T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI

Değişen Ve Rassal Katsayılı Modeller

HAZIRLAYAN: Arş.Grv. Fatma ZEREN

DANIŞMAN: Yrd.Doç.Dr. Kamil DURDU

nönü Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü Lisans-Üstü Eğitim ve Sınavı Yönergesinin Ekonometri Anabilim Dalı için Öngördüğü Yüksek Lisans Tezi Olarak Hazırlanmıştır.

MALATYA -2003

Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğü'ne

İş bu çalışma jürimiz tarafından Ekonometri Anabilim Dalı **BİLİM UZMANLIĞI** tezi olarak kabul edilmiştir.

Başkan

Adı Soyadı, Ünvanı Yrd. Doç. Dr. Said PATIR

Üye

Adı Soyadı, Ünvanı Yrd. Doç. Dr. Kamil Durdu

Üye

Adı, Soyadı, Ünvanı Yrd. Doç. Dr. Ali KOÇYİĞİT

ONAY

Yukarıdaki imzaların adı geçen öğretim üyelerine ait olduğunu onaylarım.

09 . 03./2004

Enstitü Müdürü

İMZA

Adı, Soyadı ,Ünvanı

Prof. Dr. S. Kemal KARTAL

ÖNSÖZ

Ekonometrik bir çalışmada, tahmin teorisinin temelini sabit katsayı varsayımı oluşturmaktadır. Bu çalışmada ise bu varsayımı göz ardı eden çeşitli model formülasyonları tanıtılmıştır. Bu modeller, modellenen iktisadi süreçlerin daha ayrıntılı detaylarını yansıtmak için kurulmuştur.

Çalışmanın hazırlanmasında danışmanlığımı üstlenen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Kamil Durdu'ya, çalışmanın ortaya çıkmasında kullanılan temel kaynakların teminini sağlayan sayın hocam Öğr. Grv. Murat Karagöz'e, yabancı kaynakların çevirilerinde bana destek olan sayın hocam Arş. Grv. Kadir Karagöz'e ve çalışmanın şekil açısından düzenlenmesi ile bilgisayar ortamında yazımı işlemlerinde yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Arş.Grv. Hakan Türkay ile sayın hocam Latif Öztürk 'e teşekkürlerimi arz ederim.

Malatya, Eylül 2001

Arş. Grv. Fatma Zeren

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Ekonometri, iktisadi değişkenler arasındaki ilişkilerin ölçülmesiyle ilgilenir. "İktisadi değişkenlerin (eğilimler, esneklikler, marjinal değerler gibi) parametrelerine sayısal değerler bulmak ve iktisat kuramını doğrulamak amacıyla iktisat, matematik ve istatistiğin birleşimi olarak düşünülebilir."[1] Yani iktisat teorisinden gelen bilgiyi temel alır ve bu bilgiyi matematiksel bir modele (kalıba) oturtur. Daha sonra istatistiksel yöntemlerle bu modelin parametrelerini tahmin ve test eder. Böylece iktisadi olayın açıklanmasına ve ileriye dönük tahminler yaparak iktisadi kararların alınmasına yarayan bir metottur.

Klasik ekonometrik modelin tahmin edilen parametrelerinin gözlemler boyunca sabit olduğu yani değişmediği varsayılır. Bu çalışma esas itibariyle (parametrelerin) katsayıların değiştiği varsayımını göz önüne alan çeşitli ekonometrik model formülasyonlarını kapsamaktadır.

Girişi takip eden kısımda ekonometrik bir modelin oluşturulması ve modelin parametrelerinin tahmin yöntemleri anlatılmıştır. Ayrıca sabit katsayılı klasik regresyon modeli incelenmiştir. Birinci bölümde, parametrelerin değişim sebepleri açıklanarak değişen ve rassal katsayılı model formülasyonları tanıtılmıştır. Daha sonra sırasıyla bu model formülasyonları ve bunların tahmin yöntemleri açıklanmıştır. İkinci bölümde, Hildreth-Houck rassal katsayılı regresyon için iki uygulama çalışması yapılmıştır. Birinci uygulamada, Devlet İstatistik Enstitüsünün 1994 yılına ait 19 ildeki hane halkı başına kullanılabilir gelir ve tüketim harcaması verileri kullanılmıştır. İkinci uygulamada 20 dönem boyunca kişi başına tasarrufu ve kişi başına geliri gösteren hipotetik veriler kullanılmıştır. Her iki uygulamada

---

[1] A. Koutsoyiannis, *Ekonometri Kuramı*, çev. Ümit Şenesen ve Gülay Günlük Şenesen, İstanbul: Verso Yayıncılık, 1989, s. 3

istatistik programlarından Microsoft EXCEL ve SPSS bilgisayar programları kullanılmıştır. Uygulama çalışmasının sonunda uygulama sonuçları değerlendirilmiştir.

0.1. Araştırmaya İlişkin Temel Kavramlar

0.1.1. Ekonometrik Araştırma

Ekonometrik bir araştırmanın aşamaları şunlardır.

1) Modelin belirlenmesi(spesifikasyonu)
2) Modelin tahmini
3) Modelin test edilmesi
4) Modelin kullanılması

Bu aşamaları tek tek açıklayalım.

1) Modelin belirlenmesi:" Ekonometrik bir araştırmada ilk yapılacak iş, ekonometrik modelin spesifikasyonudur. Modelin spesifikasyonun da modelin özellikleri ortaya konularak formüle edilir. Bu konuda bize iktisat teorisi ve iktisadi olayla ilgili daha önce yapılmış araştırmalar ışık tutar. Bu safhada şu üç konu belirlenir: Modelin bağımlı ve bağımsız değişkenlerinin tespiti, modelin katsayılarının işaret ve büyüklükleri konusunda teorik ön bilginin ortaya konulması ve modelin matematiksel şeklinin tayini."[2]

İktisat teorisi bir malın talebinin o malın fiyatına bağlı olduğunu öngörür. Talep ile fiyat arasında ilişkiyi aşağıdaki talep fonksiyonu ile gösterebiliriz.

$$Y=\beta_0+\beta_1 X \qquad (0.1.1)$$

---

[2] Şahin Akkaya ve M. Vedat Pazarlıoğlu, *Ekonometri (1)*, 4. b., İzmir : Berk Masa Üstü Yayıncılık 1998, s. 35

(0.1.1) ifadesindeki Y, bir malın talebini ve X ise o malın fiyatını göstermektedir. Yani Y modelin bağımlı değişkeni , X ise modelin bağımsız değişkenidir. β_0 ve β_1 katsayıları ise modelin parametreleridir. β_0 parametresi malın fiyatının sıfır olduğu durumdaki talep miktarını gösterir. Bu parametreye "kesme terimi" de denilir. β_1 parametresi fiyat da bir birimlik bir artış olması durumunda talebin ne kadar artacağını göstermektedir ve bu terime "eğim parametresi" adı verilir.

2) Modelin tahmini: Ekonometrik model kurulduktan sonra modelin bilinmeyen β_0 ve β_1 gibi katsayıların tahmini yapılır. Tahmin işlemleri, modelde yer alan değişkenlere ait verilerin ve uygun bir ekonometrik yöntemin kullanılmasıyla yapılmaktadır.

Ekonometrik modelin tahmini için veriler gereklidir. Ekonometrik çalışmalarda genellikle zaman serileri verileri ve yatay kesit verileri kullanılır. " Zaman serisi verileri; bir değişkenin zaman boyunca hareketini tanımlayan ve günlük, haftalık , aylık ,üç aylık ve yıllık olabilen verilere denir. Yatay-kesit verileri ise, bir zaman noktasındaki tek tek birimlerin, firmaların veya diğer birimlerin aktivitelerini tanımlayan verilerdir."[3] Bu verilere örnek verirsek 1995-2000 dönemi için ulusal gelir verilerini zaman serilerine ve 1995 yılındaki ailelerin gelirlerini ise yatay-kesit verilerine örnek olarak gösterebiliriz.

Uygun ekonometrik yöntemin tahmininde iktisadi ilişkilerin katsayıları iki ana grupta toplanabilecek çeşitli yöntemlerle tahmin edilebilir. Bu yöntemler;

---

[3] Robert S. Pindyck and Daniel L. Rubinfeld , *Econometric Models and Economic Forecasts* , 3 rd. ed. McGraw- Hill, 1991, s. 3

1) Tek denklemli teknikler: Her seferinde tek bir denklemle uygulanan tekniklerdir. En önemlileri şunlardır: Klasik en küçük kareler ya da sıradan en küçük kareler yöntemi, dolaylı en küçük kareler ya da indirgenmiş kalıp tekniği, iki aşamalı en küçük kareler, sınırlı bilgi ile en yüksek olabilirlik yöntemi ve çeşitli karma tahmin yöntemleri.

2) Eşanlı denklem teknikleri: Bu teknikler bir sistemin bütün denklemlerine aynı anda uygulanırlar ve bütün fonksiyonların katsayı tahminlerini aynı anda verirler. En önemlileri üç aşamalı en küçük kareler yöntemi ve tam bilgiyle en yüksek olabilirlik tekniği.

3)Modelin test edilmesi: Modelin katsayıları tahmin edildikten sonra bu tahmin edilen katsayıların güvenilir olup olmadığını araştırmak gerekir. Ekonometrik modeller, ana kütleden çekilen bir örnekleme bağlı olarak tahmin edilirler. Tahmin edilen katsayıların ana kütle için geçerliliği test edilir. F testi, t testi gibi istatistiksel testlerle bu test işlemleri yapılır. İstatistiksel teste tabi tutulmadan önce bu katsayıların iktisadi ölçülere uyup uymadığına da dikkat etmek gerekir. Örneğin marjinal tüketim eğimini gösteren β_1 katsayısının iktisadi ölçülere göre negatif ve 1 den büyük olamaz. Bu kriter sağlandıktan sonra istatistiksel teste tabi tutulmalıdır. Ayrıca ekonometrik ölçütlere bağlı olarak da test yapılır. Yani modelin katsayılarının tahmininde kullanılan tahmin yönteminin varsayımlarına uyup uymadığı da araştırılır.

4) Modelin kullanılması: Ekonometrik model yapısal analiz, politika yapımı ve öngörüde bulunmak için kullanılır. İktisat teorisinin daha iyi anlaşılmasına ve gerçek iktisadi olaylar ile iktisadi teori arasında daha sıkı bir bağlantı kurulmasına yardımcı olur. Tahmin edilen modele bağlı olarak bağımlı değişkenin gelecekte hangi değerler alabileceği tahmin edilir

0.1.2. Regresyon Analizi

Regresyon analizi(çözümlemesi) , ekonometrik çalışmalarda en çok kullanılan araçlardan biridir. "Regresyon çözümlemesi, bir bağımlı değişkenin başka bir açıklayıcı değişkene olan bağımlılığını, birincinin (ana kütle) ortalama değerinin, ikincinin (yinelenen örneklerdeki) bilinen yada değişmeyen değerler cinsinden, tahmin etme ve kestirme amacıyla incelenmesidir."[4]

(0.1.1) ifadesindeki model, basit doğrusal bir regresyon modelidir. Ekonometrik modellere U harfiyle gösterilen hata terimi(rassal veya stokastik terim) adı verilen rassal bir değişken eklenir. Bu hata teriminin örneklem için gösterimi e şeklindedir. Böyle bir rassal değişkenin modele katılmasının nedenleri şunlardır.

1) Regresyon denklemine alınmayan bağımsız değişkenler: Gerçekte bağımlı değişkeni etkileyen birçok bağımsız değişkenler vardır. Fakat ekonometrik uygulamalarda çeşitli nedenlerle bazı değişkenler modele alınmamaktadır. Bu ihmal edilen değişkenler bağımlı değişkenin değerini azaltan veya artıran etkiye sahiptirler. Bu yöndeki etkileri bertaraf etmek için rassal terim modele alınır.

2) İnsan davranışlarının rassal olması: Bilindiği gibi iktisadi modeller insan davranışlarını da ele alırlar. " İnsan tepkileri belli ölçüde kestirilemeyen türdendir ve regresyon doğrusunun gösterdiği normal davranış kalıbından sapmalara yol açabilirler. Örneğin bir tüketici bir anlık bir esintiyle geliri ve malın fiyatı aynı kaldığı halde davranış kalıbını değiştirebilir."[5] İşte bu farklı davranış sonucunda regresyon doğrusundaki sapmayı temsilen hata terimi kullanılır.

---

[4] Damodor N. Gujarati , *Temel Ekonometri*, çev. Ümit Şenesen ve Gülay Günlük Şenesen , İstanbul : Literatür Yayıncılık, 1999, s. 16

[5] Koutsoyiannis , a. g. e. , s. 51

3)Modelin matematiksel kalıbının belirlenmesinde kesinlik olmaması: İktisadi değişkenler arasındaki ilişkiyi ifade eden matematiksel kalıbın yanlış seçilmesi hataya yol açabilir. Mesela; ilişkiyi açıklayacak kalıp doğrusal olmayan bir kalıp olduğu halde, yanlışlıkla doğrusal bir kalıp kullanılması, veya birden fazla denklemle ifade edilebilecek bir iktisadi olayın bir tek denklemle ifade edilmesi gibi. Bu hatanın bertaraf edilmesi için modele rassal terim eklenir.

4) Davranışları farklılık arz eden iktisadi birimlere ilişkin değerlerin toplanarak bir tek veri olarak sunulması durumunda, kişisel özellikleri ifade eden değerler dışlanmaktadır. Örneğin bir tüketim fonksiyonu çalışmasında, birbirlerinden farklı davranış sergileyen tüketicilerin tüketim ve gelir vergilerinin toplanarak bir araya getirilmesi bir tek tüketiciye ait değerlerin ortadan kalkmasına sebep olur. Bu da toplulaştırma hatası adı verilen bir hatayı ortaya çıkarır. Bu hatayı ortadan kaldırmak için rassal terim kullanılır.

5) İktisadi birimlere ait verilerin toplanması ve işlenmesi sırasında yapılan hatalara ölçme hatası denir. Genellikle ölçme hataları bağımlı ve bağımsız değişkenin gerçek değeri ile tahmin edilen değeri arasında farklara neden olur. Ölçme hatalarını gidermek için de rassal terim kullanılır.

0.1.3. Sabit Katsayılı Regresyon Modelleri

Bağımsız değişkenler X_1, X_2, ..., X_K ile bağımlı değişken Y arasındaki ilişkiyi modellemek için N tane gözlemler grubuna sahip olduğumuzu varsayalım. Çoklu doğrusal regresyon modelimiz aşağıdaki gibi olur:

$$Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} + \ldots + \beta_{Kt} + U_t \qquad (0.1.2)$$

(0.1.2) ifadesindeki $\beta_i (i = 1,2,...,K)$, mevcut verilerden tahmin edilebilen sabit katsayılardır. β_i parametresi, diğer bağımsız değişkenler sabit iken i -inci bağımsız değişkendeki bir birimlik artışın sonucunda bağımlı değişkendeki beklenen artışı göstermektedir. Ayrıca bu ifadedeki U_t stokastik hata terimidir. Böyle bir değişkenin modele katılmasının nedenlerini daha önce açıklamıştık. $X_{1t}=1$ $(t=1,2,\ldots,N)$ kabul edersek β_1 parametresi regresyon modelinin kesme terimi olur. Regresyon modelleri genellikle aşağıda yapılan varsayımlara bağlı olarak analiz edilir.

1) Bağımsız değişken X_{it} ile hata terimi U_t arasında ilişki yoktur. X_{it} değişmeyen sabit değişken topluluğunu oluşturmaktadır.

$$E(X_{it} U_t) = 0$$

2) Hata terimi U_t 'nin ortalaması sıfırdır.

$$E(U_t) = 0$$

3) U_t 'nin varyansı sabittir.

$$Var(U_t) = \sigma^2, t = 1,2,...N$$

4) Farklı gözlemlere ait hata terimleri arasında ilişki yoktur.

$$Cov(U_t U_s) = 0 \qquad ; s \neq t \quad ;s,t=1\ldots N$$

6) Hata terimi U_t ,normal dağılıma sahiptir.

$$U_t \sim N(0, \sigma^2) , \qquad t = 1\ldots N$$

Matris notasyonu ile (0.1. 2) denklemimizin gösterimi aşağıdaki gibi olur:

$$Y_t = (X_{1t}, X_{2t}, \ldots, X_{Kt}) \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_K \end{pmatrix} + U_t$$

$$= x_t' \beta + u_t$$

Bu denklemin daha detaylı gösterimi ise şöyledir:

$$\begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ Y_N \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} X_{11} & X_{21} & \cdots & X_{K1} \\ X_{12} & X_{22} & \cdots & X_{K2} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ X_{1N} & X_{2N} & \cdots & X_{KN} \end{bmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta_K \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_N \end{pmatrix}$$

Bu gösterimin en genel şekli $Y = X\beta + U$ 'dir.

Sabit katsayılı regresyon modellerini tahmin etmek için genellikle en küçük kareler yöntemi veya en çok olabilirlik yöntemi kullanılır. Burada en küçük kareler yöntemi ve onun özel bir şekli olan kısıtlı en küçük kareler yöntemine değinmekte fayda vardır.

0.1.3.1. En Küçük Kareler Yöntemi

Bu yöntemde hata kareler toplamı minimize edilir.

$$Y_t = \beta_1 X_{1t} + \beta_2 X_{2t} \ldots + \beta_K X_{Kt} \quad ,t = 1 \ldots N$$

$$U_t = Y_t - \beta_1 X_{1t} - \beta_2 X_{2t} - \ldots . - \beta_K X_{Kt} \quad ,t = 1 \ldots N$$

$b_1, b_2, \ldots, b_K$ (0.1.2) ifadesindeki $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_K$ parametrelerinin tahminleri kümesini ve e_t ($t = 1 \ldots N$) ise kalıntıları göstersin. Kalıntılar gözlenemeyen hata terimlerinin denetsel karşılığıdır.

$$e_t = Y_t - b_1 X_{1t} - b_2 X_{2t} - \ldots - b_K X_{Kt}, \quad t = 1 \ldots N$$

$$\sum e_t^2 = \sum \left(Y_t - b_1 X_{1t} - b_2 X_{2t} - \ldots - b_K X_{Kt} \right)^2, \quad t = 1 \ldots N \qquad (0.1.3)$$

(0.1.2) ifadesi $b_1, b_2, \ldots, b_K$ 'ya göre minimize edilir. Minimize işlemi $\sum e_t^2$ ' nin $b_1, b_2, \ldots, b_K$ ' ya göre türevlerinin alınıp sıfıra eşitlenmesi ile elde edilir. $X_{1t} = 1$ kabul edelim.

$$\frac{\partial \sum e_t^2}{\partial b_1} = -2 \sum \left(Y_t - b_1 - b_2 X_{2t} - \ldots - b_K X_{Kt} \right)$$

$$\sum Y_t = b_1 N + b_2 \sum X_{2t} + \ldots + b_K X_{Kt} \qquad (0.1.4)$$

$$\frac{\partial \sum e_t^2}{\partial b_2} = -2 \sum \left(Y_t - b_1 - b_2 X_{2t} - \ldots - b_K X_{Kt} \right) \left(X_{2t} \right)$$

$$\sum Y_t X_{2t} = b_1 \sum X_{2t} + b_2 \sum X_{2t}^2 + \ldots + b_K \sum X_{Kt} X_{2t} \qquad (0.1.5)$$

$$\frac{\partial \sum e_t^2}{\partial b_K} = -2 \sum \left(Y_t - b_1 - b_2 X_{2t} - \ldots - b_K X_{Kt} \right) \left(X_{Kt} \right)$$

$$\sum Y_t X_{Kt} = b_1 \sum X_{Kt} + b_2 \sum X_{2t} X_{Kt} + \ldots + b_K X_{Kt}^2 \qquad (0.1.6)$$

(0.1.4), (0.1.5) ve (0.1.6) ifadelerindeki normal denklemleri $b_1, b_2, \ldots, b_K$ parametrelerine göre çözülürse en küçük kareler tahminine ulaşılmış olunur.

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_K \end{bmatrix} \quad \text{kabul edelim.}$$

Bu durumda en küçük kareler tahmin edicisi $b = (X'X)^{-1} X'Y$ dir. Bu tahmin edici BLUE dır. Yani en iyi, doğrusal, yansız tahmin edicidir. Geleneksel regresyon modellerindeki bu regresyon katsayılarının sabit olduğu gözlemler boyunca değişmediği varsayılır. Hata terimi e_t nin de değişmeyen varyanslı olduğu varsayılır. En küçük kareler yönteminin özel bir şeklide kısıtlı en küçük kareler yöntemidir.

0.1.3.2. Kısıtlı E.K.K. Yöntemi

Bazen tahmin edilecek parametreler hakkında ön bilgiler veya varsayımlar mevcut olabilir. Örneğin üretim fonksiyonu örneğinde $\beta_1 + \beta_2 = 1$ olmak üzere sabit getiri varsayımı ileri sürülebilir. Bu tür ve benzeri bilgiler genel olarak matris formuna $R\beta = r$ biçiminde ifade edilir. Bu ifadedeki R, kısıt katsayılarından oluşan matris; β ,parametre vektörü ve r ise sağ taraf sabitleri vektörüdür. Örneğin $\beta_0 = a$, $\beta_1 + \beta_2 = 1$ ve $\beta_1 - \beta_2 = 0$ verilirse bu üç kısıt $R\beta = r$ çatısında aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Parametre tahmini için kalıntı karelerin minimizasyonu veya olabilirlik fonksiyonunun maksimizasyonu yapılır. Burada bu işlem ise verilen doğrusal kısıt altında yapılır. $R\beta = r$ 'nin tahmin edicisi $Rb^* = r$ olsun. Amaç fonksiyonu da aşağıdaki gibi olur.

$$L = (y - x\beta)'(y - x\beta)$$

Kısıtlar,

$R\beta - r = 0$ 'dır.

Bu problemin çözümü için Lagrange çarpanı yöntemi uygulanabilir. Lagrange fonksiyonu;

$$Z = e'e + 2(r' - \beta'R')\lambda \quad \text{veya}$$

$$Z = (y - x\beta)'(y - x\beta) + 2(r' - \beta'R')\lambda$$

$$= y'y - 2\beta'x'y + \beta'x'x\beta + 2(r' - \beta'R')\lambda$$

Optimum değerlerin korunması için Z fonksiyonunun β ve λ' ya göre türevleri alınıp sıfıra eşitlenir. Bu şekilde b^* ile gösterilen kısıtlı E.K.K. tahmin edicisine ulaşılacaktır.

$$\frac{\partial Z}{\partial \beta} = -2x'y + 2x'xb^* - 2R'\lambda = 0$$

$$\frac{\partial Z}{\partial \lambda} = 2(r - R\beta) = 0$$

Yukarıdaki kısmi türevleri b^*ve λ için çözülürse aşağıdaki ifadeye ulaşılır:

$$x'xb^* - x'y - R'\lambda = 0 \qquad (0.1.7)$$

$$\left(r - Rb^{*}\right) = 0$$

(0.1.7) ifadesini aşağıdaki gibi düzenlenirse;

$$(x'x)^{-1} x'xb^{*} = (x'x\ \ )^{-1} x'y + (x'x)^{-1} R'\lambda$$

$$b^{*} = (x'x)^{-1} x'y + (x'x)^{-1} R'\lambda$$

$$b^{*} = b + (x'x)^{-1} R'\lambda$$ elde edilir.

BÖLÜM I

DEĞİŞEN VE RASSAL KATSAYILI MODELLER

1.1. Parametrelerin Değişimi

Klasik ekonometrik modellemede iktisadi yapıyı meydana getiren istatistiksel örneklemin sabit kalacağı varsayılır. Böyle bir varsayım $Y_t = F(X_t, \beta, e_t)$ şeklinde karakterize edilen iktisadi ilişkinin tahmininde aşağıdaki faktörlerin varlığını ifade eder.

1) Bağımlı değişkenler ile bağımsız değişkenleri birbirine bağlayan sabit bir parametre vektörü vardır. β ' ların bütün gözlem değerleri için değeri sabittir.

2) Ekonometrik modelin sabit bir fonksiyonel biçimi. Yani F 'nin şekli de örneklemin gözlemleri boyunca değişmeyecektir.

3) Hata süreci parametrelerinin sabit bir kümesi.

Bu faktörler, ekonometrik tahmin teorisinin temelini oluşturan en önemli varsayımlardır. Ayrıca bu faktörler ekonometrik modelin özelliklerinden "modelin istikrarlığı" özelliğini tanımlar. İstikrarsız modelde yapısal parametreler, hataların dağılımı ve modelin fonksiyonel biçimi örneklemin bütün gözlemleri için sabit değildir.

İktisat bilimi deneysel olmayan bilim grubundandır. Ekonometrisyenler kontrol edilemeyen iktisadi süreçlerden oluşturulan istatistiksel örneklemlerle çoğu zaman gözlenemeyen şartlar altında çalışmak zorundadırlar. İktisadi ilişkilerin modellenmesi için yapılan çalışmalar bazen başarısız olmaktadır. Bunun nedenlerinden biri parametrelerin istikrarsız olmasıdır. Yani, açıklayıcı değişkendeki bir değişime bağımlı değişkenin verdiği tepki örneklemin bütün gözlemleri boyunca aynı değildir. Parametrelerin değişmesinin nedenleri şunlardır.

- Ekonometrik modelin yapısı
- Modelden dışlanan değişkenler
- Spesifikasyon hatası
- Dinamik iktisat teorisi

Bunlara ilave olarak da; "kukla değişkenler ve toplulaştırma da parametrelerin değişiminin nedenlerindendir."[6]

1.1.1. Parametrelerin Değişim Nedenleri

1) Değişen parametreli formülasyonlar, ekonometrik modelin doğasından dolayı uygun olabilir. Çünkü ekonometrik modeller, incelenecek olan iktisadi olayın özelliklerine ve amacına bağlı olarak mevcut veriler, zaman faktörü ve iktisadi olayı açıklayabilecek kabul edilebilir sonuçları verebilmesi açısından birtakım basitleştirilmelerin yapıldığı soyut modellerdir. Bu basitleştirme şartına bağlı olarak model düşük nitelikli tanımlayıcılardan kaynaklanan spesifikasyon hatasına sahip olabilir. "Spesifikasyon hatası ekonometrik ilişkilerdeki istikrarsızlığın kaynağıdır."[7] Spesifikasyon hatalarının birçoğu, parametrelerin örneklemin gözlemleri boyunca değişmesine neden olur. Yani bağımsız değişkendeki bir değişime bağımlı değişkenin vereceği tepki tüm gözlemler için aynı değildir. Böylesi bir durumda uygun değişen parametreli yapının modele ilave edilmesiyle spesifikasyon hataları giderilebilir. Genellikle spesifikasyon hatalarının nedenleri şunlardır.

---

[6] Alexander H. Sarris,. "A Bayesian Approach to Estimation of Time- Varying Regression Coefficients", *Annals of Economic and Social Measurement*, 2 / 4 , 1973, 502

[7] Thomas F. Cooley, and Edward C. Prescott , "Estimation in the Presence of Stochastic Parameter Variation", *Econometrica*, 44,1,1976,167

a) Önemli bir değişkenin modelden dışlanması

b) Gölge değişken kullanılması

c) Verilerin toplulaştırılması

d) Değişkenler arasındaki çoklu doğrusallığın ihmal edilmesi.

2) İktisadi ilişkilerde bağımlı değişkeni açıklayan birçok bağımsız değişken vardır. İktisat kuramı bir malın talebinin kendi fiyatına, başka malların fiyatına, tüketicilerin gelirlerine ve zevklerine bağlı olduğunu öngörmektedir. Talep denklemi kurulurken talebi etkileyen bu açıklayıcı değişkenler dikkate alınır. Fakat iktisadi yaşamda pek çok başka faktörlerin de talebi etkilediği herkes tarafından bilinmektedir. Örneğin, olağanüstü durumlar (savaş, deprem, sel), bölgesel ve kurumsal değişmeler ve gelir dağılımındaki değişmeler gibi daha birçok faktör talebi etkilemektedir. Bunlara ait verilerin elde edilemeyişinden , bazılarının sayısal olarak ifade edilemeyişinden veya ekonometrik modelin basitleştirilmesinden dolayı böylesi faktörler modelden dışlanır. Ekonometride bu dışlanan faktörlerin etkileri rassal (tesadüfi) olarak kabul edilir ve bunların dağılımlarının zaman içerisinde sabit olduğu varsayılır. Ayrıca modeldeki bağımsız değişkenlerle bu dışlanan değişkenlerin birbirinden bağımsız (ortogonal) oldukları varsayılmaktadır. Bu varsayıma dayalı olarak modelin parametre tahminlerini modelden dışlanan değişkenlerin etkilemediği kabul edilmektedir."Böylesi değişkenlerin zaman serileri, durağan olmayan bir davranış sergilerler. Zaman içerisindeki dağılımları sabit değildir. Ayrıca modeldeki bağımsız değişkenlerle bağımsız (ortoganal) değillerdir. Bu durumda tahmin edilmiş olan parametrelerin sabitliği ortadan kalkar".[8]

3) Dinamik ekonometrik modellerde ölçülmesi imkansız nitel faktörleri (psikolojik, din, zevkler, beklentiler) veya ölçülmesi çok zor faktörleri temsilen kukla

---

[8] Peter Hackl, *Statistical Analysis and Forecasting of Economic Structural Change*, International Institute for Applied Systems Analysis Series, Springer : 1989, Chapter 14, 220

değişkenler kullanılır. Ayrıca birçok iktisadi değişkene ait istatistiksel veriler elde edilemediğinden ekonometrik modellerde kukla değişkenler kullanılır. Bilindiği üzere kukla değişkenler temsil ettikleri süreçlerdeki değişimi kısmen yansıtmaktadırlar. Ayrıca kukla değişkenlerle bunların karşılığı olan değişkenler arasındaki ilişkilerde değişebilir. Bu şartlar altında modellenen sürecin gelişimini kontrol altında tutan gerçek değişkenlerin değişmesi, kukla değişkenlerin parametrelerini istikrarsızlığa itmektedir.

4) Toplulaştırılmış verilerin kullanıldığı modeldeki parametrelerin değişmesi de muhtemeldir. Toplulaştırılmış veriler farklı davranışlar içerisinde bulunan iktisadi birimlerin nispi önemlerinin ağırlıklandırılmasıyla ölçülürler. Böylesi verilerin kullanıldığı modellerin tahmin edilen parametreleri , bu ağırlıklar sabit olduğu sürece sabit kalacakları varsayılır. Fakat zaman serileri modellerinde bu sabit ağırlık varsayımının sağlanması çok zordur. Çünkü her bir birime ait değerler tek bir değere indirgenmekte ve birimlerin kendi değerleri kaybolmaktadır. Örneğin; $C = \hat{b}_0 + \hat{b}_1 Y_d$ tahmini toplam tüketim fonksiyonu 10 yıl gibi belirli bir dönem için "ortalama bir ilişkiyi" verir. Fakat bu 10 yıl içerisinde gerçek tüketim bazen bu tahminin altında, bazen de üstünde seyretmiş olabilir. Bu sebepten dolayı toplulaştırılmış değişkenlerle bağlantılı parametreler çoğu zaman istikrarsız olurlar.

5) İncelenen iktisadi ilişkinin fonksiyonel biçiminin yanlış belirlenmesi parametre değişimine sebep olur. Doğrusal dışı (karmaşık) bir ilişkinin yaklaşığı olarak doğrusal bir modelin tahmin edildiği durumda sabit parametre varsayımı modelin değişkenlerinin dar bir aralıkta değişmesi durumunda geçerli olacağı varsayılır. Açıklayıcı değişkenlerin değişim aralığının genişlemesi durumunda sabit parametre varsayımı ortadan kalkar.

6) Dinamik iktisadi teori ve rasyonel davranış teorisi, sabit parametreli model formülasyonları için hiç bir argüman içermezler. Çünkü çoğu kez iktisadi teori, iktisadi ilişkilerin zaman içerisinde değişebildiğini kabul etmektedir. Ayrıca iktisadi ilişkiler birimden birime farklılık göstermektedir. İktisadi politikalarda meydana gelen değişiklikler iktisadi birimlerin farklı kararlar almasına neden olur. Örneğin; farklı yıllarda satışlar aynı olsa bile iş koşullarında ve hükümet politikalarında meydana gelen değişimler iş adamlarının stoklara yatırım konusunda farklı kararlar almasına neden olur. Tüketicilerin gelecek gelirler hakkındaki beklentileri ve tutumları yüzünden, toplam gelirdeki birim başına eşit değişim toplam tüketim üzerinde farklı etkiler ortaya çıkmasına neden olur. Bu açıklamalar doğrultusunda iktisadi teorinin değişen parametreli modelleri doğruladığını kabul edebiliriz.

7) Çoğu zaman iktisadi ilişki örneklemin geneli için gereği gibi tanımlanmış olsa bile, örneklemin alt grupları için farklılık gösterebilir. Böyle bir durumda örneklemin genelini temsil eden parametrelerin örneklemin alt gruplarını temsil etmediği görülebilir. Bu takdirde örneklemin bölünmesi ve farklı regresyon sisteminin kullanılması modelin güvenilir tahminlerinin yapılmasını sağlar.

1.2. Değişen ve Rassal Katsayılı Model Çeşitleri

Değişen ve rassal katsayılı modelleri şu şekilde sınıflandırabiliriz.

1) Değişen fakat stokastik olmayan parametreli modeller

a) Sistematik (rassal olmayan) bir şekilde değişen parametreli model

b) Dönüşümlü veya değişen (Switching) regresyon model

2) Durağan bir süreçten elde edilen rassal parametreli modeller

a) Hildreth-Houck rassal katsayılı model

b) Stokastik parametreli model

c) Swamy rassal katsayılı modeli

3) Durağan olmayan bir süreçten elde edilen rassal parametreli modeller

a) Cooley-Prescoot model

1.3. Stokastik Olmayan Değişen Parametreli Modeller

1.3.1. Sistematik (Rassal Olmayan) Bir Şekilde Değişen Parametreli Modeller

Aşağıdaki genel doğrusal regresyon modelini göz önüne alalım.

$$y_t = x_t'\beta_t + u_t, \qquad t = 1 \ldots T \qquad (1.3.1)$$

(1.3.1) ifadesindeki y_t, t-inci zaman periyodundaki bağımlı değişkenin gözlemini göstermektedir. x_t, $(K \times 1)$ boyutlu stokastik olmayan açıklayıcı değişkenler vektörüdür. β_t, $(K \times 1)$ boyutlu gözlemler boyunca değişen katsayı vektörüdür. Bu modelde β_t katsayı vektörünün rassal olmayan sistematik değişiminin dışsal değişmelere bağlı olduğu varsayılır. u_t sıfır ortalama ve σ^2 varyansı ile normal ve bağımsız olarak dağılan rassal hata terimidir. Katsayıların gözlemler boyunca değişimini açıklayan örneklem dışı bir bilgiyi K tane doğrusal ilişki için Belsley (1973a), aşağıdaki gibi formüle etmiştir.

$$\beta_t = Z_t \tau \qquad (1.3.2)$$

(1.3.2) ifadesindeki Z_t, $\beta_t$deki değişimi açıklayan $(K \times M)$ boyutlu açıklayıcı değişkenler matrisidir. τ, β_t ile Z_t arasındaki ilişkiyi gösteren $(M \times 1)$ boyutlu sabit katsayılar vektörüdür. β_t katsayı vektörünün değişimi belirlenebilir dışsal bir değişkenler vektörü Z_t' ye bağlıdır.

"Genellikle Z_t, açıklayıcı değişkenler matrisi;

1) x_t açıklayıcı değişkenler matrisindeki değişkenlerin fonksiyonlarını içerebilir. Bu da (1.3.1) ifadesindeki ilişkinin gerçek formunun doğrusal olmadığını gösterir.

2) x_t de görülmeyen diğer değişkenleri içerebilir.

3) Stokastik (olasılıklı) veya stokastik olmayan niteliksel değişkenleri de içerebilir. Bu durum da farklı regresyon sistemlerinin varlığını belirtir".[9]

(1.3.2) ifadesini (1.3.1) ifadesinde yerine yazarak aşağıdaki ifadeye ulaşırız.

$$y_t = x_t'(Z_t \tau) + u_t = W_t' \tau + u_t \qquad (1.3.3)$$

W_t, X_t ile Z_t değişkenlerin çarpımından oluşan ($1 \times M$) boyutlu gözlemler vektörüdür. u_t , sıfır ortalama ve sabit varyansa sahip olduğundan τ ve β_t nin en küçük kareler tahminleri BLUE dir. τ katsayısının E.K.K. tahmin değeri ile Z_t açıklayıcı değişkenin değerleri çarpılarak β_t katsayı vektörü tahmin edilebilir.

(1.3.2) ifadesindeki değişim yapısı aşağıdaki gibi de gösterilebilir.

$$\beta_t = \tau_1 + Z_t \tau_2 \qquad (1.3.4)$$

Z_t'nin nitel değişkenleri temsil eden bir kukla değişken olduğu varsayıldığında aşağıdaki gibi gösterilebilir.

---

[9] G. G. Judge et al., *The Theory and Practice of Econometrics*, 2rd. ed., John Wiley and Sons, 1985, 799

$$Z_t = \begin{cases} 0 & ,t = 1...T_1 \quad \text{ise} \\ 1 & ,t = T_1 + 1...T \quad \text{ise} \end{cases}$$

Örneğin Z_t'nin (2×1) boyutlu bir matris olsun. Bu durumda Z_t aşağıdaki gibi gösterilebilir.

$$Z_t = \begin{cases} \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} & ,t = 1...T_1 \quad \text{ise} \\ \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} & ,t = T_1 + 1...T \quad \text{ise} \end{cases}$$

β_t'deki değişim yapısının stokastik de olabilir. Bu varsayıma bağlı olarak (1.3.2) ifadesi şöyle olur.

$$\beta_t = Z_t\tau + v_t \tag{1.3.5}$$

(1.3.5) ifadesini (1.3.1) ifadesinde yerine yazarsak aşağıdaki ifadeye ulaşmış oluruz.

$$\begin{aligned} y_t &= x_t'(Z_t\tau + v_t) + u_t \\ &= x_t'Z_t\tau + x_t'v_t + u_t \\ &= x_t'Z_t\tau + w_t \end{aligned} \tag{1.3.6}$$

(1.3.6) ifadesindeki $w_t = x_t'v_t + u_t$'dir. u_t ve v_t nin normal olarak dağıldığı varsayımına bağlı olarak aşağıdaki ifadeler geliştirilebilir.

$$\text{kov}(u_t, v_s) = 0 \quad ,t,s = 1,\dots,T$$

$$\text{var}(u_t) = \sigma_u^2 \quad ,t = 1,\dots,T$$

$$\text{var}(v_t) = \Sigma_v \quad ,t = 1,\dots,T$$

$$\Sigma_V = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & & & . \\ . & . & & . & & . \\ . & . & & & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \sigma_K^2 \end{bmatrix}$$

$$kov(u_t, u_s) = kov(v_t, v_s) = 0 \quad , t \neq s \quad \text{ise}$$

$$var(w_t) = \sigma_u^2 + x_t' \Sigma_v x_t$$

$$kov(w_t, w_s) = 0, \; t \neq s \text{ ise}$$

Katsayılardaki değişim yapısı stokastik ise; (1.3.1) ifadesindeki regresyon modeli, değişen varyanslı klasik bir regresyon modeli halini alır. Maddala (1977), $Var(w_t)$' yi aşağıdaki gibi göstermiştir.

$$Var(w_t) = \sigma_u^2 \left(1 + \lambda_1 x_{1t}^2 + \lambda_2 x_{2t}^2 + \ldots + \lambda_K x_{Kt}^2\right) \tag{1.3.7}$$

(1.3.7) ifadesindeki $\lambda_i = \dfrac{\sigma_i^2}{\sigma_u^2}$ dir$(i = 1,2,\ldots,K)$.

λ_i değeri bilindiğinde (1.3.6) ifadesindeki regresyon denklemi aşağıdaki gibi dönüştürülür.

$$\frac{y_t}{r_t} = \frac{x_t' z_t}{r_t} \tau + \frac{w_t}{r_t} \tag{1.3.8}$$

(1.3.8) ifadesindeki $r_t = \sqrt{1 + \lambda_i x_{it}^2}$ 'dir$(i = 1,2,\ldots,K)$.

1.3.2. Değişen (Switching) Regresyon Modelleri

Bu modellerde bir örneklem iki veya daha fazla alt gruba ayrılır. Her bir alt grup için farklı bir regresyon sisteminin (denkleminin) olduğu varsayılır. "Zaman serileri uygulamalarında, bu sistemler iktisadi dalgalanmaları (devri hareketleri) veya daha yapısal değişmeleri temsil eder. Yatay -kesit çalışmalarında ise farklı sistemler, farklı karakterdeki davranışsal birimleri temsil eder".[10] Sistematik olarak değişen parametreli modellerde, parametreler gözlemler boyunca değişmekte idi. Değişen regresyonlu modellerde ise regresyon parametreleri örneklemin alt grupları içerisinde sabittir. Fakat alt gruplar arasında değişmektedir. Mevsimlik regresyon modelleri ve parçalı regresyon modelleri bu tür modellere bir örnek teşkil eder.

1.3.2.1.Mevsimlik (Seasonality) Regresyon Modelleri

Birçok iktisadi değişken zamanla ilişkili olarak mevsimsel bir değişim sergilerler. Haftalık, aylık, üç aylık ve yıllık olarak rapor edilen nüfus, tüketim, istihdam ve çeşitli malların fiyatları gibi iktisadi değişkenlerin çoğunda mevsimsel değişim gözlenmektedir. Mevsimsel olarak değişen iktisadi değişkenli modeller mevsimsel modeller olarak kabul edilirler. İktisadi değişkenlerin mevsimlere bağlı olarak değişmelerinden dolayı bağımlı değişkenin bağımsız değişkene tepkisi de mevsimsel olarak değişecektir. Aşağıdaki regresyon modelini göz önüne alalım.

$$y_t = \alpha + \beta x_t + u_t \ , \ t = 1 \ldots T \qquad (1.3.9)$$

(1.3.9) İfadesindeki bağımlı değişken y_t'nin davranışı üzerindeki mevsimsel etkiyi inceleyelim. Bir yılın üç aylık her bir döneminde kesme terimi α ve eğim

---

[10] Stephen Goldfeld and Richard Quandt, "The Estimation of Structural Shifts by Switching Regressions", *Annals of Economic and Social Measurement*, 2 / 4, 1973, 475

parametresi β 'nın değiştiği varsayıldığı durumda, (1.3.9) ifadesi aşağıdaki şekle dönüştürülür.

$$\begin{aligned} y_t &= \alpha_1 + \beta_1 x_t + u_t \\ y_t &= \alpha_2 + \beta_2 x_t + u_t \\ y_t &= \alpha_3 + \beta_3 x_t + u_t \\ y_t &= \alpha_4 + \beta_4 x_t + u_t \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

(1.3.10) ifadesindeki regresyon modelleri sırasıyla birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü üç aylık dönemler içindir. Bu dört farklı denklemde kesme terimi ve eğim parametresi ortak değildir. Bu parametreler üç aylık denklemlerden ayrı ayrı tahmin edilir. Bu ifadeyi bir tek ilişkiye dönüştürmek için aşağıdaki gibi bir kukla değişken tanımlanabilir.

$$D_{it} = \begin{cases} 1 & ,i-\text{inci} \quad 3\text{aylik} \quad \text{dönem} \quad \text{ise} \\ 0 & \text{diger} \quad \text{dönemler} \quad \text{ise} \end{cases} \tag{1.3.11}$$

(1.3.11) ifadesindeki $i = 1,...,4; t = 1,...T$ 'dir. Bu tanımlanan kukla değişkene bağlı olarak (1.3.10) ifadesini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$y_t = \sum_{i=1}^{4} \alpha_i D_{it} + \sum_{i=1}^{4} \beta_i D_{it} x_t + u_t \ , \ t = 1,...,T \tag{1.3.12}$$

Birinci 3 aylık dönem için $D_{1t}=1$ olduğunda $D_{2t}=D_{3t}=D_{4t}=0$ olur. Bu durumda (1.3.12) ifadesi (1.3.10) ifadesindeki birinci denkleme dönüşür. İkinci üç aylık dönem için $D_{2t}=1$ olduğunda $D_{1t}=D_{3t}=D_{4t}=0$ olur. Bu da (1.3.10) ifadesindeki ikinci denkleme dönüşür.

Stewart (1991), $D_{1t} + D_{2t} + D_{3t} + D_{4t} = 1$ kabul etmiştir. Böylelikle (1.3.10) ifadesini aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$y_t = \alpha_1 (D_{1t} + D_{2t} + D_{3t} + D_{4t}) + (\alpha_2 - \alpha_1) D_{2t} + (\alpha_3 - \alpha_1) D_{3t}$$

$$+(\alpha_4-\alpha_1)D_{4t}+\beta_1(D_{1t}+D_{2t}+D_{3t}+D_{4t})+(\beta_2-\beta_1)D_{2t}x_t$$

$$+(\beta_3-\beta_1)D_{3t}x_t+(\beta_4-\beta_1)D_{4t}x_t+u_t \qquad (1.3.13)$$

Bu ifadeyi daha da basitleştirirsek;

$$y_t=\alpha_1+(\alpha_2-\alpha_1)D_{2t}+(\alpha_3-\alpha_1)D_{3t}+(\alpha_4-\alpha_1)D_{4t}+\beta_1x_t$$

$$(\beta_2-\beta_1)D_{2t}x_t+(\beta_3-\beta_1)D_{3t}x_t+(\beta_4-\beta_1)D_{4t}x_t+u_t \qquad (1.3.14)$$

(1.3.14) ifadesinin daha basit şekli ise şöyledir.

$$y_t=\alpha_1+\delta_2D_{2t}+\delta_3D_{3t}+\delta_4D_{4t}+\beta_1x_t+\gamma_2D_{2t}x_t+\gamma_3D_{3t}x_t$$

$$+\gamma_4D_{4t}x_t+u_t \qquad (1.3.15)$$

(1.3.15) ifadesindeki $\delta_i=\alpha_i-\alpha_1$ ve $\gamma_i=\beta_i-\beta$'dır $(i=2,3,4)$. δ_i, birinci üç aylık dönemin kesme terimi ile $i-$inci üç aylık dönemin kesme terimi arasındaki farkı göstermektedir. γ_i ise birinci üç aylık döneme ait eğim parametresi ile $i-$inci üç aylık döneme ait eğim parametresi arasındaki farkı göstermektedir. Benzer şekilde $i-$inci 3 aylık dönemin parametreleri ile 2 –inci, 3-üncü veya 4-üncü 3aylık dönemin parametreleri arasındaki farklarda bulunabilir.

1.3.2.2. Parçalı Regresyon Modelleri

Bu modellerde, birbirinden belirgin olarak farklılık arz eden dönemler için yapısal bir kırılma (structural break) veya yapısal bir değişimin (structural change) olduğu durumlarda farklı dönemler için farklı regresyon sistemlerinin varlığı varsayılır. Parçalı regresyon modellerini bir örnekle daha iyi açıklayabiliriz."Şirket satışa göre prim öderken hedef ya da eşik düzeyi X^* denen belli bir düzeye kadar olasılıklı bir prim yapısı uygulamaktadır. Satışların yanı sıra başka etmenlerde satış primi üzerinde etkili olmaktadır. Bu başka etmenlerin olasılıklı bozucu terimde(hata teriminde) toplandığı varsayılmaktadır. Daha da özele indirgersek, satış primi X^* eşik düzeyine kadar satışa bağlı olarak doğrusal artmakta, bu düzeyin üstünde yine satışa bağlı olarak doğrusal ama dik bir eğimle artmaktadır. Öyleyse iki parçadan oluşan bir parçalı doğrusal regresyonumuz vardır ve prim fonksiyonu X^* eşik değerinde eğim değiştirmektedir".[11] Parçalı regresyon modelleri birleşim noktası bilinen ve birleşim noktası bilinmeyen modeller olmak üzere ikiye ayrılır. Burada bahsedilen birleşim noktası verilen örnekteki eşik düzeyidir.

1.3.2.2.1 Bilinen Birleşim Noktalı Parçalı Regresyon Modelleri

$N = 1$ ve $t = 1...T$ gözlemli zaman serileri verilerinin T_1 ve T_2 alt grubuna ayrıldığını varsayalım ($T_1+T_2= T$). Birleşim noktası bilinen parçalı regresyon modelleri, aşağıdaki gibi formüle edilebilir.

$y = \alpha_1 + \beta_1 x + u$ (birinci grup)

$y = \alpha_2 + \beta_2 x + u$ (ikinci grup)

Bu iki alt gruba ait gözlemlerin matris formunda gösterimi ise şöyledir.

[11] Gujarati, a. g. e., s. 520

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{T_1} \\ - \\ y_{T_1+1} \\ y_{T_1+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{T_1+T_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x_1 & 0 & 0 \\ 1 & x_2 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & x_{T_1} & 0 & 0 \\ - & - & - & - \\ 0 & 0 & 1 & x_{T_1+1} \\ 0 & 0 & 1 & x_{T_1+2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 1 & x_{T_1+T_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ - \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{T_1} \\ - \\ u_{T_1+1} \\ u_{T_1+2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{T_1+T_2} \end{bmatrix} \qquad (1.3.16)$$

(1.3.16) deki ifadeyi matris notasyonu ile de aşağıdaki şekilde gösterebiliriz.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 & 0 \\ 0 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = x\beta + u \qquad (1.3.17)$$

(1.3.17) ifadesine E.K.K. yöntemi uygulanırsa β ' nın tahmini aşağıdaki gibi olur.

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\alpha}_1 \\ \hat{\beta}_1 \\ - \\ \hat{\alpha}_2 \\ \hat{\beta}_2 \end{bmatrix} = (x'x)^{-1} x'y$$

$$= \begin{bmatrix} (x_1'x_1)^{-1} & 0 \\ 0 & (x_2'x_2)^{-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'y_1 \\ x_2'y_2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \left(x_1'x_1\right)^{-1} x_1'y_1 \\ \left(x_2'x_2\right)^{-1} x_2'y_2 \end{bmatrix} \tag{1.3.18}$$

Bu iki regresyon sistemlerinin $T_1 \in [1, T]$ noktasında birleştiğine dair bir ön bilginin var olduğu varsayımına bağlı olarak bu tahmin yapılmıştır.

"T_1 noktasında regresyon sisteminde değişim (switch) meydana gelir. Bu nokta iki regresyon sistemini birleştiren bir nokta olduğundan bu noktaya birleşim (join) noktası adı verilir"[12]. Bu noktaya kadar regresyon parametreleri sabittir. Bu noktadan sonra parametreler başka bir değer alır. T_1 alt grubundaki parametrelerin değerleri T_2 alt grubundaki parametrelerin değerlerinden farklıdır.

T_1 noktasında yapısal bir değişimin (kırılmanın) olmadığına dair bir kısıtın verilmesi durumunda (1.3.17) ifadesindeki model aşağıdaki kısıta bağlı olarak tahmin edilir.

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

Bu kısıtın doğrusal eşitlik kısıtı $R\beta = r$ çatısındaki gösterimi ise şöyledir.

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki bu kısıta bağlı olarak kısıtlı regresyon modelimiz aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha \\ \beta \end{bmatrix} + u$$

[12] G.G. Judge et al., *Introduction to the Theory and Practice of Econometrics*, Wiley, New York: 1988, 432

β^* kısıtlı E.K.K tahmini ise şöyle olur.

$$\beta^* = \left(x'^* x^*\right)^{-1}\left(x'^* y\right)$$

Bu tahmin değerindeki $\left(x'^* x^*\right)^{-1} = \left(x_1' x_1 + x_2' x_2\right)$ ve $x'^* y = x_1' y_1 + x_2' y_2$ dir.

1.3.2.2.1a Yapısal Değişimin Test Edilmesi

Bu test işleminin yapılabilmesi için olumsuz hipotez H_0 ve olumlu hipotez H_1'in belirlenmesi gerekir.

H_0: Yapısal değişim(switch) yoktur

H_1:Yapısal değişim (switch) vardır.

Regresyon modelimize bağlı olarak bu hipotezleri aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$H_0 : \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

$$H_1 : \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \neq \begin{bmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix}$$

H_0 olumsuz hipotezi parametreler hakkında verilen kısıtları göstermektedir. Yapısal değişimin test edilebilmesi için her iki alt örneklemdeki hata varyanslarının eşit olduğu varsayılarak test işlemi yapılır. Ramanathan (1995) ,yapısal değişim için istatistiksel testlerden birinin Chow testi olduğunu vurgulayarak H_0 olumsuz hipotezinin testi için uygun test istatistiğini aşağıdaki gibi göstermiştir.

$$F_{hesaplanan} = \frac{\left(e^{*\prime} e^* - e'e\right)/q}{e'e/(T-K)}$$

Yukarıdaki modelde örneklemin t_0 noktasında ikiye bölünmesi ile T_1 ve T_2 olmak üzere iki ayrı gözlemler grubu oluşturmuştuk. İlk T_1 gözlemler grubuna en küçük kareler yöntemi (E.K.K.) uygulanarak $e_1'e_1$ kalıntı kareler hesaplanır. Daha sonra ikinci gözlemler grubu $T_2 = T - T_1$'e E.K.K. yöntemi uygulanarak $e_2'e_2$ hesaplanır. Bu durumda kısıtsız kalıntı kareler toplamı $e'e = e_1'e_1 + e_2'e_2$ olur. Kısıtlı kalıntı kareler toplamı ise $e^{*\prime}e^* = y^* - \left(x^{*\prime}x^*\right)^{-1} x^{*\prime} y^*$ ifadesinden elde edilir. Bu ifadedeki $y^* = y_1'y_1 + y_2'y_2$ dir. $F_{hesaplanan}$ ifadesindeki q, parametreler hakkındaki kısıt sayısını göstermektedir. Yukarıdaki regresyon modelindeki kısıt sayısı 2 dir. Verilen anlamlılık düzeyine bağlı olarak $F_{hesaplanan}$ değeri ile F_{tablo} değeri kıyaslanır. $F_{hesaplanan}$ değeri F_{tablo} değerinden büyük ise H_0 hipotezi reddedilerek, H_1 hipotezi kabul edilir.

1.3.2.2.2. Kama (Spline) Fonksiyonları

Parçalı regresyon modelinin özel bir şekli olarak kabul edilir. Poirier (1976), kama (spline) fonksiyonları adı verilen parçalı regresyon modellerini incelemiştir. İşyar (1994), iktisadi birimlerin farklı dönemlerdeki davranışlarını incelemek amacıyla zamanı kama (spline) fonksiyonları olarak işleme tabi tutmuştur. Üç farklı dönem için doğrusal bir zaman trendinin varsayıldığı aşağıdaki modeli önermiştir.

1-inci dönem	$y_t = \alpha_1 + \beta_1 t + u_t$	$(t \le t_0)$	
2-inci dönem	$y_t = \alpha_2 + \beta_2 t + u_t$	$(t_0 < t \le t_1)$	(1.3.19)
3-üncü dönem	$y_t = \alpha_3 + \beta_3 t + u_t$	$(t_1 < t)$	

Kore savaşı yılları (1951-1954) , barış yılları (1954-1965) ve Vietnam Savaşı yılları (1965-1971) bu üç farklı döneme örnek olarak verilmiştir. t_0 ve t_1 noktalarında yapısal değişim meydana gelmiştir. Zamanın orijini 1950 olarak alınmıştır. Bu durumda t_0 = 4 ve t_1 =15 olur. Kısıtlamasız yapılan tahminde fonksiyonların $t = t_0$ ve $t = t_1$ noktalarında herhangi bir birleşimi söz konusu değildir. Bu 3 ayrı dönem için farklı regresyon parametreleri mevcuttur. Doğrusal spline fonksiyonu veya parçalı regresyon yardımıyla birbiriyle ilişkili olmayan bu üç ayrı dönemin fonksiyonları $t = t_0$ ve $t = t_1$ noktalarında birleştirilerek sürekli bir fonksiyon haline getirilebilir.

Doğrusal spline (kama) fonksiyonu ile birbirlerinden kopuk olan bu fonksiyonları birleştirmek için uyarlama yapılır. Uyarlama yapmak için değişkenler tanımlanarak bu değişkenleri içeren bir fonksiyon oluşturulur. 3 farklı dönem için değişkenler aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$z_{1t} = 1$$

$$z_{2t} = \begin{cases} 0 & ,t \le t_0 \quad \text{ise,} \\ t - t_0 & ,t > t_0 \quad \text{ise,} \end{cases}$$

$$z_{3t} = \begin{cases} 0 & ,t \le t_1 \quad \text{ise,} \\ t - t_1 & ,t > t_1 \quad \text{ise,} \end{cases}$$

Bu değişkenler kullanılarak parametrize edilen bir fonksiyon aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y_t = \alpha_1 + \delta_1 z_{1t} + \delta_2 z_{2t} + \delta_3 z_{3t} + u_t \qquad (1.3.20)$$

(1.3.20) ifadesine E.K.K. yöntemi uygulanarak modelin parametreleri tahmin edilir. β 'lar ve α 'lar ise bu tahmin değerleri yardımıyla elde edilir.

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= \delta_1 \\
\beta_2 &= \delta_1 + \delta_2 \\
\beta_3 &= \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 \\
\alpha_2 &= \alpha_1 - \delta_2 t_0 \\
\alpha_3 &= \alpha_2 - \delta_3 t_1
\end{aligned}$$

Birbirinden kopuk 3 fonksiyonu içeren (1.3.19) ifadesine kısıtlı en küçük kareler yönteminin uygulanması sonucu sürekli bir fonksiyon şekline dönüşebilir. t_0 noktasında birinci ve ikinci döneme ait fonksiyonları t_1 noktasında ise ikinci ve üçüncü döneme ait fonksiyonlar birleştirilerek sürekli bir fonksiyon elde edibilir. t_0 ve t_1 ortak noktaları sağlayan kısıtlamalar aşağıdaki gibidir.

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \beta_1 t_0 &= \alpha_2 + \beta_2 t_0 \\
\alpha_2 + \beta_2 t_1 &= \alpha_3 + \beta_3 t_1
\end{aligned}$$

veya,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 + \beta_1 t_0 - \alpha_2 - \beta_2 t_0 &= 0 \\
\alpha_2 + \beta_2 t_1 - \alpha_3 - \beta_3 t_1 &= 0
\end{aligned}$$

Parametrelere ait bu ön bilgilerin $R\beta = r$ kısıt çatısı içerisinde gösterimi ise şöyledir.

$$\begin{bmatrix} 1 & t_0 & -1 & -t_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & t_1 & -1 & -t_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Bu kısıtlamalara bağlı olarak modelimiz aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} \bar{y}_1 \\ \bar{y}_2 \\ \bar{y}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & & & & \\ 1 & 2 & & & & \\ . & . & & & & \\ 1 & t_0 & & & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & & 1 & t_0+1 & & \\ & & 1 & t_0+2 & & \\ & & . & . & & \\ & & 1 & t_1 & & \\ - & - & - & - & - & - \\ & & & & 1 & t_1+1 \\ & & & & 1 & t_1+2 \\ & & & & . & . \\ & & & & 1 & T \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \alpha_3 \\ \beta_3 \end{bmatrix} + U \qquad (1.3.21)$$

(1.3.21) ifadesinin tahmininden elde edilen α ve β katsayılarının tahmin değerleri, (1.3.20) ifadesindeki kama (spline) fonksiyonunun tahmin değerleri ile aynıdır.

1.3.2.2.3. Bilinmeyen Birleşim Noktalı Parçalı Regresyon Modeli

Bu modellerde farklı regresyon sistem sayılarının bilindiği, fakat yapısal değişimin (kırılmanın) meydana geldiği noktanın bilinmediği varsayılır. Bu varsayıma bağlı olarak birleşim noktası tahmin edilecek bir bilinmeyen parametre olarak ele alınır. İki farklı regresyon sisteminin varlığının bilindiği bir durumda bilinmeyen t_0 gibi bir birleşim noktasına bağlı olarak aşağıdaki ifadeleri yazabiliriz.

$$\begin{array}{lll} \text{1.sistem} & y_t = \alpha_1 + \beta_1 x_t + u_{1t} & , t \le t_0 \text{ ise} \\ \text{2.sistem} & y_t = \alpha_2 + \beta_2 x_t + u_{2t} & , t > t_0 \text{ ise} \end{array} \qquad (1.3.22)$$

Goldfeld ve Quandt (1973b) , u_{1t} ve u_{2t} hakkında aşağıdaki varsayımları yapmışlardır.

1-) $u_{1t} \sim N\left(0, \sigma_1^2\right)$

2-) $u_{2t} \sim N\left(0, \sigma_2^2\right)$

3-) $\left(\beta_1, \sigma_1^2\right) \neq \left(\beta_2, \sigma_2^2\right)$

"Değişen (switching) regresyon modelleri arasındaki temel fark, her bir sisteme tahsis edilen gözlemlerin durumuna bağlıdır"[13]. Yani regresyon sistemlerinin seçimine bağlıdır. (1.3.22) ifadesindeki iki regresyon sistemi arasındaki seçim (tahsis) deterministik veya stokastik olabilir. Stokastik seçim durumunda , λ ve $1-\lambda$ gibi bilinmeyen olasılıklarına bağlı olarak regresyon sistemleri arasında seçim yapılır. Deterministik seçim durumunda ise, yapısal değişmenin (kırılmanın) açıklayıcı değişkenlerden birinde veya dışsal bir değişkende meydana geldiği kabul edilir. Yapısal değişmeye neden olan değişkeni z ile gösterelim. Bu gözlenen z değişkeninin bilinmeyen bir başlangıç noktası veya kırılma (cutoff) noktasıyla göz önüne alınarak seçim yapılır. Burada sözü edilen değişken bir trend değişkeni de olabilir.

Değişimin Belli Bir Zamanda Meydana Geldiği Deterministik Durum: Yapısal değişimin bilinmeyen t_0 gibi bir noktada meydana geldiği varsayıldığında regresyon sistemleri ikiye ayrılır. (1.3.22) ifadesinde belirttiğimiz gibi, $t \leq t_0$ olduğunda birinci regresyon sistemi ve $t > t_0$ olduğunda ise ikinci regresyon sisteminin olduğu kabul edilir. Bu durumda birinci regresyon sistemi için

[13] Dale J. Poirier , *The Econometrics of Structural Change,Amsterdam,* New York,Oxford:North-Holland , 1976, 109

y_{t_0}, x_{t_0} gözlemleri mevcuttur. İkinci regresyon sistemi için de y_{T-t_0}, x_{T-t_0} gözlemleri mevcuttur. t_0, birinci regresyon sisteminden ikinci regresyon sistemine geçişin meydana geldiği bir zaman noktasıdır. Böylece bütün örneklem için aşağıdaki logaritmik olabilirlik fonksiyonu yazılabilir .

$$\ln L = -\frac{T}{2}\ln 2\pi - \frac{t_0}{2}\ln\sigma_1^2 - \frac{T-t_0}{2}\ln\sigma_2^2$$

$$-\frac{1}{2\sigma_1^2}\sum_{t=1}^{t_0}\left(y_t - \alpha_1 - \beta_1 x_t\right)^2 - \frac{1}{2\sigma_2^2}\sum_{t=t_0+1}^{T}\left(y_t - \alpha_2 - \beta_2 x_t\right)^2 \quad (1.3.23)$$

(1.3.23) ifadesinin $\alpha_1, \beta_1, \sigma_1^2, \alpha_2, \beta_2$ ve σ_2^2'ye göre maksimize edilerek maksimum olabilirlik tahminleri elde edilir. σ_1^2 ve σ_2^2'ye göre maksimizasyon;

1-) $$\frac{\partial \ln L}{\partial\sigma_1^2} = -\frac{t_0}{2}\frac{1}{\sigma_1^2} - \frac{1}{2\sigma_1^4}\sum_{t=1}^{t_0}\left(y_t - \alpha_1 - \beta_1 x_t\right)^2 \quad (1.3.24)$$

(1.3.24) ifadesinden hareketle;

$$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{t_0}e_{1t}'e_{1t}$$

tahmin değerine ulaşırız. Bu tahmin değerinden $e_{1t}'e_{1t} = \hat{\sigma}_1^2 t_0$ değeri elde edilir.

2-) $$\frac{\partial \ln L}{\partial\sigma_2^2} = -\frac{T-t_0}{2}\frac{1}{\sigma_2^2} + \frac{1}{2\sigma_2^4}\sum_{t=t_0+1}^{T}\left(y_t - \alpha_2 - \beta_2 x_t\right)^2 \quad (1.3.25)$$

(1.3.25) ifadesinden hareketle;

$$\hat{\sigma}_2^2 = \frac{1}{T - t_0} e'_{2t} e_{2t}$$

Bu tahmin değerine bağlı olarak $e'_{2t} e_{2t} = \hat{\sigma}_2^2 (T - t_0)$ elde edilir. $e'_{1t} e_{1t}$ ve $e'_{2t} e_{2t}$ değerlerini (1.3.23) ifadesindeki son iki terimde yerine yazarak aşağıdaki ifadeye ulaşırız.

$$-\frac{t_0 \hat{\sigma}_1^2}{2\hat{\sigma}_1^2} - \frac{(T - t_0)\hat{\sigma}_2^2}{2\hat{\sigma}_2^2} = -\frac{T}{2}$$

Bu son ifadeye bağlı olarak logaritmik olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$\ln L = -\frac{T}{2} \ln 2\pi - \frac{T}{2} - \frac{t_0}{2} \ln \hat{\sigma}_1^2 - \frac{T - t_0}{2} \ln \hat{\sigma}_2^2 \qquad (1.3.26)$$

Bilinmeyen değişim (switch) noktası t_0 'ın bütün olası seçimleri için (1.3.26) ifadesinin değeri bulunur. Bu ifadeyi maksimum yapan değer t_0 'ın tahmin değeri olarak kabul edilir.

Regresyon Sisteminin Deterministik Seçiminin Bir Değişkene Bağlı Olması: Yapısal değişim belirlenebilir bir dışsal değişkende ortaya çıkabilir. Böylesi bir durum için Goldfeld ve Quandt (1972) şöyle bir çözüm önermişlerdir: z_t ($t = 1, \ldots, T$) gözlemli dışsal değişken z'nin, z_0 gibi bilinmeyen bir değerinde yapısal değişimin meydana geldiğini kabul ederek regresyon sistemini şu şekilde ayırmışlardır. Regresyon sistemleri $z_t \le z_0$ ise birinci regresyon sistemi ve $z_t > z_0$ ise ikinci regresyon sistemi göz önüne alınır. z_t'nin bir fonksiyonu olan $D(z_t)$ değişkeni aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

$$D(z_t)=\begin{cases}0 & ,z_t \le z_0 \quad \text{ise}\\ 1 & ,z_t > z_0 \quad \text{ise}\end{cases}$$

$D(z_t)$ yi daha basit şekilde D_t ile gösterirsek; iki-sistemli değişen (switching) regresyon modeli aşağıdaki gibi olur.

$$y_t=\alpha_1(1-D_t)+\alpha_2 D_t+x_t'\left[(1-D_t)\beta_1+D_t\beta_2\right]+(1-D_t)u_{1t}+D_t u_{2t} \qquad (1.3.27)$$

(1.3.27) ifadesindeki T gözlemli regresyon modelinden T+6 tane parametre tahmin edilmelidir. Yani $\alpha_1,\beta_1,\sigma_1^2,\alpha_2,\beta_2,\sigma_2^2$ ve D_t (t =1,...,T) tahmin edilmelidir. Tahmin edilecek parametre sayısı gözlem sayısından daha fazla olduğundan böyle bir tahminin yapılması zordur. Bu problemi kolaylaştırmak amacıyla D_t'nin sürekli bir fonksiyona yaklaştığı varsayılarak aşağıdaki gibi gösterilir.

$$D_t=\int_{-\infty}^{z_t}\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{\xi-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}d\xi \qquad (1.3.28)$$

Parametrelerin tahmini için uygun logaritmik olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$L=-\frac{T}{2}\ln 2\pi-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\ln\left[\sigma_1^2(1-D_t)^2+\sigma_2^2 D_t^2\right]$$

$$-\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\frac{\{y_t-\alpha_1(1-D_t)-\alpha_2 D_t-x_t[\beta_1(1-D_t)+\beta_2 D_t]\}^2}{\sigma_1^2(1-D_t)^2+\sigma_2^2 D_t} \qquad (1.3.29)$$

(1.3.28) ifadesinden D_t(t =1,...,T)'nin her bir değeri belirlenir. Logaritmik olabilirlik fonksiyonunda D_t nin yerine (1.3.28) ifadesi yazılır ve logaritmik olabilirlik fonksiyonu $\alpha_1, \beta_1, \sigma_1^2, \alpha_2, \beta_2, \sigma_2^2, \mu$ ve σ^2 bilinmeyen parametrelere göre maksimize edilerek maksimum olabilirlik tahminleri elde edilir.

Regresyon Sistemi Arasındaki Seçimin Stokastik Olması :Goldfeld ve Quandt (1973a), λ olarak adlandırdıkları yöntemle iki regresyon sistemi arasındaki seçimin λ ve $1-\lambda$ gibi bilinmeyen olasılıklara bağlı olarak yapılabileceğini varsaymışlardır. Hata teriminin normal varsayımları altında bağımlı değişken y_t aşağıdaki yoğunluk fonksiyonuna sahiptir.

$$g(y_t / x_t) = \lambda f_1(y_t / x_t) + (1-\lambda) f_2(y_t / x_t)$$

$$= \frac{\lambda}{\sqrt{2\pi\sigma_1^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_1^2}(y_t - \alpha_1 - \beta_1 x_t)^2 \right\} + \frac{1-\lambda}{\sqrt{2\pi\sigma_2^2}} \exp\left\{ -\frac{1}{2\sigma_2^2}(y_t - \alpha_2 - \beta_2 x_t)^2 \right\}$$

logaritmik olabilirlik fonksiyonu da aşağıdaki gibidir.

$$L = \sum_{t=1}^{T} \ln g(y_t / x_t) \tag{1.3.30}$$

(1.3.30) ifadesindeki logaritmik olabilirlik fonksiyonu $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2, \sigma_1^2, \sigma_2^2$ ve λ ya göre maksimizasyonları yapılarak maksimum olabilirlik tahminleri elde edilir.

1.4. Rassal (Random) Parametreli Modeller

1.4.1. Hildreth - Houck Rassal Katsayılı Modeller

Genellikle yatay-kesit verilerinin ve zaman serileri verilerinin analizinde kullanılan Hildreth-Houck rassal katsayı modelini Hackl (1989 ,Bölüm 14) şöyle göstermiştir.

$$y_i = x_i'\beta_i \tag{1.4.1}$$

(1.4.1) ifadesindeki $i = 1...N$ dir. Bu modeldeki her katsayı (parametre) rassal bir değişken olarak ele alınır ve $\beta_i = Z_i\tau + v_i$ şeklinde ifade edilir. Bu ifadedeki $Z_i = I_K$ ve $\tau = \overline{\beta}$ olduğundan β_i aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\beta_i = \overline{\beta} + v_i \tag{1.4.2}$$

(1.4.2)ifadesindeki $\beta_i = (\beta_{1i}, \beta_{2i}, ..., \beta_{Ki})$dir ve i – inci gözlem için rassal karakterli asıl (actual) tepki katsayılarını içerir. $\overline{\beta}' = (\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, ..., \overline{\beta}_K)$ ise stokastik olmayan ortalama tepki katsayılar vektörüdür. $x_i' = (1, x_{2i}, ... x_{Ki})$, bilinen rassal olmayan açıklayıcı değişkenler matrisidir. $\overline{\beta}_K$ ortalama tepki katsayısı, K-nıncı açıklayıcı değişkende meydana gelen bir birim değişime bağımlı değişken y'nin vereceği ortalama tepkiyi gösterir. $v_i' = (v_{1i}, v_{2i}, ..., v_{Ki})$ ise rassal hatalar vektörüdür. v_i, $\beta_i$nin $\overline{\beta}$dan sapmasını göstermektedir. Hildreth - Houck rassal katsayılı modelin sıradan modellerden farkı, hata terimi içermemesidir. Denklemin hata teriminin kesme terimi hatası v_{1i}den ayırt edilemediği varsayımına bağlı olarak (1.4.1) ifadesindeki hata terimi gösterilmemiştir.

(1.4.1) ifadesindeki β_i yerine (1.4.2) ifadesini yazarsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$y_i = x_i'(\bar{\beta} + v_i) = x_i'\bar{\beta} + x_i' v_i$$

$$y_i = x_i'\bar{\beta} + u_i \qquad (1.4.3)$$

(1.4.3) ifadesindeki model değişen varyanslı klasik regresyon modelidir. Bu modeldeki $u_i = x_i' v_i$ dir. u_i ve v_i hakkında aşağıdaki varsayımlar yapılmıştır.

- $E[u_i] = 0$
- $E[u_i^2] = \sigma_i^2 = x_i' A x_i$

$$\operatorname{var}(u_i) = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \sigma_N^2 \end{bmatrix} = \operatorname{diag}(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \ldots, \sigma_N^2) = W$$

- $E[v_i] = 0$
- $E[v_i v_i'] = A$
- $i, j = 1 \ldots N \ i \neq j$ ise $E[v_i v_j'] = 0$

Bildiğimiz gibi değişen varyanslı regresyon modelinin katsayılarının tahmininde genelleştirilmiş en küçük kareler (G.E.K.K.) yöntemi kullanılır. Sabit varyanslı regresyon modelindeki u_i hata teriminin varyansı, $\operatorname{var}(u_i) = \sigma^2 I$ dır. G.E.K.K. yöntemin uygulanabilmesi için uygun bir P bulunmalıdır. Öyle ki $PWP' = I$ olmalıdır. Bu durumda $P'P = W^{-1}$ dir. P matrisi ise şöyle tanımlanır: $P = \operatorname{diag}(\sigma_1^{-1}, \sigma_2^{-1}, \ldots, \sigma_N^{-1})$ dir.

$$
P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_N} \end{bmatrix}
$$

(1.4.3) ifadesinin her iki tarafını P matrisi ile çarparsak aşağıdaki dönüştürülmüş modeli elde ederiz.

$$y_i^* = x_i'^{*} \bar{\beta} + u_i^*$$

G.E.K.K. tahminleri yukarıdaki dönüştürülmüş modele E.K.K. yöntemi uygulanarak elde edilir.

A matrisi bilinen elemanlı bir matris olduğunda , ortalama tepki katsayısı $\bar{\beta}$' nın genelleştirilmiş en küçük kareler (G.E.K.K.) tahmin edicisi aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{\bar{\beta}} = \left(W^{-1} \sum_{i=1}^{N} x_i x_i' \right)^{-1} \left(W^{-1} \sum_{i=1}^{N} x_i y_i \right) \tag{1.4.4}$$

$\tilde{\bar{\beta}}$, $\left[W^{-1} \sum_{i=1}^{N} x_i x_i' \right]^{-1}$ kovaryans matrisine sahiptir. Rassal katsayı $\beta_i = \bar{\beta} + v_i$ olduğundan dolayı $\tilde{\beta}_i$'ları ise $\tilde{\bar{\beta}}$ tahmin değerine v_i'nin tahmin değeri $\tilde{v}_i$'yı ekleyerek elde ederiz.

A matrisinin elemanlarının bilinmediği durumda, bu matrisin elemanları tahmin edilir. A matrisinin daha detaylı gösterimi şöyledir.

$$A = E\left[v_i v_i'\right] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & 0 & . & . & . & 0 \\ 0 & \alpha_2 & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ 0 & 0 & . & . & . & \alpha_K \end{bmatrix}$$

Daha öncede belirttiğimiz gibi $u_i = x_i' v_i$ olduğundan u_i'nin varyansı şöyledir.

$$E\left[u_i^2\right] = \sum_{k=1}^{K} x_{ki}^2 \alpha_k \quad , i = 1....N$$

$$= \dot{x}_i' \alpha \tag{1.4.5}$$

(1.4.5) ifadesindeki $\dot{x}_i = \left[1, x_{2i}^2, \ldots, x_{Ki}^2\right]$ dir.

Böylece $var(u_i) = W = \dot{X}\alpha$ şeklinde yazabiliriz. A matrisinin elemanlarını tahmin etmek için Johnston (1984) aşağıdaki işlemleri önermiştir.

(1.4.3) ifadesindeki değişen varyans durumu göz ardı edilerek en küçük kareler kalıntıları e = y-xb hesaplanır. Daha sonra kalıntı kareler bulunur. Kalıntı karelerin beklenen değeri ise şöyledir.

$$E\left(ee'\right) = E(\dot{e}) = ME\left(uu'\right)M$$

Bu ifadedeki $M = I - X\left(X'X\right)^{-1}X'$ dir.

$$E(ee') = E(\dot{e}) = \begin{bmatrix} Ee_1^2 \\ . \\ . \\ . \\ Ee_N^2 \end{bmatrix} = \dot{M}W \qquad (1.4.6)$$

(1.4.6) ifadesinde W 'nin değeri yerine yazılarak şu ifadeye ulaşılır.

$$E(\dot{e}) = \dot{M}\dot{X}\alpha$$

α nın tahmini için; $\dot{e} = \alpha\dot{M}\dot{X}$ regresyonu kurularak $\hat{\alpha}$ tahminleri elde edilir. $\hat{\alpha}$' lar $(1.4.5)$ ifadesinde yerine yazılarak u' ların varyanslarının tahminlerine ulaşılır. Hackl(1989), α'nın daima pozitif tahminlerinin elde edilmesinin imkansız olduğunu vurgulayarak, negatif tahmin değerleri yerine sıfır değerinin alınmasını önermiştir. Bu öneri göz önüne alınarak elde edilen hata terimi varyans matrisi yardımıyla (1.4.3) ifadesine G.E.K.K. yöntemi uygulanır ve $\bar{\bar{\beta}}$ tahmin vektörü elde edilir.

1.4.1.1. Rassal Katsayıların Tahmini

Rassal katsayı vektörü $\beta_i = \bar{\beta} + v_i$'dir. Böylece $\bar{\bar{\beta}}$ tahminine v_i nin tahmininin eklenmesiyle $\tilde{\beta}_i$ elde edilir. $u_i = x_i' v_i$ olduğundan $\tilde{u}_i = x_i' \tilde{v}_i$ dir. Bu ifadeye bağlı olarak Griffiths (1972), $\tilde{v}_{1i}, \tilde{v}_{2i}, ..., \tilde{v}_{Ki}$ lar için uygun değerlerin, $\tilde{v}_{ki}'$ (k=1...K) 'lerin her birine $\tilde{u}_i$'ların bazı oranlarını dağıtmak olduğunu belirtmiştir. Bunun için yapılacak geçerli yolun, u_i'nin varyansına $x_{ki}' v_{ki} (k = 1...K)$'ların varyansının katkıda bulunduğu oranda $x'_{ki}\tilde{v}_{ki}$ arasında $\tilde{u}_i$'leri dağıtmak olduğunu ifade etmiştir. Bu varsayımına dayanarak $\tilde{v}_{ki}$ aşağıdaki gibi göstermiştir.

$$\tilde{v}_{ki} = \frac{x_{ki}\alpha_k}{\sum_{k=1}^{K} x_{ki}^2 \alpha_k} \tilde{u}_i, k=1 \ldots K; i = 1 \ldots N \tag{1.4.7}$$

(1.4.7) ifadesinden hareketle $\tilde{v}_i = Ax_i\left(x_i'Ax_i\right)^{-1}\tilde{u}_i$ olarak gösterilebilir. Bu ifadedeki $\tilde{u}_i = \left(y_i - x_i'\tilde{\tilde{\beta}}\right)$ dir. $\tilde{\tilde{\beta}}$'ya, (1.4.7)'deki tahmin değerleri eklenerek örneklemin gözlemleri boyunca değişen $\tilde{\beta}_i$ tahmin değerleri vektörü elde edilir. Adı geçen yazar bu bireysel katsayı tahmin vektörünün en iyi, doğrusal, yansız tahmin edici olduğunu göstermiştir.

$$\tilde{\beta}i = \tilde{\tilde{\beta}} + Ax_i\left(x_i'Ax_i\right)^{-1}\left(y_i - x_i'\tilde{\tilde{\beta}}\right) \tag{1.4.8}$$

1.4.2. Stokastik (Stochastic) Parametreli Regresyon Modeli

Zaman serileri verileri ile kullanılan bu modelin parametrelerinin zaman boyunca değiştiği varsayılır. Bu modeldeki parametreler durağan bir süreci izlerler. Judge (1988), stokastik parametreli regresyon modelini şöyle göstermiştir.

$$y_t = x_t'\beta_t \quad , \qquad t=1 \ldots T \tag{1.4.9}$$

Bu modeldeki her bir parametre rassal bir değişken olarak ele alınır ve bu parametreler ortalaması sabit fakat bilinmeyen bir süreci izlediği varsayılarak aşağıdaki gibi gösterilir.

$$(\beta_t - \overline{\beta}) = \phi(\beta_{t-1} - \overline{\beta}) + a_t \qquad (1.4.10)$$

Parametrelerin zaman boyunca gelişimi birinci mertebeden otoregresif model ile tanımlanmıştır. (1.4.9) ifadesindeki y_t, bağımlı değişkenin gözlemlerini göstermektedir. x_t ise ($K \times 1$) boyutlu stokastik olmayan açıklayıcı değişkenlerin gözlemleri vektörüdür ve $x'_t = (x_{1t}, x_{2t}, ..., x_{Kt})$'dir. β_t, sabit katsayı $\overline{\beta}$ yı içeren $(K \times 1)$ boyutlu stokastik parametreler vektörüdür ve $\beta'_t = (\beta_{1t}, \beta_{2t}, ..., \beta_{Kt})$'dir. (1.4.10) ifadesindeki $\overline{\beta}$, stokastik parametre β_t'nin ortalamasıdır ve $\overline{\beta}' = (\overline{\beta}_1, \overline{\beta}_2, ..., \overline{\beta}_K)$ dir. Yani $E[\beta_t] = \overline{\beta}$ dır. ϕ, karakteristik kökleri mutlak değer 1 den daha az olan (K×K) boyutlu parametreler matrisidir. "ϕ, zaman serilerinin yakın değerleri arasındaki ilişkiyi göstermektedir. $Corr(\beta_t, \beta_{t-1}) = \phi$, $Corr(\beta_t, \beta_{t-2}) = \phi^2$ ve $Corr(\beta_t, \beta_{t-j}) = \phi^j$ dir"[14]. a_t, $(K \times 1)$ boyutlu rassal hata terimleri vektörüdür. Ayrıca a_t hakkında şu varsayımlarda yapılmıştır.

_ $E(a_t) = 0$

_ Sabit varyans Ω ya sahiptir.

_ $t \neq s$ ise $E[a_t a'_s] = 0$

Zaman serilerinde yukarıdaki özelliklere sahip olan bir süreç pür rassal bir süreç olarak adlandırıldığından a_t de pür rassal bir vektördür.

Regresyon modeli (1.4.9) deki stokastik parametreler otokorelasyonlu (ardışık bağımlı) olduklarından (1.4.10) ifadesindeki ϕ katsayısının değeri sıfır değildir. $\phi = 0$ olduğunda β_t parametrelerinin gelecek değerleri geçmiş değerlerinden tahmin

[14] Paul Newbold and Theodore Bos, *Stochastik Parameter Regression Models*, Sage Publications Newbury Park: 1985, 14

edilemez. Böylesi bir durumda stokastik parametreli model, Hildreth- Houck rassal katsayı modeline dönüşür. Bu yüzden stokastik parametreli regresyon modeli Hildreth -Houck rassal katsayı modelinin genel bir şekli olarak kabul edilir. Ayrıca x_t nin birinci elemanı $x_{1t} = 1$ (t =1...T) kabul edildiğinde denklemin hata teriminden birinci parametrenin davranışının ayırt edilmesinin imkansız olduğu varsayılarak (1.4.9) de gösterilen ifadede hata terimi yazılmamıştır. Bu varsayım özel bir durum olarak ele alınır. Daha genel formülasyonlarda hata terimi modele katılır. Hata terimli modeli şöyledir.

$$y_t = x_t'\beta_t + e_t \tag{1.4.11}$$

(1.4.11) ifadesindeki e_t , (1.4.10) ifadesindeki a_t den bağımsızdır . (1.4.11) ve (1.4.10) ifadelerindeki modellere durum uzayı (state space) modelleri adı verilmektedir. Bu modeller mühendislik biliminde kullanılmaktadır. (1.4.11) ifadesindeki modele ölçüm denklemi (measurement equation) ve (1.4.10) ifadesindeki modele ise geçiş denklemi (transition equation) denir.

Newbold ve Bos (1985), Kalman Filtresi Algoritması yardımıyla (1.4.10) ve (1.4.11) ifadelerindeki parametreleri tahmin etmişlerdir. Bu algoritmanın amacı stokastik parametrelerin şartlı beklenen değerlerini ve şartlı varyanslarını hesaplamaktır. Bu sebepten dolayı bazı notasyonların ortaya koyulması gerekmektedir.

Her iki denklemdeki hata terimlerinin normal dağıldığı varsayılmaktadır. Bu yüzden $y_1, y_2, ..., y_{t-1}$ verildiğinde β_t ve y_t'nin birleşik dağılımı (joint distribution) çok değişkenli (multivariate) normal dağılımı izler. Bu dağılım ise onların ortalaması ve kovaryans matrisleriyle belirlenmektedir.

1) Verilen mevcut bilgi şartına bağlı olarak β_t nin ortalaması veya beklenen değeri;

$$E(\beta_t / y_1, y_2, ..., y_{t-1}) = \beta + \phi E(\beta_{t-1} / y_1, y_2, ..., y_{t-1}) - \phi\beta + E(a_t / y_1, y_2, ..., y_{t-1})$$

Ölçüm ve geçiş denklemlerindeki hata terimlerinin bağımsız olduğu varsayımından dolayı yukarıdaki ifadenin sağ tarafındaki son terimin değeri sıfırdır. Daha genel şekliyle β_t 'nin şartlı beklenen değeri aşağıdaki gibidir.

$$\beta(t/t-1) = \phi\beta(t-1/t-1) + (I-\phi)\beta \qquad (1.4.12)$$

β_t nin şartlı kovaryans matrisi;

$$Var(\beta_t / y_1, y_2, ..., y_{t-1}) = \phi Var(\beta_{t-1} / y_1, y_2, ..., y_{t-1})\phi' + \Omega$$

$$= P(t/t-1) = \phi P(t-1/t-1)\phi' + \Omega \qquad (1.4.13)$$

(1.4.13) ifadesindeki Ω , a_t nin kovaryans matrisidir.

2) y_t'nin şartlı beklenen değeri şöyledir.

$$E(y_t / y_1, y_2, ..., y_{t-1}) = x_t' E(\beta_t / y_1, y_2, ..., y_{t-1}) + E(e_t / y_1, y_2, ..., y_{t-1})$$

e_t hakkında yapılan varsayımlar göz önüne alındığında yukarıdaki ifadenin sağ tarafındaki son terimin değeri sıfırdır. Böylece bağımlı değişkenin şartlı beklenen değeri aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$y(t/t-1)x_t'\beta(t/t-1)$$

y_t ' nin şartlı varyansı;

$$Var(y_t / y_1, y_2, ..., y_{t-1}) = x_t' Var(\beta_t / y_1, y_2, ..., y_{t-1}) x_t + \sigma^2$$

$$= h_t = x_t' P(t/t-1) x_t + \sigma^2 \qquad (1.4.14)$$

Bu ifadedeki σ^2, e_t 'nin varyansıdır.

3) $y_1, y_2, ..., y_{t-1}$ verildiğinde β_t ve y_t arasındaki kovaryans ilişkisi şöyledir.

$$Kov(\beta_t, y_t / y_1, y_2, ..., y_{t-1}) = Var(\beta_t / y_1, y_2, ..., y_{t-1})x_t$$
$$= P(t/t-1)x_t$$

4) $y_1, y_2, ..., y_t$ verildiğinde β_t' nin ortalaması ve kovaryansı ise yukarıdaki ifadeler aracılığıyla sağlanmıştır. y_t verildiğinde β_t'nin dağılımı çok değişkenli normal dağılımdır. Bu dağılımın özelliklerini vurgulamak için x_1 ve x_2 gibi rassal iki değişkeni göz önüne alalım. Bu iki değişkenin birleşik dağılımı çok değişkenli normal dağılımdır. Bu rassal değişkenlerin ortalamaları ve varyansları aşağıdaki gibi olsun.

$$E(x_i) = \mu_i$$

$$E\left[(x_i - \mu_i)(x_i - \mu_i)'\right] = \Sigma_{ii}$$

x_1 ve x_2 arasındaki kovaryans ise şöyledir.

$$E\left[(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)'\right] = \Sigma_{12}$$

x_2 verildiği takdirde x_1'in dağılımı da çok değişkenli normal dağılımdır. Öyle ki bu dağılımın ortalaması ve varyansı sırasıyla aşağıdaki gibidir.

$$E(x_1 / x_2) = \mu_1 + \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}(x_2 - \mu_2)$$

$$Var(x_1 / x_2) = \Sigma_{11} - \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

Şu halde çok değişkenli normal dağılımın özelliklerini vurguladıktan sonra y_t verildiğinde β_t'nin dağılımının da çok değişkenli normal dağılım olduğunu belirtmiştik. Buna bağlı olarak stokastik parametrelerin şartlı beklenen değerleri ve şartlı varyansları sırasıyla aşağıdaki gibi olur.

$$\beta(t/t)=\phi\beta(t-1/t-1)+(I-\phi)\beta+P(t/t-1)x_t h_t^{-1}\left[y_t-x_t'\beta(t/t-1)\right) \quad (1.4.15)$$

$$P(t/t)=P(t/t-1)-P(t/t-1)x_t h_t^{-1}x_t'P(t/t-1) \quad (1.4.16)$$

Durum uzayı modelinin sabit parametrelerinin verilen her değeri için stokastik parametrelerin şartlı beklenen değerleri ve şartlı varyansları bulunur.

Kalman filtresi algoritmasının parametrelerin tahmininde kullanılabilmesi için, $\beta(0/0)$ ve P(0/0) başlangıç değerlerine ihtiyaç duyulur. (1.4.10) deki ifadenin birinci mertebeden otoregresif bir süreci izlediği varsayımına bağlı olarak bu değerler şöyle ifade edilmiştir.

$\beta(0/0)=\beta$ ve

$P(0/0)=\phi P(0/0)\phi'+\Omega$

Bu başlangıç değerleri kullanılarak t = 1 için Kalman denklemlerinin değerleri bulunur. Daha sonra sırasıyla t = 2 ,t = 3 ,...,t = T için Kalman denklemlerinin değeri bulunur.

Parametre tahminlerini iki grupta düşünebiliriz. Modeldeki sabit parametrelerin tahmini ve modeldeki stokastik parametrelerin tahmini.

Sabit Parametrelerin Tahmini: Modeldeki sabit parametreler şunlardır. Stokastik parametrelerin ortalamasını gösteren $\overline{\beta}$, otoregresif parametre matrisi ϕ, e_t 'nin varyansı σ^2 ve a_t 'nin kovaryans matrisi Ω dır.

Bu sabit parametrelerin maksimum olabilirlik tahminleri için olabilirlik fonksiyonun oluşturulması ise şöyledir.

$y_1, y_2, ..., y_{t-1}$ verildiğinde y_t'nin birleşik olasılık yoğunluk fonksiyonu şöyledir.

$$p(y_1, y_2, ..., y_T) = p(y_1)p(y_1)p(y_2 / y_1)p(y_3 / y_1, y_2).....p(y_T / y_1, y_2, ..., y_{T-1})$$

$y_1, y_2, ..., y_{t-1}$ verildiğinde y_t, $x_t'\beta(t/t-1)$ ortalaması ve h_t varyansı ile normal dağılıma sahiptir. Böylece gözlemlerin logaritmik olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibi olur.

$$\log L = -\frac{T}{2}\log(2\pi) - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\log h_t - \frac{1}{2}\sum_{t=1}^{T}\left[y_t - x_t'\beta(t/t-1)\right]^2 h_t^{-1}$$

Sabit katsayıların maksimum olabilirlik tahminleri logaritmik olabilirlik fonksiyonunun maksimize edilmesiyle elde edilir. Maksimizasyon işlemlerinin yapılabilmesi için stokastik katsayıların şartlı beklenen değeri $\beta(t/t-1)$ ve bağımlı değişkenin şartlı varyansı h_t'nin bilinmesi gerekmektedir. Bu değerler Kalman denklemleriyle sağlanarak olabilirlik fonksiyonunda yerine yazılır.

Örneklem Periyodundaki Stokastik Parametrelerin Tahmini: Newbold ve Bos(1985) stokastik parametre β_t' lerin (t =1...T) örneklem periyodu üzerindeki tahminleri için sabit aralıklı düzgün algoritma (fixed interval smoothing algorithm) kullanmışlardır. Bu algoritmaya bağlı olarak stokastik parametre β_t 'lerin şartlı ortalaması ve kovaryans matrisi sırasıyla şöyledir.

$$\beta(t/T) = \beta(t/t) + A_t[\beta(t+1/T)] - \beta(t+1/t) \quad (1.4.17)$$

$$P(t/T) = P(t/t) - A_t[P(t+1/t) - P(t+1/T)]A_t' \quad (1.4.18)$$

Yukarıdaki ifadelerdeki A_t ise aşağıdaki gibi ifade edilmiştir.

$$A_t = P(t/t)\phi' P(t+1/t)^{-1}$$

$t = T\text{-}1$ kabul edilerek hesaplamalara başlanılır. Daha sonra $t = T\text{-}2$, $t = T\text{-}3$.... İçin sırasıyla stokastik parametrelerin bütün örneklem periyodu üzerindeki $\beta(t/T)$ nokta tahminleri elde edilir. Stokastik parametrelerin tahmini için modelin sabit katsayılarının değerlerinin bilinmesi gerekir. Bu değerler yerine sabit katsayıların maksimum olabilirlik tahminleri yazılır.

1.4.3. Swamy Rassal Katsayı Modeli

Swamy (1973), Hildreth - Houck rassal katsayılı modelin benzerini panel veri modeli (yatay kesit verilerinin zaman serileri veri modeli) için uyarlamıştır. Hildreth - Houck rassal katsayılı model ile Swamy rassal katsayılı modelinde parametre değişim yapısı süreklidir. Fakat switching regresyon modelinde kesikli bir değişim yapısı vardır. N tane yatay- kesit verisi ve T tane zaman serileri verisi olduğunu varsayalım. $i-$inci birim için rassal katsayılı model aşağıdaki gibi olur.

$$y_i = x_i\beta_i + u_i \qquad ,i = 1...N \tag{1.4.19}$$

$$\beta_i = \overline{\beta} + v_i \tag{1.4.20}$$

Örneklemdeki her birim tek bir parametre vektörü olan β_i'ye sahiptir ve her birimin parametrelerinin zamanla sabit olduğu varsayılmıştır. (1.4.20) ifadesindeki β_i, ortalaması $\overline{\beta}$ ve kovaryans matrisi w olan bir olasılık dağılımından çekilen $(K \times 1)$ boyutlu rassal tepki parametre vektörüdür. Ortalama tepki parametre vektörü $\overline{\beta}$ ise bütün birimler için ortak kabul edilen $(K \times 1)$ boyutlu bir vektördür.

(1.4.19) ifadesindeki;

$$
y_i = \begin{bmatrix} y_{i1} \\ y_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_{iT} \end{bmatrix}, \quad x_i = \begin{bmatrix} x_{1i1} & x_{2i1} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{Ki1} \\ x_{1i2} & x_{2i2} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{Ki2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ x_{1iT} & x_{2iT} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{KiT} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad u_i = \begin{bmatrix} u_{i1} \\ u_{i2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_{iT} \end{bmatrix}
$$

Hackl (1981,Bölüm 14) , $i, j = 1...N$ olmak üzere u_i ve v_i hakkındaki aşağıdaki varsayımları bağlı olarak Swamy rassal katsayılı modeli analiz etmiştir.

a-) $E[u_i] = 0$

b-) $E\left[u_i u_j'\right] = \begin{cases} \sigma_{ii} I_t & ,i = j \text{ ise} \\ 0 & ,i \neq j \text{ ise} \end{cases}$

c-) $E\left[v_i v_j'\right] = \begin{cases} A & ,i = j \text{ ise} \\ 0 & ,i \neq j \text{ ise} \end{cases}$

d-) v_i ve u_j bağımsızdır.

Bu varsayımlardan da anlaşıldığı üzere farklı birimlerin hata terimleri arasında korelasyon yoktur. Fakat hata terimleri gözlem değerlerine bağlı olarak değiştiğinden değişen varyanslıdırlar.

(1.4.20) ifadesini (1.4.19) ifadesinde yerine yazarsak aşağıdaki ifadeyi elde ederiz.

$$
y_i = x_i \overline{\beta} + x_i v_i + u_i \tag{1.4.21}
$$

NT gözlemlerinin tümünü göz önüne alırsak (1.4.21) ifadesindeki modelimiz aşağıdaki gibi olur.

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_N \end{bmatrix} . \bar{\beta} + \begin{bmatrix} x_1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & x_2 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & x_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ v_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ u_N \end{bmatrix}, \qquad (1.4.22)$$

(1.4.22) ifadesinin daha genel şekli şöyledir.

$$y = x\bar{\beta} + zv + u \qquad (1.4.23)$$

(1.4.23) ifadesindeki $(NT \times NK)$ boyutlu x_i bloklarıyla blok – diagonal matristir. Sabit katsayılı regresyon modelini gösteren (1.4.23) ifadesindeki son iki terimin toplamı hata terimini göstermektedir. Bu karma hata terimi için varyans matrisi ise şöyledir.

$$A = \begin{bmatrix} x_1 w x_1' + \sigma_{11} I_T & 0 & \cdot\cdot\cdot & 0 \\ 0 & x_2 w x_2' + \sigma_{22} I_T & \cdot\cdot\cdot & 0 \\ 0 & 0 & \cdot\cdot\cdot & x_N w x_N' + \sigma_{NN} I_T \end{bmatrix} \qquad (1.4.24)$$

(1.4.23) ifadesindeki modelimiz değişen varyanslı olduğundan ortalama tepki parametre vektörü $\bar{\beta}$'nın tahmini için genelleştirilmiş en küçük kareler (G.E.K.K.) yönteminin uygulanması gerekmektedir. G.E.K.K. tahminini elde etmek için $\hat{A}$'nın elde edilmesi gerekmektedir. $\hat{A}$'nın elde edilebilmek için $\hat{\sigma}_{ii}$ ve $\hat{w}$ tahmin değerlerine ihtiyaç duyulur. Judge (1988) , $\hat{\sigma}_{ii}$ ve $\hat{w}$ elde etmek için aşağıdaki prosedürü izlemiştir.

Öncelikle her bir yatay - kesit birime en küçük kareler yöntemi uygulanarak $b_i = \left(x_i' x_i\right)^{-1} x_i y_i$ tahmin değeri elde edilir. Bu tahmin değeri yardımıyla kalıntılar $\left(e_i = y_i - x_i b_i\right)$ hesaplanır. Bu kalıntılar aracılığıyla σ_{ii}'nin yansız tahmin edicisi aşağıdaki gibi gösterilir.

$$\hat{\sigma}_{ii} = \frac{e_i' e_i}{T - K} \hat{\sigma}_{ii}$$

w'nin yansız tahmin edicisi de aşağıdaki gibidir.

$$\hat{w} = \frac{S_b}{N-1} - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \hat{\sigma}_{ii} \left(x_i' x_i\right)^{-1} \qquad (1.4.25)$$

(1.4.25) ifadesindeki S_b'de aşağıdaki gibidir.

$$S_b = \sum_{i=1}^{N} b_i b_i' - \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} b_i \sum_{i=1}^{N} b_i'$$

$\hat{\sigma}_{ii}$ ve $\hat{w}$ tahmin değerleri A matrisinde yerine koyularak $\hat{\Lambda}$ tahmin değeri elde edilir. Bu tahmin değerine bağlı olarak $\overline{\beta}$'nın genelleştirilmiş en küçük kareler tahmini aşağıdaki gibi olur.

$$\hat{\overline{\beta}} = \left(x' \hat{\Lambda}^{-1} x\right)^{-1} x' \hat{\Lambda}^{-1} y \qquad (1.4.26)$$

Rassal tepki parametresi β_i'lerin tahmin için de; $\overline{\beta}$ tahmin değerine v_i'nin tahmin değeri eklenerek elde edilir. v_i'nin tahmin değeri ise; $y_i - x_i\hat{\overline{\beta}}$ G.E.K.K. kalıntılarının ağırlıklandırılmış bir oranıdır. Bireysel rassal tepki parametresinin tahmini aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\beta}_i = \hat{\overline{\beta}} + wx_i^{-1}\left(x_i w x_i' + \sigma_{ii} I\right)^{-1}\left(y_i - x_i\hat{\overline{\beta}}\right)$$

1.5. Durağan Olmayan Süreçten Elde Edilen Rassal Parametre Modeli

1.5.1. Cooley –Prescott Modeli

Şu ana kadar incelediğimiz modellerde, parametreleri meydana getiren süreç durağan idi. Burada ise inceleyeceğimiz modelin parametrelerini meydana getiren süreç ise durağan değildir. Yani bu parametreler sabit bir ortalamaya ve varyansa sahip değillerdir. Cooley ve Prescott (1976), rassal yürüyüş modelini göz önüne alarak parametrelerdeki değişimi modellemişlerdir. Bu modelin parametreleri bir zaman periyodundan diğer zaman periyoduna değişim göstermektedir. Bir zaman serisi regresyon modeli olan bu model aşağıdaki gibidir.

$$y_t = x_t'\beta_t \quad , t=1,\ldots,T \qquad (1.5.1)$$

Bu modele değişen parametreli regresyon modeli (varying parameter regression model) adı da verilir. (1.5.1) ifadesindeki x_t, K elemanlı açıklayıcı değişkenler vektörüdür. β_t, stokastik(olasılıklı) değişime maruz kalan K elemanlı parametreler vektörüdür. y_t, bağımlı değişkenin t-inci gözlemidir. Parametrelerin değişmesinin sebeplerinin çeşitli olmasından dolayı bu değişimin geçici (transitory) ve sürekli (permanent) olduğu varsayılmıştır. Varsayılan değişim yapısı aşağıdaki gibidir.

$$\beta_t = \beta_t^p + u_t \qquad (1.5.2)$$

$$\beta_t^p = \beta_{t-1}^p + v_t$$

Yukarıdaki ifadedeki üst indis p, parametrelerin sürekli değişen bir parçasını göstermektedir. Parametrelerin değişimine karşı gelen geçici (transitory) eleman, regresyon denklemindeki ilave hata teriminin rolünü oynar. u_t ve v_t sıfır ortalama ve farklı kovaryans yapılarıyla özdeş ve bağımsız olarak dağılan normal değişkenlerdir. u_t ve v_t için kovaryanslar aşağıdaki gibi parametrize edilmiştir.

$$\mathrm{kov}(u_t) = (1-\gamma)\sigma^2 \Sigma_u \text{ ve } \mathrm{kov}(v_t) = \gamma\sigma^2 \Sigma_v$$

Yani u_t ve v_t serisel olarak birbirinden bağımsızdır. Bütün t ve s değerleri için u_t ve v_s birbirinden bağımsızdır. Tahmin amacıyla Σ_u ve Σ_v 'nin ölçek faktörler olarak kabul edilmiştir. Böyle bir varsayım Σ_u ve Σ_v 'nin her ikisinin elemanlarından birinin 1 değerine normalize edilebileceğini belirtir. Örneğin modelin kesme teriminin hem geçici (transitory) hem de sürekli (permanent) değişime maruz kaldığı varsayıldığında $\sigma_{11}^u = \sigma_{11}^v = 1$ kabul edilmesi uygun bir normalizasyondur. Cooley ve Prescott (1973), bütün katsayıların değiştiği genel durumda, özel bir ön bilgi olmadıkça Σ_u ve Σ_v 'nin elemanlarının birbirine eşit olduğunu belirtmişlerdir. Böylelikle geçici ve sürekli değişimin nispi öneminin aynı olduğunu varsaymışlardır. Bir pratik uygulamada , bu ortak matrisin diagonal elemanlarının, parametrelerin sabitliği varsayımı altında hesaplanan parametrelerin tahmin edilen örneklem varyanslarına eşit olduğu kabul edilmiştir. Σ_u ve Σ_v 'nin elemanları bu şekilde belirlendiğinden buradaki tahmin tekniğinin amacı β_t 'nin sürekli parçasını , γ ve σ^2 'yi tahmin etmektir. β^p_{T+1} referans değer olarak alınmıştır. Bu değer örneklemin bir periyot sonrasındaki değeridir ve aşağıdaki gibidir.

$$\beta^p_{T+1} = \beta^p_T + v_T$$

$$= \beta^p_{T-1} + v_{T-1} + v_T$$

$$= \beta^p_{T-2} + v_{T-2} + v_{T-1} + v_T$$

. . . .

$$= \beta^p_t + \sum_{s=t+1}^{T+1} v_s$$

bu ifadeden

$$\beta^p_{T+1} = \beta^p_t + \sum_{s=t+1}^{T+1} v_s \qquad \text{ifadesine ulaşılır.}$$

$$\beta^p_t = \beta^p_{T+1} - \sum_{s=t+1}^{T+1} v_s \tag{1.5.3}$$

(1.5.3) ifadesini (1.5.2) ifadesinde yerine yazarsak ;

$$\beta_t = \beta^p_{T+1} - \sum_{s=t+1}^{T+1} v_s + u_t$$

(1.5.1) ifadesi aşağıdaki gibi de yazılabilir.

$$y_t = x'_t\beta + \mu_t \tag{1.5.4}$$

(1.5.4) ifadesindeki $\beta = \beta^p_{T+1}$ 'dir ve

$$\mu_t = x_t' u_t - x_t' \sum_{s=t+1}^{T+1} v_s$$

μ_t, sıfır ortalama ve aşağıdaki kovaryans matrisi ile normal dağılmaktadır.

$$\text{kov}(\mu) = \sigma^2 [(1-\gamma)R + \gamma Q] = \sigma^2 \Omega(\gamma) \tag{1.5.5}$$

Bu kovaryans ifadesindeki R, $r_{ii} = \left(x_i' \Sigma_u x_i\right)$ elemanıyla diagonaldır ve Q, $q_{ij} = \min(T-i+1, T-j+1) x_i' \Sigma_v x_j$ ile tanımlanmıştır.

Modeli en genel şekliyle aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$y = x\beta + \mu \tag{1.5.6}$$

(1.5.6) ifadesindeki β, K elemanlı bir vektördür. Öyle ki,

$$\beta = \begin{bmatrix} \beta^p_{1,T+1} \\ \beta^p_{2,T+1} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \beta^p_{K,T+1} \end{bmatrix}$$

X, $(T \times K)$ boyutlu bir matristir.

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{K1} \\ x_{21} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{K2} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ x_{1T} & \cdot & \cdot & \cdot & x_{TK} \end{bmatrix}$$

Y, y_t'nin T elemanlı bir vektörüdür. (1.5.5) ifadesinden hareketle Y'nin dağılımı şöyle yazılabilir.

$$Y \sim \left[X\beta, \sigma^2 \Omega(\gamma)\right)$$

γ parametresi geçici ve sürekli değişimin nispi önemini ölçmektedir. Bu değer 1 değerine yakın ise sürekli değişim geçici değişimden nispeten daha fazladır. Çoğu ekonometrik uygulamalarda bu parametrenin bilinmesi imkansızdır. γ , sürekli değişim sebebiyle parametre değişiminin bir parçası olduğundan $0 \le \gamma \le 1$ aralığında olduğu varsayılır. Gözlemlerin logaritmik olabilirlik fonksiyonu aşağıdaki gibidir.

$$L = -\frac{T}{2}\ln 2\pi - \frac{T}{2}\ln\sigma^2 - \frac{1}{2}\ln\left|\Omega(\gamma -)\right| - \frac{1}{2\sigma^2}(Y - X\beta)'\Omega(\gamma)^{-1}(Y - X\beta) \qquad (1.5.7)$$

(1.5.7) ifadesinin β ve σ^2'ye göre maksimize edilmesiyle şartlı tahmin edicilere ulaşılır. Bu tahmin ediciler aşağıdaki gibidir.

$$\beta(\gamma) = \left[X'\Omega(\gamma)^{-1}X\right]^{-1} X'\Omega(\gamma)^{-1}Y \qquad (1.5.8)$$

$$\hat{\sigma}^2(\gamma) = \frac{1}{T}\left[(Y - X\beta(\gamma))'\Omega(\gamma)^{-1}(Y - X\beta(\gamma))\right] \qquad (1.5.9)$$

Bu tahmin edicileri (1.5.7) ifadesinde yerine yazarak aşağıdaki yoğunlaştırılmış olabilirlik fonksiyonunu elde ederiz.

$$L_y = -\frac{T}{2}\ln 2\pi - \frac{T}{2}\ln \hat{\sigma}^2(\gamma) - \frac{1}{2}\ln|\Omega(\gamma)| - \frac{T}{2}$$

$$= -\frac{T}{2}(\ln 2\pi + 1) - \frac{T}{2}\ln \hat{\sigma}^2(\gamma) - \frac{1}{2}\ln|\Omega(\gamma)| \qquad (1.5.10)$$

$\gamma \in [0,1]$ aralığındaki her γ_i için (1.5.10) ifadesinin değeri belirlenir. γ için seçilen tahmin değeri bu ifadeyi maksimize eden değerdir. Bu tahmin değeri (1.5.8) ve (1.5.9) ifadelerinde yerine koyularak $\dot{\beta}$ ve σ^2 tahminleri elde edilir.

BÖLÜM II

UYGULAMALAR

2.1. Uygulama I

Değişen ve rassal katsayılı modellerden Hildreth-Houck rassal katsayılı model üzerine bir uygulama çalışması yapmak için Devlet İstatistik Enstitüsü'nün 1994 yılına ait 19 il merkezindeki hane halkı başına ortalama değerler cinsinden kullanılabilir gelir ve tüketim harcamalarına ait yatay-kesit verilerini kullanacağız. Bu veriler aşağıdaki tablodaki gibidir.

Tablo 2.1. 19 il Merkezine Ait Veriler

İl merkezi	Hane halkı başına ortalama tüketim harcaması : (Y_i)	Hane halkı başına ortalama kullanılabilir gelir: X_i
Bursa	10.545	12.103
Kocaeli	10.623	12.523
İstanbul	15.825	19.740
Denizli	9.623	12.588
İzmir	11.540	13.410
Adana	9.809	14.760
Antalya	10.795	13.755
İçel	8.292	11.100
Ankara	13.306	15.685
Eskişehir	8.249	11.160
Kayseri	9.019	11.094
Konya	8.681	10.453
Samsun	10.039	11.892
Erzurum	11.309	14.963
Malatya	9.464	11.340
Diyarbakır	7.380	8.277
Gaziantep	6.429	7.611
Trabzon	10.951	16.721
Zonguldak	9.943	12.845

Kullanılabilir gelirin tüketim harcamasına etkisini aşağıdaki klasik regresyon modeli ile gösterelim.

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i \quad , \ i = 1,2,...,19 \qquad (2.1.1)$$

Daha önceden de belirttiğimiz gibi iktisadi teori ve rasyonel davranış teorisi rassal katsayılı regresyon modeli için birçok argüman içerir. Bağımsız değişkende meydana gelen değişmelere bağımlı değişkenin vereceği tepkinin bütün gözlemler boyunca aynı olması imkansızdır. Yukarıdaki modelimiz içinde aynı varsayımı yapabiliriz. Böylece hane halkı başına kullanılabilir gelirde meydana gelen bir birimlik değişime tüketim harcamasının vereceği tepkinin 19 il merkezinin her biri için aynı olup olmadığını ve ayrıca kullanılabilir gelir düzeyi sıfır iken 19 il merkezinin her biri için tüketim harcamasının aynı olup olmayacağını inceleyeceğiz. Bu varsayımlara bağlı olarak (2.1.1) modelindeki β_0 ve β_1 katsayılarının gözlemden gözleme (19 il merkezinin her birinde) değişimini araştıracağız Katsayılardaki değişim yapısını aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$y_i = (\beta_0 + V_{0i}) + (\beta_1 + V_{1i}) X_{1i} \qquad (2.1.2)$$

(2.1.2) ifadesindeki regresyon modeli rassal katsayılı regresyon modelidir. Bu ifadedeki V_{0i} ve V_{1i}, i – inci örneklem noktasındaki katsayıları belirleyen stokastik değişkenlerdir. Rassal katsayılı modelin klasik regresyon modelinden farkı hata terimi içermemesidir. Rassal katsayılı modelde hata terimi, stokastik değişken V_{0i} ile birleşmektedir. (2.1.2) ifadesinin daha genel gösterimi aşağıdaki gibi olur.

$$y_i = x_i' \overline{\beta} + u_i \quad , \ i = 1,2,...,19 \qquad (2.1.3)$$

(2.1.3) ifadesiyle, rassal katsayılı regresyon modeli olan (2.1.2) ifadesi sabit katsayılı regresyon modeline dönüşmüştür. Modeldeki bağımlı değişken y_i, (19×1) boyutlu tüketim harcamaları vektörünü ve(19×2) boyutlu açıklayıcı değişkenler vektörü x_i, kullanılabilir gelir düzeyini göstermektedir. Bu ifadedeki $u_i = x_i' v_i$'dir ve $x_i = [1 \quad X_{1i}]$, $v_i = [V_{0i} \quad V_{1i}]$. u_i ve v_i hakkında yapılan varsayımları daha önce belirtmiştik. Hata terimi gözlem değerlerine bağlı olduğundan değişen varyanslıdır. Bu sebepten dolayı (2.1.3) ifadesinin tahmininde genelleştirilmiş en küçük kareler (G.E.K.K.) yöntemi kullanılır. Bu yöntemin uygulanabilmesi için hata terimi u_i'nin varyans matrisinin elemanlarının bilinmesi gerekmektedir. $E(u_i u_i') = x_i' A x_i = \sigma_i^2$ 'dir. σ_i^2 'nin elemanlarının tahmin edilmesi için A matrisinin elemanlarına ihtiyaç duyulur. $A = E[v_i v_i'] = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}$ 'dir. A matrisinin elemanlarını tahmin etmek için adım adım aşağıdaki hesaplamalar yapılır.

Adım I: (2.1.3) ifadesine en küçük kareler yöntemi uygulayarak (değişen varyans durumu göz ardı edilerek) elde ettiğimiz katsayı vektörü aşağıdaki gibidir.

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1,476 \\ 0.676 \end{bmatrix}$$

Adım II: birinci adımda bulduğumuz bu katsayı değerlerini , tablo 2.1 'deki X, Y değerlerini (2.1.3) ifadesinde yerine yazarak kalıntıları sağlarız. Daha sonra kalıntı kareleri hesaplarız. $M = I - X(X'X)^{-1}X'$ matrisi ile X matrisinin her bir elemanının karesini gösteren $\dot{X}$ matrisi çarparak $M\dot{X}$ matrisini elde ederiz. $M\dot{X}$ matrisi (19×2)boyutlu bir matristir. Kalıntı karelere ve $M\dot{X}$'e ait sonuçlar aşağıdaki gibi bulunmuştur.

$$\dot{M}\dot{X} = \begin{bmatrix} 0,009785 & -4,59913 \\ 0,010164 & -5,46061 \\ 0,016685 & 34,85296 \\ 0,010223 & -5,56242 \\ 0,010966 & -6,12059 \\ 0,012186 & -4,10515 \\ 0,011277 & -5,95228 \\ 0,008878 & -1,11462 \\ 0,013021 & -0,61986 \\ 0,008933 & -1,37964 \\ 0,008873 & -1,08775 \\ 0,008294 & 2,200658 \\ 0,009594 & -4,03317 \\ 0,012369 & -3,4868 \\ 0,009095 & -2,13152 \\ 0,006327 & 19,49353 \\ 0,005726 & 26,67906 \\ 0,013957 & 5,31528 \\ 0,010455 & -5,88213 \end{bmatrix} \qquad ee' = \begin{bmatrix} 0,764346 \\ 0,446129 \\ 0,968295 \\ 0,141433 \\ 0,969102 \\ 2,757327 \\ 0,0000344 \\ 0,48958 \\ 1,464717 \\ 0,61359 \\ 0,000984 \\ 0,01621 \\ 0,26124 \\ 0,088775 \\ 0,095988 \\ 0,089683 \\ 0,040259 \\ 3,408148 \\ 0,05293 \end{bmatrix}$$

Önceden de biliyoruz ki $E(ee') = ME[uu']M = \dot{M}\sigma^2$'dir. Bu ifadedeki $\sigma_i^2 = \sum_{j=0}^{1} X_{ji}^2 \alpha_j$ olduğundan hata karelerin beklenen değerini şöyle ifade edebiliriz.

$$E(ee') = \dot{M}\dot{X}\alpha$$

bu ifadedeki $\dot{M} = M'M = M$'dir. Kalıntı kareleri bağımlı değişken ve $\dot{M}\dot{X}$ matrisini de bağımsız değişken olarak alıp bir regresyon ilişkisi kurularak α katsayıları tahmin edilebilir. En küçük kareler yöntemi ile tahmin ettiğimiz α katsayıları aşağıdaki gibidir.

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 72,6242 & 0 \\ 0 & -0,00113 \end{bmatrix}$$

A matrisinin elemanlarını hesapladıktan sonra hata terimi u_i' nin varyans matrisinin elemanlarının her birini $\sigma_i^2 = \sum_{j=0}^{1} X_{ji}^2 \alpha j \quad (i = 1,2,\ldots,19)$ formülü aracılığıyla bulabiliriz A matrisinin elemanlarından α_1'in değeri negatiftir. Hildreth-Houck rassal katsayılı modelin teorik kısmında belirttiğimiz gibi bu negatif değer yerine sıfır değerini alarak hata teriminin varyans matrisinin elemanlarını hesapladık. Hata teriminin varyans matrisinin elemanları α_0 katsayısına eşittir. Böylece hata teriminde değişen varyans ortaya çıkmamaktadır. Hata terimi sabit varyanslı olduğundan modelin katsayı tahminleri E.K.K. yöntemi ile elde ettiğimiz tahminlere eşittir.

2.1.1. Rassal Katsayıların Tahmini:

Rassal katsayı vektörü $\beta_i = \overline{\beta} + v_i$ olduğundan öncelikle $\tilde{v}_i$'ın bulunması gerekmektedir. $\tilde{V}_{ji}$ formülü aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{V}_{ji} = \frac{x_{ji}\alpha_j}{\sum_{j=0}^{1} x_{ji}^2 \alpha_j} \tilde{u}_i \,, \qquad j = 0,1;\ i = 1,2,\ldots,19 \tag{2.1.4}$$

(2.1.4) ifadesindeki $\tilde{u}_i = y_i - x_i'\hat{\overline{\beta}} = e$'dır. $\tilde{u}_i, \tilde{V}_{0i}$ ve $\tilde{V}_{1i}$'lere ait tahmin değerleri aşağıdaki tablo 2.2 'deki gibidir.

Tablo 2.2

$\tilde{u}_i$	$\tilde{V}_{0i}$	$\tilde{V}_{1i}$
0,874269	0,876266	-0,00017
0,667929	0,669563	-0,00013
0,98402	0,990023	-0,0003
-0,37608	-0,37701	7,38E-05
0,98443	0,987192	-0,00021
-1,66052	-1,66617	0,000383
0,005865	0,005882	-1,3E-06
-0,6997	-0,70104	0,000121
1,210255	1,214906	-0,0003
-0,78332	-0,78484	0,000136
0,031362	0,031422	-5,4E-06
0,127319	0,127536	-2,1E-05
0,511116	0,512243	-9,5E-05
-0,29795	-0,29899	6,96E-05
0,30982	0,310441	-5,5E-05
0,299471	0,299791	-3,9E-05
-0,20065	-0,20083	2,38E-05
-1,84612	-1,85418	0,000482
-0,23007	-0,23066	4,61E-05

$\tilde{\beta}_i = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 + \tilde{V}_{0i} \\ \hat{\beta}_1 + \tilde{V}_{1i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}476 + \tilde{V}_{0i} \\ 0{,}676 + \tilde{V}_{1i} \end{bmatrix}$ olduğundan rassal katsayı vektörüne ait sonuçlar aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Tablo 2.3

$\tilde{\beta}_{0i}$	$\tilde{\beta}_{1i}$
2,353266	0,676835
2,146563	0,67687
2,467023	0,676696
1,099994	0,677074
2,464192	0,676794
-0,18917	0,677383
1,482882	0,676999
0,775956	0,677121
2,691906	0,676704
0,692159	0,677136
1,508422	0,676995
1,604536	0,676979
1,989243	0,676905
1,178007	0,67707
1,787441	0,676945
1,776791	0,676961
1,276172	0,677024
-0,37718	0,677482
1,246343	0,677046

Rassal katsayılı modelin gözlemden gözleme değişen rassal katsayılarının tahmini yukarıdaki tablodaki gibidir. Bu tablodaki $\tilde{\beta}_{1i}$, hane halkı başına ortalama kullanılabilir gelirde meydana gelen bir birimlik değişime tüketim harcamasının vermiş olduğu tepkiyi gösterir ve19 il merkezinin her biri için belirgin bir farklılık arz etmemektedir. Fakat hane halkı başına ortalama kullanılabilir gelir düzeyi sıfır iken yapılan tüketim harcaması ölçen $\tilde{\beta}_{0i}$ katsayısı ise 19 il merkezinin her biri için farklılık göstermektedir.

2.1.2. Sabit Katsayılı Model ile Rassal Katsayılı Modelin Karşılaştırılması:

İki farklı regresyon modelini karşılaştırılırken uygulanan yöntemlerden biride hata kareler toplamlarını kıyaslamaktır. Hata kareler toplamı küçük olan model daha iyidir.

Tüketim harcamaları fonksiyonundaki katsayıların sabit kabul edildiği (2.1.1.) ifadesine en küçük kareler yöntemini uygulayarak hata teriminin elemanlarını tahmin ettik Tahmin ettiğimiz bu elemanların karelerini alarak hata kareler matrisini elde ettik. Hata kareler matrisi ee′'yi yukarıda göstermiştik. Bu matrisin bütün elemanlarının toplamı (hata kareler toplamı) $\sum ee' = 12,66877$ 'dir. Tüketim harcamaları fonksiyonundaki katsayıların rassal olduğu varsayımı altında oluşturduğumuz modelde hata terimi yoktur. Daha öncede belirttiğimiz gibi denklemin hata terimi, kesme teriminin hata teriminden ayırt edilemediği için modelde gösterilmemiştir. Fakat rassal katsayılı modelin daha genel bir şeklini gösteren (2.1.3.) ifadesinde ise hata terimi bulunmaktadır ve bu hata terimi ise $u_i = x_i' v_i$ 'dir. Tahmin ettiğimiz v_i katsayı vektörü yardımıyla da hata terimi u_i 'nin tahmin değerlerini bulabiliriz. Rassal katsayı modelinin hata teriminin tahmin ettiğimiz değerlerini tablo 2.2 'de göstermiştik. Bulduğumuz tahmin değerlerinin her birinin karesini alarak hata karelere ulaşırız. Hata karelerin bütün elemanlarının toplamı $\Sigma\tilde{u}_i\tilde{u}_i = 12.66877$'dir.. Rassal katsayılı regresyon modelinin hata kareler toplamı ile sabit katsayılı modelin hata kareler toplamı birbirine eşittir. Bu eşitliğin nedeni rassal katsayılı modelde değişen varyansın ortaya çıkmamasıdır.

2.2 Uygulama II

Hildreth-Houck rassal katsayılı model için ikinci bir çalışmayı tasarruf fonksiyonuna uygulayalım. Bildiğimiz üzere bireylerin tasarrufları dönemden döneme değişkenlik arz eder. Gelir düzeyinde meydana gelen değişmeler, hükümetin iktisat politikasında meydana gelen değişmeler ve benzeri değişmeler tasarrufların değişmesine neden olur. Burada bu değişimin katsayılar üzerindeki etkisini araştıracağız. Tasarruf fonksiyonu için kullanacağımız veriler hipotetik verilerdir. İşyar (1994), bu hipotetik verileri değişen varyans konusunu örnekle açıklamak için kullanmıştır. 20 dönemlik kişi başına tasarruf ve kişi başına geliri gösteren hipotetik veriler aşağıdaki tablo 2.4'da gösterilmiştir.

Tablo 2.4

Kişi Başına Tasarruf ve Gelir (milyon TL.)

Dönem	Tasarruf (Y_t)	Gelir (X_t)
1	0,180	5,700
2	0,223	5,985
3	0,191	6,284
4	0,261	6,786
5	0,396	7,261
6	0,415	7,624
7	0,344	8,005
8	0,361	8,405
9	0,537	8,993
10	0,746	9,712
11	0,693	10,197
12	0,720	10,808
13	0,655	11,132
14	0,799	11,577
15	0,958	11,808
16	1,072	11,453
17	0,921	12,254
18	0,663	12,367
19	0,888	13,734
20	1,625	13,324

Tasarruf fonksiyonunu klasik regresyon modeli ile aşağıdaki gibi gösterelim.

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{1t} + u_t , t = 1,2,\ldots,20 \qquad (2.1.5)$$

Katsayıların dönemden döneme değiştiği varsayımı altında (2.1.5) ifadesini rassal katsayılı model şeklinde aşağıdaki gibi yazabiliriz.

$$y_t = (\beta_0 + V_{0t}) + (\beta_1 + V_{1t})x_t \qquad (2.1.6)$$

(2.1.6) ifadesindeki V_{0t} ve V_{1t}, t-inci dönemdeki katsayıyı belirleyen stokastik değişkenlerdir. β_0 ve β_1 ise bütün dönemler için ortak kabul edilen katsayılardır. Rassal katsayılı regresyon modeli olan (2.1.6)'nın daha genel bir şekli aşağıdaki gibidir.

$$y_t = x_t'\overline{\beta} + u_t \qquad , t = 1,2,\ldots,31 \qquad (2.1.7)$$

Bu ifadede ki y_t, (20×1) boyutlu bağımlı değişken vektörüdür. x_t, (20×2) boyutlu açıklayıcı değişkenler matrisidir. Hata terimi de $u_t = x_t' v_t$'dir. $x'_t = [1 \quad X_{1t}]$ ve $v_t = \begin{bmatrix} V_{0t} \\ V_{1t} \end{bmatrix}$. Bu modelin hata terimi değişen varyanslı olduğundan modelin katsayılarını (parametrelerini) tahmin etmek için genelleştirilmiş en küçük kareler (G.E.K.K.) yöntemi kullanılır. G.E.K.K. tahminin gerçekleştirilebilmesi için u_t'nin varyans matrisinin elemanlarının bulunması gerekmektedir. Önceden de ifade ettiğimiz gibi $E(u_t u_t') = x_t' A x_t = \sigma_t^2$'dir. Burada $A = E[v_t v_t'] = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix}$ 'dir. A matrisinin elemanları bilinmediğinden öncelikle bu matrisinin elemanları tahmin edilir. A matrisinin elemanlarını tahmin etmek için adım adım aşağıdaki hesaplamaları yapmamız gerekir.

Adım I= (2.1.7) ifadesindeki değişen varyans durumunu ihlal ederek modele en küçük kareler (E.K.K.) yöntemini uygulamamız sonucu bulduğumuz E.K.K. tahminleri şöyledir.

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,566 \\ 0,120 \end{bmatrix}$$

Adım II= Yukarıdaki en küçük kareler tahmin değerlerini , kişisel tasarruf ve kişisel gelire ait verileri (2.1.7) ifadesinde yerine yazarak kalıntıları $(e_t = y_t - x'_t \hat{\bar{\beta}})$ elde ettik. Daha sonra kalıntı kareleri hesapladık.

Adım III= $M = I - X(X'X)^{-1}X'$ matrisi ile X matrisinin her bir elemanının karesini gösteren $\dot{X}$ matrisini çarparak $M\dot{X}$ matrisini bulduk.

(20×1) boyutlu kalıntı kareler matrisi ile (20×2) boyutlu $M\dot{X}$ matrisi aşağıdaki gibidir.

$$ee' = \begin{bmatrix} 0{,}001537 \\ 0{,}002196 \\ 0{,}000494 \\ 0{,}000209 \\ 0{,}003799 \\ 0{,}001269 \\ 0{,}006826 \\ 0{,}013276 \\ 0{,}000147 \\ 0{,}011602 \\ 0{,}000029 \\ 0{,}002937 \\ 0{,}025398 \\ 0{,}004977 \\ 0{,}003577 \\ 0{,}047449 \\ 0{,}001056 \\ 0{,}092725 \\ 0{,}062009 \\ 0{,}290331 \end{bmatrix} \qquad M\dot{X} = \begin{bmatrix} 0{,}000054 & 8{,}81524 \\ 0{,}000066 & 6{,}69320 \\ 0{,}000079 & 4{,}64153 \\ 0{,}000101 & 1{,}59901 \\ 0{,}000122 & -0{,}81578 \\ 0{,}000138 & -2{,}357 \\ 0{,}000155 & -3{,}69118 \\ 0{,}000173 & -4{,}77949 \\ 0{,}000199 & -5{,}79837 \\ 0{,}000231 & -6{,}10452 \\ 0{,}000252 & -5{,}72709 \\ 0{,}000279 & -4{,}5819 \\ 0{,}000293 & -3{,}67177 \\ 0{,}000313 & -2{,}07947 \\ 0{,}000323 & -1{,}09668 \\ 0{,}000308 & -2{,}56295 \\ 0{,}000343 & 1{,}102592 \\ 0{,}000348 & 1{,}723013 \\ 0{,}000408 & 11{,}25133 \\ 0{,}000390 & 8{,}00115 \end{bmatrix}$$

Daha önceden de belirttiğimiz gibi kalıntı karelerin beklenen değerini şu şekilde yazabiliriz.

$$E[ee'] = ME[uu']M = \dot{M}\dot{\sigma}^2 \qquad (2.1.8)$$

(2.1.8) ifadesindeki σ^2'nin her bir elemanı $\sigma_t^2 = \sum_{j=0}^{1} X_{jt}^2 \alpha_j$'dir. Böylece hata kareler toplamının beklenen değeri şöyle olur.

$$E(ee') = M\dot{X}\alpha$$

Adım IV= Yukarıdaki bu eşitlikten yararlanılarak bir regresyon ilişkisi kurulabilir. Kalıntı kareleri bağımlı değişken , $M\dot{X}$'de bağımsız değişken ve α'ları da tahmin edilecek katsayılar (parametreler) olduğunu düşünerek regresyon modeli oluşturduk. Bu regresyon modelinin bilinmeyen katsayısı α'nın en küçük kareler yöntemiyle tahmin ettiğimiz değerleri aşağıdaki gibidir. Aynı zamanda bu tahmin değerleri A matrisinin elemanlarıdır.

$$A = (M\dot{X}'M\dot{X})^{-1}\dot{M}\dot{X}'ee = \begin{bmatrix} \alpha_0 & 0 \\ 0 & \alpha_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 157{,}393 & 0 \\ 0 & 0{,}0052 \end{bmatrix}$$

A matrisinin elemanları tahmin edildikten sonra hata terimi u_t'nin varyans matrisinin elemanlarından her biri $\sigma_t^2 = \sum_{j=0}^{1} X_{jt}^2 \alpha_j$ formülü aracılığıyla tahmin edilir. u_t'nin varyansını gösteren (20×20) boyutlu diagonal matrisin köşegen üzerindeki elemanları aşağıdaki tablonun birinci sütununda verilmiştir. Köşegen dışındaki elemanlar sıfırdır. Tablonun ikinci ve üçüncü sütunu (20×20) boyutlu $\sqrt{\sigma_t^2}$ matrisi ile $P = \frac{1}{\sqrt{\sigma_t^2}}$ matrisinin köşegen üzerindeki elemanlarını göstermektedir. Köşegen dışındaki elemanlar sıfırdır.

Tablo 2.5

σ_t^2	$\sqrt{\sigma_t^2}$	$P=\frac{1}{\sqrt{\sigma_t^2}}$
157,5589	12,55225	0,079667
157,5763	12,55294	0,079663
157,5953	12,55370	0,079658
157,6295	12,55506	0,079649
157,6642	12,55644	0,079640
157,6923	12,55756	0,079633
157,7232	12,55879	0,079626
157,7573	12,56015	0,079617
157,8105	12,56227	0,079603
157,8805	12,56505	0,079586
157,9307	12,56705	0,079573
157,9974	12,56970	0,079556
158,0344	12,57117	0,079547
158,0869	12,57326	0,079534
158,115	12,57438	0,079527
158,0721	12,57267	0,079538
158,1708	12,57660	0,079513
158,1853	12,57717	0,079509
158,3708	12,58455	0,079463
158,3132	12,58226	0,079477

(20×20) boyutlu P matrisini (2.1.7) ifadesinin her iki tarafıyla çarparak aşağıdaki dönüştürülmüş modeli elde ederiz.

$$y_t^* = x_t^{\prime *}\bar{\beta} + u_t^*$$

Yukarıdaki dönüştürülmüş modeldeki $y_t^* = \frac{y_t}{\sigma_t}$ ve $x_t^* = \frac{x_t}{\sigma_t}$'dir. $x_t^* = [1/\sigma_t \quad X_{1t}/\sigma_t]$,(1×2) boyutlu bir vektördür. Dönüştürülmüş veriler ise şunlardır.

Tablo 2.6

$y^*_t = y_t / \sigma_t$	$1/\sigma_t$	$X^*_{1t} = X_{1t} / \sigma$
0,014340	0,079667	0,454102
0,017765	0,079663	0,476781
0,015215	0,079658	0,500570
0,020788	0,079649	0,540499
0,031538	0,079640	0,578269
0,033048	0,079633	0,607124
0,027391	0,079626	0,637402
0,028742	0,079617	0,669180
0,042747	0,079603	0,715874
0,059371	0,079586	0,772938
0,055144	0,079573	0,811408
0,057281	0,079556	0,859845
0,052103	0,079547	0,885518
0,063548	0,079534	0,920763
0,076187	0,079527	0,939052
0,085264	0,079538	0,910944
0,073231	0,079513	0,974349
0,052715	0,079509	0,983289
0,070563	0,079463	1,091338
0,129150	0,079477	1,058952

Yukarıdaki dönüştürülmüş modele en küçük kareler yöntemini uygulayarak $\overline{\beta}$ katsayı vektörünün genelleştirilmiş en küçük kareler (G.E.K.K.) tahminlerine ulaşırız. Bu tahmin değerleri aşağıdaki gibidir.

$$\tilde{\tilde{\beta}} = \begin{bmatrix} \tilde{\tilde{\beta}}_0 \\ \tilde{\tilde{\beta}}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0,566 \\ 0,123 \end{bmatrix}$$

Bu tahminler rassal katsayılı regresyon modeli olan (2.1.7) ifadesindeki katsayı vektörünün tahminidir. En küçük kareler tahmini ile genelleştirilmiş en küçük kareler tahmini arasında belirgin bir fark ortaya çıkmamıştır. Çünkü hata teriminin varyans matrisinin elemanları birbirine yakın değerler almışlardır.

2.2.1. Rassal Katsayıların Tahmini

Rassal katsayı vektörü $\beta_t = \begin{bmatrix} \beta_{0t} \\ \beta_{1t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\beta}_0 + V_{0t} \\ \bar{\beta}_1 + V_{1t} \end{bmatrix}$'nin tahmini için öncelikle stokastik değişkenler vektörü V_t' nin tahmin edilmesi gerekmektedir. $v_t = \begin{bmatrix} V_{0t} \\ V_{1t} \end{bmatrix}$ vektörünün her bir elemanı aşağıdaki formül ile tahmin edilir.

$$\tilde{V}_{jt} = \frac{X_{jt}\alpha_j}{\sum_{j=0}^{1} X_{jt}^2 \alpha_j} \tilde{u}_t \qquad j = 0,1 \; ; \; t = 1,2,\ldots,31 \qquad (2.1.9)$$

(2.1.8) ifadesindeki $\tilde{u}_t = y_t - x'_t \tilde{\tilde{\beta}}$ 'dır. Yukarıdaki formül aracılığıyla bulduğumuz $\tilde{V}_{0t}$ ve $\tilde{V}_{1t}$ tahminleri ile $\tilde{u}_t$ tahmin değerleri aşağıdaki tablodaki gibidir.

Tablo 2.7

$\tilde{u}_t$	$\tilde{V}_{0t}$	$\tilde{V}_{1t}$
0,039867	0,039824	7,49962E-06
0,047532	0,047476	9,38755E-06
-0,021540	-0,021510	-4,46598E-06
-0,013780	-0,013760	-3,08445E-06
0,062329	0,062221	1,49263E-05
0,036324	0,036254	9,1318E-06
-0,081910	-0,081740	-2,16181E-05
-0,114510	-0,114240	-3,17231E-05
-0,011410	-0,011380	-3,38077E-06
0,108447	0,108110	3,46891E-05
-0,004680	-0,004670	-1,57282E-06
-0,053440	-0,053230	-1,90083E-05
-0,158610	-0,157960	-5,80957E-05
-0,069780	-0,069470	-2,65726E-05
0,060579	0,060301	2,35244E-05
0,218593	0,217649	8,23559E-05
-0,031720	-0,031560	-1,27776E-05
-0,303730	-0,302200	-0,000123475
-0,248210	-0,246680	-0,000111928
0,539621	0,536474	0,000236157

$\widetilde{V}_{0t}$ ve $\widetilde{V}_{1t}$ tahmin değerleri bulunduktan sonra rassal katsayılar kolaylıkla elde edilir. Daha önceden de bildiğimiz gibi rassal katsayılar aşağıdaki formül aracılığıyla hesaplanır.

$$\widetilde{\beta}_{0t} = \overline{\overline{\beta}}_0 + \widetilde{V}_{0t} = -0{,}566 + \widetilde{V}_{0t} \quad \text{ve} \quad \widetilde{\beta}_{1t} = \overline{\overline{\beta}}_1 + \widetilde{V}_{1t} = 0{,}123 + \widetilde{V}_{1t}$$

Yukarıdaki formüller yardımıyla tahmin ettiğimiz rassal katsayılar aşağıdaki gibidir.

Tablo 2.8

$\widetilde{\beta}_{0t}$	$\widetilde{\beta}_{1t}$
-0,52618	0,123007
-0,51852	0,123009
-0,58751	0,122996
-0,57976	0,122997
-0,50378	0,123015
-0,52975	0,123009
-0,64774	0,122978
-0,68024	0,122968
-0,57738	0,122997
-0,45789	0,123035
-0,57067	0,122998
-0,61923	0,122981
-0,72396	0,122942
-0,63547	0,122973
-0,50570	0,123024
-0,34835	0,123082
-0,59756	0,122987
-0,86820	0,122877
-0,81268	0,122888
-0,02953	0,123236

2.2.2. Rassal Katsayılı Model İle Sabit Katsayılı Modelin Karşılaştırılması

Her iki modelin hata kareler toplamları karşılaştırılarak kıyaslama yapılabilir.

Rassal katsayılı modelin hata kareler toplamı $\Sigma\hat{u}_t\hat{u}_t = 0,0036$'dir. Sabit katsayılı regresyon modelinin hata kareler toplamı ise $\sum ee' = 0,572$'dir. Rassal katsayılı modelin hata kareler toplamı , sabit katsayılı modelin hata kareler toplamından daha küçüktür. Böylece rassal katsayılı regresyon modelin sabit katsayılı regresyon modeline tercih edilebileceği sonucuna ulaşırız. Fakat bu sonuç yalnızca burada kullandığımız örneklem için geçerlidir. Farklı örneklemler için farklı sonuçlar alınabilir.

BÖLÜM 3

SONUÇ VE DEĞERLENDİRME

Bu uygulama çalışması ile rassal katsayılı regresyon modellerinden Hildreth – Houck rassal katsayılı modelin yatay- kesit verilerine ve zaman serisi verilerine uygulanışı iki örnek ile gösterilmiştir.

Birinci uygulama çalışmasında kullanılan veriler gerçek verilerdir. 19 yatay – kesit birimin gözlem değerlerini göstermektedir. İkinci uygulama da kullanılan veriler hipotetik veri olup 20 döneme ait gözlem değerlerini göstermektedir. Bu veriler mevcut istatistik paket programlarından Microsoft EXCEL ve SPSS programları yardımıyla işlenmiştir.

Hildreth-Houck rassal katsayılı model için yapılan bu uygulama çalışmaları ana hatlarıyla şu şekilde özetlenebilir.

Katsayılardaki değişim yapısının modellere dahil edilmesiyle her iki çalışmadaki rassal katsayılı regresyon modelleri değişen varyanslı sabit katsayılı regresyon modellerine dönüşmüştür. Bildiğimiz gibi değişen varyanslı modellerin tahminlerinde genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi (G.E.K.K.) kullanılır.

Genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemini uygulayabilmek için hata terimlerinin varyans matrislerinin elemanlarının bilinmesi gerekmektedir. Varyans matrisleri elemanlarının tahminleri, katsayıları stokastik yapan değişkenlerin varyans matrisleri yardımıyla yapılır. Bu yüzden katsayıları stokastik yapan v_j değişkeninin varyans matrisleri elemanları hesaplanmıştır. Birinci uygulama çalışmasında bu matrisin köşegen üzerindeki elemanlarından biri pozitif ve diğeri ise negatif tahmin edilmiştir. Negatif değer yerine sıfır değeri alınmıştır. Bu matrisin elemanlarına bağlı olarak hata terimi u_i'nin diagonal varyans matrisinin elemanları elde edilmiştir. Köşegen üzerindeki elemanlar birbirine eşit olduğundan birinci uygulamada değişen varyans ortaya çıkmamıştır. İkinci uygulama çalışmasında katsayıları stokastik yapan değişkenin varyans matrisinin elemanlarından her ikisi pozitif bulunmuştur. Bu matrisin elemanlarına bağlı olarak modelin hata teriminin varyans matrisinin elemanları hesaplanmıştır. Hesaplanan bu varyans matrisinin elemanları birbirinden farklı olduğundan ikinci çalışmada değişen varyans durumu göz önüne alınmıştır. Hata terimi u_i'nin tahmin edilen varyans matrislerinin elemanlarını kıyasladığımızda değişen varyans durumunun ikinci uygulama çalışmasında ortaya çıkmasının nedeni kullanılan verilerin hipotetik veriler olmasıdır. Bu hipotetik veriler değişen varyans konusunun örneğinden alınmıştır.

Birinci uygulama çalışmasında değişen varyans durumu ortaya çıkmadığından modelin tahmini en küçük kareler (E.K.K.) yöntemi ile yapılmıştır. İkinci çalışmada ise değişen varyans durumu sebebiyle modelin tahmini genelleştirilmiş en küçük kareler (G.E.K.K.) yöntemi ile yapılmıştır.

Rassal katsayılı modellerdeki sabit katsayıların tahminleri yapıldıktan sonra katsayıları stokastik yapan değişkenlerin tahminleri yapılmıştır. Daha sonra sabit katsayı tahminlerine stokastik değişken v_i'nin tahmini eklenerek rassal katsayılar bulunmuştur. Birinci uygulama çalışmasında katsayıların gözlemden gözleme değişimi eğim katsayısına göre daha fazladır. Buna bağlı olarak şu sonuca varabiliriz: Kişi başına kullanılabilir gelir düzeyi sıfır iken kişi başına tüketim harcaması 19 il merkezinin her biri için farklıdır. Fakat kişi başına kullanılabilir gelir düzeyinde bir birimlik değişime, kişi başına tüketim harcamasının vereceği tepki her il merkezi için pek bir farklılık arz etmemektedir. Tasarruf fonksiyonunda da kesme terimindeki değişim eğim katsayısına nazaran fazladır. Her iki uygulamada da eğim katsayılarındaki değişimin az olmasının nedeni, bu katsayıyı stokastik yapan değişkenin tahmin değerlerinin çok düşük değerde olmasıdır.

Farklı özellikte iki modeli karşılaştırmanın yöntemlerinde biri de modellerin hata kareler toplamlarını karşılaştırmaktır. Sabit katsayılı regresyon modeli ile rassal katsayılı regresyon modelinin kıyası iki çalışmada da yapılmıştır. Birinci uygulama çalışmasında değişen varyans durumu ortaya çıkmadığından her iki modelin hata kareler toplamı eşittir. İkinci uygulama çalışmasında ise rassal katsayılı modelin hata kareler toplamı sabit katsayılı modelin hata kareler toplamından daha küçük tahmin edilmiştir. Bu durumda ikinci uygulama çalışması için rassal katsayı modelin daha uygun olduğu sonucuna varabiliriz. Burada belirtilmesi gereken husus elde edilen sonucun yalnızca bu örneklem için geçerli olduğudur.

Değişen ve rassal katsayılı modeller, katsayıların gözlemler boyunca ve örneklemin alt gruplarında değiştiği varsayımına bağlı olarak kurulmaktadır. Yatay-kesit çalışmalarında farklı yatay-kesit birimleri için katsayılarda ortaya çıkan farklılıkları (heterojenlik) belirtirler. Zaman serileri çalışmalarında ise katsayıların zaman boyunca mümkün olabilecek değişimini gösterirler. Oysa ki klasik regresyon modellerinde ise bu katsayıların gözlemler boyunca sabit olduğu varsayılmıştır. Yani bağımlı değişkenin açıklayıcı değişkenlere vereceği tepki bütün gözlemler için aynıdır.

Değişen ve rassal katsayılı modeller, katsayılardaki değişim yapısına bağlı olarak sınıflandırılır. Modellerin tahminlerinde kullanılan yöntemler de birbirinden farklıdır. Örneğin, uygulama çalışması yaptığımız Hildreth-Houck rassal katsayılı modelin tahmini genelleştirilmiş en küçük kareler yöntemi ile yapılmıştır. Bu yöntemin kullanılmasının nedeni, katsayılardaki değişim yapısının modeli, değişen varyanslı bir model yapısına dönüştürmesidir.

Değişen ve rassal katsayılı modeller katsayılardaki değişim yapısına bağlı olarak oluşturulur. Modeldeki katsayıların tümü değişebilir veya bazıları değişebilir. Bazı modellerde ise sadece kesme terimi değişebilir. Bu çalışmamızda tanıttığımız modellerin dışında katsayıların değişimini açıklayan birçok model vardır. Katsayıların gözlemler boyunca veya örneklemin alt gruplarında değişimlerinin sebepleri şöyle açıklanmıştır.

-Ekonometrik modelin yapısının bu modeller için uygun olması,

-İktisadi teorinin değişen ve rassal katsayılı model için pek çok argüman içermesi,

-Ekonometrik modellerde kukla değişkenler kullanılması

-Modellerin tahminlerinde toplulaştırılmış verilerinden yararlanılması,

-Modelin fonksiyonel biçiminin hatalı olarak belirlenmesi,

-Örneklemin alt gruplarında katsayılarda farklılık olması.

Yukarıda sıralanan sebepler detaylı olarak çalışmanın birinci bölümünde açıklanmıştır.

Klasik sabit katsayılı modeller ile değişen katsayılı modeller arasındaki seçim oldukça büyük önem taşımaktadır. Ekonometriciler, böylesi bir kararın; doğruluğun beraberinde getirdiği karmaşıklıkla doğru olmamanın beraberinde getirdiği sadelik arasındaki bir uzlaşma olarak kabul ederler.

Klasik modeller ekonometrinin temel araçlarındandır. En önemli faydaları ise dış dünyadaki değişiklikleri tanımlayan detayları ihlal ederek iktisadi ilişkileri modellemeleridir. Aksine değişen ve rassal katsayılı modeller ise bu detayları göz önüne alarak iktisadi ilişkileri modellendirirler. Yani bu tür modeller modellenmiş iktisadi süreçlerin daha ayrıntılı görüntülerinin ifadeleridir.

KAYNAKÇA

Akkaya, Ş. ve M.V. Pazarlıoğlu (1998) **Ekonometri (I)**, 4.b., Anadolu Matbaacılık, İzmir.

Belsley, A. D. " On the Determination of Systematic Parameter Variation ın the Linear Regression Model", *Annals of Economic and Social Measurement*, 2, 487– 494.

Cooley , T. F. and E. C. Prescott (1976) " Estimation ın the Presence of Stochastic Parameter Variation", *Econometrica*, 44, 167 - 184

Cooley, T.F. and E.C. Prescott (1973) "Varying Parameter Regression: A Theory and Some Applicatıons", *Annals of Economic and Social Measurement* ,2 , 463 – 473.

D.İ.E. Hane Halkı Tüketim Harcamaları Anketi (1994), Ankara.

Goldfeld , S. M. and R.E. Quandt (1973a) " A Markov Model for Switching Regressıons", *Journal of Econometrics* , 1, 3 – 16.

Goldfeld, S. M. and R. E. Quandt (1972) **Nonlinear Methods ın Econometrics** , North – Holland , Amsterdam. London.

Goldfeld, S. M. and R E. Quandt (1973) "The Estimation of Structural Shifts by Switching Regressions" , *Annals of Economic and Social Measurement*, 2, 475 – 477

Griffiths, W. E. (1972) " Estimation of Actual Response Coefficients ın the Hildreth-Houck Random Coefficient Model", *Journal of the American Statistical Association*, 67 , 633 – 635

Gujarati, D.N. (1999) **Temel Ekonometri** (Çev: Şenesen Ümit ve Gülay Günlük Şenesen) , Literatür Yayıncılık, İstanbul.

Hackl , P. (1989) **Statistical Analysis and Forecasting of Economic Structural Change** , International Institute for Applied Systems Analysis Series, Springer , Chapter 14, 217-251

İşyar , Y. (1994) **Ekonometrik Modeller** , Uludağ Üniversitesi Basımevi, Bursa.

Johnston , J. (1984) **Econometrics Methods** , 3 rd. ed. ,McGraw – Hill Book Co. Singapore.

Judge, G.G., R.C. Hill, W.E. Griffiths, H. Lütkepohl and T.C. Lee (1988)

Introduction to the Theory and Practice of Econometrics ,Wiley , New York.

Judge, G.G., R.C. Hill, W.E. Griffiths , H. Lütkepohl and T.C. Lee (1985) **The Theory and Practice of Econometrics** , John Wiley and Sons.

Koutsoyiannis, A. (1989) **Ekonometri Kuramı** , Verso Yayıncılık, Ankara.

Maddala, G.S. (1977) **Econometrics** , McGraw – Hill , United States of America.

Newbold ,P. and T. Bos (1985) **Stochastik Parameter Regression Models** , Sage Publications, Newbury Park

Pindyck, R.S. and D.L. Rubinfeld (1991) **Econometric Models and Economic Forecasts** ,3 rd. ed., McGraw- Hill

Poirier, D. J.(1976) **The Econometrics of Structural Change** , North – Holland Publishing Company , Amsterdam.

Ramanathan,R. (1995) **Introductory Econometrics With Applications** , 3 rd.ed. , Harcourt Brace

Sarris , A.H.(1973) "A Bayesian Approach to Estimation of Time-Varying Regression Coefficients" , *Annals of Economic and Social Measurement* , 2, 501-523

Stewart , J. (1991) **Econometrics** ,Philip Allan , Cambridge.

Swamy ,P.A.V.B.(1973) " Criteria, Constraints and Multicollinearity in Random Coefficient Regression Models", *Annals of Economic and Social Measurement* ,2 , 429 – 450.