T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PROKSİMAL RELATOR UZAYLARINDA FUZZY BAĞINTILAR

Özlem TEKİN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
ARALIK 2018

Tezin Başlığı: Proksimal Relator Uzaylarında Fuzzy Bağıntılar

Tezi Hazırlayan: Özlem TEKİN

Sınav Tarihi: 17.12.2018

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: **Prof. Dr. Sadık KELEŞ**
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Öznur GÖLBAŞI
Cumhuriyet Üniversitesi

Doç. Dr. Mustafa Kemal ÖZDEMİR
İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Adıyaman Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK
Adıyaman Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

Tez İkinci Danışmanı

Prof. Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Proksimal Relator Uzaylarında Fuzzy Bağıntılar" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Özlem TEKİN

Sevgili Eşime ve Canım Oğlum Yusuf Selim'e ...

ÖZET

Doktora Tezi

PROKSİMAL RELATOR UZAYLARINDA FUZZY BAĞINTILAR

Özlem TEKİN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

89+vii sayfa

2018

Danışmanlar : Prof. Dr. Sadık KELEŞ
Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

Bu doktora tezi üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde; tezdeki diğer bölümlerin daha iyi bir şekilde anlaşılabilmesi için bazı temel kavramlara yer verildi. Fuzzy teori ve özellikleri, fuzzy bağıntı ile ilgili tanım ve teoremler, proksimiti bağıntı, proksimiti uzay özellikleri ve relator uzay kavramı ayrıntılı olarak açıklandı. Bunlara ek olarak latisler ve kompleks yapılar hakkında bilgi verildi.

İkinci bölümde, fuzzy proksimal relator uzayları ve fuzzy proksimal karar verme metodu incelendi. Bu bölümde, fuzzy proksimal uzayının tanımı ve konu ile ilgili örneklere yer verildi. İki farklı proksimiti uzayı için fuzzy proksimal uzay tanımlarından bahsedildi. Fuzzy bağıntısının sağladığı özellikler, fuzzy proksimiti bağıntısı için de ayrıca incelenerek ayrıntılı şekilde açıklandı. Ayrıca bu bölümün son kısmında, bir çok alanda uygulamalara sahip olan fuzzy proksimiti bağıntısı kullanılarak fuzzy proksimiti karar verme metodu tanımlandı ve bu metot bir örnekle açıklandı.

Üçüncü bölüm, iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda, proksimal relator uzaylarda L-fuzzy bağıntısının tanımı yapıldı ve konu ile ilgili örnekler verildi. Proksimal relator uzaylarda bir L-fuzzy bağıntısı tarafından sağlanması gereken L-fuzzy proksimiti aksiyomları tanımlandı ve $[0,1]$ aralığı latislere genelleştirildi. Aynı zamanda, L-fuzzy bağıntısının sağladığı yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme gibi bazı özellikler, ayrıca L-fuzzy proksimiti bağıntısı için de incelenerek bu özellikler ayrıntılı şekilde açıklandı. Bu kavramlar ile ilgili örnekler verildi. İkinci kısımda ise kompleks fuzzy proksimal uzayının tanımı ve konu ile ilgili örnekler verildi. Fuzzy bağıntının sağladığı özelikler, kompleks fuzzy proksimiti bağıntısı içinde incelenerek, ayrıntılı şekilde açıklandı. Ayrıca, kompleks fuzzy bağıntısının, birleşim ve kesişim işlemleri altında birleşme özelliğine sahip olduğu örneklerle birlikte verildi. Son olarak, bu işlemlerin birer yarı grup oldukları elde edildi.

ANAHTAR KELİMELER: Proksimiti Uzayları, Proksimiti Bağıntılar, Fuzzy Kümeler, Fuzzy Bağıntılar, Fuzzy Proksimiti, Relator Uzayı, L-Fuzzy Bağıntılar, L-Fuzzy Proksimiti, Kompleks Bağıntılar, Kompleks Fuzzy Proksimiti, Fuzzy Proksimal Relator Uzaylar.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

FUZZY RELATIONS ON PROXIMAL RELATOR SPACES

Özlem TEKİN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

89+vii pages

2018

Supervisors : Prof. Dr. Sadık KELEŞ
Assoc. Prof. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

This doctoral thesis covers three chapters. In the first chapter, some basic concepts were given for the rest of the thesis that readers can easily understand. In this chapter, fuzzy theory and some properties, some theories and definitions related to fuzzy relations, proximity relation, the properties of proximity space and relator space were broadly explained. In addition to these, some information was given about lattices and the concept of complex numbers.

In the second chapter, fuzzy proximal relator spaces and fuzzy proximal decision making method were investigated. In this chapter, definition of fuzzy proximal space and some examples related to subject are given. Definitions of fuzzy proximal spaces were mentioned for two different proximity spaces. The properties that prove fuzzy relation were also examine for fuzzy proximity relations. In the last part of this chapter, fuzzy proximity decision making method was defined by using

fuzzy proximity relations that have applications in many areas and the method was explained with an example.

Third chapter consisted of two sections. In the first section, L-fuzzy relations on proximal relator spaces were defined and some examples were given related to subject. L-fuzzy proximity axioms that prove by L-fuzzy relations were defined on proximal relator spaces and the interval $[0,1]$ was generalized to lattices. At the same time, reflection, symmetry, antisymmetry and transitive properties that prove by L-fuzzy relations were studied with some examples on proximal relator spaces. In the second section, complex fuzzy proximal spaces were defined and some examples were given related to subject. Complex proximity axioms that prove by fuzzy relations were defined on proximal relator spaces. Also in this, it was investigated that complex fuzzy relations have associativity property under intersection and union operation. For this situation, some examples were given. In the last section of this chapter, it was obtained that these operations were semi group.

KEY WORDS: Proximity Spaces, Proximity Relations, Fuzzy Sets, Fuzzy Relations, fuzzy Proximity, Relator Space, L-Fuzzy Relations, L-Fuzzy Proximity, Complex Relations, Complex Fuzzy Proximity, Fuzzy Proximal Relator Spaces.

TEŞEKKÜR

Çalışmalarım boyunca bana destek olan tecrübesini ve yakın ilgisini esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e şükranlarımı sunuyorum. Tez konumu belirlememde bana yardımcı olan ve yol gösteren, akademik hayatımda bana olan desteği ve sonsuz sabrı için ve ayrıca değerli zamanını hiç bir zaman esirgemeyen hocam Sayın Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK'e teşekkür ediyorum. Desteğinden dolayı Sayın Dr. Öğr. Üyesi Ebubekir İNAN'a teşekkürlerimi borç bilirim. Ayrıca, benden sevgilerini hiç bir zaman esirgemeyen ve her zaman yanımda olan aileme, değerli eşim Ömer Faruk TEKİN'e ve sabırla tezimi yazmamı bekleyen oğlum Yusuf Selim TEKİN'e sonsuz teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER ve KISALTMALAR

$\mathcal{O}$	Algılanabilir Nesneler Kümesi
$\Phi(x)$	Nesne Tanımlaması
δ_Φ	Tanımsal Proksimiti Bağıntısı
δ	Yakınlık Bağıntısı
$\bar{\delta}$	Uzaklık Bağıntısı
$\underset{\Phi}{\cup}$	Tanımsal Birleşim
$\underset{\Phi}{\cap}$	Tanımsal Arakesit
clA	A'nın Kapanışı
$\bar{\delta}_\Phi$	Tanımsal Olarak Uzaklık
$(X, \mathcal{R})$	Proksimal Relator Uzay
$\mathcal{P}_{\mu_\mathcal{R}}(X)$	Fuzzy Proksimiti Bağıntıların Kümesi
$A\mathcal{R}B$	R deki bağıntılardan en az birine göre
	A, B ye proksimaldir
χ_A	Karakteristik Fonksiyon
μ_A	A Kümesine iIişkin Üyelik Fonksiyonu
$\mu_\mathcal{R}(A, B)$	A ve B Kümelerinin Fuzzy Proksimiti Ölçümü
$h(\mathcal{R}_\mu)$	$\mathcal{R}_\mu$ Fuzzy Proksimiti Bağıntısının Yüksekliği

GİRİŞ

İnsanoğlunun hayatının pek çok alanında; iyi, kötü, sıcak, soğuk gibi kişiden kişiye veya durumlara göre değişiklik gösteren ve matematiksel anlamda tam olarak ifade edilemeyen kavramlar vardır. Bu kavramlar matematiksel olarak modellenemeyen çeşitli belirsiz kavramlardır. Doğadaki bu belirsizlikler, filozofların dikkatini çektiği kadar matematik ve mantıkla uğraşan bilim insanlarının da dikkatini çekmiştir.

Klasik mantıkta bu belirsizlikleri içeren problemleri modelleyebilmek ve çözmek matematiksel olarak pek mümkün değildir. Günümüzde, bu problemleri çözmek için kullanılan klasik metodlar zamanla kullanışlı olmaktan çıkmıştır. Bu konuda özellikle filozoflar, matematikçiler ve mantık bilimi ile ilgilenen bilim insanları çalışmalar yapmışlardır. Belirsiz kavramları matematiksel olarak ifade edebilmek ve bunlara sistematik çözümler bulmak için bilim insanları her geçen gün yeni teoriler üzerinde çalışmışlardır. Ekonomi, mühendislik ve sosyal bilimler gibi bilim dallarının problemlerini matematiksel olarak modellemek pek mümkün gözükmemektedir. Çünkü, bilim insanlarının yaptıklar çalışmalarda her zaman tam olarak ifade edilen veriler olmamaktadır. Ayrıca, dünyadaki bazı olayları açıklamak için kesin tanımlamalarda bulunabilmek imkansızdır.

Dünyadaki en gelişmiş metronun hangisi olduğu konusunda yapılan bir araştırmada kazanan metro Japonya'daki Senday Metrosu olmuştur. Bunun nedeni ise bu metronun yolcularına verdiği rahatlık olarak bilinir. Çünkü, bu metroda oturmak ya da ayakta kalmak arasında pek bir fark yoktur. Yaklaşık 14 km 16 istasyon boyunca hareket eden tren çok yumuşak hareket eder ve hiç bir şekilde düşmeden kitabınızı kolaylıkla okuyabilirsiniz. "Peki bu metroyu bu hale getiren sistem nedir?" sorusunun cevabı ise Bulanık Mantık (Fuzzy Logic) tır.

Bulanık Sistemler (Fuzzy Systems) eski Yunanlılara kadar dayanan, uygulamada Yapay Zekada çokça kullanılan ve Aristoteles mantığının doğadaki belirsiz durumların modellenebilmesi konusunda yetersiz kaldığı anlaşıldığından ortaya çıkan bir alternatiftir. Matematiğin gelişmesinde ve bütünlük oluşturmasında Aristoteles'in ve onun izinden giden düşünürlerin pek çok faydaları olmuştur. Onlar, bir çok yasa ortaya koymuşlardır. Bunlardan biri de her önermenin "Doğru" ya da "Yanlış" olması gerektiğidir. Heraclitus gibi bazı düşünürler ise bazı şeyler hem doğru hem de yanlış olabilir diye düşünmüştür. Lukasiewicz 1900lerde "Doğru" ya da "Yanlış" tan farklı olarak "Olası" ifadesini ortaya atmış ve "Doğru" ile "Yanlış" arasında sonsuz farklı değerler olabileceğini ifade etmiştir. Çoğu matematikçi bu değerleri nümerik olarak ifade etmiş olsalar da, 1965 yılında Zadeh, bu değerleri [0, 1] aralığındaki sayılarla ifade ettiği teorisini, Bulanık Mantık adlı çalışmasında tanımlayana dek, sonsuz değerli mantık uygulamada başarılı olamamıştı [1].

Zadeh, karmaşık sistemleri daha iyi anlamak ve bu sistemlerin problemlerinin kolaylıkla çözülebilmesini sağlamak için fuzzy kümeleri tanımlamıştır. Olaylar fuzzy perspektifinde ele alındıkça, çok daha doğru sonuçlar elde edilir. Kısaca, fuzzy mantığın temeli, bazı sorulara basitçe evet ya da hayır cevabı verilemeyen durumları kapsar, matematiksel model ve ölçülen değerlerin yanı sıra insan düşüncesini formüle eder. Fuzzy küme kavramında klasik kümelerdeki "elemandır" veya "eleman değildir" ifadesi yerine "şu kadar elemandır" ya da "şu kadar eleman değildir" ifadeleri yer alır. Bir eleman için eleman olma durumu 1 ve olmama durumu 0 ile değil, 0 ve 1 arasındaki üyelik derecesi ile gösterilir. Böylece; fuzzy kümelerde bir elemanın bir kümeye ait olma değeri daha duyarlı bir şekilde ifade edilmiş olur ve fuzzy küme onun üyelik fonksiyonu yardımı ile tanımlanır.

Fuzzy kümeler pek çok kavramın genelleştirilmesinde de kullanılmış ve bir çok yeni çalışma alanının oluşmasına yol açmıştır. Kümeler teorisindeki genellemelerden biri de $L-$fuzzy kümelerdir. Goguen 1967 yılında fuzzy kümeleri $L-$fuzzy kümelere genelleştirdi [2]. Bir $L-$fuzzy küme, kısmi sıralı bir kümeye (poset) tanımlanan bir dönüşümdür. Bu kısmi sıralı küme L ile gösterilir ve $L-$fuzzy küme ya da $L-$küme olarak adlandırılır. X kümesinde tanımlanan bir R, $L-$fuzzy ikili bağıntısı X kümesinden L ye tanımlanan bir dönüşümdür.

Diğer bir yapılan genelleme ise; kompleks fuzzy kümelerdir. Kompleks fuzzy küme kompleks değerli üyelik fonksiyonu yardımıyla karakterize edilen bir fuzzy kümedir. Kompleks fuzzy kümenin değer kümesi kompleks düzlemde, $[0, 1]$ aralığından birim çembere genişletilir. Literatürde fuzzy kümelerin, kompleks sayılara uygulanmasının birbirinden farklı pek çok bakış açısı vardır. Bunlardan biri de, Buckley tarafından 1987 yılından tanımlandı [3–6] ve fuzzy küme teorisinde önemli bir araştırma konusu oldu. Buckley'in tanımı fuzzy kümeler yardımıyla kompleks sayılar içerir. Buckley fuzzy kompleks sayıların integral ve diferansiyel [5,6] özelliklerini de ayrıca çalıştı.

Buckley'in çalışmasından farklı olarak yapılan diğer bir çalışma ise Ramot vd tarafından 2001 yılında yapıldı [7, 8]. Bu çalışmada ise fuzzy kümeleri ile (reel) kompleks sayılar arasındaki ilişki incelendi. Ramot vd yeni bir küme tanımladılar ve kompleks fuzzy küme adını verdiler. Klasik kompleks sayıları kullanarak gösterilen standart fuzzy kümelerin, üyelik değerlerinin bulunmasını sağlar. Diğer bir ifadeyle, Ramot vd fuzzy küme kavramını μ üyelik fonksiyonunu kompleks değerli fonksiyon yardımıyla değiştirerek kompleks fuzzy kümelere genelleştirdiler [7]. Ayrıca, Ramot vd kompleks fuzzy bağıntı ve kompleks fuzzy logic kavramlarını tanımladılar. Kompleks fuzzy bağıntının tümleyen, birleşim ve kesişim kavramlarını da ayrıca çalıştılar [8].

Günümüzde bulanık mantığın kullanıldığı bazı uygulama alanları ise şöyledir: Hidroelektrikte kullanılan baraj kapılarının otomatik kontrolünü sağlama (Tokio Electric Pow.), klimalarda ısı iniş çıkışlarını önleme, araba motorlarında kontrol sağlama (Nissan), otomobillerde hız sabitleme (Nissan, Subaru), dökümanların arşivlenmesi (Mitsubishi Elec.), depremlerin önceden tahmin edilmesi (Inst. of Seismology Bureau of Metrology, Japan), ilaç sanayisinde kanser teşhisi (Kawasaki Medical School), cep bilgisayarlarında el yazısı algılama sistemi (Sony), kameralarda hareketin algılanması (Canon, Minolta), metro sistemlerinde sürüş rahatlığı, duruş mesafesinin kesinliğini ve ekonomikliğinin geliştirilmesi (Japonya' daki metro hedefe 7 cm kala durmaktadır) (Hitachi), otomobillerde gelişmiş yakıt tüketimi (NOK, Nippon Denki Tools).

Proksimiti uzay teoreminin temeli Bologna'da bir kongrede Riesz tarafından 1908 başlarında atıldı [9]. Riesz'in düşünceleri teorinin bugünkü temelini oluşturmaktadır. Proksimiti uzay kavramı esas olarak; 1950 de Efremovič tarafından yeniden ele alındı ve teorinin çalışılmasında hız kazanıldı [10]. Efremovič, proksimiti uzayı kavramını ele alana kadar konuda çok fazla ilerleme sağlanamadı. Efremovič X kümesinin, A ve B alt kümeleri için, proksimiti uzayının tanımını aksiyomatik olarak karakterize eden bağıntıyı "A, B ye proksimaldir." şeklinde ifade etti [10]. Proksimitiler yakınlık bağıntılarıdır. Yani, boştan farklı kümeler arasındaki bir proksimiti, kümelerin yakınlığını belirten matematiksel bir ifadedir. Bir proksimiti uzayda boştan farklı bir küme çifti bir veya daha fazla ortak noktaya sahipler ise ya da her küme birbirlerine yeteri kadar yakın olan bir veya daha fazla nokta içeriyorsa, bu kümeler birbirlerine yakındır şeklinde ifade edilir. Efremovič, A; X in bir alt kümesi olmak üzere; X in A ya yakın olan bütün noktalarını A nın kapanışı olarak tanımlayarak, proksimiti uzayda bir topolojinin tanımlanabileceğini gösterdi. Daha sonra, bir çok alanda kullanılan oldukça yaygın bir teori olan proksimiti uzayı ile ilgili çalışmalar çok hızlı bir şekilde ilerlemiştir. Bu uzay doğal olarak; bir topolojik grubun ve bir metrik uzayın genellemesidir. 1940 larda, Murti [11], Wallace [12, 13] ve Szymanski [14] ise daha basit şekilde "kümelerin ayrılığı" ifadesini kullanarak bu konuda çalışmalar yapmışlardır. Her üç çalışmada da araştırmacılar Efremovič'in tanımladığından daha zayıf aksiyomlar üzerinde çalıştılar.

İlerleyen yıllarda da proksimitiler ile ilgili pek çok çalışma yapıldı ve yeni yeni proksimiti kavramları tanımlandı. Bu calışmaların genelinde Efremovič'in tanımladığından daha zayıf aksiyomlar ile yeni proksimiti çeşitleri tanımlanarak literatüre kazandırıldı. Örneğin; paraproksimiti, pseudo-proksimiti, lokal proksimiti bunlardan sadece birkaçıdır.

Proksimiti bağıntısının genelleştirilmesi konusu ise 1963 yılında Leader [15] ve Pervin [16] tarafından birbirlerinden bağımsız bir şekilde çalışıldı. Pervin ve Leader, Efremovič'in tanımladığı orjinal küme aksiyomlarını genelleştirerek simetri koşulunu kaldırdı ve yeni tanımladığı proksimitiye quasi-proksimiti adını verdi.

Lodato [17] ise, Leader'in tanımladığı aksiyomlara simetri ikili işlemini ekleyerek yeni bir tanımlama yaptı ve bu proksimitiye Lodato proksimiti adını verdi. Proksimiti uzayları konusunda yapılan diğer çalışmalar için [18, 19] çalışmasına bakılabilir.

Uzaysal olarak proksimal olmayan kümelerin incelenebilmesi için tanımsal proksimiti uzayı tanımlanmıştır [20–22]. Tanımsal proksimiti teorisinde tanımsal olarak aynı özelliklere sahip kümeler incelenir. Uzaysal proksimiti, Efremovič bağıntısı ile donatılmış çeşitli aksiyomlar sağlayan boştan farklı bir kümedir.

$\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; bir $x \in X$ algılanabilir nesnesinin tanımı, nesnenin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonları yardımıyla belirlenen Φ fonksiyonu ile belirlidir.

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), ..., \varphi_i(x), ..., \varphi_L(x))$$

nesne tanımlaması ele alınırsa δ_Φ tanımsal proksimiti bağıntısı ile verilen bir X kümesi Efremovič aksiyomlarının tanımsal genişlemelerini sağlar [23]. Uzaysal proksimiti yaklaşımı proksimiti formlarının en iyi bilinen ve en eski formudur. Pek çok bilim adamının dikkatini çekmiş ve bir çok çalışma yapılmıştır. Poincare, Hadamard, Listing, Riesz, Hausdorff, Čech, Efremovič, Smirnov, Leader ve öğrencisi Lodato, Naimpally ve öğrencileri, Thron, Herrlich ve daha bir çok bilim adamının bu konuda çalışmaları vardır [19].

Proksimiti uzayları topolojik bakımdan çok zengin özelliklere sahiptirler. Bu nedenle proksimiti uzaylarının; topolojik uzaylar, metrik uzaylar ve düzgün uzaylarla olan ilişkileri, bir çok bilim adamı tarafından incelenmiştir. Fuzzy kümeler üzerinde yakınlık uzayları ilk kez 1979 da Katsaras tarafından tanımlanmıştır [24]. Fuzzy kümeler literatüründe bir çok yakınlık uzay tanımı mevcuttur. Artico 1984 de Katsaras'ın yakınlık uzay tanımının devamı olarak nitelendirilen bir yakınlık uzay tanımı vermiş ve Moresco ile birlikte fuzzy düzgün ve fuzzy proksimiti uzaylar arasındaki ilişkileri incelemiştir [25, 26].

Bu doktora tezi, üç bölümden oluşmaktadır. İlk bölümde; tezdeki diğer bölümlerin daha iyi bir şekilde anlaşılabilmesi için bazı temel kavramlara yer verilmiştir. Fuzzy teori tanım ve özellikleri, fuzzy bağıntı ile ilgili tanım ve teoremler, proksimiti bağıntı, proksimiti uzay özellikleri, relator uzay kavramı ayrıntılı olarak açıklandı. Bunlara ek olarak latisler ve kompleks yapılar hakkında bilgi verilerek tezde kullanılan kavramlar alındı.

İkinci bölümde, fuzzy proksimal relator uzayları ve fuzzy proksimal karar verme metodu incelendi. Bu bölümde, fuzzy proksimal uzayının tanımı ve konu ile ilgili örneklere yer verildi. İki farklı proksimiti uzayı için fuzzy proksimal uzay tanımlarından bahsedildi. Fuzzy bağıntısının sağladığı özellikler, fuzzy proksimiti bağıntısı için ayrıca incelenerek ayrıntılı şekilde açıklandı. Fuzzy proksimiti bağıntısının maksimum ve minimum yapıları, izdüşümü ve silindirik genişleme tanımları verildi. Ayrıca, uzaysal Smirnov proksimiti ölçüm tanımına yer verildi ve uzaysal Smirnov proksimiti ölçümünün bir fuzzy proksimiti bağıntısı olduğu gösterildi. Ayrıca bu bölümün son kısmında, bir çok alanda uygulamalara sahip olan fuzzy proksimiti bağıntısı kullanılarak fuzzy proksimiti karar verme metodu tanımlandı ve bir örnekle metot açıklandı.

Üçüncü bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda; proksimal relator uzaylarda L-fuzzy bağıntısının tanımı yapıldı ve konu ile ilgili örnekler verildi. Proksimal relator uzaylarda bir L-fuzzy bağıntısı tarafından sağlanması gereken L-fuzzy proksimiti aksiyomları tanımlanarak $[0, 1]$ aralığı latislere genelleştirildi. Bu kavramlar arasında ne gibi farklılıklar olduğu araştırıldı. Uzaysal Smirnov proksimiti ölçümü, L-fuzzy ölçümü için genelleştirildi ve Lodato L-fuzzy proksimiti bağıntısı olduğu gösterildi. Aynı zamanda L-fuzzy bağıntısının sağladığı yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme gibi bazı özellikler, L-fuzzy proksimiti bağıntısı için de ayrıca incelenerek ayrıntılı şekilde açıklandı. Bu kavramlar ile ilgili örnekler verildi. İkinci kısımda ise; kompleks fuzzy proksimal uzayının tanımı, konu ile ilgili örnekler verildi. Fuzzy bağıntının sağladığı özelikler, kompleks fuzzy proksimiti bağıntısı içinde incelenerek ayrıntılı şekilde açıklandı. Kompleks fuzzy bağıntı yardımı ile, kümelerin iki farklı örneğin uzaysal ve tanımsal proksimiti özellikleri dikkate alındığında birbirlerine ne kadar proksimal oldukları incelendi. Bu yaklaşım ile aynı anda iki farklı proksimallik incelenme imkanı elde edilmiş oldu. Ayrıca, kompleks fuzzy bağıntısının, birleşim ve kesişim işlemleri altında birleşme özelliğine sahip olduğu örneklerle birlikte verildi. Son olarak, bu işlemlerin birer yarıgrup oldukları elde edildi.

BÖLÜM 1

ÖN BİLGİLER

Bu bölümde, tez içerisinde ihtiyaç duyulan ve tezin daha iyi anlaşılabilmesi için gerekli olan bazı kavramlara yer verilmiştir. Bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. İlk kısım proksimiti uzay ve relator uzay, ikinci kısım fuzzy kümeler ve fuzzy bağıntı, üçüncü kısım latis kavramı ve L-fuzzy bağıntı ve son olarak dördüncü kısım da kompleks fuzzy kümeler ve kompleks fuzzy bağıntı ile ilgili tanım ve teoremleri içermektedir.

1.1 Proksimiti ve Relator Uzaylar

Bir çok alanda, oldukça yaygın biçimde kullanılan bir teori olan proksimiti uzayı ile ilgili çalışmalar çok hızlı bir şekilde ilerlemiştir. İlk olarak, 1908 yılında, Riesz proksimiti uzayı fikrini ortaya attı ve teori ile ilgili çeşitli fikirler sundu [9]. Fakat, 1950 de Efremovič proksimiti uzayı kavramını ele alana kadar bu konuda çok fazla bir ilerleme sağlanamadı. Proksimitiler, yakınlık bağıntılarıdır. Diğer bir deyişle, boştan farklı kümeler arasındaki bir proksimiti, kümelerin yakınlığını belirten matematiksel bir ifadedir.

Efremovič, X kümesinin, A ve B alt kümeleri için, proksimiti uzayının tanımını aksiyomatik olarak karakterize eden bağıntıyı "A, B ye proksimaldir" şeklinde ifade etti [10]. Daha sonra, proksimiti uzaylarını oluşturmak için, "proksimiti komşuluğu" fikrini kullandı. Bir proksimiti uzayı ise, bir ya da daha fazla proksimiti bağıntısı ile donatılmış boştan farklı bir kümeden oluşur. Bir proksimiti uzayda boştan farklı bir küme çifti, bir veya daha fazla ortak noktaya sahipler ise ya da her küme birbirlerine yeteri kadar yakın olan bir veya daha fazla nokta içeriyorsa, bu kümeler birbirlerine yakındır. Yani; bir proksimiti uzayı, boştan farklı bir X kümesinin alt kümeleri arasında δ bağıntısıyla bazı anlamlarda (uzaysal, tanımsal) A, B kümesine yakın ise, $A\delta B$ sağlanır ve A, B kümesine proksimaldir şeklinde ifade edilir.

Proksimiti bağıntısı, bağıntıyla ilgili olarak bağıntıya özgü bazı aksiyomları sağlar. Genellikle bir proksimiti uzay ise, ortak proksimiti aksiyomlarını sağlar. Bazı araştırmacılar Efremovič'in tanımladığından daha zayıf aksiyomlar üzerinde çalıştılar [19] ve yeni yeni isimlerle farklı proksimiti aksiyomları tanımladılar. Čech proksimiti [27], Efremoviĉ proksimiti [10], Lodato proksimiti [28] ve tanımsal proksimiti [23] bunlara örnek olarak verilebilir.

Tanım 1.1.1. *δ, boştan farklı bir X kümesinin kuvvet kümesi üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. Her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için δ aşağıdaki koşulları sağlarsa δ ya X üzerinde bir Čech proksimiti denir:*

(C_1) *Her $A \subset X$ için $\emptyset \overline{\delta} A$.*

(C_2) *$A\delta B \Longleftrightarrow B\delta A$.*

(C_3) *$A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow A\delta B$.*

(C_4) *$A\delta(B \cup C) \Longleftrightarrow A\delta B$ ya da $A\delta C$ [27].*

Tanım 1.1.2. *δ, boştan farklı bir X kümesinin kuvvet kümesi üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. Her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için δ aşağıdaki koşulları sağlarsa δ ya X üzerinde bir temel proksimiti denir:*

(A_1) *$A\delta B \Longrightarrow B\delta A$.*

(A_2) *$(A \cup B)\delta C \Longleftrightarrow A\delta C$ ya da $B\delta C$.*

(A_3) *$A\delta B \Longrightarrow A \neq \emptyset,\ B \neq \emptyset$.*

(A_4) *$A \cap B \neq \emptyset \Longrightarrow A\delta B$ [19].*

Tanım 1.1.3. *δ, X kümesi üzerinde bir temel proksimiti olsun. δ,*

(A_5) *$A\delta B$ ise $A\delta E$ ve $(X - E)\delta B$ olacak şekilde X in bir E alt kümesi vardır.*

koşulunu sağlarsa δ ya X üzerinde bir Efremovič proksimiti (EF-proksimiti) denir [10].

Tanım 1.1.4. *δ, X kümesi üzerinde bir Efremovič proksimiti olsun. δ, her $x, y \in X$ için*

(A_6) *$\{x\}\delta\{y\} \Longrightarrow x = y$ koşulunu sağlarsa, δ ya X üzerinde bir ayrık proksimiti denir [19].*

Tanım 1.1.5. *δ, boştan farklı bir X kümesinin kuvvet kümesi üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. Her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için δ,* (A_3), (A_4) *ve aşağıdaki koşulları sağlarsa δ ya X üzerinde bir Leader proksimiti (LE-proksimiti) denir:*

(A_2^*) $(A \cup B)\,\delta C \Longleftrightarrow A\delta C$ *ya da* $B\delta C$ *ve* $A\delta\,(B \cup C) \Longleftrightarrow A\delta B$ *ya da* $A\delta C$.

(A_7) *Her* $b \in B$ *için* $A\delta B$ *ve* $\{b\}\,\delta C \Longrightarrow A\delta C$ *[29].*

Tanım 1.1.6. *δ, X kümesi üzerinde bir Leader proksimiti olsun. δ,* (A_1) *koşulunu sağlarsa, δ ya X üzerinde bir Lodato proksimiti (LO-proksimiti) denir [28].*

Tanım 1.1.7. *δ, X kümesi üzerinde bir temel proksimiti olsun. δ,* (A_6) *ve aşağıdaki koşulu sağlarsa, δ ya X üzerinde bir S-proksimiti denir.*

(A_7^*) *Her* $b \in B$ *için* $\{x\}\,\delta B$ *ve* $\{b\}\,\delta C \Longrightarrow \{x\}\,\delta C$ *[19].*

Tanım 1.1.8. *Herbir (X, δ) ikilisine bir temel proksimiti (Efremovič proksimiti, ayrık proksimiti, Leader proksimiti, Lodato proksimiti, S proksimiti) uzayı denir.*

Proksimiti bağıntısının başka formları da vardır. Örneğin; Wallman proksimiti, quasi proksimiti, paraproksimiti, pseudo-proksimiti ve lokal proksimiti [19].

Tanım 1.1.9. *A ve B, X proksimiti uzayının boştan farklı alt kümeleri olsun. Smirnov proksimiti ölçümü, $\delta(A, B) \in \{0, 1\}$ olmak üzere*

$$\delta(A, B) = \begin{cases} 1, & A,\ B \text{ ye yakın ise}, \\ 0, & A,\ B \text{ den uzak ise}, \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır [30].

Bir proksimiti ölçümü boştan farklı bir küme çiftinin yakınlığının ölçümüdür. δ proksimiti ölçümü Smirnov tarafından 1952 de tanımlandı. Dikkat etmek gerekir ki, bir proksimiti ölçümü bir mesafe metriği değildir fakat bunun yerine bir proksimiti ölçümü bir kümenin kapsama ölçümüdür. Diğer bir ifade ile, bir kümenin diğer bir kümede kapsanma derecesinin ölçümüdür.

Tanım 1.1.10. *$\varepsilon > 0$ ve $\upsilon(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|X|}$ olsun. $\delta_{\varepsilon,\nu}(A, B) \in [0, 1]$ ye uzaysal Smirnov proksimiti ölçümü denir ve*

$$\delta_{\varepsilon,\nu}(A, B) = \begin{cases} \frac{|A \cap B|}{|X|} & , \quad \varepsilon < \upsilon(A, B) \leq 1, \\ 0 & , \quad \upsilon(A, B) \leq \varepsilon, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [31].

$\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; bir $x \in X$ algılanabilir nesnesinin tanımı, nesnenin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonları yardımıyla belirlenen $\Phi(x)$ fonksiyonu ile belirlidir. $B \subseteq \mathcal{F}$ örnek nesnelerin çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $\varphi_i : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $\varphi_i \in B$ olsun. Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden φ_i fonksiyonlarının, $\varphi_i(x)$ değerlerinin bileşimi dikkate alınırsa, tanım uzunluğu $|\Phi| = L$ olan bir $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^L$,

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), ..., \varphi_i(x), ..., \varphi_L(x))$$

nesne tanımlaması elde edilir. Algılanabilir elemanlardan oluşan kümelerdeki elemanların tanımlamalarının dikkate alınması, tanımsal tabanlı küme işlemlerinin çıkış noktasıdır. Bu kısımdaki tüm kümeler algılanabilir nesnelerden oluşan kümelerdir [32].

Tanım 1.1.11. ***(Küme Tanımlaması)*** *$\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi, $X \subseteq \mathcal{O}$ ve $\Phi(x) \in \mathbb{R}^L$ olsun.*

$$\mathcal{Q}(X) = \{\Phi(x) \mid x \in X\}$$

kümesine X in küme tanımlaması denir [22].

Tanım 1.1.12. ***(Tanımsal Küme Birleşimi)*** *$\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olsun.*

$$X \underset{\Phi}{\cup} Y = \{a \in X \cup Y \mid \Phi(a) \in \mathcal{Q}(X) \;\; veya \; \Phi(a) \in \mathcal{Q}(Y)\}$$

kümesine X ve Y kümelerinin tanımsal birleşimi denir [33].

Tanım 1.1.13. ***(Tanımsal Küme Arakesiti)*** *$\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere,*

$$X \underset{\Phi}{\cap} Y = \{a \in X \cup Y \mid \Phi(a) \in \mathcal{Q}(X) \;\; ve \; \Phi(a) \in \mathcal{Q}(Y)\}$$

kümesine X ve Y kümelerinin tanımsal arakesiti denir [22, 34].

Proksimiti uzayının iki farklı formu vardır. Bunlardan biri uzaysal proksimiti, diğeri ise tanımsal prosimitidir. Şimdiye kadar bahsedilen bütün proksimitiler uzaysal proksimitidir. Şimdi ise tanımsal proksimiti tanımını verelim.

Tanım 1.1.14. *δ_Φ, X kümesi üzerinde tanımsal proksimiti bağıntısı olsun. Yani δ_Φ, Efremovič proksimiti bağıntısının tanımsal genişleme koşullarını sağlar. (X, δ_Φ) ikilisine bir tanımsal proksitimi uzayı denir [23].*

Tanım 1.1.15. *A, boştan farklı bir X kümesinin alt kümesi olsun. A kümesine yakın olan bütün noktaların kümesine A nın kapanışı denir ve clA şeklinde gösterilir. $clA \underset{\Phi}{\cap} clB \neq \emptyset$ ise A, B ye tanımsal yakındır denir ve $A\ \delta_\Phi B$ şeklinde gösterilir [23].*

Tanımsal proksimiti bütün uzaysal proksimitiler için de tanımlanabilir. Bununla ilgili olarak aşağıdaki tanım verilebilir.

Tanım 1.1.16. *δ_Φ, boştan farklı bir X kümesinin kuvvet kümesi üzerinde tanımlı bir bağıntı olsun. Her $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ için δ_Φ aşağıdaki koşulları sağlarsa δ ya X üzerinde bir tanımsal Lodato proksimiti denir:*

(TP$_1$) *Her $A \subset X$ için $\emptyset \overline{\delta}_\Phi A$.*

(TP$_2$) *$A\delta_\Phi B \Longleftrightarrow B\delta_\Phi A$.*

(TP$_3$) *$A \underset{\Phi}{\cap} B \neq \emptyset \Longrightarrow A\delta_\Phi B$ dir.*

(TP$_4$) *$A\delta_\Phi (B \cup C) \Longleftrightarrow A\delta_\Phi B$ ya da $A\delta_\Phi C$ dir.*

(TP$_5$) *$A\delta_\Phi B$ ve her bir $b \in B$ için $\{b\}\, \delta_\Phi C \Rightarrow A\delta_\Phi C$ dir [31].*

Tanım 1.1.17. *$(X, \mathcal{R}, \mu_\mathcal{R})$ bir fuzzy proksimal relator uzay olsun. Genişletilmiş Smirnov proksimiti ölçümü benzer şekilde tanımsal bir yapıya da sahiptir. $\varepsilon_\Phi > 0$ ve $\upsilon(A, B) = \frac{|\Phi(A) \cap \Phi(B)|}{|\Phi(X)|}$ olsun. $\delta_{\varepsilon_\Phi, \nu}(A, B) \in [0, 1]$ ye tanımsal Smirnov proksimiti ölçümü denir ve*

$$\delta_{\varepsilon_\Phi, \nu}(A, B) = \begin{cases} \frac{|\Phi(A) \cap \Phi(B)|}{|\Phi(X)|} & , \quad \varepsilon_\Phi < \upsilon(A, B) \leq 1 \\ 0 & , \quad \upsilon(A, B) \leq \varepsilon_\Phi \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [31].

Relator uzaylar, uniform uzaylar ve sıralı kümelerin doğal bir genellemesidir [35].

Tanım 1.1.18. *$\mathcal{R}$, X kümesi üzerinde bağıntıların bir ailesi olsun. $\mathcal{R}$ ye X üzerinde bir relator denir. Ayrıca, $X(\mathcal{R}) = (X, \mathcal{R})$ sıralı ikilisine bir relator uzayı denir.*

Peters [36] X kümesi üzerinde $\mathcal{R}_\delta$ proksimiti bağıntısının bir ailesini tanımlayarak, $(X, \mathcal{R}_\delta)$ proksimal relator uzayını elde etti. Relator uzaylarında bazı proksimiti bağıntıları aynı zamanda düşünülebilir. Diğer bir ifadeyle, Efremovič proksimiti δ, tanımsal proksimiti δ_Φ, LE-proksimiti, LO-proksimiti gibi bir kaç proksimiti bağıntısı relator uzaylarda aynı anda ele alınabilir.

Genel olarak, $A\mathcal{R}B$ ifadesinin anlamı $\mathcal{R}$ deki bağıntılardan en az birine göre A, B ye proksimaldir. Örneğin; $(X, \mathcal{R})$ bir proksimal relator uzay olmak üzere $\mathcal{R} = \{\delta, \delta_\Phi\}$ şeklinde alınabilir. Eğer $A, B \subseteq X$ için, $A\mathcal{R}B$ ise bu durumda $A\delta B$ ya da $A\delta_\Phi B$ dir.

1.2 Fuzzy Küme ve Bağıntı

X bir evrensel küme, x bu kümeye ait bir eleman ve $A \subseteq X$ olsun. Bu durumda her bir x elemanı, bu A kümesine aittir ya da değildir. Her bir x elemanı için bir karakteristik fonksiyon tanımlayarak klasik A kümesini $(x, 0)$ veya $(x, 1)$ sıralı ikilileriyle temsil edebiliriz.

Tanım 1.2.1. *X bir evrensel küme olsun. X in bir A alt kümesi*

$$\begin{aligned} \chi_A : \quad X & \longrightarrow \{0,1\} \\ x & \longmapsto \chi_A(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

ile karakterize edilebilir. Burada, χ_A fonksiyonuna karakteristik fonksiyon denir [37].

Karakteristik fonsiyonun değer kümesi $[0, 1]$ reel aralığı alınırsa A ya μ_A üyelik fonksiyonu ile ifade edilen fuzzy kümesi denir. Bu durumda fuzzy kümelerin karakteristik fonksiyonları, bir elemanın ilgili fuzzy kümeye üyeliğinin derecesini gösteren $[0, 1]$ aralığındaki değerlere sahiptir.

Tanım 1.2.2. *X kümesinde; bir A fuzzy kümesi, $[0, 1]$ aralığında reel değerler alan $\mu_A : X \longrightarrow [0, 1]$ üyelik fonksiyonu ile tanımlanır.*

$$\mu_A = \{(x, \mu_A) : x \in X\}$$

biçiminde gösterilir [1].

Bu tanımlamada A kümesi bir fuzzy küme, $\mu_A(x)$ ise bu kümeye ilişkin üyelik fonksiyonudur. Bir fuzzy küme, üyelik derecelerine sahip olan elemanların bulunmasına olanak sağlar. Eğer üyelik fonksiyonu 1 değerini alırsa, elemanlar tamamen kümede yer almaktadır. Aksine, 0 değerini alırsa elemanlar kümeye ait değildir. Bu nedenle üyelik fonksiyonu kısmen kümede yer alan her eleman için 0 ile 1 arasında değerler alır. Bu değerler kümedeki elemanların üyelik derecelerini verir.

Tanım 1.2.3. *A ve B, X evrensel kümesinde iki fuzzy küme olsun. Bu durumda her $x \in X$ için*

$$\mu_A(x) = \mu_B(x)$$

ise A ve B ye eşit fuzzy kümeler denir ve $A = B$ ile gösterilir [37].

Tanım 1.2.4. *A ve B, X evrensel kümesinde iki fuzzy küme olsun. Bu durumda her $x \in X$ için*

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x)$$

ise A ya B nin alt kümesi denir ve $A \subseteq B$ ile gösterilir [37].

Tanım 1.2.5. *A ve B, X evrensel kümesinde iki fuzzy küme olsun. Bu durumda her $x \in X$ için*

$$\mu_A(x) \leq \mu_B(x) \, ve \ \exists x \in X \quad \mu_A(x) < \mu_B(x)$$

ise A ya B nin öz alt kümesi denir ve $A \subset B$ ile gösterilir [37].

Tanım 1.2.6. *A bir fuzzy kümesi olsun.*

$$\bar{A} = \left\{ \left(x, \bar{\mu_A}(x) \right) : \forall x \in X, \ \bar{\mu_A}(x) = 1 - \mu_A(x) \right\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A fuzzy kümesinin tümleyeni denir [37].

Tanım 1.2.7. *A ve B, X evrensel kümesinde iki fuzzy küme olsun.*

$$A \cap B = \{(x, \mu_{A \cap B}(x)) : \forall x \in X \ \mu_{A \cap B}(x) = \min(\mu_A(x), \mu_B(x))\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A ve B fuzzy kümesinin kesişimi denir [37].

Tanım 1.2.8. *A ve B, X evrensel kümesinde iki fuzzy küme olsun.*

$$A \cup B = \{(x, \mu_{A \cup B}(x)) : \forall x \in X \ \mu_{A \cup B}(x) = \max(\mu_A(x), \mu_B(x))\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye A ve B fuzzy kümesinin birleşimi denir [37].

Tanım 1.2.9. *A ve B, X evrensel kümesinde iki fuzzy küme ve $\mu_A(x)$ ve $\mu_B(x)$ de sırasıyla A ve B nin üyelik fonksiyonları olsun. Bu durumda A ve B fuzzy kümesinin farkı*

$$A - B = \left\{ (x, \mu_{A-B}(x)) : \forall x \in X \ \mu_{A-B}(x) = \min\left(\mu_A(x), \bar{\mu_B}(x) \right) \right\}$$

şeklinde tanımlanır [37].

Tanım 1.2.10. *A bir fuzzy kümesi olsun. Her $x \in X$ için $\mu_A(x) = 0$ ise A ya boş küme denir ve $A = \emptyset$ ile gösterilir [37].*

Tanım 1.2.11. *A bir fuzzy kümesi olsun.* $t \in [0,1]$ *için*

$$A_t = \{x \in X : \mu_A(x) \geq t\}$$

şeklinde tanımlanan kümeye t-seviye kümesi (t-kesimi) denir [37].

Fuzzy bağıntıyı tanımlamak için öncelikle klasik bağıntıyı tanımlayalım. Klasik bağıntıyı günlük hayattan bir örnekle açıklayalım. X renkler kümesi ve Y ise olgunluk derecelerini gösteren iki küme olsun. $X = \{$yeşil, sarı,kırmızı$\}$ ve $Y = \{$ham, yarı olgun, olgun$\}$ şeklinde alalım. İki klasik küme arasında $X \longrightarrow Y$ ye tanımlanan klasik bağıntı aşağıdaki şekilde Tablo 1 ile ifade edilir.

	Ham	Yarı Olgun	Olgun
Yeşil	1	0	0
Sarı	0	1	0
Kırmızı	0	0	1

Tablo 1

Yukarıdaki tabloda, 0 ve 1 değerleri bu bağıntının üyelik derecesini tanımlar. Bu bağıntı X ve Y gibi iki klasik kümeden oluşturulan yeni bir klasik kümedir. Bu yeni küme R ile gösterilir ve aşağıdaki kurallarla oluşturulur:

1. Meyvenin rengi yeşil ise bu durumda meyve hamdır.
2. Meyvenin rengi sarı ise bu durumda meyve yarı olgundur.
3. Meyvenin rengi kırmızı ise bu durumda meyve olgundur.

Aynı iki kümenin fuzzy bağıntı ile oluşturulan tablosu ise Tablo 2 ile verilmiştir:

	Ham	Yarı Olgun	Olgun
Yeşil	1	0.6	0
Sarı	0.4	1	0.3
Kırmızı	0	0.5	1

Tablo 2

Klasik bağıntı iki evrensel kümenin kartezyen çarpımı şeklinde tanımlanır ve

$$X \times Y = \{(x, y) \, | x \in X, y \in Y\}$$

biçiminde gösterilir. Klasik R bağıntısı üyelik fonksiyonu yardımıyla

$$\mu_R(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in R \\ 0, & (x, y) \notin R \end{cases}$$

biçimindedir. Eğer verilen kümeler sonlu ise bağıntı bir matris ile gösterilir ve bu R matrise R bağıntı matrisi denir [38].

Örnek 1.2.1. *$A = \{1, 3, 8\}$ ve $B = \{5, 6, 9\}$ kümelerini alalım. R bağıntısı $R = \{(x, y) : x < y\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda R bağıntı matrisi*

$$R = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 3 \\ 8 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 5 & 6 & 9 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

biçimindedir.

Şimdi ise fuzzy bağıntıyı tanımlayalım.

Tanım 1.2.12. *Boştan farklı X ve Y kümeleri arasında bir R fuzzy bağıntı , $X \times Y$ üzerinde bir fuzzy kümedir ve aşağıdaki şekilde tanımlanır [38]:*

$$\mu_R : X \times Y \longrightarrow [0, 1],$$

$$R = \{((x, y), \mu_R(x, y)) \mid (x, y) \in X \times Y\}$$

Fuzzy bağıntılar iki boyutlu bir tablo biçiminde gösterilir. $m \times n$ boyutlu bir matrisle R fuzzy bağıntısı aşağıdaki şekilde bir matris ile de verilebilir:

$$R = \begin{array}{c} \\ x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} y_1 & \cdots & y_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mu_R(x_1, y_1) & \cdots & \mu_R(x_1, y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_R(x_m, y_1) & \cdots & \mu_R(x_m, y_n) \end{bmatrix} \end{array}$$

Örnek 1.2.2. *$X = \{1, 1, 2\}$ ve $Y = \{1, 3\}$ kümeleri ve $\mu_R(x, y) = e^{-(x+y)}$ üyelik fonksiyonu verilsin. Bu durumda R fuzzy bağıntı*

$$R = \left\{ \frac{e^{-(1+1)}}{(1,1)}, \frac{e^{-(1+3)}}{(1,3)}, \frac{e^{-(1+1)}}{(1,1)}, \frac{e^{-(1+3)}}{(1,3)}, \frac{e^{-(2+1)}}{(2,1)}, \frac{e^{-(2+3)}}{(2,3)} \right\}$$

yani

$$R = \left\{ \frac{0.135}{(1,1)}, \frac{0.018}{(1,3)}, \frac{0.135}{(1,1)}, \frac{0.018}{(1,3)}, \frac{0.049}{(2,1)}, \frac{0.006}{(2,3)} \right\}$$

biçimindedir. Bağıntı matrisi ise aşağıdaki şekildedir:

$$R = \begin{bmatrix} 0.135 & 0.018 \\ 0.135 & 0.018 \\ 0.049 & 0.006 \end{bmatrix}.$$

Tanım 1.2.13. *R, $X \times X$ üzerinde bir fuzzy bağıntı olsun.*

1. *Her $x \in X$ için $\mu_R(x, x) = 1$ ise, R ye yansımalı fuzzy bağıntı denir.*
2. *Her $x \in X$ için $\mu_R(x, x) = 0$ ise, R ye yansımalı olmayan fuzzy bağıntı denir.*
3. *Her $x, y \in X$ için $\mu_R(x, y) = \mu_R(y, x)$ eşitliği sağlanıyorsa, bu durumda R ye simetrik fuzzy bağıntı denir.*
4. *Her $x, y \in X$ için $\mu_R(x, y) > 0$ ve $x \neq y$ iken $\mu_R(y, x) = 0$ ise, R ye antisimetrik fuzzy bağıntı denir.*
5. *Her $x, y \in X$ için R fuzzy bağıntısı $\mu_R(x, z) \geq \max_{y \in X} (\min(\mu_R(x, y), \mu_R(y, z)))$ koşulunu sağlarsa, bu durumda R ye geçişmeli fuzzy bağıntı denir.*

Ayrıca, geçişmeli fuzzy bağıntı olma koşulu aşağıdaki biçimde de yazılabilir:

$$R(x, y) \geq (R \circ R)(x, y).$$

Bu durumda; eğer

$$R \circ R \subseteq R \text{ veya } R^2 \subset R$$

koşulu sağlanıyorsa, R ye geçişmeli fuzzy bağıntı denir. Burada,

$$R \circ R \subseteq R \left(\text{veya } R^2 \subset R \right) \text{ ifadesi } \mu_{R^2}(x, y) \leq \mu_R(x, y)$$

olması anlamındadır.

1.3 Latisler ve L-Fuzzy Bağıntılar

Bu bölümdeki tanımlar [39] den alınmıştır.

Tanım 1.3.1. *L boştan farklı bir küme olmak üzere "$\leq$" L de bir bağıntı olsun. L aşağıdaki koşulları sağlarsa L ye bir sıralı (kısmi sıralı) küme ya da poset denir.*

1. $\forall x \in L \quad x \leq x$.
2. $\forall x, y \in L \quad x \leq y$ *ve* $y \leq x$ *ise* $x = y$.
3. $\forall x, y, z \in L \quad x \leq y$ *ve* $y \leq z$ *ise* $x \leq z$.

L sıralı kümesi $(L, \leq)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 1.3.2. *$(L, \leq)$ bir sıralı küme ve $A \subseteq L$ olsun. Bu durumda*

1. $\forall y \in A \quad x \leq y$ *ise* $x \in L$ *elemanına A nın alt sınırı denir.*
2. $\forall y \in A \quad y \leq z$ *ise* $z \in L$ *elemanına A nın üst sınırı denir.*

Tanım 1.3.3. *$(L, \leq)$ bir sıralı küme ve $A \subseteq L$ olsun.*

1. $\forall y \in A \quad x \leq y$ *olacak biçimde $x \in A$ elemanı varsa x elemanına A nın en küçük elemanı denir.*
2. $\forall y \in A \quad y \leq x$ *olacak biçimde $x \in A$ elemanı varsa x elemanına A nın en büyük elemanı denir.*

Tanım 1.3.4. $\overline{A}$ *, A nın tüm üst sınırlarından ve $\underline{A}$, A nın tüm alt sınırlarından oluşan küme olsun.*

1. $\underline{A} \neq \emptyset$ *ve* $\underline{A}$ *nın en büyük elemanı varsa bu elemana A nın en büyük alt sınırı denir ve* $\inf A$, $\bigwedge A$ *veya* $\bigwedge\limits_{a \in A} a$ *notasyonlarından biri ile gösterilir.*
2. $\overline{A} \neq \emptyset$ *ve* $\overline{A}$ *nın en küçük elemanı varsa bu elemana A nın en küçük üst sınırı denir ve* $\sup A$, $\bigvee A$ *veya* $\bigvee\limits_{a \in A} a$ *notasyonlarından biri ile gösterilir.*

Tanım 1.3.5. $(L, \leq)$ *bir sıralı küme olsun. L nin sonlu her alt kümesinin supremum ve infimumu varsa L ye bir latis (lattice, kafes, örgü) denir ve* $L = (L, \vee, \wedge, 0_L, 1_L)$ *ile gösterilir. Diğer bir ifadeyle L latis ise,* $\forall x, y \in L \quad \sup\{x, y\} = x \vee y$ *ve* $\inf\{x, y\} = x \wedge y$ *vardır.*

Burada, 0_L ve 1_L sırasıyla L nin en küçük ve en büyük elemanını ifade etmektedir. Özel olarak, $[0, 1]$ aralığı ve $2 = \{0, 1\}$ kümesi birer latisdir.

Tanım 1.3.6. $(L, \leq)$ *bir kısmi sıralı küme olsun. Bu durumda, her* $x, y \in L$ *için* $x \leq y$ *veya* $y \leq x$ *özelliği sağlanırsa L ye bir zincir (chain)denir.*

Tanım 1.3.7. $(L, \leq)$ *bir kısmi sıralı küme olsun. Her* $T \subseteq L$ *için* $\sup T$ *ve* $\inf T$ *varsa L ye bir tam latis (complete lattice) denir.*

Tanım 1.3.8. $(L, \leq)$ *bir kısmi sıralı küme olsun. L bir latis ve her* $x, y, z \in L$ *için* $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$ *ve* $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$ *özelliği sağlanıyorsa L ye bir dağılımlı latis (distributive lattice) denir.*

Tanım 1.3.9. *L bir latis,* $0_L \in L$ *ve* $\forall a \in L$ *için* $0_L \leq a$ *ise L ye alttan sınırlı latis denir ve* $(L, \leq, 0_L)$ *ile gösterilir.* $1_L \in L$ *ve* $\forall a \in L$ *için* $a \leq 1_L$ *ise L ye üstten sınırlı latis denir ve* $(L, \leq, 1_L)$ *ile gösterilir. L latisi hem üstten hem de alttan sınırlı ise L ye bir sınırlı latis (bounded lattice) denir ve* $(L, \leq, 0_L, 1_L)$ *ile gösterilir.*

Tanım 1.3.10. *L bir latis olsun.* $\forall\ a \in L$ *için* $a \wedge b = 0_L$ *ve* $a \vee b = 1_L$ *olacak şekilde bir* $b \in L$ *elemanı varsa b elemanına a nın tümleyeni denir.*

Tanım 1.3.11. *L bir latis olsun. Bu durumda her* $0_L \neq a \in L$ *elemanı için* $0_L < p < a$ *olacak şekilde bir* $p \in L$ *elemanı yoksa a ya L nin bir atom elemanı denir. Diğer bir deyişle,* $0_L < a$ *ve* $p < a$ *olduğu durumda* $p = 0_L$ *ise a ya atom eleman denir.*

Tanım 1.3.12. *L bir latis ve* $b \in L$ *olsun. Her* $b > 0_L$ *için sıralamada kendinden önce gelen bir eleman varsa, yani bir* $a \in L$ *için* $b \geq a > 0_L$ *ise L ye atomik latis denir.*

Bundan sonra; aksi söylenmedikçe L bir tam latis olarak alınacaktır.

Tanım 1.3.13. *X bir küme olmak üzere, $\mu : X \longrightarrow L$ fonksiyonuna X in $L-$fuzzy alt kümeleri denir. X in bütün L-fuzzy alt kümeleri L^X ile gösterilir. $L = [0, 1]$ ise $L-$fuzzy kümelere X in fuzzy alt kümeleri denir [40].*

Tanım 1.3.14. *X bir küme olmak üzere, $R_L : X \times X \longrightarrow L$ fonksiyonuna X kümesi üzerinde tanımlanan $L-$fuzzy ikili işlemi denir. X kümesi üzerinde tanımlanan bütün L-fuzzy ikili işlemlerin kümesi R_L^X ile gösterilir. R_L^X bir sıralı küme ve $R_L, S_L \in R_L^X$ olsun. Bu durumda, $R_L \leq S_L$ olması için gerek ve yeter şart $x \in X \times X$ için $R_L(x) \leq S_L(x)$ olmasıdır [40].*

Tanım 1.3.15. *R_L bir X kümesi üzerinde tanımlı $L-$fuzzy ikili işlem olsun. Bu durumda,*

1. *$\forall x, y, z \in X \quad R_L \neq 0_L$ ve $R_L(x, x) \geq R_L(y, z)$ koşulları sağlanırsa R_L ye yansımalı $L-$fuzzy bağıntı denir.*
2. *$\forall x \in X \quad R_L(x, x) = 0_L$ ise R_L ye yansımalı olmayan $L-$fuzzy bağıntı denir.*
3. *$\forall x, y \in X \quad R_L(x, y) = R_L(y, x)$ ise R_L ye simetrik $L-$fuzzy bağıntı denir.*
4. *$\forall x, y \in X \quad R_L(x, y) > 0_L$ ve $R_L(x, y) = R_L(y, x)$ ise $x = y$ koşulları sağlanırsa R_L ye ters simetrik $L-$fuzzy bağıntı denir.*
5. *$\forall x, y, z \in X \quad R_L(x, z) \geq R_L(x, y) \wedge R_L(y, z)$ ise R_L ye geçişmeli $L-$fuzzy bağıntı denir.*
6. *R_L bir yansımalı, simetrik ve geçişmeli $L-$fuzzy bağıntı ise R_L ye bir $L-$fuzzy denklik bağıntısı denir.*
7. *R_L bir yansımalı, antisimetrik ve geçişmeli $L-$fuzzy bağıntı ise R_L ye bir kısmi sıralı $L-$fuzzy bağıntısı denir [40].*

L-fuzzy bağıntılar, $n \times n$ boyutlu bir matrisle aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$
R_L = \begin{array}{c c}
 & \begin{array}{ccc} x_1 & \cdots & x_n \end{array} \\
\begin{array}{c} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{array} & \left[\begin{array}{ccc} R_L\left(x_1, x_1\right) & \cdots & R_L\left(x_1, x_n\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ R_L\left(x_n, x_1\right) & \cdots & R_L\left(x_n, x_n\right) \end{array} \right]
\end{array}.
$$

1.4 Kompleks Fuzzy Kümeler ve Bağıntılar

Kompleks fuzzy kümeler, klasik kompleks sayıları kullanarak gösterilen standard fuzzy kümelerin üyelik değerlerinin bulunmasını sağlar. Diğer bir ifadeyle, Ramot vd fuzzy küme kavramını μ üyelik fonksiyonunu kompleks değerli fonksiyon yardımıyla değiştirerek kompleks fuzzy kümelere genelleştirdiler [7]. Ayrıca, Ramot vd kompleks fuzzy bağıntı ve kompleks fuzzy logic kavramlarını tanımladılar. Kompleks fuzzy bağıntının tümleyen, birleşim ve kesişim kavramlarını da ayrıca çalıştılar [8].

Bu bölümdeki tanımlar $[7, 8]$ den alınmıştır.

Tanım 1.4.1. *U bir evrensel küme ve S, U da tanımlanan kompleks fuzzy kümesi olsun. S kümesi $\mu_S(x)$ üyelik fonksiyonu yardımıyla karakterize edilir ve $\mu_S(x)$, her $x \in U$ elemanını S de bir kompleks değerli üyelik fonksiyonuna taşır.*

$\mu_S(x)$ değerleri kompleks düzlemde birim çember içinde yer alır ve $r_S(x).e^{iw_s(x)}$ biçiminde ifade edilir. Burada $i^2 = -1$, $r_s(x)$ ve $w_S(x)$ fonksiyonları ise reel değerli fonksiyonlardır. $r_s(x) \in [0, 1]$ ve $e^{iw_s(x)}$ ise periyodik yasası 2π ve esas periyodu $0 \leq w_S(x) < 2\pi$, $W_S(x) = w_S(x) + 2k\pi$, $k = 0,\pm1,\pm2,\cdots$, olan periyodik fonksiyondur. $w_S(x)$ ise esas argümenttir. Üyelik fonksiyonunun her bir kompleks derecesi bir $r_s(x)$ genlik (amplitude) terimi ve bir $w_S(x)$ faz (phase) terimi ile tanımlanır. S kompleks fuzzy kümesi ikililerin bir kümesi olarak aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$S = \{(x, \mu_S(x)) \,|x \in U\}.$$

Tanım 1.4.2. *U ve V iki evrensel küme ve $x \in U$, $y \in V$ olsun. $R(U, V)$ kompleks fuzzy bağıntı, $U \times V$ çarpım uzayının bir kompleks fuzzy alt kümesidir. $R(U, V)$ bağıntısı $\mu_R(x, y)$ kompleks üyelik fonksiyonu ile karakterize edilir. $\mu_R(x, y)$, her (x, y) ikilisini $R(U, V)$ kümesinde bir kompleks değerli üyelik derecesine taşır. $R(U, V)$ kompleks fuzzy bağıntıların kümesi ikililerin bir kümesi olarak aşağıdaki biçimde ifade edilir:*

$$R(U, V) = \{((x, y), \mu_R(x, y)) \,|(x, y) \in U \times V\}.$$

Tanım 1.4.3. *A ve B, $U \times V$ üzerinde tanımlanan iki kompleks küme ve sırasıyla $\mu_A(x, y) = r_A(x, y).e^{iw_A(x,y)}$ ve $\mu_B(x, y) = r_B(x, y).e^{iw_B(x,y)}$, A ve B nin üyelik* *fonksiyonları olsun. A ve B nin kompleks fuzzy birleşim bağıntısı $A \oplus B$ şeklinde gösterilir ve*

$$\begin{aligned} \mu_{A\oplus B}(x,y) &= r_{A\oplus B}(x,y).e^{iw_{A\oplus B}(x,y)} \\ &= max\left(r_A(x,y), r_B(x,y)\right).e^{i\max(w_A(x,y),w_B(x,y))} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek 1.4.1. *A ve B kümeleri*

$$A = \frac{0,5e^{i1,2\pi}}{-1} + \frac{0,6e^{i2\pi}}{1} + \frac{1.0e^{i1,7\pi}}{0} + \frac{0,8e^{i\pi}}{2}$$

$$B = \frac{0,8e^{i1,2\pi}}{-1} + \frac{0,3e^{i1,6\pi}}{1} + \frac{1.0e^{i1.8\pi}}{0} + \frac{0,7e^{i2\pi}}{2}$$

biçiminde verilsin. Bu durumda, A ve B nin kompleks fuzzy birleşimi,

$$A \oplus B = \begin{bmatrix} 0,8e^{i1,2\pi} & 0,8e^{i2\pi} & 1,0e^{i1,7\pi} & 0,8e^{i1,2\pi} \\ 0,5e^{i1,6\pi} & 0,6e^{i2\pi} & 1,0e^{i1,8\pi} & 0,8e^{i1,6\pi} \\ 1.0e^{i1.8\pi} & 1.0e^{i2\pi} & 1.0e^{i1.8\pi} & 1.0e^{i1.8\pi} \\ 0,7e^{i2\pi} & 0,7e^{i2\pi} & 1,0e^{i2\pi} & 0,8e^{i2\pi} \end{bmatrix}$$

biçimindedir.

Tanım 1.4.4. *A ve B, $U \times V$ üzerinde tanımlanan iki kompleks küme ve sırasıyla $\mu_A(x,y) = r_A(x,y).e^{iw_A(x,y)}$ ve $\mu_B(x,y) = r_B(x,y).e^{iw_B(x,y)}$, A ve B nin üyelik fonksiyonları olsun. A ve B nin kompleks fuzzy kesişim bağıntısı $A \otimes B$ şeklinde gösterilir ve*

$$\begin{aligned} \mu_{A\otimes B}(x,y) &= r_{A\otimes B}(x,y).e^{iw_{A\otimes B}(x,y)} \\ &= min\left(r_A(x,y), r_B(x,y)\right).e^{i\min(w_A(x,y),w_B(x,y))} \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanır.

Örnek 1.4.2. *A ve B kümeleri*

$$A = \frac{0,7e^{i1,2\pi}}{-1} + \frac{0,9e^{i1,5\pi}}{0} + \frac{0,5e^{i1,7\pi}}{1} + \frac{1,0e^{i2\pi}}{2}$$

$$B = \frac{0,3e^{i\pi}}{-1} + \frac{0,4e^{i1,6\pi}}{0} + \frac{1.0e^{i1,2\pi}}{1} + \frac{0,6e^{i\pi}}{2}$$

biçiminde verilsin. Bu durumda, A ve B nin kompleks fuzzy kesişimi,

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} 0,3e^{i\pi} & 0,3e^{i\pi} & 0,3e^{i\pi} & 0,3e^{i\pi} \\ 0,4e^{i1,2\pi} & 0,4e^{i1,5\pi} & 0,4e^{i1,6\pi} & 0,4e^{i1,6\pi} \\ 0,7e^{i1.2\pi} & 0,9e^{i1,2\pi} & 0,5e^{i1.2\pi} & 1,0e^{i1.2\pi} \\ 0,6e^{i\pi} & 0,6e^{i\pi} & 0,5e^{i\pi} & 0,6e^{i\pi} \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Tanım 1.4.5. *X,Y ve Z evrensel kümeler olsun. A kümesi, X ve Y nin bir kompleks fuzzy bağıntısı ve B kümesi, Y ve Z nin bir kompleks fuzzy bağıntısı olmak üzere A ve B nin bileşimi, X ve Z nin bir kompleks fuzzy bağıntısıdır. $A \circ B$ ile gösterilir ve*

$$\begin{aligned} \mu_{A\circ B}(x,z) &= r_{A\circ B}(x,z).e^{iw_{A\circ B}(x,z)} \\ &= \sup_{y\in Y} \inf\left(r_A(x,y), r_B(y,z)\right).e^{i\sup_{y\in Y} \inf(w_A(x,y), w_B(y,z))} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.4.3. *A ve B*

$$A = \begin{bmatrix} 0,5e^{i\pi} & 0,3e^{i1.2\pi} \\ 1,0e^{i1.6\pi} & 0,8e^{i1,3\pi} \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 0,6e^{i2\pi} & 0,5e^{i1.3\pi} \\ 0,3e^{i\pi} & 1,0e^{i1,7\pi} \end{bmatrix}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda, A ve B nin kompleks fuzzy bileşimi,

$$A \circ B = \begin{bmatrix} 0,5e^{i\pi} & 0,5e^{i1.2\pi} \\ 0,6e^{i1,6\pi} & 0,8e^{i1,3\pi} \end{bmatrix}$$

dir.

BÖLÜM 2

FUZZY PROKSİMAL RELATOR UZAYLAR

Bu bölümde, fuzzy proksimal uzayının tanımı, konu ile ilgili örnekler ve iki farklı proksimiti uzayı için fuzzy proksimal uzay tanımları verildi. Fuzzy bağıntının sağladığı özelikler, fuzzy proksimiti bağıntısı içinde incelenerek ayrıntılı şekilde açıklandı. Fuzzy proksimiti bağıntısının maksimum ve minimum yapıları, izdüşümü ve silindirik genişlemesi tanımlarından bahsedildi. Ayrıca, uzaysal Smirnov proksimiti ölçüm tanımına yer verilerek uzaysal Smirnov proksimiti ölçümünün bir fuzzy proksimiti bağıntısı olduğu gösterildi.

2.1 Fuzzy Proksimal Relator Uzaylar

Tanım 2.1.1. $(X, \mathcal{R})$ *bir proksimal relator uzay,*

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{R}}: \quad & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) && \longrightarrow [0,1] \\ & (A, B) && \longmapsto \mu_{\mathcal{R}}(A, B) \end{aligned}$$

bir fuzzy bağıntı ve A,B $\subset X$ *olsun. Bu durumda,her* $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ *için*

$$\mathcal{R}_{\mu} = \{((A, B), \mu_{\mathcal{R}}(A, B)) \mid (A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)\}$$

kümesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa, bu kümeye bir fuzzy proksimiti bağıntısı denir:

$N_{\mu_{\mathcal{R}}}1)$ $\mu_{\mathcal{R}}(A, \emptyset) = 0 \quad (A \neq \emptyset)$.

$N_{\mu_{\mathcal{R}}}2)$ $\mu_{\mathcal{R}}(A, B) = \mu_{\mathcal{R}}(B, A)$.

$N_{\mu_{\mathcal{R}}}3)$ $\mu_{\mathcal{R}}(A, B) \neq 0$ *iken* $A\mathcal{R}B$.

$N_{\mu_{\mathcal{R}}}4)$ $\mu_{\mathcal{R}}(A, (B \cup C)) \neq 0$ *iken* $\mu_{\mathcal{R}}(A, B) \neq 0$ $(A\mathcal{R}B)$ *ya da* $\mu_{\mathcal{R}}(A, C) \neq 0$ $(A\mathcal{R}C)$.

Ayrıca fuzzy proksimiti bağıntısı,

$$\mathcal{R}_{\mu}(A,B)=\left\{\frac{\mu_{\mathcal{R}}(A,B)}{(A,B)}\mid (A,B)\in\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)\right\}$$

şeklinde de gösterilir.

$\mathcal{P}(X)$ kümesi üzerinde tanımlanan bütün fuzzy proksimiti bağıntıların kümesi $\mathcal{P}_{\mu_{\mathcal{R}}}(X)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca, $\mu_{\mathcal{R}}(A,B)$ ye fuzzy proksimiti ölçümü denir. $m\times n$ boyutlu bir matrisle fuzzy proksimiti bağıntısı aşağıdaki şekilde bir matris ile verilir:

$$\mathcal{R}_{\mu}=\begin{array}{c} \\ A_1 \\ \vdots \\ A_m \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{ccc} B_1 & \cdots & B_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mu_{\mathcal{R}}(A_1,B_1) & \cdots & \mu_{\mathcal{R}}(A_1,B_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{\mathcal{R}}(A_m,B_1) & \cdots & \mu_{\mathcal{R}}(A_m,B_n) \end{bmatrix} \end{array}.$$

$\mu_{\mathcal{R}}(A,B)$ fuzzy proksimiti ölçümü, A ve B kümelerinin birbirlerine ne kadar proksimal (yakın) olduklarını gösteren ölçüm anlamında kullanılır.

$\mu_{\mathcal{R}}(A,B)$ fuzzy proksimiti bağıntısının tümleyeni $\overline{\mu}_{\mathcal{R}}(A,B)$ biçiminde gösterilir ve her $A,B\in\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)$ için $\overline{\mu}_{\mathcal{R}}(A,B)=1-\mu_{\mathcal{R}}(A,B)$ şeklinde tanımlanır. Buradan, $1-\mu_{\mathcal{R}}(A,B)$ ye *fuzzy uzaklık ölçümü* denir ve A, B kümelerinin birbirlerine ne kadar uzaklıkta olduklarını gösterir.

Tanım 2.1.2. *(X,δ) bir proksimiti uzayı olsun. Her $A,B,C\in\mathcal{P}(X)$ için aşağıdaki koşulları sağlarsa, (X,δ,μ_δ) ya fuzzy uzaysal proksimiti uzayı denir:*

$N_{\mu_\delta}1)$ $\mu_\delta(A,\emptyset)=0\ \ (A\neq\emptyset)$.

$N_{\mu_\delta}2)$ $\mu_\delta(A,B)=\mu_\delta(B,A)$.

$N_{\mu_\delta}3)$ $\mu_\delta(A,B)\neq 0$ *iken* $A\delta B$.

$N_{\mu_\delta}4)$ $\mu_\delta(A,(B\cup C))\neq 0$ *iken* $\mu_\delta(A,B)\neq 0$ $(A\delta B)$ *ya da* $\mu_\delta(A,C)\neq 0$ $(A\delta C)$.

(X,δ,μ_δ) fuzzy uzaysal proksimiti aksiyomlarını ve aşağıdaki $N_{\mu_\delta}5$ aksiyomunu sağlarsa, μ_δ fuzzy bağıntısına bir fuzzy uzaysal Lodato proksimiti bağıntısı denir:

$N_{\mu_\delta}5)$ $\mu_\delta(A,B)\neq 0$ *ve her* $b\in B$ *için* $\mu_\delta(b,C)\neq 0$ *iken* $\mu_\delta(A,C)\neq 0$ $(A\delta C)$.

Tanım 2.1.3. *$(X, \mathcal{R})$ proksimal relator uzayında, $\mathcal{R}_\mu$ bir fuzzy proksimiti bağıntısı olsun. Bu durumda $(X, \mathcal{R}, \mu_{\mathcal{R}})$ ye bir fuzzy proksimal relator uzay denir.*

Örnek 2.1.1. *$X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ kümesini ve (X, δ) proksimiti uzayını alalım. Temel proksimiti δ aşağıdaki şekilde tanımlansın:*

$$A\delta B :\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

$A = \{a, b, c, d, e\}$, $B = \{d, e, f, g, h\}$, $C = \{e, f, g, h, i\}$, $D = \{a, b, d, e, f, i\}$, X kümesinin alt kümeleri olsun.

$A \cap B \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$, $A \cap D \neq \emptyset$, $B \cap D \neq \emptyset$ ve $C \cap D \neq \emptyset$ olduğundan, $A\delta B$, $B\delta C$, $A\delta C$, $A\delta D$, $B\delta D$ ve $C\delta D$ olduğu kolayca görülür.

Fuzzy proksimiti bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$\begin{aligned} \mu_\delta : \quad & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) && \longrightarrow [0,1] \\ & (A, B) && \longmapsto \mu_\delta(A, B) = \tfrac{|A \cap B|}{|A \cup B|}. \end{aligned}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \mu_\delta(A, B) &= \tfrac{|A\cap B|}{|A\cup B|} &&= \tfrac{2}{8} &&= 0.25, \\ \mu_\delta(B, C) &= \tfrac{|B\cap C|}{|B\cup C|} &&= \tfrac{4}{6} &&\approxeq 0.66, \\ \mu_\delta(A, C) &= \tfrac{|A\cap C|}{|A\cup C|} &&= \tfrac{1}{9} &&\approxeq 0.11, \\ \mu_\delta(A, D) &= \tfrac{|A\cap D|}{|A\cup D|} &&= \tfrac{4}{10} &&= 0.4, \\ \mu_\delta(B, D) &= \tfrac{|B\cap D|}{|B\cup D|} &&= \tfrac{3}{10} &&= 0.3, \\ \mu_\delta(C, D) &= \tfrac{|C\cap D|}{|C\cup D|} &&= \tfrac{3}{11} &&\approxeq 0.27 \end{aligned}$$

elde edilir. Dolayısıyla

A, B ye $0.25-$ fuzzy proksimaldir $(A\delta_{0.25}B)$,

B, C ye $0.66-$ fuzzy proksimaldir $(B\delta_{0.66}C)$,

A, C ye $0.11-$ fuzzy proksimaldir $(A\delta_{0.11}C)$,

A, D ye $0.4-$ fuzzy proksimaldir $(A\delta_{0.4}D)$,

B, D ye $0.3-$ fuzzy proksimaldir $(B\delta_{0.3}D)$,

C, D ye $0.27-$ fuzzy proksimaldir $(C\delta_{0.27}D)$.

Benzer şekilde, $1-\mu_{\mathcal{R}}(A, B)$ kullanılarak, fuzzy uzaklık ölçümleri bulunabilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
&A,\ B \ \textit{ye}\ 0.75-\ \textit{fuzzy uzaktır}\ \left(A\overline{\delta}_{0.75}B\right),\\
&B,\ C \ \textit{ye}\ 0.34-\ \textit{fuzzy uzaktır}\ \left(B\overline{\delta}_{0.34}C\right),\\
&A,\ C \ \textit{ye}\ 0.89-\ \textit{fuzzy uzaktır}\ \left(A\overline{\delta}_{0.89}C\right),\\
&A,\ D \ \textit{ye}\ 0.6-\ \textit{fuzzy uzaktır}\ \left(A\overline{\delta}_{0.6}D\right),\\
&B,\ D \ \textit{ye}\ 0.7-\ \textit{fuzzy uzaktır}\ \left(B\overline{\delta}_{0.7}D\right),\\
&C,\ D \ \textit{ye}\ 0.73-\ \textit{fuzzy uzaktır}\ D\ \left(C\overline{\delta}_{0.73}D\right).
\end{aligned}
$$

Fuzzy proksimiti

$$\delta_\mu \approxeq \left\{\frac{0.25}{(A,B)}, \frac{0.66}{(B,C)}, \frac{0.11}{(A,C)}, \frac{0.4}{(A,D)}, \frac{0.3}{(B,D)}, \frac{0.27}{(C,D)}\right\}$$

veya

$$\delta_\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.11 & 0.4 \\ 0.25 & 1 & 0.66 & 0.3 \\ 0.11 & 0.66 & 1 & 0.27 \\ 0.4 & 0.3 & 0.27 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Kolayca görülebilir ki μ_δ, $(N_{\mu_\delta}1) - (N_{\mu_\delta}4)$ *aksiyomunu sağlar. Böylece* (X, δ, μ_δ) *bir fuzzy temel proksimiti uzayıdır.*

Örnek 2.1.2. $X = \{n, m, o, p, r, t, x, y, z\}$ *kümesini ve* (X, δ) *proksimiti uzayını alalım. Temel proksimiti* δ *aşağıdaki şekilde tanımlansın:*

$$A\delta B :\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

X *kümesinin, * $A = \{o, t, x, y, z\}$ *ve* $B = \{m, n, o, p, r, t\}$ *alt kümeleri alalım.* $A \cap B \neq \emptyset$ *olduğundan* $A\delta B$ *elde edilir. Fuzzy proksimiti bağıntısı*

$$
\begin{aligned}
\mu_\delta :\ \ \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) &\longrightarrow [0,1]\\
(A, B) &\longmapsto \mu_\delta(A, B) = \tfrac{|A \backslash B|}{|A \cup B|}
\end{aligned}
$$

şeklinde tanımlanabilir. Buradan

$$
\begin{aligned}
\mu_\delta(A, B) &= \tfrac{|A \backslash B|}{|A \cup B|} = \tfrac{3}{9} \approxeq 0.33,\\
\mu_\delta(B, A) &= \tfrac{|B \backslash A|}{|B \cup A|} = \tfrac{4}{9} \approxeq 0.44
\end{aligned}
$$

tür. Böylece

$$A,\ B\ ye\ 0.33-\ fuzzy\ proksimal\ (A\delta_{0.33}B),$$
$$B,\ A\ ye\ 0.44-\ fuzzy\ proksimal\ (B\delta_{0.44}A),$$

olur. μ_δ *simetrik olmadığından, yani* $\mu_\delta(A,B) \neq \mu_\delta(B,A)$ *olduğundan,* (X,δ,μ_δ) *bir fuzzy proksimiti uzayı değildir.*

δ, kümeler arasında bir proksimiti bağıntısı olmak üzere; bu bağıntı bu kümelerin birbirlerine yakın olduklarını ifade eder [19].

$\mathcal{R}_\delta = \{\delta_1,\delta_2,\delta_3\}$ olmak üzere $\delta_1,\delta_2,\delta_3$ fuzzy proksimiti üçlüsünü dikkate alalım. X kümesinde fuzzy proksimiti bağıntılarının bir ailesini aldığımızda, bir $(X,\mathcal{R}_\delta)$ (ya da $X(\mathcal{R}_\delta)$) fuzzy proksimal relator uzay elde edilir [36]. Bir uzay proksimal relator uzay olma özelliği ile yeniden tanımlanırsa fuzzy proksimiti bağıntısı gibi kullanışlı yapılar tanımlamak mümkündür. Daha basite indirgendiğinde, yani, sadece üç tane fuzzy proksimiti bağıntısı ele alınırsa, Lodato proksimiti [17, 28, 41] (δ), tanımsal Lodato proksimiti δ [42] (δ_Φ) ve Lodato proksimitinin bir genişlemesi olan tanımsal Lodato fuzzy proksimiti [31] (μ_{δ_Φ}) olarak düşünülebilir. Bu durumda, bir fuzzy proksimal relator $\mathcal{R}_{\mu_{\delta_\Phi}}$,

$$\mathcal{R}_{\mu_{\delta_\Phi}} = \{\delta,\delta_\Phi,\mu_{\delta_\Phi}\}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Tanım 2.1.4. *X boştan farklı bir küme ve δ_Φ, tanımsal Lodato proksimiti bağıntısıyla donatılmış olsun. μ_δ fuzzy bağıntısı her $A,B,C \in \mathcal{P}(X)$ için aşağıdaki koşulları sağlarsa μ_δ ye bir fuzzy tanımsal Lodato proksimiti bağıntısı denir:*

$N_{\mu_{\delta_\Phi}}1)$ $\mu_{\delta_\Phi}(A,\emptyset) = 0 \quad (A \neq \emptyset)$.

$N_{\mu_{\delta_\Phi}}2)$ $\mu_{\delta_\Phi}(A,B) = \mu_{\delta_\Phi}(B,A)$.

$N_{\mu_{\delta_\Phi}}3)$ $\mu_{\delta_\Phi}(A,B) \neq 0$ *iken* $A\delta_\Phi B$.

$N_{\mu_{\delta_\Phi}}4)$ $\mu_{\delta_\Phi}(A,(B\cup C)) \neq 0$ *iken* $\mu_{\delta_\Phi}(A,B) \neq 0$ $(A\delta_\Phi B)$ *ya da* $\mu_{\delta_\Phi}(A,C) \neq 0$ $(A\delta_\Phi C)$.

$N_{\mu_{\delta_\Phi}}5)$ $\mu_{\delta_\Phi}(A,B) \neq 0$ *ve her* $b \in B$ *için* $\mu_{\delta_\Phi}(\{b\},C) \neq 0$ *iken* $\mu_{\delta_\Phi}(A,C) \neq 0$ $(A\delta_\Phi C)$.

Tanım 2.1.5. *δ_Φ bir tanımsal fuzzy Lodato proksimiti bağıntısı olsun. Buradan, $(X, \delta_\Phi, \mu_{\delta_\Phi})$ ye fuzzy tanımsal Lodato proksimiti uzayı denir.*

Teorem 2.1.1. *$(X, \mathcal{R}, \mu_{\mathcal{R}})$ fuzzy proksimal relator uzayı olsun. Lodato proksimiti uzayı üzerinde $\delta_{\varepsilon,\upsilon}$ Smirnov proksimiti ölçümü, bir fuzzy uzaysal Lodato proksimiti bağıntısıdır.*

İspat. $\delta_{\varepsilon,\upsilon}$ nün fuzzy Lodato proksimiti bağıntısı aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

$(N_{\mu_{\mathcal{R}}}.1)$ $\delta_{\varepsilon,\upsilon}(A, \emptyset) = 0$ dır. Gerçekten, $\upsilon(A, \emptyset) \leq \varepsilon$ olduğundan

$$\upsilon(A, \emptyset) = \frac{|A \cap \emptyset|}{|X|} = \frac{0}{|X|} = 0$$

elde edilir.

$(N_{\mu_{\mathcal{R}}}.2)$ İki durum için değerlendirme yapalım:

$$\begin{aligned} \text{i)}\delta_{\varepsilon,\upsilon}(A, B) = 0 \text{ olsun.} &\implies \upsilon(A, B) \leq \varepsilon \\ &\implies \tfrac{|A \cap B|}{|X|} \leq \varepsilon \\ &\implies \tfrac{|B \cap A|}{|X|} \leq \varepsilon \\ &\implies \upsilon(B, A) \leq \varepsilon \\ &\implies \delta_{\varepsilon,\upsilon}(B, A) = 0 \end{aligned}$$

Dolayısıyla $\delta_{\varepsilon,\upsilon}(A, B) = \delta_{\varepsilon,\upsilon}(B, A)$ dır.

$$\begin{aligned} \text{ii)}\delta_{\varepsilon,\upsilon}(A, B) \neq 0 \text{ olsun.} &\implies \varepsilon < \upsilon(A, B) \leq 1 \\ &\implies \varepsilon < \upsilon(B, A) \leq 1 \\ &\implies \delta_{\varepsilon,\upsilon}(B, A) \neq 0 \end{aligned}$$

Bu nedenle $\delta_{\varepsilon,\upsilon}(A, B) = \delta_{\varepsilon,\upsilon}(B, A)$ elde edilir.

$(N_{\mu_{\mathcal{R}}}.3)$ $\delta_{\varepsilon,\upsilon}(A, B) \neq 0 \implies \varepsilon < \upsilon(A, B) \leq 1 \implies \varepsilon < \frac{|A \cap B|}{|X|} \leq 1 \implies A\delta B.$

$(N_{\mu_{\mathcal{R}}}.4)$

$$\begin{aligned} \delta_{\varepsilon,\upsilon}(A, (B \cup C)) \neq 0 &\implies \varepsilon < \upsilon(A, (B \cup C)) \leq 1 \\ &\implies \varepsilon < \tfrac{|A \cap (B \cup C)|}{|X|} \leq 1 \\ &\implies \varepsilon < \tfrac{|(A \cap B) \cup (A \cap C)|}{|X|} \leq 1 \\ &\implies \varepsilon < \tfrac{|(A \cap B)|}{|X|} \leq 1 \text{ ya da } \varepsilon < \tfrac{|(A \cap C)|}{|X|} \leq 1. \end{aligned}$$

Dolayısıyla; $\delta_{\varepsilon,\upsilon}(A, B) \neq 0$ ve $A\delta B$ ya da $\delta_{\varepsilon,\upsilon}(A, C) \neq 0$ ve $A\delta C$ dir.

$(N_{\mu_{\mathcal{R}}}.5)$ Her $b \in B$ için, $\delta_{\varepsilon,\upsilon}(A,B) \neq 0$ ve $\delta_{\varepsilon,\upsilon}(\{b\},C) \neq 0$ olsun. Buradan, $\varepsilon < \upsilon(A,B) \leq 1$ ve $\varepsilon < \upsilon(\{b\},C) \leq 1$ dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \quad \varepsilon < \tfrac{|A \cap B|}{|X|} \leq 1 \text{ ve } \varepsilon < \tfrac{|\{b\} \cap C|}{|X|} \leq 1 \\
&\Longrightarrow \quad \varepsilon < \tfrac{|(A \cap C)|}{|X|} \leq 1 \\
&\Longrightarrow \quad \delta_{\varepsilon,\upsilon}(A,C) \neq 0 \text{ ve } A\delta C.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\delta_{\varepsilon,\nu}$ Smirnov proksimiti ölçümü bir fuzzy Lodato proksimiti bağıntısıdır.

□

Teorem 2.1.2. $(X, \mathcal{R}, \mu_{\mathcal{R}})$ *bir fuzzy proksimal relator uzay olsun. Tanımsal Lodato proksimiti uzayı üzerinde* $\delta_{\varepsilon_\Phi,\nu}$ *tanımsal Smirnov proksimiti ölçümü, bir fuzzy tanımsal Lodato proksimiti bağıntısıdır.*

İspat. $\delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}$ nün fuzzy tanımsal Lodato proksimiti bağıntısı aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

$(N_{\mu_\delta}.1)$ $\delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}(A,\emptyset) = 0$ dır. Gerçekten, $\upsilon(A,\emptyset) \leq \varepsilon_\Phi$ olduğundan

$$\upsilon(A,\emptyset) = \frac{|\Phi(A) \cap \Phi(B)|}{|\Phi(X)|} = \frac{0}{|\Phi(X)|} = 0$$

elde edilir.

$(N_{\mu_\delta}.2)$ İki durum için değerlendirme yapalım:

$$\begin{aligned}
\text{i)}\delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}(A,B) = 0 \text{ olsun.} \quad &\Longrightarrow \quad \upsilon(A,B) \leq \varepsilon_\Phi \\
&\Longrightarrow \quad \tfrac{|\Phi(A) \cap \Phi(B)|}{|\Phi(X)|} \leq \varepsilon_\Phi \\
&\Longrightarrow \quad \tfrac{|\Phi(B) \cap \Phi(A)|}{|\Phi(X)|} \leq \varepsilon_\Phi \\
&\Longrightarrow \quad \upsilon(B,A) \leq \varepsilon_\Phi \\
&\Longrightarrow \quad \delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}(B,A) = 0.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla $\delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}(A,B) = \delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}(B,A)$ dır.

$$\begin{aligned}
\text{ii)}\delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}(A,B) \neq 0 \text{ olsun.} \quad &\Longrightarrow \quad \varepsilon_\Phi < \upsilon(A,B) \leq 1 \\
&\Longrightarrow \quad \varepsilon_\Phi < \upsilon(B,A) \leq 1 \\
&\Longrightarrow \quad \delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}(B,A) \neq 0.
\end{aligned}$$

Bu nedenle $\delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}(A,B) = \delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}(B,A)$ elde edilir.

$(N_{\mu_\delta}.3)$ $\delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}(A,B) \neq 0 \Longrightarrow \varepsilon_\Phi < \upsilon(A,B) \leq 1 \Longrightarrow \varepsilon_\Phi < \frac{|\Phi(A)\cap\Phi(B)|}{|\Phi(X)|} \leq 1$
$\Longrightarrow A\delta_\Phi B.$

$(N_{\mu_\delta}.4)$

$$\begin{aligned}
\delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}(A,(B\cup C)) \neq 0 &\Longrightarrow \varepsilon_\Phi < \upsilon(A,(B\cup C)) \leq 1 \\
&\Longrightarrow \varepsilon_\Phi < \tfrac{|\Phi(A)\cap(\Phi(B)\cup\Phi(C))|}{|\Phi(X)|} \leq 1 \\
&\Longrightarrow \varepsilon_\Phi < \tfrac{|(\Phi(A)\cap\Phi(B))\cup(\Phi(A)\cap\Phi(C))|}{|\Phi(X)|} \leq 1 \\
&\Longrightarrow \varepsilon_\Phi < \tfrac{|(\Phi(A)\cap\Phi(B))|}{|\Phi(X)|} \leq 1 \text{ ya da} \\
&\qquad\ \varepsilon_\Phi < \tfrac{|(\Phi(A)\cap\Phi(C))|}{|\Phi(X)|} \leq 1.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}(A,B) \neq 0$ ve $A\delta_\Phi B$ ya da $\delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}(A,C) \neq 0$ ve $A\delta_\Phi C$ dir.

$(N_{\mu_\delta}.5)$ Her $b \in B$ için, $\delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}(A,B) \neq 0$ ve $\delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}(\{b\},C) \neq 0$ olsun. Buradan, $\varepsilon_\Phi < \upsilon(A,B) \leq 1$ ve $\varepsilon_\Phi < \upsilon(\{b\},C) \leq 1$ dir. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned}
&\Longrightarrow \varepsilon_\Phi < \tfrac{|\Phi(A)\cap\Phi(B)|}{|\Phi(X)|} \leq 1 \text{ ve } \varepsilon < \tfrac{|\Phi(\{b\})\cap\Phi(C)|}{|\Phi(X)|} \leq 1 \\
&\Longrightarrow \varepsilon_\Phi < \tfrac{|(\Phi(A)\cap\Phi(C))|}{|\Phi(X)|} \leq 1 \\
&\Longrightarrow \delta_{\varepsilon_\Phi,\upsilon}(A,C) \neq 0 \text{ ve } A\delta_\Phi C.
\end{aligned}$$

Dolayısıyla, $\delta_{\varepsilon_\Phi,\nu}$ Smirnov proksimiti ölçümü bir fuzzy tanımsal Lodato proksimiti bağıntısıdır. □

Tanım 2.1.6. $(X,\mathcal{R},\mu_\mathcal{R})$ *bir fuzzy proksimal relator uzay olsun. Buradan*

$$h(\mathcal{R}_\mu) = \max_{B\in\mathcal{P}(Y)}[\max_{A\in\mathcal{P}(X)} \mathcal{R}_\mu(A,B)]$$

şeklinde tanımlanan $h(\mathcal{R}_\mu)$ *ye* $\mathcal{R}_\mu$ *fuzzy proksimiti bağıntısının yüksekliği denir.* $h(\mathcal{R}_\mu)$ *kümeler ailesindeki en büyük proksimiti derecesini verir.*

Tanım 2.1.7. $(X,\mathcal{R},\mu_\mathcal{R})$ *bir fuzzy proksimal relator uzay olsun. Buradan fuzzy proksimiti bağıntısının tersi* $\mathcal{R}_\mu$*, aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$\mathcal{R}_\mu^{-1}(B,A) = \mathcal{R}_\mu(A,B).$$

$\mathcal{R}_\mu^{-1}$, fuzzy bağıntısal matrisinin transpozudur. $\mathcal{R}_\mu^{-1}$, $(N_{\mu_\delta}1) - (N_{\mu_\delta}4)$ fuzzy proksimiti bağıntısı aksiyomlarını sağlar.

Gerçekten; $\mathcal{R}_\mu(A,B)$ matrisi simetrik matris olduğundan, fuzzy bağıntısal matrisinin transpozu $\mathcal{R}_\mu^{-1}(B,A)$ ile birbirlerine eşittirler. Böylece, aşağıdaki teorem ispatsız verilir.

Teorem 2.1.3. $\mathcal{R}_{\mu}^{-1}(B,A)$ *bir fuzzy proksimiti bağıntısıdır.*

Tanım 2.1.8. $(X,\mathcal{R},\mu_{\mathcal{R}})$ *bir fuzzy proksimal relator uzay olsun. Buradan,* $A,B\in\mathcal{P}(X)$ *kümeleri birbirlerine,* $\varepsilon\in[0,1)$ *değerine eşit yada daha büyük bir dereceyle proksimaldirler. Diğer bir ifadeyle,* $A,B\in\mathcal{P}(X)$ *kümeleri* $\varepsilon-$*fuzzy proksimaldir ve* $\mu_{\mathcal{R}}(A,B)\geq\varepsilon$ *dur.*

Tanım 2.1.9. $(X,\mathcal{R},\mu_{\mathcal{R}})$ *bir fuzzy proksimal relator uzay olsun. Buradan,*

$$\mathcal{C}_{\varepsilon}=\{A\in\mathcal{P}(X)\,|\mu_{\mathcal{R}}(A,B)\geq\varepsilon,B\in\mathcal{P}(X),\varepsilon\in[0,1)\}$$

kümesine ε*-fuzzy proksimal kümelerin kümesi denir.*

Kolayca görülebilir ki, fuzzy proksimal kümelerin kümesi birbirlerine $\varepsilon\in[0,1)$ değerine eşit yada daha büyük bir dereceyle proksimaldirler. Dolayısıyla, X kümesinin alt kümeleri $\varepsilon\in[0,1)$ değerleri kullanılarak sınıflandırılabilir.

Tanım 2.1.10. $(X,\mathcal{R},\mu_{\mathcal{R}})$, $(Y,\mathcal{R},\mu_{\mathcal{R}})$ *ve* $(Z,\mathcal{R},\mu_{\mathcal{R}})$ *fuzzy proksimal relator uzaylar olsun.*

$$\mathcal{R}_{\mu_1}=\{((A,B),\mu_{\mathcal{R}}(A,B)\ )\,|\ (A,B)\in\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(Y)\}$$

ve

$$\mathcal{R}_{\mu_2}=\{((B,C),\mu_{\mathcal{R}}(B,C)\ )\,|\ (B,C)\in\mathcal{P}(Y)\times\mathcal{P}(Z)\}$$

fuzzy proksimiti bağıntılar

$$\mu_{1\mathcal{R}}:\ \mathcal{P}(X)\times\ \mathcal{P}(Y)\ \longrightarrow[0,1]$$

ve

$$\mu_{2\mathcal{R}}:\ \mathcal{P}(Y)\times\ \mathcal{P}(Z)\ \longrightarrow[0,1].$$

verilsin. $\mu_{1\mathcal{R}}$ *ve* $\mu_{2\mathcal{R}}$ *nin max-min bileşimi,* $(X\times Z,\mathcal{R})$ *kartezyen proksimal relator uzayında bir fuzzy proksimiti bağıntısıdır ve aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$\mathcal{R}_{\mu_1}\circ\mathcal{R}_{\mu_2}=\{((A,C),\max\{\min\{\mu_{1\mathcal{R}}(A,B),\mu_{2\mathcal{R}}(B,C)\}\})\,|A\in\mathcal{P}(X),B\in\mathcal{P}(Y),C\in\mathcal{P}(Z)\}$$

$\mathcal{R}_{\mu_1}\circ\mathcal{R}_{\mu_2}$ *ye* $\mathcal{R}_{\mu_1}$ *ve* $\mathcal{R}_{\mu_2}$ *nin fuzzy proksimiti bağıntısının max-min bileşimi denir.*

Örnek 2.1.3. δ_{μ}, *Örnek 2.1.1 de verilen bir fuzzy proksimiti bağıntısı olsun:*

$$\delta_\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.11 & 0.4 \\ 0.25 & 1 & 0.66 & 0.3 \\ 0.11 & 0.66 & 1 & 0.27 \\ 0.4 & 0.3 & 0.27 & 1 \end{bmatrix}$$

$\delta_\mu \circ \delta_\mu$ *max-min bileşimi;*

$$\delta_\mu \circ \delta_\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.11 & 0.4 \\ 0.25 & 1 & 0.66 & 0.3 \\ 0.11 & 0.66 & 1 & 0.27 \\ 0.4 & 0.3 & 0.27 & 1 \end{bmatrix} \circ \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.11 & 0.4 \\ 0.25 & 1 & 0.66 & 0.3 \\ 0.11 & 0.66 & 1 & 0.27 \\ 0.4 & 0.3 & 0.27 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılır ve

$$\begin{aligned} \mu_{(\delta_\mu \circ \delta_\mu)}(A,B) &= \max\left(\min(1,0.25), \min(0.25,1), \min(0.11,0.66), \min(0.4,0.3)\right) \\ &= \max(0.25, 0.25, 0.11, 0.3) \\ &= 0.3 \end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde, matrisin diğer bileşenleri bulunabilir. Bu fuzzy proksimiti bağıntısının max-min bileşimi:

$$\delta_\mu^2 = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 & 0.27 & 0.4 \\ 0.3 & 1 & 0.66 & 0.3 \\ 0.27 & 0.66 & 1 & 0.3 \\ 0.4 & 0.3 & 0.3 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

δ_μ^2*,* $(N_{\mu_\delta}1) - (N_{\mu_\delta}4)$ *aksiyomlarını sağlar. Böylece* δ_μ^2*,* X^2 *kartezyen çarpım uzayında bir fuzzy proksimal bağıntı ve* $\left(X^2, \delta, \delta_\mu^2\right)$ *bir fuzzy proksimiti uzayıdır.*

Teorem 2.1.4. $\mathcal{P}_{\mu_\mathcal{R}}(X)$ *bütün fuzzy proksimiti bağıntılarının ailesi olsun.* $\mathcal{P}_{\mu_\mathcal{R}}(X)$ *üzerinde fuzzy proksimiti bağıntısının max-min bileşimi birleşmelidir yani,*

$$(\mathcal{R}_{\mu_1} \circ \mathcal{R}_{\mu_2}) \circ \mathcal{R}_{\mu_3} = \mathcal{R}_{\mu_1} \circ (\mathcal{R}_{\mu_2} \circ \mathcal{R}_{\mu_3})$$

dır.

İspat.

$$\mathcal{R}_{\mu_1} = \{((A,B), \mu_{\mathcal{R}}(A,B)\ ) \mid A,B \in \mathcal{P}(X)\},$$

$$\mathcal{R}_{\mu_2} = \{((B,C), \mu_{\mathcal{R}}(B,C)\ ) \mid B,C \in \mathcal{P}(X)\}$$

ve

$$\mathcal{R}_{\mu_3} = \{((C,D), \mu_{\mathcal{R}}(C,D)\ ) \mid C,D \in \mathcal{P}(X)\}$$

şeklinde alalım.

$$\mathcal{R}_{\mu_1} \circ \mathcal{R}_{\mu_2} = \{((A,C), \max\{\min\{\mu_{1\mathcal{R}}(A,B), \mu_{2\mathcal{R}}(B,C)\}\}) | A,B,C \in \mathcal{P}(X)\}$$

ve

$$\mathcal{R}_{\mu_3} = \{((C,D), \mu_{3\mathcal{R}}(C,D)) | C,D \in \mathcal{P}(X)\}$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} & (\mathcal{R}_{\mu_1} \circ \mathcal{R}_{\mu_2}) \circ \mathcal{R}_{\mu_3} \\ = \ & (\{((A,C), \max\{\min\{\mu_{1\mathcal{R}}(A,B), \mu_{2\mathcal{R}}(B,C)\}\}) \mid A,B,C \in \mathcal{P}(X)\}) \\ & \circ (\{((C,D), \mu_{3\mathcal{R}}(C,D)) \mid C,D \in \mathcal{P}(X)\}) \\ = \ & \{((A,D), \max\{\min\{\max\{\min\{\mu_{1\mathcal{R}}(A,B), \mu_{2\mathcal{R}}(B,C)\}\}, \\ & \mu_{3\mathcal{R}}(C,D))\} \mid A,B,C,D \in \mathcal{P}(X)\} \end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde;

$$\mathcal{R}_{\mu_1} = \{((A,B), \mu_{3\mathcal{R}}(A,B)) | A,B \in \mathcal{P}(X)\}$$

ve

$$\mathcal{R}_{\mu_2} \circ \mathcal{R}_{\mu_3} = \{((B,D), \max\{\min\{\mu_{2\mathcal{R}}(B,C), \mu_{3\mathcal{R}}(C,D)\}\}) | B,C,D \in \mathcal{P}(X)\}$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} & \mathcal{R}_{\mu_1} \circ (\mathcal{R}_{\mu_2} \circ \mathcal{R}_{\mu_3}) \\ = \ & (\{((A,B), \mu_{1\mathcal{R}}(A,B)) \mid A,B \in \mathcal{P}(X)\}) \\ & \circ (\{((B,D), \max\{\min\{\mu_{2\mathcal{R}}(B,C), \mu_{3\mathcal{R}}(C,D)\}\}) \mid B,C,D \in \mathcal{P}(X)\}) \\ = \ & \{((A,D)\ , \max\{\min\{\mu_{1\mathcal{R}}(A,B), \max\{\min\{\mu_{2\mathcal{R}}(B,C), \mu_{3\mathcal{R}}(C,D) \\ & \}\}\}\}) \mid A,B,C,D \in \mathcal{P}(X)\} \end{aligned}$$

max ve min in özelikleri dikkate alınırsa $(\mathcal{R}_{\mu_1} \circ \mathcal{R}_{\mu_2}) \circ \mathcal{R}_{\mu_3} = \mathcal{R}_{\mu_1} \circ (\mathcal{R}_{\mu_2} \circ \mathcal{R}_{\mu_3})$ elde edilir. $\square$

Uyarı 2.1.1. *$\mathcal{P}_{\mu_{\mathcal{R}}}(X)$ "$\circ$" işlemiyle birleşmeli olduğundan Teorem 2.1.1 den, $(\mathcal{P}_{\mu_{\mathcal{R}}}(X), \circ)$ ikilisi bir semi-kategoridir.*

Tanım 2.1.11. *$\mathcal{R}_\mu = \{((A,B), \mu_{\mathcal{R}}(A,B)) \mid (A,B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y)\}$ bir fuzzy proksimiti bağıntısı olsun. $\mathcal{P}(X)$ üzerinde, $\mathcal{R}_\mu(A,B)$ nin izdüşümü (projeksiyonu) $\mathcal{R}_{\mu_1}$ ile gösterilir ve*

$$\mathcal{R}_{\mu_1} = \left\{ \left(A, \max_B \mu_{\mathcal{R}}(A,B) \right) \mid (A,B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Benzer şekilde, $\mathcal{P}(Y)$ üzerinde $\mathcal{R}_\mu(A,B)$ nin izdüşümü (projeksiyonu) $\mathcal{R}_{\mu_2}$ ile gösterilir ve

$$\mathcal{R}_{\mu_2} = \left\{ \left(B, \max_A \mu_{\mathcal{R}}(A,B) \right) \mid (A,B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(Y) \right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Örnek 2.1.4. *$\mathcal{R}_\mu$, Örnek 2.1.1 de verilen bir fuzzy proksimiti bağıntısı olsun:*

$$\mathcal{R}_\mu = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.11 & 0.4 \\ 0.25 & 1 & 0.66 & 0.3 \\ 0.11 & 0.66 & 1 & 0.27 \\ 0.4 & 0.3 & 0.27 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

$\mathcal{P}(X)$ üzerinde, $\mathcal{R}_\mu(A,B)$ nin izdüşümü (projeksiyonu)

$$\mu_{1\mathcal{R}}(A) = \max\{1, 0.25, 0.11, 0.4\} = 1$$

dir. Benzer şekilde diğer bileşenlerde bulunabilir. Böylece $\mathcal{P}(X)$-izdüşümü (projeksiyonu)

$$\mathcal{R}\mu_1 = \{(A,1), (B,1), (C,1), (D,1)\}$$

elde edilir. $\mathcal{P}(Y)$ üzerinde, $\mathcal{R}_\mu(A,B)$ nin izdüşümü (projeksiyonu)

$$\mu_{1\mathcal{R}}(A) = \max\{1, 0.25, 0.11, 0.4\} = 1$$

dir. Aynı şekilde diğer bileşenlerde bulunabilir. Böylece $\mathcal{P}(Y)$-izdüşümü (projeksiyonu)

$$\mathcal{R}\mu_2 = \{(A,1),(B,1),(C,1),(D,1)\}$$

elde edilir.

Tanım 2.1.12. *$\mathcal{P}(X)$ in bir μ fuzzy kümesinin $\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(Y)$ üzerindeki silindirik genişlemesi bir fuzzy kümedir ve üyelik fonksiyonu,*

her $A\in\mathcal{P}(X)$ ve her $B\in\mathcal{P}(Y)$ için $cycl\mu(A,B)=\mu(A)$ şeklindedir.

$\mathcal{P}(X)$-izdüşümü (projeksiyonu) için silindirik genişleme, $\mathcal{P}(X)$-izdüşümü (projeksiyonu) kullanılarak ilgili matrisin sütunlarındaki bileşenlerin bulunması anlamındadır. Benzer olarak; $\mathcal{P}(Y)$-izdüşümü (projeksiyonu) için silindirik genişleme, $\mathcal{P}(Y)$-izdüşümü (projeksiyonu) kullanılarak ilgili matrisin satırlarındaki bileşenlerin bulunması anlamındadır.

Örnek 2.1.5. *$\mathcal{R}\mu_1$ fuzzy proksimiti bağıntısının Örnek 2.1.4 için silindirik genişlemesi*

$$\mathcal{R}\mu_1 = \begin{array}{c} \\ A \\ B \\ C \\ D \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{cccc} A & B & C & D \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

dir.

Teorem 2.1.5. *$\mathcal{R}_\mu$, $\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)$ üzerinde bir fuzzy proksimiti bağıtısı olsun. Bu durumda, $\mathcal{R}_\mu$ yansımalı fuzzy proksimiti bağıntıdır.*

İspat. Her küme kendisine yakın olduğundan, yani $A\delta A$ dır. Kolayca görülebilir ki, her $A\in\mathcal{P}(X)$ için $\mu_{\mathcal{R}}(A,A)=1$ dir. Dolayısıyla, $\mathcal{R}_\mu$ yansımalı fuzzy proksimiti bağıntıdır. □

Örnek 2.1.6. *Örnek 2.1.1 den , μ_δ yansımalı fuzzy proksimiti bağıntıdır.*

Sonuç 2.1.1. *$\mathcal{R}_\mu\subset\mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)$ olmak üzere, $\mathcal{R}_\mu$ fuzzy proksimiti bağıtısı yansımalı olmayan fuzzy proksimiti bağıntı değildir. Çünkü, her küme kendisine yakındır ve kesinlikle yansımalı olmayan bağıntı değildir.*

$\mathcal{R}_\mu \subset \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)$ olmak üzere, $\mathcal{R}_\mu$ fuzzy proksimiti bağıtısı antisimetrik değildir. Çünkü, $\mu_{\mathcal{R}}(A,B) > 0$ ise her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ kümeleri birbirlerine yakındır. Dolayısıyla, her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ ve $A \neq B$ için $\mu_{\mathcal{R}}(B,A) = 0$ olamaz.

Tanım 2.1.13. *$\mathcal{R}_\mu$ fuzzy proksimiti bağıntısı, her $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ için*

$$\mu_{\mathcal{R}}(A,C) \geq \max_{B \in P(X)} \left(\min\left(\mu_{\mathcal{R}}(A,B), \mu_{\mathcal{R}}(B,C)\right)\right)$$

koşulunu sağlarsa, $\mathcal{R}_\mu$ ye geçişmeli fuzzy proksimiti bağıntı denir. Ayrıca, geçişmeli fuzzy proksimiti bağıntısı olma koşulu aşağıdaki biçimde de yazılabilir:

$$\mathcal{R}_\mu(A,B) \geq (\mathcal{R}_\mu \circ \mathcal{R}_\mu)(A,B).$$

Buradan, $\mathcal{R}_\mu$ aşağıdaki koşulu sağlarsa $\mathcal{R}_\mu$ ye geçişmeli fuzzy proksimiti bağıntı denir.

$$\mathcal{R}_\mu \circ \mathcal{R}_\mu \subseteq \mathcal{R}_\mu \textit{ veya } \mathcal{R}_\mu^2 \subset \mathcal{R}_\mu, \;\; \mu_{\mathcal{R}^2}(A,B) \leq \mu_{\mathcal{R}}(A,B) \textit{ anlamındadır.}$$

2.2 Fuzzy Proksimal Relator Uzaylar ve Bir Uygulama

Fuzzy proksimiti bağıntısı bir çok alanda kullanılır. Bu bölümde, fuzzy bağıntısının uygulanabilir olduğunu temel bir örnekle açıklayacağız. Öncelikle fuzzy proksimal karar verme (FpKV) metodunu tanımlayalım. Bu metot, bir test nesnesinin hangi sınıfa ait olduğunu bulmaya yardımcı olur.

Tanım 2.2.1. $(X, \mathcal{R}, \mathcal{R}_\mu)$ *bir fuzzy proksimal relator uzayı olsun.*

$$\mathcal{C}_\varepsilon = \{A \in \mathcal{P}(X) \,|\mu_\mathcal{R}(A, B) \geq \varepsilon, B \in \mathcal{P}(X), \varepsilon \in [0, 1)\}$$

olmak üzere; ε-fuzzy proksimal sınıfı aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mathcal{T} = \left\{\mathcal{C}_i \;|\max_i \{_s (\{A \in \mathcal{C}_i \;|\mu_\mathcal{R}(A, Z) \geq \varepsilon\})\}\right\}.$$

Her küme, kendisiyle en çok ε-fuzzy proksimalliğe sahip olan sınıfa aittir. Yani, $Z \in \mathcal{T}$ için $Z \in \mathcal{P}(X)$ dir.

Kabul edelim ki, alternatifler kümesi ve bir test nesnesi verilsin. Bu durumda, aşağıdaki algoritma uygulanarak fuzzy proksimal karar verme metodu (FpKV) yoluyla en iyi sınıflandırmayı yapabiliriz:

Adım 1: Uygun fuzzy proksimiti bağıntısını tanımla,

Adım 2: $Y \subset X$ için

$$\mathcal{C}_\varepsilon = \{A \in \mathcal{P}(X) \,|\mu_\mathcal{R}(A, B) \geq \varepsilon, B \in \mathcal{P}(X), \varepsilon \in [0, 1)\}$$

kümesini kullanarak ε-fuzzy proksimiti sınıflarını belirle,

Adım 3: $Z \subset X$ alt kümesini değerlendir,

Adım 4: $Z \subset X$ için $\mathcal{T}$ yi hesapla,

Adım 5: $Z \in \mathcal{T}$.

Örnek 2.2.1. $X = \{a, b, c, e\}$ *kümesi, δ temel proksimiti ile (X, δ) proksimiti uzayı aşağıdaki şekilde verilsin:*

$$A\delta B :\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

$Y = \{a, b, c\}$ *kümesi,* X *in bir alt kümesi olsun.*

$\mathcal{P}(Y) = \{\emptyset, Y, \{a, b\}, \{a, c\}, \{b, c\}, \{a\}, \{b\}, \{c\}\}.$

$$\begin{array}{llll} \mu_\delta : & \mathcal{P}(Y) \times \mathcal{P}(Y) & \longrightarrow [0, 1] \\ & (A, B) & \longmapsto \mu_\delta(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|} \end{array}$$

şeklinde tanımlansın.

$\mu_\delta(A, B) = \frac{|A \cap B|}{|A \cup B|}$ *kullanılarak* $A_1 = \emptyset$*,* $A_2 = Y$*,* $A_3 = \{a, b\}$*,* $A_4 = \{a, c\}$*,* $A_5 = \{b, c\}$*,* $A_6 = \{a\}$*,* $A_7 = \{b\}$*,* $A_8 = \{c\}$ *için bağıntısal matrisi kolayca hesaplanır.*

$$\mathcal{R}\mu = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 \end{array} \\ \begin{array}{c} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.3 & 0.3 & 0.3 \\ 0 & 0.6 & 1 & 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0.6 & 0.3 & 1 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.6 & 0.3 & 0.3 & 1 & 0 & 0.5 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0.3 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Dolayısıyla, bağıntısal matris üzerindeki elemanlar kullanılarak sınıflandırma yapılır.

$\varepsilon = 0.6$ *alalım ve*

$$\mu_{\mathcal{R}}(A_2, A_3) = \mu_{\mathcal{R}}(A_2, A_4) = \mu_{\mathcal{R}}(A_2, A_5) = 0.6.$$

olduğundan iki farklı sınıf elde edilir. Buradan, ilk sınıf $\mathcal{C}_1 = \{A_2, A_3, A_4, A_5\}$ *dır.*

Benzer şekilde, $\mathcal{C}_2 = \{A_1, A_6, A_7, A_8\}$ *ikinci sınıfı bulunur.*

X *kümesinin farklı bir* $Z = \{a, b, d\}$ *alt kümesini alındığında* $\mathcal{P}(Y)$ *kümesinin her bir elemanıyla,* Z *kümesinin fuzzy proksimitisi hesaplanırsa*

$$
\mathcal{R}\mu = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \\ Z \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 & Z \end{array} \\
\left[\begin{array}{ccccccccc}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0.6 & 0.6 & 0.6 & 0.3 & 0.3 & 0.3 & 0.5 \\
0 & 0.6 & 1 & 0.3 & 0.3 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0.6 \\
0 & 0.6 & 0.3 & 1 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0.25 \\
0 & 0.6 & 0.3 & 0.3 & 1 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0.25 \\
0 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0.6 \\
0 & 0.3 & 0.5 & 0 & 0.5 & 0 & 1 & 0 & 0.6 \\
0 & 0.3 & 0 & 0.5 & 0.5 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0.5 & 0.6 & 0.25 & 0.25 & 0.6 & 0.6 & 0 & 1
\end{array}\right]
\end{array}
$$

elde edilir.

$\mathcal{T}$ *sınıfını hesaplamak için, kümeler arasındaki en büyük proksimalliği bulmak gerekir. Bu durumda* Z*,* $\mu_\delta(Z, A_3) = 0.6$*,* $\mu_\delta(Z, A_6) = 0.6$*,* $\mu_\delta(Z, A_7) = 0.6$ *olduğundan* $\mathcal{C}_1$ *ve* $\mathcal{C}_2$ *de bazı kümelere 0.6-proksimaldir.* Z*,* $\mathcal{C}_2$ *sınıfında* 2 *kümeye proksimaldir fakat* Z*,* $\mathcal{C}_1$ *sınıfında yalnızca bir kümeye proksimaldir. Bu nedenle* Z*,* $\mathcal{C}_2$ *sınıfına aittir.*

Diğer bir ifadeyle, bir test nesnesi sınıflardan biriyle en fazla aynı $\varepsilon-$ proksimitiye sahipse, bu test nesnesi o sınıfa yerleşir.

BÖLÜM 3

GENELLEŞTİRİLMİŞ FUZZY PROKSİMAL RELATOR UZAYLAR

Bu bölümde; fuzzy proksimal relator uzaylar, latisler ve birim daire kullanılarak, L-fuzzy ve kompleks fuzzy proksimal relator uzaylara genelleştirildi. Bu konular ile ilgili tanım ve teoremler incelenerek örnekler verildi.

3.1 L-Fuzzy Proksimal Relator Uzaylar

Bu kısımda; proksimal relator uzaylarda L-fuzzy bağıntısının tanımı yapıldı ve konu ile ilgili örnekler verildi. Proksimal relator uzaylarda bir L-bağıntısı tarafından sağlanması gereken L-proksimiti aksiyomları tanımlanarak $[0,1]$ aralığı latislere genelleştirildi. Bu kavramlar arasında ne gibi farklılıklar olduğu araştırıldı. Uzaysal Smirnov proksimiti ölçümü, L-ölçümü için genelleştirildi ve Lodato L-fuzzy proksimiti bağıntısı olduğu gösterildi. Aynı zamanda; L-fuzzy bağıntısının sağladığı yansıma, simetri, ters simetri ve geçişme gibi bazı özellikler, L-fuzzy proksimiti bağıntısı için de ayrıca incelenerek ayrıntılı şekilde açıklandı ve ilgili örnekler verildi.

Tanım 3.1.1. $(X, \mathcal{R})$ *bir proksimal relator uzay ve* L *bir latis olmak üzere*

$$\begin{array}{rll} \mu_{\mathcal{R}_L}: & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) & \longrightarrow L \\ & (A, B) & \longmapsto \mu_{\mathcal{R}_L}(A, B) \end{array}$$

bir L*-fuzzy bağıntı ve* $A, B \subset X$ *olsun. Bu durumda;*

$$\mathcal{R}_{\mu_L} = \{((A, B), \mu_{\mathcal{R}_L}(A, B)\ ) \mid (A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)\}$$

kümesi her $A, B, C \in P(X)$ *için aşağıdaki koşulları sağlarsa, bu kümeye bir* L*-fuzzy proksimiti bağıntısı denir:*

$N_{\mu_{\mathcal{R}_L}}1)$ $\mu_{\mathcal{R}_L}(A, \emptyset) = 0_L \quad (A \neq \emptyset)$.

$N_{\mu_{\mathcal{R}_L}}2)$ $\mu_{\mathcal{R}_L}(A, B) = \mu_{\mathcal{R}_L}(B, A)$.

$N_{\mu_{\mathcal{R}_L}}3)$ $\mu_{\mathcal{R}_L}(A,B) \neq 0_L$ *iken* $A\ \mathcal{R}_L\ B$ *dir.*

$N_{\mu_{\mathcal{R}_L}}4)$ $\mu_{\mathcal{R}_L}(A,(B\cup C)) \neq 0_L$ *iken* $\mu_{\mathcal{R}_L}(A,B) \neq 0_L$ $(A\ \mathcal{R}_L\ B)$ *ya da* $\mu_{\mathcal{R}_L}(A,C) \neq 0$ $(A\ \mathcal{R}_L\ C)$ *sağlanır.*

$\mathcal{P}(X)$ kümesi üzerinde tanımlanan bütün L-fuzzy proksimiti bağıntıların kümesi, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}}(X)$ şeklinde gösterilir. Her bir $(A,B) \in \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X)$ ikilisi için $\mathcal{R}_{\mu_{L_1}}, \mathcal{R}_{\mu_{L_2}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}_L}(X)$ olmak üzere; "$\mathcal{R}_{\mu_{L_1}} \leq \mathcal{R}_{\mu_{L_2}}$ ancak ve ancak $\mathcal{R}_{\mu_{L_1}}(A,B) \leq \mathcal{R}_{\mu_{L_2}}(A,B)$" eşitsizliği varsa $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_L}(X)$, "$\leq$" ile bir posettir.

Ayrıca, $\mu_{\mathcal{R}_{\mathcal{L}}}(A,B)$ ye L-fuzzy proksimiti ölçümü denir. L-fuzzy proksimiti bağıntısı, $n\times n$ boyutlu bir matrisle de aşağıdaki şekilde gösterilir:

$$\mathcal{R}_{\mu_L} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & \cdots & A_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mu_{\mathcal{R}_L}(A_1,A_1) & \cdots & \mu_{\mathcal{R}_L}(A_1,A_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{\mathcal{R}_L}(A_n,A_1) & \cdots & \mu_{\mathcal{R}_L}(A_n,A_n) \end{bmatrix} \end{array}.$$

$\mu_{\mathcal{R}_L}(A,B)$ L-fuzzy proksimiti ölçümü, A ve B kümelerinin birbirlerine ne kadar L-fuzzy proksimal (yakın) olduklarını gösteren ölçüm anlamında kullanılır. $\mu_{\mathcal{R}_L}$,$\mu_{\mathcal{S}_L} \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}_L}(X)$ elemanlarını alalım. $\mu_{\mathcal{R}_L}(A,B)$, $\mu_{\mathcal{R}_L}(C,D)$ ye eşit olabileceğinden ve Tanım 3.1.1 deki aksiyom $(N_{\mu_{\mathcal{R}_L}}1)$ den, tümleyen L- fuzzy proksimiti bağıntılar tanımlanamaz.

Tanım 3.1.2. *(X,δ) bir proksimiti uzayı olsun. (X,δ_{μ_L}) uzayı her $A,B,C \in \mathcal{P}(X)$ için aşağıdaki koşulları sağlarsa, (X,δ_{μ_L}) ya uzaysal L-fuzzy proksimiti uzayı denir:*

$N_{\mu_{\delta_L}}1)$ $\mu_{\delta_L}(A,\emptyset) = 0_L \quad (A \neq \emptyset)$.

$N_{\mu_{\delta_L}}2)$ $\mu_{\delta_L}(A,B) = \mu_{\delta_L}(B,A)$.

$N_{\mu_{\delta_L}}3)$ $\mu_{\delta_L}(A,B) \neq 0_L$ *iken* $A\delta_L B$.

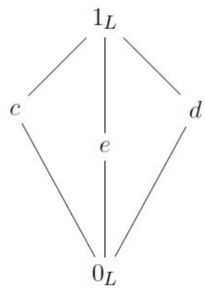
$N_{\mu_{\delta_L}}4)$ $\mu_{\delta_L}(A,(B\cup C)) \neq 0_L$ *iken* $\mu_{\delta_L}(A,B) \neq 0_L$ $(A\delta_L B)$ *ya da* $\mu_{\delta_L}(A,C) \neq 0_L$ $(A\delta_L C)$.

(X, δ_{μ_L}), *uzaysal L-fuzzy proksimiti aksiyomlarını ve aşağıdaki* $(N_{\mu_{\delta_L}} 5)$ *aksiyomunu sağlarsa,* μ_{δ_L} *L-fuzzy bağıntısına, bir uzaysal L-fuzzy Lodato proksimiti bağıntısı denir:*

$N_{\mu_{\delta_L}} 5)$ $\mu_{\delta_L}(A, B) \neq 0_L$ *ve her* $b \in B$ *için* $\mu_{\delta_L}(\{b\}, C) \neq 0_L$ *iken* $\mu_{\delta_L}(A, C) \neq 0_L$ $(A\delta_L C)$.

Tanım 3.1.3. $\mathcal{R}_{\mu_L}$, $\mathcal{P}(X)$ *de bir L-fuzzy proksimiti bağıntısı olsun. Bu durumda,* $(X, \mathcal{R}_{\mu_L})$ *ye L-fuzzy proksimal relator uzay denir.*

Örnek 3.1.1. $X = \{p, r, s\}$ *kümesini,* $(X, \mathcal{R})$ *proksimiti relator uzayını ve* $L = \{0_L, c, e, d, 1_L\}$ *latisini alalım. L aşağıdaki şekilde tanımlansın:*



Şekil 3.1. M_3 *Elmas Latisi*

$$\begin{array}{llll} \mu_{\mathcal{R}_L}: & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) & \longrightarrow & L \\ & (A, B) & \longmapsto & \mu_{\mathcal{R}_L}(A, B) \end{array}$$

$$\mu_{\mathcal{R}_L}(A, B) = \begin{cases} c, & A \cap B \neq \emptyset,\ A \neq B \\ 1_L, & A = B, A, B \neq \emptyset \\ 0_L, & A \cap B = \emptyset \end{cases}$$

$\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, X, \{p\}, \{r\}, \{s\}, \{p, r\}, \{p, s\}, \{r, s\}\}$ *şeklindedir.*

$A_1 = \emptyset$, $A_2 = X$, $A_3 = \{p\}$, $A_4 = \{r\}$, $A_5 = \{s\}$, $A_6 = \{p, r\}$, $A_7 = \{p, s\}$, $A_8 = \{r, s\}$ *olarak alalım. Dolayısıyla* $\mathcal{R}\mu_L$ *matrisi aşağıdaki biçimdedir:*

$$
\mathcal{R}\mu_L = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \\ A_6 \\ A_7 \\ A_8 \end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_5 & A_6 & A_7 & A_8 \end{array} \\
\begin{bmatrix}
1_L & 0_L & 0_L & 0_L & 0_L & 0_L & 0_L & 0_L \\
0_L & 1_L & c & c & c & c & c & c \\
0_L & c & 1_L & 0_L & 0_L & c & c & 0_L \\
0_L & c & 0_L & 1_L & 0_L & c & 0_L & c \\
0_L & c & 0_L & 0_L & 1_L & 0_L & c & c \\
0_L & c & c & c & 0_L & 1_L & c & c \\
0_L & c & c & 0_L & c & c & 1_L & c \\
0_L & c & 0_L & c & c & c & c & 1_L
\end{bmatrix}
\end{array}
$$

$\mu_{\mathcal{R}_L}$ nin , $(N_{\mu_{\mathcal{R}_L}}1) - (N_{\mu_{\mathcal{R}_L}}4)$ aksiyomlarını sağladığı açıktır. Böylece, $(X, \mathcal{R}_{\mu_L})$ bir temel L-fuzzy proksimiti uzayıdır.

Örnek 3.1.2. *$X = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i\}$ kümesini, (X, δ) proksimiti uzayını ve $L = [0, 1]$ alalım. δ temel proksimiti aşağıdaki şekilde tanımlansın:*

$$A\ \delta B :\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

$A = \{a, b, c, d, g\}$ ve $B = \{d, e, f, g, h, i\}$, X kümesinin alt kümeleri olsun. $A \cap B \neq \emptyset$ olduğundan, $A\delta B$ olduğu kolayca görülür. L-fuzzy proksimiti bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:

$$
\begin{aligned}
\mu_{\delta_L} :\quad & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) && \longrightarrow [0, 1] \\
& (A, B) && \longmapsto \mu_{\delta_L}(A, B) = \tfrac{|A \cap B|}{|A \backslash B|}
\end{aligned}
$$

Buradan

$$
\begin{aligned}
\mu_{\delta_L}(A, B) &= \tfrac{|A \cap B|}{|A \backslash B|} &&= \tfrac{2}{3} &&\approxeq 0.66, \\
\mu_{\delta_L}(B, A) &= \tfrac{|B \cap A|}{|B \backslash A|} &&= \tfrac{2}{4} &&= 0.5.
\end{aligned}
$$

A, B ye $0.66-$ L-fuzzy proksimaldir $(A\ \delta_{0.66}\ B)$,

B, A ye $0.5-$ L-fuzzy proksimaldir $(B\delta_{0.5}A)$.

μ_{δ_L} simetrik olmadığından, yani $\mu_{\delta_L}(A, B) \neq \mu_{\delta_L}(B, A)$ olduğundan $(X, \mathcal{R}_{\mu_L})$, L-fuzzy proksimiti uzay değildir.

Örnek 3.1.3. $X = \{o, p, r, s, t, v, x, y, z\}$ *kümesini,* (X, δ) *temel proksimiti uzayını ve* $L = [0, 1]$ *latisini alalım. Temel proksimiti* δ *aşağıdaki şekilde tanımlansın:*

$$A\delta B :\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

$A = \{o, p, r, s, t\}$, $B = \{s, t, v, x, y\}$, $C = \{t, v, x, y, z\}$, $D = \{o, p, s, t, v, \}$, X *kümesinin alt kümeleri olsun.*

$A \cap B \neq \emptyset$, $B \cap C \neq \emptyset$, $A \cap C \neq \emptyset$, $A \cap D \neq \emptyset$, $B \cap D \neq \emptyset$ *ve* $C \cap D \neq \emptyset$ *olduğundan,* $A\delta B$, $B\delta C$, $A\delta C$, $A\delta D$, $B\delta D$ *ve* $C\delta D$ *olduğu kolayca görülür. L-fuzzy proksimiti bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:*

$$\begin{array}{lll} \mu_{\delta_L}: & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) & \longrightarrow [0, 1] \\ & (A, B) & \longmapsto \mu_{\delta_L}(A, B) = \frac{|A \backslash B|}{|A \cup B|}. \end{array}$$

Buradan

$$\begin{array}{lll} \mu_{\delta_L}(A, B) = \frac{|A \backslash B|}{|A \cup B|} & = \frac{3}{8} & = 0.375, \\ \mu_{\delta_L}(B, C) = \frac{|B \backslash C|}{|B \cup C|} & = \frac{1}{6} & \approxeq 0.16, \\ \mu_{\delta_L}(A, C) = \frac{|A \backslash C|}{|A \cup C|} & = \frac{4}{9} & \approxeq 0.444, \\ \mu_{\delta_L}(A, D) = \frac{|A \backslash D|}{|A \cup D|} & = \frac{1}{6} & \approxeq 0.166, \\ \mu_{\delta_L}(B, D) = \frac{|B \backslash D|}{|B \cup D|} & = \frac{2}{7} & \approxeq 0.28, \\ \mu_{\delta_L}(C, D) = \frac{|C \backslash D|}{|C \cup D|} & = \frac{3}{8} & = 0.375 \end{array}$$

elde edilir. Dolayısıyla

A, B *ye* $0.375-$ *L-fuzzy proksimaldir* $(A\delta_{0.375}B)$,

B, C *ye* $0.16-$ *L-fuzzy proksimaldir* $(B\delta_{0.16}C)$,

A, C *ye* $0.444-$ *L-fuzzy proksimaldir* $(A\delta_{0.444}C)$,

A, D *ye* $0.166-$ *L-fuzzy proksimaldir* $(A\delta_{0.166}D)$,

B, D *ye* $0.28-$ *L-fuzzy proksimaldir* $(B\delta_{0.28}D)$,

C, D *ye* $0.375-$ *L-fuzzy proksimaldir* $(C\delta_{0.375}D)$

olur. L-fuzzy proksimiti matris olarak

$$\delta_\mu = \begin{bmatrix} 1 & 0.25 & 0.11 & 0.4 \\ 0.25 & 1 & 0.66 & 0.3 \\ 0.11 & 0.66 & 1 & 0.27 \\ 0.4 & 0.3 & 0.27 & 1 \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilir. Kolayca görülebilir ki μ_{δ_L}, $(N_{\mu_{\delta_L}}1)-(N_{\mu_{\delta_L}}4)$ *aksiyomunu sağlar. Böylece* $(X, \mathcal{R}_{\mu_L})$ *bir L-fuzzy temel proksimiti uzayıdır.*

$\mathcal{R}_{\mu_L} = \{\delta_{L_1}, \delta_{L_1}, \delta_{L_1}\}$ olmak üzere $\delta_{1L}, \delta_{2L}, \delta_{3L}$, L-fuzzy proksimiti üçlüsünü dikkate alalım. X kümesinde L-fuzzy proksimiti bağıntılarının bir ailesini aldığımızda, bir $(X, \mathcal{R}_{\mu_L})$ (ya da $X(\mathcal{R}_{\mu_L})$) L-fuzzy proksimal relator uzay elde edilir. Daha basite indirgendiğinde, yani, sadece üç tane L-fuzzy proksimiti bağıntısı ele alınırsa, Lodato L-fuzzy proksimiti (δ_L), tanımsal Lodato proksimiti δ_L ($\delta_{L\Phi}$) ve Lodato proksimitinin bir genişlemesi olan tanımsal Lodato L-fuzzy proksimiti ($\mu_{\delta_{L\Phi}}$) olarak düşünülebilir. Bu durumda, bir L-fuzzy proksimal relator $\mathcal{R}_{\mu_{\delta_{L\Phi}}}$,

$$\mathcal{R}_{\mu_{\delta_{L\Phi}}} = \{\delta_L, \delta_{L\Phi}, \mu_{\delta_{L\Phi}}\}$$

şeklinde tanımlanabilir.

Tanım 3.1.4. *X boştan farklı bir küme ve δ_Φ, Lodato proksimiti bağıntısıyla donatılmış olsun. μ_{δ_L} L-fuzzy bağıntısı, her $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ için aşağıdaki koşulları sağlarsa μ_{δ_L} ye bir tanımsal L-fuzzy Lodato proksimiti bağıntısı denir:*

$N_{\mu_{\delta_{L\Phi}}}1)$ $\mu_{\delta_{L\Phi}}(A, \emptyset) = 0_L \quad (A \neq \emptyset)$.

$N_{\mu_{\delta_{L\Phi}}}2)$ $\mu_{\delta_{L\Phi}}(A, B) = \mu_{\delta_{L\Phi}}(B, A)$.

$N_{\mu_{\delta_{L\Phi}}}3)$ $\mu_{\delta_{L\Phi}}(A, B) \neq 0_L$ *iken* $A \ \delta_{L\Phi} \ B$.

$N_{\mu_{\delta_{L\Phi}}}4)$ $\mu_{\delta_{L\Phi}}(A, (B \cup C)) \neq 0_L$ *iken* $\mu_{\delta_{L\Phi}}(A, B) \neq 0_L$ $(A \ \delta_{L\Phi} \ B)$ *ya da* $\mu_{\delta_{L\Phi}}(A, C) \neq 0_L$ $(A \ \delta_{L\Phi} \ C)$.

$N_{\mu_{\delta_{L\Phi}}}5)$ $\mu_{\delta_{L\Phi}}(A, B) \neq 0_L$ *ve her* $b \in B$ *için* $\mu_{\delta_{L\Phi}}(\{b\}, C) \neq 0_L$ *iken* $\mu_{\delta_{L\Phi}}(A, C) \neq 0_L$ $(A \ \delta_{L\Phi} \ C)$.

Tanım 3.1.5. *$\delta_{L\Phi}$ bir tanımsal L-fuzzy Lodato proksimiti bağıntısı olsun. Buradan, $(X, \delta_{\mu_{L\Phi}})$ ye tanımsal L-fuzzy Lodato proksimiti uzayı denir.*

Uzaysal Smirnov proksimiti ölçümü, uzaysal Smirnov L-fuzzy proksimiti ölçümüne genelleştirilebilir.

Tanım 3.1.6. *$\varepsilon_L \in L$ ve $\varepsilon_L > 0_L$ olmak üzere $\upsilon(A,B) = \frac{|A\cap B|}{|X|}$ olsun. $\delta_{\varepsilon_L,\nu}(A,B) \in L$ ye uzaysal Smirnov L-fuzzy proksimiti ölçümü denir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır:*

$$\delta_{\varepsilon_L,\nu}(A,B) = \begin{cases} \frac{|A\cap B|}{|X|} & , \quad \varepsilon_L < \upsilon(A,B) \leq 1_L, \\ 0_L & , \quad \upsilon(A,B) \leq \varepsilon_L. \end{cases}$$

Teorem 3.1.1. *$(X, \mathcal{R}, \mathcal{R}_{\mu_L})$, L-fuzzy proksimal relator uzay olsun. Smirnov L-fuzzy proksimiti ölçümü $\delta_{\varepsilon_L,\upsilon}$, Lodato proksimiti uzayında bir Lodato L-proksimiti bağıntısıdır.*

İspat. $\delta_{\varepsilon_L,\nu}$ nün aksiyomları sağladığını gösterelim:

$(N_{\mu_{\mathcal{R}_L}}.1)$ $\upsilon(A,\emptyset) \leq \varepsilon_L \Rightarrow \upsilon(A,\emptyset) = \frac{|A\cap\emptyset|}{|X|} = \frac{0_L}{|X|} = 0_L$ olduğundan $\delta_{\varepsilon_L,\upsilon}(A,\emptyset) = 0_L$ elde edilir.

$(N_{\mu_{\mathcal{R}_L}}.2)$ Her iki durum için de ispatı yapalım:

$$\begin{aligned} \text{i)}\delta_{\varepsilon_L,\upsilon}(A,B) = 0_L \quad &\Longrightarrow \quad \upsilon(A,B) \leq \varepsilon_L \\ &\Longrightarrow \quad \frac{|A\cap B|}{|X|} \leq \varepsilon_L \\ &\Longrightarrow \quad \frac{|B\cap A|}{|X|} \leq \varepsilon_L \\ &\Longrightarrow \quad \upsilon(B,A) \leq \varepsilon_L \\ &\Longrightarrow \quad \delta_{\varepsilon_L,\upsilon}(B,A) = 0_L \end{aligned}$$

Buradan, $\delta_{\varepsilon_L,\upsilon}(A,B) = \delta_{\varepsilon_L,\upsilon}(B,A)$ elde edilir.

$$\begin{aligned} \text{ii)}\delta_{\varepsilon_L,\upsilon}(A,B) \neq 0_L \quad &\Longrightarrow \quad \varepsilon_L < \upsilon(A,B) \leq 1_L \\ &\Longrightarrow \quad \varepsilon_L < \upsilon(B,A) \leq 1_L \\ &\Longrightarrow \quad \delta_{\varepsilon_L,\upsilon}(B,A) \neq 0_L \end{aligned}$$

Böylece, $\delta_{\varepsilon_L,\upsilon}(A,B) = \delta_{\varepsilon_L,\upsilon}(B,A)$ olur.

$(N_{\mu_{\mathcal{R}_L}}.3)$ $\delta_{\varepsilon_L,\upsilon}(A,B) \neq 0_L \Longrightarrow \varepsilon_L < \upsilon(A,B) \leq 1_L \Longrightarrow \varepsilon_L < \frac{|A\cap B|}{|X|} \leq 1_L$ $\Longrightarrow A\delta_L B$.

$(N_{\mu_{\mathcal{R}_L}}.4)$

$$
\begin{aligned}
\delta_{\varepsilon_L,\upsilon}(A,(B\cup C))\neq 0_L &\Longrightarrow \varepsilon_L<\upsilon(A,(B\cup C))\leq 1_L\\
&\Longrightarrow \varepsilon_L<\tfrac{|A\cap(B\cup C)|}{|X|}\leq 1_L\\
&\Longrightarrow \varepsilon_L<\tfrac{|(A\cap B)\cup(A\cap C)|}{|X|}\leq 1_L\\
&\Longrightarrow \varepsilon_L<\tfrac{|(A\cap B)|}{|X|}\leq 1_L \text{ ya da } \varepsilon_L<\tfrac{|(A\cap C)|}{|X|}\leq 1_L.
\end{aligned}
$$

Buradan; $\delta_{\varepsilon_L,\upsilon}(A,B)\neq 0_L$ ve $A\delta_L B$ ya da $\delta_{\varepsilon_L,\upsilon}(A,C)\neq 0_L$ ve $A\delta_L C$ dir.

$(N_{\mu_{\mathcal{R}_L}}.5)$ Her $b\in B$ için, $\delta_{\varepsilon_L,\upsilon}(A,B)\neq 0_L$ ve $\delta_{\varepsilon_L,\upsilon}(\{b\},C)\neq 0_L$ olsun. Buradan, $\varepsilon_L<\upsilon(A,B)\leq 1_L$ ve $\varepsilon_L<\upsilon(\{b\},C)\leq 1_L$ dir. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \varepsilon_L<\tfrac{|A\cap B|}{|X|}\leq 1_L \text{ ve } \varepsilon_L<\tfrac{|\{b\}\cap C|}{|X|}\leq 1_L\\
&\Longrightarrow \varepsilon_L<\tfrac{|(A\cap C)|}{|X|}\leq 1_L\\
&\Longrightarrow \delta_{\varepsilon_L,\upsilon}(A,C)\neq 0_L \text{ ve } A\ \delta_L\ C
\end{aligned}
$$

Böylece, Smirnov L-fuzzy proksimiti ölçümü $\delta_{\varepsilon_L,\nu}$, Lodato proksimiti uzayında bir Lodato L-proksimiti bağıntısıdır. □

Tanım 3.1.7. $(X,\mathcal{R}_{\mu_L})$, *L-proksimal relator uzay olsun. Genişletilmiş Smirnov proksimiti ölçümü aynı zamanda tanımsal proksimiti olacak şekilde de tanımlanabilir.* $\varepsilon_L\in L$ *ve* $\varepsilon_L>0_L$ *olmak üzere;* $\upsilon(A,B)=\frac{|\Phi(A)\cap\Phi(B)|}{|\Phi(X)|}$ *olsun.* $\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(A,B)\in L$ *ye tanımsal Smirnov L-fuzzy proksimiti ölçümü denir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır:*

$$
\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(A,B)=\begin{cases}\frac{|\Phi(A)\cap\Phi(B)|}{|\Phi(X)|} & ,\quad \varepsilon_{L\Phi}<\upsilon(A,B)\leq 1_L,\\ 0_L & ,\quad \upsilon(A,B)\leq\varepsilon_{L\Phi}.\end{cases}
$$

Teorem 3.1.2. $(X,\mathcal{R}_{\mu_L})$, *L-proksimal relator uzay olsun. Tanımsal Smirnov L-fuzzy proksimiti ölçümü* $\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\nu}$*, tanımsal Lodato L-fuzzy proksimiti uzayında bir tanımsal Lodato L-fuzzy proksimiti bağıntısıdır.*

İspat. $\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}$ nün L-fuzzy tanımsal Lodato proksimiti bağıntısı aksiyomlarını sağladığını gösterelim.

$(N_{\mu_{L\delta}}.1)$ $\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(A,\emptyset)=0_L$ dir. Gerçekten, $\upsilon(A,\emptyset)\leq\varepsilon_{L\Phi}$ olduğundan

$$
\upsilon(A,\emptyset)=\frac{|\Phi(A)\cap\Phi(\emptyset)|}{|\Phi(X)|}=\frac{0_L}{|\Phi(X)|}=0_L
$$

elde edilir.

$(N_{\mu_{L\delta}}.2)$ Her iki durum için ispatı yapalım:

$$
\begin{aligned}
\text{i)}\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(A,B)=0_L &\Longrightarrow \upsilon(A,B)\leq \varepsilon_{L\Phi} \\
&\Longrightarrow \tfrac{|\Phi(A)\cap\Phi(B)|}{|\Phi(X)|}\leq \varepsilon_{L\Phi} \\
&\Longrightarrow \tfrac{|\Phi(B)\cap\Phi(A)|}{|\Phi(X)|}\leq \varepsilon_{L\Phi} \\
&\Longrightarrow \upsilon(B,A)\leq \varepsilon_{L\Phi} \\
&\Longrightarrow \delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(B,A)=0_L.
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla $\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(A,B)=\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(B,A)$ dır.

$$
\begin{aligned}
\text{ii)}\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(A,B)\neq 0_L &\Longrightarrow \varepsilon_{L\Phi}<\upsilon(A,B)\leq 1_L \\
&\Longrightarrow \varepsilon_{L\Phi}<\upsilon(B,A)\leq 1_L \\
&\Longrightarrow \delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(B,A)\neq 0_L.
\end{aligned}
$$

Bu nedenle $\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(A,B)=\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(B,A)$ elde edilir.

$(N_{\mu_{L\delta}}.3)$ $\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(A,B)\neq 0_L \Longrightarrow \varepsilon_{L\Phi}<\upsilon(A,B)\leq 1_L \Longrightarrow \varepsilon_{L\Phi}<\frac{|\Phi(A)\cap\Phi(B)|}{|\Phi(X)|}\leq 1_L \Longrightarrow A\delta_{L\Phi}B$.

$(N_{\mu_{L\delta}}.4)$

$$
\begin{aligned}
\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(A,(B\cup C))\neq 0_L &\Longrightarrow \varepsilon_{L\Phi}<\upsilon(A,(B\cup C))\leq 1_L \\
&\Longrightarrow \varepsilon_{L\Phi}<\tfrac{|\Phi(A)\cap(\Phi(B)\cup\Phi(C))|}{|\Phi(X)|}\leq 1_L \\
&\Longrightarrow \varepsilon_{L\Phi}<\tfrac{|(\Phi(A)\cap\Phi(B))\cup(\Phi(A)\cap\Phi(C))|}{|\Phi(X)|}\leq 1_L \\
&\Longrightarrow \varepsilon_{L\Phi}<\tfrac{|(\Phi(A)\cap\Phi(B))|}{|\Phi(X)|}\leq 1_L \text{ ya da} \\
&\qquad\ \varepsilon_{L\Phi}<\tfrac{|(\Phi(A)\cap\Phi(C))|}{|\Phi(X)|}\leq 1_L.
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla, $\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(A,B)\neq 0_L$ ve $A\delta_{L\Phi}B$ ya da $\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(A,C)\neq 0_L$ ve $A\delta_{L\Phi}C$ dir.

$(N_{\mu_{L\delta}}.5)$ Her $b\in B$ için, $\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(A,B)\neq 0_L$ ve $\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(\{b\},C)\neq 0_L$ olsun. Buradan, $\varepsilon_{L\Phi}<\upsilon(A,B)\leq 1_L$ ve $\varepsilon_{L\Phi}<\upsilon(\{b\},C)\leq 1_L$ dir. Dolayısıyla,

$$
\begin{aligned}
&\Longrightarrow \varepsilon_{L\Phi}<\tfrac{|\Phi(A)\cap\Phi(B)|}{|\Phi(X)|}\leq 1_L \text{ ve } \varepsilon<\tfrac{|\Phi(\{b\})\cap\Phi(C)|}{|\Phi(X)|}\leq 1_L \\
&\Longrightarrow \varepsilon_{L\Phi}<\tfrac{|(\Phi(A)\cap\Phi(C))|}{|\Phi(X)|}\leq 1_L \\
&\Longrightarrow \delta_{\varepsilon_{L\Phi},\upsilon}(A,C)\neq 0_L \text{ ve } A\delta_{L\Phi}C.
\end{aligned}
$$

Dolayısıyla, $\delta_{\varepsilon_{L\Phi},\nu}$ Smirnov proksimiti ölçümü bir L-fuzzy tanımsal Lodato proksimiti bağıntısıdır. $\square$

Tanım 3.1.8. *$(X, \mathcal{R}_{\mu_L})$, L-proksimal relator uzay olsun. Bu durumda,*

$$m\left(\mathcal{R}_{\mu_L}\right) = \bigvee_{A,B\in\mathcal{P}(X)} \mathcal{R}_{\mu_L}(A,B)$$

ifadesine $\mathcal{R}_{\mu_L}$ L-proksimiti bağıntısının supremumu denir. $m\left(\mathcal{R}_{\mu_L}\right)$, kümeler ailesinde proksimiti derecesinin supremumunu verir.

Örnek 3.1.4. *Örnek 3.1.1 dikkate alınırsa, $m\left(\mathcal{R}_{\mu_L}\right) = 1_L$ dir.*

Tanım 3.1.9. *$(X, \mathcal{R}_{\mu_L})$ bir L-fuzzy proksimal relator uzay olsun. Buradan, $A, B \in \mathcal{P}(X)$ kümeleri birbirlerine, $\varepsilon_L \in L, \varepsilon_L \neq 1_L$ değerine eşit yada daha büyük bir dereceyle proksimaldirler. Diğer bir ifadeyle, $A, B \in \mathcal{P}(X)$ kümeleri ε_L-fuzzy proksimaldir ve $\mu_{\mathcal{R}_L}(A,B) \geq \varepsilon_L$ dir.*

Tanım 3.1.10. *$(X, \mathcal{R}_{\mu_L})$ bir L-fuzzy proksimal relator uzay olsun. Buradan,*

$$\mathcal{C}_{\varepsilon_L} = \{A \in \mathcal{P}(X) \,|\mu_{\mathcal{R}_L}(A,B) \geq \varepsilon_L, B \in \mathcal{P}(X), \varepsilon_L \in L, \varepsilon_L \neq 1_L\}$$

kümesine ε_L-fuzzy proksimal kümelerin kümesi denir.

Kolayca görülebilir ki, L-fuzzy proksimal kümelerin kümesinde boş kümeden farklı bütün kümeler birbirlerine $\varepsilon_L \in L, \varepsilon_L \neq 1_L$ değerine eşit yada daha büyük bir dereceyle proksimaldirler. Dolayısıyla, X kümesinin alt kümeleri $\varepsilon_L \in L, \varepsilon_L \neq 1_L$ değerleri kullanılarak; sınıflandırılabilir. Eğer boş küme dikkate alınırsa $(B = \emptyset)$, bu durumda $\mathcal{C}_{\varepsilon_L} = \emptyset$ dir.

Tanım 3.1.11. *$\mathcal{R}_{\mu_L}$, $\mathcal{P}(X)$ kümesinde bir L-proksimit bağıntısı olsun.*

1. *Her $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ için $\mathcal{R}_{\mu_L}$, $\mathcal{R}_{\mu_L} \neq 0_L$ ve $\mathcal{R}_{\mu_L}(A,A) \geq \mathcal{R}_{\mu_L}(B,C)$ koşullarını sağlarsa, $\mathcal{R}_{\mu_L}$ ye yansımalı L- proksimiti bağıntı denir.*

   $\mathcal{P}(X)$ üzerinde tanımlanan bütün yansımalı L- proksimiti bağıntıların kümesi $\mathcal{R}^r_{\mu_L}$ ile gösterilir.

2. *Her $A \in \mathcal{P}(X)$ için $\mathcal{R}_{\mu_L}$, $\mathcal{R}_{\mu_L}(A,A) = 0_L$ koşulunu sağlarsa, $\mathcal{R}_{\mu_L}$ ye yansımalı olmayan L- proksimiti bağıntı denir.*

   $\mathcal{P}(X)$ üzerinde tanımlanan bütün yansımalı olmayan L- proksimiti bağıntıların kümesi $\mathcal{R}^i_{\mu_L}$ ile gösterilir.

3. *Her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için $\mathcal{R}_{\mu_L}$, $\mathcal{R}_{\mu_L}(A,B) = \mathcal{R}_{\mu_L}(B,A)$ koşulunu sağlarsa, $\mathcal{R}_{\mu_L}$ ye simetrik L- proksimiti bağıntı denir.*

   $\mathcal{P}(X)$ üzerinde tanımlanan bütün simetrik L- proksimiti bağıntıların kümesi $\mathcal{R}^s_{\mu_L}$ ile gösterilir.

4. *Her $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ için $\mathcal{R}_{\mu_L}$, $\mathcal{R}_{\mu_L}(A,C) \geq \mathcal{R}_{\mu_L}(A,B) \wedge \mathcal{R}_{\mu_L}(B,C)$ koşulunu sağlarsa, $\mathcal{R}_{\mu_L}$ ye geçişmeli L- proksimiti bağıntı denir.*

   $\mathcal{P}(X)$ üzerinde tanımlanan bütün geçişmeli L- proksimiti bağıntıların kümesi $\mathcal{R}^t_{\mu_L}$ ile gösterilir.

5. *$\mathcal{R}_{\mu_L}$ yansımalı, simetrik ve geçişmeli L- proksimiti bağıntı ise, $\mathcal{R}_{\mu_L}$ ye denklik L- proksimiti bağıntısı denir.*

   $\mathcal{P}(X)$ üzerinde tanımlanan bütün denklik L- proksimiti bağıntıların kümesi $\mathcal{R}^e_{\mu_L}$ ile gösterilir.

Örnek 3.1.5. *δ_{μ_L}, Örnek 3.1.1 de verilen bir L-proksimiti bağıntısı olmak üzere;*

$$\delta_{\mu_L} = \begin{bmatrix} 1 & 0.375 & 0.55 & 0.1 \\ 0.375 & 1 & 0.16 & 0.28 \\ 0.55 & 0.16 & 1 & 0.375 \\ 0.1 & 0.28 & 0.375 & 1 \end{bmatrix}.$$

Kolayca görülebilir ki, δ_{μ_L} yansımalı ve simetrik L-proksimiti bağıntılardır. Çünkü her $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ için $\delta_{\mu_L}(A,A) \geq \delta_{\mu_L}(B,C)$ dir.

Örnek 3.1.6. *$(X, \mathcal{R}_{\mu_L})$ bir L-proksimal relator uzay olsun. Bu durumda, $X = \{a,b,c\}$ ve $L = \{0_L, \alpha_1, \alpha_2, 1_L | 0_L < \alpha_1 < \alpha_2 < 1_L\}$ olarak alalım. $\mu_{\mathcal{R}_L} = \{((\{a\},\{a\}), 0_L), ((\{a\},\{c\}), \alpha_1), ((\{a,b\},\{a,b\}), 0_L), ((\{a,b\},\{a,c\}), \alpha_2)\}$ şeklinde tanımlansın. $\mu_{\mathcal{R}_L}$ yansımalı olmayan ve geçişmeli bir L-proksimiti bağıntıdır.*

Örnek 3.1.7. *$(X, \mathcal{R}_{\mu_L})$ bir L-proksimal relator uzay olsun. Bu durumda, $X = \{x, y\}$ ve $L = \{0_L, \beta, 1_L | 0_L < \beta < 1_L\}$ olarak alalım.*

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{R}_L} = \; & \{((\{x\}, \{x\}), 1_L), ((\{x\}, \{y\}), \beta), ((\{x\}, \{\{x\}, \{y\}\}), 0_L), \\ & ((\{y\}, \{x\}), 0_L), ((\{y\}, \{y\}), 1_L), ((\{y\}, \{x, y\}), 0_L), \\ & ((\{x, y\}, \{x\}), 0_L), ((\{x, y\}, \{y\}), 0_L), ((\{x, y\}, \{x, y\}), 0_L)\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, $\mu_{\mathcal{R}_L}$ yansımalı ve geçişmeli L-proksimiti bağıntıdır.

$\mathcal{R}_{\mu_L}$, $\mathcal{P}(X)$ üzerinde bir L-proksimiti bağıntısı ve $\mathcal{R}_L$, $\mathcal{P}(X)$ üzerinde bir ikili işlem olsun.

1. $\mathcal{R}^r_{\mu_L}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_L}(X)$ kümesinin bir alt posetidir.
2. $\mathcal{R}^i_{\mu_L}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_L}(X)$ kümesinin bir alt posetidir.
3. $\mathcal{R}^s_{\mu_L}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_L}(X)$ kümesinin bir alt posetidir.
4. $\mathcal{R}^t_{\mu_L}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_L}(X)$ kümesinin bir alt posetidir.
5. $\mathcal{R}^e_{\mu_L}$, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_L}(X)$ kümesinin bir alt posetidir.

Önerme 3.1.1. *$\mathcal{R}_{\mu_L}$ bir L-proksimiti bağıntısı olsun.*

$$\begin{aligned} \chi_{R_L} : \; & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \longrightarrow L \\ & (A, B) \longmapsto \chi_{R_L}(A, B) \end{aligned}$$

dönüşümü aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\chi_{R_L}(A, B) = \begin{cases} 1_L, & (A, B) \in \mathcal{R}_{\mu_L}, \\ 0_L, & (A, B) \notin \mathcal{R}_{\mu_L}. \end{cases}$$

Buradan, aşağıdakiler doğrudur:

1. *$\mathcal{R}_{\mu_L}$ yansımalı L-proksimiti bağıntıdır ancak ve ancak χ_{R_L} bir yansımalı L-proksimiti bağıntıdır.*
2. *$\mathcal{R}_{\mu_L}$ yansımalı olmayan L-proksimiti bağıntıdır ancak ve ancak χ_{R_L} bir yansımalı olmayan L-proksimiti bağıntıdır.*

3. $\mathcal{R}_{\mu_L}$ bir L-proksimiti bağıntı ise, bu durumda χ_{R_L} bir simetrik L-proksimiti bağıntıdır.

İspat. 1.($\Rightarrow$) Kabul edelim ki $\mathcal{R}_{\mu_L}$ yansımalı L-proksimiti bağıntı olsun. Bu durumda yansımalı L-proksimiti bağıntının koşullarını sağlar. Böylece her $A \in \mathcal{P}(X)$ için, $(A, A) \in \mathcal{R}_{\mu_L}$ olur. χ_{R_L} nin yansımalı L-proksimiti bağıntı olduğunu göstermek için her $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ olduğu durumda $\chi_{R_L}(A, A) \geq \chi_{R_L}(B, C)$ eşitsizliğini sağladığını göstermek yeterlidir.

i) $(A, A) \in \mathcal{R}_{\mu_L}$ ve $(B, C) \in \mathcal{R}_{\mu_L} \;\Rightarrow\; 1_L \geq 1_L$ dir.

ii) $(A, A) \in \mathcal{R}_{\mu_L}$ ve $(B, C) \notin \mathcal{R}_{\mu_L} \;\Rightarrow\; 1_L \geq 0_L$ dir.

Her iki durumda da, χ_{R_L} yansımalı L-proksimiti bağıntıdır.

($\Leftarrow$) Kabul edelim ki χ_{R_L} yansımalı L-proksimiti bağıntı olsun. Buradan $\chi_{R_\mathcal{L}}$, her $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ için $\chi_{R_L}(A, A) \geq \chi_{R_L}(B, C)$ koşulunu sağlar. Bu eşitsizlik üç durum için geçerli olabilir:

i) $1_L \geq 1_L \Rightarrow \chi_{R_\mathcal{L}}(A, A) \geq \chi_{R_L}(B, C) \Rightarrow (A, A) \in \mathcal{R}_{\mu_L} \forall A \in \mathcal{P}(X)$.

ii) $1_L \geq 0_L \Rightarrow \chi_{R_L}(A, A) \geq \chi_{R_L}(B, C) \Rightarrow (A, A) \in \mathcal{R}_{\mu_L} \forall A \in \mathcal{P}(X)$.

iii) $0_L \geq 0_L$. Bu durum geçerli değildir. Çünkü, χ_{R_L} yansımalı L-proksimiti bağıntı ve L boş kümeden farklıdır.

2.($\Rightarrow$) Kabul edelim ki $\mathcal{R}_{\mu_L}$ yansımalı olmayan L-proksimiti bağıntı olsun. Bu durumda yansımalı olmayan bağıntının koşullarını sağlar. Böylece her $A \in \mathcal{P}(X)$ için, $\mathcal{R}_{\mu_L}(A, A) = 0_L$ olur. χ_{R_L} nin yansımalı olmayan L-proksimiti bağıntı olduğunu göstermek için her $A \in \mathcal{P}(X)$ olduğu durumda $\chi_{R_L}(A, A) = 0_L$ olduğunu göstermek yeterlidir.

$\mathcal{R}_{\mu_L}(A, A) = 0_L$ ise, bu durumda $(A, A) \notin \mathcal{R}_{\mu_L}$ dir. Buradan, $\chi_{R_L}(A, A) = 0_L$ elde edilir. Böylece, χ_{R_L} bir yansımalı olmayan L-proksimiti bağıntıdır.

($\Leftarrow$) Kabul edelim ki χ_{R_L} yansımalı olmayan L-proksimiti bağıntı olsun. Buradan $\chi_{R_\mathcal{L}}$, her $A \in \mathcal{P}(X)$ için $\chi_{R_L}(A, A) = 0_L$ koşulunu sağlar. Böylece, $\chi_{R_L}(A, A) = 0_L \Rightarrow (A, A) \notin \mathcal{R}_{\mu_L} \Rightarrow \mathcal{R}_{\mu_L}(A, A) = 0_L$ olur. Dolayısıyla, $\mathcal{R}_{\mu_L}$ yansımalı olmayan L-proksimiti bağıntıdır.

3. Kabul edelim ki $\mathcal{R}_{\mu_L}$ bir L-proksimiti bağıntı olsun. Bu durumda L-proksimiti bağıntı olduğundan, simetrik bağıntının koşullarını sağlar. Böylece her $A, B \in$

$\mathcal{P}(X)$ için, $\mathcal{R}_{\mu_L}(A,B) = \mathcal{R}_{\mu_L}(B,A)$ olur. χ_{R_L} nin simetrik L-proksimiti bağıntı olduğunu göstermek için her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ olduğu durumda $\chi_{R_L}(A,B) = \chi_{R_L}(B,A)$ eşitliğinin sağlandığını göstermek gerekir.

$\mathcal{R}_{\mu_L}(A,B) = \mathcal{R}_{\mu_L}(B,A) \Rightarrow (A,B), (B,A) \in \mathcal{R}_{\mu_L}$ dir. Bu durumda, $\chi_{R_L}(A,B) = 1_L$ ve $\chi_{R_L}(B,A) = 1_L$ olur. Dolayısıyla; $\chi_{R_L}(A,B) = \chi_{R_L}(B,A)$ dır. □

Önerme 3.1.2. *$\mathcal{R}_{\mu_L}$, $\mathcal{P}(X)$ üzerinde bir L-proksimiti bağıntı ve L bir tam latis olsun. L-proksimiti bağıntıların bir $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$ ailesini alalım. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:*

1. *Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, yansımalı L-proksimiti bağıntı ve $L \neq 0_L$ ya da L tek atomik ise, bu durumda $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$ yansımalı bir L-proksimiti bağıntıdır.*

2. *Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, yansımalı olmayan L-proksimiti bağıntı ise, bu durumda $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$ yansımalı olmayan bir L-proksimiti bağıntıdır.*

3. *Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, L-proksimiti bağıntı ise, bu durumda $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$ simetrik bir L-proksimiti bağıntıdır.*

4. *Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, geçişmeli L-proksimiti bağıntı ise, bu durumda $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$ geçişmeli bir L-proksimiti bağıntıdır.*

5. *Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, denklik L-proksimiti bağıntı ve $L \neq 0_L$ ya da L tek atomik ise, bu durumda $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$ bir denklik L-proksimiti bağıntıdır.*

İspat. 1. Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, yansımalı L-proksimiti bağıntı ve $L \neq 0_L$ ya da L tek atomik olsun. Aynı zamanda, $\bigwedge$ ikili işlem ve sıralamaya bağlı olarak monotondur. Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, yansımalı L-proksimiti bağıntı olduğundan her $i \in I$ ve $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}(A,A) \geq \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}(B,C)$ koşulunu sağlar. $\bigwedge$ sıralamaya bağlı olarak monoton olduğundan $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}(A,A) \geq \bigwedge_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}(B,C)$ şeklinde yazılabilir. Böylece, $\bigwedge_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$ yansımalı L-proksimiti bağıntısıdır.

2. Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, yansımalı olmayan L-proksimiti bağıntı olsun. Aynı zamanda, $\bigwedge$ ikili işlem ve sıralamaya bağlı olarak monotondur. Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, yansımalı olmayan L-proksimiti bağıntı olduğundan her $i \in I$ ve $A \in \mathcal{P}(X)$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}(A,A) = 0_L$ koşulunu sağlar. $\bigwedge$ sıralamaya bağlı olarak monoton olduğundan

$\bigwedge_{i\in I}\mathcal{R}_{\mu_{iL}}(A,A)=\bigwedge_{i\in I}0_L$ şeklinde yazılabilir. Bu durumda, $\bigwedge_{i\in I}\mathcal{R}_{\mu_{iL}}(A,A)=0_L$ olur. Böylece, $\bigwedge_{i\in I}\mathcal{R}_{\mu_{iL}}$ yansımalı olmayan bir L-proksimiti bağıntıdır.

3. Her $i\in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{iL}}$, L-proksimiti bağıntı olsun. Ayrıca, $\bigwedge$ ikili işlem ve sıralamaya bağlı olarak monotondur. Her $i\in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{iL}}$, L-proksimiti bağıntı olduğundan simetrik ve her $i\in I$ ve $A,B\in\mathcal{P}(X)$ için $\mathcal{R}_{\mu_{iL}}(A,B)=\mathcal{R}_{\mu_{iL}}(B,A)$ koşulunu sağlar. $\bigwedge$ sıralamaya bağlı olarak monoton olduğundan $\bigwedge_{i\in I}\mathcal{R}_{\mu_{iL}}(A,B)=\bigwedge_{i\in I}\mathcal{R}_{\mu_{iL}}(B,A)$ şeklinde yazılabilir. Böylece, $\bigwedge_{i\in I}\mathcal{R}_{\mu_{iL}}$ simetrik bir L-proksimiti bağıntıdır.

4. Her $i\in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{iL}}$, geçişmeli L-proksimiti bağıntı olsun. Aynı zamanda, $\bigwedge$ ikili işlem ve sıralamaya bağlı olarak monotondur. Her $i\in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{iL}}$, geçişmeli L-proksimiti bağıntı olduğundan her $i\in I$ ve $A,B,C\in\mathcal{P}(X)$ için $\mathcal{R}_{\mu_{iL}}(A,C)\geq\mathcal{R}_{\mu_{iL}}(A,B)\wedge\mathcal{R}_{\mu_{iL}}(B,C)$ koşulunu sağlar. $\bigwedge$ sıralamaya bağlı olarak monoton olduğundan $\bigwedge_{i\in I}\mathcal{R}_{\mu_{iL}}(A,C)\geq\bigwedge_{i\in I}\mathcal{R}_{\mu_{iL}}(A,B)\wedge\bigwedge_{i\in I}\mathcal{R}_{\mu_{iL}}(A,C)$ şeklinde yazılabilir. Böylece, $\bigwedge_{i\in I}\mathcal{R}_{\mu_{iL}}$ geçişmeli L-proksimiti bağıntısıdır.

5. Her $i\in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{iL}}$, denklik L-proksimiti bağıntı ve $L\neq 0_L$ ya da L tek atomik olsun. Bu durumda; her $i\in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{iL}}$, yansımalı, simetrik ve geçişmeli L-proksimiti bağıntı olduğundan $(1)-(3)$ ve (4) ten açıktır ki; $\bigwedge_{i\in I}\mathcal{R}_{\mu_{iL}}$ yansımalı, simetrik ve geçişmeli L-proksimiti bağıntısıdır. Dolayısıyla; $\bigwedge_{i\in I}\mathcal{R}_{\mu_{iL}}$ denklik L-proksimiti bağıntısıdır. □

Önerme 3.1.2 de verilen 1. durum için aşağıda verilen örnek ile de görülebilir ki, L boş küme olamaz yani; $L\neq 0_L$ dir.

Örnek 3.1.8. $(X,\mathcal{R}_{\mu_L})$, *L- proksimal relator uzay olsun. Bu durumda,* $X=\{x,y\}$ *ve* $L=\{0_L,\beta_1,\beta_2,1_L|0_L<\beta_1,\beta_2<1_L;\beta_1||\beta_2\}$ *olarak alalım.*

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{1L} &= \{((\{x\},\{x\}),\beta_1),((\{y\},\{y\}),\beta_2),((\{x\},\{y\}),0_L),\\ &\quad ((\{y\},\{x\}),0_L),((\{x,y\},\{x,y\}),0_L)\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{2L} &= \{((\{x\},\{x\}),\beta_2),((\{y\},\{y\}),\beta_1),((\{x\},\{y\}),0_L)\\ &\quad ((\{y\},\{x\}),0_L),((\{x,y\},\{x,y\}),0_L)\}\end{aligned}$$

şeklinde verilsin. Bu durumda, $\mathcal{R}_{1L}$ *ve* $\mathcal{R}_{2L}$ *yansımalı L-proksimiti bağıntılardır. Fakat,* $\mathcal{R}_{1L}\wedge\mathcal{R}_{2L}$ *yansımalı L-proksimiti bağıntı değildir. Çünkü, L boş kümedir* *yani; $L = 0_L$ dir.*

Önerme 3.1.3. *$\mathcal{R}_{\mu_L}$, $\mathcal{P}(X)$ üzerinde bir L-proksimiti bağıntı ve L bir tam latis olsun. L-proksimiti bağıntıların bir $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$ ailesini alalım. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:*

1. *Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, yansımalı L-proksimiti bağıntı ise, bu durumda $\bigvee_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$ yansımalı bir L-proksimiti bağıntıdır.*

2. *Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, yansımalı olmayan L-proksimiti bağıntı ise, bu durumda $\bigvee_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$ yansımalı olmayan bir L-proksimiti bağıntıdır.*

3. *Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, L-proksimiti bağıntı ise, bu durumda $\bigvee_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$ simetrik bir L-proksimiti bağıntıdır.*

İspat. 1. Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, yansımalı L-proksimiti bağıntı ve $L \neq 0_L$ ya da L tek atomik olsun. Aynı zamanda, $\bigvee$ ikili işlem ve sıralamaya bağlı olarak monotondur. Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, yansımalı L-proksimiti bağıntısı olduğundan her $i \in I$ ve $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}(A, A) \geq \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}(B, C)$ koşulunu sağlar. $\bigvee$ sıralamaya bağlı olarak monoton olduğundan $\bigvee_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}(A, A) \geq \bigvee_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}(B, C)$ şeklinde yazılabilir. Böylece, $\bigvee_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$ yansımalı L-proksimiti bağıntıdır.

2. Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, yansımalı olmayan L-proksimiti bağıntı olsun. Ayrıca, $\bigvee$ ikili işlem ve sıralamaya bağlı olarak monotondur. Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, yansımalı olmayan L-proksimiti bağıntı olduğundan her $i \in I$ ve $A \in \mathcal{P}(X)$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}(A, A) = 0_L$ koşulunu sağlar. $\bigvee$ sıralamaya bağlı olarak monoton olduğundan $\bigvee_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}(A, A) = \bigvee_{i\in I} 0_L$ şeklinde yazılabilir. Buradan; $\bigvee_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}(A, A) = 0_L$ olur. Böylece, $\bigvee_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$ yansımalı olmayan L-proksimiti bağıntıdır.

3. Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, L-proksimiti bağıntı olsun. Ayrıca, $\bigvee$ ikili işlem ve sıralamaya bağlı olarak monotondur. Her $i \in I$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$, L-proksimiti bağıntısı olduğundan her $i \in I$ ve $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$ simetrik ve $\mathcal{R}_{\mu_{i_L}}(A, B) = \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}(B, A)$ koşulunu sağlar. $\bigvee$ sıralamaya bağlı olarak monoton olduğundan $\bigvee_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}(A, B) = \bigvee_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}(B, A)$ şeklinde yazılabilir. Dolayısıyla, $\bigvee_{i\in I} \mathcal{R}_{\mu_{i_L}}$ simetrik L-proksimiti bağıntıdır.

$\square$

3.2 Kompleks Fuzzy Proksimal Relator Uzaylar

Bu kısımda; kompleks fuzzy proksimal uzayının tanımı ve ilgili örnekler verildi. Fuzzy bağıntının sağladığı özelikler, kompleks fuzzy proksimiti bağıntısı içinde incelenerek ayrıntılı şekilde açıklandı. Kompleks fuzzy bağıntı yardımı ile, kümelerin iki farklı örneğin uzaysal ve tanımsal proksimiti özellikleri dikkate alındığında birbirlerine ne kadar proksimal oldukları incelendi. Bu yaklaşım ile aynı anda iki farklı proksimallik incelenme imkanı elde edilmiş oldu. Ayrca, kompleks fuzzy bağıntısının, birleşim ve kesişim işlemleri altında birleşme özelliğine sahip olduğu örneklerle birlikte verildi. Son olarak, bu işlemlerin birer yarı-grup oldukları elde edildi.

Tanım 3.2.1. $(X, \mathcal{R})$ *bir proksimal relator uzay,*

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}: \quad & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) && \longrightarrow e^{i\theta} \\ & (A, B) && \longmapsto \mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A, B) \end{aligned}$$

bir kompleks fuzzy bağıntı ve A,B $\subset X$ *olsun. Bu durumda;*

$$\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}} = \{((A, B), \mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A, B)) \mid (A, B) \in \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X)\}$$

kümesi her $A, B, C \in P(X)$ *için aşağıdaki koşulları sağlarsa, bu kümeye bir kompleks fuzzy proksimiti bağıntısı denir:*

$N_{\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}}1)$ $\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A, \emptyset) = 0 \quad (A \neq \emptyset)$.

$N_{\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}}2)$ $\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A, B) = \mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(B, A)$.

$N_{\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}}3)$ $\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A, B) \neq 0$ *iken* $A \ \mathcal{R}_{\mathbb{C}} \ B$.

$N_{\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}}4)$ $\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A, (B \cup C)) \neq 0$ *iken* $\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A, B) \neq 0$ $(A \ \mathcal{R}_{\mathbb{C}} \ B)$ *ya da* $\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A, C) \neq 0$ $(A \ \mathcal{R}_{\mathbb{C}} \ C)$.

$\mathcal{P}(X)$ kümesi üzerinde tanımlanan bütün kompleks fuzzy proksimiti bağıntıların kümesi, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(X)$ şeklinde gösterilir. Ayrıca, $\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A, B)$ ye kompleks fuzzy proksimiti ölçümü denir.

Kompleks fuzzy proksimiti bağıntısı, $n \times n$ boyutlu bir matrisle aşağıdaki şekildeki gibi gösterilebilir:

$$\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}} = \begin{array}{c} \\ A_1 \\ \vdots \\ A_n \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} A_1 & \cdots & A_n \end{array} \\ \begin{bmatrix} \mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A_1, A_1) & \cdots & \mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A_1, A_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A_n, A_1) & \cdots & \mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A_n, A_n) \end{bmatrix} \end{array}$$

$\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A, B)$ kompleks fuzzy proksimiti ölçümü, A ve B kümelerinin iki farklı proksimiti ele alındığında (uzaysal ve tanımsal gibi) birbirlerine ne kadar proksimal (yakın) olduklarını gösteren ölçüm anlamında kullanılır.

Kompleks fuzzy bağıntı $\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}$, $A, B \in \mathcal{P}(X)$ olmak üzere; $\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A, B)$ her bir (A, B) ikilisini bir kompleks üyelik değerine taşıdığında, kompleks üyelik fonksiyonu $\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A, B)$ ile karakterize edilir. $\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A, B)$ kompleks düzlemde birim daire üzerinde bir değer alır ve $\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A, B) = r_{\mathbb{C}}(A, B) . e^{iw_{\mathbb{C}}(A,B)}$ şeklindedir. $r_{\mathbb{C}}(A, B)$ reel değerli bir fonksiyon olup, $r_{\mathbb{C}}(A, B) \in [0, 1]$ dir. Ayrıca, $e^{iw_{\mathbb{C}}(A,B)}$ periyodik bir fonksiyondur ve $w_{\mathbb{C}}(A, B) = w_{\mathbb{C}}(A, B) + 2k\pi, k = 0, \pm 1, \pm 2, ...,$ ve $0 \leq w_{\mathbb{C}}(A, B) \leq 2\pi$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.2.2. *$\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}$, $\mathcal{P}(X)$ de bir kompleks fuzzy proksimiti bağıntısı olsun. Bu durumda, $(X, \mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}})$ ye bir kompleks fuzzy proksimal relator uzay denir.*

Örnek 3.2.1. *S güneş sistemi kümesi ve $X \subset S$ olmak üzere;*
$X = \{$Güneş, Merkür, Venüs, Dünya, Mars, Jüpiter, Satürn$\}$ olsun. Çap ve yıl uzunluğu Tablo 3 ile aşağıdaki gibi verilmiştir:

	Çap(km)	*Yıl Uzunluğu*
Güneş	1324332	224000000
Merkür	4884	0,2
Venüs	12346	0,6
Dünya	12709	1
Mars	6767	1,8
Jüpiter	142647	11,6
Satürn	124309	29,5

Tablo 3

Kompleks fuzzy proksimiti bağıntı aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\begin{aligned} \mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}: \quad & \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X) && \longrightarrow e^{i\theta} \\ & (P_1,\ P_2) && \longmapsto \mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(P_1,P_2) = r_{\mathbb{C}}(P_1,P_2).e^{iw_{\mathbb{C}}(P_1,P_2)} \end{aligned}$$

$$r_{\mathbb{C}}(P_1,P_2) = \begin{cases} 1 & ,\ if \quad P_1 = P_2, \\ \frac{d(|P_1-P_2|)}{d(S)} & ,\ if \quad P_1 \neq P_2 \end{cases}$$

$$w_{\mathbb{C}}(P_1,P_2) = \begin{cases} 1 & ,\ if \quad P_1 = P_2, \\ \frac{y(|P_1-P_2|)}{y(S)} & ,\ if \quad P_1 \neq P_2 \end{cases}$$

$d(|P_1-P_2|)$, $y(|P_1-P_2|)$, $d(S)$ *ve* $y(S)$ *ifadeleri sırasıyla gezegenlerin çapları arasındaki fark, gezegenlerin yıl uzunlukları arasındaki fark, güneşin çapı ve güneşin yıl uzunluğu anlamındadır. Merkür, Venüs, Dünya, Mars, Jüpiter, Satürn ve Güneşi sırasıyla* A, B, C, D, E, F, S *harfleri ile gösterelim. Dolayısıyla;*

$$
\begin{aligned}
r_{\mathbb{C}}(A,B) &= \tfrac{d(|A-B|)}{d(S)} &&= \tfrac{|4884-12346|}{1324332} &&= 0.0056\\
r_{\mathbb{C}}(A,C) &= \tfrac{d(|A-C|)}{d(S)} &&= \tfrac{|4884-12709|}{1324332} &&= 0.0059\\
r_{\mathbb{C}}(A,D) &= \tfrac{d(|A-D|)}{d(S)} &&= \tfrac{|4884-6767|}{1324332} &&= 0.0014\\
r_{\mathbb{C}}(A,E) &= \tfrac{d(|A-E|)}{d(S)} &&= \tfrac{|4884-142647|}{1324332} &&= 0.1040\\
r_{\mathbb{C}}(A,F) &= \tfrac{d(|A-F|)}{d(S)} &&= \tfrac{|4884-124309|}{1324332} &&= 0.0901\\
r_{\mathbb{C}}(B,A) &= \tfrac{d(|B-A|)}{d(S)} &&= \tfrac{|12346-4884|}{1324332} &&= 0.0056\\
r_{\mathbb{C}}(B,C) &= \tfrac{d(|B-C|)}{d(S)} &&= \tfrac{|12346-12709|}{1324332} &&= 0.0002\\
r_{\mathbb{C}}(B,D) &= \tfrac{d(|B-D|)}{d(S)} &&= \tfrac{|12346-6767|}{1324332} &&= 0.0421\\
r_{\mathbb{C}}(B,E) &= \tfrac{d(|B-E|)}{d(S)} &&= \tfrac{|12346-142647|}{1324332} &&= 0.0983\\
r_{\mathbb{C}}(B,F) &= \tfrac{d(|B-F|)}{d(S)} &&= \tfrac{|12346-124309|}{1324332} &&= 0.0845\\
r_{\mathbb{C}}(C,A) &= \tfrac{d(|C-A|)}{d(S)} &&= \tfrac{|12709-4884|}{1324332} &&= 0.0059\\
r_{\mathbb{C}}(C,B) &= \tfrac{d(|C-B|)}{d(S)} &&= \tfrac{|12709-12346|}{1324332} &&= 0.0002\\
r_{\mathbb{C}}(C,D) &= \tfrac{d(|C-D|)}{d(S)} &&= \tfrac{|12709-6767|}{1324332} &&= 0.0044\\
r_{\mathbb{C}}(C,E) &= \tfrac{d(|C-E|)}{d(S)} &&= \tfrac{|12709-142647|}{1324332} &&= 0.0981\\
r_{\mathbb{C}}(C,F) &= \tfrac{d(|C-F|)}{d(S)} &&= \tfrac{|12709-124309|}{1324332} &&= 0.0842\\
r_{\mathbb{C}}(D,A) &= \tfrac{d(|D-A|)}{d(S)} &&= \tfrac{|6767-4884|}{1324332} &&= 0.0014\\
r_{\mathbb{C}}(D,B) &= \tfrac{d(|D-B|)}{d(S)} &&= \tfrac{|12346-6767|}{1324332} &&= 0.0421\\
r_{\mathbb{C}}(D,C) &= \tfrac{d(|D-C|)}{d(S)} &&= \tfrac{|12709-6767|}{1324332} &&= 0.0044\\
r_{\mathbb{C}}(D,E) &= \tfrac{d(|D-E|)}{d(S)} &&= \tfrac{|6767-142647|}{1324332} &&= 0.1026\\
r_{\mathbb{C}}(D,F) &= \tfrac{d(|D-F|)}{d(S)} &&= \tfrac{|6767-124309|}{1324332} &&= 0.0887\\
r_{\mathbb{C}}(E,A) &= \tfrac{d(|E-A|)}{d(S)} &&= \tfrac{|4884-142647|}{1324332} &&= 0.1040\\
r_{\mathbb{C}}(E,B) &= \tfrac{d(|E-B|)}{d(S)} &&= \tfrac{|12346-142647|}{1324332} &&= 0.0983\\
r_{\mathbb{C}}(E,C) &= \tfrac{d(|E-C|)}{d(S)} &&= \tfrac{|12709-142647|}{1324332} &&= 0.0981\\
r_{\mathbb{C}}(E,D) &= \tfrac{d(|E-D|)}{d(S)} &&= \tfrac{|6767-142647|}{1324332} &&= 0.1026\\
r_{\mathbb{C}}(E,F) &= \tfrac{d(|E-F|)}{d(S)} &&= \tfrac{|142647-124309|}{1324332} &&= 0.0138\\
r_{\mathbb{C}}(F,A) &= \tfrac{d(|F-A|)}{d(S)} &&= \tfrac{|4884-124309|}{1324332} &&= 0.0901\\
r_{\mathbb{C}}(F,B) &= \tfrac{d(|F-B|)}{d(S)} &&= \tfrac{|12346-124309|}{1324332} &&= 0.0845\\
r_{\mathbb{C}}(F,C) &= \tfrac{d(|C-F|)}{d(S)} &&= \tfrac{|12709-124309|}{1324332} &&= 0.0842\\
r_{\mathbb{C}}(F,D) &= \tfrac{d(|F-D|)}{d(S)} &&= \tfrac{|6767-124309|}{1324332} &&= 0.0887\\
r_{\mathbb{C}}(F,E) &= \tfrac{d(|F-E|)}{d(S)} &&= \tfrac{|142647-124309|}{1324332} &&= 0.0138
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi de ikinci fonksiyonun değerlerini bulalım.

$$\begin{aligned}
w_{\mathbb{C}}(A,B) &= \tfrac{y(|A-B|)}{y(S)} &&= \tfrac{|0.2-0.6|}{224000000} &&= 0,0001.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(A,C) &= \tfrac{y(|A-C|)}{y(S)} &&= \tfrac{|0.2-1|}{224000000} &&= 0,00003.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(A,D) &= \tfrac{y(|A-D|)}{y(S)} &&= \tfrac{|0.2-1.8|}{224000000} &&= 0,0007.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(A,E) &= \tfrac{y(|A-E|)}{y(S)} &&= \tfrac{|0.2-11.6|}{224000000} &&= 0,0050.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(A,F) &= \tfrac{y(|A-F|)}{y(S)} &&= \tfrac{|0.2-29.5|}{224000000} &&= 0,0130.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(B,A) &= \tfrac{y(|B-A|)}{y(S)} &&= \tfrac{|0.6-0.2|}{224000000} &&= 0,0001.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(B,C) &= \tfrac{y(|B-C|)}{y(S)} &&= \tfrac{|0.6-1|}{224000000} &&= 0,0001.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(B,D) &= \tfrac{y(|B-D|)}{y(S)} &&= \tfrac{|0.6-1.8|}{224000000} &&= 0,0005.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(B,E) &= \tfrac{y(|B-E|)}{y(S)} &&= \tfrac{|0.6-11.6|}{224000000} &&= 0,0049.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(B,F) &= \tfrac{y(|B-F|)}{y(S)} &&= \tfrac{|0.6-29.5|}{224000000} &&= 0,0129.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(C,A) &= \tfrac{y(|C-A|)}{y(S)} &&= \tfrac{|1-0.2|}{224000000} &&= 0,00003.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(C,B) &= \tfrac{y(|C-B|)}{y(S)} &&= \tfrac{|1-0.6|}{224000000} &&= 0,0001.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(C,D) &= \tfrac{y(|C-D|)}{y(S)} &&= \tfrac{|1-1.8|}{224000000} &&= 0,0003.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(C,E) &= \tfrac{y(|C-E|)}{y(S)} &&= \tfrac{|1-11.6|}{224000000} &&= 0,0047.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(C,F) &= \tfrac{y(|C-F|)}{y(S)} &&= \tfrac{|1-29.5|}{224000000} &&= 0,0127.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(D,A) &= \tfrac{y(|D-A|)}{y(S)} &&= \tfrac{|1.8-0.2|}{224000000} &&= 0,0007.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(D,B) &= \tfrac{y(|D-B|)}{y(S)} &&= \tfrac{|1.8-0.6|}{224000000} &&= 0,0005.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(D,C) &= \tfrac{y(|D-C|)}{y(S)} &&= \tfrac{|1.8-1|}{224000000} &&= 0,0003.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(D,E) &= \tfrac{y(|D-E|)}{y(S)} &&= \tfrac{|1.8-11.6|}{224000000} &&= 0,0043.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(D,F) &= \tfrac{y(|D-F|)}{y(S)} &&= \tfrac{|1.8-29.5|}{224000000} &&= 0,0123.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(E,A) &= \tfrac{y(|E-A|)}{y(S)} &&= \tfrac{|11.6-0.2|}{224000000} &&= 0,0050.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(E,B) &= \tfrac{y(|E-B|)}{y(S)} &&= \tfrac{|11.6-0.6|}{224000000} &&= 0,0049.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(E,C) &= \tfrac{y(|E-C|)}{y(S)} &&= \tfrac{|11.6-1|}{224000000} &&= 0,0047.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(E,D) &= \tfrac{y(|E-D|)}{y(S)} &&= \tfrac{|11.6-1.8|}{224000000} &&= 0,0043.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(E,F) &= \tfrac{y(|E-F|)}{y(S)} &&= \tfrac{|11.6-29.5|}{224000000} &&= 0,0079.10^{-7}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
w_{\mathbb{C}}(F,A) &= \tfrac{y(|A-F|)}{y(S)} &&= \tfrac{|29.5-0.2|}{224000000} &&= 0,0130.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(F,B) &= \tfrac{y(|B-F|)}{y(S)} &&= \tfrac{|29.5-0.6|}{224000000} &&= 0,0129.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(F,C) &= \tfrac{y(|F-C|)}{y(S)} &&= \tfrac{|29.5-1|}{224000000} &&= 0,0127.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(F,D) &= \tfrac{y(|D-F|)}{y(S)} &&= \tfrac{|29.5-1.8|}{224000000} &&= 0,0123.10^{-7}\\
w_{\mathbb{C}}(F,E) &= \tfrac{y(|F-E|)}{y(S)} &&= \tfrac{|29.5-11.6|}{224000000} &&= 0,0079.10^{-7}
\end{aligned}$$

$0,0001.10^{-7}$ *bütün değerlerde ortak olarak bulunduğundan ifadeyi kısaltmak için* $0,0001.10^{-7} = \theta$ *olarak alınırsa, diğer sonuçlarda* θ *cinsinden ifade edilebilir.*

$$\begin{aligned}
w_{\mathbb{C}}(A,A) &= 1\\
w_{\mathbb{C}}(A,B) &= \theta\\
w_{\mathbb{C}}(A,C) &= 3\theta\\
w_{\mathbb{C}}(A,D) &= 7\theta\\
w_{\mathbb{C}}(A,E) &= 50\theta\\
w_{\mathbb{C}}(A,F) &= 130\theta\\
w_{\mathbb{C}}(B,A) &= \theta\\
w_{\mathbb{C}}(B,B) &= 1\\
w_{\mathbb{C}}(B,C) &= \theta\\
w_{\mathbb{C}}(B,D) &= 5\theta\\
w_{\mathbb{C}}(B,E) &= 49\theta\\
w_{\mathbb{C}}(B,F) &= 129\theta\\
w_{\mathbb{C}}(C,A) &= 3\theta\\
w_{\mathbb{C}}(C,B) &= \theta\\
w_{\mathbb{C}}(C,C) &= 1\\
w_{\mathbb{C}}(C,D) &= 3\theta\\
w_{\mathbb{C}}(C,E) &= 47\theta\\
w_{\mathbb{C}}(C,F) &= 127\theta
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
w_{\mathbb{C}}(D,A) &= 7\theta \\
w_{\mathbb{C}}(D,B) &= 5\theta \\
w_{\mathbb{C}}(D,C) &= 3\theta \\
w_{\mathbb{C}}(D,D) &= 1 \\
w_{\mathbb{C}}(D,E) &= 43\theta \\
w_{\mathbb{C}}(D,F) &= 123\theta \\
w_{\mathbb{C}}(E,A) &= 50\theta \\
w_{\mathbb{C}}(E,B) &= 49\theta \\
w_{\mathbb{C}}(E,C) &= 47\theta \\
w_{\mathbb{C}}(E,D) &= 43\theta \\
w_{\mathbb{C}}(E,E) &= 1 \\
w_{\mathbb{C}}(E,F) &= 79\theta \\
w_{\mathbb{C}}(F,A) &= 130\theta \\
w_{\mathbb{C}}(F,B) &= 129\theta \\
w_{\mathbb{C}}(F,C) &= 127\theta \\
w_{\mathbb{C}}(F,D) &= 123\theta \\
w_{\mathbb{C}}(F,E) &= 79\theta \\
w_{\mathbb{C}}(F,F) &= 1
\end{aligned}
$$

Buradan,

$$\begin{aligned}
&A,\ B\ \text{ye}\ 0,0056.e^{i\theta}-\ \textit{kompleks fuzzy proksimaldir,}\\
&A,\ C\ \text{ye}\ 0,0059.e^{i3\theta}-\ \textit{kompleks fuzzy proksimaldir,}\\
&A,\ D\ \text{ye}\ 0,0014.e^{i7\theta}-\ \textit{kompleks fuzzy proksimaldir,}\\
&A,\ C\ \text{ye}\ 0,1040.e^{i50\theta}-\ \textit{kompleks fuzzy proksimaldir,}\\
&A,\ F\ \text{ye}\ 0,0901.e^{i130\theta}-\ \textit{kompleks fuzzy proksimaldir,}\\
&B,\ C\ \text{ye}\ 0,0002.e^{i\theta}-\ \textit{kompleks fuzzy proksimaldir,}\\
&B,\ D\ \text{ye}\ 0,0421.e^{i5\theta}-\ \textit{kompleks fuzzy proksimaldir,}\\
&B,\ E\ \text{ye}\ 0,0983.e^{i49\theta}-\ \textit{kompleks fuzzy proksimaldir,}\\
&B,\ F\ \text{ye}\ 0,0845.e^{i129\theta}-\ \textit{kompleks fuzzy proksimaldir,}\\
&C,\ D\ \text{ye}\ 0,0044.e^{i3\theta}-\ \textit{kompleks fuzzy proksimaldir,}\\
&C,\ E\ \text{ye}\ 0,0981.e^{i47\theta}-\ \textit{kompleks fuzzy proksimaldir,}\\
&C,\ F\ \text{ye}\ 0,0842.e^{i127\theta}-\ \textit{kompleks fuzzy proksimaldir,}\\
&D,\ E\ \text{ye}\ 0,1026.e^{i43\theta}-\ \textit{kompleks fuzzy proksimaldir,}\\
&D,\ F\ \text{ye}\ 0,0887.e^{i123\theta}-\ \textit{kompleks fuzzy proksimaldir,}\\
&E,\ F\ \text{ye}\ 0,0138.e^{i79\theta}-\ \textit{kompleks fuzzy proksimaldir.}
\end{aligned}$$

elde edilir. Kompleks fuzzy proksimiti bağıntısı bir matrislede aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}=\begin{bmatrix}
1 & 0,0056.e^{i\theta} & 0,0059.e^{i3\theta} & 0,0014.e^{i7\theta} & 0,1040.e^{i50\theta} & 0,0901.e^{i130\theta}\\
0,0056.e^{i\theta} & 1 & 0,0002.e^{i\theta} & 0,0421.e^{i5\theta} & 0,0983.e^{i49\theta} & 0,0845.e^{i129\theta}\\
0,0059.e^{i3\theta} & 0,002.e^{i\theta} & 1 & 0,0044.e^{i3\theta} & 0,0981.e^{i47\theta} & 0,0842.e^{i127\theta}\\
0,0014.e^{i7\theta} & 0,0421.e^{i5\theta} & 0,0044.e^{i3\theta} & 1 & 0,1026.e^{i43\theta} & 0,0887.e^{i123\theta}\\
0,1040.e^{i50\theta} & 0,0983.e^{i49\theta} & 0,0981.e^{i47\theta} & 0.1026.e^{i43\theta} & 1 & 0,0138.e^{i79\theta}\\
0,0901.e^{i130\theta} & 0,0845.e^{i129\theta} & 0,0842.e^{i127\theta} & 0,0887.e^{i123\theta} & 0,0138.e^{i79\theta} & 1
\end{bmatrix}.$$

$\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}$, $(N_{\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}}1)-(N_{\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}}4)$ *aksiyomlarını sağladığından bir kompleks fuzzy proksimiti bağıntısıdır. Ayrıca,* $(X,\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}})$ *bir kompleks fuzzy proksimiti uzaydır.*

Tanım 3.2.3. (X,δ) *bir proksimiti uzayı olsun. Her* $A,B,C\in\mathcal{P}(X)$ *için aşağıdaki koşulları sağlarsa,* $(X,\delta_{\mu_{\mathbb{C}}})$ *ya uzaysal kompleks fuzzy proksimiti uzayı denir:*

$N_{\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}}1)$ $\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}(A,\emptyset)=0\quad(A\neq\emptyset)$.

$N_{\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}}2)$ $\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}(A,B)=\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}(B,A)$.

$N_{\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}}3)$ $\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}(A,B) \neq 0$ *iken* $A\delta_{\mathbb{C}}B$.

$N_{\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}}4)$ $\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}(A,(B \cup C)) \neq 0$ *iken* $\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}(A,B) \neq 0$ $(A\delta_{\mathbb{C}}B)$ *ya da* $\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}(A,C) \neq 0$ $(A\delta_{\mathbb{C}}C)$.

$(X,\delta_{\mu_{\mathbb{C}}})$, *uzaysal kompleks fuzzy proksimiti aksiyomlarını ve aşağıdaki* $N_{\mu\delta_{\mathbb{C}}}5$ *aksiyomunu sağlarsa,* $\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}$ *kompleks fuzzy bağıntısına bir uzaysal kompleks fuzzy Lodato proksimiti bağıntısı denir:*

$N_{\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}}5)$ $\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}(A,B) \neq 0$ *ve her* $b \in B$ *için* $\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}(\{b\},C) \neq 0$ *iken* $\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}(A,C) \neq 0$ $(A\delta_{\mathbb{C}}C)$.

Örnek 3.2.2. $X = \{a,b,c,d,e,f,g,h,j,k\}$ *kümesini ve* (X,δ) *proksimiti uzayını alalım. Temel proksimiti* δ *aşağıdaki şekilde tanımlansın:*

$$C\delta D :\Leftrightarrow C \cap D \neq \emptyset.$$

$C = \{a,b,c,d,g\}$ *ve* $D = \{d,e,f,g,h,j,k\}$, X *kümesinin alt kümeleri olsun.* $C \cap D \neq \emptyset$ *olduğundan,* $C\ \delta\ D$ *olduğu kolayca görülür. Kompleks fuzzy proksimiti bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlanabilir:*

$$\begin{array}{rll} \mu_{\delta_{\mathbb{C}}}: & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) & \longrightarrow e^{i\theta} \\ & (C,\ D) & \longmapsto \mu_{\delta_{\mathbb{C}}}(C,D) = r_{\mathbb{C}}(C,D).e^{iw_{\mathbb{C}}(C,D)} \end{array}$$

$r_{\mathbb{C}}(C,D) = \frac{|C \backslash D|}{|C \cup D|}$ *ve* $w_{\mathbb{C}}(C,D) = w_{\mathbb{C}}(D,C) = \pi$ *şeklinde tanımlansın. Buradan*

$$\begin{aligned} \mu_{\delta_{\mathbb{C}}}(C,D) &= \tfrac{|C \backslash D|}{|C \cup D|} = \tfrac{3}{10} = 0.3, \\ \mu_{\delta_{\mathbb{C}}}(D,C) &= \tfrac{|D \backslash C|}{|D \cup C|} = \tfrac{5}{10} = 0.5. \end{aligned}$$

Dolayısıyla

$$C,\ D \text{ ye } 0,3.e^{i\pi} - \text{ kompleks fuzzy proksimaldir,}$$
$$D,\ C \text{ ye } 0,5.e^{i\pi} - \text{ kompleks fuzzy proksimaldir .}$$

Ancak; $\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}$ *simetrik olmadığından, yani* $\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}(C,D) \neq \mu_{\delta_{\mathbb{C}}}(D,C)$ *olduğundan* $(X,\delta_{\mu_{\mathbb{C}}})$ *kompleks fuzzy proksimiti uzay değildir.*

Tanım 3.2.4. *X boştan farklı bir küme ve δ_{Φ}, Lodato proksimiti bağıntısıyla donatılmış olsun. $\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}$ fuzzy bağıntısı her $A, B, C \in \mathcal{P}(X)$ için aşağıdaki koşulları sağlarsa $\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}$ ye bir tanımsal kompleks fuzzy Lodato proksimiti bağıntısı denir:*

$N_{\mu_{\delta_{\Phi\mathbb{C}}}}1)$ $\mu_{\delta_{\Phi\mathbb{C}}}(A, \emptyset) = 0 \quad (A \neq \emptyset)$.

$N_{\mu_{\delta_{\Phi\mathbb{C}}}}2)$ $\mu_{\delta_{\Phi\mathbb{C}}}(A, B) = \mu_{\delta_{\Phi\mathbb{C}}}(B, A)$.

$N_{\mu_{\delta_{\Phi\mathbb{C}}}}3)$ $\mu_{\delta_{\Phi\mathbb{C}}}(A, B) \neq 0$ *iken* $A \ \delta_{\Phi\mathbb{C}} \ B$.

$N_{\mu_{\delta_{\Phi\mathbb{C}}}}4)$ $\mu_{\delta_{\Phi\mathbb{C}}}(A, (B \cup C)) \neq 0$ *iken* $\mu_{\delta_{\Phi\mathbb{C}}}(A, B) \neq 0$ $(A \ \delta_{\Phi\mathbb{C}} \ B)$ *ya da* $\mu_{\delta_{\Phi\mathbb{C}}}(A, C) \neq 0$ $(A \ \delta_{\Phi\mathbb{C}} \ C)$.

$N_{\mu_{\delta_{\Phi\mathbb{C}}}}5)$ $\mu_{\delta_{\Phi\mathbb{C}}}(A, B) \neq 0$ *ve her* $b \in B$ *için* $\mu_{\delta_{\Phi\mathbb{C}}}(\{b\}, C) \neq 0$ *iken* $\mu_{\delta_{\Phi\mathbb{C}}}(A, C) \neq 0$ $(A \ \delta_{\Phi\mathbb{C}} \ C)$.

Tanım 3.2.5. *$\mu_{\delta_{\mathbb{C}}}$ bir tanımsal kompleks fuzzy Lodato proksimiti bağıntısı olmak üzere, $(X, \delta_{\mu_{\Phi\mathbb{C}}})$ ye tanımsal kompleks fuzzy Lodato proksimiti uzayı denir.*

Tanım 3.2.6. *$(X, \mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}})$ bir kompleks fuzzy proksimal relator uzay olsun.*

$$h\left(\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}\right) = \max_{B \in \mathcal{P}(X)} \max_{A \in \mathcal{P}(X)} \mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}(A, B)$$

şeklinde tanımlanan $h\left(\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}\right)$ ye $\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}$ kompleks fuzzy proksimiti bağıntısının yüksekliği denir. $h\left(\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}\right)$ kümeler ailesindeki en büyük proksimiti derecesini verir.

Tanım 3.2.7. *$(X, \mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}})$ bir kompleks fuzzy proksimal relator uzay olsun. Fuzzy proksimiti bağıntısının tersi $\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}$, aşağıdaki şekilde tanımlanır:*

$$\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}^{-1}(B, A) = \mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}(A, B)$$

$\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}^{-1}$ kompleks fuzzy bağıntısal matrisinin transpozudur. $\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}^{-1}$, $(N_{\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}}1)-(N_{\mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}}4)$ kompleks fuzzy proksimiti bağıntısı aksiyomlarını sağlar.

Gerçekten; $\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}(A, B)$ matrisi simetrik matris olduğundan, kompleks fuzzy bağıntısal matrisinin transpozu $\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}(B, A)$ ile birbirlerine eşittirler. Böylece, aşağıdaki teorem ispatsız verilir.

Teorem 3.2.1. $\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}}^{-1}(B,A)$ *bir kompleks fuzzy proksimiti bağıntısıdır.*

Tanım 3.2.8. $(X,\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}})$, $(Y,\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}})$ *ve* $(Z,\mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}})$ *kompleks fuzzy proksimal relator uzaylar olsun.*

$$\mathcal{R}_{\mu_1\mathbb{C}} = \{((A,B), \mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(A,B)\ ) \mid (A,B) \in \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(Y)\}$$

ve

$$\mathcal{R}_{\mu_2\mathbb{C}} = \{((B,C), \mu_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(B,C)\ ) \mid (B,C) \in \mathcal{P}(Y)\times\mathcal{P}(Z)\}$$

kompleks fuzzy proksimiti bağıntılar

$$\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}:\ \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(Y) \longrightarrow e^{i\theta}$$

ve

$$\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}:\ \mathcal{P}(Y)\times\mathcal{P}(Z) \longrightarrow e^{i\theta}$$

verilsin. $\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}$ *ve* $\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}$ *nin bileşimi,* $\mu_{\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}\circ\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}}$ *şeklinde gösterilir. Bu bileşim aşağıda verilen fonksiyon yardımıyla tanımlanır:*

$$\begin{aligned}\mu_{\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}\circ\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}}(A,C) &= r_{\mu_{\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}\circ\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}}}(A,C).e^{iw_{\mu_{\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}\circ\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}}}(A,C)} \\ &= \max\min\left(r_{\mu_1\mathcal{R}\mathbb{C}}(A,B), r_{\mu_2\mathcal{R}\mathbb{C}}(B,C)\right).e^{i\max\min\left(w_{\mu_1\mathcal{R}\mathbb{C}}(A,B), w_{\mu_2\mathcal{R}\mathbb{C}}(B,C)\right)}\end{aligned}$$

Örnek 3.2.3. $\delta_{\mu_1\mathbb{C}}$ *ve* $\delta_{\mu_2\mathbb{C}}$ *birer fuzzy proksimiti bağıntısı olsun:*

$$\delta_{\mu_1\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0,2.e^{i2\pi} & 0,21.e^{i3\pi} & 0,8.e^{i\pi} \\ 0,2.e^{i2\pi} & 1 & 0,5.e^{i4\pi} & 0,6.e^{i5\pi} \\ 0,21.e^{i3\pi} & 0,5.e^{i4\pi} & 1 & 0,42.e^{i4\pi} \\ 0,8.e^{i\pi} & 0,6.e^{i5\pi} & 0,42.e^{i4\pi} & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\delta_{\mu_2\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5.e^{i3\pi} & 0,7.e^{i\pi} & 0,3.e^{i2\pi} \\ 0,5.e^{i3\pi} & 1 & 0,2.e^{i2\pi} & 0,4.e^{i4\pi} \\ 0,7.e^{i\pi} & 0,2.e^{i2\pi} & 1 & 0,25.e^{i5\pi} \\ 0,3.e^{i2\pi} & 0,4.e^{i4\pi} & 0,25.e^{i5\pi} & 1 \end{bmatrix}$$

$\delta_{\mu_1\mathbb{C}} \circ \delta_{\mu_2\mathbb{C}}$ *bileşimlerini bulalım;*

$$\delta_{\mu_1\mathbb{C}} \circ \delta_{\mu_2\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1.e^{i2\pi} & 0,5.e^{i2\pi} & 0,7.e^{i2\pi} & 0,8.e^{i3\pi} \\ 0,5.e^{i2\pi} & 1.e^{i4\pi} & 0,5.e^{i5\pi} & 0,6.e^{i4\pi} \\ 0,7.e^{i3\pi} & 0,5.e^{i4\pi} & 1.e^{i4\pi} & 0,42.e^{i4\pi} \\ 0,8.e^{i3\pi} & 0,6.e^{i2\pi} & 0,42.e^{i4\pi} & 1.e^{i4\pi} \end{bmatrix}$$

elde edilir. Buradan, $\delta_{\mu_1\mathbb{C}} \circ \delta_{\mu_2\mathbb{C}}$ *bir kompleks fuzzy bağıntıdır fakat kompleks fuzzy proksimiti bağıntı değildir. Çünkü, bu bileşim* $(N_{\mu_{\mathcal{R}_\mathbb{C}}}2)$ *aksiyomunu sağlamaz.*

$\delta_{\mu_1\mathbb{C}} \circ \delta_{\mu_1\mathbb{C}}$ *bileşimi hesaplanırsa;*

$$\delta^2_{\mu_1\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1.e^{i3\pi} & 0,6.e^{i3\pi} & 0,42.e^{i2\pi} & 0,8.e^{i3\pi} \\ 0,6.e^{i3\pi} & 1.e^{i5\pi} & 0,5.e^{i4\pi} & 0,6.e^{i4\pi} \\ 0,42.e^{i2\pi} & 0,5.e^{i4\pi} & 1.e^{i4\pi} & 0,5.e^{i4\pi} \\ 0,8.e^{i3\pi} & 0,6.e^{i4\pi} & 0,5.e^{i4\pi} & 1.e^{i5\pi} \end{bmatrix}$$

olur. Böylece $\delta^2_{\mu_1\mathbb{C}}$*,* $(N_{\mu_{\mathcal{R}_\mathbb{C}}}1)-(N_{\mu_{\mathcal{R}_\mathbb{C}}}4)$ *aksiyomlarını sağlar. Dolayısıyla* $\delta^2_{\mu_1\mathbb{C}}$*,* X^2 *de bir kompleks fuzzy proksimiti bağıntıdır ve* $\left(X^2, \delta^2_{\mu_\mathbb{C}}\right)$ *bir kompleks fuzzy proksimiti uzaydır.*

Tanım 3.2.9. $(X, \mathcal{R}_{\mu_\mathbb{C}})$ *ve* $(Y, \mathcal{R}_{\mu_\mathbb{C}})$ *birer kompleks fuzzy proksimal relator uzay olsun.*

$$\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}: \ \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \ \longrightarrow e^{i\theta}$$

ve

$$\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}: \ \mathcal{P}(Y) \times \mathcal{P}(Y) \ \longrightarrow e^{i\theta}$$

kompleks fuzzy proksimiti bağıntılarının üyelik fonksiyonları sırasıyla; $\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}(A,B) = r_{1\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{1\mathbb{C}}(A,B)}$ *ve* $\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}(A,B) = r_{2\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{2\mathbb{C}}(A,B)}$ *şeklindedir.*

$\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}$ *ve* $\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}$ *nin kompleks fuzzy proksimiti birleşimleri,*

$$\begin{aligned} \mu_{\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}}(A,B) &= r_{\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}}(A,B).e^{iw_{\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}}(A,B)} \\ &= max(r_{\mu_{1\mathbb{C}}}(A,B), r_{\mu_{2\mathbb{C}}}(A,B)).e^{imax(w_{\mu_{1\mathbb{C}}}(A,B), w_{\mu_{2\mathbb{C}}}(A,B))} \end{aligned}$$

biçiminde gösterilir.

Örnek 3.2.4. *$\delta_{\mu_1\mathbb{C}}$ ve $\delta_{\mu_2\mathbb{C}}$ birer fuzzy proksimiti bağıntısı olsun:*

$$\delta_{\mu_1\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0,3.e^{i2\pi} & 0,2.e^{i4\pi} & 0,1.e^{i2\pi} \\ 0,3.e^{i2\pi} & 1 & 0,5.e^{i\pi} & 0,7.e^{i3\pi} \\ 0,2.e^{i4\pi} & 0,5.e^{i\pi} & 1 & 0,4.e^{i4\pi} \\ 0,1.e^{i2\pi} & 0,7.e^{i3\pi} & 0,4.e^{i4\pi} & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\delta_{\mu_2\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5.e^{i\pi} & 0,3.e^{i4\pi} & 0,11.e^{i2\pi} \\ 0,5.e^{i\pi} & 1 & 0,23.e^{i3\pi} & 0,47.e^{i3\pi} \\ 0,3.e^{i4\pi} & 0,23.e^{i3\pi} & 1 & 0,25.e^{i5\pi} \\ 0,11.e^{i2\pi} & 0,47.e^{i3\pi} & 0,25.e^{i5\pi} & 1 \end{bmatrix}$$

$\delta_{\mu_1\mathbb{C}}$ ve $\delta_{\mu_2\mathbb{C}}$ nin birleşimlerini bulalım;

$$\delta_{\mu_1\mathbb{C}\oplus\mu_2\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5.e^{i2\pi} & 0,3.e^{i4\pi} & 0,11.e^{i2\pi} \\ 0,5.e^{i2\pi} & 1 & 0,5.e^{i3\pi} & 0,7.e^{i3\pi} \\ 0,3.e^{i4\pi} & 0,5.e^{i3\pi} & 1 & 0,4.e^{i5\pi} \\ 0,11.e^{i2\pi} & 0,7.e^{i3\pi} & 0,4.e^{i5\pi} & 1 \end{bmatrix},$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.2. *$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(X)$ tüm kompleks fuzzy proksimiti bağıntıların ailesi olsun. $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(X)$, "$\oplus$" işlemi ile grupoiddir.*

İspat.

$$\begin{aligned} \oplus \quad : \mathcal{P}\mu_{\mathcal{R}}(X) \times \mathcal{P}\mu_{\mathcal{R}}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}\mu_{\mathcal{R}}(X) \\ (\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}, \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}) &\longmapsto \mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) &= \mu_{\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}\oplus\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}}(A,B) \\ &= \max(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{2\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\max(w_{1\mathbb{C}}(A,B),w_{2\mathbb{C}}(A,B))} \end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(X)$ nin "$\oplus$" işlemi ile grupoid olduğunu göstermek için;
$(\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}, \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}) = (\mu_{1'\mathcal{R}\mathbb{C}}, \mu_{2'\,\mathcal{R}\mathbb{C}})$ olduğunda, $\mu_{1\,\mathcal{R}\mathbb{C}}, \mu_{2\,\mathcal{R}\mathbb{C}}, \mu_{1'\mathcal{R}\mathbb{C}}, \mu_{2'\,\mathcal{R}\mathbb{C}} \in \mathcal{P}\mu_{\mathcal{R}}(X)$ için $\mu_{1\,\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2\,\mathcal{R}\mathbb{C}} = \mu_{1'\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2'\,\mathcal{R}\mathbb{C}}$ olduğunu göstermek gerekir. Bu durumda her bir $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için,

$$(\mu_{1\,\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2\,\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) = (\mu_{1'\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2'\,\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B)$$

eşitliğinin sağlandığını gösterelim. $(\mu_{1\ \mathcal{RC}}, \mu_{2\ \mathcal{RC}}) = (\mu_{1'\mathcal{RC}}, \mu_{2'\ \mathcal{RC}})$ olduğundan

$$\mu_{1\ \mathcal{RC}} = \mu_{1'\ \mathcal{RC}} \text{ ve } \mu_{2\ \mathcal{RC}} = \mu_{2'\ \mathcal{RC}}$$

dir. Buradan,

$$\mu_{1\ \mathcal{RC}}(A,B) = r_{1\ \mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{1\ \mathbb{C}}(A,B)} \text{ ve } \mu_{1'\ \mathcal{RC}} = r_{1'\ \mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{1'\ \mathbb{C}}(A,B)}$$

olur. $r_{1\ \mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{1\ \mathbb{C}}(A,B)} = r_{1'\ \mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{1'\ \mathbb{C}}(A,B)}$ eşitliği elde edilir. Kolayca görülebilir ki, $r_{1\ \mathbb{C}}(A,B) = r_{1'\ \mathbb{C}}(A,B)$ ve $e^{iw_{1\ \mathbb{C}}(A,B)} = e^{iw_{1'\ \mathbb{C}}(A,B)}$ dir. Benzer şekilde,

$$\mu_{2\ \mathcal{RC}}(A,B) = r_{2\ \mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{2\ \mathbb{C}}(A,B)} \text{ ve } \mu_{2'\ \mathcal{RC}}(A,B) = r_{2'\ \mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{2'\ \mathbb{C}}(A,B)}$$

olarak alınırsa, $r_{2\ \mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{2\ \mathbb{C}}(A,B)} = r_{2'\ \mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{2'\ \mathbb{C}}(A,B)}$ elde edilir. Böylece, $r_{2\ \mathbb{C}}(A,B) = r_{2'\ \mathbb{C}}(A,B)$ ve $e^{iw_{2\ \mathbb{C}}(A,B)} = e^{iw_{2'\ \mathbb{C}}(A,B)}$ olduğu kolayca görülür.
Her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için,

$$\begin{aligned}
(\mu_{1\mathcal{RC}} \oplus \mu_{2\mathcal{RC}})(A,B) &= \max(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{2\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\max(w_{1\mathbb{C}}(A,B), w_{2\mathbb{C}}(A,B))} \\
&= \max(r_{1'\mathbb{C}}(A,B), r_{2'\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\max(w_{1'\mathbb{C}}(A,B), w_{2'\mathbb{C}}(A,B))} \\
&= (\mu_{1'\mathbb{C}} \oplus \mu_{2'\mathbb{C}})(A,B)
\end{aligned}$$

dir. Böylece, her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için

$$(\mu_{1\ \mathcal{RC}} \oplus \mu_{2\ \mathcal{RC}})\ (A,B) = (\mu_{1'\mathcal{RC}} \oplus \mu_{2'\ \mathcal{RC}}\ )(A,B)$$

eşitliği elde edilir. □

Teorem 3.2.3. $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_\mathbb{C}}(X)$ *tüm kompleks fuzzy proksimiti bağıntıların ailesi olsun. Kompleks fuzzy proksimiti bağıntısının birleşim işlemi,* $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_\mathbb{C}}(X)$ *üzerinde birleşme özelliğine sahiptir. Yani;*

$$(\mu_{1\mathcal{RC}} \oplus \mu_{2\mathcal{RC}}) \oplus \mu_{3\mathcal{RC}} = \mu_{1\mathcal{RC}} \oplus (\mu_{2\mathcal{RC}} \oplus \mu_{3\mathcal{RC}})$$

dır.

İspat. Her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için,

$$((\mu_{1\mathcal{RC}} \oplus \mu_{2\mathcal{RC}}) \oplus \mu_{3\mathcal{RC}})(A,B) = (\mu_{1\mathcal{RC}} \oplus (\mu_{2\mathcal{RC}} \oplus \mu_{3\mathcal{RC}}))(A,B)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) &= \max(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{2\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\max(w_{1\mathbb{C}}(A,B),w_{2\mathbb{C}}(A,B))}\\ &= r_{\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{\mathbb{C}}(A,B)}\end{aligned}$$

ve

$$\mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}}(A,B) = r_{3\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{3\mathbb{C}}(A,B)}$$

olarak alalım. Diğer taraftan,

$$\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} = r_{1\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{1\mathbb{C}}(A,B)}$$

ve

$$\begin{aligned}(\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) &= \max(r_{2\mathbb{C}}(A,B), r_{3\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\max(w_{2\mathbb{C}}(A,B),w_{3\mathbb{C}}(A,B))}\\ &= r'_{\mathbb{C}}(A,B).e^{iw'_{\mathbb{C}}(A,B)}\end{aligned}$$

olur. Buradan,

$$((\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}) \oplus \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) = \max(r_{\mathbb{C}}(A,B), r_{3\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\max(w_{\mathbb{C}}(A,B),w_{3\mathbb{C}}(A,B))}$$

ve

$$(\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus (\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B) = \max(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r'_{\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\max(w_{1\mathbb{C}}(A,B),w'_{\mathbb{C}}(A,B))}$$

elde edilir.

$r_{1\mathbb{C}}(A,B)$, $r_{2\mathbb{C}}(A,B)$, $r_{3\mathbb{C}}(A,B)$, $w_{1\mathbb{C}}(A,B), w_{2\,\mathbb{C}}(A,B)$ ve $w_{3\mathbb{C}}(A,B)$ değerlerini ele alalım ve birbirleriyle karşılaştırmalar yapalım. Örneğin;

1) $r_{1\mathbb{C}}(A,B) > r_{2\mathbb{C}}(A,B) > r_{3\mathbb{C}}(A,B)$ ve $w_{2\mathbb{C}}(A,B) > w_{3\mathbb{C}}(A,B) > w_{1\,\mathbb{C}}(A,B)$ olsun. Bu durumda,

$((\mu_{1\,\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2\,\mathcal{R}\mathbb{C}}) \oplus \mu_{3\,\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B)$ ve $(\mu_{1\,\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus (\mu_{2\,\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{3\,\mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B)$ nin değerleri sırasıyla;

$$\begin{aligned}((\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}) \oplus \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) &= \max(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{3\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\max(w_{2\mathbb{C}}(A,B),w_{3\mathbb{C}}(A,B))}\\ &= r_{1\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{2\mathbb{C}}(A,B)}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus (\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B) &= \max(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{2\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\max(w_{1\mathbb{C}}(A,B),w_{2\mathbb{C}}(A,B))}\\ &= r_{1\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{2\mathbb{C}}(A,B)}\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla,

$$((\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}}) \oplus \mu_{3\ \mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) = (\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus (\mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{3\ \mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B)$$

elde edilir.

2) $r_{2\mathbb{C}}(A,B) > r_{1\mathbb{C}}(A,B) > r_{3\mathbb{C}}(A,B)$ ve $w_{2\mathbb{C}}(A,B) > w_{1\mathbb{C}}(A,B) > w_{3\ \mathbb{C}}(A,B)$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned} ((\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}) \oplus \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) &= \max(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{2\ \mathbb{C}}(A,B)).e^{i\max(w_{2\mathbb{C}}(A,B),w_{3\mathbb{C}}(A,B))} \\ &= r_{2\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{2\mathbb{C}}(A,B)} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus (\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B) &= \max(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{2\ \mathbb{C}}(A,B)).e^{i\max(w_{1\mathbb{C}}(A,B),w_{2\mathbb{C}}(A,B))} \\ &= r_{2\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{2\mathbb{C}}(A,B)} \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde,

$$((\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}}) \oplus \mu_{3\ \mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) = (\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus (\mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{3\ \mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B)$$

olur.

3) $r_{3\mathbb{C}}(A,B) > r_{1\mathbb{C}}(A,B) > r_{2\mathbb{C}}(A,B)$ ve $w_{1\mathbb{C}}(A,B) > w_{3\mathbb{C}}(A,B) > w_{2\ \mathbb{C}}(A,B)$ olarak alınırsa;

$$\begin{aligned} ((\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}) \oplus \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) &= \max(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{3\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\max(w_{1\mathbb{C}}(A,B),w_{3\mathbb{C}}(A,B))} \\ &= r_{3\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{1\mathbb{C}}(A,B)} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} (\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus (\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B) &= \max(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{3\ \mathbb{C}}(A,B)).e^{i\max(w_{1\mathbb{C}}(A,B),w_{3\mathbb{C}}(A,B))} \\ &= r_{3\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{1\mathbb{C}}(A,B)} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$((\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}}) \oplus \mu_{3\ \mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) = (\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus (\mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \oplus \mu_{3\ \mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B)$$

dir. Benzer yöntemle devam edilerek diğer durumlara da bakıldığında görülecektir ki kompleks fuzzy proksimiti bağıntısı, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(X)$ üzerinde birleşme özelliğine sahiptir. □

Teorem 3.2.2 ve Teorem 3.2.3 dikkate alınırsa; $(\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(X), \oplus)$ bir yarı gruptur.

Aşağıdaki örnekte bir monoid örneği vardır. Fakat, her zaman bir birim eleman bulunamayabilir.

Örnek 3.2.5. *$X = \{a, b\}$ kümesini ve (X, δ) proksimiti uzayını alalım. δ, temel proksimiti bağıntısı aşağıdaki şekilde tanımlansın:*

$$A\delta B :\Leftrightarrow A \cap B \neq \emptyset.$$

Bu durumda, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset, \{a, b\}, \{a\}, \{b\}\}$ olduğu açıktır. Kompleks fuzzy proksimiti bağıntıları aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\begin{array}{lll} \mu_{1\delta_{\mathbb{C}}}: & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) & \longrightarrow e^{i\theta} \\ & (A, B) & \longmapsto \mu_{1\delta_{\mathbb{C}}}(A, B) = r_{1\mathbb{C}}(A, B).e^{iw_{1\mathbb{C}}(A,B)} \end{array}$$

$$\mu_{1\delta_{\mathbb{C}}}(A, B) = \begin{cases} r_{1\mathbb{C}}(A, B) = \frac{|A\cap B|}{|A\cup B|} & , w_{1\mathbb{C}}(A, B) = e^{|A\cap B|\pi} & , A \neq B \\ 1 & , w_{1\mathbb{C}}(A, B) = 0 & , A = B \end{cases}$$

$$\begin{array}{lll} \mu_{2\delta_{\mathbb{C}}}: & \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) & \longrightarrow e^{i\theta} \\ & (A, B) & \longmapsto \mu_{2\delta_{\mathbb{C}}}(A, B) = r_{2\mathbb{C}}(A, B).e^{iw_{2\mathbb{C}}(A,B)} \end{array}$$

$$\mu_{2\delta_{\mathbb{C}}}(A, B) = \begin{cases} r_{2\mathbb{C}}(A, B) = \frac{|A\cap B|}{|A\cup B|} & , w_{2\mathbb{C}}(A, B) = e^{|A\cup B|\pi} & , A \neq B \\ 1 & , w_{2\mathbb{C}}(A, B) = 0 & , A = B \end{cases}$$

Bu durumda, bağıntıların matrisleri aşağıdaki biçimdedir:

$$\delta_{\mu_{1\mathbb{C}}} = \begin{array}{c} \\ \emptyset \\ \{a,b\} \\ \{a\} \\ \{b\} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \emptyset & \{a,b\} & \{a\} & \{b\} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5.e^{\pi} & 0,5.e^{\pi} \\ 0 & 0,5.e^{\pi} & 1 & 0 \\ 0 & 0,5.e^{\pi} & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

ve

$$\delta_{\mu_{2\mathbb{C}}} = \begin{array}{c} \\ \emptyset \\ \{a,b\} \\ \{a\} \\ \{b\} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \emptyset & \{a,b\} & \{a\} & \{b\} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0,5.e^{2\pi} & 0,5.e^{2\pi} \\ 0 & 0,5.e^{2\pi} & 1 & 0 \\ 0 & 0,5.e^{2\pi} & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}$$

Ayrıca, kompleks fuzzy proksimiti bağıntısının birim elemanını aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\begin{array}{lll} \mu_{e\delta_{\mathbb{C}}}: & \mathcal{P}(X)\times\mathcal{P}(X) & \longrightarrow e^{i\theta} \\ & (A,B) & \longmapsto \mu_{e\delta_{\mathbb{C}}}(A,B) = r_{e\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{e\mathbb{C}}(A,B)} \end{array}$$

$$\mu_{e\delta_{\mathbb{C}}}(A,B) = \begin{cases} 0 & , w_{e\mathbb{C}}(A,B)=0 \quad , A \neq B \\ r_{e\mathbb{C}}(A,B)=1 & , w_{e\mathbb{C}}(A,B)=0 \quad , A = B \end{cases}$$

Bu durumda bağıntı matrisi aşağıdaki biçimdedir:

$$\delta_{\mu_{e\mathbb{C}}} = \begin{array}{c} \\ \emptyset \\ \{a,b\} \\ \{a\} \\ \{b\} \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} \emptyset & \{a,b\} & \{a\} & \{b\} \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array}.$$

Dolayısıyla $S = \{\mu_{1\delta_{\mathbb{C}}},\mu_{2\delta_{\mathbb{C}}},\mu_{e\delta_{\mathbb{C}}}\} \subset \mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$, aşağıdaki "$\oplus$" işlem tablosu ile proksimal relator uzayında bir değişmeli kompleks fuzzy proksimiti monoiddir.

$\oplus$	$\mu_{e\delta_{\mathbb{C}}}$	$\mu_{1\delta_{\mathbb{C}}}$	$\mu_{2\delta_{\mathbb{C}}}$
$\mu_{e\delta_{\mathbb{C}}}$	$\mu_{e\delta_{\mathbb{C}}}$	$\mu_{1\delta_{\mathbb{C}}}$	$\mu_{2\delta_{\mathbb{C}}}$
$\mu_{1\delta_{\mathbb{C}}}$	$\mu_{1\delta_{\mathbb{C}}}$	$\mu_{1\delta_{\mathbb{C}}}$	$\mu_{2\delta_{\mathbb{C}}}$
$\mu_{2\delta_{\mathbb{C}}}$	$\mu_{2\delta_{\mathbb{C}}}$	$\mu_{2\delta_{\mathbb{C}}}$	$\mu_{2\delta_{\mathbb{C}}}$

Tanım 3.2.10. *$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$, bütün kompleks fuzzy bağıntılarının kümesi ve $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$, $\mathcal{H}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ olsun. Ayrıca $\mathcal{H}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$, $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ yarı grubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. Eğer $\mathcal{H}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$, $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ ile aynı işlem altında kapalı olma özelliğini sağlarsa, bu durumda $\mathcal{H}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ ye $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ yarı grubunun proksimal relator uzayında bir kompleks fuzzy proksimiti alt yarı grubudur denir.*

Örnek 3.2.6. *Örnek 3.2.5 dan $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}} = \{\mu_{1\delta_{\mathbb{C}}},\mu_{2\delta_{\mathbb{C}}},\mu_{e\delta_{\mathbb{C}}}\}$ kümesini ve $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ nin bir $\mathcal{H}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}} = \{\mu_{1\delta_{\mathbb{C}}},\mu_{e\delta_{\mathbb{C}}}\}$ bir alt kümesini alalım. $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ kompleks fuzzy proksimiti yarı gruptur. Kolayca görülebilir ki $\mathcal{H}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ proksimal relator uzayında $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ nin bir kompleks fuzzy proksimiti alt yarı grubudur.*

Tanım 3.2.11. *$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$, bütün kompleks fuzzy bağıntılarının kümesi ve $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}, \mathcal{I}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ olsun. Ayrıca $\mathcal{I}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$, $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ yarı grubunun boş kümeden farklı bir alt kümesi olsun. $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}} \oplus \mathcal{I}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}} \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ ($\mathcal{I}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}} \oplus \mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}} \subseteq \mathcal{I}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$) koşulunu sağlarsa, bu durumda $\mathcal{I}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ ye $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ alt yarı grubunun proksimal relator uzayında bir sol(sağ) kompleks fuzzy proksimiti ideali denir. $\mathcal{I}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ hem sağ hem de sol kompleks fuzzy proksimiti ideali ise $\mathcal{I}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ ye $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ alt yarı grubunun proksimal relator uzayında bir iki yanlı kompleks fuzzy proksimiti ideali denir.*

Örnek 3.2.7. *Örnek 3.2.5 den $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}= \{\mu_{1\delta_{\mathbb{C}}},\mu_{2\delta_{\mathbb{C}}},\mu_{e\delta_{\mathbb{C}}}\}$ kümesini ve $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ nin bir $\mathcal{I}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}} = \{\mu_{2\delta_{\mathbb{C}}}, \mu_{e\delta_{\mathbb{C}}}\}$ bir alt kümesini alalım. $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ kompleks fuzzy proksimiti yarı gruptur. Kolayca görülebilir ki $\mathcal{I}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ proksimal relator uzayında $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ nin bir kompleks fuzzy proksimiti idealidir.*

Tanım 3.2.12. *$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$, bütün kompleks fuzzy bağıntılarının kümesi ve $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}} \in \mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ olsun. $\mu_{i\delta_{\mathbb{C}}} \in \mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ elemanı $\mu_{i\delta_{\mathbb{C}}} \oplus \mu_{i\delta_{\mathbb{C}}} = \mu_{i\delta_{\mathbb{C}}}$ koşulunu sağlarsa, bu durumda $\mu_{i\delta_{\mathbb{C}}}$ elemanına $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ alt yarı grubunun proksimal relator uzayında bir idempotent kompleks fuzzy proksimiti elemanı denir.*

Örnek 3.2.8. *Örnek 3.2.7 den $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}} = \{\mu_{1\delta_{\mathbb{C}}}, \mu_{2\delta_{\mathbb{C}}}, \mu_{e\delta_{\mathbb{C}}}\}$ kompleks fuzzy proksimiti yarı grubunu alalım. Kolayca görülebilir ki $\mathcal{S}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}$ nin her bir elemanı proksimal relator uzayında kompleks fuzzy idempotenttir.*

Tanım 3.2.13. *$(X, \mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}})$ ve $(Y, \mathcal{R}_{\mu_{\mathbb{C}}})$ birer kompleks fuzzy proksimal relator uzay olsun.*

$$\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} : \ \mathcal{P}(X) \times \mathcal{P}(X) \ \longrightarrow e^{i\theta}$$

ve

$$\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}} : \ \mathcal{P}(Y) \times \mathcal{P}(Y) \ \longrightarrow e^{i\theta}$$

kompleks fuzzy proksimiti bağıntılarının üyelik fonksiyonları sırasıyla; $\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}(A, B) = r_{1\mathbb{C}}(A, B).e^{iw_{1\mathbb{C}}(A,B)}$ ve $\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}(A, B) = r_{2\mathbb{C}}(A, B).e^{iw_{2\mathbb{C}}(A,B)}$ biçimindedir.

$\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}$ ve $\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}$ nin kompleks fuzzy proksimiti kesişimleri,

$$\begin{aligned}\mu_{\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}\otimes\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}}(A,B) &= r_{\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}\otimes\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}}(A,B).e^{iw_{\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}\otimes\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}}(A,B)} \\ &= min(r_{\mu_{1\mathbb{C}}}(A,B), r_{\mu_{2\mathbb{C}}}(A,B)).e^{imin(w_{\mu_{1\mathbb{C}}}(A,B),w_{\mu_{2\mathbb{C}}}(A,B))}\end{aligned}$$

biçiminde gösterilir.

Örnek 3.2.9. $\delta_{\mu_1\mathbb{C}}$ *ve* $\delta_{\mu_2\mathbb{C}}$ *birer fuzzy proksimiti bağıntısı olsun:*

$$\delta_{\mu_1\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0,3.e^{i2\pi} & 0,2.e^{i4\pi} & 0,1.e^{i2\pi} \\ 0,3.e^{i2\pi} & 1 & 0,5.e^{i\pi} & 0,7.e^{i3\pi} \\ 0,2.e^{i4\pi} & 0,5.e^{i\pi} & 1 & 0,4.e^{i4\pi} \\ 0,1.e^{i2\pi} & 0,7.e^{i3\pi} & 0,4.e^{i4\pi} & 1 \end{bmatrix}$$

ve

$$\delta_{\mu_2\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0,5.e^{i\pi} & 0,3.e^{i4\pi} & 0,11.e^{i2\pi} \\ 0,5.e^{i\pi} & 1 & 0,23.e^{i3\pi} & 0,47.e^{i3\pi} \\ 0,3.e^{i4\pi} & 0,23.e^{i3\pi} & 1 & 0,25.e^{i5\pi} \\ 0,11.e^{i2\pi} & 0,47.e^{i3\pi} & 0,25.e^{i5\pi} & 1 \end{bmatrix}$$

$\delta_{\mu_1\mathbb{C}}$ *ve* $\delta_{\mu_2\mathbb{C}}$ *nin kesişimlerini bulalım;*

$$\delta_{\mu_1\mathbb{C}\otimes\mu_2\mathbb{C}} = \begin{bmatrix} 1 & 0,3.e^{i\pi} & 0,2.e^{i4\pi} & 0,1.e^{i2\pi} \\ 0,3.e^{i\pi} & 1 & 0,23.e^{i\pi} & 0,47.e^{i3\pi} \\ 0,2.e^{i4\pi} & 0,23.e^{i\pi} & 1 & 0,25.e^{i5\pi} \\ 0,1.e^{i2\pi} & 0,47.e^{i3\pi} & 0,25.e^{i5\pi} & 1 \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.4. $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_\mathbb{C}}(X)$ *tüm kompleks fuzzy proksimiti bağıntıların ailesi olsun.* $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_\mathbb{C}}(X)$*, "⊗" işlemi ile grupoiddir.*

İspat.

$$\begin{aligned}\otimes\ :\ \mathcal{P}\mu_{\mathcal{R}}(X) \times \mathcal{P}\mu_{\mathcal{R}}(X) &\longrightarrow \mathcal{P}\mu_{\mathcal{R}}(X) \\ (\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}, \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}) &\longmapsto \mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) &= \mu_{\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}\otimes\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}}(A,B) \\ &= \min(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{2\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\min(w_{1\mathbb{C}}(A,B),w_{2\mathbb{C}}(A,B))}\end{aligned}$$

$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(X)$ nin "$\otimes$" işlemi ile grupoid olduğunu göstermek için;
$(\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}}, \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}) = (\mu_{1'\mathcal{R}\mathbb{C}}, \mu_{2'\ \mathcal{R}\mathbb{C}})$ olduğunda, $\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}}, \mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}}, \mu_{1'\mathcal{R}\mathbb{C}}, \mu_{2'\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \in \mathcal{P}\mu_{\mathcal{R}}(X)$ için $\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}} = \mu_{1'\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2'\ \mathcal{R}\mathbb{C}}$ olduğunu göstermek gerekir. Bu durumda her bir $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için,

$$(\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}})(A, B) = (\mu_{1'\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2'\ \mathcal{R}\mathbb{C}})(A, B)$$

eşitliğini göstermemiz gerekir. $(\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}}, \mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}}) = (\mu_{1'\mathcal{R}\mathbb{C}}, \mu_{2'\ \mathcal{R}\mathbb{C}})$ olduğundan

$$\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} = \mu_{1'\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \text{ ve } \mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}} = \mu_{2'\ \mathcal{R}\mathbb{C}}$$

dir. Buradan,

$$\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}}(A, B) = r_{1\ \mathbb{C}}(A, B).e^{iw_{1\ \mathbb{C}}(A,B)} \text{ ve } \mu_{1'\ \mathcal{R}\mathbb{C}} = r_{1'\ \mathbb{C}}(A, B).e^{iw_{1'\ \mathbb{C}}(A,B)}$$

olur. $r_{1\ \mathbb{C}}(A, B).e^{iw_{1\ \mathbb{C}}(A,B)} = r_{1'\ \mathbb{C}}(A, B).e^{iw_{1'\ \mathbb{C}}(A,B)}$ elde edilir. Kolayca görülebilir ki, $r_{1\ \mathbb{C}}(A, B) = r_{1'\ \mathbb{C}}(A, B)$ ve $e^{iw_{1\ \mathbb{C}}(A,B)} = e^{iw_{1'\ \mathbb{C}}(A,B)}$ olur. Benzer şekilde,

$$\mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}}(A, B) = r_{2\ \mathbb{C}}(A, B).e^{iw_{2\ \mathbb{C}}(A,B)} \text{ ve } \mu_{2'\ \mathcal{R}\mathbb{C}}(A, B) = r_{2'\ \mathbb{C}}(A, B).e^{iw_{2'\ \mathbb{C}}(A,B)}$$

olarak alalım. $r_{2\ \mathbb{C}}(A, B).e^{iw_{2\ \mathbb{C}}(A,B)} = r_{2'\ \mathbb{C}}(A, B).e^{iw_{2'\ \mathbb{C}}(A,B)}$ elde edilir. Böylece, $r_{2\ \mathbb{C}}(A, B) = r_{2'\ \mathbb{C}}(A, B)$ ve $e^{iw_{2\ \mathbb{C}}(A,B)} = e^{iw_{2'\ \mathbb{C}}(A,B)}$ olur.
Her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için,

$$\begin{aligned}
(\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}})(A, B) &= \min(r_{1\mathbb{C}}(A, B), r_{2\mathbb{C}}(A, B)).e^{i\min(w_{1\mathbb{C}}(A,B), w_{2\mathbb{C}}(A,B))} \\
&= \min(r_{1'\mathbb{C}}(A, B), r_{2\ '\mathbb{C}}(A, B)).e^{i\min(w_{1'\mathbb{C}}(A,B), w_{2'\mathbb{C}}(A,B))} \\
&= (\mu_{1'\mathbb{C}} \otimes \mu_{2'\mathbb{C}})(A, B)
\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla, her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için

$$(\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}})\ (A, B) = (\mu_{1'\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2'\ \mathcal{R}\mathbb{C}}\ )(A, B)$$

eşitliği elde edilir. □

Teorem 3.2.5. *$\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(X)$ tüm kompleks fuzzy proksimiti bağıntıların ailesi olsun. Kompleks fuzzy proksimiti bağıntısının kesişim işlemi, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(X)$ üzerinde birleşme özelliğine sahiptir. Yani;*

$$(\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}})\ \otimes \mu_{3\ \mathcal{R}\mathbb{C}} = \mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes (\mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}}\ \otimes \mu_{3\ \mathcal{R}\mathbb{C}})$$

dır.

İspat. Her $A, B \in \mathcal{P}(X)$ için,

$$((\mu_{1\,\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\,\mathcal{R}\mathbb{C}}) \otimes \mu_{3\,\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) = (\mu_{1\,\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes (\mu_{2\,\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{3\,\mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B)$$

olduğunu gösterelim.

$$\begin{aligned}(\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) &= \min(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{2\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\min(w_{1\mathbb{C}}(A,B),w_{2\mathbb{C}}(A,B))} \\ &= r_{\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{\mathbb{C}}(A,B)}\end{aligned}$$

ve

$$\mu_{3\,\mathcal{R}\mathbb{C}}(A,B) = r_{3\,\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{3\,\mathbb{C}}(A,B)}$$

olarak alalım. Diğer taraftan,

$$\mu_{1\,\mathcal{R}\mathbb{C}} = r_{1\,\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{1\,\mathbb{C}}(A,B)}$$

ve

$$\begin{aligned}(\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) &= \min(r_{2\mathbb{C}}(A,B), r_{3\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\min(w_{2\mathbb{C}}(A,B),w_{3\mathbb{C}}(A,B))} \\ &= r'_{\mathbb{C}}(A,B).e^{iw'_{\mathbb{C}}(A,B)}\end{aligned}$$

olsun. Buradan,

$$((\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}) \otimes \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) = \min(r_{\mathbb{C}}(A,B), r_{3\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\min(w_{\mathbb{C}}(A,B),w_{3\mathbb{C}}(A,B))}$$

ve

$$(\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes (\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B) = \min(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r'_{\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\min(w_{1\mathbb{C}}(A,B),w'_{\mathbb{C}}(A,B))}$$

elde edilir.

$r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{2\mathbb{C}}(A,B), r_{3\mathbb{C}}(A,B)$, $w_{1\mathbb{C}}(A,B), w_{2\mathbb{C}}(A,B)$ ve $w_{3\mathbb{C}}(A,B)$ değerlerini ele alalım ve birbirleriyle karşılaştırmalar yapalım. Örneğin;

1) $r_{3\mathbb{C}}(A,B) > r_{2\mathbb{C}}(A,B) > r_{1\mathbb{C}}(A,B)$ ve $w_{3\mathbb{C}}(A,B) > w_{1\mathbb{C}}(A,B) > w_{2\mathbb{C}}(A,B)$ olsun. Bu durumda,

$((\mu_{1\,\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\,\mathcal{R}\mathbb{C}}) \otimes \mu_{3\,\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B)$ ve $(\mu_{1\,\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes (\mu_{2\,\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{3\,\mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B)$ nin değerleri sırasıyla;

$$\begin{aligned}((\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}) \otimes \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) &= \min(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{3\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\min(w_{2\mathbb{C}}(A,B),w_{3\mathbb{C}}(A,B))} \\ &= r_{1\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{2\mathbb{C}}(A,B)}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes (\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B) &= \min(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{3\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\min(w_{2\mathbb{C}}(A,B), w_{3\mathbb{C}}(A,B))} \\ &= r_{1\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{2\mathbb{C}}(A,B)}\end{aligned}$$

dir. Dolayısıyla,

$$((\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}}) \otimes \mu_{3\ \mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) = (\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes (\mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{3\ \mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B)$$

elde edilir.

2) $r_{2\mathbb{C}}(A,B) > r_{3\mathbb{C}}(A,B) > r_{1\mathbb{C}}(A,B)$ ve $w_{2\mathbb{C}}(A,B) > w_{1\mathbb{C}}(A,B) > w_{3\mathbb{C}}(A,B)$ olsun. Buradan,

$$\begin{aligned}((\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}) \otimes \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) &= \min(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{3\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\min(w_{1\mathbb{C}}(A,B), w_{3\mathbb{C}}(A,B))} \\ &= r_{1\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{3\mathbb{C}}(A,B)}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes (\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B) &= \min(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{3\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\min(w_{1\mathbb{C}}(A,B), w_{3\mathbb{C}}(A,B))} \\ &= r_{1\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{3\mathbb{C}}(A,B)}\end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde,

$$((\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}}) \otimes \mu_{3\ \mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) = (\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes (\mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{3\ \mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B)$$

olur.

3) $r_{1\mathbb{C}}(A,B) > r_{3\mathbb{C}}(A,B) > r_{2\mathbb{C}}(A,B)$ ve $w_{3\mathbb{C}}(A,B) > w_{2\mathbb{C}}(A,B) > w_{1\mathbb{C}}(A,B)$ olsun. olarak alınırsa;

$$\begin{aligned}((\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}}) \otimes \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) &= \min(r_{2\mathbb{C}}(A,B), r_{3\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\min(w_{1\mathbb{C}}(A,B), w_{3\mathbb{C}}(A,B))} \\ &= r_{2\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{1\mathbb{C}}(A,B)}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}(\mu_{1\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes (\mu_{2\mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{3\mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B) &= \min(r_{1\mathbb{C}}(A,B), r_{2\mathbb{C}}(A,B)).e^{i\min(w_{1\mathbb{C}}(A,B), w_{2\mathbb{C}}(A,B))} \\ &= r_{2\mathbb{C}}(A,B).e^{iw_{1\mathbb{C}}(A,B)}\end{aligned}$$

Böylece,

$$((\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}}) \otimes \mu_{3\ \mathcal{R}\mathbb{C}})(A,B) = (\mu_{1\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes (\mu_{2\ \mathcal{R}\mathbb{C}} \otimes \mu_{3\ \mathcal{R}\mathbb{C}}))(A,B)$$

dir.

Benzer yöntemle devam edilerek diğer durumlara da bakıldığında görülecektir ki kompleks fuzzy proksimiti bağıntısı, $\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(X)$ üzerinde birleşme özelliğine sahiptir. □

Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.5 dikkate alınırsa; $(\mathcal{P}_{\mathcal{R}_{\mathbb{C}}}(X), \otimes)$ bir yarı gruptur.

KAYNAKLAR

[1] L. A. Zadeh, Fuzzy Sets, **Inf. Control**, 8 (1965) 338-353.

[2] J. A. Goguen, L-fuzzy sets, **J. Math. Anal. Appl.**, 18 (1967) 145-174.

[3] J. J. Buckley, Fuzzy Complex Numbers, in Proceedings of ISFK, Guangzhou, China, (1987), 597-700.

[4] J. J. Buckley, Fuzzy Complex Numbers, **Fuzzy Sets Syst.**, 33:3 (1989), 333-345.

[5] J. J. Buckley, Y. Qu, Fuzzy complex analysis I: differentiation, **Fuzzy Sets Syst.** 41 (3) (1991) 269284.

[6] J. J. Buckley, Fuzzy Complex Analysis II: Integrations, **Fuzzy Sets Syst.**, 49:2 (1992), 171-179.

[7] D. Ramot, R. Milo, M. Friedman and A. Kandel, Complex Fuzzy Sets, **IEEE Trans. Fuzzy Syst.**, 10:2 (2002), 171-186.

[8] D. Ramot, R. Milo, G. Langholz and A. Kandel, Complex Fuzzy Logic, **IEEE Trans. Fuzzy Syst.**, 11:4 (2003), 450-461.

[9] F. Riesz, *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre*, Atti del IV Congresso Internazionale dei Matematici, **II**, (1908), 109-182.

[10] V. A. Efremoviĉ, The geometry of Proximity.I., **Mat. Sbornik N. S.** 31:73 (1952), 189-200.

[11] S.B. Krishna Murti, A set of axioms for topological algebra, **J. Indian Math. Soc., New Ser.** 4, (1940), 116-119.

[12] A.D. Wallace, Separation Spaces, **Ann. of Math.** 42, (1941), 687-697.

[13] A.D. Wallace, Separation Spaces II , **Anais Acad. Brasil. Ci.**, 14, (1942), 203-206.

[14] P. Szymanski, La notion des ensembles separes comme terme primitif de la topologie, **An. Univ. Vest Timi., Ser. Mat.-Inform.**, 17, (1941), 65-84.

[15] S. Leader, On products of proximity spaces, **Math. Ann.**, 154, (1964), 185-194.

[16] W. J. Perwin, Quasi-proximities for topological spaces, **Math. Ann.**, 150, (1963), 325-326.

[17] M. W. Lodato, On topologically induced generalized proximity relations, I, **Proc. Am. Math. Soc**, 15 (1964) 417-422.

[18] J. F. Peters, E. İnan and M. A. Öztürk, Spatial and descriptive isometries in proximity spaces, **Gen. Math. Notes**, 21:2 (2014) 125-134.

[19] S. A. Naimpally and B. D. Warrack, Proximity Spaces, Cambridge Tract, UK 1970.

[20] J. F. Peters, Local near sets: Pattern discovery in proximity spaces, **Math. Comput. Sci.** 7:1 (2013), 87106.

[21] J. F. Peters, R. Hettiarachchi, Visual motif patterns in separation spaces, **Theory Appl. Math. Comput. Sci.** 3:2 (2013), 3658.

[22] S. A. Naimpally and J. F. Peters, Topology with Applications. Topological Spaces via Near and Far. World Scientific, Sinapore (2013).

[23] J. F. Peters, Near Sets: An Introduction, **Math. Comput. Sci.**,7:1 (2013), 3-9.

[24] A. K. Katsaras, Fuzzy Proximity Spaces, **J. Math. Anal. Appl.**, 68 (1979) 100-110.

[25] G. Artico and R. Moresco, Fuzzy Proximities and Totally Bounded Fuzzy Uniformities, **J. Math. Anal. Appl.** 99 (1984) 320-337.

[26] G. Artico and R. Moresco, Fuzzy proximities according with Lowen fuzzy uniformities, **Fuzzy Sets Syst.**, 21 (1987) 85-98.

[27] E. Ĉech, Topological Spaces, revised Ed. by Z.Frolik and M. Katêtov. John Wiley and Sons, London (1996), 893pp.

[28] M. W. Lodato. On topologically induced generalized proximity relations, Ph.D. thesis, Rutgers University USA 1962.

[29] S. Leader, On clusters in proximity Spaces, **Fundam. Math.**, 47 (1959) 205-213.

[30] J. M. Smirnov, On Proximity Spaces, **Sb. Math.** (N.S.) 31, 73 (1964) 543-574. English translation: **Amer. Math. Soc. Trans. Ser.** 2, 38, 5-35.

[31] J. F. Peters, Computational Proximity, Springer, 2016.

[32] J. F. Peters, Near sets. General theory about nearness of objects, **Appl. Math. Sci.**, 1:53-56 (2007) 2609-2629.

[33] C. Henry and G. Smith, Proximity System, University of Manitoba Computational Intelligence Laboratory Technical Report, TR-2012-021.

[34] J. F. Peters and S.A. Naimpally, Application of near sets, **Notices Am. Math. Soc.**, 59:4 (2012) 536-542.

[35] À. Szás, Basic Tools and Mild Continuties in Relator Spaces, **Acta Math. Hung.** 50 (1987) 177-201.

[36] J. F. Peters, Proximal Relator Spaces, **Filomat**, 30:2 (2016) 469-472.

[37] D.Didier and H.Prade, Fuzzy Sets and Systems: Theory and Applications . Academic Pres, New York, 1980.

[38] Majid Hussain. "Fuzzy Relations", Master Thesis, Blekinge Institute of Technology School of Engineering Sweden, 2010.

[39] G. Birkhoff, Lattice Theory, American Mathematical Society, RhodeIsland 1967.

[40] A. Kaufmann, Introduction to the Theory of Fuzzy Subsets Vol (1), Academic Pr., New York, (1975).

[41] M. W. Lodato, On topologically induced generalized proximity relations II, **Pac. J. Math.**, 17 (1966) 131-135.

[42] J. F. Peters, Topology of Digital Images. Visual Pattern Discovery in Proximity Spaces, Intelligent Systems Reference Library, (63) Springer, xv + 411pp. 2014.

[43] A.K. Katsaras, Fuzzy Proximity Spaces, **J. Math. Anal. Appl.** 75, (1980) 571-583.

[44] À. Szás and A. Zakaria, Mild Continuity Properties of Relations and Relators in Relator Spaces, **Essays in Math. and its Appl.**, 439-511 (2016).

[45] B. A. Davey and H. A. Priestly, Introduction to Lattices and Order, Cambridge University Press, UK 1990.

[46] C.L. Chang, Fuzzy topological spaces, **J. Math. Anal. Appl**, 24, (1968), 182-190.

[47] I. Dochviri and J.F. Peters, Topological Sorting of finitely many near sets, **Math. Comput. Sci.**,10 (2016), 273-277.

[48] L. A. Zadeh, Similarity relations and fuzzy orderings, **Inf. Sci.**, 3 (1971), 177-200.

[49] L. A. Zadeh, Outline of a new approach to the analysis of complex systems and decision process, **IEEE Trans. Fuzzy Syst.**, Man. and Cybern. SMC-3, (1973).

[50] M. El-Darderya and J. Zhang, On L-fuzzy proximity spaces, **Int. J. Hybrid Intell. Syst.**, 11:2 (2014) 137-144.

[51] M. Kovar, A new causal topology and why the universe is co-compact, arXive:1112.0817[math-ph]1-15arXiv:1112.0817.

[52] N. Murthy and P. Prasad, Representation of L-fuzzy relations via a galois connection, **Tamkang J. Math.**, 40:3 (2009) 287-305.

[53] X. Fu, Q and Shen, A Novel Framework of Complex Fuzzy Numbers and Its Application to Computational Modelling, FUZZ-IEEE, Korea, August 20-24, (2009).

[54] Z. Guangquan, T. S. Dillon, K.C.J. Ma and J. Lu, δ-*Equalities of Complex Fuzzy Relations*, 24. IEEE International Conference on Advance Information Networking and Application, (2010).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Özlem TEKİN

Doğum Yeri ve Tarihi: Ereğli/ Konya - 27.11.1988

Adres: Adıyaman Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü.

E-Posta: oumdu@adiyaman.edu.tr.

Lisans: Cumhuriyet Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2005 - 2009).

Yüksek Lisans: McMaster University, Algebra and Number Thoery, Matematik Anabilim Dalı (2011 - 2013).

Yayın Listesi:

1)Öztürk, M. A., İnan, E., Tekin, Ö. and Peters, J. F., Fuzzy Proksimal Relator Spaces, **Neural Computing and Applications**, (Elektronik Baskda).

2)Tekin, Ö, Öztürk, M. A. and İnan, E., L-Fuzzy Relations via Proximal Spaces, **Thai Journal of Mathematics**, (Gönderildi).