71597

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI

Temel Bileşenler Analizi ve Uygulaması

HAZIRLAYAN: Arş. Grv. İsmail KOÇAK

DANIŞMAN: Yrd. Doç. Dr. Murat KARAGÖZ

İnönü Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Lisans-üstü Eğitim Öğretim ve Sınav Yönergesinin Ekonometri Anabilim Dalı İçin Öngördüğü Yüksek Lisans Tezi Olarak Hazırlanmıştır.

MALATYA-1998

Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğü'ne

İşbu çalışma jürimiz tarafından Ekonometri Anabilim Dalı BİLİM UZMANLIĞI tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Adı, Soyadı, Ünvanı

Üye

Adı, Soyadı, Ünvanı

Üye

Adı, Soyadı, Ünvanı

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

..../....1998

Enstitü Müdürü

İMZA

Adı, Soyadı, İmza

ÖNSÖZ

Yaşantımız boyunca değişik konularda her an değişik kararlar veririz. Bu kararlarımızı verirken, bir çoğunda yeterli bilgiye sahip olmayabiliriz. Gerçekte, bir insanın karar verebilmesi için bütün bilgiye sahip olması hemen hemen imkansızdır.

Bilimsel araştırma yapan kişiler de sınırlı bilgilerden hareketle bir takım sonuçlar çıkarırlar. Bu tür çalışmalar için İstatistik Bilimi uygun bilimlerden bir tanesidir. İstatistik bilim dalında, eksik bilgilerden doğru sonuç çıkarma problemine çözüm aranır. Bilgilerin belirli kurallara göre derlenip özetlendiği durumlarda sonuç çıkarmak daha açık ve daha kolay olmaktadır.

Hemen hemen her bilim dalında olayların analizleri için istatistiksel yöntemler kullanılmaktadır ve dolayısıyla önemi çok fazladır. İncelenen olayların analizinde klasik istatistik yöntemlerinin (tek değişkenli istatistik yöntemler) yeterli olmayacağı uzun zamandan beri görülmüştür. Çünkü klasik istatistik yöntemler, kısıtlayıcı varsayımlar altında geçerli olmaktadır. Önemli kısıtlayıcılardan bir tanesi, deneye konu olan faktörün deneysel olarak kontrol altında tutulmasıdır ve her bir deneyde tek bir faktörün incelenmesidir. Dolayısıyla Çok Değişkenli İstatistiğe ihtiyaç duyulmaktadır. Çok Değişkenli İstatistiksel analizler, Tek Değişkenli İstatistiksel analizlerin bir uzantısı gibi gözükse de aralarında hem işlemler bakımından hem de sembol gösterimleri bakımından çok büyük farklılıklar vardır.

Klasik İstatistik metotlarının olayların analizinde yeterli olmayacağı 1990' lü yıllardan itibaren görülmüş ve çok değişkenli istatistiksel metotlarının üzerinde çalışılmaya başlanmıştır. Bu güne kadar, bilgisayar imkanlarının gelişmesine paralel olarak, çok değişkenli istatistiksel metotlarında çok büyük gelişmeler sağlanmış ve bu gelişmeler devam etmektedir.

Çok değişkenli istatistiksel analiz, uzun zamandan beri uygulamalarda kullanılan önemli bir tekniktir. Çünkü bu analizde, kontrollü denemelerden ve kısıtlayıcılardan oldukça uzak durulmaktadır. Deney birimlerindeki özelliklerin çok sayıda olmasından dolayı bu özelliklerin tümünün dikkate alınması zorunluluğunu vardır. Bunu da çok değişkenli istatistiksel analiz metotlarıyla yapılabilmektedir.

Çalışmamızın konusu olan Temel Bileşenler Analizi, çok değişkenli istatistiğin temelini oluşturmaktadır. Basitçe, boyut indirgeme ve birbirine bağımlı olan özellikler arasındaki bağımlılığın yok edilmesini sağlayan bir metot olan temel bileşenler analizi, çok değişkenli analizler olan Faktör Analizi, Kanonik Korelasyon Analizi, Ayırma Analizi, Lojistik Regresyon Analizi ve Çok Değişkenli Regresyon Analizi için de ilk adımdır.

Çalışmamızın birinci bölümünde çok değişkenli istatistiksel analiz hakkında genel bilgiler, temel bileşenler analizinin tanımı, nitelikleri ve gerekliliği hakkında genel bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde : ana küte temel bileşenleri ve örneklem temel bileşenlerinin teorik yapısı incelendikten sonra özel yapılı kovaryans matrislerinin temel bileşenleri hakkında bilgiler verilmiştir.

Üçüncü bölümde ise, İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında işlem gören on üç Çimento fabrikasının hisse senetlerinin aylık getirileri üzerinde, ikinci bölümde verilenler uygulanmaya çalışılmıştır.

Uygulamaların hazırlanmasında SPSS ve MİNİTAB gibi hazır bilgisayar yazılımları kullanılmıştır.

Çalışmanın hazırlanmasında yardımlarından dolayı tez danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Murat KARAGÖZ'e ve Ekonometri Bölümü araştırma görevlileri Hakan TÜRKAY ve Latif ÖZTÜRK'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

BÖLÜM 1

1.1 GENEL BİLGİLER

Çok değişkenli istatistiksel analizlerle ilgili çalışmalar 1900'lü yıllarda başlamıştır. Bu analizler, çok sayıdaki değişkeni az sayıda lineer bileşimlere indirgeyerek, değişkenler arasındaki karmaşık ilişkilerin yorumlanmasında kolaylıklar sağlayan istatistiksel analizlerdir.

Çok değişkenli istatistiksel analiz, uygulamalarda kullanılan istatistiğin önemli bir koludur. Bu analizde birbirleriyle ilişkili çok sayıda değişken söz konusudur. Kullanılan bir çok yöntemle, çok sayıda değişkenin oluşturduğu sistemin yapısı belirlenmeye çalışılır ve olabildiğince basit bir forma dönüştürülerek, herhangi bir konuda doğru karar için gerekli bilgi çıkarılmaya çalışılır.

Çok değişkenli istatistiksel analizde, deneye konu olan birimden ölçme veya gözlem sonunda elde edilen özelliklere göre işlemler yapılır. Değişken olarak da adlandırılan bu özelliklerin çok sayıda olması, problemlerin klasik istatistikte kullanılan tekniklerle çözümü mümkün olmamaktadır.

"Çok Değişkenli Analiz Teknikleri" diye adlandırılan bu tekniğin amacı, yapılan çalışmalardan elde edilen sonuçların özetlenmesi, yorumlanması ve çalışma sonunda karar verilirken kullanılmasıdır. Bilimsel çalışmalarda, deneye konu olan olaylar genellikle birçok etkenden etkilenir ve birimler birbirleriyle ilişkilidir. Yapılan çalışmalarda, inceleme konusu olayları bütün detayları ile değerlendirmek gerekir. Bütün detayları ile değerlendirilen olaylardan elde edilen sonuçlar güvenilir ve geçerli hale gelebilmektedir.

"Güçlü araçlarla kaynaklara dönüş" biçiminde nitelendirilen ve "hazır reçeteler" gibi deyimlerde kullanılan çok değişkenli istatistiksel analizde özellikle Fransız okulu model kurmaya pek önem vermiyor. Amaç, bir kütlenin yapısını, olayların özünü ortaya çıkarmak, görülmeyeni röntgen gibi görüntülemek oluyor.[1]

Bir başka deyişle, çok değişkenli istatistiksel analiz, deneye konu olan ham verilerin ayıklanıp boyutunun indirgenmesini ve çalışma içindeki konulara göre sınıflanmasını sağlar. Bunu da, değişkenler arasındaki ilişkileri, benzerlikleri yada ayrımlarını ortaya çıkararak, önemli noktaları belirgin hale getirerek gerçekleştirir. Tüm bu işlemler yapılırken herhangi bir modelin kurulmasıyla ilgilenilmez ve varsayımlar alabildiğince aza indirgenmeye özen gösterilir.

Ayrıca, doğrusal bileşimlere indirgenen bireyler ve/veya özellikler, alt uzaylarda görüntülenerek, kimi yorumlar kolaylaştırılıyor. Ham verilerin ayıklanıp indirgenmesi, sınıflanması, bağıntıların özetlenmesi ve de görüntülemeler, klasik istatistiğin verileri derleyip sunma ve özetleme aşamalarının ikiden çok özelliğe uygulanmasından başka bir şey değildir. Kuşkusuz eski boyutlarıyla oldukça karmaşık yöntemler söz konusudur. Yöntemlerin anlaşılması, özellikle doğrusal cebir

[1] İPEK, Merih. Betimsel İstatistik. Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş. İstanbul,1988. s:47

bilgisi gerektiriyor. Sonuçların iyi yorumu ise, beceri, ustalık ve deneyime yakından bağlıdır.[2]

Çok değişkenli istatistiksel analiz, birden çok özelliğin analizi ile ilgilendiğinden, uygulamalarda değişik amaçlarla kullanılmaktadır. Bu amaçların bir kaç tanesi şöyle sıralanabilir:[3]

1) Basitleştirme ve Boyut İndirgeme

Çok sayıda değişken tarafından belirlenen bir sistem, daha az sayıda gerçek yada yapay değişkenle temsil edilmeye, böylece basitlik sağlanmaya çalışılır.

2) Birimlerin Sınıflandırılması

Gözlenen birimlerin değişik sınıflar oluşturup oluşturmadıkları belirlenmeye çalışılır. Sınıflandırmanın diğer bir biçimi de birimlerin önceden tanımlanmış sınıflardan hangilerine ait olduklarının belirlenmesidir. Bazı durumlarda ise birimler yerine değişkenlerin gruplandırılması söz konusudur.

3) Bağımlılık Yapısının İncelenmesi

Değişkenlerin kovaryans ve korelasyon matrislerinden yararlanılarak bağımlılığın kaynakları ve sonuçları araştırılır. Örneğin; değişkenlerden bir ya da daha fazlasının bağımlı, ötekilerinin bağımsız olduğu regresyon analizinin amacı, değişkenler arasındaki bağımlılık yapısını ortaya çıkarmaktır.

---

[2] İPEK, Merih. a.g.e. s:48
[3] TATLIDİL, Hüseyin. Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz. Akademi Matbaası. Ankara,1996. s:2,3

4) Hipotez Testleri ve Hipotez Oluşturma

Çok değişkenli verilerde kullanılan hipotez testlerinden bazıları tek değişkenli teorinin çok değişkenli duruma genelleştirilmiş uzantılarıdır. Bunlardan başka bazı çok değişkenli analiz yöntemleri de hipotez testlerinde kullanılmaktadır. Bu yöntemlerle, açıklanmaya çalışılan olay hakkında yeni model ve hipotezler ortaya çıkarmak amacıyla da başvurulabilmektedir.

5) Sıralama ve Ölçekleme

Birimlerin belli ölçülere göre sıralanması bazı uygulamaların asıl amacıdır. Ölçekleme ise çok sayıda değişkenden yararlanarak birimlerin daha az boyutla gösterilmesidir. Böylece grafik gösterimlerinden de yararlanılarak birimlerin karşılaştırılması, yakınlık yada uzaklıklarının belirlenmesi kolaylıkla yapılabilmektedir.

Bir bilimsel araştırmada incelenen olayın analizinde tek değişkenli istatistiğin yeterli olmayacağı açıktır. Çünkü, tek değişkenli yöntemler, kısıtlayıcı varsayımlar altında geçerlidir. En önemli kısıtlayıcı ise olaydaki bir çok faktörün deneysel olarak kontrol altında tutulması ve her defasında tek bir faktörün etkisinin incelenmesidir. Oysa ki çok değişkenli istatistikte bazı kontrollü denemeler dışında böyle bir kısıtlayıcıdan ya da özellikten söz edilmemektedir. Çünkü, çok değişkenli istatistikler, kendi doğal çevrelerinde birçok yönleriyle gözlenirler. Bu durum, gözlenen özellikler arasındaki bağımlılık yapısının incelenmesini ön plana çıkartmaktadır. Bir başka anlatım ile çok değişkenli istatistik, inceleme konusu olayı bir bütün olarak ele almakta ve bütünlüğü sağlayan değişkenlerin bağımlılık yapısını açıklamaya çalışmaktadır. Bu durumda çok değişkenli istatistiğin en önemli amacının değişkenler arasındaki bağımlılık yapısının analizi olduğu çok rahatlıkla söylenebilir.

İstatistik tüm bilim dallarında yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu bilim dallarını, Ziraat, Tıp, Kimya, Biyoloji, Ekonomi, Ekonometri, Eğitim, Sosyoloji, Arkeoloji, Jeoloji, Uluslararası İlişkiler, Kentleşme, Çevre Kirliliği, Dilbilimi, Coğrafya,Tarih, . . . gibi sıralayabiliriz. Bu alanlardaki olayların karmaşıklığı göz önüne getirilirse, klasik istatistik tekniklerinin olayların çözümünde yeterli olmayacağı açıktır. Olayların karmaşık olduğu durumlarda bütün alanlarda çok değişkenli istatistiksel analiz teknikleri kullanılmaktadır. Ayrıca, hemen hemen her alanda yapılan karmaşık anket çalışmaları da çok değişkenli istatistiksel analiz tekniklerini kullanmaya zorlamaktadır.

Bu kadar geniş bir uygulama alanı olan çok değişkenli istatistiksel analiz tekniklerinin bazı varsayımlarla kısıtlı olduğunu söylemekte fayda vardır. Bu varsayımların en önemlisi kullanılacak verilerin çok değişkenli normal dağılımlı ana kütleden çekilmiş olduğu biçimindeki varsayımdır. Verilerin bu varsayımı sağlamadığı durumlarla çok sık karşılaşılmakta ve böylesi durumlarda normallik varsayımının dönüşümlerle sağlanması da her zaman kolay olmayabilmektedir.[4]

Bu kadar geniş uygulama alanı olan çok değişkenli istatistiğin bir çok analiz çeşidi vardır. Biz yalnızca çok değişkenli istatistiksel analizin temelini oluşturan Temel Bileşenler Analizini incelemeye çalışacağız.

Temel bileşenler analizinin Ekonometride ki kullanımıyla ilgili Koutsiyannis tarafından iki durumu önerilmiştir: İlk olarak fonksiyona katılması önsel nedenlerle gerekli olan açıklayıcı değişkenlerin sayısının örneğin büyüklüğüne göre çok fazla olması durumu. Eğer değişkenlerin sayısı gözlem sayısından büyük ise fonksiyonların katsayılarının matematikle tahmin edilmesi imkansızdır. Ama örnek büyükte olsa, eğer açıklayıcı değişkenlerin sayısı fazla ise hesaplamalar güçleşecektir ve serbestlik derecesi kaybı ile açıklayıcı değişkenler arasındaki bağıntılardan dolayı tahminlerin güvenilirlikleri değerlendirilemeyecektir.

Temel Bileşenler Analizi Karl Person (1901) tarafından en küçük karelerin uygun düzleminde tanımlanmış, daha sonra Hotelling (1933) tarafından korelasyon yapılarının analizinde belirli amaçlar için geliştirmiştir.[5] Girshick (1939) ve Anderson, temel bileşenlerin dağılımlarını ve örnek özelliklerini ele alarak geliştirmişlerdir. Morrison (1967) temel bileşenlerin geometrik yorumlanmasına ve diğer bazı özelliklerine değinmiştir. Werminont farklılıkların ortaya çıkarılmasında, Stone, Ekonometride, iş bloklarının bağımsızlığı çalışmalarında temel bileşenleri kullanırken, Simond optikle ilgili verilerin birleştirilmesinde kullanmıştır. Cooley ve Lohnes (1971) temel bileşenlerin pratikte yorumlanmasını da vererek, bilgisayara uyarlanmasını göstermişlerdir.

---

[4] TATLIDİL, Hüseyin. a.g.e. s.3
[5] MORRISON, D. F.. Multıvariate Statistical Methods. McGraw Hill inc. New York,1967. s:267

1.2 TEMEL BİLEŞENLER ANALİZİNİN TANIM VE MAHİYETİ

Karl Pearson tarafından 1901 yılında ilk kez önerilen ve Hotelling tarafından 1933 yılında büyük ölçüde geliştirilen temel bileşenler analizi, 1960'a kadar yavaş gelişmiş ancak bu tarihten itibaren bilgisayar imkanlarının gelişmesi ve değişik alanlarda ki karmaşık anketlerin düzenlenmesi son yıllarda hızla gelişmesine imkan sağlamıştır.

Temel bileşenler analizi, özel bir modele, istatistik varsayımlara başvurmaz. Veriler bazı cebirsel ve geometrik ölçütlere göre temsil edilir. Daha açık olarak, temeli Pearson'a uzanan, ancak bilgisayarların gelişmesine paralel olarak değişimler gösterip büyük önem kazanan bu yöntemin amacı, birey x özellik tablosundaki bilginin özünü almak ve yorumu kolaylaştırmak üzere görüntülemektir.[6]

n birey (gözlem) ve p değişkenden oluşan veri matrisi X'in p boyutlu uzaydaki durumu düşünülecek olursa, her bireyin bir noktayı gösterdiği veri matrisi çok sayıda noktadan oluşan bir topluluk (bulut) olarak ifade edilebilir.[7] p değişkenden oluşan veri matrisinin elemanları arasında bağımlılık kaçınılmaz olduğu göz önüne alınırsa, bulut biçiminde ifade edilen geometrik şeklin eksenleri birbirine dik olmayacaktır. Dolayısıyla tanımı da söz konusu değildir. Oysaki bu noktaları eksenleri birbirine dik bir elipsoit içerisine almak daha ayrıntılı ve daha açıklayıcı olacaktır. Bu amaçla uygulanan dönüştürmede, noktaların ilk eksenler boyunca sahip oldukları toplam varyans değişmeyeceği gibi yeni eksenlerde birbirine dik olacaktır.

---

[6] İPEK, Merih. Betimsel İstatistiğin Yeni Boyutları S:475

[7] TATLIDİL, Hüseyin. age s:138

Temel bileşenler analizi rassal bir vektörün elemanlarının varyans ve kovaryans matrisleriyle ilgili olan bir analizdir. Bu analizin amacı, mümkün olduğu kadar az sayıdaki yeni değişkenin orijinal yerini alacak yeni değişken oluşturmaktır. Bu analiz, ilk özelliklerin lineer bileşimleri olan, (yapay) özelliklerdir. Bunu yaparken, doğal olarak, Σ'nın (orijinal değişkenlerin varyans - kovaryans matrisi) sahip olduğu bazı bilgiler gözden çıkarılacaktır.

Gözden çıkarılacak bilgilerin en az olması için temel bileşenler en uygun analiz yöntemidir. Temel bileşenleri bulurken Σ'nın yanında trΣ yada "genelleştirilmiş varyans" diye adlandırılan , |Σ| , Σ'nın determinantını da kullanabiliriz. Bununla birlikte tahmin etme yeteneği veya Σ ile buna karşı gelen matrisin yeni değişkenleri arasındaki fark normlarını da düşünebiliriz. Tüm bu durumlarda temel bileşenler en uygun çözümü verir. Eğer p değişkenin tamamının yerini yeni bir değişken alacaksa, o değişken ilk temel bileşen olmak zorundadır. Doğal olarak temel bileşenlerin sayısı büyük olursa, orijinal değişkenlerin kendi aralarındaki ilişkilerin açıklanmasında, yeni değişkenlerin performansı daha iyi ve bilgi kaybı daha az olacaktır.[8]

Bir araştırmacı genellikle, çalışmaları için başlangıçta değişkenlerden hangisinin daha önemli ve kullanışlı olduğunu bilmeden, değişkenlerin sayısını büyük tutar ve gözlemlerini derler. Daha sonra, bazı bilgilerin ışığı altında bu gözlemlerini küçültme yoluna gider. Bu küçültme işlemlerinin yapılmasında en uygun analiz tekniği temel bileşenler analizidir.

Orijinal değişkenler kümesinde, döndürmeyle ilgili herhangi bir bilgi kaybı olmaksızın, genellikle makul sayıdaki yeni değişkenlerle ve bu yeni değişkenleri ayrıntılarıyla göstererek, tüm bilgi özetleme yoluna gidilebilir. Temel bileşenler böylece yeni yapay değişkenler ortaya çıkarma tekniğidir.

Temel bileşenler yapay bileşenler olduğundan herhangi bir fiziksel anlam ve önemi gerektirmemektedir. Bunun yanında, temel bileşenler ölçülebilen değişkenlerin lineer bileşimidir ancak birbirlerinin lineer bileşeni değildir. Genellikle doğrudan hesaplanırlar.[9]

Temel bileşenlerin bulunmasında, ham veri matrisinin kullanılması durumda varyans - kovaryans matrisinden, standartlaştırılmış veri matrisinin kullanılması durumunda ise korelasyon matrisinden yararlanılmaktadır. Oldukça farklı sonuçlar verebilen bu iki yoldan hangisinin seçileceği konusunda en önemli belirleyici, verilerin ölçü birimleridir. Eğer verilerin ölçü birimleri ve varyansları birbirine yakın ise kovaryans matrisinden, değilse korelasyon matrisinden yararlanılması uygun görülmektedir.[10]

1.3 TEMEL BİLEŞENLER ANALİZİNİN NİTELİKLERİ

Temel bileşenler analizi, çoğunlukla deneye dayanan bir analizdir. Daha öncede belirtildiği gibi büyük boyutlardaki verilerin birbirleriyle olan ilişkilerinin yok edilmesinde ve boyut indirgeme niteliklerinden faydalanılmaktadır. Mümkün

---

[8] KSHIRSAGAR ,ANANT M. Multivariate Analysis. Marcel Dekker inc. New York.1987, s:459
[9] HAWKİNS, D. M. Topics in App. Multivariate Analysis. Cambridge Unv Press, N.Y. 1982 s:194
[10] TATLIDİL, Hüseyin. age s:139

olduğu kadar az sayıdaki yeni değişkenle, orijinal değişkenler temsil edilmeye çalışılmaktadır. Orijinal değişkenlerin kendi aralarındaki ilişkilerin açıklanmasında da temel bileşenler büyük önem kazanmaktadır.

Konumdan bağımsız ancak ölçeğe bağımlı olan temel bileşen (y_i) vektörlerinin özelliğinden istatistiksel analizlerde yararlanılmaktadır. Bu özelliklerden bazıları şöyle sıralanabilir:[11]

- Gerek ham veri matrisi X ve gerekse standartlaştırılmış biçimi olan Z matrisinde değişkenler arasında bağımlılık söz konusu iken y_i vektörleri birbirinden bağımsızdır. Geometrik olarak y_i değerleri dik eksenlere göre elde edilmektedir. Oysaki z_i değerleri eğik eksenler üzerinde bulunmaktadır.

- Noktaların zi eksenlerine göre varyansı değişiktir ve eksenler arası kovaryans terimi de bulunmaktadır. Oysa ki y_i eksenlerinin varyansları büyükten küçüğe doğru sıralıdır. Ayrıca eksenler birbirine dik olduğundan, kovaryans terimi yoktur ve noktaların dağılımı yalnız varyansla açıklanmaktadır.

- Bunlara ilaveten, eğer ilk m tane temel bileşen toplam varyansın büyük kısmını açıklıyorsa geriye kalan p-m tana temel bileşen ihmal edilebilir. Bu durumda az bir bilgi (varyans) kaybıyla üzerinde çalışılan uzayın boyutu p den m ye (m<p) indirgenmiş olur.

---

[11] TATLIDİL, Hüseyin. age s:144

– z_i değişkenlerinin varyanslarının tümü y_i değişkenleri tarafından açıklanmaktadır. Bu nedenle, p tane y_i temel bileşenin kullanılması durumunda boyut indirgeme kazancı sağlanmasa bile, hiçbir bilgi kaybı olmaksızın p tane bağımsız yeni değişken elde edilmiş olur.

1.4 TEMEL BİLEŞENLER ANALİZİNİN GEREKLİLİĞİ

Temel bileşenler analizi, değişkenler arasındaki bağımlılık yapısının yok edilmesinde ve boyut indirgeme amaçları için kullanıldığından bahsedilmişti. Eğer değişkenler arasında tam bağımsızlık söz konusu ise boyut indirgemenin bizim için bir faydası yoktur. Standartlaştırılmış matris Z değişkenleri arasında eğer tam bağımsızlık mevcut ise, bağımsızlaştırmanın da önemi yoktur ve bunu yapmak için herhangi bir sebep bulunmamaktadır.

$$\Sigma = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} z_i z_i' = ZZ' = I \qquad (1.1)$$

olacağından z_i lerin y_i lere dönüştürülmesinden de yine birim ilişki matrisine ulaşılacaktır.

Deneysel noktaların ilişki matrisi (1.1) deki gibi ise bu noktaların p boyutlu uzayda bir küre oluşturdukları söylenebilir. Bu kürenin eksenleri z_i ler yerine y_i ler de olsa durumda önemli bir farklılık olmayacaktır. Bu nedenle böyle bir dönüştürme ile y_i lerin bulunmasına gerek yoktur. Ayrıca tüm eksenlerde eşit varyans olduğundan, dönüştürülmüş y_i'lerden m tanesinin seçilerek boyut indirgenmesi de uygun değildir. Aslında deney ya da gözlemlerden elde edilen veriler için $\Sigma = I$ olma olasılığı sıfırdır. O halde hangi durumlarda ilişki matrisi birim kabul edilmelidir? Bu konuda Bartlet, tek değişkenli analizlerdeki varyans karşılığı olan genelleştirilmiş varyans kavramını ve aşağıdaki testleri önermiştir:[12]

$$-[(n-1)-1/6(2p+5)]\log|\Sigma| \sim \chi^2_{\frac{1}{2}P(P-1)} \quad (1.2)$$

$$-[n-1/6(2p+11)]\log|\Sigma| \sim \chi^2_{\frac{1}{2}P(P-1)} \quad (1.3)$$

Burada $|\Sigma|$, Σ matrisinin genelleştirilmiş varyansı, yani determinantıdır.

Küresellik testi olarak bilinen test için,

$$H_0 : \Sigma = I$$

$$H_1 : \Sigma \neq I \quad (1.4)$$

şeklinde kurulan hipotezlerden H_0 hipotezinin reddedilmesi durumunda temel bileşenler analizinin kullanılması tavsiye edilmektedir.

[12] COOLEY W. W., LOHNES, P. R. Mutivariate Data Analysis John Willey &Sons Inc., New York,1971. s. 103

BÖLÜM 2

TEMEL BİLEŞENLER ANALİZİNİN TEORİK ESASLARI

2.1 TEMEL BİLEŞENLERİN HESAPLANMASI

Cebirsel olarak, temel bileşenler P tane rassal değişkenin $(X_1, X_2, \ldots\ldots, X_p)$, belirli lineer bileşenleridir. Geometrik olarak, bu lineer bileşimler $X_1, X_2, \ldots, X_p$ değişkenli orijinal sistemin döndürülmesi ile yeni bir koordinat sisteminin elde edilmesinin seçimini temsil etmektedir. Yeni eksenler kovaryans yapısının tanımını daha sade ve çok daha kısa yapmasının yanında maksimum yönlerini de göstermektedir.

Temel bileşenler sadece $X_1, X_2, \ldots, X_p$ kovaryans matrisi Σ (veya korelasyon matrisi ρ) ya bağlıdır. Bunların meydana gelmesi çok değişkenli normal tahminlere ihtiyaç duymamaktadır. Diğer bir deyişle, temel bileşenler, sabit yoğunluk elipslerinin kullanışlı yorumlarına sahip olan çok değişkenli normal ana kütleler için çıkarılmaktadır. Ayrıca, ana kütle çok değişkenli ve normal olduğu zaman çıkarsamalar örnek bileşenlerinden elde edilebilmektedir.[13]

X : p x 1 rassal vektörü Σ kovaryans matrisine sahip olsun. Burada sadece varyans ve kovaryans ile ilgileneceğimizden ortalama vektörünü sıfır kabul edeceğiz. Yani, E(X) = 0 'dir. Bundan başka fikirlerin ve işlemlerin gelişmesinde, kovaryans

---

[13] JOHSON, R. A., WİCHERN D. W. Applied Multivariate Statistical Analysis. Prentice-Hall, London, 1982.s. 341

matrisini hariç tutarak, X'in gerçek dağılımı konu dışıdır. Ayrıca, X normal dağılmış ise temel bileşenler daha fazla yorum getirebilir. Yapacağımız işlemlerde Σ tekil (yarı pozitif tanımlı) ve katlı köklere sahip olma durumlarını da içerir.[14]

p tane orijinal değişkenler kümesinin temel bileşenler analizi, p tane yeni değişken meydana getirir. $y_1, y_2, \ldots\ldots\ldots, y_p$'ler temel bileşenler, orijinal değişkenlerde Σ 'nın lineer bileşenleri olmalıdır.[15]

$X' = [x_1, x_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, x_p]$ rassal vektörü ve bu vektörün kovaryans matrisi Σ, öz değerleri de $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots\ldots\ldots \geq \lambda_p \geq 0$ olsun. ℓ p elamanlı sütun vektör olmak üzere X vektörünün lineer dönüşümlerini,

$$
\begin{aligned}
y_1 &= \ell'_1 X = \ell_{11} X_1 + \ell_{12} X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ell_{p1} X_p \qquad (2.1)\\
y_2 &= \ell'_2 X = \ell_{12} X_1 + \ell_{22} X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ell_{p2} X_p \\
&\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots \qquad \qquad \vdots \\
y_p &= \ell'_p X = \ell_{1p} X_1 + \ell_{2p} X_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \ell_{pp} X_p
\end{aligned}
$$

veya matris formunda

$$Y = \ell' X \qquad (2.2)$$

şeklinde yazılabilir.

[14] ANDERSON, T. W. An İntroduction to Multivariate Statistical Analysis. John Wiley & Sons Inc. N.Y., 1958. s. 273
[15] HARRİS, R. J. A Primer of Multivariate Statatistics. Academic Press. N.Y., 1975. s. 156

Amacımız, X vektörünün lineer dönüşümü olan (2.1) tesadüfi değişkenlerinin $\ell'\ell = 1$ kısıtlaması altında maksimum varyansa sahip olacak şekilde bulmaktır. Burada ℓ 'nin her bir sütunu bir tek temel bileşen katsayılarını göstermektedir. (2.2) ifadesinin varyansı

$$\mathrm{E}\,(\ell'X)^2 = E(\ell'XX'\ell) = \ell'\Sigma\ell \tag{2.3}$$

olmak üzere lagrange fonksiyonu

$$\Phi(\ell,\lambda) = \ell'\Sigma\ell - \lambda(\ell'\ell - 1) \tag{2.4}$$

olsun. Burada λ lagrange çarpanı ve $\ell'\ell = 1$ dir. ℓ ye göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\ell} = 2\Sigma\ell - 2\lambda\ell = 0 \tag{2.5}$$

sonucuna ulaşılır. Buradan

$$(\Sigma - \lambda I)\ell = 0 \tag{2.6}$$

elde edilir. (2.6) homojen denklemini $\ell'\ell = 1$ kısıtlaması altında ℓ = 0 dan başka çözümünün olması için

$$|\Sigma - \lambda I| = 0 \tag{2.7}$$

olmalıdır. (2.7) eşitliği λ nın p. dereceden bir polinomudur. Dolayısıyla (2.7) ifadesinin p tane kökü vardır ve bu kökler $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots\ldots \geq \lambda_p \geq 0$ dır.

Σ matrisi pozitif tanımlı ve simetrik olduğu için elde edilecek değerlerin hepside gerçek değerler olacaktır. (2.10) nolu eşitlikten elde edilen p tane öz değer kullanılarak her birine karşılık gelen p tane öz vektör elde edilir. (2.7) ifadesini soldan ℓ' ile çarparsak,

$$\ell'\Sigma\ell = \lambda\ell'\ell = \lambda \tag{2.8}$$

elde ederiz. Buradan $y_1 = \ell'_1 X$ ifadesinin varyansı λ_1 olur. Böylece maksimum varyans için λ_1 kökünü kullanacağız. ℓ_1, $(\Sigma - \lambda_1 I)\ell = 0$'ın λ_1'e karşılık gelen normlanmış bir çözümü olduğundan $y_1 = \ell'_1 X$ maksimum varyanslı lineer bir bileşim olur.

Şimdi, y_1 ile ilişkisiz lineer bileşimler arasında en büyük varyansa sahip $y_2 = \ell' X, \|\ell\| = 1$ değişkenini araştıralım. y_1 ile y_2'nin ilişkisiz olması

$$\mathrm{E}(\mathrm{Y}_1\ \mathrm{Y}_2) = \mathrm{E}\left[(\ell'_1 X)(\ell'_1 X)\right] \tag{2.9}$$

$$= E\left(\ell'_1 XX'\ell\ \right)$$

$$= \ell'\Sigma\ell_1$$

$$= \lambda'_{1\ell}\ell_1 = 0$$

olmasıdır. Böylece $\ell' X$ ve y_1 hem istatistiksel anlamda ilişkisiz hem geometrik anlamda $\ell'_1\ \ell = 0$ olduğundan diktir (ortogonal). λ ve t_1 lagrange çarpanları olmak üzere

$$\Phi_2 = (\ell,\lambda,t_1) = \ell'\Sigma\ell - \lambda(\ell'\ell - 1) - 2t_1\ell'\Sigma\ell_1 \qquad (2.10)$$

ifadesini maksimum etmek istiyoruz. ℓ ye göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial\Phi_2}{\partial\ell} = 2\Sigma\ell - 2\lambda\ell - 2t_1\ell_1 = 0 \qquad (2.11)$$

olur. (2.11) ifadesini soldan ℓ'_1 ile çarparsak, (2.9) dan

$$2\ell'_1\Sigma\ell - 2\lambda\ell'_1\ell - 2t_1\ell'_1\Sigma\ell_1 = 0$$

$$= 2t_1\lambda_1$$

elde ederiz. Bu yüzden t_1 ve ℓ (2.6)' yı sağlamalı, λ da (2.7) eşitliğini sağlamalıdır. λ_2, $(\Sigma - \lambda_2 I)\ell = 0$, $\ell'\ell = 1$ ve (2.9) eşitliğini sağlayan bir ℓ vektörü var olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \lambda_p$ lerin en büyüğü olsun ve bu vektöre de ℓ_2 diyelim. Buna karşılık gelen lineer bileşim $y_2 = \ell'_2 X$ olacaktır.

Bu şekilde devam edildiğinde (p+1). adımda $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_r$ ile ilişkisiz tüm $\ell'X$, $\|\ell\| = 1$ lineer bileşimleri arasında maksimum varyansa sahip olacak şekilde bir ℓ vektörü bulmak istiyoruz.

$$E((\ell'X)y_i) = E(\ell'XX'\ell_i) = 0 \qquad (2.12)$$

$$= \ell'\Sigma\ell_2 = \lambda_i\ell'\ell_i \qquad , \qquad i=1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots,p$$

olacak şekilde, λ ve $t_1, t_2, \ldots\ldots\ldots, t_p$ lagrange çarpanları olmak üzere

$$\Phi_{r+1}(\ell,\lambda,t_1,\dots,t_p)=\ell'\Sigma\ell-\lambda(\ell'\ell-1)-2\sum_{i=1}^{p}t_i\ell'\Sigma\ell_i \tag{2.13}$$

dir. y_i temel bileşenini maksimum yapmak istediğimizden (2.13)ifadesini ℓ ye göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenirse,

$$\frac{\partial\Phi_{(p+1)}}{\partial\ell}=2\Sigma\ell-2\lambda\ell-2\sum_{i=1}^{p}t_i\Sigma\ell'_i=0 \tag{2.14}$$

olur. (2.14) eşitliğini soldan ℓ_i ile çarparsak:

$$2\ell'_i\Sigma\ell-2\lambda\ell'_i\ell-2t_i\ell'_i\Sigma\ell_i=0$$

elde ederiz. $\lambda_i\neq 0$ ise $2t_i\lambda_i=0$ ve $t_i=0$ olur. Eğer $\lambda_i=0$ ise $\Sigma\ell=\lambda_i\ell_i=0$ ve (2.14) ifadesindeki toplam sıfır olur. Böylece ℓ, (2.6) ifadesini ve λ da (2.7) ifadesini sağlamalıdır. İşlemleri bu şekilde devam ettirdiğimizde (p+1). adımda λ_{p+1},

$$(\Sigma-\lambda_{p+1}I)\ell=0,\ \ell'\ell=1 \text{ ve}$$

$$E\left[(\ell'X)y_i\right]=E(\ell'XX'\ell_i)=0 \tag{2.15}$$

ifadesini sağlayan bir ℓ vektörü var olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots\dots\dots, \lambda_p$ en büyüğü olsun. Bu vektörü ℓ_{p+1} ile ve buna karşı gelen lineer bileşimi $y_{p+1}=\ell'_{p+1}X$ ile gösterelim. $\lambda_{p+1}=0$ ve $\lambda_i=0$ ise $\ell'_i\Sigma\ell_{p+1}=0$ olmasını gerektirmez. ℓ_{p+1} sıfır olan λ_i li ℓ_i ve ℓ_{p+1} in doğrusal bir bileşimi olarak alınabilir. Bu şekilde alınan ℓ_{p+1} tüm ℓ_i

lerle diktir. Bu yöntem $\ell'\ell = 0$ ve (2.15) ifadesini sağlayan bir ℓ vektörü bulunamayacağı adıma kadar devam ettirilir.[16]

(2.3) ifadesinden faydalanarak

$$Var(y_i) = \ell'_i \Sigma \ell_i, \qquad i=1,2,.......,p \tag{2.16}$$

$$Kov(y_i) = \ell'_i \Sigma \ell_k \qquad i,k=1,2,.....,p \tag{2.17}$$

eşitliklerini yazabiliriz. Temel bileşenler varyansları mümkün olduğu kadar büyük olan ve birbirleri ile ilişkisi olmayan y_1, y_2, ...y_p lerdi. Bunlardan ilk temel bileşen olan y_1 maksimum varyanslı lineer bileşimdir. Yani $Var(y_1) = \ell'_1 \Sigma \ell_1$ maksimum değere sahip lineer bileşimdir. Açıkça görüldüğü gibi $Var(y_1) = \ell'_1 \Sigma \ell_1$, bazı sabitlerle ℓ_1 in çarpılması sonucu büyültülebilir. Bu sonsuz çarpımı yok etmek için, birim uzunlukta katsayılar matrisi ile kısıtlamak uygundur. Bundan dolayı temel bileşenlerin hesaplanması sırasında bazı kısıtlayıcılar söz konusudur. Bu kısıtları şu şekilde tanımlayabiliriz:

- İlk temel bileşen olan y_1 öyle seçilmelidir ki, bu temel bileşenin bulunmasında kullanılan ℓ_1 vektörünün elemanlarının kareleri toplamı 1 kısıtlaması altında $Var(\ell_1 X)$ maksimum olmalıdır.

- İkinci temel bileşen olan y_2 öyle seçilmelidir ki, bu temel bileşenin bulunmasında kullanılan ℓ_2 vektörünün elemanlarının kareleri toplamı 1

[16] GIRI, N. C. Multivariate Statistical Inference. Academic Press. N.Y., 1977. s. 285-286

ve kısıtlayıcıları altında y_1 den sonra $\text{var}(\ell'_2 X)$ en büyük olmalıdır. Ayrıca y_1 ve y_2 temel bileşenleri birbirine dik yani $\ell'_1 \ell_2 = 0$ olmalıdır.

i. aşamada;

- i. Temel bileşen y_i öyle seçilmelidir ki $\ell'_i \ell_i = 1$ ve $Kov(\ell'_i X \ell'_k X) = 0$, k<i, kısıtlayıcıları altında $Var(\ell'_{i-1} X)$ den sonra en büyük varyansa sahip olmalıdır.

Genel olarak y_i'lerin katsayıları varyansları maksimum olacak şekilde seçilir. Ayrıca y_1 den y_{i-1} e kadar olan katsayılar ilişkisiz olmalıdır. Yani $\text{Kov}(y_i\ y_{i-1}) = 0$ dır.

Gerçekten tüm p tane y_i temel bileşenleri için yeni bir kısıtlayıcıya ihtiyaç vardır. Herhangi bir değişkenin, sabit bir sayı olan c sayısı ile çarpılmasından yeni bir değişken elde edilir. Bu yeni değişkenin varyansı önceki değişkenin varyansının c^2 katıdır. Dolayısıyla $\text{Var}(y_i)$'yi isteğimize göre büyük yapmak için, katsayıları isteğimize göre büyük seçmemiz gerekmektedir. Ama, bu büyüklük tanımlanmış y_i katsayılarının göreceli büyüklüğüdür.[17] Bundan kurtulmak için temel bileşenlerin hesaplanmasında yukarıda sıraladığımız kısıtları daima göz önünde bulundurmamız gerekmektedir. Sonuç olarak,

Σ, $X' = [X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_p]$ rassal vektörünün kovaryans matrisi ve $(\lambda_1, e_1), (\lambda_2, e_2), \ldots\ldots\ldots\ldots, (\lambda_p, e_p)$ öz değer ve öz vektör ikililerine sahip olsun.

[17] HARRİS, R. J. a.g.e. s. 156

Burada $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ....\geq \lambda_p \geq 0$ dır. i. temel bileşen

$$Var(y_i) = e_i'\Sigma e_i = \lambda_i \tag{2.18}$$

$$Kov(y_i, y_k) = e_i'\Sigma e_k = 0 \qquad i \neq k \tag{2.19}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$y_i = e_i'X = e_{1i}X_1 + e_{2i}X_2 + ... + e_{pi}X_p \tag{2.20}$$

şeklinde yazabiliriz. Eğer bazı λ_i ler eşitse karşılık gelen katsayılar vektörleri olan e_i lerin seçimi y_i den dolayı tek değildir.[18]

Σ yarı pozitif tanımlı matris ve $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ....\geq \lambda_p \geq 0$ ler bu matrisin öz değerleri ve $e_1, e_2, ..., e_p$ lerde öz vektörleri olmak üzere,

$$\max_{\ell \neq 0} \frac{\ell'\Sigma\ell}{\ell'\ell} = \lambda_1 \qquad \ell = e \tag{2.21}$$

Fakat öz vektörlerin normalleştirilmesinden dolayı $e_1'e_1 = 1$ dir. Böylece ,

$$\max_{\ell \neq 0} \frac{\ell'\Sigma\ell}{\ell'\ell} = \lambda_1 = \frac{e_1'\Sigma e_1}{e_1'e_1} = e_1'\Sigma e_1 = Var(y_1) \tag{2.22}$$

olur. Aynı şekilde ,

$$\max_{\ell \perp e_1 e_2 ..... e_k} \frac{\ell'\Sigma\ell}{\ell'\ell} = \lambda_{k+1} \qquad k=1,2,............,p-1 \tag{2.23}$$

[18] JOHSON R. A., WİCHERN, D. W. a.g.e. s. 342

$\ell = e_{k+1}$ seçilirse ve $e'_{k+1} e_k = 0$ olmak üzere

$$\frac{e'_{k+1}\Sigma e_{k+1}}{e'_{k+1} e_{k+1}} = e'_{k+1}\Sigma e_{k+1} = \lambda_{k+1} = Var(y_{k+1}) \qquad (2.24)$$

sonucuna ulaşılır.

$e'_{k+1}(\Sigma e_{k+1}) = \lambda_{k+1} e'_{k+l} e_{k+1} = \lambda_{k+1}$ olmasından dolayı $Var(y_{k+1}) = \lambda_{k+1}$ dir. Buradan e_i'nin e_k'ya dik olduğunu söyleyebiliriz. Yani i≠k olmak üzere $e'_i e_k = 0$ dır. e_i'nin e_k'ya dik olması bize Kov(y_i y_k)=0 sonucunu verir.

Eğer bütün öz değerler birbirinden farklı ise, Σ'nın öz vektörleri birbirine diktir. Eğer öz değerler birbirinden farklı değilse, tüm öz değerlere karşı gelen öz vektörler birbirlerine dik seçilebilir. Bu yüzden herhangi iki e_i ve e_k öz vektörleri için $e'_i e_k = 0$, i≠k , eşitliğini verir.

$\Sigma e_k = \lambda_k e_k$ olduğundan eşitliğin her iki tarafını e'_i ile soldan çarparsak,

$$e'_i \Sigma e_k = e'_i \lambda_k e_k = \lambda_k e'_i e_i = Cov(y_i y_k) = 0, \qquad i \neq k \qquad (2.25)$$

eşitliğini elde ederiz.

Tüm bunlardan sonra, temel bileşenler karşılıklı olarak ilişkisiz ve Σ'nın öz değerlerine varyansları karşılıklı olarak eşittir diyebiliriz.

$$y_1 = e_1'X,$$

$$y_2 = e_2'X$$

$$\vdots$$

$y_p = e_p'X$ olmak üzere

$$\sigma_{11} + \sigma_{22} + \ldots\ldots\ldots + \sigma_{pp} = \sum_{i=1}^{p} Var(X_i) \tag{2.26}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_p = \sum_{i=1}^{p} Var(y_i) \tag{2.27}$$

eşitliğinin var olduğu söylenebilir.

A={a_{ij}}, k x k boyutunda olmak üzere, A matrisinin iz'i (tr(A)) köşegen elamanlarının toplamına eşittir.

$$\text{İz (A)=tr(A)=} \sum_{i=1}^{k} a_{ii} \tag{2.28}$$

eşitliğinden

$$\sigma_{11} + \sigma_{22+} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots {}_{+}\sigma_{pp} = tr(\Sigma) \tag{2.29}$$

yazılabilir.

$A = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i e_i e_i' = P\Lambda P'$ ve A =Σ olmak üzere

$$\Sigma = P\Lambda P' \tag{2.30}$$

yazılabilir. Bu ifade deki Λ öz değerlerin köşegen matrisi, P $=[e_1, e_2, \ldots\ldots, e_p]$ ve $PP' = P'P = I$ dır.

tr(AB) = tr(BA) özelliğinden faydalanarak,

$$tr(\Sigma) = tr(P\Lambda P')$$

$$= tr(\Lambda PP')$$

$$= tr(\Lambda)$$

$$= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda \qquad (2.31)$$

sonucuna ulaşırız. Böylece $\sum_{i=1}^{p} Var(X_i) = tr(\Sigma) = tr(\Lambda) = \sum_{i=1}^{p} Var(y_i)$ eşitliğini yazabiliriz. Tüm bunlardan sonra,

$$\text{Toplam ana kütle varyansı} = \sigma_{11} + \sigma_{22} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \sigma_{pp}$$

$$= \lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \lambda_p \qquad (2.32)$$

dir.

$$\begin{pmatrix} k.temel\ bileşenin\ toplam \\ \text{var}\ yansa\ oranı \end{pmatrix} = \frac{\lambda_k}{\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots\ldots + \lambda_p}, \quad k=1,2,\ldots.p \qquad (2.33)$$

dir.

Eğer toplam varyansın çoğu (%80 ve %90) , p nin büyük olması durumunda, birinci, ikinci veya üçüncü temel bileşen diye adlandırılan temel bileşenler tarafından açıklanıyorsa bu temel bileşenler çok fazla bilgi kaybı olmaksızın orijinal p değişkeninin yerini alabilir. Katsayılar vektörü $e_i' = [e_{1i}, e_{2i}, \dots\dots\dots e_{pi}]$ nin her bir bileşeni ayrıca incelenmelidir. Diğer değişkenler göz önünde bulundurulmadan i. temel bileşen ile k. değişkenin önemi e_{ki} nin büyüklüğü ile ölçülür. Özellikle e_{ki}, y_i ve X_k arasındaki korelasyon katsayıları ile orantılıdır.

$y_1 = e_1'X, y_2 = e_2'X, \dots\dots\dots, y_p = e_p'X$ temel bileşenleri Σ kovaryans matrisinden elde ediliyorlarsa,

$$\rho_{y_i, x_k} = \frac{e_{ki}}{\sqrt{e_{kk}}}, \qquad \text{i,k =1,2,......,p} \tag{2.34}$$

eşitliği y_i elemanlarıyla X_k değişkenleri arasındaki korelasyon katsayılarıdır. $\ell'_k = [0,0,\dots\dots\dots,0,1,0,\dots\dots\dots,0]$ olmak üzere,

$$X_k = \ell'_k X \text{ ve Cov} (X_k, y_i) = Cov(\ell'_k X, \ell'_i X) = \ell'_k e_{ik} \tag{2.35}$$

şeklindedir. $\Sigma e_i = \lambda_i e_i$ olduğundan

$$Cov(X_k, y_i) = \ell'_k \lambda_i e_i = \lambda_i e_{ik} \tag{2.36}$$

dır.

$Var(y_i)\lambda_i$ ve $Var(X_k) = \sigma_{kk}$ olmasından dolayı

$$\rho_{Y_i}, X_{X_K} = \frac{Cov(Y_i, X_k)}{\sqrt{Var(Y_i)}\sqrt{Var(X_k)}}$$

$$= \frac{\lambda_i e_{ki}}{\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\sigma_{kk}}}$$

$$= \frac{e_{ik}\sqrt{\lambda_i}}{\sqrt{\sigma_{kk}}} \qquad (2.37)$$

sonucuna ulaşılır.

2.2 TEMEL BİLEŞENLERİN SEÇİMİ VE SAYISININ BELİRLENMESİ

Temel bileşenlerin hesaplanması sırasında öz değerlerin bulunmasından sonra önemli öz değer sayısına karar vermek çok önemlidir. Bu amaçla bir çok yöntem geliştirilmiştir. Bunlardan en basiti, standartlaştırılmış veri matrislerinin kullanılması halinde bir'den büyük değer alan öz değerlerin sayısını vermektedir. Veya yaklaşık aynı sonucu veren $\sum_{i=}^{m} \frac{\lambda_i}{p} \geq \frac{2}{3}$ şartının sağlandığı en küçük m değeri önemli temel bileşenlerin sayısı olarak alınmaktadır. Bunun dışında bir başka yöntem, Anderson tarafından geliştirilen genel olabilirlik oranıdır.

$$(n-1)\sum_{i=m+1}^{m+g} \log\lambda_i + (n-1)g\log\frac{\sum_{i=m+1}^{m+g}\lambda_i}{g} \sim \chi^2_{\frac{g}{2}(g+1)-1} \qquad (2.38)$$

örneklemdeki denek sayısının çok olması durumunda kullanılan yöntemde

$$H_0 : \lambda_{m+1} = \dots\dots\dots\dots = \lambda_{m+g} = \lambda_p$$

$$H_A : \lambda_{m+1} \neq \lambda_{m+I} \qquad İ \neq I = 1,2,\dots\dots g \qquad (2.39)$$

hipotezleri kullanılmaktadır. Burada m önemli bulunan temel bileşen sayısını, g ise ihmal edilen boyut sayısını göstermektedir. m ile g nin toplamı p ye eşittir. Ayrıca, varyansların testine ilişkin geliştirilmiş olan bazı testlerde bu amaçla kullanılmaktadır. Bunlardan bir tanesi de aynı öz değerlerin geometrik ortalaması olmak üzere,

$$2\log\lambda = (n - \frac{2p+11}{6})(p-m)\log\frac{a_0}{g_0} \sim \chi^2_{(p-m+2)(p-m-1)/2} \qquad (2.39)$$

veya

$$-2\log\lambda = (n-1)(p-m)\log\frac{a_0}{g_0} \sim \chi^2_{(p-m+2)(p-m-1)/2} \qquad (2.40)$$

şeklindedir. (2.39) ve (2.40) nolu denklemlerle verilen testlerde, test istatistik değerinin Ki-Kare tablo değerini aşması durumunda H_0 hipotezi reddedilmekte ve m sayısı bir artırılarak H_0 hipotezi kabul edilinceye kadar işleme devam edilmektedir.[19]

[19] TATLIDİL, Hüseyin. a.g.e. s. 147

(2.39) ve (2.40) eşitliklerindeki a_0 ihmal edilebileceği düşünülen öz değerlerin aritmetik ortalaması, g_0 yine aynı öz değerlerin geometrik ortalamasıdır.

$$\Sigma = P\Lambda P' = \sum_{i=1}^{p} \lambda_i e_i e_i' = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots\ldots + \Sigma_p \qquad (2.41)$$

bağıntısını ele alalım. Buradaki her Σ_i, Σ matrisinin bir parçasıdır. Σ_i parçası i. temel bileşenin katkısını göstermektedir. Dolayısıyla dönüştürülmüş verilerin değişkenlerini gösteren y_i'lerden ilk m tanesi seçilecek olursa, bağıntıdan dolayı ilk m tane Σ_i parçası seçilmiş olur. Bunlardan

$$\Sigma_h = \Sigma_1 + \Sigma_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \Sigma_m = \sum_{i=1}^{m} \Sigma_i$$

$$\Sigma g = \Sigma m+1 + \ldots\ldots + \Sigma p = \Sigma - \Sigma h \qquad (2.42)$$

şeklinde belirlenen alt matrislerden Σ_h alt matrisine "hipotez için bulunan matris" adı verilir. Σ_g ise kullanılmayan temel bileşenlere karşılık gelen kalıntı matrisidir.

Σ matrisinin tüm parçalarının bilinmesi halinde m sayısına karar vermek yine problem olarak karşımıza çıkmaktadır. Önemli temel bileşen sayısı olan m'nin belirlenmesinde Σ_h matrisinin Σ'ya yakın Σ_g matrisinde elemanları sıfır (sıfır matrisi) olan bir matrise eşit olması düşüncesinden hareket edilmektedir. Gerçek uygulamalarda bu durumlarla karşılaşmak mümkün olmayan bir durum gibidir. Bu nedenle Σ_g matrisinin elemanları ortalamalarının test edilmesinde Bartlet tarafından önerilen bir yöntem kullanılmaktadır.[20]

Küçük örneklemler için kullanışlı olan bu testte hipotezler

H_0: $|\Sigma_g| = 0$ veya H_0: $\lambda_{m+1} = \ldots\ldots\ldots = \lambda_{m+g} = \lambda_p$

$$H_1: |\Sigma_g| \neq 0 \qquad (2.43)$$

şeklinde kurulmaktadır. Bu hipotezde kullanılan test istatistiği ise,

$$U_g = \frac{|\Sigma|(g)^g}{(\prod_{i=1}^{m} \lambda_i)(P - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i)^g} \qquad (2.44)$$

iken,

$$-\left[(n-1) - \frac{1}{6}(2p+5) - \frac{2}{3}m\right] \log U_g \sim \chi^2_{\frac{g}{2}(g+1)-1} \qquad (2.45)$$

şeklinde verilmektedir. Bu test istatistiği Ki-kare tablo değeri ile karşılaştırılır ve H_0 hipotezi reddedilmişse m değeri bir artırılarak H_0 hipotezi kabul edilinceye kadar işleme devam edilir.

Bunlardan başka, temel bileşen sayısını belirlemede bazı grafik yöntemlerinden de faydalanılmaktadır. Bunların bir tanesi Cattel tarafından geliştirilmiş olan, öz değerlerin veya varyans açıklama oranlarının çizimi,

[20] TATLIDİL, Hüseyin... a.g.e. s. 148

serpilme diyagramı (Scree graph) yöntemidir. Bu yöntemde varyans açıklama oranlarındaki hızlı düşüş belirlenerek temel bileşen sayısına karar verilmektedir.[21]

2.3 TEMEL BİLEŞENLERİN GEOMETRİK YORUMU

X : px1 ~ N(μ, Σ) dağılımlı olsun. Sabit yoğunluk noktalarının kümesi olan, μ merkezli $(X-\mu)'\Sigma^{-1}(X-\mu)=C^2$ elipsoitlerini göz önüne alalım. Bu elipsoitler, aynı merkez ve temel eksenli iç içe olan elipsoitlerdir. Böyle bir elipsoidin temel eksenleri $\pm c\sqrt{\lambda_i}e_i$ dir. μ orijinli ve x_1, x_2, ..., x_p eksenli koordinat sisteminde $e_i' = [e_{1i}, e_{2i}, ...e_{pi}]$'ye orantılı i. elipsoidin ekseninde bir nokta olacaktır. Bu elipsoit, μ=0 merkezli elipsoide dönüştürmeye uygundur. Bu μ=0 merkezli elipsoidin eşitliğini,

$$C^2 = X'\Sigma^{-1}X = \frac{1}{\lambda_1}(e_1'X)^2 + \frac{1}{\lambda_2}(e_2'X)^2 + ...+ \frac{1}{\lambda_p}(e_p'X)^2 \qquad (2.46)$$

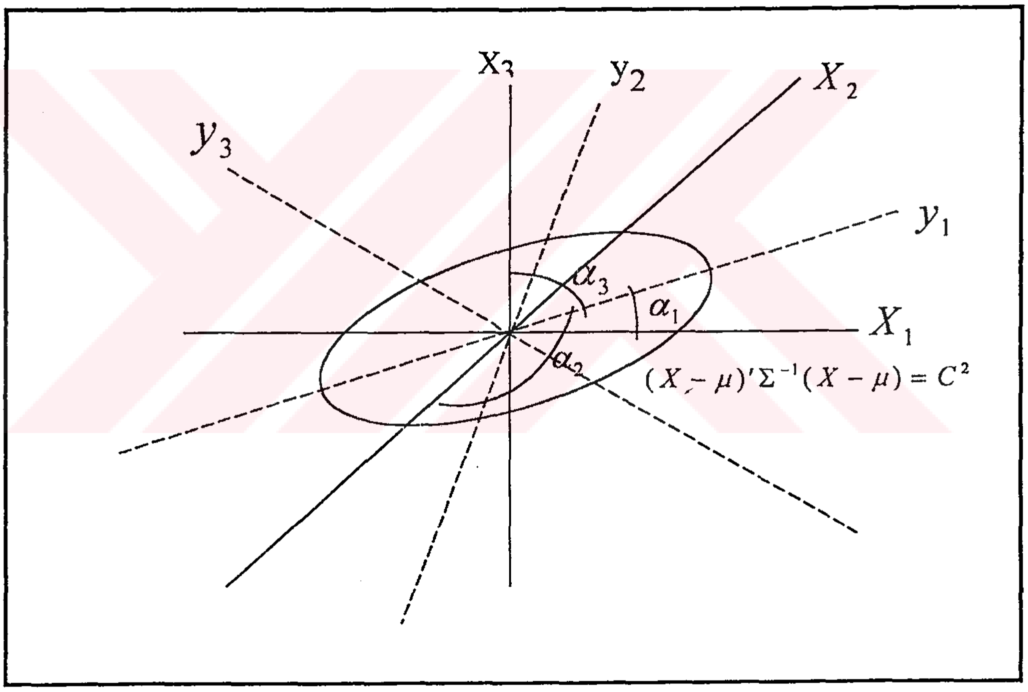
şeklinde yazabiliriz. Burada $e_1'X$, $e_2'X$ ...., $e_p'X$ 'ler X'in temel bileşenleri gibi tanımlanmıştır. $y_1 = e_1'X$, $y_2 = e_2'X$,..................., $y_p = e_p'X$ eşitliklerini (2.46) nolu eşitlikte yerlerine yazarsak,

$$C'^2 = \frac{1}{\lambda_1}y_1'^2 + \frac{1}{\lambda_2}y_2'^2 + ...+ \frac{1}{\lambda_p}y_p'^2 \qquad (2.47)$$

[21] H. TATLIDİL. a.g.e. s. 149

eşitliğini elde ederiz. $\lambda_1, \lambda_2, \ldots\ldots, \lambda_p$'lerin pozitif olmasından dolayı (2.47) nolu eşitlik, $e_1, e_2, \ldots\ldots, e_p$ doğrultularında bulunan $y_1, y_2, \ldots\ldots, y_p$ eksenli koordinat sisteminde bir elipsoidi tanımlar. Eğer λ_1 en büyük öz değer ise temel eksen e_1 yönünde, geri kalan eksenler sırasıyla $e_2, \ldots\ldots, e_p$ yönlerindedir.

P boyutlu uzayda söylenenlerin üç boyutlu bir örneğini şekil üzerinde gösterelim.[22]



ŞEKİL 2.1. Üçlü Gözlemlerin Temel Eksenleri

Şekil (2.1)'de görüldüğü gibi, noktaların yoğunlaştığı bölge genel olarak elips gibi oval şeklindedir. Şekilde temel eksen y_1 ve çok iyi tanımlanmamış diğer

[22] MORRİSON, D. F. a.g.e. s. 275

eksenler y_2 ve y_3 tür. Bir an için bu söylenenleri temel eksenle sınırlayalım ve bu temel eksenle orijinal eksenler arasındaki açıları α_1 , α_2, ve α_3 ile gösterelim. Eğer y_1 örneklem ortalama noktasından geçerse, y_1'in yönü tamamen cosinus yönündedir. Yani $\ell_{11} = \cos\alpha_1$, $\ell_{21} = \cos\alpha_2$ ve $\ell_{31} = \cos\alpha_3$ tür. Burada, $\ell_{11}^2 + \ell_{21}^2 + \ell_{31}^2 = 1$ dir.

Analitik geometriden de bilindiği gibi, yeni koordinat ekseni y_1 deki [x_{i1}, x_{i2}, x_{i3}] gözlem değeri

$$y_{i1} = \ell_{11}(x_{i1} - \bar{x}_1) + \ell_{21}(x_{i2} - \bar{x}_2) + \ell_{31}(x_{i3} - \bar{x}_3) \tag{2.48}$$

olacaktır. Üç boyutlu uzaylar için varyans:

$$\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} y_{i1}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{j(1)}^{3} \ell_{j1}(x_{ij} - \bar{x}_j)\right]^2 \tag{2.49}$$

olur ve y_1'in açıları (2.49) eşitliğinin ℓ_{j1}'e göre kısmi türevi alınıp sıfıra eşitlenmesiyle bulunmaktadır. Bulunan bu değer X_{ij}' nin örneklem kovaryans matrisinin en büyük öz vektörüdür ve y_1 sistemin sürekli ilk temel bileşenidir.

Bu durumu p boyutlu uzaylar için göstermeye çalışalım. İlk temel bileşenin cosinus yönü $\ell'_1 = [\ell_{11}, \ell_{21}, \ldots\ldots, \ell_{p1}]$ gibidir. $\ell'_1\ell_1 = 1$ kısıtlaması daima geçerlidir. y_1 eksenindeki izdüşümün varyansı:

$$S_{y1}^2 = \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N} y_{i1}^2 \tag{2.50}$$

$$= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{j=1}^{p}\ell_{j1}\left(x_{ij}-\bar{x}_j\right)\right]^2$$

$$= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\left[\sum_{j=1}^{p}\left(x_i-\bar{x}\right)'\ell_1\right]^2.$$

$$= \frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}\ell'_1(x_i-\bar{x})(x_i-\bar{x})'\ell'_1$$

$$= \ell'_1 S\ell_1$$

olacaktır. λ_1 lagrange çarpanı olmak üzere ;

$$\Phi(\ell,\lambda_1) = \ell'_1 S\ell_1 + \lambda(1-\ell'_1\ell_1) \tag{2.51}$$

eşitliğini maksimize edersek,

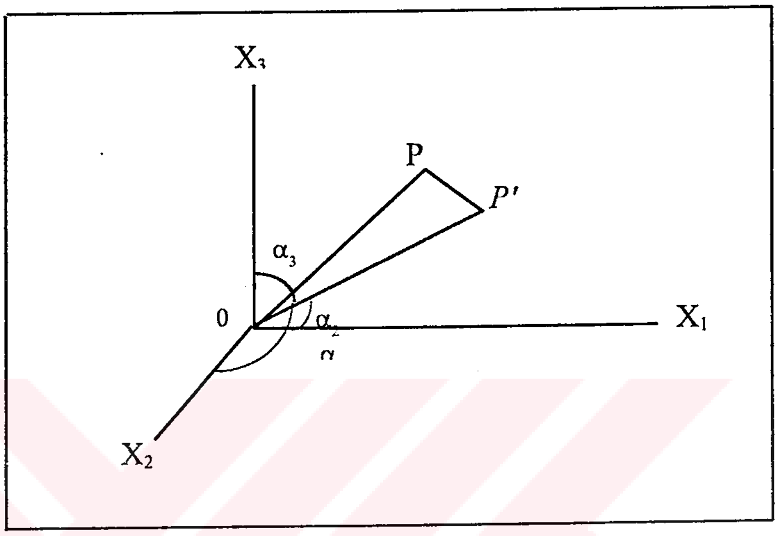
$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_1} = 2(S-\lambda_1 I)\ell_1 \tag{2.52}$$

eşitliğini elde ederiz.

$$|S-\lambda_1 I| = 0 \tag{2.53}$$

eşitliğinden bulunacak ilk öz değer vektörünün elemanları, ilk temel bileşen ekseninin cosinus yönündedir ve maksimize edilen varyans en büyük öz değerdir. Geri kalan öz değer ve öz vektörler, diğer temel bileşen eksenlerinin uzunluklarını ve yönünü belirler.

Temel bileşen eksenlerinin diğer bir özelliği de ilk defa K. Pearson tarafından 1901 yılında gösterilen, yeni koordinat eksenlerinin seçimi ve her bir notanın kendi izdüşümüne uzaklıkları kareleri toplamının minimum yapılmasıyla sağlanmaktadır. Şekil (2.2) üç boyutlu uzayda izdüşüm ve bir gözlemin uzaklığını göstermektedir.[23]



Şekil: 2.2. Gözlenen P noktası ve ilk temel bileşen üzerindeki P' izdüşümü.

nın öz vektörlerinin doğrularıdır.

i. uzaklığın karesi;

$$(P_i'P_i)^2 = (OP_i)^2 - (OP_i')^2 \tag{2.54}$$

$$= \sum_{j=1}^{p} (x_{ij} - \bar{x}_j)^2 - \left[\sum_{j=1}^{p} \ell_{j1} (x_{ij} - \bar{x}_j) \right]^2$$

olur. $\sum_{i=1}^{p} (P_i'P)^2$ 'nin minimize edilmesi, $(OP_i')^2$ 'nin maksimize edilmesidir. Buda elbette S_{y1}^2 ile orantılıdır. Eğer ilk öz değer en büyük ise, ilk temel bileşenin katsayılarının en iyi tahmini, serpilme diyagramındaki iki ekstreme noktasının birleştirilmesinden elde edilen doğrudan yapılabilir. Örneklem uzayında, iki nokta arasındaki en büyük uzaklığı $X_{(1)}$ ve $X_{(N)}$ gözlemleriyle gösterirsek, tüm gözlem vektör ikilileri için

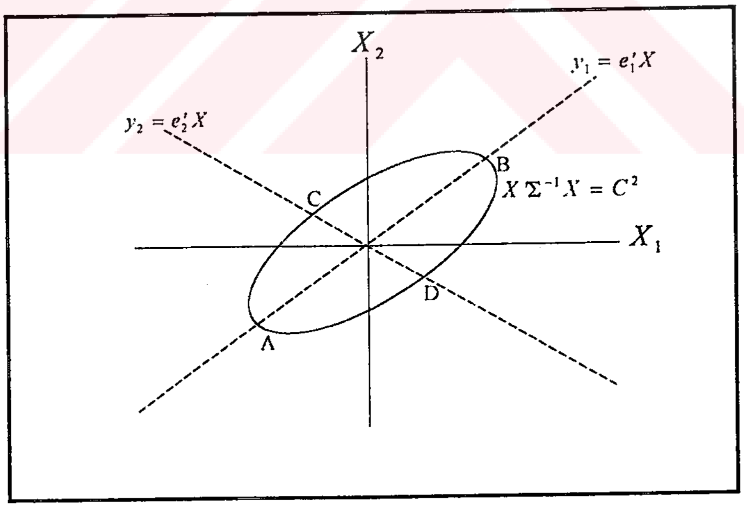
$$d^2 = \sum_{j=1}^{p} (X_{(N)j} - X_{(1)j})^2 \tag{2.55}$$

maksimumdur. Doğrunun kosinus yönü ise

$$\ell_j = \frac{X_{(N)j} - X_{(1)j}}{d} \tag{2.56}$$

dir. Burada d, d^2'nin pozitif kareköküdür.

Şimdi de P boyutlu uzayda söylenenleri, P = 2 olduğunda göstermeye çalışalım. $X_{2x1} \sim N_2(0, \Sigma)$ ve $\text{rank}(\Sigma) = 2$ olsun.



Şekil 2.3 : Sabit Normal Rassal Vektör X İçin y_1 , y_2 Temel Bileşenleri ve $X\Sigma^{-1}X = C'^2$ Denklemli Sabit Yoğunluk Elipsi.

[23] D. F. MORRİSON. a.g.e. s. 278

Bu elipsin sabit noktaları A,B,C ve D' dir. Adı geçen elipsoitler birer elips olmak üzere eksenleri AB ve CD doğruları üzerindedir. Bu doğrular aynı zamanda Σ nın öz vektörlerinin doğrularıdır.

2.4 TEMEL BİLEŞENLERİN EN ÇOK OLABİLİRLİK KESTİRİCİLERİ

Ortalaması μ_{px1} ve varyansı Σ (pxp) olan bir dağılımdan N birimlik (N>p) rassal bir örnek çekildiğini varsayalım. S örnek kovaryans matrisi

$$S = \frac{1}{N-1}\sum (X_i - \ddot{X})(X_i - \ddot{X})' \tag{2.57}$$

olmak üzere S' nin öz değerleri $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots\dots\dots > \hat{\lambda}_p$ ve bunlara karşılık gelen öz vektörleri de $k_1, k_2, \dots\dots\dots, k_p$ olup $(S - \hat{\lambda}_j I)k_j = 0$ ve $k_j k_j' = 1$ dir.

ℓ_1, ℓ_2, ...ℓ_p Σ' nın farklı $\lambda_1 > \lambda_2 > \dots\dots\dots > \lambda_p$ gibi öz değerlerine karşılık gelen öz vektörler olsun. Aynı şekilde k_1 , k_2,.......k_p ve $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2 > \dots\dots\dots > \hat{\lambda}_p$ sırasıyla Σ' nın en çok olabilirlik kestiricisi S'nin öz vektörleri öz değerleri olsun. O zaman ℓ_j' lerin en çok olabilirlik kestiricileri k_j' ler ve λ_j' lerin en çok olabilirlik kestiricileri $\hat{\lambda}_j$' lerdir.[24] (j=1,2,.......,p)

[24] ANDERSON, T. W. A.g.e. s. 279

λ_1, λ_2, ... ,λ_r, Σ' nın q_1, q_2, ... ,q_r katlı öz değerleri ise, o zaman λ_k' nın en çok olabilirlik kestiricisi

$$\hat{\lambda}_k = \frac{1}{q_k}\frac{n}{N}\sum_{j=q}^{q_k}\lambda_j \quad ; k=1,2,...,r\ , n=N-1 \tag{2.58}$$

dir.

2.5 TEMEL BİLEŞENLERİN EN ÇOK OLABİLİRLİK KESTİRİCİLERİNİN HESAPLANMASI

Σ varyans - kovaryans matrisinin öz değerlerini ve öz vektörlerini (temel bileşenler) hesaplamanın bir çok metodu vardır. Burada sadece iki metodunu ele alacağız.[25]

Bu metotlardan bir tanesi olan (2.7) determinant eşitliğidir.

Bu eşitlik p'inci dereceden bir polinomdur ve kökleri λ_1, λ_2, ... , λ_p ($\lambda_1 > \lambda_2 >........> \lambda_p$) lerdir. Daha sonra , Σ–λI' nın rankı p-1 dir ve $(\Sigma-\lambda_i I)b^{(i)}=0$ çözümü, $\Sigma-\lambda_i I$' nın j inci satırının ilk sütununda ki elemanların faktörlerini $b_j^{(i)}$ ler olarak bulunur.

İkinci metot ise iterasyon yöntemidir. Öz değer ve buna karşılık gelen öz vektör

$$\Sigma X=\lambda X \tag{2.59}$$

[25] ANDERSON, T. W. a.g.e. s. 281

şeklinde yazılabilir. Bu yazılan eşitlik ana kütle içindir. $X_{(0)}$ ilk öz vektöre dik olmayan bir vektör olsun . daha sonra aşağıdaki eşitlikler yazılabilir:

$$X_{(i)}=\Sigma y_{(i-1)} \qquad i=1,2, \ldots.. \tag{2.60}$$

$$y_{(i)}=\frac{1}{\sqrt{X'_{(i)}X_{(i)}}}X_{(i)} \tag{2.61}$$

$$\lim_{i\to\infty} y_{(i)} = \pm\beta^{(1)} \tag{2.62}$$

$$\lim_{i\to\infty} X'_{(i)}X_{(i)} = \lambda_i^2 \tag{2.63}$$

Daha önceden $\Sigma = \beta\Lambda\beta'$ olduğunu biliyoruz ve böylece

$$\Sigma^{i} = (\beta\Lambda\beta')\Sigma^{i-1} = (\beta\Lambda\beta')\Lambda^{i-1'}\beta = \beta\Lambda^{i}\beta' \tag{2.64}$$

olur.

$S_i = \dfrac{1}{\sqrt{X'_{(i)}X_{(i)}}}$ olsun (2.60) ve (2.61) nolu eşitliklerden

$$Y_{(i)}=S_{(i)}\Sigma y_{(i-1)} \tag{2.65}$$

yazılabilir. (2.65) nolu eşitliğin tekrarı halinde

$$Y_{(i)}=(\prod_{j=0}^{i} S_j)\,\Sigma^{i}X_{(0)} \tag{2.66}$$

$$= t_i \beta \Lambda^i \beta' X_{(0)} \quad , \qquad t_i = \prod_{j=0}^{i} S_i \tag{2.67}$$

(2.61) nolu eşitlikten

$$1 = y'_{(i)} y_{(i)} = t_i^2 X'_{(0)} \beta \Lambda^i \beta' \beta \Lambda^i \beta' X_{(0)} \tag{2.68}$$

yazılabilir. Daha sonra;

$$Y_i = t_i \lambda_1^i \beta (\frac{1}{\lambda_1} \Lambda)^i \beta' X_{(0)} \tag{2.69}$$

eşitliği yazılabilir. $\left(\frac{1}{\lambda_1}\right)^i$ nin limiti, σ > 1 ve $\frac{\lambda_j}{\lambda_1} < 1$ olduğundan

$$\lim_{i\to\infty} (\frac{1}{\lambda_1} \Lambda)^i = \lim_{i\to\infty} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right)^i & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \\ 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & \left(\frac{\lambda_p}{\lambda_1}\right) \end{pmatrix} \tag{2.70}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & & & 0 \end{pmatrix} \qquad ; \text{j>1 için } \frac{\lambda_j}{\lambda_1} < 1$$

olacaktır. Böylece

$$\lim_{i\to\infty} \beta \left(\frac{1}{\lambda_1} \Lambda \right)^i \beta' X_{(0)} = \beta \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \beta' X_{(0)} \tag{2.71}$$

$$= \left(\beta^{(1)} 0 \ldots\ldots 0 \right) \beta' X_{(0)}$$

$$= \beta^{(1)} \beta^{(1)'} X_{(0)}$$

$$= \left(\beta^{(1)'} X_{(0)} \right) \beta^{(1)}$$

olur. (2.68) ve (2.71) nolu eşitlikten

$$\lim_{i\to\infty} \left(t_i \lambda_1' \right)^2 = \frac{1}{\left(\beta^{(1)'} X_{(0)} \right)^2} \tag{2.72}$$

eşitliği elde edilir.

İkinci öz değer ve öz vektörü bulmak için;

$$\Sigma_2 = \Sigma - \lambda_1 \beta^{(1)} \beta^{(1)'} \tag{2.73}$$

eşitliği tanımlanır. Daha sonra

$$\Sigma \beta^{(i)} = \Sigma \beta^{(i)} - \lambda_1 \beta^{(1)} \beta^{(1)'} \beta^{(i)} \tag{2.74}$$

$$= \Sigma \beta^{(i)} = \lambda_i \beta^{(i)} \qquad , i \neq 1$$

$$\Sigma_2 \beta^{(1)} = 0 \tag{2.75}$$

yazılabilir. Böylece λ_2 ikinci en büyük öz değer ve buna karşılık gelen öz vektör ise $\beta^{(2)}$ olur. İşlemler aynı şekilde tanımlanır ve yürütülürse;

$$\Sigma_3 = \Sigma_2 - \lambda_2 \beta^{(2)} \beta^{(2)\prime}$$

eşitliğinden λ_3 ve $\beta^{(3)}$ bulunabilir.

2.6 ÖRNEKLEM TEMEL BİLEŞENLERİNİN ÖZELLİKLERİ

Örneklem, sonlu yada sonsuz birimden meydana gelen ana kütleden çekilen ve ana kütlenin özelliklerini taşıyan birimlerden meydana gelmektedir. Çoğunlukla, ana kütlenin tamamına maliyet, zaman veya diğer bazı nedenlerle ulaşmak mümkün olmamaktadır. Bu gibi durumlarda ana kütlenin özelliklerine sahip olan örneklem üzerinde yapılan işlemlerle ana kütle hakkında tahminler yapılmaya çalışılır. Örneklem, ana kütlenin özelliklerini taşıdığından, ana kütle hakkında yapılan tahminler doğru yada doğruya çok yakın olmaktadır.

Tek değişkenli istatistiklerde uygulanan örneklem tahminleri çok değişkenli istatistiklerde de aynen uygulanabilmektedir. Çok değişkenli ana kütlelere ulaşmak, tek değişkenli ana kütlelere ulaşmaya nazaran çok daha zor ve tahrip edici olmaktadır.

Pratikte, çok değişkenli istatistiklerde kovaryans matrisi Σ genellikle bilinmez. Bundan dolayı ana kütle temel bileşenleri kullanılamayacak ve hangi temel bileşenin yeter derecede küçük varyansa sahip olduğu ve dolayısıyla önemsizliğine karar verilemeyecektir. Ana kütle temel bileşenlerinin açıklanmasında X rassal vektörünün dağılımının nasıl olduğu çok önemli değildir. Ama, örneklem temel bileşenlerini bulurken, yani ana kütleye ulaşamamaktan kaynaklanan kovaryans matrisi Σ' nın bilinmemesi durumunda, x örneklem rassal vektörünün p değişkenli normal dağılıma sahip olduğunu varsayımını kabul edeceğiz. Normal dağılıma sahip örneklemin ortalama vektörü μ ve bilinmeyen yarı pozitif tanımlı kovaryans matrisi Σ' dır. matematiksel ifade ile $x \sim N_p(\mu, \Sigma)$ dır.[26]

2.6.1 ÖRNEKLEM TEMEL BİLEŞENLERİNİN HESAPLANMASI

$x_1, x_2, \ldots\ldots, x_n$, ortalama vektörü μ ve kovaryans matrisi Σ olan yaklaşık P boyutlu ana kütleden çekilen n bağımsız vektörleri göstersin. Bu verilerin örneklem ortalama vektörü $\bar{x}$, örneklem kovaryans matrisi S ve örneklem korelasyon matrisi R'dir. En büyük varyansa sahip birbirleriyle karşılıklı ilişkisiz bileşimler, örneklem temel bileşenleri olarak adlandırılmaktadır.

Herhangi lineer bileşimin n değerini (2.1) ifadesinden faydalanarak yeniden yazarsak:

$$\ell'_1 x_i = \ell_{11} x_{1i} + \ell_{21} x_{2i} + \ldots\ldots\ldots\ldots + \ell_{p1} x_{pi} \;, \qquad i=1, 2, \ldots, n \quad (2.76)$$

[26] GIRI, N. C. a.g.e. s. 288

olacaktır. (2.76) eşitliğinin örneklem ortalaması $\ell'_1\bar{x}$ ve örneklem varyansı $\ell'_1 S\ell_1$ dir. Ayrıca, iki lineer bileşim için $(\ell'_1 x_i, \ell'_2)$ değerler ikilisinin örneklem kovaryansı $\ell'_1 S\ell_2$ biçimindedir.

Örneklem temel bileşenleri bu lineer bileşimlerin maksimum varyanslısı olarak tanımlanmaktadır. Ana kütle temel bileşenlerinde olduğu gibi, ℓ_i vektörlerinin katsayısı $\ell'_i\ell_i = 1$ $(\|\ell_i\| = 1)$ olacak şekilde kısıtlanmalıdır. Ayrıca, ana kütle temel bileşenlerinin bulunmasında uygulanan tüm kısıtlar, örneklem temel bileşenlerinin bulunmasında da geçerlidir.

örneklem temel bileşenlerinden hareketle şu sonuçları yazabiliriz:[27]

Eğer S = $\{S_{ik}\}$, p x p boyutunda örneklem kovaryans matrisi ve $(\hat{\lambda}_1, \hat{e}_1), (\hat{\lambda}_2, \hat{e}_2), \ldots\ldots\ldots\ldots (\hat{\lambda}_p \hat{e}_p)$ bu matrisin öz değer ve öz vektör ikilileri ise, i. örneklem temel bileşeni şu formülle ifade edilebilir :

$$\hat{y}_i = \hat{e}_i x = \hat{e}_{1i}x_1 + \hat{e}_{2i}x_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \hat{e}_{pi}x_p \quad i=1,\ldots\ldots\ldots,p \qquad (2.46)$$

Burada, $\hat{\lambda}_1 \geq \hat{\lambda}_2 \geq \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \geq \hat{\lambda}_p \geq 0$ ve x, $X_1, X_2, \ldots\ldots\ldots, X_p$ değişkenlerinden çekilmiş herhangi bir rassal değişkendir. Ayrıca,

$$\text{örneklem varyansı} \quad (\hat{y}_k) = \hat{\lambda}_k \quad k=1,\ldots\ldots\ldots,p \qquad (2.77)$$

$$\text{örneklem kovaryansı} \quad (\hat{y}_i, \hat{y}_k) = 0 \quad i \neq k \qquad (2.78)$$

[27] JOHNSON, R. A., WICHERN, D. W. a.g.e. s:352

$$\text{Toplam örneklem varyansı} = \sum_{i=1}^{p} S_{ii} = \hat{\lambda}_1 + \hat{\lambda}_2 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \hat{\lambda}_p \qquad (2.79)$$

$$r_{\hat{y}_i, x_k} = \frac{\hat{e}_{ki}\sqrt{\hat{\lambda}_i}}{\sqrt{S_{kk}}} \qquad i,k = 1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots,p \qquad (2.80)$$

dır.

Örneklem temel bileşenlerini S ve R' nin hangisinden elde edildiğine bakmaksızın $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \ldots\ldots\ldots\ldots, \hat{y}_p$ lerle ifade edeceğiz. S ve R den elde edilen bileşenler genelde aynı değildir.

x_i gözlemleri genellikle $\bar{x}$ vektörünün çıkarılmasıyla ortalanır. Bu işlem örneklem kovaryans matrisini etkilemez ve i. temel bileşeni verir. Gözlenen herhangi bir x vektörü için i. temel bileşen $\hat{y}_i = \tilde{e}_i(x_i - \bar{x})$ dir.

Her bir temel bileşenin örneklem ortalaması,

$$\bar{\hat{y}}_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \hat{e}_i'(x_i - \bar{x}) = \frac{1}{n}\hat{e}_i[\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})] = \frac{1}{n}\hat{e}_i'.0 = 0 \qquad (2.81)$$

ve örneklem varyansları $\hat{\lambda}_i$ lere eşittir.

Örneklem temel bileşenleri, genelde ölçümlerdeki değişmelere göre sabit değildir. Değişkenler ayrı ölçeklemlerle veya aynı ölçeklemlerle farklılık gösteren boyutlarda elde edilebilirler. Fakat bunlar yapılan işlemlerle standart hale getirilirler. Örneklem için standartlaştırma işlemleri şu şekilde yapılmaktadır :

$$Z_i = D^{-1/2}(x_i - \bar{x}) = \begin{bmatrix} \frac{x_{1i} - \bar{x}_1}{\sqrt{s_{11}}} \\ \frac{x_{2i} - \bar{x}_2}{\sqrt{s_{22}}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \frac{x_{pi} - \bar{x}_p}{\sqrt{s_{pp}}} \end{bmatrix} \qquad \text{i= 1,2,................,n} \qquad (2.48)$$

Standartlaştırılmış gözlemlerin p x n boyutunda veri matrisi ,

$$Z = [Z_1, Z_2, \ldots\ldots\ldots, Z_n] = \begin{bmatrix} z_{11} & z_{12} & \ldots & \ldots & z_{1n} \\ z_{21} & z_{22} & \ldots & \ldots & z_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ z_{p1} & z_{p2} & \ldots & \ldots & z_{pn} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{x_{11} - \bar{x}_1}{\sqrt{s_{11}}} & \frac{x_{12} - \bar{x}_1}{\sqrt{s_{11}}} & \ldots\ldots\ldots & \frac{x_{1n} - \bar{x}_1}{\sqrt{s_{11}}} \\ \frac{x_{21} - \bar{x}_2}{\sqrt{s_{22}}} & \frac{x_{22} - \bar{x}_2}{\sqrt{s_{22}}} & \ldots\ldots\ldots & \frac{x_{2n} - \bar{x}_2}{\sqrt{s_{22}}} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \frac{x_{p1} - \bar{x}_p}{\sqrt{s_{pp}}} & \frac{x_{p2} - \bar{x}_p}{\sqrt{s_{pp}}} & \ldots\ldots\ldots & \frac{x_{pn} - \bar{x}_p}{\sqrt{s_{pp}}} \end{bmatrix} \qquad (2.82)$$

den örneklem ortalama vektörü ,

$$\bar{Z} = \frac{1}{n} Z_1 = \frac{1}{n} \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{1i} - \bar{x}_1}{\sqrt{s_{11}}} \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{2i} - \bar{x}_2}{\sqrt{s_{22}}} \\ \vdots \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{n} \frac{x_{pi} - \bar{x}_p}{\sqrt{s_{pp}}} \end{bmatrix} \tag{2.83}$$

ve örneklem kovaryans matrisi

$$S_Z = \frac{1}{n-1}(Z - \frac{1}{n} Z11')(Z - \frac{1}{n} Z11')' \tag{2.84}$$

$$= \frac{1}{n-1}(Z - \frac{1}{n} \bar{Z}1')(Z - \frac{1}{n} \bar{Z}1')' = \frac{1}{n-1} ZZ'$$

$$= \frac{1}{n-1} \begin{bmatrix} \frac{(n-1)S_{11}}{S_{11}} & \frac{(n-1)S_{12}}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{12}}} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \frac{(n-1)S_{1p}}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{pp}}} \\ \frac{(n-1)S_{21}}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{22}}} & \frac{(n-1)S_{22}}{S_{22}} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \frac{(n-1)S_{2p}}{\sqrt{S_{22}}\sqrt{S_{pp}}} \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ \frac{(n-1)S_{p1}}{\sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{pp}}} & \frac{(n-1)S_{p2}}{\sqrt{S_{22}}\sqrt{S_{pp}}} & \cdots\cdots & \cdots\cdots & \frac{(n-1)S_{pp}}{S_{pp}} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & S_{12} / \sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{22}} & \cdots\cdots & S_{1p} / \sqrt{S_{11}}\sqrt{S_{pp}} \\ & 1 & \vdots & \vdots \\ simetrik & & \vdots & \vdots \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

= R' dir.

Örneklem gözlemleri standartlaştırıldığından bileşenlerin $\hat{y}_i = \hat{e}_i'(x_i - \bar{x})$ şeklinde yazılmasına gerek kalmaktadır. Örneklem temel bileşenleri S matrisi yerine R matrisinden de elde edilebilir.

i. örneklem temel bileşeninin toplam örneklem varyansına (standartlaştırılmış) oranı = $\hat{\lambda}_i / p$ dir.

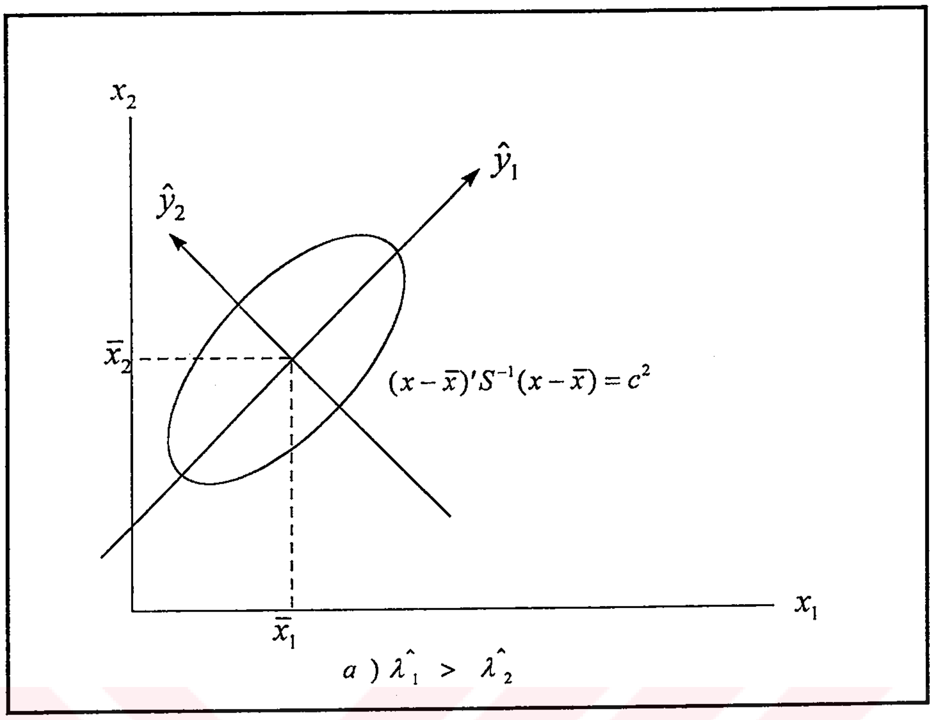
2.6.2 ÖRNEKLEM TEMEL BİLEŞENLERİNİN GEOMETRİK YORUMU

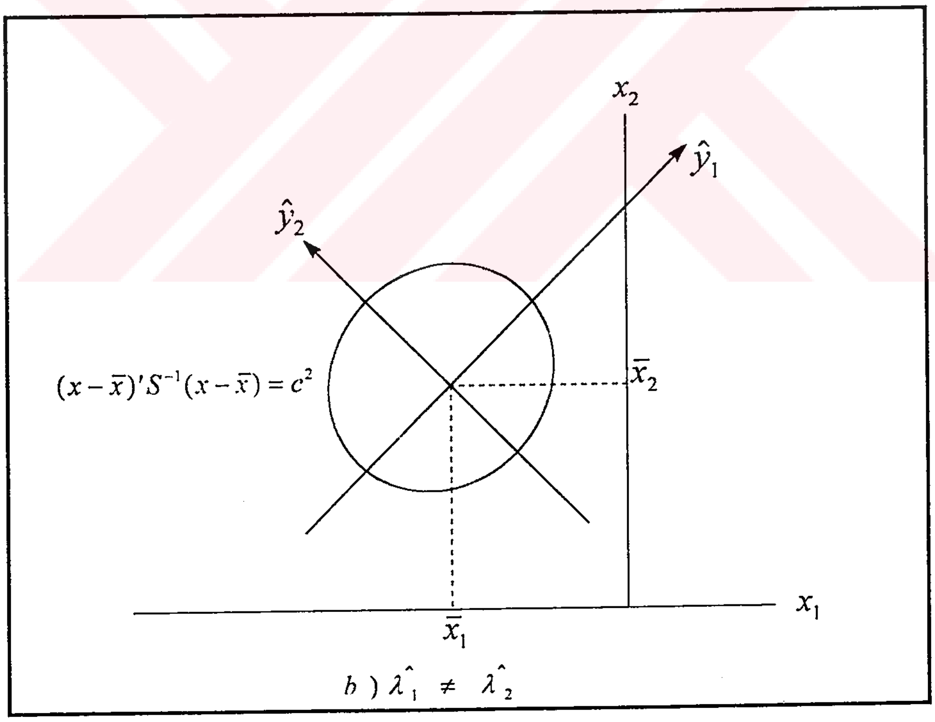
Geometrik olarak değişkenler p boyutlu uzayda n tane nokta olarak işaretlenebilir. Eğer S yarı pozitif tanımlı ise, bütün p x 1 boyutundaki x vektörleri $(x-\bar{x})'S^{-1}(x-\bar{x}) = c^2$ eşitliğini sağlar. Bu eşitlik $\bar{x}$ merkezli hiper elipsdir. Elipsin eksenleri S^{-1} in öz değerleri ile veya buna denk olan S' nin öz değerleri ile belirlenir. Bu eksenlerin uzunlukları $\sqrt{\hat{\lambda}_i}$ ile orantılıdır.

Örneklem temel bileşenleri, ana kütle temel bileşenlerinden elde edilen $N_p(\mu,\Sigma)$ dağılımlı değişkenlerin sabit yoğunluk elipslerinde olduğu gibi sabit uzaklık elipslerinin eksenleri aynı ilişkileri taşır. Yani örneklem temel bileşenleri sabit uzaklık elipslerinin eksenleri boyunca uzanır. Bu bileşenler orijinal koordinat sisteminin maksimum varyans yönünde koordinat eksenlerinin dağılımından geçinceye kadar döndürülmesi gibi görülebilir[28].

i. temel bileşenin mutlak değeri, $|\hat{y}_i| = |\hat{e}_i'(x-\bar{x})|$, birim vektör $\hat{e}_i$ da $(x-\bar{x})$ vektörünün izdüşümünü verir. Örneklem temel bileşenlerinin geometrik yorumu p=2 için aşağıdaki şekillerde gösterilmiştir :

[28] JOHNSON R.A., WICHERN, D.W. a.g.e. s.355.





Şekil 2.4 Örneklem Temel Bileşenleri ve Sabit Uzaklık Elipsleri

Şekil 2.4.a ‘da sabit uzaklığın elipsini göstermektedir. Elipsin merkezi $\bar{x}$ ve $\hat{\lambda}_1 > \hat{\lambda}_2$ dir. Örneklem temel bileşenleri iyi tayin edilmiştir ve maksimum örneklem varyansın dik yönlerinde elipsin eksenleri boyunca uzanmaktadır. Şekil 2.4.b de ise $\hat{\lambda}_1 = \hat{\lambda}_2$ durumunda $\bar{x}$ ortalama merkezli sabit uzaklık elipsini göstermektedir. Bu durumda sabit uzaklık elipsinin eksenleri tek olarak tayin edilmemiştir ve orijinal koordinat eksenlerinin doğrularını da içererek herhangi iki dik doğrultuda uzanmaktadır. Benzer olarak, örneklem temel bileşenleri herhangi iki dik doğrultuda uzanmakta ve orijinal koordinat eksenlerinin temel bileşenlerini de içermektedir. Sabit uzaklığın çevresi yaklaşık olarak daire şeklinde veya buna benzer olduğu zaman, ayrıca S'nin öz değerleri yaklaşık olarak eşit ise, örneklem değişkenli tüm yönlerde homojendir. Dolayısıyla p boyuttan daha az verileri göstermek mümkün olmamaktadır.

x_1, x_2,..............x_n normal dağılımlı ana kütleden çekilen örneklem olarak kabul edersek, ortalama vektörü 0, varyans matrisi Λ olan ana kütle temel bileşenleri $y_i = e_i'(x-\mu)$ nün gerçeği olan örneklem temel bileşenleri $\hat{y}_i = e_i'(x-\bar{x})$ dir. Burada Λ köşegen bir matristir ve köşegen elamanları λ_i ler dir. (λ_i, e_i) ikilileri Σ nın öz değer ve öz vektörleri olduğundan, sabit uzaklık elipslerinden, $(x-\bar{x})'S^{-1}(x-\bar{x}) = c^2$, yoğunluk elipslerini, $(x-\mu)'\Sigma^{-1}(x-\mu) = C^2$, tahmin edebiliriz.

2.6.2.1 P BOYUTLU TEMEL BİLEŞENLERİN GEOMETRİK YORUMU

Geometrik yorumlar, P boyutlu serpme diyagramının en iyi yakınlaştırılmış düzlemlerinin tayinini verir. Düzlem orijinden geçer ve

$$x = b_1\ell_1 + b_2\ell_2 + \ldots\ldots. + b_r\ell_r = Lb \tag{2.85}$$

ile hesaplanır. Burada b rassal bir vektör ve L ise her bir sütunu ℓ_i lerden oluşan katsayılar matrisidir. Bu düzlem a noktasından geçinceye kadar döndürülür ve bazı b için düzlem a+Lb olur. Biz r boyutlu düzlem olan a+Lb' yi seçmek istiyoruz ki bu a+Lb düzlemi ve x_j gözlemleri arasındaki uzaklıkların kareleri toplamını minimum yapar. Eğer x_i , a+Lb_j den tahmin ediliyorsa,

$$\sum_{j=1}^{n} b_j = 0 \tag{2.86}$$

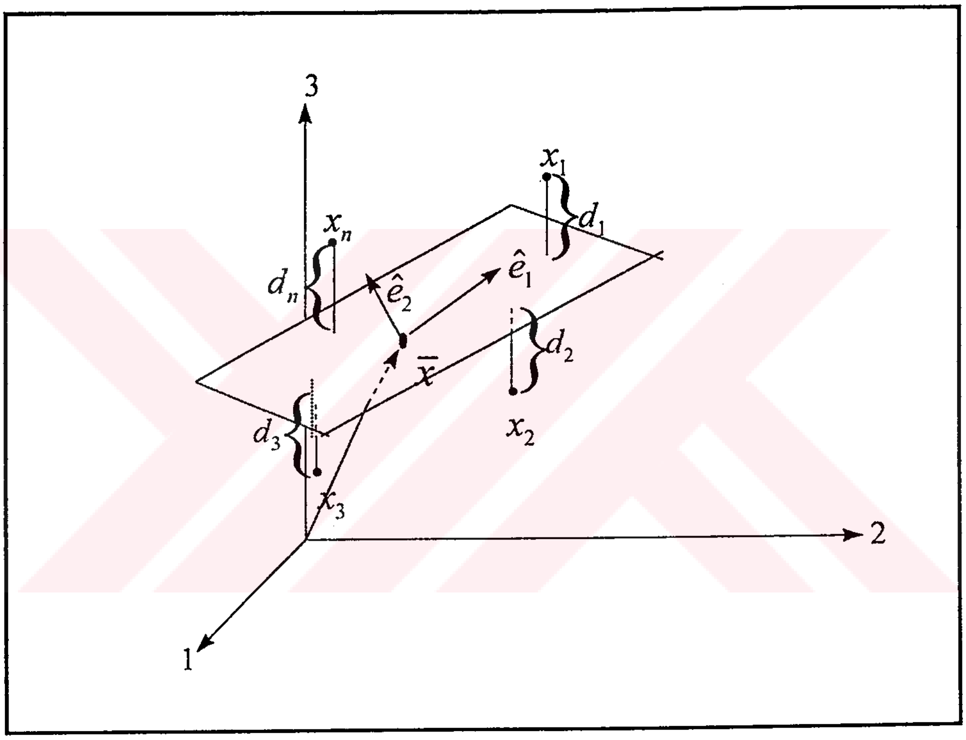
$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - a - Lb_j)'(x_j - a - Lb_j) \tag{2.87}$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x} - Lb_j + \bar{x} - a)'(x_j - \bar{x} - Lb_j + \bar{x} - a)$$

$$= \sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x} - Lb_j)'(x_j - \bar{x} - Lb_j) + n(\bar{x} - a)'(\bar{x} - a)$$

$$\geq \sum_{j=1}^{n}[x_j - \bar{x} - \hat{E}\hat{E}'(x_j - \bar{x})]'[x_j - \bar{x} - \hat{E}\hat{E}'(x_j - \bar{x})] \tag{2.88}$$

olur. Burada $\hat{E} = [\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots\ldots\ldots \hat{e}_r]$, A = [a_1 , a_2 , ..., a_n] ve $a_i = Lb_j$ dir. Alt sınır $a = \bar{x}$ şeklinde alınıp uzatıldığında, düzlem örneklem ortalamasından geçer. Bu düzlem $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \ldots\ldots\ldots, \hat{e}_2$' lerle bulunmuştur. P boyutlu örneklem temel bileşenlerinin tahmini düzlem yorumu aşağıdaki şekilde gösterilmiştir.[29]



Şekil 2.5 $\sum_{j=1}^{n} d_j^2$ minimize edilmesiyle serpme diyagramının iki boyutlu uzaydaki tahmini.

Ayrıca alternatif yorumda verilebilir: $\bar{x}$ merkezinden geçecek şekilde düzlem belirlenir ve gözlemlerin gölgeleri arasında en büyük yayılmayı elde edinceye kadar hareket ettirilir.

[29] JOHNSON, R. A., WICHERN, D. W. a.g.e. s. 369

$$(x_j-\bar{x})'\ell_1\ell_1+(x_j-\bar{x})'\ell_2\ell_2+\dots\dots\dots+(x_j-\bar{x})'\ell_r\ell_r$$

$$=[\ell_1,\ell_2,\dots\dots,\ell_r]\begin{bmatrix}\ell'_1(x_j-\bar{x})\\ \vdots\\ \vdots\\ \ell'_r(x_j-\bar{x}\end{bmatrix}$$

$$=LL'(x_j-\bar{x}) \tag{2.89}$$

eşitliğinden Lb düzlemindeki $x_j-\bar{x}$ sapmasının izdüşümü $V_j=LL'(x_j-\bar{x})$ dır. V=0 ve izdüşüm sapmalarının kareleri alınmış uzunluklarının toplamı

$$\sum_{j=1}^{n}V_j'V_j=\sum_{j=1}^{n}(x_j-\bar{x})'LL'(x_j-\bar{x}),\ \mathrm{L}=\hat{E}$$

$$=(n-1)tr(L'SL) \tag{2.90}$$

olduğunda maksimumdur. Ayrıca $\bar{V}=0$ olduğunda

$$(n-1)S_v=\sum_{j=1}^{n}(V_j-\bar{V})(V_j-\bar{V})'=\sum_{j=1}^{n}V_jV_j' \tag{2.91}$$

ve bu düzlem toplam varyansı da maksimum yapar. Yani,

$$tr(S_v)=\frac{1}{(n-1)}tr[\sum_{j=1}^{n}V_jV_j']=\frac{1}{(n-1)}tr[\sum_{j=1}^{n}V_j'V_j] \tag{2.92}$$

şeklindedir.

2.6.2.2 n BOYUTLU TEMEL BİLEŞENLERİN GEOMETRİK YORUMU

Tahminin hatası olan

$$\sum_{j=1}^{n}(x_j - \bar{x} - a_j)'(x_j - \bar{x} - a_j) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x}_i - a_{ij})^2 \tag{2.93}$$

eşitliğindeki yaklaşımı satır satır gösterelim. r=1 için, i. satır $[x_{i1} - \bar{x}_i, x_{i2} - \bar{x}_i, \ldots\ldots, x_{in} - \bar{x}_i]'$, sabit vektör olan $b = [b_1, b_2, \ldots\ldots, b_n]'$ nin $c_i b'$ ile çarpılmasıyla elde edilmiştir. Hata tahminlerinin uzunlukları kareleri

$$L_i^2 = \sum_{j=1}^{n}(x_{ij} - \bar{x} - c_i b_j)^2 \tag{2.94}$$

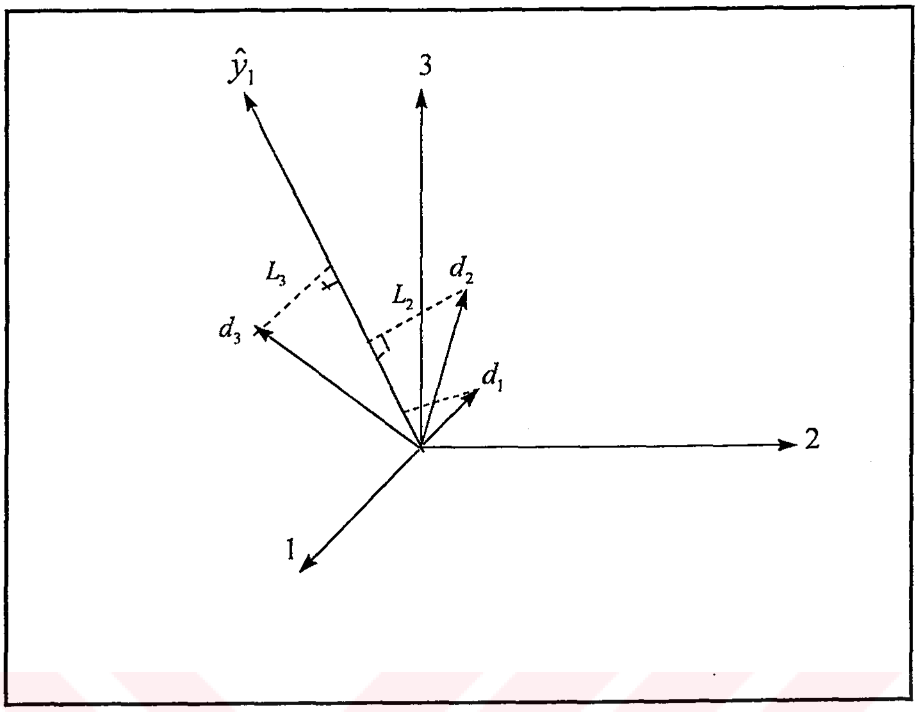
şeklindedir. $A=\{a_{ij}\}$, $a_{ij} = c_i b_j$ olmak üzere

$$\hat{A} = [\hat{e}_1\hat{e}_1{}'(x_1 - \bar{x}), \hat{e}_1\hat{e}_1'(x_2 - \bar{x}), \ldots\ldots\ldots, \hat{e}_1\hat{e}_1'(x_n - \bar{x})]$$

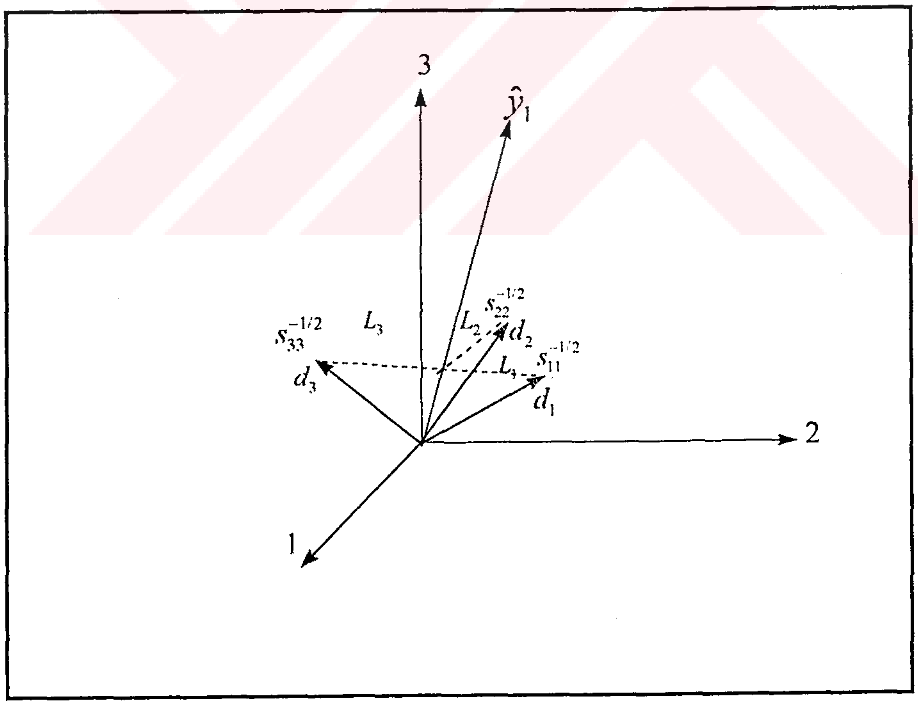
$$= \hat{e}_1[\hat{y}_{11}, \hat{y}_{12}, \ldots\ldots\ldots, \hat{y}_{1n}] \tag{2.94}$$

uzunluklar karesi toplamını, $(\sum_{i=1}^{n} L_i^2)$, minimize eder. Yani en iyi yön ilk temel bileşen değerlerinin vektörüyle bulunmaktadır. Bu aşağıdaki şekillerden (a)'da gösterilmiştir.[30]

[30] LOHNSON, R. A., WICHERN, D. W. a.g.e. s.370



a) S'nin temel bileşeni



b) R'nin temel bileşeni

Şekil 2.5 Sapma Vektörlerinden, $[x_{i1} - \bar{x}_i, x_{i2} - \bar{x}_i, \ldots\ldots x_{in} - \bar{x}_i]$, Doğruya Uzaklıkların Kareleri Toplamını, L_i^2, Minimize Eden İlk Örneklem Temel Bileşeni

Daha büyük sapma vektörleri, $\sum_{i=1}^{n} L_i^2$ 'nin minimize edilmesinde büyük etkiye sahiptir.

Eğer değişkenler ham veriler değil de standartlaştırılmış veriler ise, sonuç vektör $\left[\frac{(x_{i1}-\bar{x}_i)}{\sqrt{s_{ii}}}, \frac{(x_{i2}-\bar{x}_i)}{\sqrt{s_{ii}}}, \ldots\ldots\ldots, \frac{(x_{in}-\bar{x}_i)}{\sqrt{s_{ii}}}\right]$'nin tüm değişkenleri uzunluğu bir ve yönün seçiminde eşit etki ederler. Bunu şekil 2.5 b'de görebiliriz.

Bir başka durum, b vektörü, $\left[x_{i1}-\bar{x}_i, x_{i2}-\bar{x}_i, \ldots\ldots\ldots\ldots, x_{n1}-\bar{x}_i\right]'$ ve b ile hesaplanan doğrunun üzerindeki bu vektörün izdüşümü arasındaki uzaklığın kareleri toplamını minimize etmek için n- boyutlu uzayda, etrafında döndürülür. İkinci temel bileşen, ilk seçilen temel bileşene dik olan tüm diğer vektörlere aynı uzaklıktadır ve bu uzaklık minimumdur.

2.7 STANDARTLAŞTIRILMIŞ DEĞİŞKENLERDEN TEMEL BİLEŞENLERİN ELDE EDİLMESİ

Daha öncede belirttiğimiz gibi, temel bileşenler analizi uygulamalarında karşılaşılan zorluklardan biri de ölçüm birimlerinin etkileridir. S matrisinde tüm veya bazı değişkenlerin sonuçları, ölçüm birimleri değişkenliği içerir. Bunun sonucunu, öz değer ve öz vektörlerde gözlemek zordur. Bununla birlikte, önemli ve önemsiz değişkenlerin rolü değişmekteydi. Yani, küçük varyanslı olan büyük varyanslı durumuna geçebilmekteydi. Bundan dolayı temel bileşenler analizinde yalnızca, tüm değişkenler aynı birimle ölçüldüğünde veya en azından karşılaştırılabilir birimlerle ölçüldüğünde kullanılabilir.[31]

Bu durumdan kurtulmanın yolu, değişkenlerin standartlaştırılmasıdır. Standartlaştırma metotlarından yaygın olarak kullanılanı, her bir değişkeni, o değişkenin standart sapmasına bölmektir. Bu işlem varyansları birleştirerek küçültür ve dağılım matrisi yerine korelasyon matrisinde işlem yapmayı gerektirir.[32]

Standartlaştırma. Kendall ve Stuart (1968)'ın belirttiği gibi, dağılım teorisini ve örneklem dağılımlarını güçleştirmektedir. Bu nokta pratikte önemli olmamakla beraber, teori gerçek değerlere uygulandığında en iyi yaklaşımdır ve standartlaştırmayla belirlenen hata çok önemli olmamaktadır.[33] Ham verilerin standartlaştırılması yoluyla temel bileşenlerin bulunması aşağıda gösterilmiştir :

$$Z_1 = \frac{X_1 - \mu_1}{\sqrt{\sigma_{11}}}$$

$$Z_2 = \frac{X_2 - \mu_2}{\sqrt{\sigma_{22}}}$$

$$\vdots$$

$$Z_p = \frac{X_p - \mu_p}{\sqrt{\sigma_{pp}}}$$

şeklinde yazılabilir. Matris notasyonuyla gösterimi ise şu şekildedir :

[31] KASAP, Reşat. İstatistiksel Veri Analizinde Temel Bileşenlerin Yeri. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Ankara, 1987. s. 29
[32] MARRIOTT, F. H. C. Interpretation of Multiple Observations. Academic Press. London, 1974. s.20
[33] F. H. C. MARRIOTT. a.g.e. s.20

$$Z = (V^{1/2})^{-1}(X-\mu) \tag{2.95}$$

Burada, diyagonal standart sapma matrisi $V^{1/2}$,

$$V^{1/2} = \begin{bmatrix} \sqrt{\sigma_{11}} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & \sqrt{\sigma_{22}} & 0 & \cdots & 0 \\ : & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\ : & : & : & : & : \\ 0 & 0 & : & : & \sqrt{\sigma_{pp}} \end{bmatrix} \tag{2.96}$$

şeklinde tanımlanmıştır. Açık olarak, E(Z) = 0 ve **Kov(Z)** = $(V^{1/2})^{-1}\Sigma(V^{1/2})^{-1} = \rho$ 'dır.

Z'nin temel bileşenleri X'in korelasyon matrisi ρ'nun öz vektörleri yardımıyla da bulunabilir. Kovaryans matrisi Σ dan bulunan değerler, genelde, korelasyon matrisi ρ dan bulunan değerlerle aynı değildir[34].

Standartlaştırılmış değişkenlerin i. temel bileşeni, $Z' = [Z_1, Z_2, \ldots\ldots, Z_p]$ ve Kov (Z) = ρ olmak üzere,

$$Y_i = e_i'Z = e_i'(V^{1/2})^{-1}(X-\mu) \qquad i=1,2\ldots\ldots\ldots,p \tag{2.97}$$

şeklindedir. Bundan başka , $\sum_{i=1}^{p} Var(Y_i) = \sum_{i=1}^{p} Var(Z_i) = p$ eşitliğinden görüldüğü gibi toplam (standartlaştırılmış değişkenler) ana kütle varyansı basitce p' dir. p, ρ matrisinin köşegen elamanlarının toplamıdır.

2.8 ÖZEL YAPILI KOVARYANS MATRİSLERİNİN TEMEL BİLEŞENLERİ

Temel bileşenleri basit formada ifade edebilmek için, kovaryans ve korelasyon matrislerinin belirli modelleri mevcuttur. Σ aşağıda ki gibi bir köşegen matris olsun.

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 & \dots & 0 \\ : & 0 & \dots & \dots & \dots \\ : & : & : & : & : \\ 0 & 0 & : & : & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \tag{2.98}$$

i. pozisyondaki e_i birim matrisini $e_i' = [0,0,\dots\dots,0,1,0,\dots\dots\dots,0]$ şeklinde aldığımızda, Σ matrisini e_i birim matrisi ile çarparsak,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \sigma_{22} & 0 & \dots & 0 \\ : & 0 & \dots & \dots & \dots \\ : & : & : & : & : \\ 0 & 0 & : & : & \sigma_{pp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ : \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ : \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ : \\ 0 \\ \sigma_{ii} \\ 0 \\ : \\ 0 \end{bmatrix} \tag{2.99}$$

veya $\Sigma e_i = \sigma_{ii} e_i$ eşitliğini elde ederiz. (2.98) çarpımından da görüldüğü gibi (σ_{ii}, e_i), sırasıyla. i. öz değer ve öz vektör ikilisidir. $e_i'X = X_i$'nin lineer bileşiminden dolayı, temel bileşenlerin tümü, birbirleriyle ilişkisiz rassal değişkenlerin orijinal setidir.

---

[34] JOHNSON, R. A., WICHERN, D. W. a.g.e. s.346

(2.98) modeline sahip kovaryans matrisinden elde edilen temel bileşenler için hiçbir şey söylenemez. Diğer bir deyişle, eğer X normal dağılmışsa, sabit çevresi elipsoitlerdir. Bu elipsoitlerin eksenleri maksimum değişkenliğin yönünde uzanmaktadır. Dolayısıyla, bu durumlarda koordinat sisteminin döndürülmesine gerek yoktur. (2.98) formundaki Σ matrisleri için standartlaştırma yapmanın sonuca hiç bir katkısı olmamaktadır. Bu gibi durumlarda ρ = I p x p biçiminde birim matristir. Açık olarak, $\rho e_i = 1 e_i$ olmasından dolayı p tane 1 öz değerine sahiptir ve $e_i' = [0,0,\ldots\ldots,0,1,0,\ldots\ldots,0]$ öz vektörler için uygun seçimdir. Dolayısıyla ρ için hesaplanan temel bileşenler ayrıca orijinal değişkenler Z_1, Z_2,........, Z_p' lerin de temel bileşenleridir. Ayrıca, karakteristik köklerin eşitliği durumunda, sabit yoğunluğun çoklu normal elipsoitleri küremsidir.

Kovaryans matrislerinin diğer bir modeli de, genellikle canlıların sahip oldukları bazı biyolojik değişkenlerin büyüklükleri gibi kendi içlerinde ki ilişkiler şeklinde tanımlanmaktadır. Genel formu aşağıdaki gibidir:

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma^2 & \rho\sigma^2 & \ldots & \ldots & \rho\sigma^2 \\ \rho\sigma^2 & \sigma^2 & \ldots & \ldots & \rho\sigma^2 \\ : & : & : & : & : \\ : & : & : & : & : \\ \rho\sigma^2 & \rho\sigma^2 & \ldots & \ldots & \sigma^2 \end{bmatrix} \tag{2.100}$$

Korelasyon matrisi ise,

$$\rho = \begin{bmatrix} 1 & \rho & \rho & \dots & \rho \\ \rho & 1 & \rho & \dots & \rho \\ \rho & \rho & 1 & \dots & \rho \\ : & : & : & : & : \\ \rho & \rho & \dots & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad (2.101)$$

şeklindedir. Standartlaştırılmış değişkenlerin kovaryans matrisi olan (2.101) eşitliğindeki matris bize, X_1, X_2, ...,X_p değişkenlerinin karşılıklı olarak birbirleriyle eşit ilişkili olduğunu belirtmektedir.

(2.101) eşitliğindeki korelasyon matrisinin p tane öz vektörünün iki gruba ayrılabildiğini gösterebiliriz. ρ pozitif olduğunda en büyük öz vektör λ_1=1+(p+1)ρ ve öz vektör $e_1' = \left[\frac{1}{\sqrt{p}}, \frac{1}{\sqrt{p}}, \dots\dots\dots, \frac{1}{\sqrt{p}}\right]$ olmaktadır. Geriye kalan p-1 tane öz değer ise, birbirleriyle eşit ve $1-\rho$ değerlerini almaktadırlar ($\lambda_2=\lambda_3=\dots\dots=\lambda_p= 1-\rho$). Bunlara ait öz vektörler ise sırasıyla;

$$e_2' = \left[\frac{1}{\sqrt{1x2}}, \frac{-1}{\sqrt{1x2}}, 0, \dots\dots\dots, 0\right]$$

$$e_3' = \left[\frac{1}{\sqrt{2x3}}, \frac{1}{\sqrt{2x3}}, \frac{-2}{\sqrt{2x3}}, 0, \dots\dots, 0\right]$$

:

$$e_i' = \left[\frac{1}{\sqrt{(i-1)i}}, \dots\dots \frac{1}{\sqrt{(i-1)i}}, \frac{-(i-1)}{\sqrt{(i-1)i}}, 0, \dots\dots 0\right]$$

:

:

$$e_p' = \left[\frac{1}{\sqrt{(p-1)p}} \dots\dots\dots\dots\dots, \frac{1}{\sqrt{(p-1)p}}, \frac{-(p-1)}{\sqrt{(p-1)p}}\right] \qquad (2.102)$$

şeklindedir. İlk temel bileşen $y_1 = e_1'X = \frac{1}{\sqrt{p}}\sum_{i=1}^{n} X_i$, p orijinal değişkenin toplamına orantılıdır.

Eğer standart hale getirilmiş değişkenler, (2.98) de verilen kovaryans matrisiyle normal dağılıma sahipse, sabit yoğunluğun elipsoitleri puro şeklindedir. Bu elipsoit ilk temel bileşen etrafında daha büyüktür. Geri kalan temel bileşenlerin eksenleri daha küçük ve küre şeklinde simetrik yöndedir. Ayrıca bu temel bileşenler ilk temel bileşene diktir.

BÖLÜM 3

UYGULAMA

Bir ekonomide bazı kişiler elde ettikleri gelirlerin tamamını tüketemeyip, bir kısmını tasarruf etmekte ve ihtiyaç duyduğunda bu tasarrufunu tekrar kullanmaktadır. Tasarruf ederken, tasarrufunun değerini, düşüş risklerinden korumak için değişik yöntemlere başvurmaktadırlar. Bu yöntemlerden bit tanesi Menkul Kıymet yatırım fonlarıdır.

Menkul kıymet yatırım fonları; taşınabilir nitelikte, ekonomik kıymet ifade eden ve paraya çevrilebilen veya para ile ifade edilebilen ortaklık veya alacaklılık sayılarak belli tutarı temsil eden kıymetler[35] olarak ifade edilebilir.

Menkul kıymetler örgütlenmiş ya da örgütlenmemiş bir borsa veya pazarda rayiç değerleri üzerinden kıymetli evrak hukuku kuralları uyarınca devredilerek işlem görürler. Uzun vadeli alacakları içerdikleri için kısa zamanda paraya çevrilmeleri ikinci el piyasasında olabilir. Menkul kıymetleri bankalar. aracı kurumlar veya sigorta şirketleri halka sunabilirler.

3.1 ÇALIŞMANIN AMACI

Bu çalışma; İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında işlem gören hisse senetlerinden on üç çimento fabrikasının hisse senetlerinin aylık getirileri alınarak, bu aylık getirilerinin temel bileşenlerinin bulunmasına yöneliktir.

---

[35] KİDWELL, David., PETERSON, L. Richard. Financial İnstitutions, Market, and Money. The Dryden Press, İllnois. 1981. s 44-45

Hisse senetlerinin aylık getirileri alınırken, 1995 yılı sonuna kadar İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında hisse senetleri işlem gören ve geriye doğru 24 ayını tamamlamış olmasına dikkat edilmiştir. Bu hisse senetlerinin aylık getirilerinin temel bileşenleri bulunurken amacımız önemli değişkeni temel bileşenler açısından bulmaya çalışacağız. Ayrıca temel bileşenlere bağlı olarak, teorik kısımda anlatılanları bulmaya çalışacağız. Bu işlemleri yaparken, ölçüm farklılığı veya hatası olabileceğini varsayarak standartlaştırılmış değişkenlerden elde edilen temel bileşenleri bulmaya çalışacağız.

3.2 SERMAYE PİYASASI TANIM VE MAHİYETİ

Sermaye piyasası uzun vadeli fon arz ve talebinin karşılaştığı piyasayı ifade etmektedir. Bununla beraber örgütlenmiş finans sisteminin tümü için, kısa vadeli işlemlere konu olan para piyasası ile tahvil ve hisse senetleri gibi uzun vadeli yatırım araçlarının oluşturduğu piyasa için de sermaye piyasası kavramı kullanılmaktadır.

Sermaye piyasası uzun vadeli üretken yatırımlara, tasarrufları kanalize etme amacına yönelik olmasından dolayı uzun vadeli fon ve arz talebinin karşılaştığı sermaye piyasası olarak belirlemek[36] daha uygun olmaktadır. Diğer piyasalarla birlikte tümüne mali piyasa yada finansal piyasalar terimini de kullanabiliriz. Uzun vadeli yatırım araçları para piyasasında ve sermaye piyasasında da işlem gördüğünden ayrım yapmak yapay olmaktadır.

[36] TUNCER, Selahattin. Türkiye de Sermaye Piyasası, Teori ve Uygulama. Okan Yayıncılık ve Dağıtımcılık, İstanbul, 1985. s 12

Sermaye piyasasında vade bir yıldan daha uzun olmasından dolayı yatırım araçlarının taşıdığı riskte daha yüksektir. Piyasaya fon arz edenler fonlarını uzun bir süre kullanmak üzere devretmekte, buna paralel olarak bu fonları kullananlarda uzun vadeli yatırımlara bağlamaktadırlar. Vadenin uzun olması ve riskin büyüklüğü nedeniyle alım - satım arasındaki farkta büyük olmaktadır.

Sermaye piyasasında işlem gören araçlar hisse senetleri ve tahvillerdir. Sermaye piyasası yatırım araçlarının türüne göre de belirtilmektedir. Hisse senedi piyasası gibi adlandırıldıkları da görülmektedir. Sermaye piyasası, para piyasasında olduğu gibi örgütlenmiş ve örgütlenmemiş şeklinde de ayrılmaktadır.[37]

Yasal düzenlemesi noksan, yardımcı kuruluşları eksik ve yatırım araçları bakımından çeşitlerini çoğaltamamış ve ekonomik gelişmesine yeterince fon sağlayamayan sermaye piyasası örgütlenmemiş bir sermaye piyasası sayılmaktadır.

Ekonomik olayların piyasaya yansıması kısa vadeli piyasalarda daha çabuk olmaktadır. Dolayısıyla değişmeler para piyasasına daha çabuk yansır. Sermaye piyasası bu değişmeden etkilenir ve belli bir süre sonra bu değişmeye kendini uydurmak durumunda olacaktır.

3.2.1 HİSSE SENETLERİNİN DEĞERLENDİRİLMESİ

Piyasaya hisse senedi sunan firmaların başarı veya başarısız olmaları, bu hisse senetlerine aynen yansıyacaktır. Buna göre hisse senetlerinin birbirinden farklı

---

[37] AKSOY, Ahmet. Menkul Kıymet Yatırımlarının Analizi. Ankara, 1987. s. 73

eğerlerinden söz etmek mümkündür. Hisse senetlerinin farklı değerlerine göre piyasa değeri, muhasebe değeri ve tasfiye değeri gibi değerleri vardır.

3.2.2 HİSSE SENETLERİNİN AYLIK GETİRİLERİNİN HESAPLANMASI

Hisse senetlerinin borsada oluşan fiyatları baz alınarak aylık getirileri hesaplanmıştır. Aylık getiri, bir hisse senedinin bir ay içinde elde tutulması sonucunda elde edilen getiriyi göstermektedir. Araştırmamızın kapsadığı dönem itibariyle hisse senetlerinin hesaplanması aşağıdaki şekilde yapılmıştır:

$$G_i = \frac{F_i * (BDL + BDZ + 1) - R * BDL + F - F_{i-1}}{F_{i-1}} * 100$$

G_i = 'i' ayına ait getiri

F_i = 'i' ayına ait en son kapanış fiyatı

BDL = Ay içinde alınan bedelli hisse adedi

BDZ = Ay içinde alınan bedelsiz hisse adedi

R = Rüçhan hakkı kullanma fiyatı

T = Ay içinde 1000 TL nominal değerli bir hisse senedine ödenen temettü tutarı

F_{i-1} = 'i' ayından bir önceki aya ait en son kapanış fiyatı.

Yukarıdaki formül yardımıyla, İstanbul Menkul Kıymetler Borsasında on üç çimento fabrikasının hisse senetlerinin 24 aylık getirileri ham veri matrisi olarak aşağıdaki tabloda olduğu gibi hesaplanmıştır.

	X_1 %	X_2 %	X_3 %	X_4 %	X_5 %	X_6 %	X_7 %	X_8 %	X_9 %	X_{10} %	X_{11} %	X_{12} %	X_{13} %
94/1	2	4	14	1	16	4	5	18	8	44	31	2	20
94/2	19	42	23	23	10	6	41	27	8	42	25	25	36
94/3	1	14	12	6	40	18	17	33	9	8	7	5	14
94/4	13	34	24	35	25	18	7	7	11	30	22	38	18
94/5	23	1	17	51	2	8	19	27	23	32	36	2	15
94/6	50	77	38	30	21	3	45	47	41	2	14	64	61
94/7	41	24	53	9	18	6	34	62	24	58	9	43	17
94/8	19	20	21	87	17	18	21	23	61	14	24	17	17
94/9	21	9	16	14	16	12	58	16	2	35	7	42	35
94/10	7	10	8	18	15	7	7	18	16	9	8	2	13
94/11	11	9	7	8	15	3	7	13	7	15	0	20	2
94/12	11	8	20	5	2	10	12	15	15	21	7	13	8
95/1	13	2	12	1	6	9	12	13	22	27	19	13	11
95/2	9	2	11	8	14	1	7	11	16	17	8	15	8
95/3	35	23	17	13	14	40	14	16	16	11	35	4	23
95/4	13	14	17	30	28	28	61	27	9	3	13	28	43
95/5	0	12	2	20	2	38	78	4	2	5	7	0	5
95/6	4	5	4	15	11	26	27	7	0	13	11	16	5
95/7	33	10	20	34	4	14	12	17	5	20	1	15	24
95/8	14	19	22	18	2	21	33	14	11	20	12	23	15
95/9	7	3	1	16	11	9	25	8	8	12	0	4	3
95/10	9	3	8	88	5	29	6	6	5	16	10	12	12
95/11	28	9	5	11	15	18	23	7	13	16	51	29	31
95/12	0	12	2	15	36	4	5	17	8	10	18	14	7

Tablo 1: Hisse senetlerinin 24 aylık getirileri.

Yukarıdaki tabloda X_i değişkenleri;

X_1 = Adana Çimento

X_2 = Bolu Çimento

X_3= Bursa Çimento

X_4 = Çanakkale Çimento

X_5 = Çimentaş İzmir Çimento

X_6 = Çimsa Çimento

X_7 = Konya Çimento

X_8 = Oysa - Niğde Çimento

X_9 = Ünye Çimento

X_{10} = Afyon Çimento

X_{11} = Ak Çimento

X_{12} = Aslan Çimento

X_{13} = Mardin Çimento

aylık getiri değerlerini göstermektedir.

3.3 TEMEL BİLEŞENLERİN HESAPLANMASI

Ham verilerde ölçüm hatalarının olabileceği varsayımıyla (ki küçükte olsa bir miktar mutlaka vardır), temel bileşenleri korelasyon matrisinden hesaplayacağımız için varyans - kovaryans ve korelasyon matrislerini aşağıdaki tablolarda olduğu gibi hesapladık.

	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	X_6	X_7	X_8	X_9	X_{10}	X_{11}	X_{12}	X_{13}
X_1	177,6063	132,6630	115,0688	37,4420	-14,3315	-11,6268	43,5652	105,8207	82,7464	38,8696	41,5054	134,2862	123,9764
X_2	132,6630	277,7622	122,5000	35,8696	43,2500	-17,2391	99,8696	120,6413	92,3913	-10,6957	18,8370	186,3696	166,0109
X_3	115,0688	122,5000	139,5588	19,0290	5,7283	-28,7464	38,3478	130,4239	74,8116	84,9565	2,7500	122.7319	83.6341
X_4	37,4420	35,8696	19,0290	532,8387	-34,6304	69,2464	-10,4348	-9,4565	130,1884	-45,4783	27,2391	7.8116	33.9638
X_5	-14,3315	43,2500	5,7283	-34,6304	104,9395	-15,3152	-15,2174	46,4402	9,2391	-27,5217	3,1902	39,6848	31,9076
X_6	-11,6268	-17,2391	-28,7464	69,2464	-15,3152	122,4276	78,0870	-50,9674	-30,2754	-59,8261	17,1413	-41,0942	-5,1051
X_7	43,5652	99,8696	38,3478	-10,4348	-15,2144	78,0870	399,1285	53,5652	-18,6522	-25,3478	-32,0000	107,3913	123,4783
X_8	105,8207	120,6413	130,4239	-9,4565	46,4402	-50,9674	53,5652	182,1150	83,5000	62,9565	-4,3533	104,0761	90,4511
X_9	82.7464	92,3913	74,8116	130,1884	9,2391	-30,2754	-18,6522	83,5000	178,4068	-6,4783	43,5000	56,5942	50,5290
X_{10}	38,8696	-10,6957	84,9565	-45,4783	-27,5217	-59,8261	-25,3478	62,9565	-6,4783	196,6081	34,7391	40,3913	1,2609
X_{11}	41,5054	18,8370	2,7500	27,2391	3,1902	17,1413	-32,0000	-4,3533	43,5000	34,7391	162,1573	-2,5109	52,6141
X_{12}	134,2862	186,3696	122,7319	7,8116	39,6848	-41,0942	107,3913	104,0761	56,5942	40,3913	-2,5109	251,1587	154,4601
X_{13}	123,9764	166,0109	83,6341	33,9638	31,9076	-5,1051	123,4783	90,4511	50,5290	1,2609	52,6141	154,4601	200,0839

Tablo 2 : Varyans-Kovaryans Matrisi

	X01	X02	X03	X04	X05	X06	X07	X08	X09	X10	X11	X12	X13
X01	1,0000												
X02	,59729	1,0000											
X03	,73089	,62219	1,0000										
X04	,12171	,09324	,06978	1,0000									
X05	-,10498	,25333	,04733	-,14645	1,0000								
X06	-,07885	-,09348	-,21992	,27112	-,13512	1,0000							
X07	,16363	,29994	,16248	-,02263	-,07436	,35325	1,0000						
X08	,58839	,53640	,81810	-,03036	,33593	-,34134	,19868	1,0000					
X09	,46485	,41504	,47412	,42225	,06752	-,20485	-,06990	,46324	1,0000				
X10	,20801	-,04577	,51288	-,14051	-,19160	-,38561	-,09049	,33271	-,03459	1,0000			
X11	,24457	,08876	,01828	,09267	,02446	,12166	-,12578	-,02533	,25575	,19456	1,00000		
X12	,63531	,70505	,65503	,02134	,24425	-,23416	,33892	,48625	,26715	,18162	-,01243	1,00000	
X13	,65766	,70420	,50049	,10402	,22020	-,03262	,43694	,47384	,26744	,00636	,29210	,68848	1,00000

Tablo 3 : Korelasyon Matrisi

Ham veri matrisinden elde edilen ortalamalar ve standart sapmaların hesaplamaları ise şöyledir :

	Ortalama	**Std Sapma**	**Firma**
X01	15,95833	13,32692	Adana Çimento
X02	15,25000	16,66616	Bolu Çimento
X03	15,58333	11,81347	Bursa Çimento
X04	23,16667	23,08334	Çanakkale Çimento
X05	14,37500	10,24403	Çimentaş İzmir Çimento
X06	14,58333	11,06470	Çimsa Çimento
X07	24,00000	19,97825	Konya Çimento
X08	18,87500	13,49497	Oysa - Niğde Çimento
X09	14,16667	13,35686	Ünye Çimento
X10	20,00000	14,02172	Afyon Çimento
X11	15,62500	12,73411	Ak Çimento
X12	18,58333	15,86058	Aslan Çimento
X13	18,45833	14,14515	Mardin Çimento

Tablo 4: Ortalamalar ve standart sapmalar

Tüm bu sonuçlardan hareketle korelasyon matrisinden (R) , (2.7) formülü yardımıyla elde ettiğimiz öz değerler matrisi;

$$\lambda = \begin{bmatrix}
4.6930 & & & & & & & & & & & & \\
& 1.8626 & & & & & & & & & & & \\
& & 15535 & & & & & & & 0 & & & \\
& & & 1.3204 & & & & & & & & & \\
& & & & 1.0713 & & & & & & & & \\
& & & & & 0.6837 & & & & & & & \\
& & & & & & 0.5569 & & & & & & \\
& & & & & & & 0.4806 & & & & & \\
& & & & & & & & 0.3142 & & & & \\
& & & & & & & & & 0.2641 & & & \\
& & & 0 & & & & & & & 0.1138 & & \\
& & & & & & & & & & & 0.0661 & \\
& & & & & & & & & & & & 0.0198
\end{bmatrix}$$

şeklinde oluşur.

$$\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3 > \lambda_4 > \lambda_5 > \lambda_6 > \lambda_7 > \lambda_8 > \lambda_9 > \lambda_{10} > \lambda_{11} > \lambda_{12} > \lambda_{13} > 0$$

olduğu görülür. Burada ;

$$\sum_{i=1}^{13} \lambda_i = 4.6930 + 1.8626 + 1.5535 + 1.3204 + 1.0713 + 0.6837 + 0.5569 + 0.4806 + 0.3142 + 0.2641 + 0.1138 + 0.0661 + 0.0198 = 13$$

ve

$$\mathrm{tr}\,(R) = \sum_{i=1}^{13} \lambda_i = 13$$

dir. Ayrıca

$$|R| = \prod_{i=1}^{13} \lambda_i = 0.0000434$$

dir.

Bileşenler tarafından açıklanan varyans payları (2.33) eşitliğinden elde dilen sonuçlar tablo 5 de gösterilmiştir.

Öz değerler	Açıklanan Varyans Payları (%)	Birikimli Açıklanan Pay (%)
4.6930	36.1	36.1
1.8626	14.3	50.4
1.5535	11.9	62.4
1.3204	10.2	72.5
1.0713	8.2	80.8
0.6837	5.3	86.0
0.5569	4.3	90.3
0.4806	3.7	94.0
0.3142	2.4	96.4
0.2641	2.0	98.5
0.1138	0.9	99.3
0.0661	0.5	99.8
0.0198	0.2	100.0

Tablo 5 : Açıklanan Varyans Payları ve Birikimli Paylar

Öz değerlerden sonra onlara karşılık gelen öz vektörler (2.6) eşitliğinden aşağıdaki gibi bulunur.

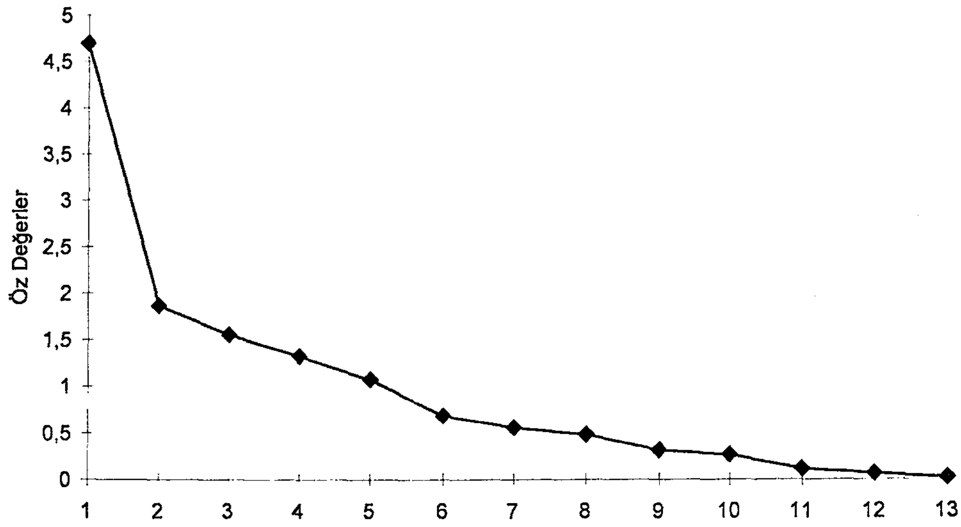
ℓ	ℓ_2	ℓ_3	ℓ_4	ℓ_5	ℓ_6	ℓ_7	ℓ_8	ℓ_9	ℓ_{10}	ℓ_{11}	ℓ_{12}	ℓ_{13}
-0.383	-0.049	0.171	0.173	-0.041	0.229	-0.234	-0.371	0.385	0.232	0.367	-0.440	-0.120
-0.377	-0.172	-0.117	-0.134	0.003	0.213	-0.001	-0.120	-0.552	-0.587	0.224	-0.169	0.092
-0.405	0.168	0.059	0.169	0.167	-0.233	-0.030	-0.264	-0.168	-0.017	-0.345	0.256	-0.640
-0.053	-0.326	0.504	-0.114	0.362	-0.151	0.592	0.093	0.191	-0.140	0.209	0.023	-0.102
-0.099	0.033	-0.341	-0.646	-0.227	-0.415	0.219	-0.087	0.037	0.182	0.045	-0.326	-0.182
0.115	-0.571	0.055	0.203	-0.090	-0.426	-0.081	-0.491	-0.171	0.124	-0.195	-0.023	0.311
-0.139	-0.399	-0.353	0.383	0.058	-0.240	-0.111	0.587	-0.054	0.115	0.207	-0.135	-0.238
-0.372	0.196	-0.082	-0.076	0.148	-0.448	-0.263	0.024	0.311	-0.194	0.263	0.392	0.402
-0.259	-0.029	0.440	-0.324	0.224	-0.021	-0.369	0.341	-0.260	0.307	-0.297	-0.215	0.187
-0.129	0.491	0.141	0.439	-0.158	-0.300	0.361	0.091	-0.163	-0.029	-0.068	-0.414	0.268
-0.079	-0.071	0.425	-0.032	-0.776	-0.076	-0.062	0.161	-0.109	0.009	0.221	0.294	-0.149
-0.378	-0.039	-0.209	0.029	0.004	0.286	0.405	-0.046	-0.209	0.568	0.087	0.356	0.250
-0.363	-0.245	-0.107	0.006	-0.278	0.189	0.148	0.154	0.450	-0.254	-0.592	-0.052	0.132

Tablo 6: Öz Vektörler

Tablo 6' da ki her bir sütun bir öz vektöre karşılık gelmektedir. Bu bulunan öz vektörler matrisi ortogonal olup $\ell'\ell = I$ ve $|\ell| = 1$ şartlarını sağlar. Ayrıca öz vektörler matrisindeki her bir vektör diğer vektörlerle ortogonaldir.

Birinci bileşenin ortak niteliği, veri matrisindeki değişkenliğin % 36.1'ini açıklar. İlk beş öz vektör veri matrisindeki değişkenliğin toplam % 80.8'ini açıklar. Şayet amaca uygun olarak 1'den büyük olan öz değerleri alırsak on üç değişken yerine, onların ortak niteliklerini temsil eden ilk beş temel bileşen alınabilir.

Bilgi kaybı (varyans kaybı) amaca göre kabul edilebilir düzeyde ise (ki öyledirde) on üç boyutlu uzay yerine beş boyutlu uzay üzerinde çalışılabilinir.



Grafik.1. Öz Değerlerin Konumu

Öz değerleri p'lerin çıkarılış sırasına göre işaretler ve bulunan eğriyi p'ler den kaçının çözümlemede kullanılacağını belirlemek için kullanırız. Karar vermede; bulunan çizginin eğrisel bölümüne düşen p'leri tutmak ve eğrinin düz bir doğru haline geldiği bölümdeki p'leri reddederiz. Bir başka deyişle eğrinin düzleştiği nokta (ki bu noktadan itibaren öz değerler arasında doğrusal bir ilişkinin oluştuğu noktadır) çıkarılacak p'lerin sayısının maksimum sınırını belirler. Bu noktadan sonra gelen p'ler güvenilir değildir. Çünkü X'lerin hepsinde ortak olmayan etmenlerden fazlaca etkilenmektedirler.

Bu duruma göre, en hızlı düşüş birinci öz değerde olmuştur. Ancak %36.1'lik bir açıklama oranının yeterli olmayacağı düşünülecek olursa,ilk beş öz değerin toplam %80.8'lik gibi büyük bir oranı açıklaması bizim için bu ilk beş öz değeri almamızı gerektirmektedir. Ayrıca ilk beş öz değerden sonrası, yukarıdaki grafikten de görüleceği gibi. düze yakın bir çizgi oluşturmaktadır. Bu da büyüklüklerine göre ilk beş öz değerden sonra gelen öz değerlerin güvenilir olmadıklarını açıklamaktadır.

Değişken sayısının büyük olması durumunda analize konu olan orjinal değişkenlerden bazılarının belirlenerek işlem dışı bırakılması amaçlanmaktadır. %19.2'lik bilgi kaybı ile, ki bu bilgi kaybı bizim amacımızı etkilememektedir, on üç temel bileşeni beş temel bileşene indirgeyebiliriz. İndirgediğimiz durumda elde ettiğimiz yeni temel bileşenler;

$$\ell = \begin{bmatrix} 0.97439 & -0.12964 & 0.15517 & 0.01754 & 0.09683 \\ 0.06090 & 0.91934 & 0.32115 & 0.20898 & 0.06552 \\ -0.18268 & -0.18797 & 0.73423 & -0.39943 & 0.48234 \\ 0.11593 & 0.31425 & -0.34386 & -0.87651 & -0.03605 \\ -0.00697 & 0.06261 & -0.46416 & -0.16795 & -0.86740 \end{bmatrix}$$

ℓ yeni öz vektörler matrisi olmak üzere,

$$y_1 = 0.97439X_1 - 0.12964X_2 + 0.15517X_3 + 0.01754X_4 + 0.09683X_5$$

$$y_2 = 0.06090X_1 + 0.91934X_2 + 0.32115X_3 + 0.20898X_4 + 0.06552X_5$$

$$y_3 = -0.18268X_1 - 0.18797X_2 + 0.73423X_3 - 0.39943X_4 + 0.48234X_5$$

$$y_4 = 0.11593X_1 + 0.31425X_2 - 0.34386X_3 - 0.87651X_4 - 0.03605X_5$$

$$y_5 = -0.00697X_1 + 0.06261X_2 - 0.46416X_3 - 0.16795X_4 + 0.86740X_5$$

şeklinde oluşmaktadır.

Temel bileşenlerin katsayılarında eksi işaretinin olması, faktörlerin iki kutuplu olduğunu göstermektedir. Birinci temel bileşenin varyansı en büyüktür ve en fazla açıklama oranına sahiptir. Ayrıca bu temel bileşenin varyansı elipsoidin ana eksenini oluşturmaktadır. Diğer temel bileşenlerin varyansları ise tali eksenleri oluşturmaktadır ve çok iyi tanımlanmamışlardır.

Şimdi bulunan temel bileşenler için örnek özelliklerini inceleyelim. Değişkenliğin büyük kısmını açıklayan ilk beş temel bileşen için %95'lik güven aralığını oluşturursak;

$$n = 24$$
$$\lambda_1 = 4.6930,\ \lambda_2 = 1.8626,\ \lambda_3 = 1.5535,\ \lambda_4 = 1.3204,\ \lambda_5 = 1.0713$$
$$z_{0.025} = 1.96$$

olmak üzere,

$$p\left(\frac{\lambda_i}{1+z_{\alpha/2}\sqrt{2/(n-1)}} \le \hat{\lambda}_i \le \frac{\lambda_i}{1-z_{\alpha/2}\sqrt{2/(n-1)}}\right) = 1-\alpha$$

formülünden sırasıyla,

$$p\left(\frac{4.6930}{1+1.96\sqrt{2/23}} \le \hat{\lambda}_1 \le \frac{4.6930}{1-1.96\sqrt{2/23}}\right) = 0.95$$

$$p\left(2.97 \le \hat{\lambda}_1 \le 11.12\right) = 0.95$$

$$p\left(1.18 \le \hat{\lambda}_2 \le 4.41\right) = 0.95$$

$$p\left(0.98 \le \hat{\lambda}_3 \le 3.68\right) = 0.95$$

$$p\left(0.84 \le \hat{\lambda}_4 \le 3.13\right) = 0.95$$

$$p\left(0.68 \le \hat{\lambda}_5 \le 2.54\right) = 0.95$$

şeklinde elde edilirler.

Şimdi de test kullanarak önemsiz öz değerleri belirlemeye çalışırsak; (2.43), (2.44) ve (2.45) eşitlikleri kullanılarak aşağıdaki şekilde hesaplanabilir.

Hipotezimizi,

$$H_0: \lambda_6 = \ldots = \lambda_{13}$$
$$H_1: \lambda_i \neq \lambda_j \quad , \quad i \neq j$$

şeklinde oluşturacak olursak,

$$U_g = \frac{(0.0000434)8^8}{(19.21)(13-19.21)^8} = 0.000017$$

$$\chi^2_{hes} = -\left[(24-1) - \frac{1}{6}(2 * 13+13) - \frac{2}{3} * 5\right] \log(0.000017) = 62.81$$

$$\chi^2_{\frac{g}{2}(g+1)-1;\alpha=0.05} = \chi^2_{12:0.05} = 22.36$$

Hesap edilen ki-kare değeri (62.81) ki-kare tablo değerinden (22.36) büyük olduğundan H_0 hipotezi reddedilir. Yani, adı geçen verilerin artık matrisi, α=0.05 anlamlılık düzeyinde, yığın değeri sıfır olan bir matristen gelmediği istatistiksel olarak anlaşılmıştır. Ayrıca adı geçen verilerin yığına ait bileşenler (öz değerler) α=0.05 anlamlılık düzeyinde birbirine eşit değildir.

SONUÇ

Bu çalışmada çok değişkenli istatistiksel analiz tekniğinin önemli bir konusu olan temel bileşenler analizi incelenmeye çalışılmıştır.

Temel bileşenler analizi X rassal vektörünü, bileşenleri birbiriyle ilişkisiz ve büyüklüklerine göre sıralanmış yeni yapay rassal vektöre dönüşümüdür. Bu analiz özel bir modele, istatistik varsayımlara başvurmaz. Bunun yanında temel bileşenler ölçülebilen değişkenlerin doğrusal bileşimidir. Ancak birbirlerinin doğrusal bileşeni değildir.

Temel bileşenler metodu, bütün değişkenlerdeki maksimum varyansı açıklayacak faktörü hesaplar. Kalan maksimum miktardaki varyansı açıklamak için ikinci, üçüncü ve diğer faktörleri birinci faktörden sonra hesaplar. Faktörlerin birbirleri arasında korelasyona girmemesi için sınırlama vardır. İki faktörün arasında korelasyon olmaması durumu bunların ortagonal olduğunun göstergesidir. Söz konusu süreç değişkenlerdeki bütün varyansın açıklanmasına kadar devam eder. Normal olarak bu noktaya faktör sayısı değişken sayısına eşit olunca ulaşılır. Ancak basitlik için uğraşırken böyle bir sonuç faydalı değildir. Değişken sayısı kadar yeni faktör oluşturmak temel bileşenler metodunun amacı değildir. Değişken sayısından ne kadar az faktör oluşturulacağına öz değer istatistiği kullanılarak karar verilebilir. Eğer değişkenler arasında tam bağımsızlık söz konusu ise boyut indirgemenin hiç bir faydası yoktur.

Çok geniş bir uygulama alanı olan temel bileşenler analizi bu kadar kullanışlı bir metot olmasına karşın bu metoda getirilen bazı eleştiriler mevcuttur. Bunlardan bazılarını şöyle sıralayabiliriz:

-Temel bileşenler metodu, değişkenler arasında doğrusal bir ilişkinin varlığını kabul eder. Aksi durumda temel bileşenler çözümlemesi uygun bir metot olmamaktadır.

-Yapılan analizde kullanılacak öz değerlerin sayısının belirlenmesinde hangi kriterin neye göre uygulanacağı konusunda tam bir görüş birliği mevcut değildir.

-Bu yöntemin bir amacı boyut indirgeme olduğundan bilginin tümü kullanılmamaktadır.

-Oluşturulan yeni yapay değişkenlere iktisadi anlamlar yüklemek kolay olmamaktadır.

-Temel bileşenler metodu, ham değerlere, standartlaştırılmış değerlere yada ortalamalardan sapmalara uygulanabilir. Her bir durum için farklı temel bileşen değerleri elde edilmektedir.

Bu çalışmada verilerin normal dağılımlı oldukları kabul edilerek temel bileşenler metodunun ana hatları ele alınmıştır. Yaptığımız işlemler sonucunda, temel bileşenler metodunun amacına uygun olarak, bileşen sayısı on üç boyutlu değişkenden beş boyutlu değişkene indirgenmiş ve değişkenler arasındaki bağımlılık yapısı yok edilmiştir. Uyguladığımız dönüşüm sonunda elde ettiğimiz bu yeni beş bileşenin geometrik yeri elipsoitlerin temel eksenleridir. Bunlardan en büyük varyansa sahip olan ilk bileşen elipsoidin ana ekseni diğerleri de tali eksenleridir. Bu bileşenler, birlikte, toplam varyansın % 80.8'ini açıklamaktadır. Bu da bizim amacımıza uygun bir sonuçtur. % 19.2'lik bir bilgi kaybı bizi fazlaca etkilememektedir.

Sonuç olarak, temel bileşenler analizi, değişkenler arasında bağımlılığın varlığı ve boyutunun fazla olması durumunda, çok değişkenli istatistiğin diğer metotlarıyla birlikte uygulandığında çok daha başarılı sonuçlar vermektedir.

KAYNAKLAR

AKSOY AHMET. Menkul Kıymet Yatırımlarının Analizi. Ankara., 1987

ANDERSON T. W. An Introduction . to Multivariate. Statistics. Analysis. John Wiley & Sons Inc. New.York., 1958.

ANANT M. KSHIRSAGAR Multivariate Analysis. Marcel Dekker inc. New York 1987.

COOLEY W.W., LOHNES P.R. Multivariate Data Analysis John Willey &Sons Inc., New York,1971.

GIRI Narayan C. Multivariate Statistical Inference. Academic. Press. N.Y., 1977.

HARRİS R.J. A Primer of Multivariate. Statistics. Academic Press. N.Y., 1975.

HAWKİNS D.M. Topics in Applied Multivariate Analysis. Cambridge Unv Press, New York, 1982.

İPEK Merih. Betimsel İstatistiğin Yeni Boyutları. C.O. Tütengil'e Armağan. İ.Ü. İktisat Fakültesi yayınları. İstanbul,1982.

İPEK Merih. Betimsel İstatistik. Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş. İstanbul,1988.

İMKB ŞİRKETLERİ.(Sermaye, Temettü ve Aylık Fiyat Verileri). 1986-1995. Rem Ofset Matbaacılık San. Ve Tic. Ltd. Şti. İstanbul, 1996

JOHNSON R.A., WİCHERN D.W. Applied Multivariate Statistical. Analysis. Prentice-Hall, London, 1982.

KASAP Reşat. İstatistiksel Veri Analizinde Temel Bileşenlerin Yeri. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi. Gazi Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü. Ankara, 1987.

KİDWELL David., PETERSON, L. Richard. Financial Institutions, Market, and Money. The Dryden Press, İllnois, 1981.

KOUTSOYİANNİS A. Ekonometri Kuramı. Ekonometri Yöntemlerinin Tanıtımına Giriş. (çev: Şenesen, Ümit ve Şenesen, Gülay Günlük) İstanbul: İ.T.Ü. Matbaası. 1992

MARRIOTT F.H.C. Interpretation of Multiple Observations. Academic Press. London, 1974.

MORRISON D.F. Multivariate Statistical Methods. McGraw Hill inc. New York,1967.

TATLIDİL Hüseyin. Uygulamalı Çok Değişkenli İstatistiksel Analiz. Ankara: Akademi Matbaası. 1996

TUNCER Selahattin. Türkiye de Sermaye Piyasası, Teori ve Uygulama. Okan Yayıncılık ve Dağıtımcılık, İstanbul, 1985.