilbert quasilineer uzay*** *denir.*

Örnek 4.4.1. *[35] X bir lineer Hilbert uzay olsun. $\Omega(X)$ quasilineer uzayı, $A, B \in \Omega(X)$ için*

$$\langle A,B\rangle_{\Omega} = \overline{\{\langle a,b\rangle_X : a \in A, b \in B\}}$$

şeklinde tanımlı iç çarpım ile bir Hilbert quasilineer uzaydır. Eğer $X = \mathbb{C}$ ise $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki iç çarpım tanımında kapanışa ihtiyaç yoktur. Çünkü

$\{\langle a,b\rangle_{\mathbb{C}} : a \in A, b \in B\}$ *kümesi* $\mathbb{C}$ *nin kapalı bir alt kümesidir. Yani* $\Omega(\mathbb{C})$ *üzerindeki iç çarpım*

$$\langle A,B\rangle_{\Omega} = \{\langle a,b\rangle_{\mathbb{C}} : a \in A, b \in B\}$$

şeklinde verilir.

Lemma 4.4.1. *[35](Shwarz Eşitsizliği)* X *quasilineer iç çarpım uzayı olmak üzere her* $x, y \in X$ *için*

$$\|\langle x,y\rangle\|_{\Omega} \leq \|x\|_X \, \|y\|_X$$

dir.

Önerme 4.4.1. *[35]* X *bir quasilineer iç çarpım uzayı olmak üzere* $x_n \to x$ *ve* $y_n \to y$ *ise* $\langle x_n, y_n\rangle \to \langle x,y\rangle$ *dir.*

4.5 Quasilineer Operatörler

Tanım 4.5.1. *[30]* $(X, \lesssim)$ *ve* $(Y, \preccurlyeq)$ *birer quasilineer uzay olsun.* $T : X \to Y$ *dönüşümüne aşağıdaki şartları sağlaması durumunda* ***quasilineer operatör*** *denir:*

$$T(x_1 + x_2) \preccurlyeq T(x_1) + T(x_2), \tag{4.5.1}$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{R}, \tag{4.5.2}$$

$$x_1 \lesssim x_2 \Rightarrow T(x_1) \preccurlyeq T(x_2). \tag{4.5.3}$$

X ve Y birer lineer uzay ise quasilineer operatör tanımı klasik lineer operatör tanımıyla çakışır ve (4.5.3) şartı kendiliğinden sağlanır.

Örnek 4.5.1.

$$Tx = x.[0,2]$$

ile verilen $T : \mathbb{R} \to \Omega_C(\mathbb{R})$ *dönüşümü quasilineer bir operatördür.*

Uyarı 4.5.1. *Örnek 4.5.1 de verilen T dönüşümünün görüntü kümesi olan*

$$R(T) = \{x.[0,2] : x \in \mathbb{R}\}$$

kümesi $\Omega_C(\mathbb{R})$ nin bir alt uzayı değildir. Gerçekten $[0,2] \in R(T)$ için $[0,2] - [0,2] = [-2,2] \notin R(T)$ dir. Buradan şu sonuç çıkarılabilir: Quasilineer operatörler quasilineer yapıyı korumayabilir. Quasilineer uzaylar arasında tanımlı olan ve quasilineer yapıyı koruyan operatörlere duyulan gereksinimden dolayı aşağıdaki tanımı vereceğiz.

Tanım 4.5.2. *$(X, \lesssim)$ ve $(Y, \preccurlyeq)$ bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde quasilineer uzaylar olsun. $T : X \to Y$ dönüşümüne aşağıdaki şartları sağlaması durumunda **lineer operatör** denir:*

$$T(x_1 + x_2) = T(x_1) + T(x_2),$$

$$T(\alpha x) = \alpha T(x), \quad \forall \alpha \in \mathbb{K},$$

$$x_1 \lesssim x_2 \Rightarrow T(x_1) \preccurlyeq T(x_2).$$

Tanımdan da anlaşılacağı gibi quasilineer uzaylar arasında tanımlı her lineer operatör, bir quasilineer operatördür. Ancak tersi doğru değildir.

Tanım 4.5.3. *[30] X ve Y birer normlu quasilineer uzay olsun. $T : X \to Y$ quasilineer dönüşümü verilsin. Eğer $\forall x \in X$ için*

$$\|T(x)\|_Y \leq k \cdot \|x\|_X$$

*olacak şekilde $\exists k > 0$ reel sayısı varsa T ye **sınırlı quasilineer operatör** denir.*

Lemma 4.5.1. *[30] X ve Y birer normlu quasilineer uzay olsun. $T : X \to Y$ quasilineer operatörü verilsin.*

$$T \text{ sınırlıdır} \Leftrightarrow T,\ \theta \in X \text{ noktasında süreklidir.}$$

Ayrıca T nin θ daki sürekliliği, T nin X üzerinde düzgün sürekliliğini gerektirir.

Şimdi sınırlı quasilineer operatörlerin uzayını tanıyalım, [30]:

$(X, \lesssim)$ ve $(Y, \preccurlyeq)$ birer normlu quasilineer uzay olmak üzere X den Y ye tanımlı tüm sınırlı quasilineer operatörlerin ailesi $\Lambda(X, Y)$ ile gösterilir. $\Lambda(X, Y)$ sınırlı quasilineer operatörler ailesi,

$$T_1 \preceq T_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } T_1(x) \preccurlyeq T_2(x)$$

şeklinde tanımlı kısmi sıralama bağıntısı ve

$$+ : \Lambda(X, Y) \times \Lambda(X, Y) \to \Lambda(X, Y)$$

$$(T_1 + T_2)(x) = T_1(x) + T_2(x)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \Lambda(X, Y) \to \Lambda(X, Y)$$

$$(\alpha \cdot T)(x) = \alpha T(x)$$

işlemleri ile bir quasilineer uzaydır. Ayrıca $\Lambda(X, Y)$

$$\|T\|_{\Lambda} = \sup_{\|x\|_X = 1} \|T(x)\|_Y$$

normuyla bir normlu quasilineer uzaydır, [30].

Teorem 4.5.1. *[30] X bir normlu quasilineer uzay, Y ise tam normlu quasilineer uzay olsun. Bu durumda $\Lambda(X, Y)$ bir tam normlu quasilineeer uzaydır.*

X bir normlu quasilineer uzay olsun. $X^{\otimes}$, $\Lambda(X, \Omega(\mathbb{R}))$ olarak ve $X_C^{\otimes}$ ise $\Lambda(X, \Omega_C(\mathbb{R}))$ olarak tanımlanır.

Tanım 4.5.4. *[30] X den $\Omega_C(\mathbb{R})$ ye tanımlı bir quasilineer operatöre **quasilineer fonksiyonel** denir.*

Teorem 4.5.2. *X_1 ve X_2 birer tam quasilineer uzay, Y ise X_1 in yoğun bir alt uzayı ve $T : Y \to X_2$ dönüşümü quasilineer uzaylar arasında tanımlı sınırlı lineer bir operatör olsun. Bu durumda her $x \in Y$ için $\tilde{T}x = Tx$ olacak şekilde bir tek $\tilde{T} : X_1 \to X_2$ sınırlı lineer operatörü vardır ve $\|T\| = \left\|\tilde{T}\right\|$ dır.*

Bu teoremin ispatı klasik fonksiyonel analizdeki ispatına benzer şekilde yapılır.

5. İNTERVAL SİNYALLER VE KOMPLEKS İNTERVALLERİN QUASİLİNEER UZAYI

5.1 İnterval Sinyaller

Sinyal işlemede doğadan gelen veya yapay olarak üretilen bir sinyalin, zamanın belli bir anındaki bileşeni bazı durumlarda tam olarak bilinemeyebilinir. Bu şekildeki sinyallerin bir sisteme uygulandığında beklenen değişimlerin özellikleri hakkındaki bilgiyi elde etmek oldukça zordur. İşte böylesi durumlarda gelen sinyalin işlenebilmesi için bu bölümde tanıtacağımız "interval sinyal" kavramı, sistemin cevabını belli bir aralığın içine alarak en güvenilir bilgiyi elde etmemize imkan verir. İnterval sinyaller için gerekli analizlerin yapıldığı ve bu sinyallerin bir sisteme uygulandığında elde edilen verilerin incelendiği bu alanı *interval-değerli sinyal işleme* olarak adlandırıyoruz. Sinyal işleme alanında intervalleri kullanma fikri daha önce datalar arasındaki bazı ilişkileri belirlemek amacıyla kullanılmıştır [28, 29]. Ancak interval-değerli sinyal işlemenin temelleri, ilk olarak bu tez çalışmasıyla atılmıştır.

Bildiğimiz gibi klasik bir sinyal, $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesinden $\mathbb{C}$ ye giden bir fonksiyon olarak tanımlanır. Bu açıdan bakıldığında bir interval-değerli sinyalin tanımlanabilmesi için sadece intervallerin uzayı olan $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ yetersiz kalmaktadır. İşte bu ihtiyaç bize, intervallerin uzayını da kapsayan ve içinde *kompleks interval*lerin de bulunduğu bir uzayı tanımlamamız gerektiğini göstermiştir. Herbir elemanı bir kompleks interval olan bu uzaya *kompleks intervallerin uzayı* diyoruz ve $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ ile gösteriyoruz. Bu sayede bir *interval sinyali*, $\mathbb{R}$ nin bir alt kümesiden $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ ye giden bir fonksiyon olarak tanımlıyoruz. *Eğer* bu alt küme $\mathbb{Z}$ olursa bu sinyale *ayrık-zamanlı interval sinyal,* $\mathbb{R}$ olursa bu sinyale *sürekli-zamanlı interval sinyal* diyeceğiz.

İnterval sinyallerin analizinin yapılabilmesi için matematiksel temellere dayandırılması gerekir. Çalışmalarımız sonucunda $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ kompleks intervalerin uzayının bir lineer uzay yapısına sahip olmadığını gördük. Bu bölümde $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ nin, bir önceki bölümde tanıtılan ve lineer uzayların bir genelleştirmesi olan quasilineer uzay yapısına sahip olduğunu göstereceğiz. Quasilineer fonksiyonel analizin en önemli parçası olan Hilbert quasilineer uzay kavramı [35], interval sinyallerin incelenmesi için en etkili araç olmuştur. Bu kısımda quasilineer iç çarpım tanımından yararlanarak $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ üzerinde bir iç çarpım tanımlayacağız ve bu uzayın bir Hilbert quasilineer uzay olduğunu göstereceğiz. Ayrıca [33] numaralı çalışma, bu bölümde yapılan çalışmalar sonucu oluşturulmuştur.

5.2 $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ Quasilineer Uzayı

$\left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right]$ ve $\left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right]$ birer interval olmak üzere, bir *kompleks interval*

$$x = \left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right] + i\left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right] \tag{5.2.1}$$

şeklinde tanımlanır, burada $i = \sqrt{-1}$ kompleks birimdir. Daha açık olarak bir kompleks interval

$$x = \left\{a + ib : a \in \left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right], b \in \left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right]\right\} \subset \mathbb{C}$$

alt kümesidir. $\left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right]$ ve $\left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right]$ intervallerine ise sırasıyla, x kompleks intervalinin *reel* ve *sanal kısımları* denir. Örneğin,

$$x = [-3, 2] + i\,[1, 5]$$

bir kompleks intervaldir. Bu intervalin reel kısmı $[-3, 2]$ ve sanal kısmı $[1, 5]$ dir. Tanımdan da anlaşılacağı gibi her interval, sanal kısmı $\left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right] = \{0\}$ olan bir kompleks intervaldir. Böylece $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ intervallerin uzayı, $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ kompleks intervallerin uzayının bir alt kümesidir. Ayrıca (5.2.1) şeklindeki bir x kompleks intervali için $\underline{x_r} = \overline{x_r} = r$ ve $\underline{x_s} = \overline{x_s} = s$ olabilir. Bu durumda $x = [r, r] + i\,[s, s]$ intervaline *dejenere kompleks interval* denir ve $x = \{r\} + i\{s\}$ şeklinde yazılır. O halde $\mathbb{C}$, $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ nin bir alt kümesidir.

Teorem 5.2.1. $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ *kompleks intervallerin kümesi,*

$$\begin{aligned} x + y &= \left(\left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right] + i\left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right]\right) + \left(\left[\underline{y_r}, \overline{y_r}\right] + i\left[\underline{y_s}, \overline{y_s}\right]\right) \\ &= \left[\underline{x_r} + \underline{y_r}, \overline{x_r} + \overline{y_r}\right] + i\left[\underline{x_s} + \underline{y_s}, \overline{x_s} + \overline{y_s}\right] \\ &= \left\{a + ib : a \in \left[\underline{x_r} + \underline{y_r}, \overline{x_r} + \overline{y_r}\right],\ b \in \left[\underline{x_s} + \underline{y_s}, \overline{x_s} + \overline{y_s}\right]\right\} \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

ile tanımlı cebirsel toplama işlemi, $\lambda \in \mathbb{C}$ *için*

$$\begin{aligned} \lambda \cdot x &= \lambda \cdot \left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right] + i\left(\lambda \cdot \left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right]\right) \\ &= \left\{\lambda a + i\lambda b : a \in \left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right],\ b \in \left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right]\right\} \end{aligned} \tag{5.2.3}$$

ile tanımlı skalerle çarpma işlemi ve

$$x \preceq y \Leftrightarrow \left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right] \subseteq \left[\underline{y_r}, \overline{y_r}\right] \ \textit{ve}\ \left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right] \subseteq \left[\underline{y_s}, \overline{y_s}\right]$$

şeklindeki kısmi sıralama bağıntısı ile $\mathbb{C}$ *cismi üzerinde bir quasilineer uzaydır.*

İspat. Öncelikle "$\subseteq$ " içerme bağıntısının $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ quasilineer uzayı üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olduğu gözönüne alınırsa her $x, y, z \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ için

$$x \preceq x,$$

$$x \preceq y \text{ ve } y \preceq x \text{ ise } x = y$$

ve

$$x \preceq y \text{ ve } y \preceq z \text{ ise } x \preceq z$$

özellikleri sağlanır. Ayrıca

$$\begin{aligned} x + y &= \left(\left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right] + i\left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right]\right) + \left(\left[\underline{y_r}, \overline{y_r}\right] + i\left[\underline{y_s}, \overline{y_s}\right]\right) \\ &= \left[\underline{x_r} + \underline{y_r}, \overline{x_r} + \overline{y_r}\right] + i\left[\underline{x_s} + \underline{y_s}, \overline{x_s} + \overline{y_s}\right] \\ &= \left[\underline{y_r} + \underline{x_r}, \overline{y_r} + \overline{x_r}\right] + i\left[\underline{y_s} + \underline{x_s}, \overline{y_s} + \overline{x_s}\right] \\ &= \left(\left[\underline{y_r}, \overline{y_r}\right] + i\left[\underline{y_s}, \overline{y_s}\right]\right) + \left(\left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right] + i\left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right]\right) \\ &= y + x \end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
(x+y)+z &= \{(\left[\underline{x_r},\overline{x_r}\right]+i\left[\underline{x_s},\overline{x_s}\right])+(\left[\underline{y_r},\overline{y_r}\right]+i\left[\underline{y_s},\overline{y_s}\right])\}+(\left[\underline{z_r},\overline{z_r}\right]+i\left[\underline{z_s},\overline{z_s}\right]) \\
&= (\left[\underline{x_r}+\underline{y_r},\overline{x_r}+\overline{y_r}\right]+i\left[\underline{x_s}+\underline{y_s},\overline{x_s}+\overline{y_s}\right])+(\left[\underline{z_r},\overline{z_r}\right]+i\left[\underline{z_s},\overline{z_s}\right]) \\
&= \left[\underline{x_r}+\underline{y_r}+\underline{z_r},\overline{x_r}+\overline{y_r}+\overline{z_r}\right]+i\left[\underline{x_s}+\underline{y_s}+\underline{z_s},\overline{x_s}+\overline{y_s}+\overline{z_s}\right] \\
&= (\left[\underline{x_r},\overline{x_r}\right]+i\left[\underline{x_s},\overline{x_s}\right])+\{(\left[\underline{y_r},\overline{y_r}\right]+i\left[\underline{y_s},\overline{y_s}\right])+(\left[\underline{z_r},\overline{z_r}\right]+i\left[\underline{z_s},\overline{z_s}\right])\} \\
&= x+(y+z)
\end{aligned}
$$

dir. $[0,0]$ dejenere intervali $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ quasilineer uzayının “$+$ ”işlemine göre birim elemanı olmak üzere,

$$
\begin{aligned}
x+\theta &= (\left[\underline{x_r},\overline{x_r}\right]+i\left[\underline{x_s},\overline{x_s}\right])+([0,0]+i[0,0]) \\
&= (\left[\underline{x_r},\overline{x_r}\right]+[0,0])+i(\left[\underline{x_s},\overline{x_s}\right]+[0,0]) \\
&= \left[\underline{x_r},\overline{x_r}\right]+i\left[\underline{x_s},\overline{x_s}\right] \\
&= x
\end{aligned}
$$

olup $\theta=[0,0]+i[0,0]\in\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ dejenere kompleks intervali $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ nin birim elemanıdır. Öte yandan $\lambda,\mu\in\mathbb{C}$ için

$$\lambda\cdot(\mu\cdot x)=(\lambda\mu)\cdot x,$$

$$\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y,$$

$$1\cdot x=x$$

ve

$$0\cdot x=[0,0]+i[0,0]=\theta$$

olduğu kolayca görülebilir. Ayrıca $(\lambda+\mu)\cdot\left[\underline{x_r},\overline{x_r}\right]\subseteq\lambda\cdot\left[\underline{x_r},\overline{x_r}\right]+\mu\cdot\left[\underline{x_r},\overline{x_r}\right]$ ve $(\lambda+\mu)\cdot\left[\underline{x_s},\overline{x_s}\right]\subseteq\lambda\cdot\left[\underline{x_s},\overline{x_s}\right]+\mu\cdot\left[\underline{x_s},\overline{x_s}\right]$ olduğundan

$$
\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\cdot x &= (\lambda+\mu)\cdot\left[\underline{x_r},\overline{x_r}\right]+i\left((\lambda+\mu)\cdot\left[\underline{x_s},\overline{x_s}\right]\right) \\
&\preceq \lambda\cdot x+\mu\cdot x
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi $x \preceq y$ ve $u \preceq v$ olduğunu kabul edelim. Bağıntının tanımından $\left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right] \subseteq \left[\underline{y_r}, \overline{y_r}\right]$, $\left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right] \subseteq \left[\underline{y_s}, \overline{y_s}\right]$ ve $\left[\underline{u_r}, \overline{u_r}\right] \subseteq \left[\underline{v_r}, \overline{v_r}\right]$, $\left[\underline{u_s}, \overline{u_s}\right] \subseteq \left[\underline{v_s}, \overline{v_s}\right]$ dir. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ bir quasilineer uzay olduğundan $\left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right] + \left[\underline{u_r}, \overline{u_r}\right] \subseteq \left[\underline{y_r}, \overline{y_r}\right] + \left[\underline{v_r}, \overline{v_r}\right]$ ve $\left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right] + \left[\underline{u_s}, \overline{u_s}\right] \subseteq \left[\underline{y_s}, \overline{y_s}\right] + \left[\underline{v_s}, \overline{v_s}\right]$ yazılabilir. Böylece

$$x + u \preceq y + v$$

olur. Eğer $x \preceq y$ ise

$$\left\{\lambda a + i\lambda b : a \in \left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right],\ b \in \left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right]\right\} \subseteq \left\{\lambda c + i\lambda d : c \in \left[\underline{y_r}, \overline{y_r}\right],\ d \in \left[\underline{y_s}, \overline{y_s}\right]\right\}$$

olduğundan

$$\lambda \cdot x \preceq \lambda \cdot y$$

sonucuna ulaşılır. (4.2.1)-(4.2.13) şartları sağlandığından $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ kompleks intervallerin kümesi $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir quasilineer uzaydır. □

$\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ quasilineer uzayının regüler ve singüler alt uzayları sırasıyla

$$\left(\mathbb{I}_{\mathbb{C}}\right)_r = \{\{a + ib\} : a, b \in \mathbb{R}\}\}$$

ve

$$\left(\mathbb{I}_{\mathbb{C}}\right)_s = \{\{0\}\} \cup \{\left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right] + i\left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right] : \underline{x_r} < \overline{x_r} \text{ ve } \underline{x_s} < \overline{x_s}\}$$

dir. Ayrıca $\left(\mathbb{I}_{\mathbb{C}}\right)_r \equiv \mathbb{C}$ olduğundan $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ nin regüler alt uzayı $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi olarak görülebilir.

Dikkat edilirse $\mathbb{I}_{\mathbb{C}} \subset \Omega(\mathbb{C})$ dir. Gerçekten $x = \left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right] + i\left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right] \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ ise $i = \sqrt{-1}$ kompleks birim olmak üzere

$$x = \{a + ib : a \in \left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right], b \in \left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right]\}$$

şeklinde yazılabilir. Teorem 2.1.11 den $\{a + ib : a \in \left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right], b \in \left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right]\}$ kümesi $\mathbb{C}$ nin kompakt bir alt kümesi olduğundan $x \in \Omega(\mathbb{C})$ olup $\mathbb{I}_{\mathbb{C}} \subset \Omega(\mathbb{C})$ dir. Ancak $\mathbb{I}_{\mathbb{C}} \neq \Omega(\mathbb{C})$ dir; sözgelimi $A = \{a + ib : a^2 + b^2 \leq 1\}$ kümesi $\Omega(\mathbb{C})$ nin bir elemanı iken bu küme $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ uzayının bir elemanı değildir.

Ayrıca $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ nin (5.2.2) ve (5.2.3) de verilen işlemlerle $\Omega(\mathbb{C})$ nin bir alt uzayı olduğu ve $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ nin de $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ nin bir alt uzayı olduğu Teorem 4.2.1 yardımıyla kolayca gösterilebilir.

Uyarı 5.2.1. $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ *kompleks intervallerin kümesi,* $\Omega(\mathbb{C})$ *nin bir alt uzayı olduğundan bu tez çalışması görüntü kümesi* $\Omega(\mathbb{C})$ *olan fonksiyonlar ve bu fonksiyonlar üzerindeki bazı uygulamalar üzerine oluşturulmuştur. Bu sayede sadece interval değerli fonksiyonlarla uğraşmak yerine daha geniş bir perspektiften bakmamızı sağlayan kompakt küme değerli fonksiyonlarla çalışılmıştır. Bu yöntem interval değerli fonksiyonlar için elde edilecek sonuçların daha da geneline ulaşabilmemize imkan vermiştir.*

Şimdi $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ quasilineer uzayının konsolide bir quasilineer uzay olduğunu göstereceğiz. Bu sayede $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ üzerinde bir iç çarpım tanımlayacağız ve daha sonra bu iç çarpımdan gelen normu belirleyeceğiz.

Lemma 5.2.1. $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ *quasilineer uzayı konsolide bir uzaydır.*

İspat. Her $x = \left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right] + i\left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right] \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ için

$$\boldsymbol{F}_x = \{y = \{a\} + i\{b\} \in (\mathbb{I}_{\mathbb{C}})_r : \{a\} \subseteq \left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right], \{b\} \subseteq \left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right]\}$$

olmak üzere $x = \sup_{"\preceq"} \boldsymbol{F}_x$ olduğunu göstermeliyiz. Öncelikle $\boldsymbol{F}_x$ kümesinin üstten sınırlı olduğu açıktır. Zira x, $\boldsymbol{F}_x$ kümesi için bir üst sınırdır. Şimdi bir $z = \left[\underline{z_r}, \overline{z_r}\right] + i\left[\underline{z_s}, \overline{z_s}\right] \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ elemanının $\boldsymbol{F}_x$ kümesi için bir başka üst sınır olduğunu kabul edelim. $x \preceq z$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Kabul edelim ki $x \npreceq z$ olsun. Bu durumda ya $\left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right] \nsubseteq \left[\underline{z_r}, \overline{z_r}\right]$ ya da $\left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right] \nsubseteq \left[\underline{z_s}, \overline{z_s}\right]$ dır. Eğer $\left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right] \nsubseteq \left[\underline{z_r}, \overline{z_r}\right]$ ise bir $a \in \left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right]$ elemanı vardır öyle ki $a \notin \left[\underline{z_r}, \overline{z_r}\right]$ dir. Ayrıca $\left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right] \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ve $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ konsolide olduğundan $\{b\} \subseteq \left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right]$ olacak şekilde bir $b \in \left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right]$ elemanı vardır. Şimdi $y = \{a\} + i\{b\} \in (\mathbb{I}_{\mathbb{C}})_r$ elemanını göz önüne alalım. $y \in \boldsymbol{F}_x$ olduğu açıktır. Ancak $a \notin \left[\underline{z_r}, \overline{z_r}\right]$ olduğundan $\{a\} \nsubseteq \left[\underline{z_r}, \overline{z_r}\right]$ olup

$y \npreceq z$ dir. Bu ise z nin $\boldsymbol{F}_x$ kümesi için bir üst sınır olması ile çelişir. Ayrıca $[\underline{x_s}, \overline{x_s}] \nsubseteq [\underline{z_s}, \overline{z_s}]$ olması durumunda da ispat benzer şekilde yapılır. O halde $x \preceq z$ dir. $z \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ keyfi olduğundan

$$x = \sup_{"\preceq"}\{y \in (\mathbb{I}_{\mathbb{C}})_r : y \preceq x\}$$

olup $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ konsolide uzaydır. □

Notasyon 5.2.1. *Bölüm boyunca pratiklik açısından* $x = [\underline{x_r}, \overline{x_r}] + i\,[\underline{x_s}, \overline{x_s}]$, $y = [\underline{y_r}, \overline{y_r}] + i\,[\underline{y_s}, \overline{y_s}]$ *ve* $z = [\underline{z_r}, \overline{z_r}] + i\,[\underline{z_s}, \overline{z_s}]$ *elemanları için* $[\underline{x_r}, \overline{x_r}] = A$, $[\underline{x_s}, \overline{x_s}] = B$, $[\underline{y_r}, \overline{y_r}] = C$, $[\underline{y_s}, \overline{y_s}] = D$, $[\underline{z_r}, \overline{z_r}] = E$ *ve* $[\underline{z_s}, \overline{z_s}] = F$ *olarak alacağız.*

Teorem 5.2.2. $x, y \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ *için*

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \left\langle [\underline{x_r}, \overline{x_r}] + i\,[\underline{x_s}, \overline{x_s}]\,, [\underline{y_r}, \overline{y_r}] + i\,[\underline{y_s}, \overline{y_s}]\right\rangle \\ &= [\underline{x_r}, \overline{x_r}]\,[\underline{y_r}, \overline{y_r}] + [\underline{x_s}, \overline{x_s}]\,[\underline{y_s}, \overline{y_s}] + i([\underline{x_s}, \overline{x_s}]\,[\underline{y_r}, \overline{y_r}] - [\underline{x_r}, \overline{x_r}]\,[\underline{y_s}, \overline{y_s}])\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

eşitliği $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ *üzerinde bir iç çarpım tanımlar ve* $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ *bu iç çarpım ile quasilineer iç çarpım uzayıdır.*

İspat. Öncelikle (5.2.4) eşitliğinin iyi tanımlı olduğunu gösterelim. İki intervalin toplamı, farkı ve çarpımı işlemleri kapalı olduğundan $[\underline{x_r}, \overline{x_r}]\,[\underline{y_r}, \overline{y_r}] + [\underline{x_s}, \overline{x_s}]\,[\underline{y_s}, \overline{y_s}] \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ve $[\underline{x_s}, \overline{x_s}]\,[\underline{y_r}, \overline{y_r}] - [\underline{x_r}, \overline{x_r}]\,[\underline{y_s}, \overline{y_s}] \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ dir. Böylece $\langle x, y\rangle \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ dir. Ayrıca $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$, $\Omega(\mathbb{C})$ nin bir alt uzayı olduğundan $\langle x, y\rangle \in \Omega(\mathbb{C})$ olup (5.2.4) ile verilen eşitlik iyi tanımlıdır. Şimdi (4.4.1)-(4.4.8) ile verilen iç çarpım aksiyomlarının sağlandığını gösterelim: $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ nin $x = \{a\} + i\{b\}$ ve $y = \{c\} + i\{d\}$ regüler elemanları için

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \langle \{a\} + i\{b\}, \{c\} + i\{d\}\rangle \\ &= \{a\}\{c\} + \{b\}\{d\} + i(\{b\}\{c\} - \{a\}\{d\})\end{aligned}$$

dir. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ üzerindeki iç çarpımın ilk şartından $\{a\}\{c\}, \{b\}\{d\}, \{b\}\{c\}, \{a\}\{d\} \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}} \equiv \mathbb{R}$ yazabiliriz. O halde $\langle x, y\rangle \in \Omega(\mathbb{C})_r \equiv \mathbb{C}$ dir.

Her $x, y, z \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ için

$$\begin{aligned}
\langle x+y, z\rangle &= \langle (A+iB)+(C+iD), E+iF\rangle \\
&= \langle A+C+i(B+D), E+iF\rangle \\
&= (A+C)E+(B+D)F+i[(B+D)E-(A+C)F]
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca $A, B, C, D, E, F \in \mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ ve $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ bir quasilineer iç çarpım uzayı olduğundan

$$\begin{aligned}
\langle x+y, z\rangle &= (A+C)E+(B+D)F+i[(B+D)E-(A+C)F] \\
&\subseteq AE+CE+BF+DF+i(BE+DE-AF-CF) \\
&= [(AE+BF)+i(BE-AF)]+[(CE+DF)+i(DE-CF)] \\
&= \langle x, z\rangle + \langle y, z\rangle
\end{aligned}$$

olur.

Her $x, y \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ ve $\alpha \in \mathbb{C}$ için

$$\begin{aligned}
\langle \alpha x, y\rangle &= \langle \alpha(A+iB), C+iD\rangle \\
&= (\alpha A)C+(\alpha B)D+i[(\alpha B)C-(\alpha A)D] \\
&= \alpha(AC)+\alpha(BD)+i[\alpha(BC)-\alpha(AD)] \\
&= \alpha[AC+BD+i(BC-AD)] \\
&= \alpha\langle x, y\rangle
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle &= \langle A+iB, C+iD\rangle \\
&= AC+BD+i(CB-AD) \\
&= CA+DB-i(DA-CB) \\
&= \overline{\langle y, x\rangle}
\end{aligned}$$

dir.

Her $x = \{a\} + i\{b\} \in (\mathbb{I}_{\mathbb{C}})_r$ için

$$\begin{aligned}\langle x, x\rangle &= \langle \{a\} + i\{b\}, \{a\} + i\{b\}\rangle \\ &= \{a\}\{a\} + \{b\}\{b\} + i(\{b\}\{a\} - \{a\}\{b\}) \\ &= \{a^2 + b^2\}\end{aligned}$$

olduğundan $\langle x, x\rangle \geq 0$ dır. Ayrıca her $x \in \mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ için

$$\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$$

olduğu kolayca görülebilir.

$\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ konsolide quasilineer uzay olduğundan $\widehat{\mathbb{I}_{\mathbb{C}}} = \mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ olup

$$\begin{aligned}\|\langle x, y\rangle\| &= \sup\{|t| : t \in \langle x, y\rangle\} \\ &= \sup\{|t| : t \in AC + BD + i(BC - AD)\} \\ &= \sup\{|t_1 t_3 + t_2 t_4 + i(t_2 t_3 - t_1 t_4)| : t_1 \in A, t_2 \in B, t_3 \in C, t_4 \in D\} \\ &= \sup\{|(t_1 + it_2)(t_3 - it_4)| : t_1 \in A, t_2 \in B, t_3 \in C, t_4 \in D\} \\ &= \sup\{\|\langle \{t_1\} + i\{t_2\}, \{t_3\} + i\{t_4\}\rangle\| : t_1 \in A, t_2 \in B, t_3 \in C, t_4 \in D\} \\ &= \sup\{\|\langle a, b\rangle\| : a = \{t_1\} + i\{t_2\} \in F_x^{\mathbb{I}_{\mathbb{C}}}, b = \{t_3\} + i\{t_4\} \in F_y^{\mathbb{I}_{\mathbb{C}}}\}\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ nin $x = \left[\underline{x_r}, \overline{x_r}\right] + i\left[\underline{x_s}, \overline{x_s}\right] = A + iB$, $y = \left[\underline{y_r}, \overline{y_r}\right] + i\left[\underline{y_s}, \overline{y_s}\right] = C + iD$, $u = \left[\underline{u_r}, \overline{u_r}\right] + i\left[\underline{u_s}, \overline{u_s}\right] = E + iF$ ve $v = \left[\underline{v_r}, \overline{v_r}\right] + i\left[\underline{v_s}, \overline{v_s}\right] = G + iH$ elemanları için $x \lesssim y$ ve $u \lesssim v$ olduğunu kabul edelim. Kısmi sıralama bağıntısının tanımından

$$x \lesssim y \Leftrightarrow A \subseteq C, B \subseteq D$$

ve

$$u \lesssim v \Leftrightarrow E \subseteq G, F \subseteq H$$

yazılır. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ üzerindeki iç çarpımın yedinci aksiyomundan $AE \subseteq CG$, $BF \subseteq DH$, $BE \subseteq DG$ ve $AF \subseteq CH$ dir. Böylece

$$\begin{aligned}\langle x,u\rangle &= \langle A+iB, E+iF\rangle \\ &= AE+BF+i(BE-AF) \\ &\subseteq CG+DH+i(DG-CH) \\ &= \langle y,v\rangle\end{aligned}$$

olur.

$S_{\varepsilon}(\theta)$, $\mathbb{C}$ nin θ merkezli ve ε yarıçaplı kapalı yuvarı olmak üzere her $\varepsilon>0$ için $x \lesssim y+x_{\varepsilon}$ and $\langle x^{\varepsilon},x^{\varepsilon}\rangle \subseteq S_{\varepsilon}(\theta)$ olacak şekilde bir

$$x^{\varepsilon}=\left[\underline{x_r^{\varepsilon}},\overline{x_r^{\varepsilon}}\right]+i\left[\underline{x_s^{\varepsilon}},\overline{x_s^{\varepsilon}}\right]=A+iB\in\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$$

elemanı mevcut olsun. $x \lesssim y$ olduğunu göstereceğiz. $\langle x^{\varepsilon},x^{\varepsilon}\rangle \subseteq S_{\varepsilon}(\theta)$ olduğundan

$$\|\langle x^{\varepsilon},x^{\varepsilon}\rangle\|=\|\langle A+iB,A+iB\rangle\|=\|AA+BB+i(BA-AB)\|\leq\varepsilon$$

yazılır. $\|A\|^2\leq\varepsilon$ ve $\|B\|^2\leq\varepsilon$ olduğundan

$$\|x^{\varepsilon}\|=\|A+iB\|\leq\|A\|^2+\|B\|^2\leq 2\varepsilon$$

elde edilir. Böylece normun son şartından $x \lesssim y$ olduğu sonucuna ulaşılır. □

Uyarı 5.2.2. *$\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ üzerinde (5.2.4) eşitliğiyle tanımlanan iç çarpım, $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ nin regüler alt uzayı olan $\mathbb{C}$ üzerindeki bilinen iç çarpım ile çakışır.*

$\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ üzerindeki iç çarpımdan gelen norm

$$\|x\|=\|\langle x,x\rangle\|^{1/2}=(\sup\{|a+ib|:a\in\mathcal{A},b\in\mathcal{B})^{1/2} \tag{5.2.5}$$

şeklindedir. Burada $\mathcal{A}=\left[\underline{x_r},\overline{x_r}\right]\left[\underline{x_r},\overline{x_r}\right]+\left[\underline{x_s},\overline{x_s}\right]\left[\underline{x_s},\overline{x_s}\right]$ ve $\mathcal{B}=\left[\underline{x_s},\overline{x_s}\right]\left[\underline{x_r},\overline{x_r}\right]-\left[\underline{x_r},\overline{x_r}\right]\left[\underline{x_s},\overline{x_s}\right]$ dir.

Şimdi $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ nin (5.2.5) eşitliğiyle verilen klasik normuna göre Banach uzayı olduğunu göstereceğiz. Böylece $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ nin Hilbert quasilineer uzay olduğunu göstermiş olacağız.

Lemma 5.2.2. *Her* $x=[\underline{x},\overline{x}]$, $y=\left[\underline{y},\overline{y}\right]\in\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ *ve* $\alpha\in\mathbb{K}$ *için*

$$h(\alpha x,\alpha y)=|\alpha|\,h(x,y) \tag{5.2.6}$$

dir.

İspat. Öncelikle

$$x\preceq y+a_1^{(\varepsilon)},\ y\preceq x+a_2^{(\varepsilon)} \text{ and } \left\|a_i^{(\varepsilon)}\right\|\leq\varepsilon,\ i=1,2 \tag{5.2.7}$$

şartını sağlayan $\left(a_1^{(\varepsilon)},a_2^{(\varepsilon)}\right)$ ikililerinin kümesini ve bunların normları olan $\left(\left\|a_1^{(\varepsilon)}\right\|,\left\|a_2^{(\varepsilon)}\right\|\right)$ ikililerinin kümesini düşünelim. Bu durumda

$$\begin{aligned}&\inf_{\varepsilon>0}\left\{\max\left\{\left\|a_1^{(\varepsilon)}\right\|,\left\|a_2^{(\varepsilon)}\right\|\right\}\right\}\\&=h(x,y)\\&=\inf\left\{\varepsilon\geq0: x\preceq y+a_1^{(\varepsilon)},\ y\preceq x+a_2^{(\varepsilon)} \text{ ve } \left\|a_i^{(\varepsilon)}\right\|\leq\varepsilon,\ i=1,2\right\}\end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi (5.2.7) de quasilineer uzay olma aksiyomları olan (4.2.8) ve (4.2.13) kullanarak elde edilen

$$\alpha x\preceq\alpha y+\alpha a_1^{(\varepsilon)},\ \alpha y\preceq\alpha x+\alpha a_2^{(\varepsilon)} \tag{5.2.8}$$

önermesindeki $\alpha a_1^{(\varepsilon)}$ ve $\alpha a_2^{(\varepsilon)}$ elemanlarından oluşan $\left(\alpha a_1^{(\varepsilon)},\alpha a_2^{(\varepsilon)}\right)$ ikililerinin kümesini düşünelim. Ayrıca $\alpha\neq0$ olmak üzere

$$\alpha x\preceq\alpha y+\alpha b_1^{(\varepsilon)},\ \alpha y\preceq\alpha x+\alpha b_2^{(\varepsilon)} \tag{5.2.9}$$

şartını sağlayan $b_1^{(\varepsilon)}$ ve $b_2^{(\varepsilon)}$ elemanlarının normlarından oluşan $\left\{\left(\left\|b_1^{(\varepsilon)}\right\|,\left\|b_2^{(\varepsilon)}\right\|\right)\right\}_{\varepsilon}$ kümesini düşünelim.

(5.2.9) da quasilineer uzay olma aksiyomlarından (4.2.8) ve (4.2.13) kullanarak

$$x\preceq y+\frac{b_1^{(\varepsilon)}}{\alpha},\ y\preceq x+\frac{b_2^{(\varepsilon)}}{\alpha}$$

elde ederiz. Buna göre $\left(\frac{b_1^{(\varepsilon)}}{\alpha},\frac{b_2^{(\varepsilon)}}{\alpha}\right)$ ikilisi, $\left(a_1^{(\varepsilon)},a_2^{(\varepsilon)}\right)$ ikililerinin oluşturduğu kümenin bir elemanıdır. Bu durumda bir $\left(a_{1_0}^{(\varepsilon)},a_{2_0}^{(\varepsilon)}\right)\in\left\{\left(a_1^{(\varepsilon)},a_2^{(\varepsilon)}\right)\right\}_{\varepsilon}$ elemanı vardır öyle ki $\left(\frac{b_1^{(\varepsilon)}}{\alpha}, \frac{b_2^{(\varepsilon)}}{\alpha}\right) = \left(a_{1_0}^{(\varepsilon)}, a_{2_0}^{(\varepsilon)}\right)$ dir. Buradan $\frac{b_1^{(\varepsilon)}}{\alpha} = a_{1_0}^{(\varepsilon)}$ ve $\frac{b_2^{(\varepsilon)}}{\alpha} = a_{2_0}^{(\varepsilon)}$ olup $b_1^{(\varepsilon)} = \alpha a_{1_0}^{(\varepsilon)}$ ve $b_2^{(\varepsilon)} = \alpha a_{2_0}^{(\varepsilon)}$ dir. Böylece

$$\left\{\left(b_1^{(\varepsilon)}, b_2^{(\varepsilon)}\right)\right\} \subseteq \left\{\left(\alpha a_1^{(\varepsilon)}, \alpha a_2^{(\varepsilon)}\right)\right\} \tag{5.2.10}$$

yazabiliriz.

(5.2.8) ve (5.2.9) dan

$$\left\{\left(\alpha a_1^{(\varepsilon)}, \alpha a_2^{(\varepsilon)}\right)\right\} \subseteq \left\{\left(b_1^{(\varepsilon)}, b_2^{(\varepsilon)}\right)\right\} \tag{5.2.11}$$

olduğu açıktır. Böylece (5.2.10) ve (5.2.11) den (5.2.8) ve (5.2.9) şartlarını sağlayan elemanların oluşturduğu $\left\{\left(\alpha a_1^{(\varepsilon)}, \alpha a_2^{(\varepsilon)}\right)\right\}$ ve $\left\{\left(b_1^{(\varepsilon)}, b_2^{(\varepsilon)}\right)\right\}$ kümelerinin aynı kümeler olduğunu söyleriz.

Ayrıca

$$\left(\left\|\alpha a_1^{(\varepsilon)}\right\|, \left\|\alpha a_2^{(\varepsilon)}\right\|\right) = \left(|\alpha| \left\|a_1^{(\varepsilon)}\right\|, |\alpha| \left\|a_2^{(\varepsilon)}\right\|\right) = |\alpha| \left(\left\|a_1^{(\varepsilon)}\right\|, \left\|a_2^{(\varepsilon)}\right\|\right)$$

olduğundan

$$\max\left\{|\alpha| \left\|a_1^{(\varepsilon)}\right\|, |\alpha| \left\|a_2^{(\varepsilon)}\right\|\right\} = |\alpha| \max\left\{\left\|a_1^{(\varepsilon)}\right\|, \left\|a_2^{(\varepsilon)}\right\|\right\}$$

ve

$$\inf_{\varepsilon>0}\left\{|\alpha| \max\left\{\left\|a_1^{(\varepsilon)}\right\|, \left\|a_2^{(\varepsilon)}\right\|\right\}\right\} = |\alpha| \inf_{\varepsilon>0}\left\{\max\left\{\left\|a_1^{(\varepsilon)}\right\|, \left\|a_2^{(\varepsilon)}\right\|\right\}\right\}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} h(\alpha x, \alpha y) &= \inf\left\{\varepsilon \geq 0 : \alpha x \preceq \alpha y + b_1^{(\varepsilon)},\ \alpha y \preceq \alpha x + b_2^{(\varepsilon)} \text{ and } \left\|b_i^{(\varepsilon)}\right\| \leq \varepsilon,\ i = 1, 2\right\} \\ &= \inf\left\{\varepsilon \geq 0 : \alpha x \preceq \alpha y + \alpha a_1^{(\varepsilon)},\ \alpha y \preceq \alpha x + \alpha a_2^{(\varepsilon)} \text{ and } \left\|\alpha a_i^{(\varepsilon)}\right\| \leq \varepsilon,\ i = 1, 2\right\} \\ &= |\alpha| \inf\left\{\varepsilon \geq 0 : x \preceq y + a_1^{(\varepsilon)},\ y \preceq x + a_2^{(\varepsilon)} \text{ and } \left\|a_i^{(\varepsilon)}\right\| \leq \varepsilon,\ i = 1, 2\right\} \\ &= |\alpha|\, h(x, y) \end{aligned}$$

olur. □

Teorem 5.2.3. $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ *Hilbert quasilineer uzaydır.*

İspat. $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ nin (5.2.4) de verilen iç çarpımın ürettiği norm olan (5.2.5) deki normun ürettiği Hausdorff metriğe göre tam olduğunu göstereceğiz.

$$x^{(n)} = \left[\underline{x_r^{(n)}}, \overline{x_r^{(n)}}\right] + i\left[\underline{x_s^{(n)}}, \overline{x_s^{(n)}}\right]$$

olmak üzere $\left(x^{(n)}\right)$, $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ de bir Cauchy dizisi olsun. Bu durumda Lemma 5.2.2 ve Lemma 4.3.2-*ii*) den her $\varepsilon > 0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n, m > n_0$ için

$$\begin{aligned}
h(x^{(n)}, x^{(m)}) &= h\left(\left(\left[\underline{x_r^{(n)}}, \overline{x_r^{(n)}}\right] + i\left[\underline{x_s^{(n)}}, \overline{x_s^{(n)}}\right]\right), \left(\left[\underline{x_r^{(m)}}, \overline{x_r^{(m)}}\right] + i\left[\underline{x_s^{(m)}}, \overline{x_s^{(m)}}\right]\right)\right) \\
&\leq h\left(\left[\underline{x_r^{(n)}}, \overline{x_r^{(n)}}\right], \left[\underline{x_r^{(m)}}, \overline{x_r^{(m)}}\right]\right) + h\left(i\left[\underline{x_s^{(n)}}, \overline{x_s^{(n)}}\right], i\left[\underline{x_s^{(m)}}, \overline{x_s^{(m)}}\right]\right) \\
&\leq h\left(\left[\underline{x_r^{(n)}}, \overline{x_r^{(n)}}\right], \left[\underline{x_r^{(m)}}, \overline{x_r^{(m)}}\right]\right) + h\left(\left[\underline{x_s^{(n)}}, \overline{x_s^{(n)}}\right], \left[\underline{x_s^{(m)}}, \overline{x_s^{(m)}}\right]\right) \\
&< \varepsilon
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$h\left(\left[\underline{x_r^{(n)}}, \overline{x_r^{(n)}}\right], \left[\underline{x_r^{(m)}}, \overline{x_r^{(m)}}\right]\right) < \varepsilon$$

ve

$$h\left(\left[\underline{x_s^{(n)}}, \overline{x_s^{(n)}}\right], \left[\underline{x_s^{(m)}}, \overline{x_s^{(m)}}\right]\right) < \varepsilon$$

dir. Bu ise $\left(x_r^{(n)}\right)$ ve $\left(x_s^{(n)}\right)$ dizilerinin $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ de birer Cauchy dizisi olması demektir. $\mathbb{I}_{\mathbb{R}}$ tam metrik uzay olduğundan

$$x_r^{(n)} \to [\underline{a}, \overline{a}], \ n \to \infty$$

ve

$$x_s^{(n)} \to \left[\underline{b}, \overline{b}\right], \ n \to \infty$$

dir. Şimdi bu limit noktalarını kullanarak

$$x = [\underline{a}, \overline{a}] + i\left[\underline{b}, \overline{b}\right]$$

elemanını tanımlayalım. Yine Lemma 5.2.2 ve Lemma 4.3.2-ii) den

$$\begin{aligned} h\left(x^{(n)}, x\right) &= h\left(\left[\underline{x_r^{(n)}}, \overline{x_r^{(n)}}\right] + i\left[\underline{x_s^{(n)}}, \overline{x_s^{(n)}}\right], [\underline{a}, \overline{a}] + i\left[\underline{b}, \overline{b}\right]\right) \\ &\leq h\left(\left(\left[\underline{x_r^{(n)}}, \overline{x_r^{(n)}}\right], [\underline{a}, \overline{a}]\right) + h\left(i\left[\underline{x_s^{(n)}}, \overline{x_s^{(n)}}\right], i\left[\underline{b}, \overline{b}\right]\right)\right) \\ &\leq \underbrace{h\left(\left[\underline{x_r^{(n)}}, \overline{x_r^{(n)}}\right], [\underline{a}, \overline{a}]\right)}_{\to 0} + \underbrace{h\left(\left[\underline{x_s^{(n)}}, \overline{x_s^{(n)}}\right], \left[\underline{b}, \overline{b}\right]\right)}_{\to 0} \\ &\to 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece $\left[\underline{x_r^{(n)}}, \overline{x_r^{(n)}}\right] + i\left[\underline{x_s^{(n)}}, \overline{x_s^{(n)}}\right] \to [\underline{a}, \overline{a}] + i\left[\underline{b}, \overline{b}\right]$ olup $\left(x^{(n)}\right)$ dizisi x noktasına yakınsaktır. $\left(x^{(n)}\right)$ dizisi keyfi bir Cauchy dizisi olduğundan $\mathbb{I}_{\mathbb{C}}$ tamdır.

$\square$

5.3 İnterval Sinyallere İlişkin Bir Uygulama

Sinyal işlemede bazen bir sinyalin frekans ve zaman bileşenleri tam olarak bilinemeyebilir. Fakat bu veriler için bir alt ve bir de üst sınır belirlenebilinir. İşte böylesi durumların oluşturduğu bir model, bir interval sinyal ile temsil edilebilir. Ayrıca böylesi belirsizlik durumlarında sinyal işlemenin yapılabilmesi için bilinen matematiksel analiz araçlardan daha fazlasına ihtiyaç duyulmaktadır. Bu noktada interval sinyal kavramı ve kompleks intervallerin uzayı gelen sinyalin işlenebilmesi için etkili araçlar olmuştur.

Şimdi reel kısmı tam olarak belirlenen ve sanal kısmı tam olarak belirli olmayan fakat belirlenen bir alt ve bir üst sınır sayesinde sanal kısmının bir intervalle temsil edildiği

$$x_n = \begin{cases} 0 & , \quad n \in \mathbb{Z}^-; \\ n + i[-1, \sin \frac{\pi n}{2}] & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde verilen sinusoidal bir (x_n) sinyalini göz önüne alalım. Bu sinyal açık haliyle

$$x = (x_n) = (..., 0, 0, 0, \boxed{i[-1, 0]}, 1 + i[-1, \sin \frac{\pi}{2}], 2 + i[-1, \sin \pi], 3 + i[-1, \sin \frac{3\pi}{2}]...)$$

şeklindeki ayrık-zamanlı interval sinyaldir. Dikkat edilirse intervallerin kullanımı çıktılarda sınırlı bir belirsizlik sağlar. Şimdi kabul edelim ki bu x çıktısı bir sistemin impuls cevabı olsun. Yani, x bir filtre olsun ve x çıktısını üreten LSI-sistemi belirleyelim. Aradığımız LSI-sistem, ayrık-zamanlı bir interval sinyali yine ayrık-zamanlı interval sinyale dönüştüren bir T lineer dönüşümüdür.

$$\delta_n = \begin{cases} 1 & , \ n = 0 \\ 0 & , \ \text{diğer} \end{cases} \qquad n \in \mathbb{Z}$$

ile verilen ve impuls olarak adlandırılan

$$\delta = (\delta_n) = (..., 0, \boxed{1}, 0, ...)$$

Kronecker delta dizi için

$$T\delta = x$$

olacak şekildeki T dönüşümü

$$T = \begin{bmatrix} \cdots 0 & \vdots & \vdots & \vdots & \\ \cdots 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots 0 & i[-1,0] & 0 & 0 & \cdots \\ \cdots 0 & 0 & 1 + i[-1, \sin\frac{\pi}{2}] & 0 & \cdots \\ \cdots 0 & 0 & 0 & 2 + i[-1, \sin\pi] & \cdots \\ \cdots 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots \\ & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

şeklinde sonsuz kompleks interval matris formundadır. Gerçekten bu matrisin impuls ile matris çarpımı

$$T(\delta) = (...0, 0, i[-1, 0], 1 + i[-1, \sin\frac{\pi}{2}], 2 + i[-1, \sin\pi], 3 + i[-1, \sin\frac{3\pi}{2}]...) = x$$

dır. Ayrıca böylesi sistemleri *quasilineer sistemler* olarak adlandırıyoruz.

6. $L^2(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ HİLBERT QUASİLİNEER UZAYI VE BU UZAY ÜZERİNDEKİ BAZI ÖNEMLİ OPERATÖRLER

Bu kısımda öncelikle $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^p(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ uzayını tanımlayacağız. Bu uzayın bir Banach quasilineer uzayı olduğunu göstereceğiz. Ayrıca $p = 2$ için $L^2(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ uzayı üzerinde Aumann integralini kullanarak bir iç çarpım tanımlayacağız ve bu uzayın bir Hilbert quasilineer uzay olduğunu göstereceğiz. Bu sayede $L^2(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ uzayı üzerindeki önemli operatörlerden olan öteleme, değiştirme ve genişletme operatörlerini ve bir sonraki bölümde de küme-değerli Fourier dönüşümünü tanımlayacağız. Ayrıca [34] numaralı çalışma, bu bölümde yapılan çalışmaların bir sonucu olarak oluşturulmuştur.

6.1 $L^p(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ $(1 \leq p < \infty)$ Uzayları Üzerindeki Quasilineer Yapı

Tanım 6.1.1. $1 \leq p < \infty$ *olmak üzere* $L^p(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$, $\mathbb{R}$ *üzerinde tanımlı* $\Omega(\mathbb{C})$ *değerli, ölçülebilir ve*

$$\int_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_{\Omega}^{p}\, dx$$

Lebesque integrali mevcut olan F *küme-değerli fonksiyonların kümesidir. Yani,*

$$L^p(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C})) = \{F : \mathbb{R} \to \Omega(\mathbb{C}) \mid F \text{ ölçülebilir ve } \int_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_{\Omega}^{p}\, dx < \infty\}$$

dır.

Teorem 6.1.1. $1 \leq p < \infty$ *için* $L^p(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ *kümesi,*

$$(F_1 + F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x),$$

$$(\alpha F)(x) = \alpha F(x) \quad ,\alpha \in \mathbb{C}$$

işlemleri ve

$$F_1 \preceq F_2 \Leftrightarrow F_1(x) \subseteq F_2(x), \text{ hemen hemen her } x \in \mathbb{R} \text{ için}$$

kısmi sıralama bağıntısıyla $\mathbb{C}$ *cismi üzerinde bir quasilineer uzaydır.*

İspat. Öncelikle $1 \leq p < \infty$ için $F, G, H \in L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ olmak üzere, "$\subseteq$" içerme bağıntısının $\Omega(\mathbb{C})$ quasilineer uzayı üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı olduğu göz önüne alınırsa

$$F \preceq G,$$

$$F \preceq G \text{ ve } G \preceq F \text{ ise } F = G$$

ve

$$F \preceq G \text{ ve } G \preceq H \text{ ise } F \preceq H$$

özellikleri sağlandığından "$\preceq$ " bağıntısı $L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ kümesi üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısıdır. Ayrıca

$$F + G = G + F,$$

$$F + (G + H) = (F + G) + H,$$

θ, sıfır sabit fonksiyonu olmak üzere

$$F + \theta = F,$$

$\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

$$\alpha(\beta F) = (\alpha\beta)F,$$

$$\alpha(F + G) = \alpha F + \alpha G,$$

$$1F = F$$

ve

$$0F = \theta$$

eşitliklerinin sağlandığı kolaylıkla görülebilir. Öte yandan hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ için

$$((\alpha+\beta)F)(x) = (\alpha+\beta)F(x) \subseteq \alpha F(x) + \beta F(x) = (\alpha F + \beta F)(x)$$

olduğundan

$$(\alpha+\beta)F \preceq \alpha F + \beta F$$

dir. $F_1 \preceq F_2$ ve $G_1 \preceq G_2$ olsun. Bu durumda hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için $F_1(x) \subseteq F_2(x)$ ve $G_1(x) \subseteq G_2(x)$ olup $F_1(x) + G_1(x) \subseteq F_2(x) + G_2(x)$ dir. O halde

$$F_1 + G_1 \preceq F_2 + G_2$$

dir. Ayrıca $F \preceq G$ ise hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için $F(x) \subseteq G(x)$ olacağından $\alpha \in \mathbb{C}$ için de $\alpha F(x) \subseteq \alpha G(x)$ olur. Böylece hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için $(\alpha F)(x) \subseteq (\alpha G)(x)$ olacağından

$$\alpha F \preceq \beta G$$

dir. Böylece $L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$, $1 \leq p < \infty$ kümesi bir quasilineer uzaydır. $\square$

Şimdi $L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$, $1 \leq p < \infty$ quasilineer uzayının regüler elemanlarını belirlemeye çalışalım.

$$\begin{aligned} F \in (L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})))_r &\Leftrightarrow F - F = \theta \Leftrightarrow F(x) - F(x) = \{0\}, \forall x \in \mathbb{R} \\ &\Leftrightarrow F(x) \in \Omega(\mathbb{C})_r \equiv \mathbb{C}, \forall x \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

dir. Böylece aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 6.1.1. $1 \leq p < \infty$ *için*

$$(L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})))_r = L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})_r) \equiv L^p(\mathbb{R}, \mathbb{C}) = L^p(\mathbb{R})$$

dir. Yani $L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ *uzayının regüler alt uzayı,* $L^p(\mathbb{R})$ *uzayına izometrik izomorfiktir.*

Sonuç 6.1.2. *Eğer $F \in L^p((\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C})))_r$ ise bu durumda F nin bir tek selektörü vardır ve o selektör de kendisidir.*

Önceki bölümlerde de bahsedildiği gibi quasilineer uzaylar arasında konsolide quasilineer uzaylar bazı özelliklere sahiptir. Bu özelliklerden belki de en önemlisi konsolide bir quasilineer uzayın, üzerinde bir iç çarpım tanımlanabilmesine imkan vermesidir. $L^2(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlayabilmek için bu uzayın konsolide bir uzay olması veya konsolidasyonunun mevcut olması gerekir.

Lemma 6.1.1. *$1 \leq p < \infty$ için $L^p(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$, konsolide bir quasilineer uzaydır.*

İspat. Her $F \in L^p(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ için

$$F = \sup_{"\preceq"}\{G \in L^p((\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C})))_r : G \preceq F\}$$

olduğunu göstereceğiz. Yani

$$\boldsymbol{F}_F = \{G : \mathbb{R} \to \Omega(\mathbb{C})_r : G(x) \subseteq F(x) \text{ hemen hemen her } x \in \mathbb{R} \text{ için}\}$$

olmak üzere $F = \sup_{"\preceq"}\boldsymbol{F}_F$ olduğunu göstermek istiyoruz. $\boldsymbol{F}_F$ kümesinin üstten sınırlı olduğu açıktır. Zira F, $\boldsymbol{F}_F$ kümesi için bir üst sınırdır. Şimdi bir $H \in L^p(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ elemanının $\boldsymbol{F}_F$ kümesi için bir başka üst sınır olduğunu kabul edelim. $F \preceq H$ olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Şimdi kabul edelim ki $F \npreceq H$ olsun. Bu durumda bir $x_0 \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki $F(x_0) \nsubseteq H(x_0)$ dır. O halde $z_0 \in F(x_0)$ iken $z_0 \notin H(x_0)$ olacak şekilde bir $z_0 \in \mathbb{C}$ vardır. Buradan $\{z_0\} \subseteq F(x_0)$ iken $\{z_0\} \nsubseteq H(x_0)$ olduğunu söyleriz. Şimdi $G : \mathbb{R} \to \Omega(\mathbb{C})_r$, $G(x) = \{z_0\}$ fonksiyonunu tanımlayalım. $G \in \boldsymbol{F}_F$ olduğu açıktır. Ancak $\{z_0\} \nsubseteq H(x_0)$ olduğundan $G \npreceq H$ dır. Bu durum H nın $\boldsymbol{F}_F$ kümesi için bir üst sınır olması ile çelişir. O halde $F \preceq H$ dır. H keyfi olduğundan ispat tamamlanmış olur. □

Şimdi $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $L^p(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ quasilineer uzayı üzerinde bir norm tanımlayacağız. Tanımlayacağımız bu normun, norm şartlarını sağladığını göstermek için kullanacağımız aşağıdaki lemma ve önermeleri vereceğiz.

Lemma 6.1.2. *$1 \leq p < \infty$ için $F, G \in L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ olsun. Eğer $h \in S^p(F+G)$ ise bu durumda bir $f \in S^p(F)$ ve bir $g \in S^p(G)$ elemanları vardır öyle ki*

$$h = f + g$$

dir.

İspat. $1 \leq p < \infty$ için $F, G \in L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ ise

$$S^p(F+G) = \{h : \mathbb{R} \to \mathbb{C} : \int_{\mathbb{R}} |h(x)|\, dx < \infty \text{ ve } \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } h(x) \in (F+G)(x)\}$$

olur. $h \in S^p(F+G)$ ise her $x \in \mathbb{R}$ için $h(x) \in F(x) + G(x)$ dir. Bu durumda x e bağlı bir $a_x \in F(x)$ ve bir $b_x \in G(x)$ elemanları vardır öyle ki

$$h(x) = a_x + b_x$$

dir. Her bir $x \in \mathbb{R}$ için bir $a_x \in F(x)$ ve bir $b_x \in G(x)$ elemanlarının mevcut olmasından dolayı $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = a_x$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(x) = b_x$ fonksiyonları iyi tanımlıdır. Böylece her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \in F(x)$ ve $g(x) \in G(x)$ olduğundan $h(x) = f(x) + g(x)$ olup

$$h = f + g$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki normun tanımından her $x \in \mathbb{R}$ için $|f(x)| \leq \|F(x)\|_\Omega$ ve $|g(x)| \leq \|G(x)\|_\Omega$ dir. Buradan da

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, dx \leq \int_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_\Omega^p\, dx$$

ve

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p\, dx \leq \int_{\mathbb{R}} \|G(x)\|_\Omega^p\, dx$$

yazarız. $F, G \in L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ olduğundan $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\, dx < \infty$ ve $\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p\, dx < \infty$ olup $f \in S^p(F)$ ve $g \in S^p(G)$ dir. □

Önerme 6.1.1. $1 \leq p < \infty$, $F \in L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ *ise F nin tüm ölçülebilir selektörleri $L^p(\mathbb{R})$ ye aittir. Böylece $1 \leq p < \infty$ için $S^p(F) \subseteq L^p(\mathbb{R})$ dir.*

İspat. f, bir $F \in L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ küme-değerli dönüşümünün ölçülebilir bir selektörü olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) \in F(x)$ olup $|f(x)| \leq \|F(x)\|_\Omega$ dir. $F \in L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$, $1 \leq p < \infty$ ve

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_\Omega^p \, dx$$

olduğu göz önüne alınırsa $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx < \infty$ olduğunu söyleriz. Ayrıca f ölçülebilir olduğundan $f \in L^p(\mathbb{R})$ sonucuna ulaşılır. Bu ise $1 \leq p < \infty$ için $S^p(F) \subseteq L^p(\mathbb{R})$ olması demektir. □

Lemma 6.1.3. *A, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin sınırlı bir alt kümesi ise $|A| = \{|a| : a \in A\}$ olmak üzere*

$$\sup |A| = \sup \left|\overline{A}\right|$$

dir.

İspat. A, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin sınırlı bir alt kümesi olsun. Sınırlı bir kümenin kapanışı da sınırlı olacağından $\{|a| : a \in A\}$ ve $\{|a| : a \in \overline{A}\}$ kümelerinin supremumları mevcuttur. Şimdi

$$\alpha = \sup\{|a| : a \in A\}$$

ve

$$\beta = \{|a| : a \in \overline{A}\}$$

diyelim. $\{|a| : a \in A\} \subseteq \{|a| : a \in \overline{A}\}$ olduğundan $\alpha \leq \beta$ dır. Şimdi kabul edelim ki $\beta > \alpha$ olsun. Bir $t_0 > 0$ ve bir $c \in \overline{A}$ vardır öyle ki $\alpha < t_0 < \beta$ ve $|c| = t_0$ dır. $c \in \overline{A}$ olduğundan $a_n \to c$ olacak şekilde A kümesinde bir $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ dizisi vardır. $a_n \to c$ ise mutlak değer fonksiyonunun sürekliliğinden $|a_n| \to |c| = t_0$ dır. Ayrıca

$$t_0 \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n| \leq \sup\{|a| : a \in A\} = \alpha$$

yazılabilir. Bu ise $\alpha < t_0$ olması ile çelişir. O halde $\beta \leq \alpha$ dır. Bu ise $\sup |A| = \sup \left|\overline{A}\right|$ olduğunu ispatlar. □

Teorem 6.1.2. $1 \leq p < \infty$ *olmak üzere*

$$\|F\|_{L^p} = \left\| \overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx : f \in S^p(F)\}} \right\|_{\Omega}^{1/p} \tag{6.1.1}$$

eşitliği $L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ *üzerinde norm tanımlar ve böylece* $L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ *bir normlu quasilineer uzaydır.*

İspat. İlk olarak (6.1.1) eşitliğinin iyi tanımlı olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx : f \in S^p(F)\}}$ kümesinin $\Omega(\mathbb{C})$ nin bir elemanı olduğunu göstermeliyiz. Önerme 6.1.1 den $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx < \infty$ olduğundan $\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx : f \in S^p(F)\}$ kümesi $\mathbb{C}$ nin sınırlı bir alt kümesidir. Lemma 2.1.3 den $\overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx : f \in S^p(F)\}}$ kümesi de sınırlıdır. Ayrıca kapanış işleminden dolayı bu küme kapalıdır. Böylece $\overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx : f \in S^p(F)\}}$ kümesi $\mathbb{C}$ nin kapalı ve sınırlı bir alt kümesi olup $\Omega(\mathbb{C})$ nin bir elemanıdır. Şimdi (6.1.1) eşitliğinin (4.3.1)-(4.3.5) şartlarını sağladığını gösterelim.

- $F \neq 0$ olsun. Bu durumda en az bir $x \in \mathbb{R}$ için $F(x) \neq \{0\}$ dır. $F(x) \neq \{0\}$ olduğundan ve Teorem 3.3.1 den F nin ölçülebilir bir f selektörü vardır öyle ki $f \neq 0$ dır. Önerme 6.1.1 den $f \in L^p(\mathbb{R})$ dir. $\|f\|_p = (\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx)^{1/p}$ eşitliğinin $L^p(\mathbb{R})$ üzerinde bir norm olduğu hatırlanılırsa $f \neq 0$ iken $\|f\|_p \neq 0$ olup $\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx \neq 0$ dır. Böylece $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki normun ilk şartından

$$\|F\|_{L^p} = \left\| \overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx : f \in S^p(F)\}} \right\|_{\Omega}^{1/p} \neq 0$$

  elde edilir.

- $F \in L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Önerme 6.1.1 den her $f \in S^p(F)$ için $f \in L^p(\mathbb{R})$ olup

$$(\int_{\mathbb{R}} |\lambda f(x)|^p \, dx)^{1/p} = |\lambda| \, (\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx)^{1/p}$$

dir. $L^p(\mathbb{R})$ üzerindeki normun ikinci şartından

$$\|\lambda F\|_{L^p} = \left\| \overline{\{\int\limits_{\mathbb{R}} |\lambda f(x)|^p \, dx : f \in S^p(F)\}} \right\|_{\Omega}^{1/p}$$
$$= \left\| \overline{\{|\lambda|^p \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx : f \in S^p(F)\}} \right\|_{\Omega}^{1/p}$$

dir. Lemma 2.1.2 den

$$\left\| \overline{\{|\lambda|^p \int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx : f \in S^p(F)\}} \right\|_{\Omega}^{1/p} = \left\| |\lambda|^p \, \overline{\{\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx : f \in S^p(F)\}} \right\|_{\Omega}^{1/p}$$

olur. $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki normun ikinci şartından

$$\left\| |\lambda|^p \, \overline{\{\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx : f \in S^p(F)\}} \right\|_{\Omega}^{1/p} = |\lambda| \left\| \overline{\{\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx : f \in S^p(F)\}} \right\|_{\Omega}^{1/p}$$

dır. O halde

$$\|\lambda F\|_{L^p} = |\lambda| \, \|F\|_{L^p}$$

elde edilir.

- $$\|F + G\|_{L^p} = \left\| \overline{\{\int\limits_{\mathbb{R}} |h(x)|^p \, dx : h \in S^p(F+G)\}} \right\|_{\Omega}^{1/p}$$

olup Lemma 6.1.2 den

$$\|F + G\|_{L^p} = \left\| \overline{\{\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x) + g(x)|^p \, dx : f \in S^p(F), g \in S^p(G)\}} \right\|_{\Omega}^{1/p}$$

dir. $f \in S^p(F), g \in S^p(G)$ ve $F, G \in L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ olduğundan Önerme 6.1.1 den $f, g \in L^p(\mathbb{R})$ dir. $L^p(\mathbb{R})$ üzerindeki normun üçüncü şartından

$$(\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x) + g(x)|^p \, dx)^{1/p} \leq (\int\limits_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx)^{1/p} + (\int\limits_{\mathbb{R}} |g(x)|^p \, dx)^{1/p} \quad (6.1.2)$$

yazılır. Ayrıca $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki normun tanımından ve (6.1.2) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}
&\left\|\overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)+g(x)|^p\,dx : f\in S^p(F), g\in S^p(G)\}}\right\|_{\Omega} \\
&\leq \left\|\overline{\{(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,dx)^{1/p} + (\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p\,dx)^{1/p} : f\in S^p(F), g\in S^p(G)\}}\right\|_{\Omega}^{p} \\
&= \left\|\overline{\{(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,dx)^{1/p} : f\in S^p(F)\}} + \overline{\{(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p\,dx)^{1/p} : g\in S^p(G)\}}\right\|_{\Omega}^{p}
\end{aligned}$$

elde edilir. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere sınırlı bir A alt kümesi için

$$\sup\{|a|^{1/p} : a\in A\} = (\sup\{|a| : a\in A\})^{1/p}$$

olduğu hatırlanılırsa $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki normun üçüncü şartından

$$\begin{aligned}
&\left\|\overline{\{(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,dx)^{1/p} : f\in S^p(F)\}} + \overline{\{(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p\,dx)^{1/p} : g\in S^p(G)\}}\right\|_{\Omega}^{p} \\
&\leq \left(\left\|\overline{\{(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,dx)^{1/p} : f\in S^p(F)\}}\right\|_{\Omega} + \left\|\overline{\{(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p\,dx)^{1/p} : g\in S^p(G)\}}\right\|_{\Omega}\right)^{p} \\
&= \left(\left\|\overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,dx : f\in S^p(F)\}}\right\|_{\Omega}^{1/p} + \left\|\overline{\{\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p\,dx : g\in S^p(G)\}}\right\|_{\Omega}^{1/p}\right)^{p}
\end{aligned}$$

dir. Bu son eşitsizliğin sol tarafı $\|F+G\|^p$ ve sağ tarafı ise $(\|F\|+\|G\|)^p$ dir. Böylece

$$\|F+G\| \leq \|F\| + \|G\|$$

dir.

- $F \preceq G$ olsun. Bu durumda hemen hemen her $x\in\mathbb{R}$ için $F(x)\subseteq G(x)$ dir. Ayrıca $1\leq p<\infty$ olmak üzere $S^p(F)\subseteq S^p(G)$ olduğu açıkça görülebilir. Bu ise

$$\overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p\,dx : f\in S^p(F)\}} \subseteq \overline{\{\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p\,dx : f\in S^p(G)\}}$$

olmasını gerektirir. $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki normun dördüncü şartından

$$\left\| \overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^p \, dx : f \in S^p(F)\}} \right\|_{\Omega} \leq \left\| \overline{\{\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^p \, dx : f \in S^p(G)\}} \right\|_{\Omega}$$

ve böylece

$$\|F\|_{L^p} \leq \|G\|_{L^p}$$

olur.

- Son olarak "$\forall \varepsilon > 0$ için $\exists F_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ vardır öyle ki

$$F \preceq G + F_\varepsilon \text{ ve } \|F_\varepsilon\|_{L^p} \leq \varepsilon$$

olmasının

$$F \preceq G$$

olmasını gerektirdiğini " gösterelim. Hipotezden hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için

$$F(x) \subseteq G(x) + F_\varepsilon(x) \text{ and } \|F_\varepsilon\|^p \leq \varepsilon^p$$

olduğunu söyleriz. Şimdi kabul edelim ki $F \npreceq G$ olsun. Bu durumda bir $x \in \mathbb{R}$ için $F(x) \nsubseteq G(x)$ dir. O halde bir $a \in F(x)$ elemanı vardır öyle ki $a \notin G(x)$ dir. $G(x) \in \Omega(\mathbb{C})$ olduğundan $G(x)$, $\mathbb{C}$ nin kapalı bir alt kümesidir. Böylece

$$h(a, G(x)) = \inf_{b \in G(x)} |a - b| \neq 0$$

dir. Şimdi $\|F_\varepsilon(x)\|_\Omega = K$ diyelim. Hipotezden

$$\varepsilon = |h(a, G(x)) - K|$$

sayısı için de bir $F_\varepsilon \in L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ vardır öyle ki $F(x) \subseteq G(x) + F_\varepsilon(x)$ ve $\|F_\varepsilon\|_{L^p}^p \leq \varepsilon^p$ dir. Ayrıca $a \in F(x)$ olduğundan $a \in G(x) + F_\varepsilon(x)$ dir. O halde bir $b \in G(x)$ ve bir $a_\varepsilon \in F_\varepsilon(x)$ vardır öyle ki $a = b + a_\varepsilon$ dir. Böylece

$$0 = |a - (b + a_\varepsilon)| \geq ||a - b| - |a_\varepsilon|| \geq |h(a, G(x)) - K| = \varepsilon$$

olur ki bu bir çelişkidir. Sonuç olarak

$$F \preceq G$$

olduğu gösterilmiş olur.

$\square$

6.2 $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ Hilbert Quasilineer Uzayı

Şimdi Tanım 4.4.1 i kullanarak $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ quasilineer uzayı üzerinde bir iç çarpım tanımlayacağız.

Teorem 6.2.1. *$F, G \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ için*

$$\langle F, G\rangle = \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} \langle F(x), G(x)\rangle_{\Omega}\, dx \tag{6.2.1}$$

eşitliği $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ üzerinde iç çarpım tanımlar ve böylece $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ quasilineer iç çarpım uzayıdır. Ayrıca Aumann integrali tanımı kullanılarak (6.2.1) eşitliği

$$\langle F, G\rangle = \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} \langle F(x), G(x)\rangle_{\Omega}\, dx = \{\int_{\mathbb{R}} \langle f(x), g(x)\rangle_{\mathbb{C}}\, dx : f \in S^2(F), g \in S^2(G)\} \tag{6.2.2}$$

olarak verilir.

İspat. Öncelikle (6.2.1) eşitliğinin iyi tanımlı olduğunu göstereceğiz. Bunun için

$$U_{F,G} : \mathbb{R} \to \Omega(\mathbb{C}), \quad U_{F,G}(x) = \langle F(x), G(x)\rangle_{\Omega} \tag{6.2.3}$$

şeklinde tanımlı $U_{F,G}$ fonksiyonunun Aumann anlamında integrallenebilir olduğunu ve bu fonksiyonun Aumann integralinin $\Omega(\mathbb{C})$ nin bir elemanı olduğunu göstereceğiz. $U_{F,G}$ fonksiyonu kapalı değerli olduğundan Teorem 3.3.1 e göre $U_{F,G}$ nin ölçülebilir bir selektöre sahip olduğunu söyleyebiliriz. Böylece bu fonksiyon Aumann anlamında integrallenebilirdir. Şimdi $U_{F,G}$ fonksiyonunun Aumann integralinin

$\Omega(\mathbb{C})$ ye ait olduğunu göstermeliyiz. Bunun için ilk olarak $U_{F,G}$ nin integrably sınırlı bir fonksiyon olduğunu göstereceğiz. İntegrably sınırlı bir fonksiyon tanımına göre $B = \{a \in \mathbb{C} : |a| \leq 1\}$ olmak üzere eğer hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için $U_{F,G}(x) \subseteq f(x)B$ olacak şekilde integrallenebilir bir $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu bulabilirsek $U_{F,G}$ nin integrably sınırlı bir fonksiyon olduğunu göstermiş olacağız. $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki normun tanımından

$$\|U_{F,G}(x)\|_\Omega = \|\langle F(x), G(x)\rangle_\Omega\| = \sup\{|\langle a_x, b_x\rangle_\mathbb{C}| : a_x \in F(x), b_x \in G(x)\}$$

yazılabilir. Her bir $x \in \mathbb{R}$ için $U_{F,G}(x)$ kompakt bir küme olduğundan x e bağlı bir $a_x^0 \in F(x)$ ve bir $b_x^0 \in G(x)$ elemanları vardır öyle ki

$$\|U_{F,G}(x)\|_\Omega = \|\langle F(x), G(x)\rangle_\Omega\| = \left|\left\langle a_x^0, b_x^0\right\rangle_\mathbb{C}\right|$$

dir. Şimdi her bir $x \in \mathbb{R}$ sayısına $a_x^0 \in F(x)$ ve $b_x^0 \in G(x)$ elemanlarının karşılık gelmesi münasebetiyle

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \left|\left\langle a_x^0, b_x^0\right\rangle_\mathbb{C}\right|$$

fonksiyonunu tanımlayalım.

$$\left|\int_\mathbb{R} f(x)dx\right| \leq \int_\mathbb{R} |f(x)|\, dx = \int_\mathbb{R} \left|\left\langle a_x^0, b_x^0\right\rangle_\mathbb{C}\right| dx = \int_\mathbb{R} \|U_{F,G}(x)\|_\Omega\, dx = \int_\mathbb{R} \|\langle F(x), G(x)\rangle_\Omega\|\, dx \tag{6.2.4}$$

olup Lemma 4.4.1 ve Holder eşitsizliğinden

$$\int_\mathbb{R} \|\langle F(x), G(x)\rangle_\Omega\|\, dx \leq \int_\mathbb{R} (\|F(x)\|_\Omega \|G(x)\|_\Omega) dx \leq (\int_\mathbb{R} \|F(x)\|_\Omega^2\, dx)^{1/2} (\int_\mathbb{R} \|G(x)\|_\Omega^2\, dx)^{1/2} \tag{6.2.5}$$

olur. $F, G \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ olduğundan (6.2.4) ve (6.2.5) eşitsizlikleri f nin integrallenebilir olmasını gerektirir. Ayrıca her bir $x \in \mathbb{R}$ için $f(x) = |\langle a_x^0, b_x^0\rangle_\mathbb{C}|$ olduğundan

$$\|U_{F,G}(x)\|_\Omega = \left|\left\langle a_x^0, b_x^0\right\rangle_\mathbb{C}\right| = \left|\left\langle a_x^0, b_x^0\right\rangle_\mathbb{C}\right| \|B\|_\Omega = \|f(x)B\|_\Omega$$

olur. B, $\Omega(\mathbb{C})$ yi Ω-uzayı yapan eleman olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için $U_{F,G}(x) \subseteq f(x)B$ olur. O halde $U_{F,G}$ integrably sınırlı bir fonksiyon olup Teorem 3.4.1 den $U_{F,G}$ nin Aumann integrali kompakttır. Böylece (6.2.1) eşitliği iyi tanımlıdır. Şimdi (6.2.2) eşitliğinin sağlandığını göstereceğiz. $U_{F,G}$ küme-değerli dönüşümüne Aumann integralini uygularsak

$$\langle F, G\rangle = \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} \langle F(x), G(x)\rangle_{\Omega}\, dx = \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} U_{F,G}(x)dx = \{\int_{\mathbb{R}} h(x)dx : h \in S(U_{F,G})\}$$

olur. Öncelikle $U_{F,G}$ nin selektörlerini araştırıyoruz. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $U_{F,G}$ nin bir selektörü olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için

$$h(x) \in U_{F,G}(x) = \langle F(x), G(x)\rangle_{\Omega}$$

dir. $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki iç çarpımın tanımından

$$\langle F(x), G(x)\rangle_{\Omega} = \{\langle z, w\rangle_{\mathbb{C}} : z \in F(x), w \in G(x)\}$$

dir. Bu durumda

$$h(x) = \left\langle z_x^0, w_x^0 \right\rangle_{\mathbb{C}}$$

olacak şekilde x e bağlı bir $z_x^0 \in F(x)$ ve bir $w_x^0 \in G(x)$ vardır. Şimdi $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f(x) = z_x^0$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $g(x) = w_x^0$ fonksiyonlarını tanımlayalım. h bir fonksiyon olduğundan f ve g iyi tanımlıdır. $f \in S^2(F)$ ve $g \in S^2(G)$ olduğundan $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ dir. Ayrıca her $x \in \mathbb{R}$ için

$$h(x) = \langle f(x), g(x)\rangle_{\mathbb{C}}$$

yazılabilir.

$$\left|\int_{\mathbb{R}} h(x)dx\right| = \left|\int_{\mathbb{R}} \langle f(x), g(x)\rangle_{\mathbb{C}}\, dx\right| \leq \int_{\mathbb{R}} |\langle f(x), g(x)\rangle_{\mathbb{C}}|\, dx = \int_{\mathbb{R}} \left|f(x)\overline{g(x)}\right| dx$$

ve Cauchy-Shwarz eşitsizliğinden

$$\int_{\mathbb{R}} \left|f(x)\overline{g(x)}\right| dx \leq (\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx)^{1/2}(\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2\, dx)^{1/2} < \infty$$

olur. Bu ise $h \in S(U_{F,G})$ olması demektir. Sonuç olarak F ile G nin iç çarpımı

$$\langle F,G\rangle = \int_{\mathbb{R}}^{(A)} \langle F(x),G(x)\rangle_{\Omega}\, dx = \{\int_{\mathbb{R}} \langle f(x),g(x)\rangle_{\mathbb{C}}\, dx : f \in S^2(F), g \in S^2(G)\}$$

olarak hesaplanır. Şimdi (6.2.1) eşitliğinin Tanım 4.4.1 de verilen iç çarpım aksiyomlarının sağladığını gösterelim:

♣ *Eğer* $F,G \in L^2(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ *ise* $\langle F,G\rangle \in \Omega(\mathbb{C})_r \equiv \mathbb{C}$ *dir*:

Eğer $F,G \in L^2(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ ise Sonuç 6.1.1 den

$$\langle F,G\rangle = \int_{\mathbb{R}}^{(A)} \langle F(x),G(x)\rangle_{\Omega}\, dx = \int_{\mathbb{R}} \langle F(x),G(x)\rangle_{\mathbb{C}}\, dx = \int_{\mathbb{R}} F(x)\overline{G(x)}dx$$

olur. Ayrıca $L^2(\mathbb{R})$ üzerindeki

$$\langle F,G\rangle = \int_{\mathbb{R}} F(x)\overline{G(x)}dx$$

eşitliğinin kompleks-değerli olduğunu hatırlarsak $\langle F,G\rangle \in \Omega(\mathbb{C})_r \equiv \mathbb{C}$ olduğunu söyleriz.

♣ $\langle F+G,H\rangle = \langle F,H\rangle + \langle G,H\rangle$:

$\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki iç çarpımın ikinci şartından ve Önerme 3.4.1 den

$$\begin{aligned}\langle F+G,H\rangle &= \int_{\mathbb{R}}^{(A)} \langle F(x)+G(x),H(x)\rangle_{\Omega}\, dx \\ &\subseteq \int_{\mathbb{R}}^{(A)} \langle F(x),H(x)\rangle_{\Omega}\, dx + \int_{\mathbb{R}}^{(A)} \langle G(x),H(x)\rangle_{\Omega}\, dx = \langle F,H\rangle + \langle G,H\rangle\end{aligned}$$

elde edilir.

♣ $\langle \lambda F,G\rangle = \lambda\langle F,G\rangle$:

$\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki iç çarpımım üçüncü şartından ve Önerme 3.4.2 den

$$\begin{aligned}\langle \lambda F, G\rangle &= \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} \langle (\lambda F)(x), G(x)\rangle_{\Omega}\, dx = \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} \lambda \langle F(x), G(x)\rangle_{\Omega}\, dx \\ &= \lambda \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} \langle F(x), G(x)\rangle_{\Omega}\, dx = \lambda \langle F, G\rangle\end{aligned}$$

olur.

♣ $\langle F, G\rangle = \langle G, F\rangle$:

$\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki iç çarpımım dördüncü şartından

$$\langle F, G\rangle = \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} \langle F(x), G(x)\rangle_{\Omega}\, dx = \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} \langle G(x), F(x)\rangle_{\Omega}\, dx = \langle G, F\rangle$$

dir.

♣ $F \in (L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})))_r$ *için* $\langle F, F\rangle \geq 0$ *dir ve* $\langle F, F\rangle = \{0\} \Leftrightarrow F = \theta$ *dir:*

Eğer $F \in (L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})))_r$ ise Sonuç 6.1.1 den $F \in L^2(\mathbb{R})$ dir. Ayrıca Sonuç 6.1.2 den

$$\begin{aligned}\langle F, F\rangle &= \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} \langle F(x), F(x)\rangle_{\Omega}\, dx = \{\int_{\mathbb{R}} \langle F(x), F(x)\rangle_{\mathbb{C}}\, dx\} \\ &= \{\int_{\mathbb{R}} F(x)\overline{F(x)}dx\} = \{\int_{\mathbb{R}} |F(x)|^2\, dx\}\end{aligned}$$

olur. $L^2(\mathbb{R})$ üzerindeki iç çarpımın pozitif tanımlılığından $\int_{\mathbb{R}} |F(x)|^2\, dx \geq 0$ olup $\langle F, F\rangle \geq 0$ dır.

Şimdi kabul edelim ki $\langle F, F\rangle = \{0\}$ olsun. Bu durumda

$$\overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} \langle F(x), F(x)\rangle_{\Omega}\, dx = \{\int_{\mathbb{R}} \langle f(x), g(x)\rangle_{\mathbb{C}}\, dx : f, g \in S^2(F)\} = \{0\}$$

olur. Bu ise $\int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{f(x)}dx = \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx = 0$ olmasını gerektirir. $f \in S^2(F)$ ise $f \in L^2(\mathbb{R})$ olduğunu Sonuç 6.1.1 den biliyoruz. $\|f\|_2 = \left(\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\, dx\right)^{1/2}$

eşitliğinin $L^2(\mathbb{R})$ üzerinde norm olduğu hatırlanılırsa $f = 0$ olduğu sonucuna ulaşılır. F küme-değerli dönüşümünün herhangi bir f selektörü sıfır olduğundan $F = 0$ dır.

♣ $\|\langle F, G\rangle\|_\Omega = \sup\{\|\langle f, g\rangle\|_\Omega : f \in \mathbf{F}_F, g \in \mathbf{F}_G\}$:

$F \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ için $\mathbf{F}_F \subseteq S^2(F)$ olduğundan ve supremumun tanımı gereğince

$$\begin{aligned}\sup\{\|\langle f, g\rangle\|_\Omega : f \in \mathbf{F}_F, g \in \mathbf{F}_G\} &= \sup\{\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \langle f(x), g(x)\rangle_{\mathbb{C}}\, dx\right| : f \in \mathbf{F}_F, g \in \mathbf{F}_G\} \\ &= \sup\{\left|\int\limits_{\mathbb{R}} \langle f(x), g(x)\rangle_{\mathbb{C}}\, dx\right| : f \in S^2(F), g \in S^2(G)\} = \|\langle F, G\rangle\|_\Omega\end{aligned} \tag{6.2.6}$$

olur.

♣ *Eğer* $F_1 \preceq F_2$ *ve* $G_1 \preceq G_2$ *ise* $\langle F_1, G_1\rangle \subseteq \langle F_2, G_2\rangle$ *dir:*

$F_1 \preceq F_2$ ve $G_1 \preceq G_2$ olsun. Kısmi sıralama bağıntısının tanımı gereğince hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için $F_1(x) \subseteq F_2(x)$ ve $G_1(x) \subseteq G_2(x)$ dir. $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki iç çarpımın yedinci özelliğinden

$$\langle F_1(x), G_1(x)\rangle \subseteq \langle F_2(x), G_2(x)\rangle$$

yazılır. Önerme 3.4.1 den

$$\langle F_1, G_1\rangle = \overset{(A)}{\int\limits_{\mathbb{R}}} \langle F_1(x), G_1(x)\rangle\, dx \subseteq \overset{(A)}{\int\limits_{\mathbb{R}}} \langle F_2(x), G_2(x)\rangle\, dx = \langle F_2, G_2\rangle$$

olur.

♣ *Eğer her* $\varepsilon > 0$ *için* $F \preceq G + F_\varepsilon$ *ve* $\langle F_\varepsilon, F_\varepsilon\rangle \subseteq S_\varepsilon(\theta)$ *olacak şekilde bir* $F_\varepsilon \in L^2(R, \Omega(\mathbb{C}))$ *mevcut ise* $F \preceq G$ *dir:*

Kabul edelim ki $F \preceq G + F_\varepsilon$ ve $\langle F_\varepsilon, F_\varepsilon \rangle \subseteq S_\varepsilon(\theta)$ olacak şekilde bir $F_\varepsilon \in L^2(R, \Omega(C))$ mevcut olsun. Bu durumda

$$\|\langle F_\varepsilon, F_\varepsilon \rangle\|_\Omega \leq \|S_\varepsilon(\theta)\|_\Omega = \varepsilon \tag{6.2.7}$$

olur. Ayrıca

$$\|\langle F_\varepsilon, F_\varepsilon \rangle\|_\Omega = \left\| \int_{\mathbb{R}}^{(A)} \langle F_\varepsilon(x), F_\varepsilon(x) \rangle_\Omega \, dx \right\|_\Omega \tag{6.2.8}$$

$$= \left\| \{ \int_{\mathbb{R}} \langle f_\varepsilon(x), g_\varepsilon(x) \rangle_{\mathbb{C}} \, dx : f_\varepsilon, g_\varepsilon \in S^2(F_\varepsilon) \} \right\|_\Omega \tag{6.2.9}$$

$$= \sup\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \langle f_\varepsilon(x), f_\varepsilon(x) \rangle_{\mathbb{C}} \, dx \right| : f_\varepsilon \in S^2(F_\varepsilon) \}$$

$$= \sup\{ \left| \int_{\mathbb{R}} |f_\varepsilon(x)|^2 \, dx \right| : f_\varepsilon \in S^2(F_\varepsilon) \} = \|F_\varepsilon\|^2 \tag{6.2.10}$$

dır. (6.2.7) ve (6.2.8) birlikte düşünülürse $\|F_\varepsilon\|^2 \leq \varepsilon$ elde edilir. $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ üzerindeki normun son şartından $F \preceq G$ sonucuna ulaşılır.

□

Şimdi (6.2.1) eşitliğiyle verilen iç çarpımın ürettiği normu araştırıyoruz.

Lemma 6.2.1. *$p = 2$ için (6.1.1) ile verilen norm bir iç çarpım normudur.*

İspat.

$$
\begin{aligned}
\|F\|_{L^2}^2 = \|\langle F,F\rangle\|_\Omega &= \left\| \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} \langle F(x),F(x)\rangle_\Omega \, dx \right\|_\Omega \\
&= \left\| \{ \int_{\mathbb{R}} \langle f(x),g(x)\rangle_{\mathbb{C}} \, dx : f,g \in S^2(F)\} \right\|_\Omega \\
&= \sup\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \langle f(x),g(x)\rangle_{\mathbb{C}} \, dx \right| : f,g \in S^2(F)\} \\
&= \sup\{ \left| \int_{\mathbb{R}} \langle f(x),f(x)\rangle_{\mathbb{C}} \, dx \right| : f \in S^2(F)\} \\
&= \sup\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\}
\end{aligned}
$$

olup Lemma 6.1.3 den

$$
\begin{aligned}
\|F\|_{L^2}^2 = \|\langle F,F\rangle\|_\Omega &= \sup\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\} \\
&= \sup \overline{\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\}} \\
&= \left\| \overline{\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\}} \right\|_\Omega
\end{aligned}
$$

dir. Böylece

$$
\|F\| = \left\| \overline{\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\}} \right\|_\Omega^{1/2}
$$

elde edilir. □

Şimdi $L^2(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ quasilineer iç çarpım uzayı üzerindeki iç çarpım normuna denk olan eşitliği bir lemma ile vereceğiz. Bu lemma $L^2(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ uzayı üzerindeki normla ilgili işlem yaparken ve $L^2(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ nin Banach uzayı olduğunu gösterirken oldukça önemlidir.

Lemma 6.2.2. *$F \in L^2(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ için*

$$
\|F\|_{L^2} = \left\| \overline{\{ \int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\}} \right\|_\Omega^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_\Omega^2 \, dx \right)^{1/2} \qquad (6.2.11)
$$

dir.

İspat. Önerme 3.4.3 ve $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki iç çarpım normu kullanılırsa

$$\|F\|_{L^2}^2 = \|\langle F, F\rangle\|_\Omega = \left\| \int_{\mathbb{R}}^{(A)} \langle F(x), F(x)\rangle_\Omega \, dx \right\| \tag{6.2.12}$$

$$\leq \int_{\mathbb{R}} \|\langle F(x), F(x)\rangle_\Omega\| \, dx = \int_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_\Omega^2 \, dx \tag{6.2.13}$$

olur. Ayrıca

$$\|F\|_{L^2}^2 = \|\langle F, F\rangle\|_\Omega = \left\| \overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\}} \right\|_\Omega \tag{6.2.14}$$

dir. Böylece (6.2.12) ve (6.2.14) den

$$\|F\|_{L^2}^2 = \|\langle F, F\rangle\|_\Omega = \left\| \overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\}} \right\|_\Omega \leq \int_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_\Omega^2 \, dx \tag{6.2.15}$$

sonucuna ulaşılır. Her $x \in \mathbb{R}$ için $F(x)$, $\mathbb{C}$ nin kompakt bir alt kümesidir. Mutlak değer fonksiyonu sürekli olduğundan Teorem 2.1.22 den $|F(x)| = \{|t| : t \in F(x)\}$ kümesi de kompakttır. Teorem 2.1.4 e göre $\{|t| : t \in F(x)\}$ kümesinin bir maksimum elemanı vardır. $t_0^x \in F(x)$ olmak üzere bu maksimum elemana $|t_0^x|$ diyelim. Yani

$$\max\{|t| : t \in F(x)\} = |t_0^x|$$

olsun. Şimdi bu t_0^x elemanı yardımıyla

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}, \quad g(x) = t_0^x$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Bu fonksiyon iyi tanımlıdır. Çünkü F bir fonksiyon olduğundan her bir $x \in \mathbb{R}$ sayısına bir $F(x) \in \Omega(\mathbb{C})$ elemanı karşılık gelir. Yine her bir $x \in \mathbb{R}$ sayısına karşılık $|F(x)| = \{|t| : t \in F(x)\}$ kümesinin x e bağlı bir maksimum elemanı vardır. Maksimum elemanın tek olduğu da düşünülürse g iyi tanımlıdır.

Her $x \in \mathbb{R}$ için $g(x) = t_0^x \in F(x)$ ve

$$\int_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_\Omega^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} (\sup\{|t| : t \in F(x)\})^2 dx = \int_{\mathbb{R}} |t_0^x|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \, dx \tag{6.2.16}$$

olduğundan $g \in S^2(F)$ dir. Ayrıca

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \, dx \leq \sup\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\}$$

olup Lemma 6.1.3 den

$$\begin{aligned} \sup\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\} &= \sup \overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\}} \\ &= \left\| \overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\}} \right\|_\Omega \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \, dx \leq \left\| \overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\}} \right\|_\Omega \tag{6.2.17}$$

olur. (6.2.16) ve (6.2.17) birlikte düşünülürse

$$\int_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_\Omega^2 \, dx \leq \left\| \overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\}} \right\|_\Omega \tag{6.2.18}$$

yazılır. O halde (6.2.15) ve (6.2.18) den

$$\int_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_\Omega^2 \, dx = \left\| \overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\}} \right\|_\Omega$$

olup

$$\|F\|_{L^2} = \left\| \overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\}} \right\|_\Omega^{1/2} = (\int_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_\Omega^2 \, dx)^{1/2}$$

elde edilir. □

Teorem 6.2.2. *$L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ quasilineer uzayı (6.2.11) ile verilen norma göre tamdır, yani; $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayı bir Banach quasilineer uzaydır.*

İspat. $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$, $L^2(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ deki fonksiyonların bir dizisi ve $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|F_k\| < \infty$ olsun. Teorem 2.1.7 e göre $\sum\limits_{k=1}^{\infty}F_k$ serisinin yakınsak olduğunu gösterirsek ispat tamamlanır. Bunun için $L^2(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ de öyle bir F fonksiyonu bulacağız öyle ki

$$\lim_{n\to\infty} h_{L^2}(\sum_{k=1}^{n}F_k, F) = 0$$

olsun. Burada h_{L^2}, $L^2(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ normlu quasilineer uzayı üzerindeki Hausdorff metriktir. Şimdi

$$g(x) = (\sum_{k=1}^{\infty}\|F_k(x)\|_{\Omega})^2$$

şeklinde tanımlanan $g : \mathbb{R} \to [0,\infty]$ fonksiyonunu göz önüne alalım.

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx = \int_{\mathbb{R}}(\sum_{k=1}^{\infty}\|F_k(x)\|_{\Omega})^2 dx = \int_{\mathbb{R}}\lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\|F_k(x)\|_{\Omega})^2 dx \qquad (6.2.19)$$

yazılabilir. $G_n = \int\limits_{\mathbb{R}}(\sum\limits_{k=1}^{n}\|F_k(x)\|_{\Omega})^2 dx$ olmak üzere Minkowski eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} G_n &= \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}(\sum_{k=1}^{n}\|F_k(x)\|_{\Omega})^2 dx\\ &\leq \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}(\int_{\mathbb{R}}\|F_k(x)\|_{\Omega}^2\,dx)^{1/2})^2\\ &= \lim_{n\to\infty}(\sum_{k=1}^{n}\|F_k\|)^2 = (\sum_{k=1}^{\infty}\|F_k\|)^2\end{aligned}$$

olup kabulden $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|F_k\| < \infty$ olduğundan $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi yakınsaktır. Ayrıca $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi monoton artandır. O halde monoton yakınsaklık teoremi uygulanılabilir. Böylece (6.2.19) eşitliği

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx \leq (\sum_{k=1}^{\infty}\|F_k\|)^2$$

halini alır. $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|F_k\| < \infty$ olduğundan $\int\limits_{\mathbb{R}} g(x)dx < \infty$ olup g integrallenebilen bir fonksiyondur. Teorem 2.1.22 e göre hemen hemen her x için $g(x)$ sonludur. Hemen hemen her x için $g(x) = (\sum\limits_{k=1}^{\infty}\|F_k(x)\|)^2 < \infty$ olduğundan hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|F_k(x)\|_\Omega$ serisi yakınsaktır. $\Omega(\mathbb{C})$ tam olduğundan hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için $\sum\limits_{k=1}^{\infty} F_k(x)$ serisi yakınsaktır. Şimdi

$$F(x) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{\infty} F_k(x) & , g(x) < \infty \\ \{0\} & , g(x) = \infty \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $F : \mathbb{R} \to \Omega(\mathbb{C})$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Teorem 3.3.3 e göre F küme-değerli dönüşümü ölçülebilirdir. Ayrıca

$$\|F(x)\|_\Omega^2 = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) \right\|_\Omega^2 \leq (\sum_{k=1}^{\infty} \|F_k(x)\|_\Omega)^2 = g(x)$$

ve

$$\int_{\mathbb{R}} g(x)dx < \infty$$

olduğundan $\int\limits_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_\Omega^2 \, dx < \infty$ olup $F \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ dir. Ayrıca hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} 0 \leq \lim_{n\to\infty} h_\Omega(\sum_{k=1}^{n} F_k(x), F(x)) &\leq \lim_{n\to\infty} \left\| \sum_{k=1}^{n} F_k(x) - F(x) \right\|_\Omega \\ = \left\| \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} F_k(x) - \lim_{n\to\infty} F(x) \right\|_\Omega &= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} F_k(x) - F(x) \right\|_\Omega = 0 \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} h_\Omega(\sum_{k=1}^{n} F_k(x), F(x)) = 0 \tag{6.2.20}$$

dır. İspatı tamamlamak için $\sum\limits_{k=1}^{\infty} F_k$ fonksiyon serisinin F fonksiyonuna yakınsak olduğunu göstereceğiz. Bunun için $\lim\limits_{n\to\infty} h_{L^2}(\sum\limits_{k=1}^{n} F_k, F) = 0$ olduğunu göstereceğiz. $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ üzerindeki Hausdorff metrik tanımından her $r > 0$ için $F_r^i \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$, $i = 1, 2$ vardır öyle ki $\sum\limits_{k=1}^{n} F_k \preceq F + F_r^1$, $F \preceq \sum\limits_{k=1}^{n} F_k + F_r^2$ ve $\|F_r^i\| \leq r$ dir. Böylece hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\sum_{k=1}^{n} F_k(x) \subseteq F(x) + F_r^1(x)$$

ve

$$F(x) \subseteq \sum_{k=1}^{n} F_k(x) + F_r^2(x)$$

dir. Ayrıca $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki Hausdorff metrik tanımından hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için

$$h_\Omega(\sum_{k=1}^{n} F_k(x), F(x))$$
$$= \inf\{r \geq 0 : \sum_{k=1}^{n} F_k(x) \subseteq F(x) + F_r^1(x), F(x) + F_r^2(x) \subseteq \sum_{k=1}^{n} F_k(x), \left\|F_r^i(x)\right\| \leq r, i = 1, 2\}$$

olup $\|F_r^i(x)\| \leq h_\Omega(\sum\limits_{k=1}^{n} F_k(x), F(x)) + r$ $(i = 1, 2)$ dir. Ayrıca her $r > 0$ için

$$h_{L^2}(\sum_{k=1}^{n} F_k, F) \leq \left\|F_r^i\right\| = (\int_{\mathbb{R}} \left\|F_r^i(x)\right\|_\Omega^2 dx)^{1/2} \leq (\int_{\mathbb{R}} (h_\Omega(\sum_{k=1}^{n} F_k(x), F(x)) + r)^2 dx)^{1/2}$$

olduğundan

$$h_{L^2}(\sum_{k=1}^{n} F_k, F) \leq (\int_{\mathbb{R}} (h_\Omega(\sum_{k=1}^{n} F_k(x), F(x)))^2 dx)^{1/2}$$

bulunur. O halde

$$\lim_{n\to\infty} (h_{L^2}(\sum_{k=1}^{n} F_k, F))^2 \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (h_\Omega(\sum_{k=1}^{n} F_k(x), F(x)))^2 dx$$

dir. $G_n = (h_\Omega(\sum\limits_{k=1}^{n} F_k(x), F(x)))^2$ olmak üzere $\{G_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi monoton artandır. Ayrıca (6.2.20) eşitliğinden $\lim\limits_{n\to\infty} G_n = 0 < \infty$ olduğundan monoton yakınsaklık teoremi uygulanabilir. Böylece

$$\lim_{n\to\infty} (h_{L^2}(\sum_{k=1}^{n} F_k, F))^2 \leq \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} (h_\Omega(\sum_{k=1}^{n} F_k(x), F(x)))^2 dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} (\lim_{n\to\infty} h_\Omega(\sum_{k=1}^{n} F_k(x), F(x))^2) dx$$

O halde (6.2.20) eşitliğinden $\lim\limits_{n\to\infty} h_{L^2}(\sum\limits_{k=1}^{n} F_k, F) = 0$ olup ispat tamamlanır.

Teorem 6.2.3. *$L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ quasilineer uzayı (6.2.1) ile verilen iç çarpıma göre bir Hilbert quasilineer uzaydır.*

□

İspat. $L^2(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ nin (6.2.1) ile verilen iç çarpım ile bir quasilineer iç çarpım uzayı olduğunu biliyoruz. Lemma 6.2.1 göre

$$\|F\| = \left\| \overline{\{\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \, dx : f \in S^2(F)\}} \right\|_{\Omega}^{1/2}$$

eşitliğiyle verilen norm iç çarpım normudur. Lemma 6.2.2 ve Teorem 6.2.2 den $L^2(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ tamdır. Böylece $L^2(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ bir Hilbert quasilineer uzaydır. □

6.3 $C_0(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ ve $C_C(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ Quasilineer Uzayları

Bu kısımda bir sonraki bölümde küme-değerli Fourier dönüşümünün özelliklerini belirlemede yardımcı olan bazı sürekli küme-değerli fonksiyonların uzayından bahsedeceğiz.

Tanım 6.3.1. $F : \mathbb{R} \to \Omega(\mathbb{C})$ *küme-değerli dönüşümünün* ***desteği,***

$$suppF = \overline{\{x \in \mathbb{R} : F(x) \neq \{0\}\}}$$

olarak tanımlanır. Eğer suppF kümesi sınırlı bir küme ise F ye ***kompakt desteğe sahip*** *denir.*

Tanım 6.3.2. $F : \mathbb{R} \to \Omega(\mathbb{C})$ *dönüşümü verilsin.*

- *Tüm kompakt desteğe sahip ve sürekli olan F fonksiyonlarının kümesi* $C_c(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ *olarak tanımlanır,*

  $$C_c(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C})) = \{F : \mathbb{R} \to \Omega(\mathbb{C}) \mid F \text{ sürekli ve kompakt desteğe sahip } \}.$$

- $x \to \pm\infty$ *iken* $F(x) \to \{0\}$ *olacak şekildeki tüm sürekli F fonksiyonlarının kümesi* $C_0(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C}))$ *olarak tanımlanır,*

  $$C_0(\mathbb{R},\Omega(\mathbb{C})) = \{F : \mathbb{R} \to \Omega(\mathbb{C}) \mid F \text{ sürekli ve } F(x) \to \{0\},\ x \to \pm\infty\}.$$

Lemma 6.3.1. $C_0(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ *kümesi*

$$(F_1 + F_2)(x) = F_1(x) + F_2(x),$$

$$(\alpha F) = \alpha F(x)$$

işlemleri ve

$$F_1 \preceq F_2 \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } F_1(x) \subseteq F_2(x)$$

kısmi sıralama bağıntısı ile quasilineer uzaydır.

Bu lemmanın ispatı Teorem 5.2.1 in ispatına benzer şekilde yapılır.

Lemma 6.3.2. $C_0(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ *quasilineer uzayı*

$$\|F\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}} \|F(x)\|_\Omega \tag{6.3.1}$$

eşitliğiyle tanımlı norm ile bir normlu quasilineer uzaydır.

İspat. (6.3.1) eşitliğinin (4.3.1), (4.3.2) ve (4.3.3) ile verilen norm şartlarını sağladığı kolayca görülebilir.

$F_1 \preceq F_2$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için $F_1(x) \subseteq F_2(x)$ dir. $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki normun dördüncü şartından $\|F_1(x)\|_\Omega \leq \|F_2(x)\|_\Omega$ olur. O halde $\max_{x \in \mathbb{R}} \|F_1(x)\|_\Omega \leq \max_{x \in \mathbb{R}} \|F_2(x)\|_\Omega$ olup

$$\|F_1\|_\infty \leq \|F_2\|_\infty$$

dir.

Şimdi kabul edelim ki her $\varepsilon > 0$ için $F \preceq G + F_\varepsilon$ ve $\|F_\varepsilon\|_\infty = \max_{x \in \mathbb{R}} \|F_\varepsilon(x)\|_\Omega$ olacak şekilde bir $F_\varepsilon \in C_0(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ elemanı mevcut olsun. Bu durumda her $x \in \mathbb{R}$ için

$$F(x) \subseteq G(x) + F_\varepsilon(x)$$

ve $\|F_\varepsilon(x)\|_\Omega < \varepsilon$ olur. Buradan $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki normun son şartından her $x \in \mathbb{R}$ için $F(x) \subseteq G(x)$ elde edilir. $C_0(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzeyı üzerindeki kısmi sıralama bağıntısının tanımından

$$F \preceq G$$

sonucuna ulaşılır. $\square$

Lemma 6.3.3. *$C_c(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$, $C_0(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ quasilineer uzayının bir alt uzayıdır.*

İspat. Bir $F \in C_c(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ alalım. Bu durumda $\text{supp}F = \overline{\{x \in \mathbb{R} : F(x) \neq \{0\}\}}$ kümesi sınırlıdır. O halde $\text{supp}F \subseteq [a, b]$ olacak şekilde bir $[a, b]$ aralığı vardır. $A = [a, b]$ alalım. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verilsin. Her $x \in \mathbb{R} \setminus A$ için $F(x) = \{0\}$ ve dolayısıyla $h_\Omega(F(x), \{0\}) = 0 < \varepsilon$ olur. Böylece $F(x) \to \{0\}$, $x \to \pm\infty$ olup $F \in C_0(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ dir.

Şimdi $C_c(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ nin $C_0(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ quasilineer uzayının alt uzayı olduğunu göstermek için Teorem 4.2.1 ı kullanacağız. $F, G \in C_c(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ ve $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ olsun. $\text{supp}(\alpha F + \beta G)$ kümesinin sınırlı olduğunu göstereceğiz.

Herhangi bir

$$y \in A = \{x \in \mathbb{R} : \alpha F(x) + \beta G(x) \neq \{0\}\}$$

alalım. Bu durumda $\alpha F(y) + \beta G(y) \neq \{0\}$ olur. O halde $\alpha F(y)$ ve $\beta G(y)$ lerden en az biri sıfırdan farklıdır. Kabul edelim ki $\alpha F(y) \neq \{0\}$ olsun. O halde $F(y) \neq \{0\}$ olup $y \in B = \{x \in \mathbb{R} : F(x) \neq \{0\}\}$ olur. y keyfi olduğundan $A \subseteq B$ dir. $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ olacağından

$$\bar{A} = \text{supp}(\alpha F + \beta G) \subseteq \bar{B} = \text{supp}F$$

olur. $F \in C_c(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ olduğundan $\text{supp}F \subseteq [a, b]$ olacak şekilde bir $[a, b]$ vardır. O halde $\text{supp}(\alpha F + \beta G) \subseteq [a, b]$ olup $\text{supp}(\alpha F + \beta G)$ kümesi sınırlıdır. Dolayısıyla $\alpha F + \beta G \in C_c(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ dir. Ayrıca $\alpha G(y) \neq \{0\}$ durumu için de ispat benzer şekilde yapılır. Şimdi kabul edelim ki hem $\alpha F(y) \neq \{0\}$ hem de $\alpha G(y) \neq \{0\}$ olsun. Bu durumda $F(y) \neq \{0\}$ ve $G(y) \neq \{0\}$ olup

$$y \in \{x \in \mathbb{R} : F(x) \neq \{0\}\} \cap \{x \in \mathbb{R} : G(x) \neq \{0\}\}$$

olur. y keyfi olduğundan

$$\{x \in \mathbb{R} : \alpha F(x) + \beta G(x) \neq \{0\}\} \subseteq \{x \in \mathbb{R} : F(x) \neq \{0\}\} \cap \{x \in \mathbb{R} : G(x) \neq \{0\}\}$$

dir. Buradan

$$A = \{x \in \mathbb{R} : \alpha F(x) + \beta G(x) \neq \{0\}\} \subseteq B = \{x \in \mathbb{R} : F(x) \neq \{0\}\}$$

yazarız. $\bar{A} \subseteq \bar{B}$ olduğundan

$$\bar{A} = \text{supp}(\alpha F + \beta G) \subseteq \bar{B} = \text{supp}F$$

olur. Yine $F \in C_c(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ olduğundan supp$F$ sınırlı olup supp$(\alpha F + \beta G)$ kümesi de sınırlıdır. Böylece $\alpha F + \beta G \in C_c(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ dir. □

$C_c(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ kümesi $C_0(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ nin bir alt uzayı olduğundan $C_c(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ quasilineer uzayı (6.3.1) eşitliğiyle verilen norm ile bir normlu quasilineer uzaydır.

6.4 Öteleme, Değiştirme ve Genişletme Operatörleri

Bu bölümde $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ Hilbert quasilineer uzayı üzerindeki önemli operatörlerden olan öteleme, değiştirme ve genişletme operatörlerini ve bu operatörlere ilişkin bazı sonuçları vereceğiz.

Tanım 6.4.1. *$a \in \mathbb{R}$ ve $F \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ olsun. $\mathcal{T}_a$ operatörü*

$$(\mathcal{T}_a F)(x) = F(x - a) = \overline{\{(T_a f_n)(x) = f_n(x - a) : f_n \in S^2(F), n = 1, 2, ...\}} \tag{6.4.1}$$

*ile tanımlanır ve a **ile öteleme operatörü** (translation operator) olarak adlandırılır. Burada T_a, $L_2(\mathbb{R})$ üzerindeki öteleme operatörüdür.*

Tanımdan da anlaşılacağı gibi $\mathcal{T}_a F$, F nin normunun karesi integrallenebilen sayılabilir sayıdaki tüm ölçülebilir selektörlerinin a ile ötelemelerinden oluşan bir küme yardımıyla tanımlanır.

Teorem 3.3.2 ile verilen Karakterizasyon teoremini kullanarak

$$F(x - a) = \overline{\bigcup_{n \geq 1} (T_a f_n)(x)} = \overline{\bigcup_{n \geq 1} f_n(x - a)}$$

olacak şekilde F nin ölçülebilir selektörlerden oluşan bir (f_n) dizisinin mevcut olduğunu söyleriz. Bu ise $F \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ küme-değerli dönüşümünün $a \in \mathbb{R}$ ile ötelenmesi olan $F(x-a)$ nın (6.4.1) şeklinde yazılabilmesini gerektirir. Böylece $\mathcal{T}_a$ öteleme operatörü, klasik öteleme operatörü olan T_a nın bir genelleştirilmesidir.

Notasyon 6.4.1. *Bu bölümde yazılım kolaylığı açısından* $(\mathcal{T}_a F)(x)$ *şeklinde yazmak yerine* $\mathcal{T}_a F(x)$ *olarak yazacağız. Aynı yazılım şekli modulation ve dilation operatörleri için de söz konusudur.*

Lemma 6.4.1. $\mathcal{T}_a$ *öteleme operatörü quasilineer uzaylar arasında tanımlı sınırlı lineer bir operatördür.*

İspat. $\mathcal{T}_a$ nın lineer olduğunu göstermek için Tanım 4.5.2 deki şartların sağlandığını göstereceğiz: $F, G \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olmak üzere her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\mathcal{T}_a(F+G)(x) = (F+G)(x-a) = F(x-a) + G(x-a) = \mathcal{T}_a F(x) + \mathcal{T}_a G(x)$$

ve

$$\mathcal{T}_a(\lambda F)(x) = (\lambda F)(x-a) = \lambda F(x-a) = \lambda \mathcal{T}_a F(x)$$

dir. Buradan

$$\mathcal{T}_a(F+G) = \mathcal{T}_a F + \mathcal{T}_a G \text{ ve } \mathcal{T}_a(\lambda F) = \lambda \mathcal{T}_a F \qquad (6.4.2)$$

olur. Eğer $F \preceq G$ ise hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için $F(x) \subseteq G(x)$ dir. Bu durumda hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için

$$\mathcal{T}_a F(x) = F(x-a) \subseteq G(x-a) = \mathcal{T}_a G(x) \qquad (6.4.3)$$

dir. Bu ise $\mathcal{T}_a F \preceq \mathcal{T}_a G$ olması demektir. O halde (6.4.2) ve (6.4.3) den $\mathcal{T}_a$ lineer bir operatör olur.

$F \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ olmak üzere $z = x - a$ için

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \|\mathcal{T}_a F(x)\|_\Omega^2 \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \|F(x-a)\|_\Omega^2 \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \|F(z)\|_\Omega^2 \, dz \qquad (6.4.4)$$

olup

$$\|\mathcal{T}_a F\| = \|F\|$$

dir. Böylece $\mathcal{T}_a$ sınırlıdır. $\square$

Tanım 6.4.2. *$b \in \mathbb{R}$ ve $F \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ olsun. $\mathcal{E}_b$ operatörü*

$$(\mathcal{E}_b F)(x) = e^{2\pi ibx}F(x) = \overline{\{(E_b f_n)(x) = e^{2\pi ibx} f_n(x) : f_n \in S^2(F), n = 1, 2, ...\}}$$

ile tanımlanır ve b ***ile değiştirme operatörü*** *(modulation operator) olarak adlandırılır. Burada E_b, $L_2(\mathbb{R})$ üzerindeki değiştirme operatörüdür.*

Öteleme operatörü için yapılan tartışmalar değiştirme operatörü için de yapılırsa $\mathcal{E}_b$ değiştirme operatörünün, klasik değiştirme operatörü olan E_b nin bir genelleştirilmesi olduğu görülür.

Tanım 6.4.3. *$c \in \mathbb{R}$ ve $F \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ olsun. $\mathcal{D}_c$ operatörü*

$$(\mathcal{D}_c F)(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} F(\frac{x}{c}) = \overline{\{D_c f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{c}} f_n(\frac{x}{c}) : f_n \in S^2(F), n = 1, 2, ...\}}$$

ile tanımlanır ve c ***ile genişletme operatörü*** *(dilation operator) olarak adlandırılır. Burada D_c, $L_2(\mathbb{R})$ üzerindeki genişletme operatörüdür.*

Öteleme operatörü için yapılan tartışmalar genişletme operatörü için de yapılırsa $\mathcal{D}_c$ genişletme operatörünün, klasik genişletme operatörü olan D_c nin bir genelleştirilmesi olduğu görülür.

Lemma 6.4.2. *$\mathcal{E}_b$ değiştirme ve $\mathcal{D}_c$ genişletme operatörleri quasilineer uzaylar arasında tanımlı sınırlı lineer operatörlerdir.*

Bu lemmanın ispatı Lemma 6.4.1 nin ispatına benzer şekilde yapılabilir.

Şimdi $\mathcal{T}_a, \mathcal{E}_b$ ve $\mathcal{D}_c$ operatörlerine ilişkin bazı sonuçları vereceğiz. Bunun için öncelikle gerekli olan tanımları verelim:

Tanım 6.4.4. *X_1 ve X_2 Hilbert quasilineer uzaylar ve $T : X_1 \to X_2$ sınırlı lineer operatör olsun. T nin T^* ile gösterilen **adjoint operatörü,** her $x \in X_1$ ve $y \in X_2$ için*

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle$$

şartını sağlayan $T^* : X_2 \to X_1$ dönüşümüdür.

Tanım 6.4.5. *X_1 ve X_2 Hilbert quasilineer uzaylar ve $T : X_1 \to X_2$ sınırlı lineer operatör olsun. Eğer*

- *$T = T^*$ ise T ye **self-adjoint,***
- *T birebir, örten ve $T^{-1} = T^*$ ise T ye **üniter**,*
- *$TT^* = T^*T = I$ ise T ye **normal operatör***

denir.

Lemma 6.4.3. *$\mathcal{T}_a, \mathcal{E}_b$ ve $\mathcal{D}_c$ operatörleri, $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ den $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ ye tanımlı üniter dönüşümlerdir. Ayrıca,*

- $\mathcal{T}_a^{-1} = \mathcal{T}_{-a} = (\mathcal{T}_a)^*$,
- $\mathcal{E}_b^{-1} = \mathcal{E}_{-b} = (\mathcal{E}_b)^*$,
- $\mathcal{D}_c^{-1} = \mathcal{D}_{1/c} = (\mathcal{D}_c)^*$

dir.

İspat. İspatı sadece $\mathcal{T}_a$ öteleme operatörü için vereceğiz. $\mathcal{E}_b$ ve $\mathcal{D}_c$ operatörleri için de ispat benzer şekildedir.

$F \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ için (6.4.4) eşitliği göz önüne alınırsa $\mathcal{T}_a F \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ olduğu görülür. Şimdi $\mathcal{T}_a$ nın üniter olduğunu göstereceğiz.

$z = x - a$ olmak üzere

$$\langle \mathcal{T}_a F, G\rangle = \overset{(A)}{\int\limits_{\mathbb{R}}} \langle \mathcal{T}_a F(x), G(x)\rangle_\Omega \, dx = \overset{(A)}{\int\limits_{\mathbb{R}}} \langle F(x-a), G(x)\rangle_\Omega \, dx$$
$$= \overset{(A)}{\int\limits_{\mathbb{R}}} \langle F(z), G(z+a)\rangle_\Omega \, dz = \langle F, \mathcal{T}_{-a} G\rangle$$

yazılabilir. $\mathcal{T}_a^*$ adjoint operatörün tanımından

$$\mathcal{T}_a^* = \mathcal{T}_{-a}$$

dır. Ayrıca $\mathcal{T}_a\mathcal{T}_a^* = \mathcal{T}_a\mathcal{T}_{-a} = I$ ve $\mathcal{T}_a^*\mathcal{T}_a = \mathcal{T}_{-a}\mathcal{T}_a = I$ olduğu kolayca görülebilir. O halde $\mathcal{T}_a$ üniter olup

$$\mathcal{T}_a^{-1} = \mathcal{T}_{-a} = (\mathcal{T}_a)^*$$

sonucuna ulaşılır. □

Klasik analizde öteleme, değiştirme ve genişletme operatörlerinin bileşkeleri mühendislik alanında oldukça önemlidir. Bu açıdan $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ üzerinde tanımladığımız öteleme, değiştirme ve genişletme operatörlerinin birbirleriyle bileşkelerini içeren aşağıdaki lemmayı veriyoruz.

Lemma 6.4.4. *Her $a, b \in \mathbb{R}$ ve $c > 0$ için*

(i) $(\mathcal{T}_a\mathcal{E}_b F)(x) = e^{2\pi i b(x-a)}F(x-a) = e^{-2\pi ba}(\mathcal{E}_b\mathcal{T}_a F)(x)$,

(ii) $(\mathcal{T}_a\mathcal{D}_c F)(x) = \frac{1}{\sqrt{c}}F(\frac{x}{c} - \frac{a}{c}) = (\mathcal{D}_c\mathcal{T}_{a/c}F)(x)$,

(iii) $(\mathcal{D}_c\mathcal{E}_b F)(x) = \frac{1}{\sqrt{c}}e^{2\pi ib/c}F(\frac{x}{c}) = (\mathcal{E}_{b/c}\mathcal{D}_c F)(x)$

dir.

Bu lemmanın ispatı Lemma 2.2.2 nin klasik analizdeki ispatına benzer şekilde yapılır.

7. KÜME-DEĞERLİ FOURIER DÖNÜŞÜMÜ

Bu kısımda küme-değerli dönüşümler için Fourier dönüşümünü tanımlayacağız. Bunu yaparken Fourier dönüşümünü ilk olarak $L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ üzerinde tanımlayağız ve daha sonra bu tanımı $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ Hilbert quasilineer uzayına genişleteceğiz. Bu sayede bir interval sinyalin Fourier dönüşümünü tanımlayabileceğiz. Ayrıca bu kısımda bir interval sinyalin Fourier dönüşümüne ilişkin bir uygulamaya da yer vereceğiz.

7.1 $L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ Uzayı Üzerindeki Fourier Dönüşümü

Tanım 7.1.1. *Her bir $F \in L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ fonksiyonunu, her $w \in \mathbb{R}$ için*

$$\hat{F}(w) = \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} F(x)e^{-2\pi iwx}dx = \{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi iwx}dx : f \in S^1(F)\} \tag{7.1.1}$$

*ile verilen $\hat{F} : \mathbb{R} \to \Omega(\mathbb{C})$ fonksiyonuna dönüştüren dönüşüme **küme-değerli Fourier dönüşümü** denir. $F \in L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü*

$$(\mathcal{F}F)(w) = \hat{F}(w) \qquad ,w \in \mathbb{R}$$

ile tanımlanır.

Dikkat edilirse $F \in L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ fonksiyonunun Fourier dönüşümü F nin integrallenebilir selektörlerinin bilinen Fourier dönüşümlerinin kümesidir. Yani F nin Fourier dönüşümü

$$\hat{F}(w) = \{\hat{f}(w) : \mathcal{T}(f) = \hat{f},\, f \in S^1(F)\}$$

şeklinde de verilebilir. Burada $\mathcal{T}$, Tanım 2.2.5 de verilen ve klasik analizden bildiğimiz anlamdaki Fourier dönüşümdür.

Uyarı 7.1.1. *Eğer $F \in (L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})))_r$ ise F nin küme-değerli Fourier dönüşümü Tanım 2.2.5 deki bilinen Fourier dönüşümü ile çakışır.*

Notasyon 7.1.1. *Bir $F \in L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ fonksiyonunun Fourier dünüşümü olan fonksiyonu $\hat{F}$ ile bir $f \in L^1(\mathbb{R})$ fonksiyonunun bilinen anlamdaki Fourier dönüşümü olan fonksiyonu $\hat{f}$ ile göstereceğiz. Yani, $\hat{F} = \mathcal{F}(F)$ ve $\hat{f} = \mathcal{T}(f)$ dir.*

Şimdi (7.1.1) eşitliğinin iyi tanımlı olduğunu göstereceğiz: Öncelikle

$$\varphi(x) = F(x)e^{-2\pi iwx}, w \in \mathbb{R} \tag{7.1.2}$$

ile tanımlı $\varphi : \mathbb{R} \to \Omega(\mathbb{C})$ küme-değerli dönüşümünü göz önüne alalım. Teorem 6.1.2 e göre φ fonksiyonu ölçülebilir bir selektöre sahiptir. Böylece φ Aumann anlamında integrallenebilirdir ve φ nin Aumann integrali (7.1.1) eşitliğini verir.

Aşağıdaki lemma $F \in L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ fonksiyonunun Fourier dünüşümünün sürekli bir fonksiyon olduğunu söyler.

Lemma 7.1.1. *Eğer $F \in L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ ise $\hat{F}$ süreklidir.*

İspat. $F \in L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ ve $w \in \mathbb{R}$ olsun. $\hat{F}$ nın sürekli olduğunu göstermek için $\delta \to 0$ iken $h_\Omega(\hat{F}(w+\delta), \hat{F}(w)) \to 0$ olduğunu göstereceğiz.

Her $\delta \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} h_\Omega(\hat{F}(w+\delta), \hat{F}(w)) &\leq \left\| \hat{F}(w+\delta) - \hat{F}(w) \right\|_\Omega \\ &= \left\| \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} F(x)e^{-2\pi i(w+\delta)x}dx - \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} F(x)e^{-2\pi iwx}dx \right\|_\Omega \end{aligned}$$

dir. Eğer $\mathcal{B} = \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} F(x)e^{-2\pi i(w+\delta)x}dx - \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} F(x)e^{-2\pi iwx}dx$ dersek $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki normun tanımından

$$\left\| \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} F(x)e^{-2\pi i(w+\delta)x}dx - \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} F(x)e^{-2\pi iwx}dx \right\|_\Omega = \sup\{|a| : a \in \mathcal{B}\}$$

olur. $\mathcal{B}$, $\mathbb{C}$ nin kompakt bir alt kümesi olduğundan bir $a_0 \in \mathcal{B}$ vardır öyle ki

$$\sup\{|a| : a \in \mathcal{B}\} = |a_0|$$

dir. Ayrıca

$$\overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} F(x)e^{-2\pi i(w+\delta)x}dx = \{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi i(w+\delta)x}dx : f \in S^1(F)\}$$

ve

$$\overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} F(x)e^{-2\pi iwx}dx = \{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi iwx}dx : f \in S^1(F)\}$$

olduğunu hatırlarsak bir $f_1 \in S^1(F)$ ve bir $f_2 \in S^1(F)$ için

$$a_0 = \int_{\mathbb{R}} f_1(x)e^{-2\pi i(w+\delta)x}dx - \int_{\mathbb{R}} f_2(x)e^{-2\pi iwx}dx$$

yazarız. Böylece

$$\begin{aligned} h_\Omega(\hat{F}(w+\delta), \hat{F}(w)) \leq |a_0| &= \left| \int_{\mathbb{R}} f_1(x)e^{-2\pi i(w+\delta)x}dx - \int_{\mathbb{R}} f_2(x)e^{-2\pi iwx}dx \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} (f_1(x) - f_2(x))(e^{-2\pi i(w+\delta)x} - e^{-2\pi iwx})dx \right| \end{aligned}$$

olup

$$h_\Omega(\hat{F}(w+\delta), \hat{F}(w)) \leq \int_{\mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)| \left|e^{-2\pi i\delta x} - 1\right| dx \tag{7.1.3}$$

dir. Şimdi

$$f_\delta(x) = \int_{\mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)| \left|e^{-2\pi i\delta x} - 1\right| dx$$

fonksiyonlarını düşünelim. $\delta \to 0$ iken $f_\delta(x) \to 0$ olduğu açıktır. Ayrıca her $\delta > 0$ için

$$|f_\delta(x)| \leq 2\,|f_1(x) - f_2(x)|$$

dir. Lebesque dominant yakınsaklık teoreminden

$$\lim_{\delta \to 0}(\int_{\mathbb{R}} |f_1(x) - f_2(x)| \left|e^{-2\pi i\delta x} - 1\right| dx) = \int_{\mathbb{R}} 0dx = 0$$

olur. Böylece (7.1.3) eşitsizliğinden $\delta \to 0$ için

$$h_\Omega(\hat{F}(w+\delta), \hat{F}(w)) \to 0$$

sonucuna ulaşılır. $\delta \in \mathbb{R}$ keyfi olduğundan $\hat{F}$ süreklidir. □

Şimdi küme-değerli Fourier dönüşümünün bazı önemli özelliklerinden bahsedeceğiz. Bu özelliklerden en önemlisi küme-değerli Fourier dönüşümünün $L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ deki bir fonksiyonu $C_0(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ deki bir fonksiyona dönüştürmesidir.

Lemma 7.1.2. ***(Küme-değerli fonksiyonlar için Riemann-Lebesque Lemması)***

$F \in L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ ise $\hat{F} \in C_0(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ dir.

İspat. İlk olarak her $w \in \mathbb{R}$ için $\hat{F}(w) = \overset{(A)}{\int\limits_{\mathbb{R}}} F(x)e^{-2\pi iwx}dx \in \Omega(\mathbb{C})$ olduğunu göstereceğiz. Şimdi (7.1.2) eşitliğiyle verilen φ fonksiyonunu düşünelim. φ nin tanımından

$$\varphi(x) = F(x)e^{-2\pi iwx} = \{z_x e^{-2\pi iwx} : z_x \in F(x)\} \quad , w \in \mathbb{R}$$

yazılır. Her bir $x \in \mathbb{R}$ için $\varphi(x)$, $\mathbb{C}$ nin kompakt bir alt kümesi olduğundan x e bağlı bir $z_x^0 \in F(x)$ elemanı vardır öyle ki

$$\|\varphi(x)\|_\Omega = \sup\{\left|z_x e^{-2\pi iwx}\right| : z_x \in F(x)\} = \left|z_x^0\right|$$

dir. Ayrıca her bir $x \in \mathbb{R}$ için $|e^{-2\pi iwx}| = 1$ olduğundan $\|\varphi(x)\|_\Omega = \|F(x)\|_\Omega$ dir. Şimdi

$$k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad k(x) = \left|z_x^0\right|$$

fonksiyonunu düşünelim.

$$\int\limits_{\mathbb{R}} k(x)dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \left|z_x^0\right| dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \|\varphi(x)\|_\Omega \, dx = \int\limits_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_\Omega \, dx$$

olup $F \in L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ olduğundan $k \in L_1(\mathbb{R})$ dir. Ayrıca

$$\|\varphi(x)\|_\Omega = \left|z_x^0\right| .1 = \left|z_x^0\right| . \|\{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 1\}\|_\Omega$$

dır. $B = \{c \in \mathbb{C} : |c| \leq 1\}$ olmak üzere her bir $x \in \mathbb{R}$ için

$$\|\varphi(x)\|_\Omega = \left|z_x^0\right| \|B\|_\Omega = \|k(x)B\|_\Omega$$

dir. $\Omega(\mathbb{C})$ bir Ω-uzayı olduğundan her bir $x \in \mathbb{R}$ için $\varphi(x) \subseteq k(x)B$ dir. Böylece φ integrably sınırlıdır. Teorem 3.4.1 den her $w \in \mathbb{R}$ için

$$\hat{F}(w) = \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} \varphi(x)dx = \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} F(x)e^{-2\pi iwx}dx \in \Omega(\mathbb{C})$$

olduğunu söyleriz. Şimdi $w \to \pm\infty$ iken $\hat{F}(w) \to 0$ olduğunu göstereceğiz. Küme-değerli Fourier dönüşümün tanımından

$$\hat{F}(w) = \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} F(x)e^{-2\pi iwx}dx = \{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi iwx}dx : f \in S^1(F)\}$$

olduğunu biliyoruz. $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki normun tanımı kullanılırsa

$$\left\|\hat{F}(w)\right\|_{\Omega} = \sup\{\left|\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi iwx}dx\right| : f \in S^1(F)\}$$

yazılır. $\{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi iwx}dx \ : \ f \ \in \ S^1(F)\}$ kompakt bir küme olduğundan bir $g \in S^1(F)$ elemanı vardır öyle ki

$$\left\|\hat{F}(w)\right\|_{\Omega} = \left|\int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-2\pi iwx}dx\right|$$

dir. $S^1(F) \subset L^1(\mathbb{R})$ olduğundan $g \in L^1(\mathbb{R})$ dir. g nin Fourier dönüşümü $\hat{g}$ olmak üzere $\left\|\hat{F}(w)\right\|_{\Omega} = |\hat{g}(w)|$ yazılır. $w \neq 0$ ve $y = x - \frac{1}{2w}$ olsun. Böylece

$$\begin{aligned}\hat{g}(w) &= \int_{\mathbb{R}} g(x)e^{-2\pi iwx}dx = \int_{\mathbb{R}} g(y + \frac{1}{2w})e^{-2\pi iw(y+\frac{1}{2w})}dy \\ &= e^{-\pi i}\int_{\mathbb{R}} g(y + \frac{1}{2w})e^{-2\pi iwy}dy = -\int_{\mathbb{R}} g(y + \frac{1}{2w})e^{-2\pi iwy}dy\end{aligned}$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\hat{g}(w) &= \frac{1}{2}(\hat{g}(w) + \hat{g}(w)) \\ &= \frac{1}{2}(\int_{\mathbb{R}} g(y)e^{-2\pi iwy}dy - \int_{\mathbb{R}} g(y + \frac{1}{2w})e^{-2\pi iwy}dy) \\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}} (g(y) - g(y + \frac{1}{2w}))e^{-2\pi iwy}dy\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece $T_{\frac{-1}{2w}}$, g nin öteleme operatörü olmak üzere

$$|\hat{g}(w)| \leq \frac{1}{2}\int\limits_{\mathbb{R}} \left| g(y) - g(y + \frac{1}{2w}) \right| dy = \frac{1}{2} \left\| g - T_{\frac{-1}{2w}} g \right\|_1 \tag{7.1.4}$$

olur. Lemma 2.2.3 den $\left\| g - T_{\frac{-1}{2w}} g \right\|_1 \to 0$, $\frac{-1}{2w} \to 0$ olacağından $w \to \pm\infty$ için $\hat{F}(w) \to 0$ sonucuna ulaşılır. O halde Lemma 7.1.1 e göre $\hat{F}$ süreklidir. Böylece $\hat{F} \in C_0(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ olduğunu göstermiş oluruz. □

Şimdi bir sonraki teoremin ispatında kullanacağımız aşağıdaki lemmayı verelim.

Lemma 7.1.3. *$F \in L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ ve F nin Aumann integrali kompakt küme olsun. Bu durumda*

$$\left\| \overset{(A)}{\int\limits_{\mathbb{R}}} F(x)dx \right\|_{\Omega} \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_{\Omega}\, dx$$

dır.

İspat. Küme-değerli Fourier dönüşümün tanımından

$$\hat{F}(w) = \overset{(A)}{\int\limits_{\mathbb{R}}} F(x)e^{-2\pi iwx}dx = \{\int\limits_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi iwx}dx : f \in S^1(F)\}$$

olduğunu biliyoruz. $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki normun tanımı kullanılırsa

$$\left\| \overset{(A)}{\int\limits_{\mathbb{R}}} F(x)dx \right\|_{\Omega} = \sup\{ \left| \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx \right| : f \in S^1(F)\}$$

yazılır. Hipoteze göre F nin Aumann integrali kompakt küme olduğundan

$$\sup\{ \left| \int\limits_{\mathbb{R}} f(x)dx \right| : f \in S^1(F)\} = \left| \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)dx \right|$$

olacak şekilde bir $g \in S^1(F)$ elemanı mevcuttur. Ayrıca $g \in S^1(F)$ olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için $|g(x)| \leq \|F(x)\|_{\Omega}$ dir. Böylece

$$\left\| \overset{(A)}{\int\limits_{\mathbb{R}}} F(x)dx \right\|_{\Omega} \leq \left| \int\limits_{\mathbb{R}} g(x)dx \right| \leq \int\limits_{\mathbb{R}} |g(x)|\, dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_{\Omega}\, dx$$

elde edilir. □

Teorem 7.1.1. *$\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \to C_0(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ küme-değerli Fourier dönüşümü sınırlı lineer bir operatördür.*

İspat. $\mathcal{F}$ nin lineer olduğunu göstermek için Tanım 4.5.2 deki şartları sağladığını göstereceğiz. Önerme 3.4.2 den $F, G \in L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$, $\lambda \in \mathbb{C}$ ve her $w \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(F+G))(w) &= \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} (F+G)(x) e^{-2\pi i w x} dx = \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} (F(x)+G(x)) e^{-2\pi i w x} dx \\ &= \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} F(x) e^{-2\pi i w x} dx + \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} G(x) e^{-2\pi i w x} dx = (\mathcal{F}(F))(w) + (\mathcal{F}(G))(w)\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\mathcal{F}(\lambda F))(w) &= \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} (\lambda F)(x) e^{-2\pi i w x} dx = \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} \lambda F(x) e^{-2\pi i w x} dx \\ &= \lambda \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} F(x) e^{-2\pi i w x} dx = \lambda (\mathcal{F}(F))(w)\end{aligned}$$

dir. $F \preceq G$ olsun. Bu durumda hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için $F(x) \subseteq G(x)$ dir. $e^{-2\pi i w x} \in \mathbb{C}$ için $e^{-2\pi i w x} F(x) \subseteq e^{-2\pi i w x} G(x)$ olup Önerme 3.4.1 den

$$(\mathcal{F}(F))(w) = \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} F(x) e^{-2\pi i w x} dx \subseteq \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} G(x) e^{-2\pi i w x} dx = (\mathcal{F}(G))(w)$$

olur. O halde $\mathcal{F}$ lineerdir. Ayrıca

$$\|\mathcal{F}F\|_{\infty} = \max_{w \in \mathbb{R}} \|\mathcal{F}F(w)\|_{\Omega} = \max_{w \in \mathbb{R}} \left\| \hat{F}(w) \right\|_{\Omega}$$

olup Lemma 7.1.3 den

$$\begin{aligned}\|\mathcal{F}F\|_{\infty} &= \max_{w \in \mathbb{R}} \left\| \hat{F}(w) \right\|_{\Omega} \\ &= \max_{w \in \mathbb{R}} \left\| \overset{(A)}{\int_{\mathbb{R}}} F(x) e^{-2\pi i w x} dx \right\|_{\Omega} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_{\Omega} \, dx = \|F\|_1\end{aligned}$$

dır. Böylece $\mathcal{F}$ sınırlıdır. $\square$

7.2 $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ Uzayı Üzerindeki Fourier Dönüşümü

Çalışmalarımız boyunca $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayında olduğu halde $L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayında olmayan bazı küme-değerli fonksiyonlarla karşılaşabildik. Bu durumda her $F \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ küme-değerli fonksiyonu için F nin Fourier dönüşümünün tanımlanamayağını söyleyebiliriz. Bu bölümde $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayındaki her fonksiyon için Fourier dönüşümünü tanımlayabilmek amacıyla gerekli alt yapıyı hazırlayacağız. Sonrasında bir interval sinyalin Fourier dönüşümüne ilişkin bir uygulama vereceğiz.

İlk olarak $L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayındaki fonksiyonların Fourier dönüşümlerinin bazı özelliklerini vererek başlıyoruz.

Tanım 7.2.1. $L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ *uzayı üzerindeki Fourier dönüşümü (7.1.1) eşitliğiyle verilir. Yani* $F \in L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ *için* F *nin Fourier dönüşümü*

$$\hat{F}(w) = \{\hat{f}(w) : \mathcal{T}(f) = \hat{f},\ f \in S^1(F)\}$$

şeklindedir. $\hat{F}$ *nın iyi tanımlı olduğu (7.1.2) eşitliğiyle verilen* φ *fonksiyonu yardımıyla kolayca görülebilir.*

Aşağıdaki teorem $L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayındaki fonksiyonların Fourier dönüşümünün $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayında olduğunu söyler.

Teorem 7.2.1. ***(Küme-Değerli Fonksiyonlar İçin Plancherel Teoremi)*** *Eğer* $F \in L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ *ise* $\hat{F} \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ *dir.*

İspat. $\hat{F}$ fonksiyonunun $\mathbb{R}$ den $\Omega(\mathbb{C})$ ye tanımlı olduğu Lemma 7.1.2 in ispatındaki gibi yapılır. Her $w \in \mathbb{R}$ için $\hat{F}(w) = \{\hat{f}(w) : \mathcal{T}(f) = \hat{f},\ f \in S^1(F)\}$ kümesi kompakt olduğundan bir $g \in S^1(F)$ vardır öyle ki $\mathcal{T}(g) = \hat{g}$ ve

$$\left\|\hat{F}(w)\right\|_{\Omega} = \sup\{\left|\hat{f}(w)\right| : \mathcal{T}(f) = \hat{f}, f \in S^1(F)\} = |\hat{g}(w)|$$

dir. Böylece

$$\int_{\mathbb{R}} \left\|\hat{F}(w)\right\|_{\Omega}^{2} dw = \int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(w)|^2 \, dw$$

olur. $g \in S^1(F)$ olduğundan $g \in L^1(\mathbb{R})$ dir. Ayrıca g fonksiyonu F küme-değerli fonksiyonunun bir selektörü olduğundan her $x \in \mathbb{R}$ için $g(x) \in F(x)$ dir. $F(x) \in \Omega(\mathbb{C})$ olup $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki normun tanımından her $x \in \mathbb{R}$ için $|g(x)|^2 \leq \|F(x)\|_{\Omega}^2$ dir. Buradan

$$\int_{\mathbb{R}} |g(x)|^2 \, dx \leq \int_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_{\Omega}^2 \, dx$$

olup $F \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ olduğundan $g \in L^2(\mathbb{R})$ dir. O halde $g \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ sonucuna ulaşılır. Teorem 2.2.3 ile verilen klasik Plancherel teoremine göre $\hat{g} \in L^2(\mathbb{R})$ olur. Dolayısıyla $\int_{\mathbb{R}} |\hat{g}(w)|^2 \, dw < \infty$ olacağından

$$\int_{\mathbb{R}} \left\|\hat{F}(w)\right\|_{\Omega}^{2} dw < \infty$$

dır. Böylece $\hat{F} \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ dir. □

Şimdi bir sonraki teoremin ispatında kullanacağımız aşağıdaki önemli lemmayı verelim.

Lemma 7.2.1. *Eğer* $F_1, F_2 \in L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$, $1 \leq p < \infty$ *ise*

$$h_{L^p}(F_1, F_2) \leq \Big(\int_{\mathbb{R}} (h_{\Omega}(F_1(x), F_2(x))^p dx\Big)^{1/p}$$

dir. Burada h_{L^p}, $L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ *üzerindeki Hausdorff metrik ve* h_{Ω} *ise* $\Omega(\mathbb{C})$ *üzerindeki Hausdorff metriktir.*

İspat. $L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ üzerindeki Hausdorff metrik tanımından her $\varepsilon > 0$ için $F_1 \preceq F_2 + F_r^1$, $F_2 \preceq F_1 + F_r^2$ ve $\|F_r^i\|_{L^p} \leq r$ olacak şekilde $F_r^i \in L^p(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$, $i = 1, 2$ elemanları vardır. Bu durumda hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ için $F_1(x) \subseteq F(x) + F_r^1(x)$, $F_2(x) \subseteq F_1(x) + F_r^2(x)$ dir. $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki Hausdorff metrikten hemen hemen her $x \in \mathbb{R}$ ve $i = 1, 2$ için

$$\left\|F_r^i(x)\right\|_{\Omega} \leq h_{\Omega}(F_1(x), F_2(x)) + r$$

yazılır. Böylece her $r > 0$ için

$$h_{L^p}(F_1, F_2) \leq \left\| F_r^i \right\|_{L^p} = (\int\limits_{\mathbb{R}} \left\| F_r^i(x) \right\|_{\Omega}^p dx)^{1/p} \leq (\int\limits_{\mathbb{R}} (h_\Omega(F_1(x), F_2(x)) + r)^p dx)^{1/p}$$

olduğundan

$$h_{L^p}(F_1, F_2) \leq (\int\limits_{\mathbb{R}} (h_\Omega(F_1(x), F_2(x))^p dx)^{1/p}$$

elde edilir. □

Teorem 7.2.2. *$L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ kümesi $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayında yoğundur.*

İspat. Herhangi bir $F \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ alalım. $L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ kümesinde bir $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi bulacağız öyle ki $h_{L_2}(F_n, F) \to 0$, $n \to \infty$ olsun. Şimdi $n = 1, 2, ...$ olmak üzere

$$F_n(x) = \begin{cases} F(x) \ , |x| \leq n \\ \{0\} \ \ , |x| > n \end{cases}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Her bir $n = 1, 2, ...$ için

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}} \|F_n(x)\|_\Omega \, dx &= \int\limits_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_\Omega \, \chi_{[-n,n]}(x) dx \\ &\leq (\int\limits_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_\Omega^2 \, dx)^{1/2} (\int\limits_{\mathbb{R}} \left|\chi_{[-n,n]}(x)\right|^2 dx)^{1/2} \\ &= \sqrt{2n} \, \|F\|_{L^2} < \infty \end{aligned}$$

ve

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \|F_n(x)\|_\Omega^2 \, dx \leq \int\limits_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_\Omega^2 \, dx < \infty$$

olduğundan $\{F_n\}_{n=1}^{\infty} \subset L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ dır.

$|x| \leq n$ için

$$h_\Omega(F_n(x), F(x)) = h_\Omega(F(x), F(x)) = 0$$

ve $|x| > n$ için

$$h_\Omega(F_n(x), F(x)) = h_\Omega(\{0\}, F(x)) = \|F(x)\|_\Omega$$

olup

$$\lim_{n\to\infty} h_\Omega(F_n(x), F(x)) = \lim_{n\to\infty} \begin{cases} 0 & , |x| \leq n \\ \|F(x)\|_\Omega & , |x| > n \end{cases} = 0$$

dır. Öte yandan $\lim\limits_{n\to\infty} h_\Omega(F_n(x), F(x)) = 0 < \infty$ olduğundan monoton yakınsaklık teoremi uygulanılabilir. Buna göre

$$\lim_{n\to\infty} h^2_{L^2}(F_n, F) \leq \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} (h_\Omega(F_n(x), F(x))^2 dx = \int\limits_{\mathbb{R}} (\lim_{n\to\infty} h_\Omega(F_n(x), F(x))^2) dx$$

yazılır. Buradan $\lim\limits_{n\to\infty} h_{L^2}(F_n, F) = 0$ olup ispat tamamlanır. □

Teorem 7.2.3. $\mathcal{F} : L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \to L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ *küme-değerli Fourier dönüşümü sınırlı lineer bir operatördür.*

İspat. $\mathcal{F}$ nin lineer olduğunu Teorem 7.1.1 deki ispata benzer şekilde gösterebiliriz. $\mathcal{F}$ nin sınırlı olduğunu göstereceğiz. $F \in L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ için $\|\mathcal{F}F\|_{L^2} \leq c\,\|F\|_{L^2}$ olacak şekilde bir $c > 0$ bulmalıyız. $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ üzerindeki normun tanımından

$$\|\mathcal{F}F\|_{L^2} = \int\limits_{\mathbb{R}} \|(\mathcal{F}F)(w)\|^2_\Omega \, dw = \int\limits_{\mathbb{R}} \left\|\hat{F}(w)\right\|^2_\Omega dw$$

yazabiliriz. $\mathcal{T}$, $L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ kümesi üzerindeki bilinen Fourier dönüşümü olmak üzere $\Omega(\mathbb{C})$ üzerindeki normun tanımından

$$\left\|\hat{F}(w)\right\|_\Omega = \sup\{\left|\hat{f}(w)\right| : \hat{f} = \mathcal{T}f, f \in S^1(F)\}$$

yazarız. $\{\hat{f}(w) : \hat{f} = Tf, f \in S^1(F)\}$ kümesi $\mathbb{C}$ nin kompakt bir alt kümesi olduğundan bir $g \in S^1(F)$ vardır öyle ki $\mathcal{T}(g) = \hat{g}$ ve

$$\sup\{\left|\hat{f}(w)\right| : \mathcal{T}(f) = \hat{f}, f \in S^1(F)\} = |\hat{g}(w)|$$

dir. Ayrıca Teorem 2.2.3 ile verilen klasik Plancherel teoremine göre $\|g\|_2 = \|\hat{g}\|_2$

dir. O halde

$$\begin{aligned}
\|\mathcal{F}F\|_{L^2} &= (\int\limits_{\mathbb{R}} \left\|\hat{F}(w)\right\|_{\Omega}^2 dw)^{1/2} = (\int\limits_{\mathbb{R}} |\hat{g}(w)|^2 \, dw)^{1/2} \\
&= \|g\|_2 = \|\hat{g}\|_2 = (\int\limits_{\mathbb{R}} |g(w)|^2 \, dw)^{1/2} \\
&\leq \left\| \overline{\{\int\limits_{\mathbb{R}} |f(w)|^2 \, dw : f \in S^2(F)\}} \right\|_{\Omega} \\
&= \|F\|_{L^2}
\end{aligned}$$

olup $c = 1$ için sınırlılık şartı sağlanır. $\square$

Şimdi $L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ nin $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ de yoğun olmasını kullanarak $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayı üzerindeki küme-değerli Fourier dönüşümünü tanımlayan aşağıdaki teoremi vereceğiz.

Teorem 7.2.4. ***($L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayı üzerindeki küme-değerli Fourier dönüşümü)***

Küme-değerli Fourier dönüşümü $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ den $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ ye tanımlı bir fonksiyona genişletilebilir ve $\mathcal{F}F = \hat{F}$ şeklinde tanımlı olan $\mathcal{F}$ Fourier dönüşümü için $\|F\|_{L^2} = \left\|\hat{F}\right\|_{L^2}$ dir.

İspat. $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ nin tam normlu quasilineer uzay olduğunu hatırlayalım. Teorem 7.2.3 den $\mathcal{F}$ küme-değerli Fourier dönüşümünün sınırlı ve lineer olduğunu biliyoruz. Ayrıca $L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ kümesi $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayında yoğun olduğundan Teorem 4.5.2 ye göre $\mathcal{F}$ küme-değerli Fourier dönüşümü $L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayından $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ uzayına genişletilebilir ve $\mathcal{F}F = \hat{F}$ şeklinde tanımlı olan $\mathcal{F}$ Fourier dönüşümü için $\|F\|_{L^2} = \left\|\hat{F}\right\|_{L^2}$ dir. $\square$

Tanım 7.2.2. $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ *dizisi,* $L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C})) \cap L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ *uzayında* $L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ *uzayı üzerindeki Hausdorff metriğe göre bir* $F \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ *fonksiyonuna yakınsak olmak üzere* $\{\hat{F}_n\}_{n=1}^{\infty}$ *Fourier dönüşümlerinin oluşturduğu dizinin limit noktasına*

F küme-değerli dönüşümünün ***Fourier dönüşümü*** *denir. Ayrıca bir $F \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ küme-değerli dönüşümünün bu yolla elde edilen $\hat{F} \in L^2(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ küme-değerli Fourier dönüşümü tektir.*

Şimdi interval sinyalin Fourier dönüşümünün nasıl hesaplanacağına dair bir örnek verelim:

Örnek 7.2.1. *t_0 herhangi bir pozitif tam sayı olmak üzere*

$$F(t) = \begin{cases} [-1/\sqrt{t_0}, 1/\sqrt{t_0}] & , \quad |t| \leq \frac{1}{2}t_0; \\ \{0\} & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

ile belirlenen sürekli-zamanlı interval sinyali verilmiş olsun. Bu interval sinyal, $\mathbb{R}$ den $\Omega(\mathbb{C})$ ye tanımlı bir fonksiyon olup

$$\int_{\mathbb{R}} \|F(x)\|_{\Omega} \, dx = \int_{-t_0/2}^{t_0/2} \left\|[-1/\sqrt{t_0}, 1/\sqrt{t_0}]\right\|_{\Omega} dx = \frac{t_0}{\sqrt{t_0}} < \infty$$

olduğundan $F \in L^1(\mathbb{R}, \Omega(\mathbb{C}))$ dir. F sinyalinin Fourier dönüşümünü bulmak için $f \in S^1(F)$ olacak şekildeki tüm f selektörlerinin Fourier dönüşümünü hesaplamalıyız. Ancak F nin tüm f integrallenebilir selektörlerinin bulunması ve bunların Fourier dönüşümlerinin hesaplanması oldukça zor olduğundan Teorem 3.4.2 ile verilen Castaing Temsil Teoremini kullanarak F nin noktasal yoğun olan bir $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ integrallenebilir selektörlerini bulmak daha kolaydır.

Şimdi $n = 1, 2, ...$ olmak üzere her bir $u_n \in [-1/\sqrt{t_0}, 1/\sqrt{t_0}] \cap \mathbb{Q}$ için

$$f_n(x) = \begin{cases} u_n & , \quad |x| \leq \frac{1}{2}t_0; \\ 0 & , \quad \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde tanımlı f_n sürekli-zaman sinyallerini (sabit fonksiyonlarını) ele alalım. Burada her bir u_n, $[-1/\sqrt{t_0}, 1/\sqrt{t_0}]$ aralığından seçilmiş birer rasyonel sayıdır.

f_n nin tanımından her $x \in \mathbb{R}$ ve $n = 1, 2, ...$ için $f_n(x) \in F(x)$ yazılabilir. Ayrıca $n = 1, 2, ...$ için

$$\int_{\mathbb{R}} |f_n(x)| \, dx = \int_{-t_0/2}^{t_0/2} u_n dx = u_n.t_0 < \infty$$

olduğundan $f_n \in S^1(F)$ *dir. Ayrıca her* $x \in \mathbb{R}$ *için*

$$\overline{\{f_n(x) : n = 1, 2, ...\}} = F(x)$$

olduğundan $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ *integrallenebilir selektörlerinin ailesi* F *de noktasal yoğundur. O halde Castaing Temsil Teoremi uygulanabilir. Buna göre* F *interval sinyalinin Fourier dönüşümü*

$$\begin{aligned}\hat{F}(w) &= \{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi iwx}dx : f \in S^1(F)\} \\ &= \overline{\{\int_{-t_0/2}^{t_0/2} f_n(x)e^{-2\pi iwx}dx : n = 1, 2, ...\}}\end{aligned}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Tanım 2.2.1 den her bir $n = 1, 2, ...$ *için* f_n *sinyallerinin Fourier dönüşümü*

$$\begin{aligned}\hat{f_n}(w) &= \int_{\mathbb{R}} f_n(x)e^{-2\pi iwx}dx = \int_{-t_0/2}^{t_0/2} u_n.e^{-2\pi iwx}dx \\ &= u_n.\frac{e^{2\pi iwt_0/2} - e^{-2\pi iwt_0/2}}{2\pi iw} \\ &= u_n.\frac{\sin(\pi t_0 w)}{\pi w} \\ &= u_n.t_0.\frac{\sin(\pi t_0 w)}{\pi t_0 w} \\ &= u_n.t_0.sinc(\pi t_0 w)\end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Böylece F *interval sinyalinin Fourier dönüşümü*

$$\begin{aligned}\hat{F}(w) &= \{\int_{\mathbb{R}} f(x)e^{-2\pi iwx}dx : f \in S^1(F)\} \\ &= \overline{\{u_n.t_0.sinc(\pi t_0 w) : u_n \in [-1/\sqrt{t_0}, 1/\sqrt{t_0}] \cap \mathbb{Q}\}}\end{aligned}$$

kümesidir.

KAYNAKLAR

[1] J. P. Aubin and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhauser, Boston, 1990.

[2] E. Kreyszing, *Introductory functional analysis with applications,* Canada, 1978.

[3] A. Wilansky, *Modern methods in topological vector spaces,* McGraw-Hill Int. Book Comp., New York, USA, 1978.

[4] V. Lakshmikantham, T. Gana Bhaskar and J. Vasandura Devi, *Theory of set differential equations in metric spaces,* Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2006.

[5] T. Sunaga, *Theory of an interval algebra and its application to numerical analysis*, **RAAG Memoirs,** 2 (1958) 29-46.

[6] U. Kulisch, *Grundzüge der Intervallrechnung, in: Jahrburch Überblicke Mathematik*, Bibliographhisches Institut, Mannheim,1969.

[7] G. Alefeld and J. Herzberger, *Einführung in die Intervallrechnung*, Bibliographhisches Institut, Mannheim, 1974.

[8] G. Alefeld and J. Herzberger, *Introduction to Interval Computations*, Academic Press, New York, 1983.

[9] R. E. Moore, *Interval Arithmetic and Automatic Error Analysis in Digital Computing*, Thesis, Stanford University, October 1962.

[10] R. E. Moore, *Interval Analysis*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, NJ, 1966.

[11] R. E. Moore, R. B. Kearfott and M. J. Cloud, *Introduction to Interval Analysis*, SIAM, Philadelphia, 2009.

[12] J.P. Aubin and H. Frankowska, *Set-Valued Analysis*, Birkhauser, Boston, 1990.

[13] M. Vetterli, J. Kovacevic and V.K. Goyal, *Foundations of Signal Processing*, 2014.

[14] P. Brito, *Modelling and analysing interval data, in: R. Decker, H. Lenz (Eds.),* Advances in data anaysis, Series Studies in Classification, Data Analsis and Knowledge Organistion, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2007.

[15] T. Denoeux and M. Masson, *Multidimentional scalling of interval-valued dissimilarity data*, **Pattern Recognition Letters**, 21 (2000) 83-92.

[16] T. Başkan, O. Bizim and İ.N. Cangül, *Metrik Uzaylar ve Genel Topolojiye Giriş,* Nobel Yayıncılık, 2006.

[17] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, New York, 1988.

[18] N. Bourbaki, *Elements of Mathematics: Topological Vector Spaces*, ISBN 0-387-13627-4.

[19] R. Johnsonbaugh and W. E. Pfaffenberger, *Foundations of Mathematical Analysis,* Dover Publications Inc., New York, 2010.

[20] B. Musayev and M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları, 2000.

[21] Y. Soykan, *Metrik Uzaylar ve Topolojisi*, Nobel yayıncılık, 2012.

[22] M. Balcı, *Reel Analiz,* Palme Yayıncılık, 2016.

[23] C. Yıldız, *Genel Topoloji*, Gazi Kitabevi, 2005.

[24] H.K. Banazılı, *On quasilinear operators between quasilinear spaces*, İnönü University, M.Sc. Thesis, Malatya, 2014.

[25] H. Bozkurt, *Quasilinear inner product spaces and some generalizations*, İnönü University, PhD Thesis, Malatya, 2016.

[26] R.J. Aumann, *Integrals of set-valued functions*, **J. Math. Anal. Appl.**, 2 (1965), 1-12.

[27] Y. Zhu and B. Li, *Optimal interval estimation fusion based on sensor interval estimates with confidence degrees,* **Automatica,** 42 (2006) 101-108.

[28] L. Jaulin, M. Kieffer, O. Didrit and E. Walter, *Applied Interval Analysis with Examples in Parameter and State Estimation*, Robust Control and Robotics, Springer, 2001.

[29] A. Rico and O. Strauss, *Imprecise expactations for imprecise linear filtering*, **Internat. J. Approx. Reason.,** (2008).

[30] S. M. Aseev, *Quasilinear operators and their application in the theory of multivalued mappings,* **Proc. Steklov Inst. Math.,** 2 (1986) 23-52.

[31] S. Markow**,** *On the algebraic properties of convex bodies and some applications,* **J. Convex Anal.,** 7 (2000) 129-166.

[32] S. Markow**,** *On quasilinear spaces of convex bodies and intervals,* **J. Comput. Appl. Math**., 162 (2004) 93-112.

[33] H. Levent and Y. Yılmaz, *An Application: Representations of some systems on non-deterministic EEG signals*, **J. Biostat. Biometric App**., 2 (2017), 101-113.

[34] H. Levent and Y. Yılmaz. *Translation, modulation and dilation systems in set-valued signal processing,* **Carpathian Math. Publ.**, 10 (2018) 143-164.

[35] H. Bozkurt and Y. Yılmaz, *Some new results on inner product quasilinear spaces*, **Cogents Math.**, 3 (2016), 1194801.

[36] Y. Yılmaz, S. Çakan and Ş. Aytekin, *Topological quasilinear spaces,* **Abstr. App. Anal.**, Article ID 951374 (2012) 10 pages.

[37] O. Christensen, *Functions, Spaces and Expansions: Mathematical Tools in Physics and Engineering*, Boston, 2010.

[38] A. Geletu, *Introduction to Topological Spaces and Set-Valued Maps,* Ilmenau University of Technology, 2006.

[39] E.Z. Kotonaj, *Aumann integral of multifunctions valued in quasy-Banach Spaces and some of its properties*, **Internat. J. Math. Trends Tegh.**, 12 (2014) 63-68.

[40] N.S. Papageorgiou, *Contributions to the Theory of Set Valued Functions and Set Valued Measures,* **Trans. Amer. Math. Soc.**, 1 (1987) 245-265.

[41] N.S. Papageorgiou, *Convergence Theorems for Banach Space Valued Integrable Multifunctions,* **Internat. J. Math. & Math. Sci.**,10 (1987), 433-442.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad:	Halise Keziban LEVENT
Doğum Yeri ve Tarihi:	Malatya/03.09.1990
Adres:	İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
E-Posta:	halisebanazili44@gmail.com
Lisans:	İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2008-2012)
Yüksek Lisans:	İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik A.B.D. (2012-2014)
Mesleki Deneyim:	TUBİTAK-2228/B Bursiyerliği (2014-2018)
Yayın Listesi:	

Makaleler:

1) Levent, H. and Yılmaz, Y., *Fourier Transform for Set-Valued Functions,* **Indian J. Pure and App. Math.,** 2018. (İncelemede.)
(Bu çalışma tezden üretilmiştir.) **(SCI-Expanded)**

2) Levent, H. and Yılmaz, Y., *Some New Results on Fuzzy Quasilinear Spaces,* **The Journal of Fuzzy Mathematics,** Vol. 26, No. 4 (2018) (Kabul edildi.)

3) Levent, H. and Yılmaz, Y., *Translation, Modulation and Dilation Systems in Set-Valued Signal Processing,* **Carpathian Math. Publ.,** Vol. 10, Issue 1 (2018), pages 143-164.

(Bu çalışma tezden üretilmiştir.) **(ESCI)**

4) Levent, H. and Yılmaz, Y., *Hahn- Banach Extension Theorem for Interval-Valued Functions and Existence of Quasilinear Functionals,* **New Trends Math. Sci.,** Vol. 6, No. 2, (2018), pages 19-28.

5) Levent, H. and Yılmaz, Y., *An Application: Representations of Some Systems on Non-Deterministic EEG Signals,* **J. Biostat. Biometric App.,** Vol. 2, Issue 1 (2018) 101-113.
(Bu çalışma tezden üretilmiştir.)

6) Levent, H., Yılmaz, Y., *On Some Algebraic and Topolojical Properties of Fuzzy Normed Quasilinear Spaces,* **Adv. Fuzzy Sets Syst.,** Vol. 22, No. 1 (2017), pages 25-51.

Bildiriler

1) Levent, H. and Yılmaz, Y., *On Some Algebraic Structure of the Space of Quasilinear Operators, International Conference on Mathematics and Mathematics Education 2017*, 11-13 May 2017, Harran University, Şanlıurfa, Turkey.
2) Levent, H. and Yılmaz, Y., *On Some Developments Associated With the Quasilinear Operators, International Conference on Mathematics and Mathematics Education 2016*, 12-14 May 2016, Fırat University, Elazığ,Turkey.