T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MİNİMAL ALTMANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

Ebru GÖKSU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Ocak 2018

Tezin Başlığı : MİNİMAL ALTMANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

Tezi Hazırlayan : Ebru GÖKSU

Sınav Tarihi : 09.01.2018

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: **Prof.Dr. Bayram ŞAHİN**

Ege Üniversitesi

Prof.Dr. Alper Osman ÖĞRENMİŞ

Fırat Üniversitesi

Prof.Dr. H.Bayram KARADAĞ

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Minimal Altmanifoldların Geometrisi" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ebru GÖKSU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MİNİMAL ALTMANİFOLDLARIN GEOMETRİSİ

Ebru GÖKSU

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

50+iv sayfa

2018

Danışman : Prof.Dr. Bayram ŞAHİN

Bu yüksek lisans tezi beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konunun tarihsel gelişimi ve tezin içeriği özetlenmektedir.

İkinci bölümde topoloji ile birlikte manifoldlar hakkında bazı temel kavramlar verildi.

Üçüncü bölümde birinci varyasyon formülünü bulmaya yönelik yöntemler sunulmaktadır.

Tezin esas kısmını oluşturan dördüncü bölümde ise minimal altmanifoldlar içinde uzay formun Öklidyen ve küre olması halinde karakterizasyonlar elde edilmektedir. Ayrıca bu bölümde üç boyutlu Öklidyen uzayın Helikoid ve Katenoid yüzeylerin birer minimal yüzey örneği olduğu sunulmaktadır.

Son olarak beşinci bölümde, katılık teoremi ile ilgili bazı kesitler tanıtıldıktan sonra katılık teoremi hesaplamaları için yöntemler sunulmaktadır.

ANAHTAR KELİMELER: Birinci varyasyon formülü, Öklidyen uzayın minimal altmanifoldları, Küredeki minimal altmanifoldlar, Helikoid, Katenoid, Katılık teoremi

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

MINIMAL SUBMANIFOLDS GEOMETRY

Ebru GÖKSU

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

50+iv pages

2018

Supervisor : Prof.Dr. Bayram ŞAHİN

This master thesis consists of five chapters. In the first chapter, we survey historical development of the subject and give an outline for the context of this thesis.

In the second chapter, some basic concepts are given about topology and manifolds.

In the third chapter, methods for finding the first variation form are presented.

In the fourth chapter, that constitutes the main part of the thesis, characterizations are obtained if the space form is Euclidean and sphere in the minimal submanifolds. In addition, this section presents a minimal surface example of the Helicoid and Catenoid surfaces of three dimensional Euclidean space.

Finally, in the fifth chapter, some sections on Rigidity theorem are presented, and then methods for Rigidity theorem calculations are presented.

KEYWORDS: The first variational formula, Minimal submanifolds in Euclidean space, Minimal submanifolds in the Sphere, Helicoid, Catenoid, Rigidity theorems

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamı yöneten ve tezin hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Bayram ŞAHİN'e, çalışmalarım sırasında karşılaştığım her türlü güçlüğün üstesinden gelme konusunda bana yol gösteren, bilgi ve görüşlerinden istifade ettiğim çok değerli hocalarım Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR, Yrd. Doç. Dr. Cumali YILDIRIM ve Arş. Grv. Burçin DOĞAN'a ayrıca yüksek lisans sürecinde üzerimde büyük emekleri olduğunu düşündüğüm bölüm başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e ve diğer bölüm hocalarıma ve bilhassa maddi manevi desteklerinden dolayı aileme teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜR iii

İÇİNDEKİLER iv

1. GİRİŞ 1

2. TEMEL KAVRAMLAR 2
2.1. Topolojik ve Diferansiyel Kavramlar 2
2.2. Manifoldlar Üzerinde Temel Kavramlar 5
2.3. Manifoldlar Üzerinde İntegrasyon ve Altmanifoldlar 10

3. BİRİNCİ VARYASYON HESABI 19

4. ÖKLİDYEN UZAYIN VE KÜRENİN MİNİMAL ALTMANİFOLDLARI 24
4.1. Öklidyen Uzayın Minimal Altmanifoldları 24
4.2. Küredeki Minimal Altmanifoldlar 28

5. KATILIK TEOREMİ 37

KAYNAKLAR 49

ÖZGEÇMİŞ 50

1. GİRİŞ

Diferansiyel geometride altmanifoldlar teorisinin en önemli ve aktif çalışma alanlarından biriside minimal altmanifoldlardır. Bu altmanifoldlar pratik bir ihtiyaçtan ortaya çıkmış, ancak teorik alt yapısının zenginliği zamanla anlaşılmıştır. Minimal altmanifoldlar altmanifoldun ortalama eğrilik vektör alanının sıfır olması ile tanımlanır. Ortalama eğrilik vektör alanının sıfır olması varyasyon hesabının bir sonucu olarakda ortaya çıkmaktadır. Bu açıdan bakıldığında minimal alt manifoldlar teorisi hem diferansiyel geometri yönünden, hem de varyasyon hesabı yönünden önemli bir konudur. Diğer taraftan minimal altmanifoldların kompleks gösteriminin olması, konunun çok değişkenli kompleks fonksiyonlar teorisi ile de ilişkisi olduğunu göstermektedir.

Bu tezde minimal altmanifoldlar teorisinin temel kavramları ve teoremleri sunulmakta ve diferansiyel geometri yönünden incelenmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde topolojik ve diferensiyel kavramlar verilmektedir. İkinci bölümde manifoldlar üzerindeki yapılar sunulmaktadır. Üçüncü bölümde manifoldlar üzerindeki integrasyondan kısaca bahsedilmektedir. Ayrıca altmanifoldlar teorisindeki temel kavramlar verilmektedir.

2.1 Topolojik ve Diferansiyel Kavramlar

Tanım 2.1.1. *X bir küme ve τ, X kümesinin altkümelerinin bir ailesi olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (X, τ) ikilisine **topolojik uzay** denir.*

a. $\emptyset \in \tau$ ve $X \in \tau$.

b. τ ailesinin keyfi sayıda birleşimi τ kümesine aittir; $\{A_i\}_{i \in J}$, $A_i \in \tau$ ise $\cup_i A_i \in \tau$.

c. τ ailesinin sonlu sayıda kesişimi τ kümesine aittir; $\{A_i\}_{i \in J}$, J sonlu indis kümesi için, $A_i \in \tau$ ise $\cap_i A_i \in \tau$.

X kümesinin her bir elemanına topolojik uzayın bir noktası ve X kümesinin τ ailesine ait olan altkümelerine topolojik uzayın açıkları adı verilir. $x \in X$ noktasını içeren bir U açık altkümesinin her N üst kümesine x noktasının **komşuluğu** denir. [1]

Tanım 2.1.2. *X boştan farklı bir küme ve $d : X \times X \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y, z \in X$ için*

i. $x \neq y$ için $d(x, y) > 0$,

ii. $d(x, y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

iii. $d(x, y) = d(y, x)$

iv. $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

şartları sağlanıyorsa d fonksiyonuna X üzerinde bir **metrik** denir. [2]

Tanım 2.1.3. *X bir topolojik uzay olmak üzere, X uzayının her farklı x, y elemanları için bu noktaların ayrık birer komşuluğu varsa, bu topolojik uzaya **Hausdorff uzay** denir. [1]*

Tanım 2.1.4. *M bir Hausdorff uzay olsun. Eğer her $p \in M$ için $\mathbb{R}^m$ deki p'nin*

*her u komşuluğu $\mathbb{R}^n$ de bir V açık alt kümesine homeomorf ise M'ye **manifold** denir. Bu tanımda verilen homeomorfizma $\varphi : U \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ ise, (U, φ) ikilisine bir **harita** denir. [1]*

Tanım 2.1.5. *M, m-boyutlu bir manifold olsun. Eğer M üzerinde haritaların bir ailesi olan $A = \{(U, \varphi), (V, \psi), (W, \phi), ...\}$ kümesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa A kolleksiyonuna M üzerinde r. mertebeden **diferensiyellenebilir yapı** (veya atlas) adı verilir.*

1. $\{U, V, W, ...\}$ açık kümelerinin kolleksiyonu M manifoldunun bir açık örtüsüdür.

2. A daki herhangi iki harita r. mertebeden uyumludur.

3. A maksimaldir, yani eğer bir $\left(\overline{\varphi}, \overline{U}\right)$ haritası A daki bütün koordinat atlasları ile uyumlu ise bu durumda $\left(\overline{\varphi}, \overline{U}\right) \in A$ dır.

Eğer atlas her mertebeden diferensiyellenebiliyorsa M manifolduna C^∞- ***manifold*** (veya kısaca diferensiyellenebilir manifold) adı verilir. [1]

Tanım 2.1.6. *M bir manifold ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^\infty(M, \mathbb{R})$ olsun. Bu durumda her $f, g \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ için*

i. $V_p(af + bg) = aV_pf + bV_pg$

ii. $V_p(fg) = V_p(f)g + fV_pg$,

şartlarını sağlayan $V_p : C^{\infty}(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne M manifoldunun p noktasındaki **tanjant vektörü** denir. [1]

Tanım 2.1.7. *M ve N iki manifold ve $F : M \rightarrow N$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda $p \in M$ noktasının komşuluğundaki harita (U, ϕ) ve $F(p) \in N$ noktasının komşuluğundaki harita (V, φ) olmak üzere, $\phi(U) \subset \mathbb{R}^m$ den $\varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$ kümesine olan $\varphi \circ F \circ \phi^{-1}$ dönüşümü diferensiyellenebiliyorsa F dönüşümü $p \in M$ noktasında **diferensiyellenebilirdir** denir. [1]*

Tanım 2.1.8. *M ve N iki manifold ve $F : M \rightarrow N$ bir dönüşüm olsun. $X \in T_pM$ için, M de seçilen $\alpha(t)$ eğrisine $\alpha(t_0) = p$ noktasında X vektörü teğet olsun. Bu durumda $F(p) = F(\alpha(t_0))$ noktasında $F(\alpha(t))$ eğrisine teğet olacak şekilde $F_*(X)$ vektörünü karşılık getiren $F_* : T_pM \rightarrow T_{F(p)}N$ dönüşümüne **türev dönüşümü** denir. Türev dönüsümü dF ile de gösterilir. [1]*

Tanım 2.1.9. *M ve N, sırası ile m ve n boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F : M \rightarrow N$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu durumda F dönüşümünün $p \in M$ noktasındaki rankı, F_* dönüşümünün p noktasındaki rankı olarak tanımlanır. Eğer her p noktasında F dönüşümünün rankı m ise (yani $rank(F_{*p}) = m$), F dönüşümüne **immersiyon** (imersion) veya dolgulama adı verilir. Eğer F birebir ise bu durumda F dönüşümü N ile $\overline{N} = F(M)$ arasında birebir eşleme kurar. Bu eşleme ile birlikte $\overline{N}$ üzerinde topoloji ve bir diferensiyellenebilir yapı tanımlanırsa $\overline{N}$ kümesine N manifoldunun **altmanifoldu** denir. Bu durumda, eğer F, M manifoldundan $F(M)$ ye bir homeomorfizma ve $F(M)$ alt uzay topolojisine sahip ise F dönüşümüne **imbedding** (yerleştirme) denir. F, m-boyutlu M manifoldundan n-boyutlu N manifolduna bir dolgulama ise $m \leq n$ dir. $m - n$ farkına F dolgulama dönüşümünün **ekboyutu** denir. [1]*

Tanım 2.1.10. *F bir immersiyon olsun. $\forall X, Y \in T_pM$ için $g(F(X), F(Y)) \geq g(X, Y)$ ise F ye **izometrik immersiyon** denir. Burada g, T_pM den indirgenmiş metriktir. [1]*

2.2 Manifoldlar Üzerinde Temel Kavramlar

Tanım 2.2.1. *M bir manifold ve manifold üzerinde vektör alanlarının kümesi $\Gamma(TM)$ olsun. Bu durumda $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ vektör alanları ve $f \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için*

$$\nabla : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

ile tanımlı ve

1. $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$
2. $\nabla_X (Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$
3. $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$
4. $\nabla_X (fY) = X[f]\, Y + f \nabla_X Y$

şartlarını sağlayan ∇ dönüşümüne **afin veya lineer konneksiyon** adı verilir. $\nabla_X Y$ vektör alanına Y vektör alanının X vektör alanı boyunca **kovaryant türevi** adı verilir. Afin konneksiyonun tanımından görülmektedir ki, bir afin konneksiyon M üzerindeki bir vektör alanını yine bir vektör alanına taşıyan bir dönüşümdür. [1]

Tanım 2.2.2. *M bir manifold ve ∇ manifold üzerinde lineer konneksiyon, Y manifold üzerinde vektör alanı ve X_p, $p \in M$ noktasındaki tanjant vektör olsun. Bu durumda $\nabla_X Y$ vektör alanının p noktasındaki değeri $\nabla_{X_p} Y$ ile tanımlıdır, burada X diferensiyellenebilir vektör alanı öyleki p noktasındaki değeri X_p dir.*

Diğer taraftan r. mertebeden K_1 kovaryant tensör alanı ve $(r,1)$ mertebeli K_2 tensör alanının kovaryant türevi sırası ile

$$(\nabla_X K_1)(X_1, ..., X_r) = X(K_1(X_1, ..., X_r)) - \sum_{i=1}^{r} K_1(X_1, ..., \nabla_X X_i, ..., X_r) \tag{2.2.1}$$

ve

$$(\nabla_X K_2)(X_1, ..., X_r) = X(K_2(X_1, ..., X_r)) - \sum_{i=1}^{r} K_2(X_1, ..., \nabla_X X_i, ..., X_r) \tag{2.2.2}$$

ile tanımlanır. Burada açıkça görülmektedir ki kovaryant türev tensör alanlarının kovaryantlık derecelerini korur. Bu durumda $(r+1,0)$ ve $(r+1,1)$ mertebeli tensör alanı ∇K tensör alanı

$$(\bigtriangledown K)(X_1, ..., X_r, X) = (\bigtriangledown_X K)(X_1, ..., X_r)$$

ile tanımlanır. Eğer $\nabla K = 0$ ise K ***tensör alanı paraleldir*** *denir. [1]*

Tanım 2.2.3. *M bir manifold ve ∇ manifold üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Bu durumda*

$$T : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$
$$(X, Y) \to T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

ve

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$
$$(X, Y, Z) \to R(X, Y, Z) = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

ile tanımlı T ve R tensör alanlarına ∇ lineer konneksiyonun sırasıyla ***torsiyon tensörü*** *ve* ***eğrilik tensörü*** *denir. $T = 0$ olması durumunda ∇ lineer konneksiyonu* ***torsiyonsuzdur*** *denir. Eğer $R = 0$ ise M manifoldu* ***flattır*** *(düzlemsel) denir. [1]*

Lemma 2.2.1. ***(1. Bianchi Özdeşliği)*** *M bir manifold, manifold üzerindeki torsiyonsuz konneksiyon ∇ ve ∇ konneksiyonunun eğrilik tensör alanı R olsun. Bu durumda $(X, Y, Z) \in \Gamma(TM)$ için*

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0.$$

dır. [1]

İspat. $(X, Y, Z) \in \Gamma(TM)$ için eğrilik tensörü tanımından

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \\ &+ \nabla_Y \nabla_Z X - \nabla_Z \nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]} X \\ &+ \nabla_Z \nabla_X Y - \nabla_X \nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]} Y \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_X (\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) \\ &+ \nabla_Y (\nabla_Z X - \nabla_X Z) \\ &+ \nabla_Z (\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &- \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[Y,Z]} X - \nabla_{[Z,X]} Y \end{aligned}$$

elde edilir. ∇ torsiyonsuz olduğundan $\nabla_Y Z - \nabla_Z Y = [Y, Z]$ dır. Böylece

$$\begin{aligned} R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y &= \nabla_X [Y, Z] \\ &+ \nabla_Y [Z, X] + \nabla_Z [X, Y] \\ &- \nabla_{[X,Y]} Z - \nabla_{[Y,Z]} X - \nabla_{[Z,X]} Y \end{aligned}$$

dır. Burada konneksiyonun torsiyonsuz olması tekrar kullanılırsa

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = [X, [Y, Z]] + [Y, [Z, X]] + [Z, [X, Y]]$$

elde edilir. Böylece Jacobi özdeşliğinden

$$R(X, Y)Z + R(Y, Z)X + R(Z, X)Y = 0$$

olur. [1] $\square$

Lemma 2.2.2. ***(2. Bianchi Özdeşliği)*** *M bir manifold, manifold üzerindeki torsiyonsuz konneksiyon ∇ ve ∇ konneksiyonunun eğrilik tensör alanı R olsun. Bu durumda $(X, Y, Z) \in \Gamma(TM)$ için*

$$(\nabla_X R)(Y, Z) + (\nabla_Y R)(Z, X) + (\nabla_Z R)(X, Y) = 0$$

dır. [1]

İspat. $V \in \Gamma(TM)$ için, (2.2.1) dan

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X R)(Y, Z, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, V) \\
&= \nabla_X R(Y, Z)V - R(\nabla_X Y, Z)V - R(Y, \nabla_X Z)V \\
&- R(Y, Z)\nabla_X V + \nabla_Y R(Z, X)V - R(\nabla_Y Z, X)V \\
&- R(Z, \nabla_Y X)V - R(Z, X)\nabla_Y V + \nabla_Z R(X, Y)V \\
&- R(\nabla_Z X, Y)V - R(X, \nabla_Z Y)V - R(X, Y)\nabla_Z V
\end{aligned}$$

olur. ∇ torsiyonsuz olduğundan

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X R)(Y, Z, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, V) \\
&= \nabla_X R(Y, Z)V + \nabla_Y R(Z, X)V + \nabla_Z R(X, Y)V \\
&- R(Z, X)\nabla_Y V - R(X, Y)\nabla_Z V - R(Y, Z)\nabla_X V \\
&- R([X, Y], Z)V + R(Y, [Z, X])V - R([Y, Z], X)V
\end{aligned}$$

dır. Bu denklemde eğrilik tensör denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X R)(Y, Z, V) + (\nabla_Y R)(Z, X, V) + (\nabla_Z R)(X, Y, V) \\
&= \nabla_X \nabla_Y \nabla_Z V - \nabla_X \nabla_Z \nabla_Y V - \nabla_X \nabla_Z \nabla_Y V - \nabla_X \nabla_{[Y,Z]} V \\
&+ \nabla_Y \nabla_Z \nabla_X V - \nabla_Y \nabla_X \nabla_Z V - \nabla_Y \nabla_Z \nabla_X V - \nabla_Y \nabla_{[Z,X]} V \\
&+ \nabla_Z \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Z \nabla_Y \nabla_X V - \nabla_Z \nabla_{[X,Y]} V \\
&+ \nabla_Z \nabla_X \nabla_Y V - \nabla_Z \nabla_Y \nabla_X V - \nabla_Z \nabla_{[X,Y]} V \\
&- \nabla_Z \nabla_X \nabla_Y V + \nabla_X \nabla_Z \nabla_Y V + \nabla_{[Z,X]} \nabla_Y V
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-\nabla_X\nabla_Y\nabla_Z V+\nabla_Y\nabla_X\nabla_Z V+\nabla_{[X,Y]}\nabla_Z V\\
&-\nabla_Y\nabla_Z\nabla_X V+\nabla_Z\nabla_Y\nabla_X V+\nabla_{[Y,Z]}\nabla_X V\\
&-\nabla_{[X,Y]}\nabla_Z V+\nabla_Z\nabla_{[X,Y]}V+\nabla_{[[X,Y],Z]}V\\
&+\nabla_Y\nabla_{[Z,X]}V-\nabla_{[Z,X]}\nabla_Y V-\nabla_{[Y,[Z,X]]}V\\
&-\nabla_{[Y,Z]}\nabla_X V+\nabla_X\nabla_{[Y,Z]}V+\nabla_{[[Y,Z],X]}V
\end{aligned}
$$

elde edilir. Jacobi özdeşliğinden

$$(\nabla_X R)(Y,Z,V)+(\nabla_Y R)(Z,X,V)+(\nabla_Z R)(X,Y,V)=0$$

olır. Bu ifade her V için doğru olduğundan ispat tamamlanır. [1] $\square$

Teorem 2.2.1. ***(Stokes Teoremi)*** *Kenarı ∂M veya kenarsız olan bir manifold M, $w \in T_C^{m-1}(M)$ ve j, $j : \partial M \to M$ ile tanımlı yerleştirme dönüşümü olsun. Bu durumda*

$$\int_M dw = \int_{\partial M} j^* w$$

dır.

$\mathbb{R}^3$ teki diverjens teoremi, Stokes teoreminin özel hali olarak karşımıza çıkar. Ayrıca yönlendirilebilir bir manifold kompakt ve kenarsız ise Stokes teoreminden

$$\int_M dw = 0$$

elde edilir. [1]

Tanım 2.2.4. *M diferensiyellenebilir bir manifold ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarını kümesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda*

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M)$$

ile tanımlı g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

a. $g(X,Y) = g(Y,X)$

b. $g(X,X) \geq 0$ ve $\forall X$ için $g(X,X) = 0 \Longleftrightarrow X = 0$

şartları sağlanıyorsa g bilineer formuna **Riemann metriği** (veya metrik tensör) adı verilir. Bu durumda (M,g) ikilisine de **Riemann manifoldu** denir. [1]

2.3 Manifoldlar Üzerinde İntegrasyon ve Altmanifoldlar

Tanım 2.3.1. (M,g) *bir Riemann manifoldu ve* $X \in \Gamma(TM)$ *olsun.* (M,g) *üzerinde* X *vektör alanının* ***diverjensi***

$$\operatorname{div} X = \operatorname{trace} \nabla X$$

olarak tanımlanır. Böylece $\{X_1, ..., X_n\}$*,* M *üzerinde yerel ortonormal çatı ise*

$$\operatorname{div} X = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{X_i} X, X_i)$$

olur. [1]

Tanım 2.3.2. (M,g) *Riemann manifoldu ve* $f : (M,g) \to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ *bir fonksiyon olsun.* (M,g) *üzerinde* f *fonksiyonunun* ***gradyenti*** ∇f*,* M *üzerinde bir vektör alanıdır ve* $X \in \Gamma(TM)$ *için*

$$g(\nabla f, X) = df(X) = X(f)$$

olarak tanımlanır. [1]

Lemma 2.3.1. (M,g) *yönlendirilebilir bir Riemann manifoldu olsun.* M *manifoldunun yönlendirmesine karşılık olarak her yönlendirilebilir çatı üzerinde değeri 1 olan bir tek olarak belirlenmiş n-formu vardır.*

Lemma 2.3.1 aynı zamanda bize Riemann manifoldu üzerinde yönlendirmeyi sağlayan n-formun, hacimin, özel bir formda olduğunu verir. Daha açık bir ifade ile (U, φ) yönlendirilmiş harita ve $x^1, ..., x^n$ yerel koordinat sistemi ise Riemann hacim formu dV_g

$$dV_g = \sqrt{g} dx^1 ... dx^n$$

dır. Burada $g = \det(g_{ij})$ dır. Bu durumda manifoldun hacimi

$$Hacim(M) = \int_M dV_g$$

ile tanımlanır. [1]

Önerme 2.3.1. *(M, g) kenarlı Riemann manifoldu ve $\widetilde{g}$, ∂M üzerinde indirgenen Riemann metrik olsun. Bu durumda ∂M manifoldunun hacim elementi*

$$dV_{\widetilde{g}} = i_N dV_g \mid_{\partial M}$$

dır, burada N, ∂M boyunca dışa dönük normal vektör alanıdır. Üstelik eğer X, ∂M boyunca bir vektör alanı ise

$$i_X dV_g \mid_{\partial M} = g(X, N) dV_{\widetilde{g}}$$

dır. [1]

Teorem 2.3.1. ***(Diverjens Teoremi)*** *(M, g) kenarlı Riemann manifoldu ve dV_g manifoldun hacim formu olsun. Bu durumda X vektör alanı için*

$$\int_M (\operatorname{div} X) dV_g = \int_{\partial M} g(X, N) dV_{\widetilde{g}}$$

dır. [1]

Tanım 2.3.3. *$(\overline{M}, g)$ ve M sırasıyla m boyutlu Riemann manifoldu ve n boyutlu keyfi manifold olsun. Bu durumda $i : M \longrightarrow \overline{M}$ immersiyonunu göz önüne alalım. i immersiyonu M üzerine $i^* g$ ile tanımlı simetrik, bilineer ve pozitif tanımlı form, yani Riemann metriği indirger. Bu formu da g ile gösterelim. Bu durumda (M, g) bir Riemann manifoldu ve i de* ***izometrik immersiyon*** *olur. $m - n$ sayısına M altmanifoldunun* ***ekboyutu*** *denir. $p \in M$ noktasında altmanifoldun tanjant* *uzayı* T_pM *olsun. Bu durumda* T_pM, $T_p\overline{M}$ *tanjant uzayının altvektör uzayıdır.* p *noktasında* T_pM *uzayına dik olan tamamlayan uzayı* $T_pM^{\perp}$ *ile gösterelim.* $T_pM^{\perp}$ *uzayına* ***normal uzay*** *ve bu uzayın meydana getirdiği* $TM^{\perp}$ *tanjant demete* ***normal demet*** *denir. Böylece* $T_p\overline{M}$ *uzayı için*

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus TM^{\perp} \tag{2.3.1}$$

veya

$$T\overline{M} = TM \oplus TM^{\perp} \tag{2.3.2}$$

ayrışımı geçerlidir. $V \in T_pM^{\perp}$ *vektörüne* ***normal vektör*** *ve birim normal vektöre de* ***normal kesit*** *denir. Normal vektör alanlarının kümesi* $\chi(M)^{\perp}$ *veya* $\Gamma(TM^{\perp})$ *ile gösterilir. Şimdi* $\overline{M}$ *üzerinde ki Levi-Civita konneksiyonunu* $\overline{\nabla}$ *ile gösterelim ve*

$X, Y \in \chi(M)$, $V \in \chi(M)^{\perp}$ için

$$(\overline{\nabla}_X Y)^T = \nabla_X Y, \quad (\overline{\nabla}_X V)^{\perp} = \nabla^{\perp}_X V$$

tanımlayalım, burada T ve $\perp$ sırası ile altmanifoldun tanjant demeti ve normal demeti üzerindeki projeksiyonları göstermektedir. Diğer taraftan

$$(\overline{\nabla}_X Y)^{\perp} = B(X, Y) \tag{2.3.3}$$

ve

$$(\overline{\nabla}_X V)^T = -A_V X \tag{2.3.4}$$

tanımlayalım. Bu durumda kolayca görülür ki B simetrik ve bilineerdir. Böylece

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X, Y) \tag{2.3.5}$$

ve

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^{\perp}_X V \tag{2.3.6}$$

elde edilir. Şimdi yukarıda verilen $\nabla, \overline{\nabla}, B$ ve A_V operatörlerinin özelliklerini inceleyelim. [1]

Lemma 2.3.2. ∇, M *üzerinde Levi-Civita konneksiyondur. [1]*

İspat. ∇ operatörünün bir lineer konneksiyon olduğu açıktır. Burada Levi-Civita konneksiyon olduğunu göstereceğiz. Özellikle $X\langle Y,Z\rangle$ açılımı $\overline{\nabla}$ konneksiyona göre yapılırsa

$$X\langle Y,Z\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_X Y, Z\right\rangle + \left\langle Y, \overline{\nabla}_X Z\right\rangle$$

olur. Burada (2.3.5) kullanılırsa

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y + B(X,Y), Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z + B(X,Z)\rangle$$

elde edilir. Böylece (2.3.1) ayrışımından $B(X,Y)$ ile $\nabla_X Y$ vektör alanları birbirine dik olduğundan

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

olur. Yani $\nabla_X\langle Y,Z\rangle = 0$ dır. Şimdi torsiyonsuz olduğunu gösterelim.$[X,Y]$ Lie braketinin $\overline{\nabla}$ konneksiyonuna göre açılımından

$$[X,Y] = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X$$

olur. Buradan tekrar (2.3.5) kullanılırsa

$$[X,Y] = \nabla_X Y + B(X,Y) - \nabla_Y X - B(Y,X)$$

yazalım. Bu son denklemin altmanifoldun tanjant demeti ve normal demeti üzerindeki bileşenleri eşlenirse

$$[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$$

$$B(X,Y) = B(Y,X) \tag{2.3.7}$$

elde edilir. Böylece ilk denklem ∇ konneksiyonunun torsiyonsuz olduğunu gösterir ve ispat tamamlanır. [1] □

(2.3.7) den B simetriktir. $B : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)^{\perp}$ ile tanımlı B dönüşümüne **ikinci temel form** ve ∇ Levi-Civita konneksiyonuna **indirgenmiş**

konneksiyon denir. Ayrıca Lemma 2.3.2 dekine benzer olarak kolayca görülürki $\nabla^{\perp}$, normal demet üzerinde metrik konneksiyondur, yani $(\nabla^{\perp}_X)\langle V,W\rangle = 0, W \in \Gamma(TM^{\perp})$ dır. $\nabla^{\perp}$ konneksiyonuna **normal konneksiyon** ve $A_V : \chi(M) \to \chi(M)$ ile tanımlı operatöre ise **Weingarten temel tensörü** denir. Aşağıdaki lemma ikinci temel form ile Weingarten temel tensörü arasındaki ilişkiyi vermektedir. [1]

Lemma 2.3.3. *$(\overline{M}, g)$ bir Riemann manifoldu ve M, $\overline{M}$ manifoldunun altmanifoldu olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(TM^{\perp})$ için*

$$\langle A_V X, Y\rangle = \langle B(X,Y), V\rangle \tag{2.3.8}$$

dır. [1]

İspat. $Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(TM^{\perp})$ için $\langle Y, V\rangle = 0$ dır. Bu ifadenin her iki tarafına $\overline{\nabla}$ kovaryant türevi ugulanırsa

$$\left\langle \overline{\nabla}_X Y, V\right\rangle + \left\langle Y, \overline{\nabla}_X V\right\rangle = 0$$

elde edilir. Burada (2.3.5) ve (2.3.6) denklemleri kullanılırsa

$$\langle \nabla_X Y + B(X,Y), V\rangle + \left\langle Y, -A_V X + \nabla^{\perp}_X V\right\rangle = 0$$

olur. Burada (2.3.2) deki ayrışım kullanılırsa (2.3.8) elde edilir. [1] □

B simetrik ve bilineer olduğundan (2.3.8) ifadesinde ki A_V operatörünün simetrik ve lineer olduğu elde edilir. (2.3.5) ve (2.3.6) denklemlerine sırasıyla **Gauss formülü** ve **Weingarten formülü** denir.

Eğer ekboyut $m - n = 1$ ise altmanifolda **hiperyüzey** denir. Bu durumda $\chi(M)$, 1-boyutlu olduğundan $\chi(M)^{\perp}$ uzayını geren birim normal vektör alanı N olmak üzere $X, Y \in \chi(M)$ için $B(X,Y) = \lambda N$ yazılabilir. Lemma 2.3.3 kullanılırsa $\lambda = \langle A_N X, Y\rangle$ elde edilir. Böylece (2.3.5) Gauss formülü

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle A_N X, Y\rangle N \tag{2.3.9}$$

olur. Diğer taraftan M hiperyüzeyinin birim normal vektör alanı N olmak üzere

$$\left\langle \nabla^{\perp}_{X}N, N\right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{X}N, N\right\rangle = 0$$

olur. Buradan (2.3.6) Weingarten formülü

$$\overline{\nabla}_{X}N = -A_{N}X \tag{2.3.10}$$

olur. [1]

Tanım 2.3.4. *$\overline{M}$ bir Riemann manifoldu ve M, $\overline{M}$ manifoldunun altmanifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ altmanifoldun ortonormal çatısı olsun. Bu durumda*

$$H = \frac{1}{n} izB = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i) \tag{2.3.11}$$

ile tanımlı H vektör alanına, ki bu vektör alanı normal demetin kesitidir, ***ortalama eğrilik vektör alanı*** *denir. [1]*

Tanım 2.3.5. *$\overline{M}$ manifoldunun eğrilik tensör alanı $\overline{R}$ ve M manifoldunun eğrilik tensör alanı R olsun. B ikinci temel formun kovaryant türevi $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere*

$$(\nabla_X B)(Y, Z) = \nabla^{\perp}_{X} B(Y, Z) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z) \tag{2.3.12}$$

ile tanımlayalım. Bu durumda A_V Weingarten tensörünün türevi

$$(\nabla_X A)_V Y = \nabla_X A_V Y - A_{\nabla^{\perp}_{X} V} Y - A_V \nabla_X Y \tag{2.3.13}$$

olur. Gauss ve Weingarten formülleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\overline{R}(X, Y)Z &= \overline{\nabla}_X \overline{\nabla}_Y Z - \overline{\nabla}_Y \overline{\nabla}_X Z - \overline{\nabla}_{[X,Y]} Z \\
&= \overline{\nabla}_X \left(\nabla_Y Z + B(Y, Z)\right) - \overline{\nabla}_Y \left(\nabla_X Z + B(X, Z)\right) \\
&\quad - \nabla_{[X,Y]} Z - B(\left[X, Y\right], Z)
\end{aligned}$$

olur. Tekrar Gauss ve Weingarten formülleri kullanılır, braket açılımı yapılır ve (2.3.12) uygulanırsa

$$\overline{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - A_{B(Y,Z)}X + A_{B(X,Z)}Y + (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) \tag{2.3.14}$$

elde edilir. (2.3.8) kullanılırsa (2.3.14) ifadesi $T \in \chi(M)$ *için*

$$\left\langle \overline{R}(X,Y)Z, T \right\rangle = \langle R(X,Y)Z, T\rangle - \langle B(Y,Z), B(X,T)\rangle + \langle B(X,Z), B(Y,T)\rangle \tag{2.3.15}$$

olur. (2.3.15) ifadesine ***Gauss denklemi*** *denir. (2.3.14) ifadesinin normal uzaya ait olan bileşenleri göz önüne alınırsa*

$$(\overline{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) \tag{2.3.16}$$

elde edilir. (2.3.16) denklemine ***Coddazi denklemi*** *denir.* $X, Y \in \chi(M)$ *ve* $V \in \chi(M)^{\perp}$ *olmak üzere* $R^{\perp}$ *eğrilik tensörünü*

$$R^{\perp}(X,Y)V = \nabla^{\perp}_X \nabla^{\perp}_Y V - \nabla^{\perp}_Y \nabla^{\perp}_X V - \nabla^{\perp}_{[X,Y]} V$$

tanımlayalım. Yukarıdaki işlemler tekrarlanr ve (2.3.13) kullanılırsa

$$\overline{R}(X,Y)V = R^{\perp}(X,Y)V - B(X, A_V Y) + B(Y, A_V X) - (\nabla_X A)_V Y + (\nabla_Y A)_V X \tag{2.3.17}$$

olur. Bu ifade her $U \in \chi(M)^{\perp}$ *için*

$$\left\langle \overline{R}(X,Y)V, U \right\rangle = \left\langle R^{\perp}(X,Y)V, U \right\rangle + \langle [A_U, A_V]\, X, Y\rangle \tag{2.3.18}$$

dır, burada $[A_U, A_V] = A_U A_V - A_V A_U$ *ile tanımlıdır. (2.3.18) denklemine* ***Ricci denklemi*** *denir. Eğer* $R^{\perp} = 0$ *ise normal konneksiyona* ***flattır*** *denir. [1]*

Tanım 2.3.6. $(\overline{M}, g)$ *bir Riemann manifoldu ve* M*,* $\overline{M}$ *manifoldunun altmanifoldu olsun. Eğer* B *ikinci temel form sıfır ise altmanifolda* ***tamamen jeodeziktir*** *denir. [1]*

Tamamen jeodezik altmanifoldlar en basit altmanifoldlardır. Örneğin düzlem (doğru veya hiperdüzlem) bir tamamen jeodezik altmanifolddur.

Tanım 2.3.7. *$(\overline{M}, g)$ bir Riemann manifoldu ve M, $\overline{M}$ manifoldunun altmanifoldu olsun. $V \in \chi(M)^{\perp}$ ve $\lambda \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olmak üzere $A_V = \lambda$ ise M altmanifoldu V vektör alanına göre **umbiliktir** denir. Eğer M altmanifoldu her normal vektör alanına göre umbilik ise M altmanifolduna **tamamen umbilik altmanifold** denir. [1]*

Tamamen umbilik altmanifoldlar tamamen jeodezik altmanifoldlarına en yakın altmanifoldlardır.

Teorem 2.3.2. *$\overline{M}$ bir Riemann manifoldu ve M, $\overline{M}$ manifoldunun altmanifoldu olsun. Bu durumda H altmanifoldun ortalama eğrilik vektör alanı olmak üzere M altmanifoldunun tamamen umbilik olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \chi(M)$ için*

$$B(X, Y) = \langle X, Y \rangle H$$

olmasıdır.[1]

İspat. $\{e_1, ..., e_m, e_{m+1}, ..., e_n\}$ kümesi, $\{e_1, ..., e_m\}$ kümesi $\chi(M)$ uzayının bazı ve $\{e_{m+1}, ..., e_n\}$, $\chi(M)^{\perp}$ uzayının bazı olacak şekilde $\overline{M}$ manifoldunun ortonormal çatısı olsun. Bu durumda $A_V e_i = \lambda e_i$ dır. Buradan $V \in \chi(M)^{\perp}$ için

$$\sum_{i=1}^{m} \langle A_V e_i, e_i \rangle = m\lambda$$

olur. Böylece

$$\lambda = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \langle A_V e_i, e_i \rangle$$

elde edilir. Burada (2.3.8) kullanılırsa

$$\lambda = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \langle B(e_i, e_i), V \rangle$$

dır. Buradan $\lambda = \langle H, V \rangle$ olur. Böylece $A_V X = \lambda X$ olması için gerek ve yeter şart $A_V X = \langle H, V \rangle X$ olmasıdır. Buradan $\langle A_V X, Y \rangle = \langle B(X, Y), V \rangle = \langle X, Y \rangle \langle H, V \rangle$ elde edilir. Bu ifade keyfi her V normal vektör alanı için geçerli olduğundan ispat tamamlanır. [1] $\square$

Tanım 2.3.8. *Bir Riemann manifoldunun altmanifoldunun ortalama eğrilik vektör alanı sıfır ise* ***altmanifolda minimaldir*** *denir. [3]*

3. BİRİNCİ VARYASYON HESABI

Bu bölümde minimallik kavramı ile varyasyon hesabı arasında ki bağıntı elde edilmektedir. Tamamen geodezik altmanifold kavramı daha yüksek boyutlu geodeziklerin bir genellemesidir. Ancak, bunlar genel durum içerisinde çok azdır. Geodeziklerin yay uzunluğu fonksiyonun kritik noktaları oldugu not edilmelidir.

Bir minimal alt manifold, azalan ortalama eğrilik ile tanımlanır. Bu tanımın minimal terimlerle ilişkisi yok gibi gözüküyor. Ancak bu bölümde Lagrange tarafından ortaya konulan varyasyon ile minimal yüzey ilişkisi genel duruma taşınmaktadır. M den $\overline{M}$ ye tanımlanan tüm immersiyonların uzayının $I(M,\overline{M})$ olduğunu düşünelim. $hac(f(M))$ hacmi uzay üzerinde bir fonksiyondur. Hacim fonksiyonunun kritik noktaları birinci varyasyon formülünü takip eden minimal altmanifoldlardır. Böylece, minimal altmanifold kavramı varyasyon hesabının bir sonucudur.

Fonksiyonun kritik noktalarından türeyen birinci varyasyon formülünü elde edelim. Bunun için aşağıdaki lemmayı sunalım.

Lemma 3.0.1. *$A(t) = (a_{ij}(t))\,, |t| < \varepsilon$ ile $A(0) = I$ (birim matris) olacak şekilde $n \times n$ mertebeli matrislerin bir diferansiyellenebilir ailesi olsun. Bu durumda*

$$\frac{d}{dt}\det(A(t))\,|_{t=0} = izA^{'}(0),$$

dır. [4]

İspat. Farzedelim ki $\{\varepsilon_1, \varepsilon_2, ..., \varepsilon_n\}\,, \mathbb{R}^n$ de standart baz olsun.

$$\det(A(t))\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge ... \wedge \varepsilon_n = A(t)\varepsilon_1 \wedge A(t)\varepsilon_2 \wedge ... \wedge A(t)\varepsilon_j \wedge ... \wedge A(t)\varepsilon_n,$$

yukarıdaki denklemin her iki tarafının türevini alırsak ve $t = 0$ ile $A(0) = I$

kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
(R.H.S)^{'}\mid_{t=0} = \frac{d}{dt}\det(A(t))\mid_{t=0} &= \sum_{j=1}^{n} A(0)\varepsilon_1 \wedge A(0)\varepsilon_2 \wedge ... \wedge A^{'}(0)\varepsilon_j \wedge ... \wedge A(0)\varepsilon_n \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \varepsilon_1 \wedge A\varepsilon_2 \wedge ... \wedge \left\langle A^{'}(0)\varepsilon_j, \varepsilon_k \right\rangle \varepsilon_k \wedge ... \wedge \varepsilon_n
\end{aligned}
$$

$\wedge$ lineer olduğundan

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{n} \left\langle A^{'}(0)\varepsilon_j, \varepsilon_j \right\rangle \varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge ... \wedge \varepsilon_n \\
&= izA^{'}(0)\varepsilon_1 \wedge \varepsilon_2 \wedge ... \wedge \varepsilon_n
\end{aligned}
$$

dir. [4] □

Örnek 3.0.1. *A 3×3 tipinde bir matris olmak üzere*

$$
A(t) = \begin{bmatrix} t+1 & t & t^2 \\ -t & 3t+1 & t \\ t^3 & 5t^2 & 2t+1 \end{bmatrix} \text{ olsun. O halde } A(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ olduğundan}
$$

birim matris olur.

$$
A^{'}(t) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2t \\ -1 & 3 & 1 \\ 3t^2 & 10t & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow A^{'}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \Longrightarrow izA^{'}(0) = 6
$$

dır. Diğer taraftan

$$
\begin{aligned}
\det(A(t)) &= (t+1)\left\{(3t+1)(2t+1)-5t^3\right\} - t\left\{-t(2t+1)-t^4\right\} + t^2\left\{-5t^3 - t^3(3t+1)\right\} \\
&= (t+1)(6t^2+5t+1-5t^3) - t(-2t^2-t-t^4) + t^2(-6t^3-3t^4) \\
&= -3t^6 - 5t^5 - 5t^4 + 3t^3 + 12t^2 + 6t + 1
\end{aligned}
$$

dır.

$$
\frac{d}{dt}\det(A(t)) = -18t^5 - 25t^4 - 20t^3 + 9t^2 + 24t + 6
$$

ise

$$
\frac{d}{dt}\det(A(t))\mid_{t=0} = 6
$$

dır. Açıkça görülür ki $\frac{d}{dt}\det(A(t))\mid_{t=0} = izA^{'}(0)$ dır.

Şimdi Birinci Varyasyon Formülünü elde edebiliriz.

Teorem 3.0.1. *M ve $\overline{M}$ birer Riemann manifold, $f : M \longrightarrow \overline{M}$ bir immersiyon ve H vektör alanı bu immersiyonun ortalama eğrilik vektör alanı olsun. f_t, $|t| < \varepsilon$ ile $f_t \mid_{\partial M} = f \mid_{\partial M}$ şartını sağlayan immersiyonların bir ailesini gösterelim. $V = \frac{\partial f_t}{\partial f} \mid_{t=0}$ f boyunca tanımlı varyasyon vektör alanı olmak üzere*

$$\frac{d}{dt} hac(f_t(M)) \mid_{t=0} = -\int_M \langle nH, V \rangle \, dhac,$$

dır. [1]

İspat. f_t immersiyonunun indirgenmiş metriği d_t ve buna karşılık gelen hacim elemanı $dhac_t$ olsun. M üzerinde g_0 metriğine göre ortonormal çatı alanı $\{e_1, e_{2,...,} e_n\}$ olsun. $\{w^1, w^2, ..., w^n\}$ dual çatı alanıdır. Bu durumda

$$g_{ij}(t) = \langle f_{t*} e_i, f_{t*} e_j \rangle = g_t(e_i, e_j),$$

dır. Böylece

$$hacf_t(M) = \int_M dhac_t = \int_M \sqrt{g(t)} w^1 \wedge w^2 \wedge ... \wedge w^n = \int_M \sqrt{g(t)} dhac,$$

dır. Böylece

$$\frac{d}{dt} hac(f_t(M)) \mid_{t=0} = \frac{1}{2} \int_M g^{'}(0) dhac,$$

olduğunu biliyoruz. Lemma 3.0.1 den M nin her noktası için

$$\frac{d}{dt} dhac_t \mid_{t=0} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} g^{'}_{kk}(0) dhac, \tag{3.0.1}$$

yazalım. Şimdi u, $p \in M$ noktasının küçük bir komşuluğu olmak üzere $u \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ için bir çatı $\left\{ \frac{\partial}{\partial t}, e_1, e_2, ..., e_n \right\}$ olsun. Bu vektör alanlarının

$$F : M \times (-\varepsilon, \varepsilon) \longrightarrow \overline{M},$$

$$(x, t) \longrightarrow f_t(x)$$

($F_t(x) = F(x,t)$ tanımlı) dönüşümü altındaki görüntülerini $\{V(t), e_1(t), e_2(t), ..., e_n(t)\}$ ile gösterelim. Bu durumda $e_i(0) = e_i$, $V(0) = V$ ve $g_{kk}(t) = \langle e_k(t), e_k(t) \rangle$ dır.

Daha sonra

$$\frac{d}{dt}g_{kk}(t) = V(t)\left\langle e_k(t), e_k(t)\right\rangle,$$

olur. Böylece $\overline{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}g_{kk}(t) &= 2\left\langle \overline{\nabla}_{V(t)}e_k(t), e_k(t)\right\rangle \\
&= 2\left\langle \overline{\nabla}_{e_k(t)}V(t) + \left[V(t), e_k(t)\right], e_k(t)\right\rangle \\
&= 2\left\{\left\langle \overline{\nabla}_{e_k(t)}V(t), e_k(t)\right\rangle + \left\langle \left[V(t), e_k(t)\right], e_k(t)\right\rangle\right\} \\
&= 2\left\langle \overline{\nabla}_{e_k(t)}V(t), e_k(t)\right\rangle
\end{aligned}$$

elde edilir. Konneksiyonun Levi-Civita konneksiyon olması tekrar kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&= 2\left\{e_k(t)\left\langle V(t), e_k(t)\right\rangle - \left\langle V(t), \overline{\nabla}_{e_k(t)}e_k(t)\right\rangle + \left\langle \left[e_k(t), e_k(t)\right], V(t)\right\rangle\right\} \\
&= 2\left\{e_k(t)\left\langle V(t), e_k(t)\right\rangle - \left\langle V(t), \overline{\nabla}_{e_k(t)}e_k(t)\right\rangle\right\}
\end{aligned}$$

olur. Böylece (3.0.1) denkleminde ki ifade

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} g'_{kk}(0) = e_k\left\langle V, e_k\right\rangle - \left\langle V, \overline{\nabla}_{e_k}e_k\right\rangle$$

olarak elde edilir. Burada Gauss formülü ve daha sonra ortalama eğrilik vektör alanı formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&= e_k\left\langle V^T, e_k\right\rangle - \left\langle V, (\overline{\nabla}_{e_k}e_k)^T + B(e_k, e_k)\right\rangle \\
&= e_k\left\langle V^T, e_k\right\rangle - \left\langle V, (\overline{\nabla}_{e_k}e_k)^T\right\rangle - \left\langle V, B(e_k, e_k)\right\rangle \\
&= e_k\left\langle V^T, e_k\right\rangle - \left\langle V, (\overline{\nabla}_{e_k}e_k)^T\right\rangle - \left\langle V, nH\right\rangle \\
&= \mathrm{div}(V^T) - \left\langle V, nH\right\rangle
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\frac{d}{dt}hacf_t(M) = \int_M \mathrm{div}(V^T)dhac - \int_M \left\langle V, nH\right\rangle dhac$$

elde edilir. İspat Stokes teoreminin kullanılması ile tamamlanır. [4] □

Uyarı 3.0.1. *Birinci varyasyon formülü* $-nH$ *hacim fonksiyonunun grandiyenti temsil ettiğini göstermektedir.* $H = 0$ *eşitliği Euler-Lagrange denklemi için fonksiyondur. [4]*

Uyarı 3.0.2. *Varyasyonu normal olarak sınıflandırırsak yani* V, M *için her yerde normal ve* $V^T = 0$ *ise bu formül sınır şartı olmadan geçerli olur. [4]*

Uyarı 3.0.3. M *kompakt değil ise, bu formül kompakt destekli varyasyonlar için kullanılabilir. [4]*

4. ÖKLİDYEN UZAYIN VE KÜRENİN MİNİMAL ALTMANİFOLDLARI

Bu bölüm iki alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde öklidyen uzayın minimal altmanifoldları incelenmektedir. İkinci alt bölümde kürenin bir altmanifoldun minimal olması karakterize edilmektedir.

4.1 Öklidyen Uzayın Minimal Altmanifoldları

M Riemann manifoldunun boyutu m olsun. $\Delta : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ Laplasyan operatörünü düşünelim. $f \in C^\infty$ için M Riemann manifoldunun yerel ortonormal çatı alanı $\{e_1, ..., e_m\}$ olsun. O halde

$$\Delta f = e_i e_i(f) - (\nabla_{e_i} e_i) f \tag{4.1.1}$$

dır.

M üzerinde ki Riemann metriğinin her p noktası etrafında $\{x^1, ..., x^m\}$ yerel koordinatları olmak üzere

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j$$

şeklinde yazılabilir. $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ ve $g = \det(g_{ij})$ ise o halde

$$\Delta f = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sqrt{g} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j} \right) \tag{4.1.2}$$

şeklinde ifade edelim.

d dış türev ve δ eş diferensiyel operatör olmak üzere

$$\Delta f = -\delta d f \tag{4.1.3}$$

dır.

(M, g) Riemann manifoldu ve $f : (M, g) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\Delta f = 0$ ise f fonksiyonuna **harmonik fonksiyon** denir. [4]

Bu noktada, harmonik fonksiyonlar için Hopf maksimum prensibini hatırlatalım. Bu prensibe göre eğer Riemann manifoldu üzerindeki bir harmonik fonksiyon herhangi bir iç noktada maksimum olursa bu durumda fonksiyon manifold üzerinde sabittir. [4]

Öklidyen uzayın minimal alt manifoldları üzerine bazı kavramları aşağıdaki şekilde verebiliriz.

Önerme 4.1.1. *$\psi : M \to \mathbb{R}^n$, H ortalama eğrilik vektör alanına sahip olan m-boyutlu bir izometrik immersiyon olsun. Bu durumda*

$$\Delta\psi = -mH \tag{4.1.4}$$

dir, burada $\Delta\psi = \{\Delta\psi^1, ..., \Delta\psi^n\}$ dır. [1]

İspat. Herhangi bir $X \in TM$ için $X(\psi) = \psi_* X \cong X$ dır. $\{e_i\}$ bir yerel ortonormal çatı alanı olsun. O halde Laplasyon tanımından

$$\begin{aligned}\Delta\psi &= -\operatorname{div}\nabla\psi \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \langle \nabla_{e_i}\nabla\psi, e_i\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} \langle B_\psi e_i, e_i\rangle\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= -\sum_{i=1}^{n} e_i \langle \nabla\psi, e_i\rangle - \langle \nabla\psi, \nabla_{e_i}e_i\rangle - \langle \nabla\psi, [e_i, e_i]\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} e_i \langle \nabla\psi, e_i\rangle - \langle \nabla\psi, \nabla_{e_i}e_i\rangle \\ &= -\sum_{i=1}^{n} e_i(e_i(\psi)) - (\nabla_{e_i}e_i)(\psi)\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\Delta\psi = -\sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}_{e_i}\overline{\nabla}_{e_i}\psi - \overline{\nabla}_{\nabla_{e_i}e_i}\psi$$

dır. Burada $\overline{\nabla}$, $\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzayının standart konneksiyonudur. Buradan

$$\Delta\psi = -\sum_{i=1}^{n} \overline{\nabla}_{e_i}e_i - \nabla_{e_i}e_i$$

elde edilir. Gauss formülü kullanılırsa

$$\Delta\psi = -\sum_{i=1}^{n} B(e_i, e_i)$$

olur. Böylece ortalama eğrilik vektör alanı tanımından

$$\Delta\psi = -mH$$

olur. [1] $\square$

Böylece aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

Sonuç 4.1.1. *$\psi : M \to \mathbb{R}^n$ izometrik immersiyonu ile tanımlı altmanifoldun minimal altmanifold olması için gerek ve yeter sart ψ immersiyonunun her bir bileşeninin M altmanifoldu üzerinde harmonik fonksiyon olmasıdır. [4]*

Uyarı 4.1.1. *Bu durumda (4.1.4) denklemi $\Delta\psi = 0$ a indirgenir. Fakat ψ immersiyonu değiştiğinde uyumlu metrik değişir bu nedenle Δ operatörü değiştiği için lineer denklem değildir. [1]*

(4.1.1) ve Hopf maksimum prensibinden aşağıdaki durum söz konusu olur.

Sonuç 4.1.2. *Öklidyen uzayın kompakt minimal altmanifoldu yoktur. [4]*

$\mathbb{R}^{n+1}$ de M'nin bir minimal grafiğini

$$x^{n+1} = f(x^1, ..., x^n)$$

şeklinde tanımlayalım.$f_i = \frac{\partial f}{\partial x^i}$ şeklinde ifade edilirse, M üzerinde metrik

$$ds^2 = g_{ij} dx^i dx^j,$$

şeklinde yazalım, burada

$$g_{ij} = \delta_{ij} + f_i f_j$$

dır.

$w = \sqrt{1+\sum_i f_i^2}$ ifade edelim. $g^{ij} = \delta_{ij} - \frac{1}{w^2} f_i f_j$ dir. M nin birim normal vektörü

$$v = \frac{1}{w}(f_1, ..., f_n, -1)$$

dır. Açıktır ki

$$\overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \frac{\partial}{\partial x^i}(0, ..., 0, 1, 0, ..., 0, \frac{\partial f}{\partial x^j}) = (0, ..., f_{ij})$$

ve

$$\left\langle B_{\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\partial}{\partial x^j}}, v \right\rangle = \left\langle \overline{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j}, v \right\rangle = -\frac{1}{w} f_{ij}$$

$H = 0$ dan $g^{ij} f_{ij} = 0$ dır. Böylece minimal hiperyüzey denkleminden

$$\left(1 + \sum_i f_i^2\right) f_{jj} - f_i f_j f_{ij} = 0 \tag{4.1.5}$$

elde edilir. Bu ifade

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{w}\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) = 0 \tag{4.1.6}$$

ifadesine denktir.

$n = 2$ olduğu zaman (4.1.5) denklemi

$$\left(1 + f_y^2\right) f_{xx} - 2 f_x f_y f_{xy} + \left(1 + f_x^2\right) f_{yy} = 0 \tag{4.1.7}$$

denklemine dönüşür. Burada $x = x^1, y = x^2$ şeklinde ifade edilir. [4]

Önerme 4.1.2. *$M, \mathbb{R}^{n+1}$ de sabit ortalama eğrilikli ve ikinci temel form B ile yönlendirilmiş bir hiperyüzey olsun. M de v birim normal vektör olsun. Herhangi bir $a \in \mathbb{R}^{n+1}$ sabit vektörü için*

$$\Delta \langle a, v \rangle + |B|^2 \langle a, v \rangle = 0 \tag{4.1.8}$$

dır. [4]

İspat. $\{e_i\}$ yerel ortonormal çatı alanı ile $\nabla_{e_j} e_i = 0$ seçelim. O halde

$$\begin{aligned}
\Delta \langle a, v \rangle &= \nabla_{e_i} \nabla_{e_i} \langle a, v \rangle \\
&= \nabla_{e_i} \left\langle a, \overline{\nabla}_{e_i} v \right\rangle \\
&= \left\langle a, \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_i} v \right\rangle \\
&= \left\langle a, \overline{\nabla}_{e_i} (\nabla_{e_i} v - A^v(e_i)) \right\rangle \\
&= - \left\langle a, \overline{\nabla}_{e_i} A^v(e_i) \right\rangle \\
&= - \left\langle a, \nabla_{e_i} A^v(e_i) + (\overline{\nabla}_{e_i} (A^v(e_i)))^N \right\rangle .
\end{aligned}$$

Öklid uzayının sıfırlayan eğriliği ve v birim normal vektör alanı normal demet içinde paraleldir. Böylece

$$\begin{aligned}
\nabla_{e_i} A^v(e_i) &= \nabla_{e_i} \left\langle B_{e_i e_j}, v \right\rangle e_j \\
&= \nabla_{e_i} \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} e_i, v \right\rangle e_j \\
&= (\left\langle \overline{\nabla}_{e_i} \overline{\nabla}_{e_j} e_i, v \right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} e_i, \overline{\nabla}_{e_i} v \right\rangle) e_j \\
&= (\left\langle \overline{\nabla}_{e_j} \overline{\nabla}_{e_i} e_i, v \right\rangle + \left\langle \overline{\nabla}_{e_j} e_i, (\overline{\nabla}_{e_i} v)^T \right\rangle) e_j \\
&= (\left\langle \overline{\nabla}_{e_j} (\nabla_{e_i} e_i + B_{e_i e_i}), v \right\rangle + \left\langle \nabla_{e_j} e_i, (\overline{\nabla}_{e_i} v)^T \right\rangle) e_j \\
&= \left\langle B_{e_j \nabla_{e_i} e_i}, v \right\rangle e_j + \left\langle n \nabla_{e_j} H, v \right\rangle = 0
\end{aligned}$$

olur. Bu nedenle

$$\begin{aligned}
\Delta \langle a, v \rangle &= - \left\langle a, (\overline{\nabla}_{e_i} A^v(e_i))^N \right\rangle \\
&= - \left\langle a, B_{e_i A^v(e_i)} \right\rangle \\
&= - \langle a, v \rangle |B|^2 .
\end{aligned}$$

elde edilir. [4] □

4.2 Küredeki Minimal Altmanifoldlar

Öklid uzayındaki minimal altmanifold dışında küre içindeki minimal altmanifold kavramıda önemli bir konudur. Bu alt bölümde küredeki minimal altmanifoldlar için onun koordinat fonksiyonlarını inceleyeceğiz. Aynı zamanda küredeki minimal altmanifoldun bazı özelliklerinin Öklid uzayındaki minimal altmanifoldun özellikleri ile yakından ilişkili olduğunu göreceğiz. [1]

M, $\overline{M}$ ve $\widetilde{M}$ Riemann manifoldları $M \to \overline{M} \subset \widetilde{M}$ izometrik immersiyonlar ve bu manifoldların Levi-Civita konneksiyonları sırasıyla ∇, $\overline{\nabla}$ ve $\widetilde{\nabla}$ olsun. Bu durumda M almanifoldunun $\overline{M}$ ve $\widetilde{M}$ manifoldlarına göre ikinci temel formlarını B ve $\widetilde{B}$ ve ortalama eğrilik vektör alanlarını H ve $\widetilde{H}$ ile gösterelim. M altmanifoldunun bir yerel ortonormal çatı alanı $\{e_1, ..., e_m\}$ olmak üzere

$$H = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} B(e_i, e_i)$$

dır. Gauss formülü kullanılırsa

$$H = \frac{1}{m}\left(\sum_{i=1}^{m} \overline{\nabla}_{e_i} e_i\right)^{NM}$$

olur. Burada NM altmanifoldun normal demeti üzerine olan izdüşümünü göstermektedir. Diğer taraftan $B' : \overline{M} \to \widetilde{M}$ immersiyonunun ikinci temel formu olmak üzere $X, Y \in \chi(M)$ için

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \overline{\nabla}_X Y + B'(X, Y)$$

dir. $M \to \overline{M}$ immersiyonu için Gauss formülü kullanılırsa

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) + B'(X, Y)$$

elde edilir. Buradan

$$\widetilde{B}(X, Y) = B(X, Y) + B'(X, Y) \tag{4.2.1}$$

olur. Böylece (4.2.1) den

$$H = \widetilde{H}^{T\overline{M}} \tag{4.2.2}$$

dır. Burada $T\overline{M}$ ile $\overline{M}$ altmanifoldun tanjant demeti üzerinde olan izdüşümü göstermektedir. Eğer $\overline{M} \to \widetilde{M}$ immersiyonu tamamen jeodezik ve $M \to \overline{M}$ immersiyonu minimal ise $M \to \widetilde{M}$ immersiyonu da minimaldir.

Sonuç 4.2.1. *$\psi : M \to \overline{M} \subset \mathbb{R}^n$ izometrik immersiyonunun minimal olması için gerek ve yeter şart $(\Delta\psi)^{T\overline{M}} = 0$ olmasıdır.[2]*

Sonuç 4.2.1 bize $\psi : M \to \overline{M} \subset \mathbb{R}^n$ izometrik immersiyonunun minimal olması için gerek ve yeter şartın $\Delta\psi$ ifadesinin $\overline{M}$ manifolduna dik olması olduğunu göstermektedir. [4]

Teorem 4.2.1. *S^n, $n-$boyutlu küre olmak üzere, $\psi : M \to S^n$ izometrik immersiyonunun minimal olması için gerek ve yeter şart*

$$\Delta\psi = m\psi \tag{4.2.3}$$

olmasıdır. Burada boy$M = m$ dir. [1]

İspat. Sonuç 4.2.1 den M altmanifoldunun minimal olması için gerek ve yeter şart her $p \in M$ için $\Delta\psi(p)$ ifadesinin S^n küresine dik bir doğrultuya paralel olmasıdır. Başka bir ifade ile, $\lambda \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ için $\Delta\psi = \lambda\psi$ olmasıdır. Buradan

$$0 = \Delta\,|\psi|^2 = \langle \psi, \Delta\psi \rangle - |\nabla\psi|^2 = \lambda\,|\psi|^2 - |\nabla\psi|^2 = \lambda - |\nabla\psi|^2 \tag{4.2.4}$$

$$\begin{aligned} \langle \psi, \Delta\psi \rangle &= \langle \psi, \lambda\psi \rangle \\ &= \lambda \langle \psi, \psi \rangle \\ &= \lambda\,|\psi|^2 \end{aligned}$$

ise (4.2.4) ifadesi

$$0 = \Delta\,|\psi|^2 = \langle \psi, \Delta\psi \rangle - |\nabla\psi|^2 = \lambda\,|\psi|^2 - |\nabla\psi|^2$$

olur. O halde

$$\begin{aligned} \lambda\,|\psi|^2 - |\nabla\psi|^2 &= 0 \\ \lambda\,|\psi|^2 &= |\nabla\psi|^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\lambda &= |\nabla\psi|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{m} \langle \nabla_{e_i}\psi, \nabla_{e_i}\psi \rangle \\ &= \sum_{i=1}^{m} \langle e_i, e_i \rangle \\ &= m\end{aligned}$$

olması demektir. □

Teorem 4.2.1 göstermektedir ki küreye olan bir minimal immersiyonun $\mathbb{R}^{n+1}$ deki koordinat fonksiyonları Laplasyan operatörünün özdeğeri *boyM* olan özdeğer fonksiyonlarıdır. Bu durumun tersi olarak aşağıdaki Takahashi teoremi verilmektedir.[2]

$$S^n(r) = \left\{ (x^1, ..., x^n + 1) \in \mathbb{R}^{n+1}; \sum_{k=1}^{n+1} r^2 \right\}$$

olsun. [1]

Teorem 4.2.2. *$M, m-$Riemann manifoldu, $\psi : M \to \mathbb{R}^{n+1}$, $\Delta\psi = \lambda\psi, \lambda \neq 0$ şartını sağlayan izometrik immersiyon olsun.*

(i) $\lambda > 0$

(ii) $\psi(M) \subset S^n(r)$, burada $r^2 = \frac{m}{\lambda}$ dır.

(iii) $\psi : M \to S^n(r)$ minimal bir immersiyondur. [1]

İspat. $\mathbb{R}^{n+1}$ de M altmanifoldunun ortalama eğrilik vektörü H olsun. Eğer $\Delta\psi = \lambda\psi$, $\lambda \neq 0$ ise $H = -\frac{\lambda}{m}\psi$ dır. Bu bize ψ vektörünün $\mathbb{R}^{n+1}$ de M altmanifolduna normal olduğunu göstermektedir. M altmanifolduna teğet bir X vektör alanı için $\langle X, \psi \rangle = 0$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}X\langle \psi, \psi \rangle &= \left\langle \widetilde{\nabla}_X\psi, \psi \right\rangle + \left\langle \psi, \widetilde{\nabla}_X\psi \right\rangle \\ &= 2\left\langle \widetilde{\nabla}_X\psi, \psi \right\rangle \\ &= \langle X, \psi \rangle = 0\end{aligned}$$

elde edilir, burada $\widetilde{\nabla}$ ile $\mathbb{R}^{n+1}$ manifoldunun standart konneksiyonu gösterilmektedir. Bu ise ψ uzunluğunun sabit olduğunu göstermektedir. Böylece ψ, orijin merkezli $S^n(r)$ küresine olan bir immersiyondur. Diğer taraftan

$$0 = \Delta \left|\psi\right|^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned} 0 &= \langle \Delta\psi, \psi \rangle - \left|\nabla\psi\right|^2 \\ &= \lambda \left|\psi\right|^2 - \left|\nabla\psi\right|^2 \\ &= \lambda r^2 - m, \end{aligned}$$

yani

$$\lambda = \frac{m}{r^2} > 0.$$

elde edilir. Bu ise yarıçapın $r = \sqrt{\frac{m}{\lambda}}$ olması demektir. Bu da teoremdeki ilk iki iddianın ispatıdır. Şimdi B, B' ve $\widetilde{B}$ ile M altmanifoldunun $\mathbb{R}^{n+1}$, M altmanifoldun $S^n(r)$ de ve $S^n(r)$ altmanifoldun $\mathbb{R}^{n+1}$ uzayındaki ikinci temel formlarını gösterelim. Bu durumda $X, Y \in \chi(M)$ için

$$B(X,Y) = B'(X,Y) + \widetilde{B}(X,Y)$$

elde edilir. Böylece ortalama eğrilik vektör alanı için de

$$H = H' + \widetilde{H}$$

olur. Diğer taraftan $\psi(p)$, $p \in M$ noktasında $S^n(r)$ küresine dik ve H_p, $\psi(p)$ ye paralel olduğundan $H' = 0$ olur. Böylece M, $S^n(r)$ de minimaldir. Buradan ispat tamamlanır.[1] □

S^n de herhangi bir M altmanifoldu $\mathbb{R}^{n+1}$ de de doğal olarak bir altmanifolddur. Bu ilişkiyi kullanarak küredeki minimal altmanifoldlar için bazı özellikler verildi. Tersine küredeki bir M altmanifoldunun özellikleri M üzerinde ki koni CM vasıtasıyla Öklid uzayında minimal altmanifoldların belirli özelliklerini de gösterir.

Küredeki altmanifold $M \to S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ olsun. M üzerinde ki koni CM, $(x,t) \to tx$ tarafından tanımlanan $M \times [0,1] \to \mathbb{R}^{n+1}$ haritası altındaki görüntüsüdür. Burada $x \in M$, $t \in [0,1]$ dır. Yani

$$CM = \left\{ tx \in \mathbb{R}^{n+1};\ x \in M, t \in [0,1] \right\}.$$

M, S^n de tamamen jeodezik değilse CM'nin tekliği $t=0$ dır. Tekliği önlemek için aynı harita altındaki $M \times [\varepsilon, 1]$ görüntüsü olan CM_ε kesik konisini düşünüyoruz, burada ε herhangi bir pozitif sayıdır. Küredeki herhangi bir M altmanifoldu ve M üzerinde ki koni CM yakından ilişkili nesnelerdir. M boyunca S^n de bir yerel ortonormal çatı alanı $\{e_i, e_a\}$ seçelim. Daha sonra orijine paralel olarak öteleyen ışınlar boyunca $\mathbb{R}^{n+1}$ dek yerel vektör alanları E_i ve E_a elde ederiz. Açık olarak

$$E_i = \frac{1}{r} e_i \quad , \quad E_a = \frac{1}{r} e_a$$

dir, burada r orijinin yöndeş noktaya olan uzaklığıdır. τ ışınlardaki birim teğet vektörü

belirtsin. Açık olarak $\nabla_\tau \tau = 0$ dır. Böylece, $\{E_i, E_a, \tau\}$ formu $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir yerel ortonormal çatı alanı ve $\{E_i, \tau\}$ CM_ε da bir çatı alanıdır.

$\mathbb{R}^{n+1}$ de CM_ε için $\overline{H}$ ve $\overline{B}$ sırasıyla ortalama eğrilik ve ikinci temel form olsun. M içinde H ve B yi belirtelim. Elde edilen hesaplamalarla

$$\nabla_{E_i} E_j = -\frac{1}{r} \delta_{ij} \tau + \frac{1}{r} h_{aij} E_a \tag{4.2.5}$$

$$\overline{H} = \frac{1}{(m+1)r} h_{aii} E_a = \frac{m}{(m+1)r^2} H, \tag{4.2.6}$$

ve

$$\left|\overline{B}\right|^2 = \frac{1}{r^2} \left|B\right|^2. \tag{4.2.7}$$

[4]

Önerme 4.2.1. $\mathbb{R}^{n+1}$ *de* CM_ε *paralel ortalama eğriliğidir gerek ve yeter şart* S^n *de* M *bir minimal altmanifolddur. [4]*

Üç boyutlu Öklidyen uzayın helikoid ve katenoid yüzeyleri birer minimal yüzey örneğidir. Her yüzey aynı zamanda bir altmanifold olarak düşünülebileceğinden her minimal yüzey veya hiperyüzey aynı zamanda bir minimal altmanifold örneğidir.

Katenoid bir zincir eğrisinin dönmesidir. Katenoid ve düzlem, yalnızca minimal yüzey olan dönme yüzeyleridir. Katenoidin parametrik denklemi

$$\begin{aligned} x &= c\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\cos u \\ y &= c\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\sin u \\ z &= v \end{aligned}$$

dır. Katenoidin birinci ve ikinci temel formlarını hesaplamak için ilk olarak

$$\begin{aligned} \sigma(u,v) &= (c\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\cos u, c\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\sin u, v) \\ \sigma_u(u,v) &= (-c\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\sin u, c\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\cos u, 0) \\ \sigma_v(u,v) &= (\sinh\left(\frac{v}{c}\right)\cos u, \sinh\left(\frac{v}{c}\right)\sin u, 1) \\ \sigma_{uu}(u,v) &= (-c\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\cos u, -c\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\sin u, 0) \\ \sigma_{vv}(u,v) &= (\frac{1}{c}\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\cos u, \frac{1}{c}\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\sin u, 0) \\ \sigma_{uv}(u,v) &= (-\sinh\left(\frac{v}{c}\right)\sin u, \sinh\left(\frac{v}{c}\right)\cos u, 0).[6] \end{aligned}$$

Birinci temel form katsayıları

$$\begin{aligned} E &= \|\sigma_u\|^2 = c^2\cosh^2\left(\frac{v}{c}\right)\sin^2 u + c^2\cosh^2\left(\frac{v}{c}\right)\cos^2 u = c^2\cosh^2\left(\frac{v}{c}\right) \\ F &= \sigma_u\cdot\sigma_v = -c\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\sin u\sinh\left(\frac{v}{c}\right)\cos u + c\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\cos u c\sinh\left(\frac{v}{c}\right)\sin u = 0 \\ G &= \|\sigma_v\|^2 = \sinh^2\left(\frac{v}{c}\right)\cos^2 u + \sinh^2\left(\frac{v}{c}\right)\sin^2 u + 1 = \cosh^2\left(\frac{v}{c}\right).[5] \end{aligned}$$

İkinci temel form katsayıları ise

$$N = \frac{\sigma_u\times\sigma_v}{\|\sigma_u\times\sigma_v\|} = \frac{(\cos u, \sin u, -\sinh\frac{v}{c})}{\cosh\frac{v}{c}}$$

$$L = N\cdot\sigma_{uu} = \frac{(\cos u, \sin u, -\sinh\frac{v}{c})}{\cosh\frac{v}{c}}\cdot(-c\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\cos u, -c\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\sin u, 0) = -c$$

$$M = N\cdot\sigma_{uv} = \frac{(\cos u, \sin u, -\sinh\frac{v}{c})}{\cosh\frac{v}{c}}\cdot(\frac{1}{c}\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\cos u, \frac{1}{c}\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\sin u, 0) = 0$$

$$N = N\cdot\sigma_{vv} = \frac{(\cos u, \sin u, -\sinh\frac{v}{c})}{\cosh\frac{v}{c}}\cdot(\frac{1}{c}\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\cos u, \frac{1}{c}\cosh\left(\frac{v}{c}\right)\sin u, 0) = \frac{1}{c}.[5]$$

O halde katenoidin ortalama eğriliği

$$H = \frac{LG - 2MF + EN}{2(EG - F^2)} = 0$$

dır. [6]

Minimal yüzey tanımından, ortalama eğriliği 0 olduğu için katenoid minimaldir.

Helikoid Bir dairesel helisin eksenine düşen dikmeler tarafından oluşturulan yüzeye helikoid denir. 0'dan 2π'ye kadar değişen v için bir helikoidin parametrik denklemi

$$x(u,v) = u\cos v$$

$$y(u,v) = u\sin v$$

$$z(u,v) = cv$$

dir. $z = cv$ yerine $z = -cv$ yazılması helikoid yerine koniyi verir.

Helikoidin birinci ve ikinci temel formlarını hesaplamak için ilk olarak

$$\sigma(u,v) = (u\cos v, u\sin v, cv)$$

$$\sigma_u(u,v) = (\cos v, \sin v, 0)$$

$$\sigma_v(u,v) = (-u\sin v, u\cos v, c)$$

$$\sigma_{uu}(u,v) = (0,0,0)$$

$$\sigma_{uv}(u,v) = (-\sin v, \cos v, 0)$$

$$\sigma_{vv}(u,v) = (-u\cos v, -u\sin v, 0)\,.[6]$$

eşitlikleri elde edilir. Bu yüzey için, birinci temel form katsayıları

$$E = \|\sigma_u\|^2 = \cos^2 v + \sin^2 v = 1$$

$$F = \sigma_u \cdot \sigma_v = -u \cos v \sin v + u \sin v \cos v + 0c = 0$$

$$G = \|\sigma_v\|^2 = .u^2 \sin^2 v + u^2 \cos^2 v + c^2 = c^2 + u^2.[5]$$

olarak bulunur. İkinci temel form katsayıları ise

$$N = \frac{\sigma_u \times \sigma_v}{\|\sigma_u \times \sigma_v\|} = \frac{(c \sin v, -c \cos v, u)}{\sqrt{c^2 + u^2}}$$

$$\begin{aligned}
L = N \cdot \sigma_{uu} &= \frac{(c \sin v, -c \cos v, u)}{\sqrt{c^2 + u^2}} \cdot (0, 0, 0) = 0 \\
M = N \cdot \sigma_{uv} &= \frac{(c \sin v, -c \cos v, u)}{\sqrt{c^2 + u^2}} \cdot (-\sin v, \cos v, 0) = -\frac{c}{\sqrt{c^2 + u^2}} \\
N = N \cdot \sigma_{vv} &= \frac{(c \sin v, -c \cos v, u)}{\sqrt{c^2 + u^2}} \cdot (-u \cos v, -u \sin v, 0) = 0.[5]
\end{aligned}$$

şeklindenir. O halde helikoidin ortalama eğriliği

$$H = \frac{LG - 2MF + EN}{2(EG - F^2)} = 0$$

dır.[6]

Minimal yüzey tanımından, ortalama eğriliği 0 olduğu için helikoid minimaldir.

5. KATILIK TEOREMİ

Lineer olmayan denklemler tarafından tanımlanan bir geometrik değişmezlik pek çok durumda katılık özelliklerine sahiptir. İkinci temel formun kare formu durumundadır. Bu olgu J. Simons tarafından ortaya çıkarıldı. İlk olarak kullanışlı Bochner tekniğini minimum altmanifold teorisine uyguladı.

M üzerindeki $Hom(\odot^2 TM, NM)$ vektör demetinin kesit alanı olarak görülen, $M \to \overline{M}$ minimal immersiyonu ile B ikinci temel form olsun. $Hom(\odot^2 TM, NM)$ üzerindeki bir bağlantı, TM ve NM den doğal olarak indirgenmiştir. Bu bir E Riemann vektör demetinin herhangi bir kesiti üzerinde hareket eden ∇^2 iz-Laplasyan operatörü vardır. Eğer baz manifoldları kompakt ise ∇^2, $\Gamma(E)$ üzerinde global iç çarpıma göre yarı negatif ve self-adjoint diferansiyel operatör olduğunu biliyoruz. $\nabla^2 B$'yi hesaplamak için bu demette konu ile ilgili bazı kesitleri aşağıdaki şekilde verebiliriz. [4]

Tanım 5.0.1.

$$\widetilde{B} = B \circ B^t \circ B$$

burada B^t, B'nin eşlenik haritasıdır. [4]

Tanım 5.0.2.

$$\underline{B}_{XY} = \sum_{j=1}^{p} (B_{A^{v_j} A^{v_j}(X) Y} + B_{X A^{v_j} A^{v_j}(Y)} - 2 B_{A^{v_j}(X) A^{v_j}(Y)}) \tag{5.0.1}$$

burada v_j normal uzayın temel vektörleri ve p ekboyutudur.

$\underline{B}_{XY}$ 'nin X ve Y'de simetrik olduğu açıktır. Bu $Hom(\odot^2 TM, NM)$ demetin kesitidir. [4]

Lemma 5.0.1.

$$\langle \underline{B}_{XY}, v \rangle = \sum_{j=1}^{p} \langle adA^{v_j} adA^{v_j} A^v(X), Y \rangle ,$$

burada v bir normal vektör ve $(adA)B = [A, B]$ dır. [4]

İspat.

$$
\begin{aligned}
\text{Sağ taraf} &= \sum \langle adA^{v_j}\left[A^{v_j}, A^{v}\right](X), Y\rangle \\
&= \sum \langle [A^{v_j}, [A^{v_j}, A^{v}]](X), Y\rangle \\
&= \sum \langle (A^{v_j}[A^{v_j}, A^{v}] - [A^{v_j}, A^{v}]A^{v_j})(X), Y\rangle \\
&= \sum \langle A^{v_j}A^{v_j}A^{v}(X) + A^{v}A^{v_j}A^{v_j}(X) - 2A^{v_j}A^{v}A^{v_j}(X), Y\rangle \\
&= \sum (\langle A^{v}(X), A^{v_j}A^{v_j}(Y)\rangle + \langle A^{v}(Y), A^{v_j}A^{v_j}(X)\rangle - 2\langle A^{v}A^{v_j}(X), A^{v_j}(Y)\rangle) \\
&= \sum (\left\langle B_{XA^{v_j}A^{v_j}(Y)}, v\right\rangle + \left\langle B_{YA^{v_j}A^{v_j}(X)}, v\right\rangle - 2\left\langle B_{A^{v_j}(X)A^{v_j}(Y)}, v\right\rangle) \\
&= \langle \underline{B}_{XY}, v\rangle
\end{aligned}
$$

elde edelim. [4] □

Tanım 5.0.3.

$$
\widetilde{R}_{XY} = \sum_{j=1}^{n} \left[(\nabla_X \overline{R})_{Ye_j}e_j + (\overline{\nabla}_{e_j}\overline{R})_{Xe_j}Y\right]^N, \qquad (5.0.2)
$$

burada M'nin boyutu n ve $\{e_j\}$, M' de yerel ortonormal çatı alanıdır.[4]

Lemma 5.0.2. *$\widetilde{R}_{XY}$, $\{e_j\}$nin seçiminden bağımsızdır ve simetriktir. $\widetilde{R}_{XY} = \widetilde{R}_{YX}$ dir. [4]*

İspat. $(\overline{\nabla}_X\overline{R})_{YZ}$ nin bir tensör olduğunu kanıtlamak yeterlidir. $X = x^i e_i$, $Y = y^i e_i$, $Z = z^i e_i$, $W = w^i e_i$ olsun. Bundan dolayı

$$
\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_X\overline{R})_{YZ}W &= (\overline{\nabla}_X(\overline{R}_{YZ}W) - \overline{R}_{\nabla_X YZ}W - \overline{R}_{Y\nabla_X Z}W - \overline{R}_{YZ}(\nabla_X W) \\
&= x^i\overline{\nabla}_{e_i}(y^j z^k w^l \overline{R}_{e_je_k}e_l) - x^i y^j_{,i} z^k w^l \overline{R}_{e_je_k}e_l - x^i y^j z^k_{,i} w^l \overline{R}_{e_je_k}e_l \\
&\qquad - x^i y^j z^k w^l_{,i}\overline{R}_{e_je_k}e_l \\
&= x^i y^j z^k w^l \overline{\nabla}_{e_i}\overline{R}_{e_je_k}e_l
\end{aligned}
$$

bu $(\overline{\nabla}_X\overline{R})_{YZ}W$ nın bir tensör olduğunu gösterir. $\sum_{j=1}^{n}(\overline{\nabla}_X\overline{R})_{Ye_j}e_j$ ve $\sum_{j=1}^{n}(\overline{\nabla}_{e_j}\overline{R})_{Xe_j}Y$ nin $\{e_j\}$ seçiminden bağımsız olduğunu gösterir. Şimdi bir $\{e_j\}$ yerel çatı alanı, x'i X ve Y 'nin yakınında seçtik, böylece $\nabla e_j\,|_x = \nabla X\,|_x =$

$\nabla Y\mid_x$ dir. (5.0.2) de birinci çarpan için ikinci Bianchi özdeşliğini ve ikinci çarpan için Birinci Bianchi özdeşliğini kullanarak

$$\begin{aligned}\widetilde{R}_{XY} &= -\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\overline{\nabla}_{e_j}\overline{R}_{XY}\right)e_j+\left(\overline{\nabla}_Y\overline{R}_{e_jX}\right)e_j+\left(\overline{\nabla}_{e_j}\overline{R}_{YX}\right)e_j+\left(\overline{\nabla}_{e_j}\overline{R}_{e_jY}\right)X\right]^N\\ &= -\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\overline{\nabla}_Y\overline{R}\right)_{e_jX}e_j+\left(\overline{\nabla}_{e_j}\overline{R}\right)_{e_jY}X\right]^N\\ &= \widetilde{R}_{YX}\end{aligned}$$

bulunur. [4] □

Tanım 5.0.4.

$$\begin{aligned}\underline{R}_{XY} = \sum_{j=1}^{n}\Big[&2\overline{R}_{Ye_j}(B_{Xe_j})+2\overline{R}_{Xe_j}(B_{Ye_j})-B_{X(\overline{R}_{Ye_j}e_j)^T}-B_{Y(\overline{R}_{Xe_j}e_j)^T}\\ &+\overline{R}_{B_{XY}e_j}e_j-2B_{e_j(\overline{R}_{Xe_j}Y)^T}\Big]^N.\end{aligned}\tag{5.0.3}$$

Açıkçası $Hom(\odot^2TM,NM)$ bir kesittir. Kolayca görülür ki (5.0.3) deki ilk 5 terim X ve Y'de simetriktir. (5.0.3) deki son teriminde olduğu gibi X ve Y'de simetriktir, çünkü

$$B_{e_j(R_{Xe_j}Y)^T}=B_{e_je_k}\left\langle\overline{R}_{Xe_j}Y,e_k\right\rangle$$

ve B ve R'nin simetrik özellikleridir.[4]

Teorem 5.0.1. *$\overline{M}$ de M bir minimal altmanifold ve B ikinci temel form olsun. O halde*

$$\nabla^2B=-\widetilde{B}-\underline{B}+\widetilde{R}+\underline{R}\tag{5.0.4}$$

dır.[4]

İspat. $x\in M$ nin yakınında M nin bir yerel ortonormal teğet çatı alanı $\{e_i\}$ olsun. x yakınında M nin $X,Y,...$ teğet vektör alanı ve μ,v normal vektör alanı ile

$$\nabla e_i\mid_x=\nabla_{e_i}X\mid_x=\nabla_{e_i}Y\mid_x=...=\nabla_{e_i}\mu\mid_x=\nabla_{e_i}v\mid_x=...=0$$

olsun. Bu nedenle

$$\overline{\nabla}_X Y\,|_x = \overline{\nabla}_X Y\,|_x - \nabla_X Y\,|_x = (\overline{\nabla}_X Y)^N_x = B_{XY},$$

$$\overline{\nabla}_X \mu\,|_x = \overline{\nabla}_X \mu\,|_x - \nabla_X \mu\,|_x = (\overline{\nabla}_X \mu)^T_x = -A^\mu(X),$$

$$\nabla_{XY}\,|_x = \nabla_X \nabla_Y\,|_x - \nabla_{\nabla_X Y}\,|_x = \nabla_X \nabla_Y\,|_x\,.$$

Codazzi denkleminden x

$$\begin{aligned}
(\nabla^2 B)_{XY} &= (\nabla_{e_i}\nabla_{e_i} B)_{XY} \qquad (5.0.5)\\
&= \nabla_{e_i}(\nabla_{e_i} B)_{XY} - (\nabla_{e_i} B)_{\nabla_{e_i} XY} - (\nabla_{e_i} B)_{X\nabla_{e_i} Y}\\
&= \nabla_{e_i}\left[(\nabla_X B)_{e_i Y} + (\widetilde{R}_{Xe_i} Y)^N\right]\\
&= \nabla_{e_i}\left[(\nabla_X B)_{e_i Y}\right] + \nabla_{e_i}(\widetilde{R}_{Xe_i} Y)^N\\
&= (\nabla_{e_i}\nabla_X B)_{e_i Y} + \nabla_{e_i}(\widetilde{R}_{Xe_i} Y)^N\\
&= (\nabla_X\nabla_{e_i} B)_{e_i Y} + (R_{Xe_i} B)_{e_i Y} + \nabla_{e_i}(\widetilde{R}_{Xe_i} Y)^N\\
&= \nabla_X(\nabla_{e_i} B)_{e_i Y} + (R_{Xe_i} B)_{e_i Y} + \nabla_{e_i}(\widetilde{R}_{Xe_i} Y)^N\\
&= \nabla_X(\widetilde{R}_{Ye_i} e_i)^N + (R_{Xe_i} B)_{e_i Y} + \nabla_{e_i}(\widetilde{R}_{Xe_i} Y)^N\\
&= A + B + C
\end{aligned}$$

(5.0.5) deki her bir terimi ayrı ayrı inceleyelim.

$$\begin{aligned}
A &= \left[\overline{\nabla}_X(\widetilde{R}_{Ye_i} e_i)^N\right]^N\\
&= \left[(\overline{\nabla}_X \widetilde{R})_{Ye_i} e_i + \widetilde{R}_{B_{XYe_i}} e_i + \widetilde{R}_{YB_{Xe_i}} e_i + \widetilde{R}_{Ye_i}(B_{Xe_i})\right]^N - B_{X(\widetilde{R}_{Ye_i} e_i)^T}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C &= \left[\overline{\nabla}_{e_i}(\overline{R}_{Xe_i} Y)^N\right]^N\\
&= \left[\overline{\nabla}_{e_i}(\overline{R}_{Xe_i} Y) - \overline{\nabla}_{e_i}(\overline{R}_{Xe_i} Y)^T\right]^N\\
&= \left[(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{R})_{Xe_i} Y + \overline{R}_{B_{e_i X} e_i} Y + \overline{R}_{XB_{e_i e_i}} Y + \overline{R}_{Xe_i} B_{e_i Y}\right]^N - B_{e_i(\overline{R}_{Xe_i} Y)^T}\\
&= \left[(\overline{\nabla}_{e_i}\overline{R})_{Xe_i} Y + \overline{R}_{B_{e_i X} e_i} Y + \overline{R}_{Xe_i} B_{e_i Y}\right]^N - B_{e_i(\overline{R}_{Xe_i} Y)^T}
\end{aligned}$$

$$B = (R_{Xe_i} B)_{e_i Y} = R_{Xe_i} B_{e_i Y} - B_{R_{Xe_i} e_i Y} - B_{e_i R_{Xe_i} Y}.$$

Gauss ve Ricci denklemlerinden

$$\left\langle \overline{R}_{XY}Z, W\right\rangle = \langle R_{XY}Z, W\rangle + \left\langle Q^T_{XY}Z, W\right\rangle,$$

$$\left\langle \overline{R}_{XY}\mu, v\right\rangle = \langle R_{XY}\mu, v\rangle + \left\langle Q^N_{XY}\mu, v\right\rangle,$$

burada

$$\left\langle Q^T_{XY}Z, W\right\rangle = \langle B_{XW}, B_{YZ}\rangle - \langle B_{XZ}, B_{YW}\rangle,$$

$$\left\langle Q^N_{XY}\mu, v\right\rangle = \langle [A^v, A^\mu](Y), X\rangle.$$

Bundan dolayı

$$B = (\overline{R}_{Xe_i}B_{e_iY})^N - Q^N_{Xe_i}B_{e_iY} - B_{(\overline{R}_{Xe_i}e_i)^TY} + B_{Q^T_{Xe_i}e_iY} - B_{e_i(\overline{R}_{Xe_i}Y)^T} + B_{e_iQ^T_{Xe_i}Y}.$$

A, B ve C'yi (5.0.5)'de yerine yazarsak

$$\left(\nabla^2 B\right)_{XY} = \widetilde{R}_{XY} + \underline{R}_{XY} + A_0 + B_0 + C_0, \tag{5.0.6}$$

burada

$$A_0 = -Q^N_{Xe_i}B_{e_iY} \quad , \quad B_0 = B_{Q^T_{Xe_i}e_iY} \quad , \quad C_0 = B_{e_iQ^T_{Xe_i}Y}.$$

Şimdi (5.0.6)'dan A_0, B_0 ve C_0 hesaplayalım.

$$\begin{aligned}
\langle A_0, \mu\rangle &= -\left\langle Q^N_{Xe_i}B_{e_iY}, \mu\right\rangle = -\left\langle \left[A^\mu, A^{B_{e_iY}}\right]e_i, X\right\rangle \\
&= \left\langle A^{B_{e_iY}}A^\mu e_i, X\right\rangle - \left\langle A^\mu A^{B_{e_iY}}e_i, X\right\rangle \\
&= \langle A^\mu(e_i), e_j\rangle \left\langle A^{B_{e_iY}}(X), e_j\right\rangle - \left\langle A^{B_{e_iY}}(e_i), e_j\right\rangle \langle A^\mu(X), e_j\rangle \\
&= \langle A^\mu(e_i), e_j\rangle \left\langle B_{Xe_j}, B_{e_iY}\right\rangle - \left\langle B_{e_iY}, B_{e_ie_j}\right\rangle \langle A^\mu(X), e_j\rangle \\
&= \langle A^\mu(e_i), e_j\rangle \langle A^{v_\alpha}(X), e_j\rangle \langle A^{v_\alpha}(Y), e_i\rangle \\
&\qquad\qquad - \langle A^{v_\alpha}(Y), e_i\rangle \langle A^{v_\alpha}(e_i), e_j\rangle \langle A^\mu(X), e_j\rangle \\
&= \langle A^\mu(e_i), A^{v_\alpha}(X)\rangle \langle A^{v_\alpha}(Y), e_i\rangle - \langle A^{v_\alpha}(Y), e_i\rangle \langle A^{v_\alpha}(e_i), A^\mu(X)\rangle \\
&= \langle A^{v_\alpha}(Y), e_i\rangle \langle A^\mu A^{v_\alpha}(X) - A^{v_\alpha}A^\mu(X), e_i\rangle \\
&= \langle A^{v_\alpha}(Y), [A^\mu, A^{v_\alpha}](X)\rangle \\
&= \langle A^{v_\alpha}[A^\mu, A^{v_\alpha}](X), Y\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle B_0, \mu\rangle &= \left\langle B_{Q^T_{Xe_i}e_iY}, \mu\right\rangle = \left\langle A^{\mu}(Y), Q^T_{Xe_i}e_i\right\rangle \\
&= \left\langle B_{XA^{\mu}(Y)}, B_{e_ie_i}\right\rangle - \left\langle B_{Xe_i}, B_{e_iA^{\mu}(Y)}\right\rangle \\
&= -\left\langle B_{Xe_i}, v_\alpha\right\rangle \left\langle B_{e_iA^{\mu}(Y)}, v_\alpha\right\rangle \\
&= -\left\langle A^{v_\alpha}(X), e_i\right\rangle \left\langle A^{v_\alpha}A^{\mu}(Y), e_i\right\rangle \\
&= -\left\langle A^{v_\alpha}(X), A^{v_\alpha}A^{\mu}(Y)\right\rangle \\
&= -\left\langle A^{\mu}A^{v_\alpha}A^{v_\alpha}(X), Y\right\rangle,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle C_0, \mu\rangle &= \left\langle B_{e_iQ^T_{Xe_i}Y}, \mu\right\rangle = \left\langle A^{\mu}(e_i), Q^T_{Xe_i}Y\right\rangle \\
&= \left\langle B_{XA^{\mu}(e_i)}, B_{e_iY}\right\rangle - \left\langle B_{XY}, B_{e_iA^{\mu}(e_i)}\right\rangle \\
&= \left\langle A^{v_\alpha}(X), A^{\mu}(e_i)\right\rangle \left\langle A^{v_\alpha}(Y), e_i\right\rangle - \left\langle A^{v_\alpha}(X), Y\right\rangle \left\langle A^{v_\alpha}A^{\mu}(e_i), e_i\right\rangle \\
&= \left\langle A^{\mu}A^{v_\alpha}(X), e_i\right\rangle \left\langle A^{v_\alpha}(Y), e_i\right\rangle - \left\langle A^{v_\alpha}(X), Y\right\rangle \left\langle A^{v_\alpha}(e_i), A^{\mu}(e_i)\right\rangle \\
&= \left\langle A^{\mu}A^{v_\alpha}(X), A^{v_\alpha}(Y)\right\rangle - \left\langle A^{v_\alpha}(X), Y\right\rangle \left\langle A^{v_\alpha}(e_i), A^{\mu}(e_i)\right\rangle
\end{aligned}$$

Bu nedenle,

$$\begin{aligned}
\langle A_0 + B_0 + C_0, \mu\rangle &= \left\langle A^{v_\alpha}\left[A^{\mu}, A^{v_\alpha}\right](X), Y\right\rangle \\
&- \left\langle A^{\mu}A^{v_\alpha}A^{v_\alpha}(X), Y\right\rangle + \left\langle A^{\mu}A^{v_\alpha}(X), A^{v_\alpha}(Y)\right\rangle \\
&- \left\langle A^{v_\alpha}(X), Y\right\rangle \left\langle A^{v_\alpha}(e_i), A^{\mu}(e_i)\right\rangle \\
&= \left\langle A^{v_\alpha}\left[A^{\mu}, A^{v_\alpha}\right](X), Y\right\rangle + \left\langle \left[A^{v_\alpha}, A^{\mu}\right]A^{v_\alpha}(X), Y\right\rangle \\
&- \left\langle A^{v_\alpha}(X), Y\right\rangle \left\langle A^{v_\alpha}(e_i), A^{\mu}(e_i)\right\rangle \\
&= \left\langle \left[\left[A^{v_\alpha}, A^{\mu}\right], A^{v_\alpha}\right](X), Y\right\rangle - \left\langle B_{XY}, v_\alpha\right\rangle \left\langle B^t(v_\alpha), B^t(\mu)\right\rangle \\
&= \left\langle \left[\left[A^{v_\alpha}, A^{\mu}\right], A^{v_\alpha}\right](X), Y\right\rangle - \left\langle B_{XY}, B \circ B^t(\mu)\right\rangle \\
&= \left\langle -\underline{B}_{XY}, \mu\right\rangle - \left\langle (B \circ B^t \circ B)_{XY}, \mu\right\rangle \\
&= \left\langle -\underline{B}_{XY} - \widetilde{B}_{XY}, \mu\right\rangle
\end{aligned} \tag{5.0.7}$$

□

(5.0.6)'nın yerine (5.0.7) yazarsak (5.0.4) verir. Böylece ispat tamamlanmış olur. [4]

Eğer $\overline{M}$ ambient manifoldu yerel simetrik ise, yani $\overline{\nabla}\ \overline{R} \equiv 0$ bu durumda $\widetilde{R} \equiv 0$ dır. Özellikle $\overline{M}$'nin kesit eğriliği c ise $\widetilde{R} = 0$ ayrıca $\underline{R} = ncB$ dir. Aslında

$$\overline{R}_{XY}Z = c(\langle X, Z\rangle Y - \langle Y, Z\rangle X)$$

için

$$\overline{R}_{Ye_j}(B_{Xe_j}) = 0, \quad (\overline{R}_{Ye_j}e_j)^T = c(1-n)Y,$$

$$\overline{R}_{B_{XY}e_j}e_j = -cnB_{XY}, \quad (\overline{R}_{Xe_j}Y)^T = c(\langle X, Y\rangle e_j - \langle Y, e_j\rangle X),$$

$$B_{e_j(\overline{R}_{Xe_j}Y)^T} = -cB_{XY}.$$

Daha sonra

$$\underline{R}_{XY} = ncB_{XY}$$

dır.[4]

Teorem 5.0.2. *$\overline{M}$ bir Riemann manifoldu ile c sabit kesit eğriliği ve M, $\overline{M}$ de bir minimal altmanifold ve B ikinci temel form olsun. Bu durumda*

$$\nabla^2 B = -\widetilde{B} - \underline{B} + ncB \tag{5.0.8}$$

dır.

Eğer M nin boyutu 1 ise $\underline{B} = 0$ olduğunu tanımdan biliyoruz. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\left\langle \widetilde{B}, B\right\rangle &= \left\langle B^t \circ B, B^t \circ B\right\rangle \\
&= \left\langle B^t \circ B_{e_ie_j}, e_k \odot e_l\right\rangle \left\langle B^t \circ B_{e_ie_j}, e_k \odot e_l\right\rangle \\
&= \left\langle B_{e_ie_j}, B_{e_ke_l}\right\rangle \left\langle B_{e_ie_j}, B_{e_ke_l}\right\rangle \\
&= |B|^4
\end{aligned}$$

Bu durumda

$$\begin{aligned}
\left\langle \nabla^2 B, B\right\rangle &= \left\langle -\widetilde{B} - \underline{B} + \widetilde{R} + \underline{R}, B\right\rangle \\
&= -\left\langle \widetilde{B}, B\right\rangle - \langle \underline{B}, B\rangle + \left\langle \widetilde{R}, B\right\rangle + \langle \underline{R}, B\rangle \\
&= -|B|^4 + nc|B|^2
\end{aligned} \tag{5.0.9}$$

dir. [4]

Teorem 5.0.3. *Birim kürede $M \to S^{n+1}$ bir kompakt yönlü minimal hiperyüzey ile B ikinci temel form olsun. $|B|^2 < n$ ise $B \equiv 0$ dır yani M, S^{n+1} de bir total geodezik hiperyüzeydir. [4]*

İspat. (5.0.9) un her iki tarafını M üzerinde birleştirelim.

$$\int_M \left\langle \nabla^2 B, B \right\rangle * 1 = \int_M |B|^2 \left(n - |B|^2\right) \geq 0.$$

Stokes teoremi ile yukarıda ki ifadenin sol tarafı

$$-\int_M |\nabla B|^2 * 1 \leq 0$$

dır. $|B|^2$ sıfırla özdeş değilse sağ taraf sıfır olur. Böylece bir çelişki var. [4] □

Şimdi durumun daha yüksek ekboyutunu inceleyeceğiz.

Lemma 5.0.3.

$$\left\langle \widetilde{B} + \underline{B}, B \right\rangle \leq \left(2 - \frac{1}{p}\right) |B|^4 \tag{5.0.10}$$

burada p ekboyuttur. [4]

İspat. $B \circ B^t : NM \to NM$ simetriktir, öyle ki düşünülen bir noktada $\{v_1, v_2, ..., v_p\}$ yerel normal çatı alanı vardır.

$$B \circ B(v_\alpha) = \lambda_\alpha^2 v_\alpha.$$

$$\sum_\alpha \lambda_\alpha^2 = \left\langle B \circ B^t(v_\alpha), v_\alpha \right\rangle = \left\langle B^t(v_\alpha), B^t(v_\alpha) \right\rangle$$

$$= \langle A^{v_\alpha}, A^{v_\alpha} \rangle = \left\langle B_{e_i e_j}, v_\alpha \right\rangle \left\langle B_{e_i e_j}, v_\alpha \right\rangle = |B|^2,$$

$$
\begin{aligned}
\left\langle \widetilde{B}, B \right\rangle &= \left\langle B \circ B^t \circ B, B \right\rangle = \left\langle B^t \circ B, B^t \circ B \right\rangle \\
&= \left\langle B_{e_ie_j}, B_{e_ke_l} \right\rangle \left\langle B_{e_ie_j}, B_{e_ke_l} \right\rangle \\
&= \left\langle B_{e_ie_j}, v_\alpha \right\rangle \left\langle B_{e_ke_l}, v_\alpha \right\rangle \left\langle B_{e_ie_j}, v_\beta \right\rangle \left\langle B_{e_ke_l}, v_\beta \right\rangle \\
&= \left\langle e_i \odot e_j, B^t(v_\alpha) \right\rangle \left\langle e_k \odot e_l, B^t(v_\alpha) \right\rangle \left\langle e_i \odot e_j, B^t(v_\beta) \right\rangle \left\langle e_k \odot e_l, B^t(v_\beta) \right\rangle \\
&= \left\langle B^t(v_\alpha), B^t(v_\beta) \right\rangle \left\langle B^t(v_\alpha), B^t(v_\beta) \right\rangle \\
&= \left\langle B \circ B^t(v_\alpha), B \circ B^t(v_\alpha) \right\rangle \\
&= \sum \lambda_\alpha^4.
\end{aligned}
$$

Ayrıca

$$
\begin{aligned}
\langle \underline{B}, B \rangle &= \left\langle \underline{B}_{e_ie_j}, v_\alpha \right\rangle \left\langle B_{e_ie_j}, v_\alpha \right\rangle \\
&= \langle [A^{v_\beta}, [A^{v_\beta}, A^{v_\alpha}]] (e_i), e_j \rangle \langle A^{v_\alpha}(e_i), e_j \rangle \\
&= \langle (A^{v_\beta} A^{v_\beta} A^{v_\alpha} - 2A^{v_\beta} A^{v_\alpha} A^{v_\beta} + A^{v_\alpha} A^{v_\beta} A^{v_\beta}), A^{v_\alpha} \rangle .
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle A^{v_\alpha} A^{v_\beta} A^{v_\beta}, A^{v_\alpha} \rangle &= \langle A^{v_\alpha} A^{v_\alpha} A^{v_\beta} A^{v_\beta}, I \rangle \\
&= iz(A^{v_\alpha} A^{v_\alpha} A^{v_\beta} A^{v_\beta}) \\
&= \langle A^{v_\alpha} A^{v_\alpha} A^{v_\beta}, A^{v_\beta} \rangle ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\langle \underline{B}, B \rangle &= \langle A^{v_\beta} A^{v_\beta} A^{v_\alpha} - 2A^{v_\beta} A^{v_\alpha} A^{v_\beta} + A^{v_\beta} A^{v_\beta} A^{v_\alpha}, A^{v_\alpha} \rangle \\
&= \langle A^{v_\beta} A^{v_\beta} A^{v_\alpha} - A^{v_\beta} A^{v_\alpha} A^{v_\beta}, A^{v_\alpha} \rangle - \langle A^{v_\beta} A^{v_\alpha} A^{v_\beta} - A^{v_\beta} A^{v_\beta} A^{v_\alpha}, A^{v_\alpha} \rangle \\
&= \langle A^{v_\beta} A^{v_\alpha} - A^{v_\alpha} A^{v_\beta}, A^{v_\beta} A^{v_\alpha} \rangle - \langle A^{v_\alpha} A^{v_\beta} - A^{v_\beta} A^{v_\alpha}, A^{v_\beta} A^{v_\alpha} \rangle \\
&= \langle A^{v_\alpha} A^{v_\beta} - A^{v_\beta} A^{v_\alpha}, A^{v_\alpha} A^{v_\beta} \rangle - \langle A^{v_\alpha} A^{v_\beta} - A^{v_\beta} A^{v_\alpha}, A^{v_\beta} A^{v_\alpha} \rangle \\
&= \sum_{\alpha \neq \beta} |[A^{v_\alpha}, A^{v_\beta}]|^2 .
\end{aligned}
$$

C, D simetrik matrisi için $|[C, D]|^2$ olduğunu tahmin edelim. Herhangi bir T

ortogonal matrisi için

$$\begin{aligned}\left|T^tDT\right|^2 &= \left\langle T^tDT, T^tDT\right\rangle \\ &= izT^tD^2T = \left\langle T^tD, DT\right\rangle \\ &= \left\langle DT, T^tD\right\rangle = izD^2 = |D|^2,\end{aligned}$$

D'nin genelliğini kaybetmeden diyagonal olduğunu varsayabiliriz. Daha sonra

$$\begin{aligned}|[C,D]|^2 = |CD - DC|^2 &= \sum_{k\neq i}(d_k - d_i)^2 C_{ik}^2 \\ &\leq 2\sum_{k\neq i}(d_k + d_i)^2 C_{ik}^2 \\ &= 2\sum_{k\neq i} d_k^2 C_{ik}^2 + 2\sum_{k\neq i} d_i^2 C_{ik}^2 \\ &\leq 2\sum_k d_k^2 \sum_{i,j} C_{ij}^2 = 2|C|^2|D|^2.\end{aligned}$$

Böylece

$$\langle \underline{B}, B\rangle \leq \sum_{\alpha\neq\beta} |A^{v_\alpha}|^2 |A^{v_\beta}|^2 = 2\sum_{\alpha\neq\beta}\lambda_\alpha^2\lambda_\beta^2,$$

ve o halde

$$\left\langle \widetilde{B} + \underline{B}, B\right\rangle \leq \sum \lambda_\alpha^4 + 2\sum_{\alpha\neq\beta}\lambda_\alpha^2\lambda_\beta^2 = 2\left(\sum\lambda_\alpha^2\right)^2 - \sum\lambda_\alpha^4. \tag{5.0.11}$$

Schwarz eşitsizliğinden

$$\sum\lambda_\alpha^4 \geq \frac{1}{p}\left(\sum\lambda_\alpha^2\right)^2.$$

Bundan dolayı (5.0.11) den (5.0.10) elde edilir ve ispat tamamlanmış olur. [4] □

Teorem 5.0.4. *Birim kürede bir kompakt minimal altmanifold $M \to S^{n+p}$ olsun.*

$$|B|^2 < \frac{n}{2 - \frac{1}{p}}, \tag{5.0.12}$$

ise o zaman $|B|^2 = 0$, yani M, S^{n+p} de bir total geodezik altmanifolddur. [4]

İspat. (5.0.8) ve (5.0.10) den

$$\left\langle \nabla^2 B, B\right\rangle \geq \left(\frac{1}{p} - 2\right)|B|^4 + n|B|^2. \tag{5.0.13}$$

(5.0.13) ün her iki tarafının integralini alalım ve Stokes teoremini kullanırsak

$$0 \geq -\int_M |\nabla B|^2 * 1 = \int_M \langle \nabla^2 B, B \rangle * 1 \geq \int_M \left[\left(\frac{1}{p} - 2 \right) |B|^2 + n \right] |B|^2 * 1,$$

yani

$$\int_M \left[\left(2 - \frac{1}{p} \right) |B|^2 - n \right] |B|^2 * 1 \geq 0.$$

Ancak bu teoremin durumu $|B|$ sıfıra eşit değil ise o

$$\int_M \left[\left(2 - \frac{1}{p} \right) |B|^2 - n \right] |B|^2 * 1 < 0.$$

Bir çelişki var. □

Bu teorem bize, kürede ki kompakt bir minimal altmanifoldun ikinci temel formunun kare normunun her değeri almayacağını söyler. $\left(0, \frac{n}{2-\frac{1}{p}}\right)$ aralığındaki değerleri atlar. Öyleyse görünüyor ki $|B|^2$ dışsal bir değişmezdir. Aslında, Gauss denkleminin skaler eğriliği

$$s = n(n-1) - |B|^2 \leq n(n-1)$$

dir. Böylece skaler eğriliği

$$\left(n(n-1) - \frac{n}{2 - \frac{1}{p}}, n(n-1) \right)$$

aralığında ki değerleri atlar. Bu nedenle katılık teoremi içseldir. Chern-do Carmo-Kobayashi

$$|B|^2 = \frac{n}{2 - \frac{1}{p}}$$

cevap veren küredeki minimal altmanifoldlar üzerinde çalışmış. Böylece ikinci temel form uygun bir çatı alanında belirlenebilir, bu nedenle bu bağlantı biçimi çatı alanına göre uyarlanmıştır. Altmanifoldlar kompakt ise bunlar ya Clifford minimal hiperyüzey ya da Veronese yüzeydir. Sabit skaler eğriliği ile küredeki tüm minimal altmanifoldlar arasında verilen boyutu n ve ekboyutu p için verilen $|B|^2$ ayrık değerler midir sorusunu ortaya attılar. Bu olası değer nedir? Peng–Terng bunu ispatladı. [4]

Teorem 5.0.5. *$S^{n+1}(n \geq 3)$ de M bir kompakt minimal hiperyüzeyi ile ikinci temel formun kare normu $|B|^2$ olsun. Eğer $|B|^2 > n$ ise o zaman $|B|^2 > n + \frac{1}{12n}$ dir. $n = 3$ için $|B|^2 > 3$ ise o zaman $|B|^2 > 6$ dır. [4]*

Uyarı 5.0.1. *$S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ de M nin minimal bir hiperyüzel olduğunu göz önüne alalım. S^n de Mnin birim normal vektör alanı v, $\mathbb{R}^{n+1}$ de sabit vektör a olsun. (4.1.8) dekine benzer bir hesaplama ile*

$$\Delta \langle a, v \rangle = - \langle a, v \rangle |B|^2 , \tag{5.0.14}$$

burada B, S^n de M nin ikinci temel formudur.Bu formülün integrali ve Stokes teoremi kullanılarak Simons dış katılık teoremi şu şekilde verilir:

M, S^n de kompakt bir minimal hiperyüzey, $\mathbb{R}^{n+1}$ de bir sabit vektör ile pozitif iç çarpımın oluşturduğu normal vektördür. O halde M, S^n de bir total geodezik altmanifolddur. [4]

KAYNAKLAR

[1] Şahin, B. (2012). *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi,* Nobel Yayıncılık, Malatya.

[2] Bizim, O. (2013). *Genel Topoloji,* Dora Yayıncılık, Bursa.

[3] Chen, B.Y. (1981). *Geometry of Submanifolds and Its Applications,* Tokyo.

[4] Xin,Y. (2004). *Minimal Submanifolds and Related Topics,* World Scientific Publishing Company, London.

[5] Abbena E., Salamon S., Gray A. (2006). *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces with Mathematica,* Chapman and Hall / CRC, Boca Raton.

[6] Pressley, A. (2001). *Elementary Differential Geometry,* Springer, London.

ÖZGEÇMİŞ

Kişisel Bilgiler

Adı Soyadı	**:**	Ebru GÖKSU
Doğum Yeri ve Yılı	**:**	Malatya, 1994
Medeni Hali	**:**	Bekar
İletişim	**:**	ebru.goksu03@gmail.com

Eğitim

Lisans	**:**	İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2015)
Pedogojik Formasyon	**:**	İnönü Üniversitesi (2015)
Tezli Yüksek Lisans	**:**	İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Ana Bilim Dalı (2018)