Gazi Üniv. Müh. Mim. Fak. Der.
Cilt 30, No 3, 487-501, 2015

Journal of the Faculty of Engineering and Architecture of Gazi University
Vol 30, No 3, 487-501, 2015

KESİR DERECELİ TÜREVİN YENİ YAKLAŞIMININ ÖZELLİKLERİ

Ali KARCI
İnönü Üniversitesi, Mühendislik Fakültesi, Bilgisayar Mühendisliği Bölümü, 44280, Battalgazi, Malatya
ali.karci@inonu.edu.tr

(Geliş/Received: 17.11.2014; Kabul/Accepted: 09.06.2015)

ÖZET

Türev kavramı yaklaşık 300 yıllık bir geçmişi olan konudur. Türevin kesir dereceli olanı da uzun bir geçmişi olan konudur ve üzerinde çok fazla sayıda çalışma yapılmıştır. Bunun sebebi ise, fiziksel sistemlerin kesir dereceli türev ile daha iyi ifade edilebileceği; klasik türevin yerel modellemeye yaradığını, kesir dereceli türevin ise, global modellemeye yaradığının ortaya konulmasıdır. Fakat literatürde yer alan kesir dereceli türev yöntemlerinin eksiklikleri bulunmaktadır. Bu eksiklikler bu çalışmada kısaca gösterildikten sonra Karcı tarafında 2013 yılında kesir dereceli türev için yapılan yeni tanım verilecektir. Ondan sonra bu yeni tanımın klasik türev ile olan ilişkisi ortaya konulduktan sonra türev için verilen yeni tanımın bazı önemli özellikleri üzerinde durulacaktır. Türev işleminin sonucu vektörel büyüklük ve karmaşık sayılar da vektörel büyüklükler olduklarından bu iki kavram arasında bir ilişkinin olması gerekir. Bu çalışmada bu ilişki detaylı olarak ortaya konulacaktır.

Anahtar Kelimeler: Türev, kesirli aritmetik, kesir dereceli türev

THE PROPERTIES OF NEW APPROACH OF FRACTIONAL ORDER DERIVATIVE

ABSTRACT

Derivative concept has got about 300-years history. The fractional order derivative concept also has got a long-term history and there are many studies on this concept. The reason for these studies is the belief of better modelling the physical systems with fractional order derivative; the classical derivative is beneficial to model the physical systems locally and the fractional order derivative is beneficial to model physical systems globally. However, the fractional order derivative methods in literature have deficiencies. In this study, these deficiencies were briefly demonstrated and then a new approach for fractional order derivative which was developed by Karcı in 2013, will be given. After that, the relationships between classical derivative and this new approach will be illustrated and then some properties of this new definition will be given. There must be a relationship between results of derivative process and complex numbers since the result of derivative is a vectorial magnitude and complex numbers are also vectorial magnitudes. This relationship will be given in detail in this study.

Keywords: Derivative, fractional calculus, fractional order derivative

1. GİRİŞ (INTRODUCTION)

Fiziksel sistemlerin matematiksel modelinin oluşturulması, çoğu zaman türev kavramına ihtiyaç duyar, çünkü sistemlerdeki değişimleri ifade edebilmek için bu kavrama ihtiyaç vardır. Eğer bir sistemde değişim söz konusu değilse, o sistemle ilgili çok bir şey yapmaya gerek olmayacaktır. Analizi ve analiz sonuçları önemli olan sistemler dinamik sistemlerdir. Bu sistemler çoğu zaman kendisinin hâlihazırdaki durumu ve değişimi ile beraber ifade edilebilir. Bu amaçla ilk çalışmalar Newton, L'Hospital, Abel, Euler, Riemann, v.b. tarafından yapılmıştır. Kısaca sistemlerin modelini oluşturan bağıntıların/fonksiyonların asimptotik davranışlarını incelemek için bağımsız değişkenlerde meydana gelen en küçük değişikliklere bağıntının/fonksiyonun tepkisini incelemişlerdir [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13].

Türev kavramını ilk kullanan bilim adamı Newton'dur. Isaac Newton, klasik mekaniğin temellerini tasvir ederken bağımsız parametrelerde meydana gelen değişikliklere karşılık bağımlı parametrenin cevabını incelemek için ilk olarak türev kavramına başvuran bilim adamlarından biridir [1]. Newton bu çalışmalarını "Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica" adlı kitapta toplamıştır ve bu kitapta Newton'un geometrik ispatları, yerçekimi kuvveti kanunu ve kütle çekimi kuvvetleri ile ilgili konular bulunmaktadır.

Newton'dan sonra başka bilim adamları da türev kavramı ile ilgilenmişlerdir. L'Hospital diferansiyel aritmetikte ve diferansiyel geometride önemli çalışmalar yapmış bir bilim adamıdır [2], [3]. L'Hôpital, Newton'un çalışmalarını değişim aritmetiği (variation of calculus) olarak genelleştirmiştir. Leibniz de bu alana ilgi duyan önemli bilim adamı olup aynı zamanda diferansiyel aritmetik ve sonsuz aritmetik ile de ilgilenmiştir [4]. Sadece Newton, L'Hospital ve Leibniz türevle ilgilenmemişler; bunlardan başka bilim adamları da bu alanla ilgilenmişler [5] ve iki parametredeki değişimin oranını açıklamaya çalışmışlar ve bu durum bağıntıların/fonksiyonların asimptotik davranışlarını incelemede önemli bir yere sahiptir.

Fonksiyonların asimptotik davranışlarını incelemek için bağımsız parametrelerde meydana gelen çok küçük değişimlerin bağımlı değişkende (fonksiyonda) meydana gelen değişimin incelenmesi gerekir. Türev kavramı fiziksel anlam olarak hareket anlamına gelebilir ve bunun sonucunda türev kavramı ile noktanın, doğrunun ve düzlemin hareketinin geometrisi üzerine çalışmalar yapılmıştır [6].

Türev kavramı yaklaşık üçyüz yıldır üzerinde çalışılan bir konudur. Newton, L'Hospital ve Leibniz türev kavramı ile ilgilenirken türev işleminde dereceyi 1 olarak almışlardır.

Bu konu birçok bilim adamının dikkatini çekmiştir ve türevin derecesinin 1'den farklı olabileceği üzerinde durulmuştur. Bu şekilde çalışma yapan ünlü bazı matematikçiler Newton, L'Hospital, Leibniz, Euler, Abel, Caputo, Riemann, Grünwald, Miller, Ross, v.b. [7], [9], [8], [14]. Bu konuda yapılan çok sayıda çalışmadan sonra kesir dereceli türev kavramı meydana geldi, fakat günümüzde kesir dereceli türev kavramının bütün problemleri henüz tam olarak çözülmemiştir.

Bununla birlikte bu alanda yapılmış çok sayıda çalışma bulunmaktadır; bunlardan bazıları kesirli aritmatik [15], [16], kesir dereceli integral ve türev [17], [18], genelleştirilmiş kesirli aritmetik [19], kesir dereceli integral ve potansiyel [20], kesirli osilatör ve Mittag-Leffler fonksiyonları [21], kesirli gelişim süreçlerinde Mittag-Leffler fonksiyonlarının kullanımı [22], kesirli aritmetik ve dalgalar [23], kesir dereceli diferansiyel denklemler [24], kesirli dereceli integral ve türevin fiziksel anlamı [25], kesirli aritmetikte ayrık doğrudan yöntemler [26], Riemann-Liouville kesirli aritmetiği [27], kesirli aritmetik için kesirli kuvvet yaklaşımı [28], kesir dereceli diferansiyel denklemler [29], kesirli aritmetik için algoritmalar [30], kesirli aritmetik ve kesir dereceli diferansiyel denklemler için numerik yöntemler [31] ve kesir dereceli kaotik sistemler üzerinde yapılan çalışmalar [32].

Fonksiyonların asimptotik davranışı (fonksiyonlarda bağımlı değişkenin değişiminin bağımsız değişkendeki değişime olan oranı - türev) sistem modeli hakkında detaylı bilgi vermektedir ve bu amaçla günümüze kadar yapılan çalışmalar sonucunda kesir dereceli türev kavramının gelişmesi sağlanmıştır. Bundan dolayı kesir dereceli türev kavramının çıkış noktası iki hususta izah edilebilir.

a) Belli bir adıma kadar klasik yolla türev aldıktan sonra ondan sonraki adımda türev derecesinin reel sayı kabul edilmesi

b) $f(x)$ bir fonksiyon olmak üzere bu fonksiyonun $[a,b]$, $a,b\in R$, aralığında sürekli olduğu varsayılsın. $\varepsilon<<1$ ve $\varepsilon\in R^+$ için $f(x)$ fonksiyonu $x=b+\varepsilon$ noktasında sürekli değildir. Süreklilik bölgesinin genişletilmesi amacıyla $f(x)$ fonksiyonunun $x=b+\varepsilon$ noktasında sürekli olduğu varsayılır. Ondan sonra $f(x)$ fonksiyonunun $x=b+2\varepsilon$ noktasında da sürekli olduğu varsayılır. Bu şekilde devam edilerek $f(x)$ fonksiyonun $x=b+n\varepsilon$, $n>>1$, $n\in R^+$ noktasında da sürekli olduğu varsayılır. Bu şekilde süreklilik konusunda bir seri elde edilmiş olur. Literatürde kullanılan kesir dereceli türev tanımları bu süreklilik genişletmesini kullanmaktadırlar.

Türev derecesini tamsayı olduğu kabul edildikten sonra türev işlemini belli bir adıma kadar ilerlettikten sonra dereceyi reel kabul etmek belli başlı eksiklikler ve hatalar getirmektedir. Bu eksiklikleri gidermek amacıyla bazı çalışmalar yapılmıştır [33], [34], [35], [36].

Bir fonksiyonun değişiminin bağıntısı, bir kayakçının rampa üzerindeki hareketine veya bir hortumdan tazyikli suyun hortumdan çıkarken göstermiş olduğu hareket, bağıntı/fonksiyonda meydana gelen değişime benzerdir. Bu sebeplerden dolayı bu çalışmada kesir dereceli türev için yeni bir yaklaşım ortaya konuldu. Ondan sonra bu yeni tanımın (yaklaşımın) klasik türev ile olan ilişkisi ortaya konulduktan sonra türev kavramının karmaşık sayılarla olan ilişkisi ortaya konuldu, çünkü hem türev işleminin sonucu ve hem de karmaşık sayılar vektörel büyüklüklerdir, bundan dolayı ikisi arasında bir ilişki olmalıdır. Son olarak bu yeni yöntemin özellikleri üzerinde duruldu. Bu makalenin yapısı şu şekildedir. İkinci bölümde kesir dereceli türev yöntemleri üzerinde duruldu. Üçüncü bölümde kesir dereceli türev için yeni bir tanım ortaya konuldu ve dördüncü bölümde bu yeni yaklaşımın özellikleri ortaya konuldu. Son olarak bu çalışma beşinci bölüm ile sonuçlandırıldı.

2. KESİR DERECELİ TÜREV YÖNTEMLERİ (FRACTIONAL ORDER DERIVATIVE METHODS)

Literatür incelendiğinde kesirli dereceden türevlerle ilgili olarak çok sayıda çalışma yapılmış olduğunu ve çalışmaların günümüzde de yoğun bir şekilde devam ettiğini görmekteyiz. Kesirli türevle ilgili 1730'lu yıllardan günümüze kadar farklı şekillerde tanımlar yapılmıştır. Yapılan tanımlar ve yaklaşımlara kısaca değinilecek olursa;

a) **L.Euler (1730) tanımı**:

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = m(m-1)...(m-n+1)x^{m-n} \tag{1}$$

formülünü gamma fonksiyonunu kullanarak

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} \tag{2}$$

şeklinde bir tanım yapmıştır. Gamma fonksiyonun tanımı aşağıdaki denklem (3) verilmiştir.

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty e^{-t} t^{z-1} dt \tag{3}$$

şeklindedir.

b) **Riemann-Liouville tanımı**:

$$_a D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(v)dv}{(t-v)^{\alpha-n+1}} \tag{4}$$

şeklinde tanımlanmıştır.

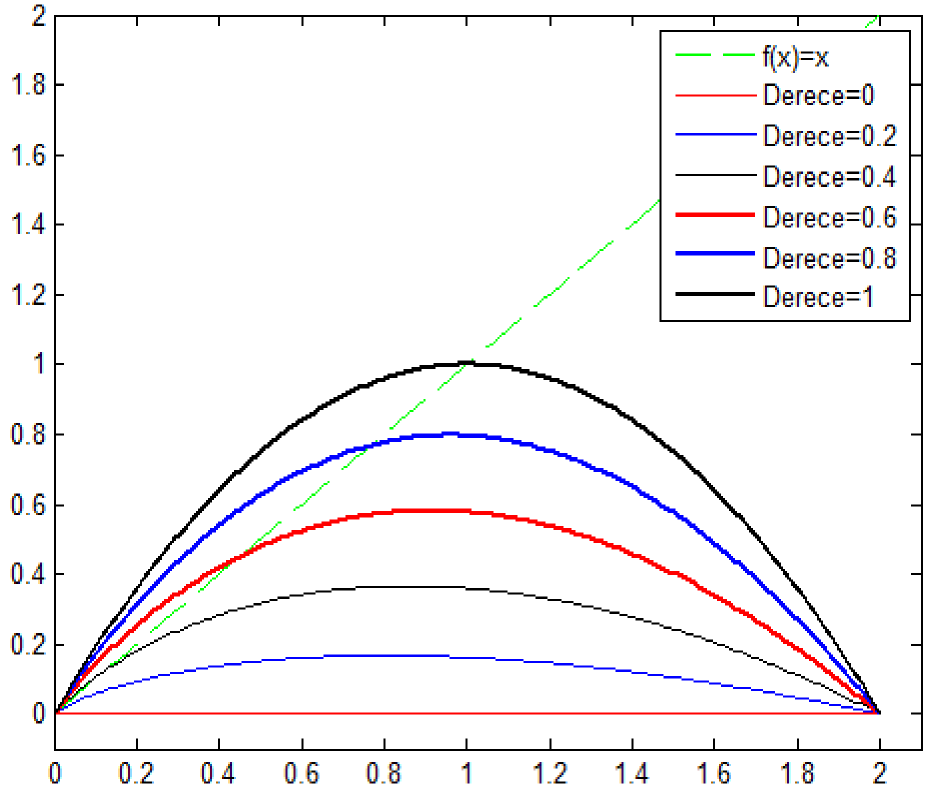
c) **Caputo (1967) tanımı:**

$$_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(v)dv}{(t-v)^{\alpha+1-n}} \tag{5}$$

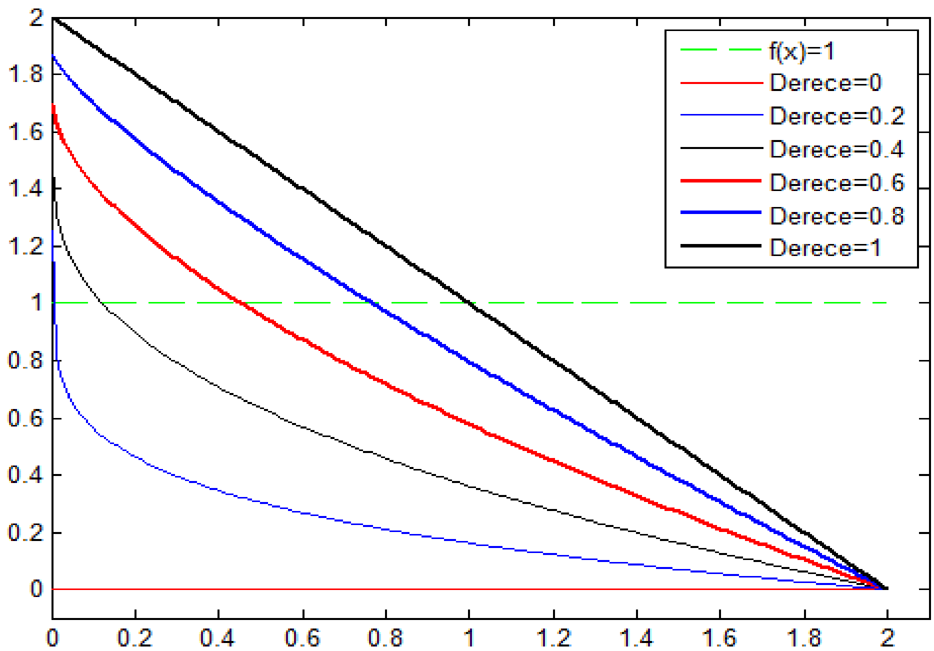
şeklindedir.

Yukarıda sözü edilen kesirli dereceden türev tanımlarının eksikleri ya da yetersizlikleri f(x)=x, f(x)=sin(x), f(x)=cos(x) ve f(x)=c, $c \in R$, fonksiyonları incelenerek doğrudan gösterilebilir. Bir birim fonksiyon için bağımlı değişkende meydana gelen değişimin bağımsız değişkende meydana gelen değişime oranı türev derecesi ne olursa olsun 1 olmalıdır, fakat literatürde verilen kesir dereceli türev yöntemlerine göre Şekil 1' de görüldüğü gibi bu durumun geçerli olmadığı görülmektedir. Bu çalışmada önerilecek olan kesir dereceli türev yöntemi ile bu iddianın doğruluğu ortaya konulacaktır. Şekil 1'de f(x)=x fonksiyonu ve onun Riemann-Liouville kesirli dereceden türevlerine ait grafikler verilmiştir. Şekil 2'de ise f(x)=1 fonksiyonun Riemann-Liouville yöntemine göre kesir dereceli türevleri görülmektedir. Bu şekilde de görüleceği gibi sabit fonksiyonun türevleri değişkene bağlı çıkmaktadır; fakat şu da bir gerçektir ki sabit fonksiyonda hiçbir zaman değişim olmaz, eğer olsaydı sabit fonksiyon denilmezdi. Bu çalışmada önerilen kesir dereceli yöntem ile türev derecesi ne olursa olsun sıfır olduğu gösterilecektir. Ele alınan örnekler ve yöntemler göstermektedir ki literatürdeki kesir dereceli türev yöntemlerinin önemli eksiklikleri bulunmaktadır. Bunların en bariz olanı fonksiyonun sıfır noktaları ile türevin sıfır noktalarının aynı olması ve değişmemesidir.

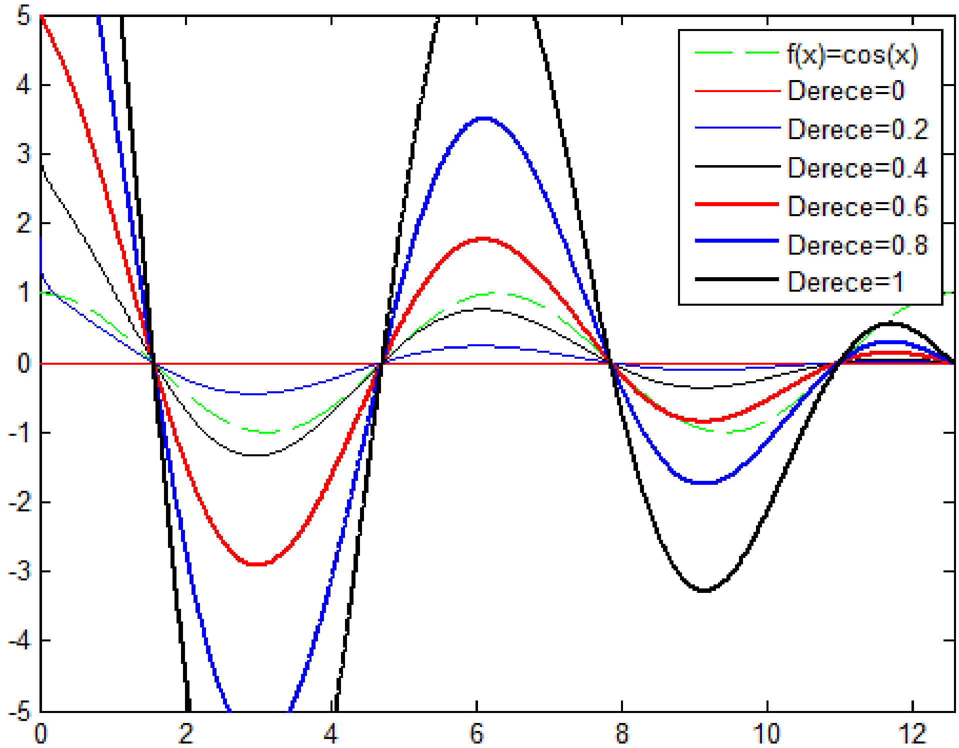
Belli başlı fonksiyonlardan olan cos(x) ve sin(x) fonksiyonlarının Riemann-Liouville metodu ile elde edilmiş kesir dereceli türevleri sırası ile Şekil 3 ve Şekil 4'de görülmektedir. Her iki grafikte de görüldüğü gibi fonksiyonların sıfır noktasındaki değerleri ile türevlerinin sıfır noktasındaki değerleri aynı olmaktadır; fakat bilinen bir gerçek vardır ki sin(x) fonksiyonun türevi cos(x) olup bu fonksiyonlar sıfır noktasında aynı değeri vermemektedirler, fonksiyonlar birbirlerine göre ya $\pi/2$ derece önde ya da $\pi/2$ derece geride olmaktadırlar. Şekil 3'te cos(x) fonksiyonun Riemann-Liouville yöntemi ile kesir dereceli türevleri görülmektedir. Grafik incelendiğinde, bir türev işlemi olmaktan ziyade fonksiyonun genlik olarak artıp/azaldığı görülmektedir. Aynı durum Şekil 4'de verilen f(x)=sin(x) fonksiyonu için de geçerlidir. Burada da sin(x) fonksiyonun genlik olarak artıp/azaldığı görülmektedir. Bundan dolayı Riemann-Liouville yöntemi ile elde edilen sonuçlar bir türev alma işlemi olmayıp "**eğri uydurma**" ya da "**eğri yaklaşımı**" olarak tasvir edilmelidir. Sonuç olarak kesir dereceli türev için yeni bir tanımlamaya ya da yaklaşıma ihtiyaç duyulmaktadır.



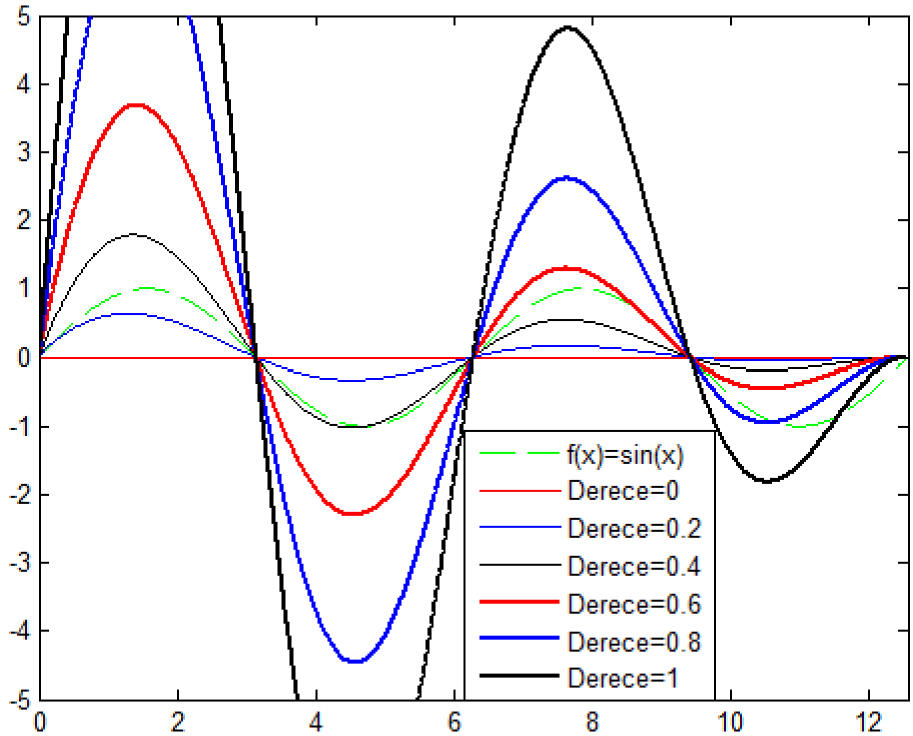
Şekil 1. f(x)=x fonksiyonun Riemann-Liouville kesir dereceli türevleri (Riemann-Liouville fractional order derivatives of function f(x)=x).



Şekil 2. f(x)=1 fonksiyonun Riemann-Liouville kesir dereceli türevleri (Riemann-Liouville fractional order derivatives of function f(x)=1).



Şekil 3. f(x)=cos(x) fonksiyonun Riemann-Liouville metodu ile kesir dereceli türevleri (Riemann-Liouville fractional order derivatives of function f(x)=cos(x)).



Şekil 4. f(x)=sin(x) fonksiyonun Riemann-Liouville metodu ile kesir dereceli türevleri (Riemann-Liouville fractional order derivatives of function f(x)=sin(x)).

Bu yöntemlerin sabit ve birim fonksiyonlar için analitik sonuçları da göstermektedir ki bu yöntemlerin tutarsızlıklar içermektedirler. n=1 ve $\alpha = \frac{2}{3}$ olarak alınıp ve f(x)=1 olduğunda

Euler tanımına göre:

$$\frac{d^n x^m}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n} = \frac{d^{\frac{2}{3}} x^0}{dx^{\frac{2}{3}}} = \frac{\Gamma(1)}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} x^{-\frac{2}{3}} \qquad (6)$$

Riemann-Liouville tanımına göre

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(v)dv}{(t-v)^{\alpha-n+1}} = {}_aD_t^{\frac{2}{3}} f(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{cdv}{(t-v)^{\frac{2}{3}}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left(-\frac{1}{(t-a)^{\frac{2}{3}}} \right) \neq 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

Caputo tanımına göre:

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(v)dv}{(t-v)^{\alpha+1-n}} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)} \int_a^t \frac{0dv}{(t-v)^{\frac{2}{3}+1-1}} = 0 \end{aligned} \qquad (8)$$

oldukları görülmektedir.

Denklem (10), (11) ve (12) görüldüğü gibi Euler ve Riemann-Liouville tutarsız yöntemler olup Caputo tanımının ise tutarlı olduğu söylenebilir. Aynı işlemler birim fonksiyon için de yapılacak olursa:

Euler tanımına göre:

$$\frac{d^{\frac{2}{3}} x^1}{dx^{\frac{2}{3}}} = \frac{\Gamma(1+1)}{\Gamma\left(1-\frac{2}{3}+1\right)} x^{1-\frac{2}{3}} = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} x^{\frac{1}{3}} \neq 1 \qquad (10)$$

Riemann-Liouville tanımına göre:

$$\begin{aligned} {}_aD_t^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \left(\frac{d}{dt}\right)^n \int_a^t \frac{f(v)dv}{(t-v)^{\alpha-n+1}} \\ &= {}_aD_t^{\frac{2}{3}} f(t) = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{xdx}{(t-x)^{\frac{2}{3}-1+1}} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{xdx}{(t-x)^{\frac{2}{3}}} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} \left(3a(t-a)^{\frac{2}{3}} + \frac{9}{4}(t-a)^{\frac{4}{3}} \right) \neq 1 \end{aligned} \qquad (11)$$

Caputo tanımına göre:

$$\begin{aligned} {}_a^C D_t^{\alpha} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(v)dv}{(t-v)^{\alpha+1-n}} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)} \int_a^t \frac{dv}{(t-v)^{\frac{2}{3}+1-1}} \\ &= \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{1}{3}\right)} \left(3(t-a)^{\frac{1}{3}} \right) \neq 1 \end{aligned} \qquad (12)$$

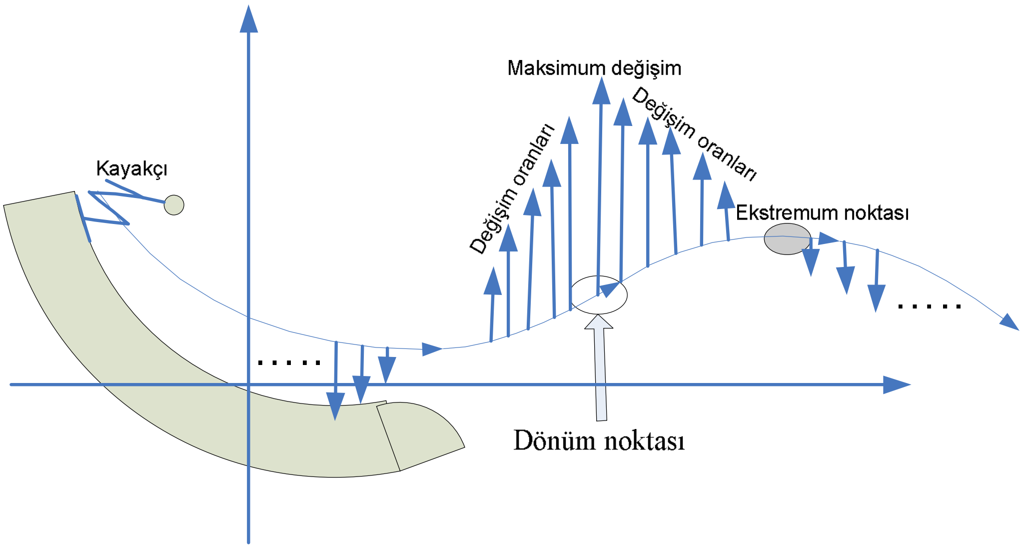
oldukları görülmektedir.

Bu sonuçlardan hareketle üç yöntemin de f(x)=x fonksiyonu için tutarsız ve iki yöntemin de f(x)=1 için (Euler, Riemann-Liouville) tutarsız sonuç vermelerinin kaynağının türev işlemindeki katsayı ve kuvvet parametrelerine yoğunlaşılmış olmalarından kaynaklandığını söyleyebiliriz. Diğer bir önemli nokta da, yapılan türev işlemlerinde katsayı kısmı tamsayı olarak kabul edilip o şekilde bir formül elde edilmektedir. Sonrasında ise istenilen bir noktada türevin kesirli olduğu kabul edilmektedir. Bu şekilde elde edilen bağıntıların, kesirli türevden çok, **eğri uydurma** bağıntısı olarak kabul edilmesi daha doğru olacaktır. Bir sonraki bölümde kesir dereceli türev işlemi için yeni bir tanımlama ve yöntemin detayları verilecektir.

3. FONKSİYONLARIN DEĞİŞİM ORANININ KESİR KUVVETLERİ – KESİR DERECELİ TÜREV (FRACTIONAL POWERS OF RATIOS OF FUNCTIONS CHANGES – FRACTIONAL ORDER DERIVATIVE)

Fonksiyonların, bağımsız değişkenlerde meydana gelen değişime tepkisinin biliniyor olması, o fonksiyon ile modellenen bir sistemin davranışını tahmin etmemizi kolaylaştırır. Türev genel olarak bağımlı değişkendeki değişimin bağımsız değişkenlerin birinde meydana gelen değişime olan oranı olarak tanımlanmıştır. Bu oran işlemi gerçekleştirilirken hem fonksiyonun farklı değerlerinin kuvvetleri "1" ve hem de bağımsız değişkenin kuvvetleri "1" olarak alınmaktadır.

Şekil 5'de bir kayakçının rampa üzerinde hız eğrisinin kabaca şeklinin nasıl olacağı verilmiştir. Kayakçının hız eğrisine bakılırsa, her noktadaki hız değişimi aynı olmadığı gibi eşit zaman aralıklarında almış olduğu yol miktarları da aynı değildir. Önemli olan bir nokta var; o da bu hız değişiminin nerelerde sıfır ve nerelerde maksimuma ulaştığının bilinmesi durumudur. Hız eğrisinde minimum ve maksimum noktalarda hız değişimi sıfırdır ve eğrinin dönüm noktasında ise, değişim maksimum değere ulaşmaktadır. Bundan dolayı türev derecesi ne olursa olsun, bu değişimlerin korunması gerekir.



Şekil 5. Kayakçının atlama rampası üzerindeki hızının eğrisi (The movement of athlete on the ski-jump ramp)

Türev kavramının klasik tanımı

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x}$$

şeklinde olup f(x+h), f(x), (x+h) ve x terimlerinin kuvvetleri "1" olarak verilmiştir. Bu durum Karcı (Karcı 2013b) tarafından farkedilmiş ve aşağıda detayı verilen mantık ile kesir dereceli türev için yeni tanım yapılmıştır. Burada Karcı tarafından yapılan yeni tanım verildikten sonra grafiksel anlamı üzerinde durulacaktır. Kesir dereceli türev için iki farklı yöntem ortaya konulabilir (Karcı, 2013b çalışmasında olduğu gibi). Birinci yöntem:

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{f(x+h)-f(x)}{(x+h)-x} \right)^{\alpha} = \left(f'(x)\right)^{\alpha}$$

şeklinde olur. Bu sonuç bilinen türevin "α" kuvvetidir. İkinci yöntem ise, f(x+h), f(x), (x+h) ve x terimlerinin kuvvetlerinin ayrı-ayrı "α" olması durumudur (Karcı, 2013b çalışmasında olduğu gibi). Karcı'nın 2013b çalışmasındaki kesir dereceli türev için yeni yaklaşımının tanımı burada verilebilir.

Tanım 1: *(Karcı, 2013b) f(x):R→R bir fonksiyon, α∈R ve L(.) L'Hospital işlemini temsil etmek üzere f(x) fonksiyonun kesirli türevi*

$$f^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \to 0} L\left(\frac{f^{\alpha}(x+h)-f^{\alpha}(x)}{(x+h)^{\alpha}-x^{\alpha}} \right) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{d\left(f^{\alpha}(x+h)-f^{\alpha}(x)\right)}{dh}}{\frac{d\left((x+h)^{\alpha}-x^{\alpha}\right)}{dh}} = \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\alpha-1} f'(x) \tag{13}$$

şeklinde tanımlanır.

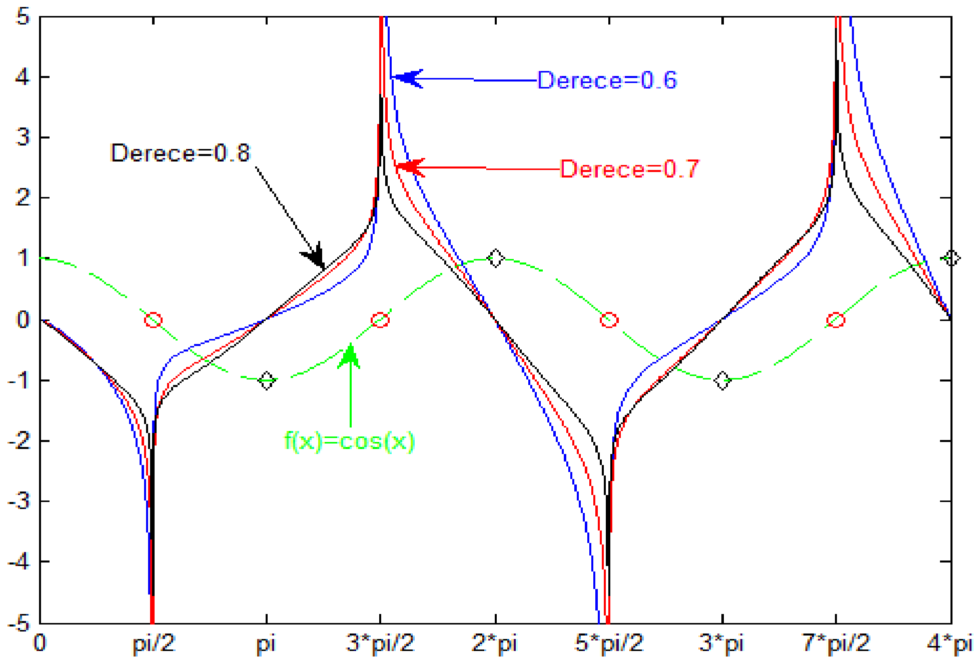
Kesir dereceli türev için verilen bu tanımda türev derecesi herhangi bir değer olabilir. Hatta türev derecesi "α" karmaşık sayı bile olabilir. Bu şekilde alınan bir türev işleminde operatör artık doğrusal değildir ve doğrusal olmayan bir operatör durumuna gelmektedir. Aynı zamanda klasik türev işleminde kullanılan birinci türev, ikinci türev, …,v.b. ifadeler kullanılmayacaktır, çünkü α=2 olması ikinci türev anlamına gelmiyor. Örneğin $f(x)=x^2$ olmak üzere

$$\frac{d^2 f(x)}{dx^2} = 2 \quad \text{ve} \quad f^{(\alpha)}(x) = f^{(2)}(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{2-1} 2x = 2x^2$$

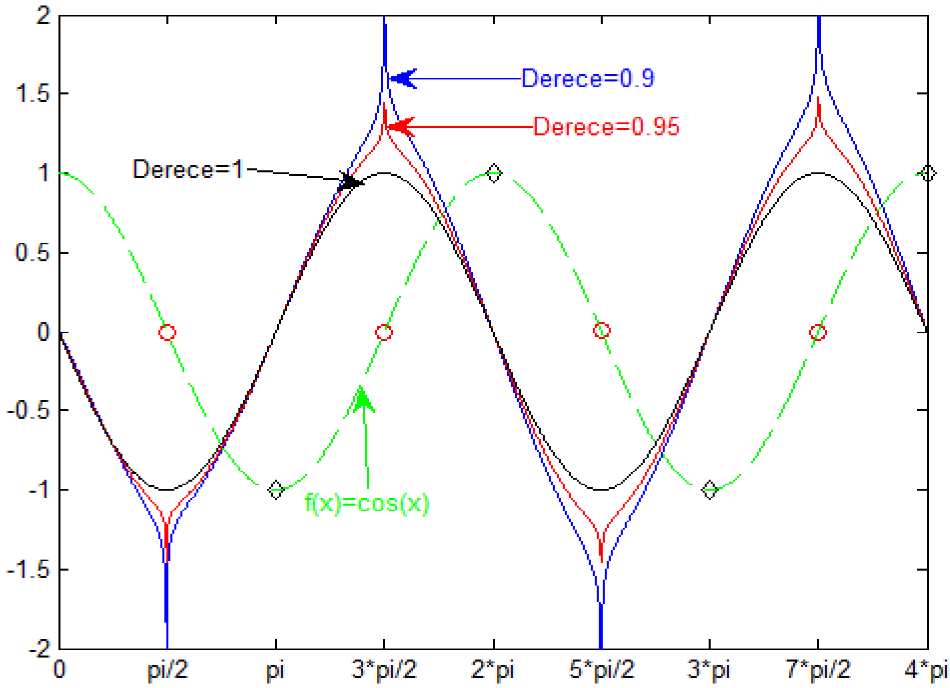
olduğundan $\frac{d^2 f(x)}{dx^2} \neq f^{(2)}(x)$ olacaktır.

Bu yeni tanıma göre kesir dereceli türevlere (kesirli türevler) grafikler üzerinden bakılabilir. Bir fonksiyonun türev fonksiyonu türevi alınan fonksiyonun dönüm noktalarında maksimum/minimum noktalarına sahip olacaktır. Bu amaçla grafik sonuçları alınacak olan fonksiyonlar cos(x) ve sin(x) şeklindedir. Şekil 6 ve Şekil 7'de görüleceği gibi cos(x) fonksiyonunun dönüm noktalarında türev fonksiyonları (derecenin ne olduğu önemli değil) maksimum/minimum noktalara sahiptir.

Bu durum kesirli türev için yapılan yeni tanımın doğruluğunu göstermektedir. Diğer bir önemli nokta, yeni tanımda da türevin derecesi "1" olduğu durumda klasik türev ile aynı sonuçları vermektedir. Şekil 6 ve Şekil 7'de görülen grafiklerde küçük kırmızı çemberler dönüm noktasını ve küçük siyah elmas şekli ise minimum/maksimum noktaları göstermektedir.

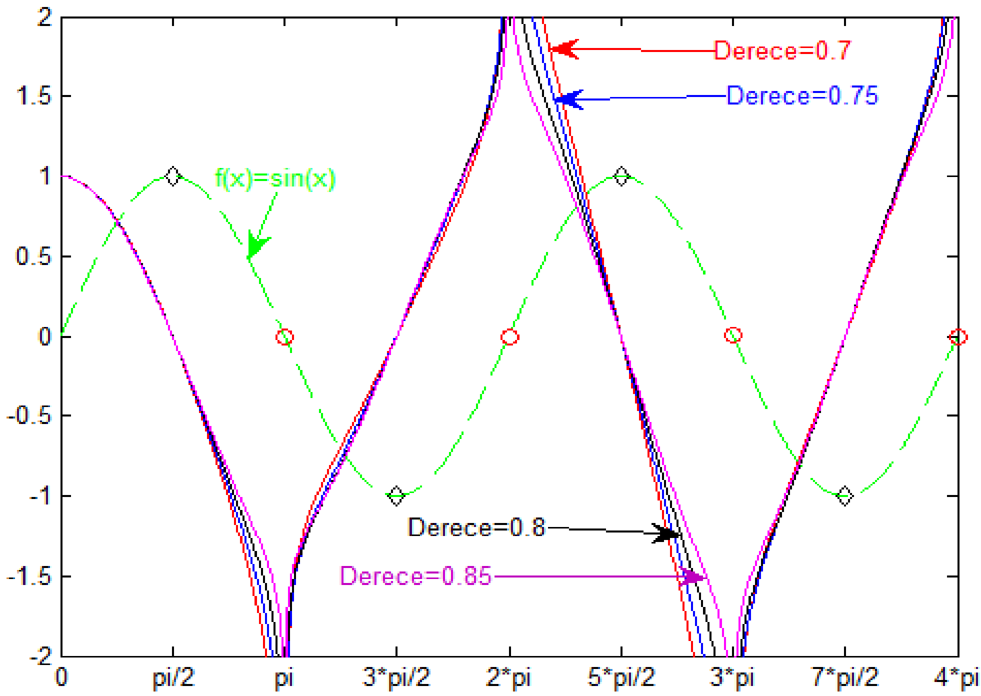


Şekil 6. cos(x) fonksiyonun kesir dereceli (0.6, 0.7, 0.8) türevleri ve maksimum/minimum noktaları
(Fractional order (0.6, 0.7, 0.8) derivatives of cos(x) and its maximum/minimum points)

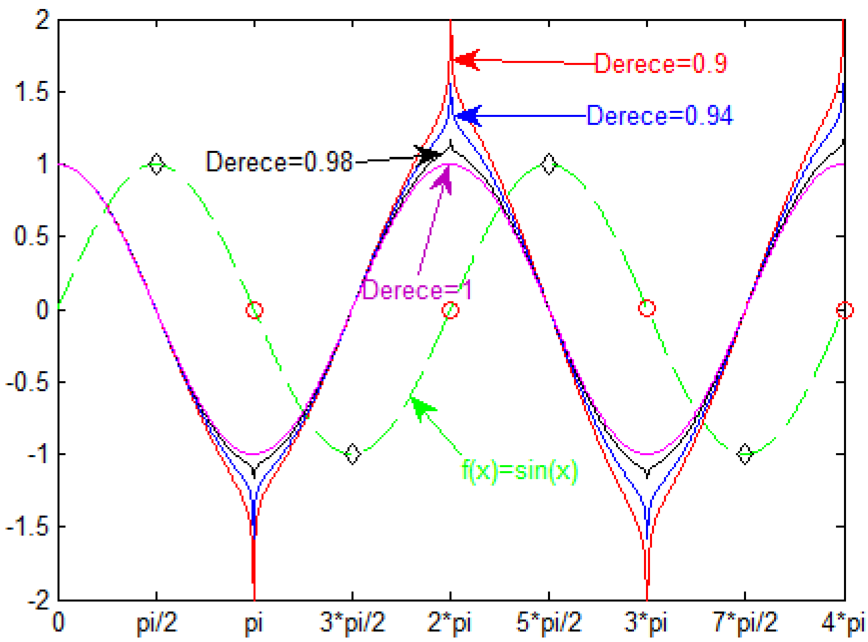


Şekil 7. cos(x) fonksiyonun kesir dereceli (0.9, 0.95, 1) türevleri ve maksimum/minimum noktaları
(Fractional order (0.9, 0.95, 1) derivatives of cos(x) and its maximum/minimum points)

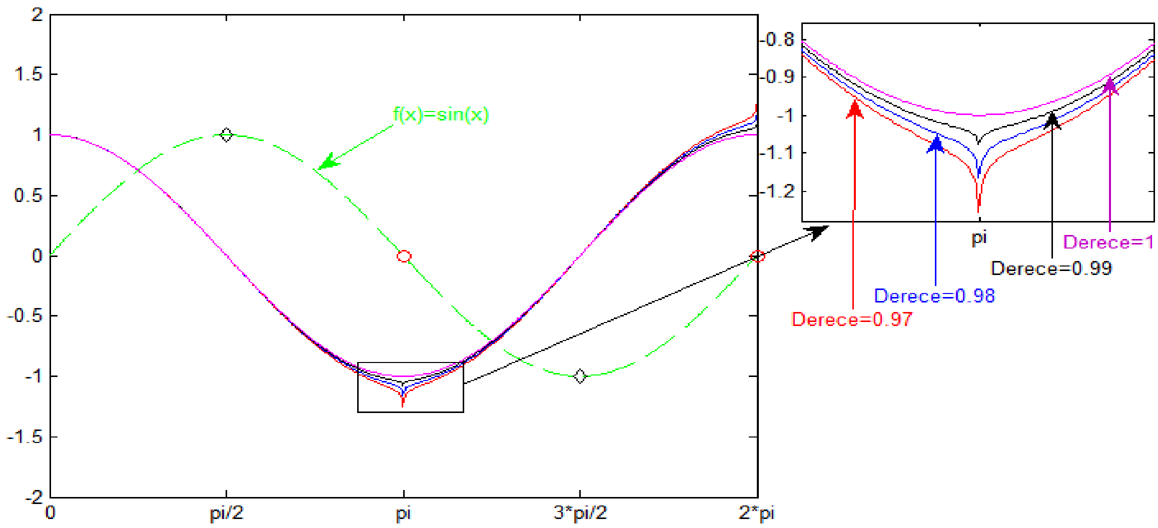
f(x)=sin(x) trigonometrik fonksiyonu için ise, derecenin 1'e yaklaşması durumunda türevlerin minimum/maksimum noktalarının nasıl değiştiği gösterilebilir. Dönüm noktalarında türev fonksiyonları maksimum/minimum değerleri almaktadır ve bu noktaların değerleri türev derecesine göre değişmektedir. Bu durum göstermektedir ki yapılan tanımlama doğru bir tanımlama olup türev derecesi "1" olduğu zaman kesir dereceli türev sonucu klasik türev ile aynı olmaktadır. Şekil 8 ve Şekil 9' da bu durumlar görülmektedir.



Şekil 8. sin(x) fonksiyonun kesir dereceli (0.7, 0.75, 0.8 ve 0.85) türevleri ve maksimum/minimum noktaları (Fractional order (0.7, 0.75, 0.8 and 0.85) derivatives of sin(x) and its maximum/minimum points)



Şekil 9. sin(x) fonksiyonun kesir dereceli (0.9, 0.94, 0.98 ve 1) türevleri ve maksimum/minimum noktaları (Fractional order (0.9, 0.94, 0.98 and 1) derivatives of sin(x) and its maximum/minimum points)



Şekil 10. f(x)=sin(x) için türev decelerinin 0.97, 0.98, 0.99 ve 1 için olan sonuçları
(Derivative results for orders 0.97, 0.98, 0.99 and 1 of f(x)=sin(x)).

Türev kavramı için geliştirilen yeni tanıma göre (Denklem 13) türev derecesi 1'e yaklaştıkça sonuçta klasik anlamdaki türev sonucuna yaklaşmaktadır. Bu durum Şekil 10'da rahatlıkla görülmektedir. Türev derecesinin 0.97 olduğu anda f(x)=sin(x) dönüm noktasında bir minimum nokta görülmektedir. Aynı durum türev derecelerinin 0,98, 0.99 ve 1 olduğu durumlarda görülmektedir (x=π olduğu durum). Şekil 10'daki grafiklerden de açıkça görülebileceği gibi

$$f^{(0.97)}(\pi) < f^{(0.98)}(\pi) < f^{(0.99)}(\pi) < f^{(1)}(\pi) = f'(\pi)$$

şeklindedir.

Kısaca $\lim_{\alpha \to 1} f^{(\alpha)}(x) = f'(x)$ olur.

4. KESİR DERECELİ TÜREVİN ÖZELLİKLERİ - YENİ YAKLAŞIM (PROPERTIES OF FRACTIONAL ORDER DERIVATIVE – NEW APPAROACH)

Denklem 13' te verilen türevin genel tanımından yola çıkarak bazı özellikleri ortaya konulabilir. Bu yeni türev tanımında türev derecesi rasyonel veya irrasyonel olabilir.

Teorem 1. f(x) fonksiyonu birim veya sabit fonksiyon olmak üzere

a) Eğer f(x) birim fonksiyon ise, $\forall\alpha\in R$, $f^{(\alpha)}(x)=1$.

b) Eğer f(x) sabit fonksiyon ise, $\forall\alpha\in R$, $f^{(\alpha)}(x)=0$.

İspat: Bu teoremin ispatı basit bir şekilde aşağıdaki gibi yapılabilir.

a) f(x)=x ise,

$$f^{(\alpha)}(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\alpha-1} f'(x) = \left(\frac{x}{x}\right)^{\alpha-1} = 1.$$

b) f(x)=c, c∈R sabit fonksiyon ise,

$$f^{(\alpha)}(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\alpha-1} f'(x) = \left(\frac{c}{x}\right)^{\alpha-1} 0 = 0$$

Teorem 2. f(x):R→R, α,μ,η∈Z ve $\alpha = \frac{\mu}{\eta}$. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

a) $f(x)=x^n$ için $f^{(\alpha)}(x) = \dfrac{nx^{n-1}\sqrt[\eta]{x^{n(\mu-\eta)}}}{\sqrt[\eta]{x^{\mu-\eta}}}$ dir.

b) $f(x)=e^x$ için $f^{(\alpha)}(x) = \dfrac{e^x\sqrt[\eta]{e^{(\mu-\eta)x}}}{\sqrt[\eta]{x^{\mu-\eta}}}$ dir.

c) f(x)=sinx için $f^{(\alpha)}(x) = \dfrac{\cos x\sqrt[\eta]{(\sin x)^{\mu-\eta}}}{\sqrt[\mu]{x^{\mu-\eta}}}$ dir.

d) f(x)=lnx için $f^{(\alpha)}(x) = \dfrac{1}{x}\sqrt[\eta]{\dfrac{(\ln x)^{\mu-\eta}}{x^{\mu-\eta}}}$ dir.

İspat: a) $f(x)=x^n$, bağıntısı Denklem (13)' te yerine yazılırsa

$$f^{(\alpha)}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f'(x+h)f(x+h)^{\alpha-1}}{(x+h)^{\alpha-1}}$$ ifadesi elde edilir.

$$\left(x+h\right)=\binom{n}{0}x^{n}+\binom{n}{1}x^{n-1}h+\ldots+\binom{n}{n}h^{n}$$ ve $f(x)=x^n$

olduğundan

$$f^{(\alpha)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{d(x+h)^{n}}{dh}((x+h)^{n})^{\alpha-1}}{(x+h)^{\alpha-1}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{d\left(x^{n}+nx^{n-1}h+\ldots+h^{n}\right)}{dh}\left(x+h\right)^{n\frac{\mu}{\eta}-1}}{(x+h)^{\frac{\mu}{\eta}-1}}$$
$$=\frac{nx^{n-1}\sqrt[\eta]{x^{n(\mu-\eta)}}}{\sqrt[\eta]{x^{\mu-\eta}}}$$

olur.

b) $f(x)=e^x$ bağıntısı Denklem (13)' te yerine yazılırsa

$$f^{(\alpha)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{de^{x+h}}{dh}(e^{x+h})^{\alpha-1}}{(x+h)^{\alpha-1}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{e^{x}e^{h}}{1}\left(e^{x+h}\right)^{\frac{\mu}{\eta}-1}}{(x+h)^{\frac{\mu}{\eta}-1}}=\frac{e^{x}\sqrt[\eta]{e^{\mu-\eta}}}{\sqrt[\eta]{x^{\mu-\eta}}}$$

olur.

c) $f(x)=\sin x$ bağıntısı Denklem (13)'te yerine yazılırsa,

$$f^{(\alpha)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{d\sin(x+h)}{dh}(\sin(x+h))^{\alpha-1}}{(x+h)^{\alpha-1}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cos(x+h)}{1}\left(\sin(x+h)\right)^{\frac{\mu}{\eta}-1}}{(x+h)^{\frac{\mu}{\eta}-1}}$$
$$=\frac{\cos x\sqrt[\eta]{(\sin x)^{\mu-\eta}}}{\sqrt[\eta]{x^{\mu-\eta}}}$$

olur.

d) $f(x)=\ln x$ bağıntısı benzer şekilde Denklem (13)'te yerine yazılırsa

$$f^{(\alpha)}(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{d\ln(x+h)}{dh}(\ln(x+h))^{\alpha-1}}{(x+h)^{\alpha-1}}$$
$$=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{(x+h)}\left(\ln(x+h)\right)^{\frac{\mu}{\eta}-1}}{(x+h)^{\frac{\mu}{\eta}-1}}=\frac{\sqrt[\eta]{(\ln x)^{\mu-\eta}}}{x\sqrt[\eta]{x^{\mu-\eta}}}$$
$$=\frac{1}{x}\sqrt[\eta]{\frac{(\ln x)^{\mu-\eta}}{x^{\mu-\eta}}}$$

olur.

Teorem 3. $f(x):R\to R$, $\alpha\in R$ için $f^{(\alpha)}(x)$ fonksiyonu karmaşık (kompleks) fonksiyondur.

İspat: $\alpha=\frac{\mu}{\eta}$ ve $\eta\neq 0$ için ispat altı şart altında yapılacaktır.

i) Eğer $\forall x\in R$ için $f(x)\geq 0$ ve $x\in R^{+}\cup\{0\}$ ise, $f^{(\alpha)}(x)$ fonksiyonu sadece reel (gerçel) değerlere sahip bir fonksiyon olur, çünkü

$$f^{(\alpha)}=\frac{f'(x)f^{\alpha-1}(x)}{x^{\alpha-1}}=f'(x)\sqrt[\eta]{\frac{f^{\mu-\eta}(x)}{x^{\mu-\eta}}}$$ ve
$$=f'(x)\sqrt[\eta]{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\mu-\eta}}$$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)\geq 0$ olur. Bu durumda türev işleminin sonucu reel olacaktır çünkü kök ifadesinin içerisi pozitiftir.

ii) Eğer $\forall x\in R$ için $f(x)\geq 0$, $x\in R^{-}$ ve $\mu-\eta\geq 0$ ise, $f^{(\alpha)}(x)$ fonksiyonu için

$$f^{(\alpha)}=\frac{f'(x)f^{\alpha-1}(x)}{x^{\alpha-1}}=f'(x)\sqrt[\eta]{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\mu-\eta}},$$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)<0$ ve $\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\mu-\eta}\geq 0$ olur. Bu durumda türev işleminin sonucu reel olacaktır çünkü kök ifadesinin içerisi pozitiftir.

iii) Eğer $\forall x\in R$ için $f(x)\geq 0$, $x\in R^{-}$ ve $\mu-\eta<0$ ise, $f^{(\alpha)}(x)$ fonksiyonu için

$$f^{(\alpha)}=\frac{f'(x)f^{\alpha-1}(x)}{x^{\alpha-1}}=f'(x)\sqrt[\eta]{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\mu-\eta}},$$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right)<0$ ve $\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\mu-\eta}<0$ olur. Bu durumda türev işleminin sonucu için kök ifadesinin içerisi negatif olduğundan eğer η tek ise sonuç reel olacaktır; eğer η çift ise, sonuç karmaşık (kompleks) olacaktır.

iv) Eğer $\forall x\in R$ için $f(x)<0$, $x\in R^{-}$ ise, $f^{(\alpha)}(x)$ fonksiyonu için

$$f^{(\alpha)}=\frac{f'(x)f^{\alpha-1}(x)}{x^{\alpha-1}}=f'(x)\sqrt[\eta]{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\mu-\eta}},$$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right) \geq 0$ ve $\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\mu-\eta} \geq 0$ olur. Bu durumda türev işleminin sonucu için kök ifadesinin içerisi pozitif olduğundan sonuç reel olacaktır.

v) Eğer $\forall x \in R$ için $f(x)<0$, ve $x \in R^{+} \cup \{0\}$ ise, $f^{(\alpha)}(x)$ fonksiyonu için

$$f^{(\alpha)} = \frac{f'(x) f^{\alpha-1}(x)}{x^{\alpha-1}} = f'(x) \sqrt[\eta]{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\mu-\eta}} ,$$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right) < 0$ olur. Eğer μ-η tek ise, kök ifadesinin içerisi negatif olur. Bu durumda eğer η tek ise türev işleminin sonucu reel olacaktır. Eğer η çift ise, kök ifadesinin içerisi negatif olduğundan türev işleminin sonucu karmaşık olur.

vi) Eğer $\forall x \in R$ için $f(x)<0$, ve $x \in R^{+} \cup \{0\}$ ise, $f^{(\alpha)}(x)$ fonksiyonu için

$$f^{(\alpha)} = \frac{f'(x) f^{\alpha-1}(x)}{x^{\alpha-1}} = f'(x) \sqrt[\eta]{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\mu-\eta}} ,$$

$\left(\frac{f(x)}{x}\right) < 0$ olur. Eğer μ-η çift ise, kök ifadesinin $\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\mu-\eta} \geq 0$ olur. Bu durumda türev işleminin sonucu reel olur.

Teorem 4: $f(x):R \rightarrow R$, $\alpha, \beta \in R$ olmak üzere aşağıdaki durumlar sağlanır.

a) Eğer $\alpha \neq \beta$ ise, $f^{(\alpha)}(x) \neq f^{(\beta)}(x)$.

b) Eğer $\alpha = \beta$ ise, $f^{(\alpha)}(x) = f^{(\beta)}(x)$.

c) $\left(f^{(\alpha)}(x)\right)^{(\beta)} \neq f^{(\alpha+\beta)}(x)$.

İspat: Teoremde verilen iddiaların ispatı aşağıdaki gibi olur.

a) $f^{(\alpha)}(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{df(x)}{dx}$ ve

b) $f^{(\beta)}(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\beta-1} \frac{df(x)}{dx}$.

Bu iki ifadenin oranlanmasından sonra "1" değeri elde edilirse, ifadeler eşit anlamına gelir; eğer "1" elde edilmezse, bu ifadeler eşit değildir.

c) $f^{(\alpha)}(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{df(x)}{dx}$ ve

d) $f^{(\beta)}(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\beta-1} \frac{df(x)}{dx}$.

Bu iki ifadenin oranlanmasından sonra "1" değeri elde edilirse, ifadeler eşit anlamına gelir; eğer "1" elde edilmezse, bu ifadeler eşit değildir.

$$\frac{f^{(\alpha)}(x)}{f^{(\beta)}(x)} = \frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{df(x)}{dx}}{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\beta-1} \frac{df(x)}{dx}} .$$

$$\Rightarrow \alpha = \beta \text{ için } \frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\alpha-1}}{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\beta-1}} = 1$$

ifadeler birbirine eşit olur.

e) Türev işleminin farklı kuvvetler ile ayrı-ayrı gerçekleştirilmesi ile kuvvetlerin toplanması ile elde edilen kuvvete göre türev alınması eşit olmayacaktır.

$f^{(\alpha)}(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{df(x)}{dx}$ ve

$$\left(f^{(\alpha)}(x)\right)^{(\beta)}(x) = \left(\frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{df(x)}{dx}}{x}\right)^{\beta-1} \frac{d\left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{df(x)}{dx}\right)}{dx}$$

Toplama göre türev $f^{(\alpha+\beta)}(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{df(x)}{dx}$ olacaktır.

Bu durumda

$$\frac{\left(f^{(\alpha)}(x)\right)^{(\beta)}(x)}{f^{(\alpha+\beta)}(x)} = \frac{\left(\frac{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{df(x)}{dx}}{x}\right)^{\beta-1} \frac{d\left(\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\alpha-1} \frac{df(x)}{dx}\right)}{dx}}{\left(\frac{f(x)}{x}\right)^{\alpha+\beta-1} \frac{df(x)}{dx}} \neq 1$$

Teorem 5: f(x):R→R, α∈R olmak üzere eğer α=2 ise, $f^{(\alpha)}(x) \neq f''(x)$ olur.

İspat: f(x) fonksiyonun ikinci türevi $\frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ olur ve

$$f^{(2)}(x) = \left(\frac{f(x)}{x}\right)^{2-1}\frac{df(x)}{dx} = \left(\frac{f(x)}{x}\right)\frac{df(x)}{dx} \text{ olur.}$$

Bu durumda $\left(\frac{f(x)}{x}\right)\frac{df(x)}{dx} \neq \frac{d^2 f(x)}{dx^2}$ olur.

Teorem 6: f(x):R→R, α∈R ve α>1, ve x_0, x_1 apsisleri f(x) fonksiyonun optimum noktaları olduğu kabul edilsin. Bu durumda kesir dereceli türev ile ilgili iki durum söz konusudur.

a) Eğer $f(x_0)$ maksimum ve $f(x_1)$ minimum ve $x_a \in (x_0,x_1)$ dönüm noktası ise, $\forall x_b \in (x_0,x_1)$ için $f^{(\alpha)}(x_a) \leq f^{(\alpha)}(x_b)$ olur.

b) Eğer $f(x_0)$ minimum ve $f(x_1)$ maksimum ve $x_a \in (x_0,x_1)$ dönüm noktası ise, $\forall x_b \in (x_0,x_1)$ için $f^{(\alpha)}(x_a) \geq f^{(\alpha)}(x_b)$ olur.

İspat: α, ε∈R ve ε<<1 olsun.

a) Türev işleminin derecesi α olsun.

$$f^{(\alpha)}(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f^{\alpha}(x+h) - f^{\alpha}(x)}{(x+h)^{\alpha} - x^{\alpha}} \text{ olur.}$$

Bu durumda $x_b = x_0 + \varepsilon$ için

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{\alpha}(x_0+\varepsilon) - f^{\alpha}(x_0)}{(x_0+\varepsilon)^{\alpha} - x_0^{\alpha}} \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{\alpha}(x_0+2\varepsilon) - f^{\alpha}(x_0)}{(x_0+2\varepsilon)^{\alpha} - x_0^{\alpha}} \text{ olur.}$$

$x_b = x_0 + 2\varepsilon$ için

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{\alpha}(x_0+2\varepsilon) - f^{\alpha}(x_0)}{(x_0+2\varepsilon)^{\alpha} - x_0^{\alpha}} \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{\alpha}(x_0+3\varepsilon) - f^{\alpha}(x_0)}{(x_0+3\varepsilon)^{\alpha} - x_0^{\alpha}}$$

olur.

$x+n\varepsilon = x_a$, $x_b = x_0 + (n-1)\varepsilon$ ve $n \in Z^+$ için

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{\alpha}(x_0+(n-1)\varepsilon) - f^{\alpha}(x_0)}{(x_0+(n-1)\varepsilon)^{\alpha} - x_0^{\alpha}} \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{\alpha}(x_0+n\varepsilon) - f^{\alpha}(x_0)}{(x_0+n\varepsilon)^{\alpha} - x_0^{\alpha}}$$

olur ve (x_a,x_1) aralığı için eşitlik doğrudur.

b) Türev işleminin derecesi α olsun . $x_b = x_0 + \varepsilon$ için

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{\alpha}(x_0+\varepsilon) - f^{\alpha}(x_0)}{(x_0+\varepsilon)^{\alpha} - x_0^{\alpha}} \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{\alpha}(x_0+2\varepsilon) - f^{\alpha}(x_0)}{(x_0+2\varepsilon)^{\alpha} - x_0^{\alpha}}$$

olur.

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{\alpha}(x_0+2\varepsilon) - f^{\alpha}(x_0)}{(x_0+2\varepsilon)^{\alpha} - x_0^{\alpha}} \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{\alpha}(x_0+3\varepsilon) - f^{\alpha}(x_0)}{(x_0+3\varepsilon)^{\alpha} - x_0^{\alpha}}$$

$x+n\varepsilon = x_a$, $x_b = x0+(n-1)\varepsilon$, ve $n \in Z+$ için

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{\alpha}(x_0+(n-1)\varepsilon) - f^{\alpha}(x_0)}{(x_0+(n-1)\varepsilon)^{\alpha} - x_0^{\alpha}} \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f^{\alpha}(x_0+n\varepsilon) - f^{\alpha}(x_0)}{(x_0+n\varepsilon)^{\alpha} - x_0^{\alpha}}$$

olur.

5. SONUÇLAR (CONCLUSIONS)

Günümüze kadar yapılan kesir dereceli türev tanımları ve yaklaşımları türevin tanımı olan tamsayı türevin devam ettirilmesi çabası sonucunda eksik veya hatalı sonuç veren yöntemler ortaya çıkmasına sebep olmuştur. Bu sebepten dolayı yapılan kesir dereceli türev tanımlarının hepsi kesir dereceli türev olmayıp eğri uydurma işlemi olduğu kesindir. Eğer böyle olmasaydı, literatürde kullanılan yöntemlerin başında gelen Euler, Riemann-Liouville ve Caputo yöntemlerinin eksiklikleri bu makale çalışmasında ortaya konulamazdı.

Bu çalışmanın sonucunda literatürdeki kesir dereceli türev tanımlarının türev tanımı olmayıp eğri uydurma işlemi olduğu kesindir. Çünkü türev tanımında limit olarak bağımlı değişkenin değişim oranının bağımsız değişkenin değişim oranına olan oranıdır.

Bu makale çalışmasında kesir dereceli türev için tanım ortaya koymak, diğer kesir dereceli türev tanımlarının eksikliklerini ortaya koymak ve ondan sonra kesir dereceli türevin özellikleri ortaya koymak olarak özetlenebilir. Kesir dereceli türev için yapılan yeni tanımda türev derecesi “1” yaklaştıkça klasik türevin özelliklerini ortaya koyar; diğer durumda klasik türevden farklı özellikler ortaya koymaktadır, çünkü geliştirilen yeni tanım sonucunda doğrusal olmayan bir türev tanımı ortaya çıktı. Kesir dereceli türevde derece “1” olunca operatör doğrusal olmaktadır; aksi halde doğrusal olmayan bir türev operatörü olur.

KAYNAKLAR (REFERENCES)

1. Newton, I., **Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica**, 1687.
2. L'Hôpital, G., **Analyse des Infiniment Petits pour l'Intelligence des Lignes Courbes ("Infinitesimal calculus with applications to curved lines")**, Paris, 1696.
3. L'Hôpital, G., **Analyse des infinement petits**, Paris 1715.
4. Goldenbaum,U., Jesseph,D., **Infinitesimal Differences: Controversies between Leibniz and his Contemporaries**, New York, 2008.
5. Baron, M.E., **The Origin of the Infinitesimal Calculus**, New York, 1969.
6. Wren, F.L., Garrett, J.A., “ **The Development of the Fundamental Concepts of Infinitesimal Analysis**”, The American Mathematical Monthly, Cilt 40, No 5, 269-291, 1933.
7. Bliss, G.A., “ The Evolution of Problems of the Calculus of Variations”,**The American Mathematical Monthly**,Cilt 43, No 10, 598-609, 1936.
8. Taylor, A.E., “**L’Hospital Rule”**, The American Mathematical Monthly, Cilt 59, No 1, 20-24, 1952.
9. Stewart, J.K., “**Another Variation of Newton's Method**”, The American Mathematical Monthly, Cilt 58, No 5, 331-334, 1951.
10. Mullings, M.E.,”**The Rotational Derivative and Some Applications**”, The American Mathematical Monthly, Cilt 34, 241-247, 1927.
11. Dushnik, B.,”A Generalization of the Derivative of a Function”, **The American Mathematical Monthly**, Cilt 42, 414-419, 1935.
12. Newsom, C.V.,”**On the Derivative of $(w/\sin w)^k$ at w=0**”, The American Mathematical Monthly, Cilt 38, 500-504, 1931.
13. McKiernan, M.,”**On the n^{th} Derivative of Composite Functions**”, The American Mathematical Monthly, Cilt 63, 331-333, 1956.
14. Das, S., **Functional Fractional Calculus**, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.
15. Herrmann, R., **Fractional Calculus: An Introduction for physicists**, World Scientific, GigaHedron, Germany, 2011.
16. Oldham, K.B., Spanier, J.,**The Fractional Calculus**, Academic Press, New York, 1974.
17. Samko, S.G., Ross, B.,“**Integration and Differentiation to a Variable Fractional Order**”, Integral Transforms and Special Functions, Cilt 1, No 4, 277–300, 1993.
18. Samko, S.G., Kilbas, A.A., Marichev, O.I., **Fractional Integrals and Derivatives**, Translated from the 1987 Russian Original, Gordon and Breach, Yverdon, 1993.
19. Kiryakova, V.S.,**Generalized Fractional Calculus and Applications**, Longman (Pitman Res. Notes in Math. Ser. 301), Harlow; co-publ.: J. Wiley and Sons, New York, 1994.
20. Rubin, B., “**Fractional Integrals and Potentials**”, Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics, vol. 82, Longman, Harlow, 1996.
21. Gorenflo, R., Mainardi, F., “**Fractional Oscillations and Mittag-Leffler Functions**”, in: Proceedings of RAAM 1996, Kuwait University, 193–196, 1996.
22. Mainardi, F., Gorenflo, R., “**On Mittag-Leffler-type functions in fractional evolution processes**”, J. Comput. Appl. Math. Cilt 118, No 1-2, 283–299, 2000.
23. Mainardi, F., **Fractional calculus and waves in linear viscoelasticity: An introduction to mathematical models**, World Scientific, Singapore, 2010.
24. Podlubny, I., **Fractional differential equations**, Academic Press, New York, 1999.
25. Podlubny, I.,“**Geometric and physical interpretation of fractional integration and fractional differentiation**”, Fractional Calculus and Applied Analysis, Cilt 5, No 4, 367–386, 2002.
26. Pooseh, S., Almeida, R., Torres, D.F.M., “**Discrete direct methods in the fractional calculus of variations**”, Computers and Mathematics with Applications, Cilt 66, No 5, 668-676, 2013.
27. Mirevski, S.P., Boyadjiev, L., Scherer, R., “**On the Riemann-Liouville Fractional Calculus, g-Jacobi Functions and F.Gauss Functions**”, Applied Mathematics and Computation, Cilt 187, 315-325, 2007.
28. Schiavone, S.E., Lamb, W., “**A Fractional Power Approach to Fractional Calculus**”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, Cilt 149, 377-401, 1990.
29. Bataineh, A.S., Alomari, A.K., Noorani, M.S.M., Hashim, I., Nazar, R., “Series Solutions of Systems of Nonlinear Fractional Differential

Equations”, **Acta Applied Mathematics**, Cilt 105, 189-198, 2009.

30. Diethelm, K., Ford, N.J., Freed, A.D., Luchko, Y., “**Algorithms fort he Fractional Calculus: A Selection of Numerical Methods**”, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Cilt 194, 743-773, 2005.

31. Li, C., Chen, A., Ye,J., “**Numerical Approaches to Fractional Calculus and Fractional Ordinary Differential Equation**”, Journal of Computational Physics, Cilt 230, 3352-3368, 2011.

32. Atan Ö., Türk M., “Kesir Dereceli Kaotik Duffing Sisteminin Haar Dalgacık Yöntemiyle Analizi”, **Elektrik-Elektronik ve Bilgisayar Sempozyumu**, Elazığ , Ekim 2011.

33. Karcı, A., “**Kesirli Türev için Yapılan Tanımlamaların Eksiklikleri ve Yeni Yaklaşım**”, TOK-2013 Turkish Automatic Control National Meeting and Exhibition, Malatya/Turkey, s:1040-1045, Sep.26-28, 2013.

34. Karcı, A.,“**A New Approach for Fractional Order Derivative and Its Applications**”, Universal Journal of Engineering Sciences, Cilt 1, saNo 3, 110-117, 2013.

35. Karcı, A., Karadoğan, A.,“**Fractional Order Derivative and Relationship between Derivative and Complex Functions**”, IECMSA-2013:2nd International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications,Sarajevo, Bosnia and Herzogovina, 55-56, Aug. 26-29, 2013.

36. Karcı, A., Karadoğan, A., “**Fractional Order Derivative and Relationship between Derivative and Complex Functions**”, Mathematical Sciences and Applications E-Notes, Cilt 2, No 1, 44-54, 2014.