

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFÜZYON VE DİFÜZYON DALGA
DENKLEMLERİNİN LUCAS POLİNOMLARI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Merve KAYA

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Temmuz 2019

Tezin Başlığı : KESİRLİ MERTEBEDEN DİFÜZYON VE DİFÜZYON
DALGA DENKLEMLERİNİN LUCAS POLİNOMLARI İLE
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan : Merve KAYA

Sınav Tarihi : 05.07.2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Alaattin ESEN _____

İnönü Üniversitesi

Doç.Dr. Yusuf UÇAR _____

İnönü Üniversitesi

Doç.Dr. H. Mehmet BAŐKONUŐ _____

Harran Üniversitesi

Prof.Dr. Halil İbrahim ADİGÜZEL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Kesirli Mertebeden Difüzyon ve Difüzyon Dalga Denklemlerinin Lucas Polinomları ile Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Merve KAYA

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

KESİRLİ MERTEBEDEN DİFÜZYON VE DİFÜZYON DALGA DENKLEMLERİNİN LUCAS POLİNOMLARI İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Merve KAYA

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

42+v sayfa

2019

Danışman : Prof.Dr. Alaattin ESEN

Beş bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünü oluşturan Giriş bölümünde kesirli mertebeden türev ve integraller hakkında kısa bilgiler verildi.

İkinci bölümde, bu çalışmada kullanılan bazı özel fonksiyonlar tanıtıldıktan sonra kesirli mertebeden türev ve integral hesaplamalarında öne çıkan Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo kesirli mertebeye yaklaşımları verildi.

Üçüncü bölümde, bu tezde yöntem olarak seçilen Lucas polinom yöntemi hakkında temel kavramlar verildikten sonra yöntem tamsayı mertebeden ısı ve dalga denklemlerine uygulandı ve elde edilen nümerik sonuçlar ile L_2 ve L_∞ hata normları tablolar halinde verildi.

Bu tezin esasını oluşturan dördüncü bölümde ise kesirli mertebeden Difüzyon ve Difüzyon Dalga denklemleri seçilen uygun başlangıç ve sınır şartları ile birlikte göz önüne alınarak Lucas polinom yöntemiyle nümerik olarak çözüldü. Bu yöntemin model problemlere uygulanması ile elde edilen nümerik sonuçlar mevcut tam çözümler ve literatürdeki diğer çalışmalardaki sonuçlarla karşılaştırılması tablolar halinde sunuldu. Ayrıca, problemlerin fiziksel davranışını sergilemek için sonuçlar grafiksel olarak verildi.

Tezin beşinci bölümü, Tartışma ve Sonuç bölümü olarak düzenlendi. Bu bölümde, elde edilen sonuçlar yorumlandı ve Lucas polinom yönteminin avantaj ve dezavantajlarından bahsedildi.

ANAHTAR KELİMELELER: Caputo türev, Kesirli mertebeden Difüzyon denklemi, Kesirli mertebeden Difüzyon dalga denklemi

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

THE NUMERICAL SOLUTIONS OF THE FRACTIONAL ORDER DIFFUSION AND DIFFUSION WAVE EQUATIONS BY LUCAS POLYNOMIALS

Merve KAYA

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

42+v pages

2019

Supervisor : Prof.Dr. Alaattin ESEN

In the first chapter constituting the introduction chapter of this thesis consisting of five chapters some brief information is given about the fractional order derivatives and integrals.

In the second chapter, after presenting some special functions used in the thesis, Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo approximations used in the calculations of fractional order derivative and integral are given.

In the third chapter, after giving some fundamental concepts about Lucas polynomial method which is chosen as the method in the thesis, the method is applied to integer-order heat and wave equations and the obtained numerical results together with the error norms L_2 and L_∞ of are given in tables.

In the fourth chapter which forms the basis of this thesis, fractional order diffusion and diffusion wave equations are solved numerically by Lucas polynomial method considering the appropriate initial and boundary conditions. The numerical results obtained with the application of this method to model problems and the comparison of the results with other available studies in the literature are presented in tables. In addition, the results were presented graphically to demonstrate the physical behavior of the problem.

The fifth chapter of the thesis is organized as discussion and conclusion chapter. In this chapter, the obtained results are discussed and both the advantages and disadvantages of the Lucas polynomial method are evaluated.

KEYWORDS: Caputo derivative, Fractional order Diffusion equation,
Fractional order Diffusion wave equation

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans eğitimim süresince değerli ve derin bilgi birikimleriyle bana yol gösteren, titiz çalışma prensibiyle örnek olan, çalışmamın her aşamasında ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, büyük desteğini gördüğüm çok kıymetli hocam Prof. Dr. Alaattin ESEN'e, tüm içtenlikleriyle bana destek olan ve yardım eden değerli hocalarım Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a, Doç. Dr. Yusuf UÇAR'a, Doç. Dr. N. Murat YAĞMURLU'ya, Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e ve bölüm başkanımız Prof. Dr. Sadık KELEŐ'e teşekkürü bir borç bilirim.

Bugüne kadar fikirleri ve hayata bakış açısıyla her zaman örnek aldığım, benim tek idolüm, en büyük yol göstericim, dayanağım anneme, her koşulda desteğini gördüğüm, beni her zaman değerli hissettiren, güç aldığım babama ve varlıklarına şükrettiğim kıymetli kardeşlerime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	v
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
TABLolar DİZİNİ	vii
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Özel Fonksiyonlar	3
2.1.1. Gamma Fonksiyonu	3
2.1.2. Beta Fonksiyonu	3
2.1.3. Mittag-Leffler Fonksiyonu	4
2.2. Kesirli Mertebeden Türev ve İntegral Yaklaşımları	5
2.2.1. Grünwald-Letnikov Türevi	5
2.2.2. Riemann-Liouville Türevi	6
2.2.3. Caputo Kesirli Türevi	7
2.3. Kesirli Türevler için L1 ve L2 Formülleri.....	10
3. LUCAS POLİNOM YÖNTEMİ.....	11
3.1. Fibonacci ve Lucas Polinomları	11
3.1.1. Fibonacci-Lucas Polinomları ve Temel İlişkileri.....	11
3.1.2. Fonksiyonlara Fibonacci Polinomlarıyla Yaklaşım	12
3.1.3. Fonksiyonlara Lucas Polinomlarıyla Yaklaşım	14
3.2. Yöntemin Uygulamaları	15
3.2.1. Isı İletim Denklemi	15
3.2.2. Dalga Denklemi	18
3.2.3. Nümerik Çözümler	21
4. LUCAS POLİNOMLARI İLE KESİRLİ MERTEBEDEN DİFÜZYON VE DİFÜZYON DALGA DENKLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ	25
4.1. Kesirli Mertebeden Difüzyon Denklemi.....	26
4.2. Kesirli Mertebeden Difüzyon Dalga Denklemi	26
4.3. Lucas Polinom Yöntemi	27
4.3.1. Nümerik Çözümler	28
5. TARTIŞMA VE SONUÇ	39

KAYNAKLAR.....	40
ÖZGEÇMİŞ.....	42



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Gamma fonksiyon grafiği.....	4
Şekil 3.1	Lucas polinomları yardımıyla bir boyutlu ısı iletim denkleminin $\Delta t = 0.01$ ve $N = 20$ değerleri için elde edilen nümerik ve tam çözümü.....	23
Şekil 3.2	Lucas polinomları yardımıyla bir boyutlu dalga denkleminin $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 10$ ve farklı t zamanlarında elde edilen nümerik ve tam çözümü	24
Şekil 4.1	$\Delta t = 0.00007$, $t = 0.35$, $N = 16$ ve $\gamma = 0.5$ için elde edilen nümerik çözümler	29
Şekil 4.2	$N = 14$, $\Delta t = 0.0015$ değerlerinde $U(\pi/2, t)$ değerlerinin farklı γ değerleri için çözüm profili	37
Şekil 4.3	$N = 14$, $\Delta t = 0.0015$, $\gamma = 1.5$ değerleri ve farklı t bitiş zamanları için çözüm profili	38

TABLolar DİZİNİ

Tablo 3.1	Lucas polinomları yardımıyla bir boyutlu ısı iletim denkleminin $N = 20$ ve farklı Δt değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümü	21
Tablo 3.2	Lucas polinomları yardımıyla bir boyutlu ısı iletim denkleminin $\Delta t = 0.01$ ve farklı N değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümü	22
Tablo 3.3	Lucas polinomları yardımıyla dalga denkleminin $N = 10$ ve farklı Δt değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümü .	23
Tablo 3.4	Lucas polinomları yardımıyla dalga denkleminin $\Delta t = 0.01$ ve farklı N değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümü . .	23
Tablo 4.1	$\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.0015$, $t = 3.75$ ve farklı N değerleri için problemin L_2 ve L_∞ hata normları	29
Tablo 4.2	Problem 1 için elde edilen çözümlerin Ref. [23] ile verilen çözümler ile karşılaştırılması	30
Tablo 4.3	$N = 14$, $\Delta t = 0.00007$, $t = 0.35$ ve farklı γ değerleri için problemin nümerik çözümlerinin tam çözümler ile karşılaştırılması	31
Tablo 4.4	$\gamma = 0.5$, $N = 14$, $t = 0.35$ ve farklı Δt değerleri için problemin nümerik çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması	32
Tablo 4.5	$\gamma = 1.5$, $\Delta t = 0.0015$, $t = 3.75$ ve farklı N değerleri için problemin L_2 ve L_∞ hata normları	33
Tablo 4.6	Problem 2 için elde edilen çözümlerin Ref. [23] verilen çözümler ile karşılaştırılması	33
Tablo 4.7	$\Delta t = 0,0015$, $t = 3.75$, $N = 14$ ve farklı γ değerleri için problemin nümerik çözümlerinin tam çözümler ile karşılaştırılması	35
Tablo 4.8	$\gamma = 1.5$, $N = 14$, $t = 3.75$ ve farklı Δt değerleri için problemin nümerik çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması	36

1. GİRİŞ

Kesirli diferansiyel denklemler son yıllarda araştırmacıların artan bir şekilde ilgisini çekmektedir. Kesirli yaklaşım güçlü bir modelleme metodu haline gelerek malzeme ve mekanik, dalga yayılımı ve difüzyon, türbülans vb. alanlarda geniş uygulama alanlarına sahip olmuştur. Birçok araştırmacı, doğada anormal bir yayılma olduğunu bu stokastik sürecin Brown hareketi ile verilemediğini belirtmişlerdir[1]. Dinamikte uzun mesafeli korelasyonların ya da anormal derecede büyük partikül sıçramalarının var oluşu nedeniyle Gauss tipi olmayan difüzyon modelleri Caputo veya Riemann Liouville türevleri tarafından türetilebilir. Bu tür anormal difüzyon olaylarının tanımlamanın en basit yolu kesirli modellerdir. Kesirli modeller ile ortaya çıkan kesirli mertebeden kısmi diferansiyel denklemlerin çoğu analitik olarak çözülemediğinden birçok araştırmacı bu denklemlerin çözümleri için etkili ve güvenilir nümerik yöntemler arayışına girmiştir.

Kesirli mertebeden diferansiyel denklem kavramı aslında keyfi mertebeden diferansiyel denklemi ifade etmektedir. Bu kavramın ortaya çıkışı farklı kaynaklarda da ifade edildiği üzere ilk olarak 1695 senesinde G.W. Leibniz'in L'Hospital'a gönderdiği mektupla olmuştur. G.W. Leibniz mektubunda L'Hospital'a "Mertebesi tamsayı olan bir türev ifadesi herhangi bir mertebeden türeve genellenebilir mi?" sorusunu yöneltmiştir. Kesirli mertebeden türev kavramı Lacroix, Liouville, Riemann, Weyl, Lagrange, Laplace, Fourier, Euler ve Abel gibi birçok matematikçi tarafından da çalışılarak geliştirilmiştir. 1730 da Euler kesirli mertebeden türev hesaplanırken kullanılan Gamma fonksiyonunu tanımlamıştır. 1819' da Lacroix tamsayı mertebeden türevi Gamma fonksiyonunu kullanarak kesirli mertebeden türev olarak ifade etmiştir. Abel, integral denkleminin çözümünde kesirli hesapları kullanmıştır. 1832-1837 yıllarında Liouville kesirli integral ve diferansiyel üzerine çalışmıştır. Riemann ise 1847 yılında kesirli integral

tanımını yapmıştır. Bu tanım Liouville tanımıyla birleştirilerek Riemann-Liouville tanımı elde edilmiştir. Benzer şekilde 1967-1968' de Grünwald-Letnikov ve Caputo kesirli türevin birer versiyonunu tanımlamıştır[2-4, 6-12].



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Özel Fonksiyonlar

Bu kısımda kesirli mertebeden türev ve integral yaklaşımlarında sıkça kullanılan bazı özel fonksiyonların tanımları verildi.

2.1.1 Gamma Fonksiyonu

Kesirli analizin Euler tarafından tanımlanan önemli bir fonksiyonudur ve faktöriyel fonksiyonunu tam olmayan sayılara ve hatta kompleks sayılara geneller. Gamma fonksiyonu $\Gamma(z)$ biçiminde gösterilir ve $\text{Re}(z) > 0$ olmak üzere,

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} e^{-t} t^{z-1} dt$$

genelleştirilmiş integrali yardımı ile tanımlanır[4].

Gamma fonksiyonun önemli özelliklerinden birisi, $\forall z \neq 0, -1, -2, \dots$ kompleks sayıları için

$$\Gamma(z + 1) = z\Gamma(z) = z!$$

yazılabilmektedir[14].

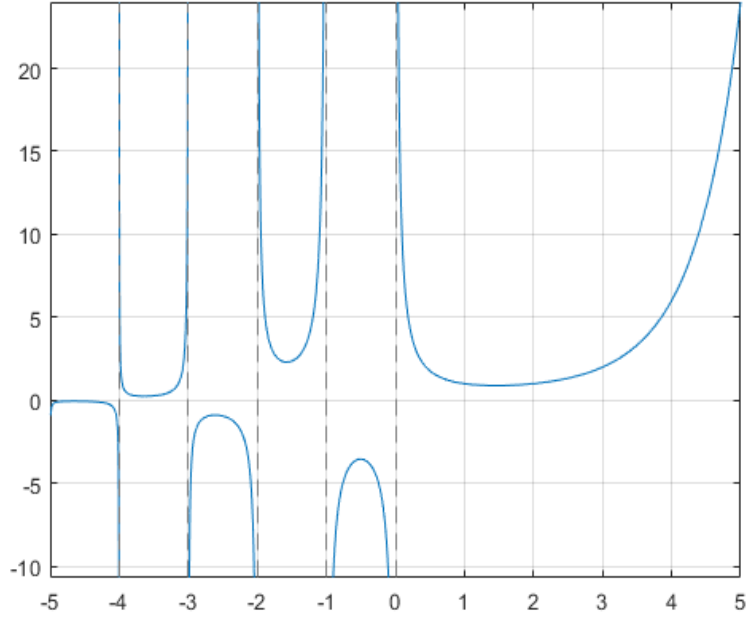
2.1.2 Beta Fonksiyonu

Beta fonksiyonu, $\text{Re}(w) > 0, \text{Re}(z) > 0$ olmak üzere

$$B(w, z) = \int_0^1 \tau^{w-1} (1 - \tau)^{z-1} d\tau,$$

şeklinde tanımlanır[4]. Beta fonksiyonu ile Gamma fonksiyonu arasında

$$B(w, z) = \frac{\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(w+z)} = B(z, w)$$



Şekil 2.1. Gamma fonksiyon grafiği

şeklinde bir bağıntı vardır[14, 15]. Beta fonksiyonunun bir başka önemli özelliği de $0 < \text{Re}(z) < 1$ için

$$B(z, z - 1) = \Gamma(z)\Gamma(1 - z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

yazılabilmektedir[4].

2.1.3 Mittag-Leffler Fonksiyonu

e^x üstel fonksiyonu tamsayı mertebeden diferansiyel denklemler teorisinde oldukça önemli rol oynar. Üstel fonksiyonun bir parametre genişletilmiş şekli;

$$E_\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}$$

formülü ile Mittag-Leffler tarafından verilmiştir[5]. Özel olarak $\alpha = 1$ için,

$$E_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k + 1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

dir. Mittag-Leffler fonksiyonunun iki parametrelili fonksiyona genelleştirmesi ise,

$$E_{\alpha,\beta}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}$$

seri açılımı ile verilir. Bu açımdan,

$$E_{0,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} x^k$$

$$E_{\frac{1}{2},1}(x) = e^{x^2} \operatorname{erfc}(x)$$

$$E_{1,1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+1)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x$$

$$E_{1,2}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+2)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+1)!} = \frac{1}{x} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{(k+1)!} = \frac{e^x - 1}{x}$$

$$E_{1,3}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{\Gamma(k+3)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{(k+2)!} = \frac{1}{x^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+2}}{(k+2)!} = \frac{e^x - 1 - x}{x^2}$$

ve en genel haliyle

$$E_{1,m}(x) = \frac{1}{x^{m-1}} \left\{ e^x - \sum_{k=0}^{m-2} \frac{x^k}{k!} \right\}$$

elde edilir[4, 6].

2.2 Kesirli Mertebeden Türev ve İntegral Yaklaşımları

Bu kısımda kesirli türev ve integral hesaplamaları için sıkça kullanılan yaklaşımlar ve bunlar arasındaki ilişkiler verildi. Bu yaklaşımlar Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo kesirli mertebeden türev ve integral yaklaşımlarıdır.

2.2.1 Grünwald-Letnikov Türevi

$p > 0$ olmak üzere $f(t)$ sürekli fonksiyonunun p -inci mertebeden kesirli türev tanımı m , $m > p - 1$ sağlanacak şekilde bir tam sayı olmak üzere

$${}_a D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-p}}{\Gamma(k-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(m-p+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

olarak ifade edilir[4]. Burada, en küçük m değeri için $m \leq p < m + 1$ ifadesi geçerlidir ve $[a, t]$ aralığında $f^{(k)}(t)$, ($k = 1(1)(m + 1)$) türevleri süreklidir.

$p > 0$ ve $[a, t]$ kapalı aralığında $f(t)$ fonksiyonu sürekli olmak üzere p mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli integrali,

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanır[4].

Basit bir örnek olarak, $f(t) = t$ fonksiyonunun $\frac{1}{2}$. mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli türevini hesaplayalım. $m \leq \frac{1}{2} < m + 1$ olduğundan $m = 0$ olarak alınır. Grünwald-Letnikov kesirli türev formülünden,

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{\frac{1}{2}} f(t) &= \sum_{k=0}^0 \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{k-\frac{1}{2}}}{\Gamma(k+\frac{1}{2})} + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \\ &= \frac{f(a)}{\Gamma(\frac{1}{2})(t-a)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^t \frac{f'(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \\ &= \frac{a}{\Gamma(\frac{1}{2})(t-a)^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_a^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \\ &= \frac{2t-a}{\sqrt{\pi}(t-a)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

bulunur. Özel olarak $a = 0$ seçilirse

$${}_0 D_t^{\frac{1}{2}} t = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

bulunur.

2.2.2 Riemann-Liouville Türevi

$p > 0$ olmak üzere $(a, t)'$ de sürekli ve integrallenebilir bir $f(t)$ fonksiyonunun p -inci mertebeden Riemann-Liouville kesirli integrali,

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t - \tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

olarak ifade edilir. $p > 0$ ve k bir tam sayı olmak üzere $k - 1 \leq p < k$ olacak şekilde p mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi,

$${}_a D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau \quad (2.1)$$

olarak tanımlanır[4].

$f(t)$, $m + 1$ defa türevlenebilen bir fonksiyon ve ${}^{RL}D_t^p f(t)$ Riemann-Liouville tanımını, ${}^{GL}D_t^p f(t)$ Grünwald-Letnikov tanımını göstermek üzere (2.1) ifadesinin ard arda kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\begin{aligned} {}^{RL}D_t^p f(t) &= \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a)(t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{m-p} f^{(m+1)}(\tau) d\tau \\ &= {}^{GL}D_t^p f(t) \end{aligned}$$

biçimindeki Riemann-Liouville ve Grünwald-Letnikov tanımları arasındaki ilişki elde edilir[4, 19].

Basit bir örnek olarak yine $f(t) = t$ fonksiyonu gözönüne alınırsa, bu fonksiyonun $\frac{1}{2}$. mertebeden Riemann-Liouville kesirli türevi, $k - 1 \leq \frac{1}{2} < k$ olduğundan $k = 1$ olarak alınarak

$$\begin{aligned} {}_a D_t^{\frac{1}{2}} f(t) &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \frac{d}{dt} \int_a^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} d\tau \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{2t-a}{(t-a)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

bulunur. Özel olarak $a = 0$ seçilirse

$${}_0 D_t^{\frac{1}{2}} t = 2\sqrt{\frac{t}{\pi}}$$

elde edilir.

2.2.3 Caputo Kesirli Türevi

Riemann-Liouville tanımları, kesirli diferansiyel hesap çalışmalarında büyük bir öneme sahiptir. Teknolojinin gelişimi ile birlikte teorik matematiğin uygulama

ve ele alınmış şekli de etkilenmiştir. Karşılaşılan uygulama problemleri fiziksel durumlara en uygun başlangıç koşullarını veren kesirli diferansiyel denklemler gerektirmektedir. Ne yazık ki, Riemann-Liouville yaklaşımı, $t = a$ alt sınır noktasında kesirli türevin limit değerlerini içeren başlangıç koşullarını içerir. Örneğin b_k , $(k = 1(1)n)$ için verilen sabitler olmak üzere

$$\lim_{t \rightarrow a} ({}_a D_t^{\alpha-1} f(t)) = b_1,$$

$$\lim_{t \rightarrow a} ({}_a D_t^{\alpha-2} f(t)) = b_2,$$

⋮

$$\lim_{t \rightarrow a} ({}_a D_t^{\alpha-n} f(t)) = b_n,$$

dir. Verilen başlangıç koşulları ile problemlerin matematiksel olarak başarılı bir şekilde çözülmesi mümkün iken bu şekilde ele alınan başlangıç koşullarına fiziksel bir yorum yapılamadığından bunların sonuçları kullanışlı değildir. Kesirli diferansiyel hesaplamalarında, başlangıç koşullarını fiziksel durumlara en uygun şekilde veren Caputo olmuştur. Caputo, $y'(a), y''(a), \dots$ vb. tamsayı mertebeden türevlerin $t = a$ daki limit değerlerini içeren kesirli türevlere sahip diferansiyel denklemler için fiziksel olarak yorumlanabilen başlangıç koşullarının kullanımına izin veren kesirli türevlerin tanımını vermiştir.

$f(t)$, n defa sürekli türevlenebilir bir fonksiyon olmak üzere, Caputo kesirli mertebeden türevi

$${}_a^C D_t^p f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-p)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{p+1-n}}, \quad (n-1 < p < n) \quad (2.2)$$

ile verilir. $f(t)$ fonksiyonu üzerine (2.2) ile tanımlanan $p \rightarrow n$ için $f(t)$ fonksiyonunun Caputo kesirli türevi n .mertebeden türevi verir. $0 \leq n-1 < p < n$ ve $\forall t > a$ için $[a, t]$ kapalı aralığında $n+1$ mertebeden sürekli türevlere sahip bir

$f(t)$ fonksiyonunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\lim_{p \rightarrow n} ({}^C D_t^p f(t)) &= \lim_{p \rightarrow n} \left(\frac{f^{(n)}(a)(t-a)^{n-p}}{\Gamma(n-p+1)} + \frac{1}{\Gamma(n-p+1)} \int_a^t (t-\tau)^{n-p} f^{(n+1)}(\tau) d\tau \right) \\ &= f^{(n)}(a) + \int_a^t f^{(n+1)}(\tau) d\tau = f^{(n)}(t), n = 1, 2, \dots\end{aligned}$$

olur. Bu denklem bize Grünwald-Letnikov ve Riemann-Liouville yaklaşımlarına benzer şekilde Caputo yaklaşımlarının da tamsayı mertebeden türevler arasındaki noktalarda Caputo anlamında kesirli mertebeden türevinin hesaplanabildiğini söyler.

Caputo yaklaşımının en önemli avantajlarından biri, Caputo kesirli türevlerinin tam sayı mertebeden diferansiyel denklemlerinkiyle aynı formda başlangıç koşullarına sahip olmasıdır. Yani $t = a$ da bilinmeyen fonksiyonların tamsayı mertebeden limit değerlerini içermesidir. Riemann-Liouville ve Caputo tanımları arasındaki önemli bir diğer fark ise, C sabitinin Caputo anlamında kesirli türevi sıfır iken Riemann-Liouville anlamında kesirli türevi

$${}_a D_t^p C = \frac{C t^{-p}}{\Gamma(1-p)}$$

ile hesaplanan değere eşit olmasıdır. $f(t)$ fonksiyonu (a, t) sonlu aralığında, $f^{(k)}(t)$, $(k = 1(1)(m+1))$ türevleri $[a, t]$ kapalı aralığında sürekli ve integrallenebilir ve m , $m-1 < p < m$ olacak şekilde bir pozitif tamsayı olsun. Bu durumda $f^{(k)}(a) = 0$, $(k = 1(1)(m-1))$ şartları sağlanırsa

$${}_a D_t^p f(t) = {}^C D_t^p f(t)$$

eşitliği vardır[4].

Caputo anlamında kesirli mertebeden türev ile bir fonksiyonun iki kez $\frac{1}{2}$. mertebeden türevi alındığında, bu fonksiyonun 1. mertebeden türevini verdiği görülür. Örneğin, $f(t) = t$ fonksiyonunun $n = 1$ olmak üzere $\frac{1}{2}$. mertebeden iki

kez Caputo kesirli türevini alırsa

$$\begin{aligned}
{}^C D_t^{\frac{1}{2}} \left\{ {}^C D_t^{\frac{1}{2}} f(t) \right\} &= {}^C D_t^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{f'(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \right\} \\
&= {}^C D_t^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \right\}, \quad \tau = tu, \quad d\tau = tdu \\
&= {}^C D_t^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{du}{(1-u)^{\frac{1}{2}}} \right\} \\
&= {}^C D_t^{\frac{1}{2}} \left\{ B\left(\frac{1}{2}, 1\right) \frac{t^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \right\} \\
&= {}^C D_t^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2 t^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} \right\} \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{f'(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^t \frac{d\tau}{t^{\frac{1}{2}} (t-\tau)^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 \frac{du}{(1-u)^{\frac{1}{2}} u^{\frac{1}{2}}} \\
&= \frac{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2})} = 1
\end{aligned}$$

elde edilir[18].

2.3 Kesirli Türevler için L1 ve L2 Formülleri

Bu kısımda kesirli mertebeden türevleri diskritize etmek için kullanılacak olan Caputo anlamında $L1$ ve $L2$ formülleri verildi.

$0 < \gamma \leq 1$ için $b_k^\gamma = (k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}$ olmak üzere $L1$ formülü

$$\left. \frac{\partial^\gamma f}{\partial t^\gamma} \right|_{t_n} = \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=0}^{n-1} b_k^\gamma [f(t_{n-k}) - f(t_{n-1-k})]$$

ve

$1 < \gamma \leq 2$ için $b_k^\gamma = (k+1)^{2-\gamma} - k^{2-\gamma}$ olmak üzere $L2$ formülü

$$\left. \frac{\partial^\gamma f}{\partial t^\gamma} \right|_{t_n} = \frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(3-\gamma)} \sum_{k=0}^{n-1} b_k^\gamma [f(t_{n-k}) - 2f(t_{n-1-k}) + f(t_{n-2-k})]$$

şeklindedir[6, 16, 17].

3. LUCAS POLİNOM YÖNTEMİ

3.1 Fibonacci ve Lucas Polinomları

Bu bölümde Fibonacci ve Lucas polinomları hakkında kısa bilgiler verildikten sonra bu tez çalışmasında ele alınacak model problemlerin çözümlerinde kullanacağımız Lucas polinom yöntemi verildi. Ayrıca bu bölümde, tezin esasını oluşturan ve bir sonraki bölümde verilecek olan kesirli mertebeli kısmi diferansiyel denklemlerin Lucas polinom yöntemi ile nümerik çözümlerine geçmeden önce, örnek uygulamalar olarak tam sayı mertebeden ısı ve dalga problemleri nümerik olarak çözüldü.

3.1.1 Fibonacci-Lucas Polinomları ve Temel İlişkileri

Orta çağ avrupalısında yaşayan İtalyan matematikçi Pisalı Leonardo olarak da bilinen Leonardo Fibonacci, babasının işi nedeniyle gittiği Cezayirde Hint-Arap sayı ve hesaplama sistemini öğrendi. Bu sistem üzerinde çalışan Fibonacci 1202 yılında Liber Abacci (Hesaplama yöntemleri Abaküs Kitabı) adlı eserini yazdı. Bu kitapta yer alan ve tavşan çiftliği olan bir arkadaşından esinlenerek yazdığı, bir çift tavşanın çoğalmasını ele alan problem Fibonacci sayı dizisinin temelini oluşturdu. Bu problemde, çiftlikteki tavşanlar doğdukları ilk iki ay yavru yapamazlar ve 3. aydan itibaren her çift tavşan her ay bir çift yavru yaparsa tavşanların ölmediği kabulü ile herhangi bir n. ayda çiftlikte toplam kaç tavşan vardır. Bu problemin çözümü için oluşturulacak sayı dizisi Fibonacci sayı dizisi olarak adlandırılması Edouard Lucas'ın Fibonacci dizisini, yeniden keşfetmesi ve bu diziyi gerçek bulucusuna atfetmesi ile olmuştur[13]. Fibonacci sayı dizisinin bir genelleştirmesi olan Fibonacci polinomları Catalan tarafından tanımlanan

$$F_n(x) = \begin{cases} 0, & n = 0 \\ 1, & n = 1 \\ xF_{n-1}(x) + F_{n-2}(x), & n \geq 2 \end{cases}$$

parçalı fonksiyonu ile ifade edilir. Fibonacci polinomlarının ilk beş terimi

$$\begin{aligned} F_0(x) &= 0 \\ F_1(x) &= 1 \\ F_2(x) &= x \\ F_3(x) &= x^2 + 1 \\ F_4(x) &= x^3 + 2x, \end{aligned}$$

biçimindedir. Fibonacci polinomlarında $x = 1$ alınarak Fibonacci sayılarının elde edildiği görülebilir. Benzer şekilde Lucas polinomları Bicknell tarafından incelenmiş olup

$$L_n(x) = \begin{cases} 2, & n = 0 \\ x, & n = 1 \\ xL_{n-1}(x) + L_{n-2}(x), & n \geq 2 \end{cases}$$

şeklinde bir parçalı fonksiyon olarak ifade edilir. Lucas polinomları birkaç adım için,

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 2 \\ L_1(x) &= x \\ L_2(x) &= x^2 + 2 \\ L_3(x) &= x^3 + 3x \\ L_4(x) &= x^4 + 4x^2 + 2 \end{aligned}$$

olarak yazılır.

3.1.2 Fonksiyonlara Fibonacci Polinomlarıyla Yaklaşım

$u(x)$ fonksiyonu sürekli bir fonksiyon olmak üzere, bu fonksiyon Fibonacci polinomları ile

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n F_n(x)$$

olarak ifade edilir. Bu ifade N sonlu terimi ile sonlandırılırsa,

$$u(x) \cong \sum_{n=0}^N c_n F_n(x) = F(x)C$$

formunu alır. Burada, $F(x) = [F_0(x), F_1(x), \dots, F_N(x)]$ ve $C = [c_0, c_1, \dots, c_N]^T$ dir. $F(x)$ vektörü ve $F'(x)$ türev vektörü arasındaki ilişki,

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & d & & \\ 0 & & & \end{bmatrix}_{(N+1) \times (N+1)}$$

biçiminde bir matris ve d ,

$$d_{i,j} = \begin{cases} i \sin \frac{(j-i)\pi}{2}, & j > i \\ 0, & j \leq i \end{cases}$$

olarak tanımlanan $N \times N$ tipinde bir matris olmak üzere

$$F'(x) = F(x)D \tag{3.1}$$

şeklinde dir[20, 21]. Örnek olarak, $N = 3$ için D matrisi

$$D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. (3.1) ile verilen eşitlik yardımıyla

$$F'(x) = F(x)D = [0, 1, x, x^2 + 1] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = [0, 0, 1, 2x]$$

bulunur. k bir tamsayı olmak üzere (3.1)'nin x 'e göre türevi alınmaya devam edilerek

$$\begin{aligned}
F''(x) &= F'(x)D = F(x)D^2 \\
F'''(x) &= F''(x)D = F(x)D^3 \\
&\vdots \\
F^{(k)}(x) &= F(x)D^k
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.1.3 Fonksiyonlara Lucas Polinomlarıyla Yaklaşım

$u(x)$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere, Lucas polinomlarıyla

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(x)$$

şeklinde ifade edilir. $u(x)$ serisinin açılımı sonsuz terim yerine N sonlu terimine kadar yapılırsa

$$u(x) \cong \sum_{n=0}^N c_n L_n(x) = L(x)C$$

formunu alır. Burada $L(x) = [L_0(x), L_1(x), \dots, L_N(x)]$ ve $C = [c_0, c_1, \dots, c_N]^T$ dir. k bir tamsayı olmak üzere $u(x)$ fonksiyonunun k . türevi $L^{(k)}(x) = [L_0^{(k)}(x), L_1^{(k)}(x), \dots, L_N^{(k)}(x)]$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
u^{(k)}(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n^{(k)}(x) \\
u^{(k)}(x) &\cong \sum_{n=0}^N c_n L_n^{(k)}(x) = L^{(k)}(x)C,
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.1. $L_n(x)$ ve $F_n(x)$ sırasıyla Lucas ve Fibonacci polinomları olmak

üzere bu polinomlar arasında

$$L_n^{(k)}(x) = nF_n^{(k-1)}(x), \quad k = 1, 2, \dots$$

şeklinde bir ilişki vardır[21].

3.2 Yöntemin Uygulamaları

Polinomlara dayalı nümerik yöntemler diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerinde yaygın olarak kullanılırlar. Bu tür yöntemlerin en büyük avantajı, yöntemde polinom ailesi bir kez seçildiğinde daha sonra bu ailedeki polinomların lineer kombinasyonları tekrar hesaplamalara gerek kalmaksızın diferansiyel denklemin çözümünü elde etmede kolayca kullanılmasıdır. Bu lineer kombinasyondaki katsayılar aynı zamanda kollokasyon düğümleri olarak da adlandırılan ayırık düğüm noktalarının yardımı ile bulunur. Bu bölümde, yöntemin uygulama aşamalarını görmek için seçtiğimiz ısı iletim ve dalga denklemlerinin nümerik çözümleri bulunacaktır.

3.2.1 Isı İletim Denklemi

Isı iletim denklemi, herhangi bir t zamanında bir çubuğun x konumundaki sıcaklığını veren bir $u(x, t)$ fonksiyonu için,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.2)$$

olarak alınır. Burada $t = 0$ zamanındaki başlangıç sıcaklığı

$$u(x, 0) = f(x) \quad (3.3)$$

şeklinde x in bir fonksiyonu olarak belirtilebilir. Benzer şekilde, $x \in [a, b]$ olmak üzere,

$$u(a, t) = g_1(t), u(b, t) = g_2(t) \quad (3.4)$$

sınır koşullarıdır.

Isı İletim Denklemi İçin Yöntemin Uygulaması

Bu kısımda (3.2) ile verilen ısı iletim denklemi (3.3) başlangıç koşulu ve (3.4) sınır koşulları gözönüne alınarak, problemin nümerik çözümleri Lucas polinomları yardımıyla bulunacaktır. $\Delta t = \frac{T}{M}$ zaman adımı ve T , bitiş zamanı olmak üzere, (3.2) ile verilen denklemde $\frac{\partial u}{\partial t}$ yerine ileri sonlu fark yaklaşımı, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ yerine Crank-Nicolson yaklaşımı alınması ile,

$$\frac{U^{j+1} - U^j}{\Delta t} = \frac{U_{xx}^{j+1} + U_{xx}^j}{2}$$

elde edilir gerekli düzenlemeler yapılarak

$$2U^{j+1} - \Delta t U_{xx}^{j+1} = 2U^j + \Delta t U_{xx}^j, j = 0, 1, \dots, M - 1 \quad (3.5)$$

bulunur.

Lucas polinomlarına dayalı bir yaklaşımda, U^{j+1} için $L(x) = [L_0(x), L_1(x), \dots, L_N(x)]$ ve $C = [c_0, c_1, \dots, c_N]^T$ olmak üzere,

$$U^{j+1} \simeq \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n(x) \quad (3.6)$$

yazılabilir. Bu durumda,

$$U_x^{j+1} \simeq \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n'(x) \quad (3.7)$$

$$U_{xx}^{j+1} \simeq \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n''(x) \quad (3.8)$$

olur. (3.6), (3.7) ve (3.8) yaklaşımları (3.5) de yerlerine yazılırsa

$$2 \left[\sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n(x) \right] - \Delta t \left[\sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n''(x) \right] = 2 \left[\sum_{n=0}^N c_n^j L_n(x) \right] + \Delta t \left[\sum_{n=0}^N c_n^j L_n''(x) \right]$$

$$\begin{aligned}
& 2 [c_0^{j+1}L_0(x) + c_1^{j+1}L_1(x) + \dots + c_N^{j+1}L_N(x)] - \Delta t [c_0^{j+1}L_0''(x) + c_1^{j+1}L_1''(x) + \dots + c_N^{j+1}L_N''(x)] \\
& = 2 [c_0^jL_0(x) + c_1^jL_1(x) + \dots + c_N^jL_N(x)] + \Delta t [c_0^jL_0''(x) + c_1^jL_1''(x) + \dots + c_N^jL_N''(x)]
\end{aligned}$$

elde edilir. Düzgün düğüm noktaları;

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}(i-1), \quad i = 1, 2, \dots, N+1, \quad a \leq x_i \leq b \quad (3.9)$$

olmak üzere, şemanın matris formunda gösterimi

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} 2L_0(x_0) - \Delta t L_0''(x_0) & \dots & 2L_N(x_0) - \Delta t L_N''(x_0) \\ 2L_0(x_1) - \Delta t L_0''(x_1) & \dots & 2L_N(x_1) - \Delta t L_N''(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ 2L_0(x_{N-1}) - \Delta t L_0''(x_{N-1}) & \dots & 2L_N(x_{N-1}) - \Delta t L_N''(x_{N-1}) \\ 2L_0(x_N) - \Delta t L_0''(x_N) & \dots & 2L_N(x_N) - \Delta t L_N''(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix}^{j+1} \\
& = \begin{bmatrix} 2L_0(x_0) + \Delta t L_0''(x_0) & \dots & 2L_N(x_0) + \Delta t L_N''(x_0) \\ 2L_0(x_1) + \Delta t L_0''(x_1) & \dots & 2L_N(x_1) + \Delta t L_N''(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ 2L_0(x_{N-1}) + \Delta t L_0''(x_{N-1}) & \dots & 2L_N(x_{N-1}) + \Delta t L_N''(x_{N-1}) \\ 2L_0(x_N) + \Delta t L_0''(x_N) & \dots & 2L_N(x_N) + \Delta t L_N''(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix}^j
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve $\mathbf{AC} = \mathbf{b}$ biçimindeki bir cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Burada \mathbf{A} , $(N+1) \times (N+1)$ tipinde bir matris ve C , $(N+1) \times 1$ tipinde Lucas katsayılar vektörüdür.

Son olarak problemin sınır koşulları Lucas polinomları yardımıyla,

$$\begin{aligned}
U(a, t_{j+1}) &= \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n(a) = g_1(t_{j+1}) \\
U(b, t_{j+1}) &= \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n(b) = g_2(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, 2, \dots, M-1
\end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve sistemin ilk ve son satırlarına eklenerek elde edilen sistem, lineer denklem sistemlerinin çözümünde kullanılan bir algoritma yardımıyla çözümlenir

her adımda bilinmeyen c_i^{j+1} katsayıların elde edilmesi ile istenilen çözümlere ulaşılır.

3.2.2 Dalga Denklemi

t anındaki x yer değişkenine göre dalganın konumu $u(x, t)$ olmak üzere

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.10)$$

denklemini

$$u(x, 0) = f_1(x), \quad u_t(x, 0) = f_2(x)$$

başlangıç koşulları ve

$$u(a, t) = g_1(t), \quad u(b, t) = g_2(t)$$

sınır koşulları ile gözönüne alalım. Yine Lucas polinom yöntemini uygulamak için $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ yerine merkezi fark yaklaşımı, $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$ yerine Crank-Nicolson yaklaşımı kullanılarak;

$$\begin{aligned} \frac{U^{j+1} - 2U^j + U^{j-1}}{\Delta t^2} &= C^2 \frac{U_{xx}^{j+1} + U_{xx}^j}{2} \\ U^{j+1} - 2U^j + U^{j-1} &= \frac{C^2 \Delta t^2}{2} (U_{xx}^{j+1} + U_{xx}^j) \\ U^{j+1} - \frac{C^2 \Delta t^2}{2} U_{xx}^{j+1} &= 2U^j + \frac{C^2 \Delta t^2}{2} U_{xx}^j - U^{j-1} \end{aligned} \quad (3.11)$$

biçiminde diskritize edilebilir. Lucas polinomlarına dayalı yaklaşım ile,

$$\begin{aligned} U^{j+1} &= \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n(x) \\ U_{xx}^{j+1} &= \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n''(x) \end{aligned}$$

ifadeleri (3.11) şemasında yazılarak

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n(x) \right] - \frac{\Delta t^2}{2} \left[\sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n''(x) \right] \\ &= 2 \left[\sum_{n=0}^N c_n^j L_n(x) \right] + \frac{\Delta t^2}{2} \left[\sum_{n=0}^N c_n^j L_n''(x) \right] - \left[\sum_{n=0}^N c_n^{j-1} L_n(x) \right] \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} & [c_0^{j+1}L_0(x) + c_1^{j+1}L_1(x) + \dots + c_N^{j+1}L_N(x)] - \frac{\Delta t^2}{2} [c_0^{j+1}L_0''(x) + c_1^{j+1}L_1''(x) + \\ & \dots + c_N^{j+1}L_N''(x)] = 2 [c_0^jL_0(x) + c_1^jL_1(x) + \dots + c_N^jL_N(x)] - [c_0^{j-1}L_0(x) + c_1^{j-1}L_1(x) + \\ & \dots + c_N^{j-1}L_N(x)] + \frac{\Delta t^2}{2} [c_0^jL_0''(x) + c_1^jL_1''(x) + \dots + c_N^jL_N''(x)] \end{aligned}$$

elde edilir. Düzgün düğüm noktaları (3.9) şeklinde seçilerek şemanın matris formunda gösterimi

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} L_0(x_0) - \frac{\Delta t^2}{2}L_0''(x_0) & \dots & L_N(x_0) - \frac{\Delta t^2}{2}L_N''(x_0) \\ L_0(x_1) - \frac{\Delta t^2}{2}L_0''(x_1) & \dots & L_N(x_1) - \frac{\Delta t^2}{2}L_N''(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_0(x_{N-1}) - \frac{\Delta t^2}{2}L_0''(x_{N-1}) & \dots & L_N(x_{N-1}) - \frac{\Delta t^2}{2}L_N''(x_{N-1}) \\ L_0(x_N) - \frac{\Delta t^2}{2}L_0''(x_N) & \dots & L_N(x_N) - \frac{\Delta t^2}{2}L_N''(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix}^{j+1} \\ & = \begin{bmatrix} 2L_0(x_0) + \frac{\Delta t^2}{2}L_0''(x_0) & \dots & 2L_N(x_0) + \frac{\Delta t^2}{2}L_N''(x_0) \\ 2L_0(x_1) + \frac{\Delta t^2}{2}L_0''(x_1) & \dots & 2L_N(x_1) + \frac{\Delta t^2}{2}L_N''(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ 2L_0(x_{N-1}) + \frac{\Delta t^2}{2}L_0''(x_{N-1}) & \dots & 2L_N(x_{N-1}) + \frac{\Delta t^2}{2}L_N''(x_{N-1}) \\ 2L_0(x_N) + \frac{\Delta t^2}{2}L_0''(x_N) & \dots & 2L_N(x_N) - \frac{\Delta t^2}{2}L_N''(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix}^j \\ & - \begin{bmatrix} L_0(x_0) & \dots & L_N(x_0) \\ L_0(x_1) & \dots & L_N(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ L_0(x_{N-1}) & \dots & L_N(x_{N-1}) \\ L_0(x_N) & \dots & L_N(x_N) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_0 \\ c_1 \\ \dots \\ c_{N-1} \\ c_N \end{bmatrix}^{j-1} \end{aligned}$$

olarak yazılır.

Problem 1:

İlk olarak, (3.2) ile

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0$$

biçiminde verilen 1-boyutlu zamana bağlı ısı iletim denklemi;

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$u(x, 0) = \sin \pi x$$

başlangıç şartı ile göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$u(x, t) = (\sin \pi x)e^{-\pi^2 t}$$

dir[22].

Problem 2:

İkinci olarak, (3.10)' de $C = 2$ alınmasıyla

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 4 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

biçimindeki dalga denklemi,

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

sınır şartları ve

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0,$$

başlangıç şartları ile ele alındı. Bu problemin tam çözümü

$$u(x, t) = \sin(\pi x) \cos(2\pi t), \quad 0 \leq t \leq 1$$

dir.

3.2.3 Nümerik Çözümler

Bu kısımda, nümerik çözümlerin analitik çözümlere ne kadar yaklaştığının bir ölçüsü olarak,

$$L_\infty = \max |u(x_i, T) - U_N(x_i, T)|$$

$$L_2 = \left(\sum_{i=1}^{N+1} |u(x_i, T) - U_N(x_i, T)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad i = 1, 2, \dots, N + 1$$

şeklinde verilen L_∞ ve L_2 hata normları hesaplandı ve yukarıda verilen problemler üzerinde önerilen yöntemin performansı incelendi. Burada, u ve U_N sırasıyla tam ve nümerik çözümler, $h = \frac{b-a}{N}$ adım uzunluğu ve $\Delta t = \frac{T}{M}$ zaman adımıdır.

Problem 1 için elde edilen nümerik ve tam çözümler Tablo 3.1 ve Tablo 3.2'de verildi. $N = 20$ ve farklı Δt değerleri için elde edilen nümerik ve tam çözümler Tablo 3.1' de sunuldu. Tablodan, Δt nin küçülen değerlerinde çözümlerin tam çözümlere oldukça yaklaştığı ve hem L_2 hemde L_∞ hata normlarının giderek küçüldüğü görülmektedir. $\Delta t = 0.01$ ve farklı N değerleri için elde edilen nümerik ve tam çözümleri Tablo 3.2' de verildi. Tabloda N bölüntü sayısının artışının sonuçlara çok da büyük bir katkısının olmadığı görüldü.

Tablo 3.1: Lucas polinomları yardımıyla bir boyutlu ısı iletim denkleminin $N = 20$ ve farklı Δt değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümü

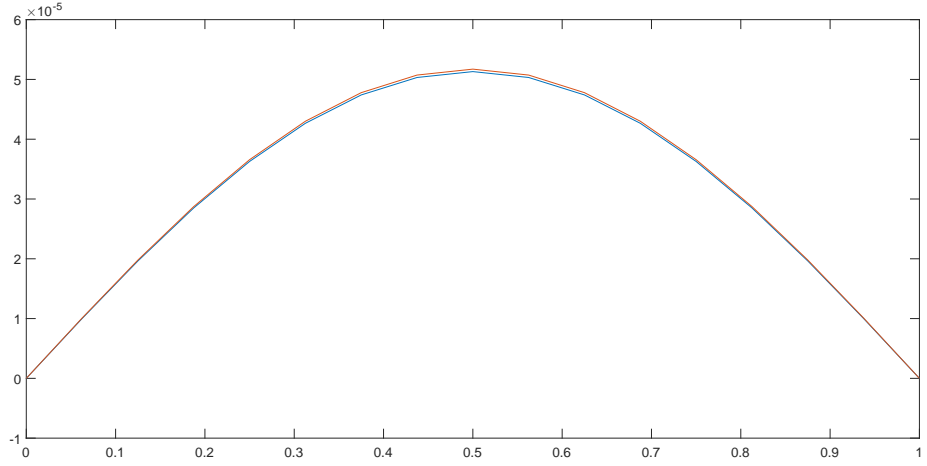
x	Nümerik Çözüm			Analitik Çözüm
	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0001$	
0.00	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.10	0.00001586	0.00001598	0.00001598	0.00001598
0.20	0.00003016	0.00003040	0.00003040	0.00003040
0.30	0.00004151	0.00004184	0.00004184	0.00004184
0.40	0.00004880	0.00004919	0.00004919	0.00004919
0.50	0.00005131	0.00005172	0.00005172	0.00005172
0.60	0.00004880	0.00004919	0.00004919	0.00004919
0.70	0.00004151	0.00004184	0.00004184	0.00004184
0.80	0.00003016	0.00003040	0.00003040	0.00003040
0.90	0.00001586	0.00001598	0.00001598	0.00001598
1.00	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
L_2	2.9227×10^{-7}	2.9301×10^{-9}	2.9291×10^{-11}	
L_∞	4.1333×10^{-7}	4.1437×10^{-9}	4.1424×10^{-11}	

Tablo 3.2: Lucas polinomları yardımıyla bir boyutlu ısı iletim denkleminin $\Delta t = 0.01$ ve farklı N değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümü

x	Nümerik Çözüm			Analitik
	$N = 5$	$N = 10$	$N = 20$	Çözüm
0.0	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.1		0.00001586	0.00001586	0.00001598
0.2	0.00002858	0.00003016	0.00003016	0.00003040
0.3		0.00004151	0.00004151	0.00004184
0.4	0.00004640	0.00004880	0.00004880	0.00004919
0.5		0.00005131	0.00005131	0.00005172
0.6	0.00004640	0.00004880	0.00004880	0.00004919
0.7		0.00004151	0.00004151	0.00004184
0.8	0.00002858	0.00003016	0.00003016	0.00003040
0.9		0.00001586	0.00001586	0.00001598
1.0	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
L_2	2.1079×10^{-6}	2.9226×10^{-7}	2.9227×10^{-7}	
L_∞	2.7889×10^{-6}	4.1331×10^{-7}	4.1333×10^{-7}	

Şekil 3.1' de $\Delta t = 0.01$ ve $N = 20$ değerleri için elde edilen nümerik ve tam çözüm birlikte grafiksel olarak verildi. Şekil 3.1 incelendiğinde tam ve nümerik çözümlerin ayırt edilemeyecek kadar yakın olduğu görüldü.

Problem 2 için elde edilen nümerik ve tam çözümler Tablo 3.3 ve Tablo 3.4' de verildi. Tablo 3.3' de, $N = 10$ ve farklı Δt değerleri için elde edilen nümerik ve tam çözümler verildi. Tablodan Δt nin küçülen değerlerinde nümerik çözümlerin tam çözüme oldukça yaklaştığı ve hata normlarının beklenildiği gibi kayda değer ölçüde azaldığı açıktır. Tablo 3.4' de ise $\Delta t = 0.01$ ve farklı N değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablodan, N bölüntü sayısının artmasının Problem 1' de olduğu gibi hata normlarında kayda değer ölçüde küçülme sağlamadığı görüldü. Şekil 3.2' de $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 10$ ve farklı t zamanlarında elde edilen nümerik ve tam çözüm birlikte grafiksel olarak verildi. Şekil 3.2 incelendiğinde tam ve nümerik çözümlerin ayırt edilemeyecek kadar yakın olduğu görüldü.



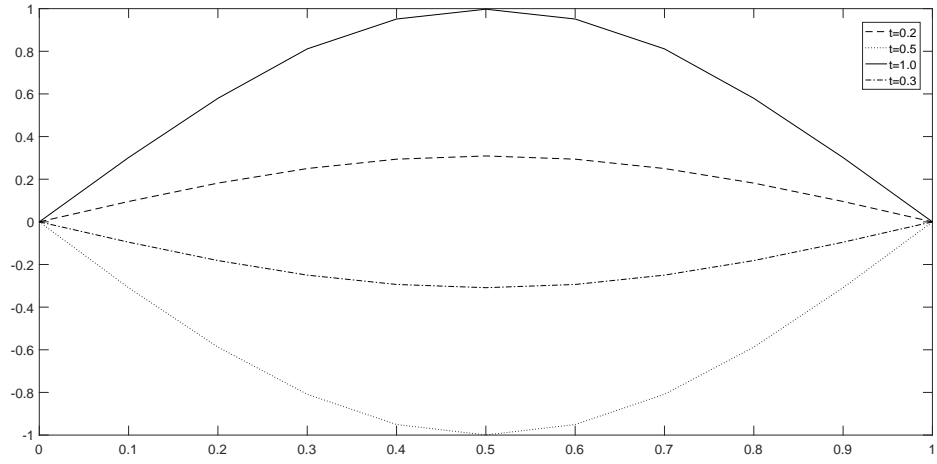
Şekil 3.1: Lucas polinomları yardımıyla bir boyutlu ısı iletim denkleminin $\Delta t = 0.01$ ve $N = 20$ değerleri için elde edilen nümerik ve tam çözümü

Tablo 3.3: Lucas polinomları yardımıyla dalga denkleminin $N = 10$ ve farklı Δt değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümü

x	Nümerik Çözüm			Analitik Çözüm
	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0001$	
0.00	-0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000
0.10	0.28035	0.30714	0.30161	0.30902
0.20	0.53263	0.57916	0.57935	0.58779
0.30	0.73292	0.80127	0.81121	0.80902
0.40	0.86171	0.94221	0.95133	0.95106
0.50	0.90611	0.98996	0.99741	1.00000
0.60	0.86171	0.94221	0.95130	0.95106
0.70	0.73292	0.80127	0.81125	0.80902
0.80	0.53263	0.57916	0.57939	0.58779
0.90	0.28035	0.30714	0.30145	0.30902
1.00	0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000
$L_2 \times 10^3$	66.3994	7.2990	5.1523	
$L_\infty \times 10^3$	93.8946	10.0381	8.4667	

Tablo 3.4: Lucas polinomları yardımıyla dalga denkleminin $\Delta t = 0.01$ ve farklı N değerleri için elde edilen nümerik ve analitik çözümü

	$N = 8$	$N = 10$	$N = 12$
$L_2 \times 10^3$	0.1688	0.1704	0.1704
$L_\infty \times 10^3$	0.2362	0.2410	0.2411



Şekil 3.2: Lucas polinomları yardımıyla bir boyutlu dalga denkleminin $\Delta t = 0.0001$ ve $N = 10$ ve farklı t zamanlarında elde edilen nümerik ve tam çözümü

4. LUCAS POLİNOMLARI İLE KESİRLİ MERTEBEDEN DİFÜZYON VE DİFÜZYON DALGA DENKLEMLERİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Kesirli mertebeden difüzyon ve difüzyon dalga denkleminin genel formu

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = K \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad t \geq 0 \quad , \quad a < x < b \quad (4.1)$$

biçimindedir. Burada K difüzyon katsayısı olmak üzere $0 < \gamma \leq 1$ için (4.1) denklemi kesirli mertebeden difüzyon denklemi veya alt-difüzyon denklemi ve $1 < \gamma \leq 2$ için kesirli mertebeden difüzyon dalga denklemi olarak adlandırılır. Ayrıca, (4.1) denkleminde $\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma}$ terimi Bölüm 2’de (2.2) ile verilen Caputo anlamında kesirli türevi temsil etmektedir.

Kesirli mertebeden difüzyon ve difüzyon dalga denklemleri birçok araştırmacı tarafından farklı yöntemlerle çözülmüştür. Örneğin, Sun vd.[24], yarı analitik sonlu elemanlar yöntemini kullanarak zaman kesirli difüzyon denklemini, Sweilam vd.[25], Crank-Nicolson sonlu eleman yöntemini kullanarak zaman kesirli difüzyon denklemini çözdüler. Monami ve Adibat [26], akışkanda ortaya çıkan lineer kesirli kısmi diferansiyel denklemleri çözmek için nispeten yeni analitik teknikler, varyasyonel yineleme metodu ve Adomian ayrıştırma metodu uygulamıştır. Çelik ve Duman[27], Riesz kesirli türevi ile difüzyon denklemi için Crank-Nicolson yöntemini kullanmışlardır ve elde edilen kesirli türevde merkezi fark yaklaşımını kullanarak nümerik sonuçlar elde etmişlerdir. Murillo ve Yuste[16], kesirli difüzyon denklemi için $L1$ diskritize formülünü, difüzyon dalga denklemi için $L2$ diskritize formülünü kullanarak sonlu farklar yardımıyla, Esen vd.[23], kuadratik B-spline Galerkin sonlu eleman yöntemini kullanarak bu problemlerin nümerik çözümlerini

elde ettiler.

4.1 Kesirli Mertebeden Difüzyon Denklemi

Bu bölümde, $0 < \gamma \leq 1$ olmak üzere,

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad t > 0 \quad (4.2)$$

kesirli mertebeden difüzyon denklemi,

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad (4.3)$$

sınır şartları ve

$$u(x, 0) = \sin x \quad , \quad 0 < x < \pi \quad (4.4)$$

başlangıç şartı ile birlikte ele alındı. Bu problemin tam çözümü,

$$U(x, t) = E_\gamma(-t)^\gamma \sin x \quad (4.5)$$

dir[16, 17, 23, 24]. Burada E_γ Mittag-Leffler fonksiyonudur.

4.2 Kesirli Mertebeden Difüzyon Dalga Denklemi

Bu bölümde, $1 < \gamma \leq 2$ olmak üzere,

$$\frac{\partial^\gamma u}{\partial t^\gamma} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad , \quad t > 0 \quad (4.6)$$

kesirli mertebeden difüzyon dalga denklemi,

$$u(0, t) = u(\pi, t) = 0 \quad (4.7)$$

sınır şartları ve

$$u(x, 0) = \sin x, \quad \left. \frac{\partial u}{\partial t} \right|_{t=0} = 0, \quad 0 < x < \pi \quad (4.8)$$

başlangıç şartı ile birlikte ele alındı. Bu problemin tam çözümü,

$$U(x, t) = E_\gamma(-t)^\gamma \sin x$$

dir[16, 17, 23, 24]. Burada E_γ Mittag-Leffler fonksiyonudur.

4.3 Lucas Polinom Yöntemi

Bu kısımda ilk olarak, (4.2) ile verilen kesirli mertebeden Difüzyon probleminin Lucas polinom yöntemi ile nümerik şemasını elde etmek için denklemdaki $\frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma}$ Caputo kesirli türevi yerine $L1$ formülü[6] ve $\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}$ türevi yerine de Crank-Nicolson yaklaşımı kullanılırsa $b_k^\gamma = (k+1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}$ olmak üzere

$$\frac{(\Delta t)^{-\gamma}}{\Gamma(2-\gamma)} \sum_{k=0}^{j-1} b_k^\gamma (U^{j-k} - U^{j-k-1}) = \frac{U_{xx}^{j+1} - U_{xx}^j}{2}, \quad j = 0, 1, \dots, M-1 \quad (4.9)$$

elde edilir. Burada $\Delta t = \frac{T}{M}$ ve M zaman adımı bölüntü sayısıdır. $\Gamma(2-\gamma)(\Delta t)^\gamma = s$ olmak üzere (4.9) şeması

$$U^{j+1} - \frac{s}{2} U_{xx}^{j+1} = U^j - \frac{s}{2} U_{xx}^j - \sum_{k=1}^j b_k^\gamma (U^{j-k+1} - 2U^{j-k}) \quad (4.10)$$

biçiminde düzenlenebilir. Lucas polinomları üzerine temellenen yaklaşımın U^{j+1} için $\mathbf{L}(x) = [L_0(x), L_1(x), \dots, L_N(x)]$ ve $\mathbf{C} = [c_0, c_1, \dots, c_N]^T$ olmak üzere

$$U^{j+1} = \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n(x) = \mathbf{L}(x) \mathbf{C} \quad (4.11)$$

olduğu kabul edilirse, Bölüm 3'de (3.7) ve (3.8) ile verildiği gibi

$$U_{xx}^{j+1} = \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n''(x), \quad U_{xx}^j = \sum_{n=0}^N c_n^j L_n''(x) \quad (4.12)$$

şeklinde yazılabilir. (4.10) şemasında, (4.11) ve (4.12) ile verilen Lucas polinomları ile yaklaşımlar yerlerine yazılırsa,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n(x) - \frac{s}{2} \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n''(x) &= \sum_{n=0}^N c_n^j L_n(x) - \frac{s}{2} \sum_{n=0}^N c_n^j L_n''(x) \\ &\quad - \sum_{k=1}^j b_k^\gamma \left[\sum_{n=0}^N c_n^{j-k} L_n(x) - \sum_{n=0}^N c_n^{j-k-1} L_n(x) \right] \end{aligned}$$

bulunur. Son olarak problemin sınır şartları Lucas polinomları yardımıyla,

$$\begin{aligned} U_N(a, t_{j+1}) &= \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n(a) = g_1(t_{j+1}) \\ U_N(b, t_{j+1}) &= \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n(b) = g_2(t_{j+1}), \quad j = 0, 1, \dots, M-1 \end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve sisteme eklenir. İterasyona başlanabilmesi için Lucas polinom katsayılarının başlangıç değerleri

$$x_i = a + \frac{b-a}{N}(i-1), i = 1, \dots, N+1, a \leq x_i \leq b$$

düğüm noktalarında, başlangıç ve sınır koşullarının kullanılmasıyla

$$\mathbf{AC} = \mathbf{b}$$

biçimindeki $(N+1) \times (N+1)$ tipindeki lineer cebirsel denklem sistemin çözümü ile elde edilir.

Benzer şekilde, (4.6) ile verilen kesirli mertebeden Difüzyon dalga denkleminde yukarıdaki adımlar uygulanarak $s = (\Delta t)^\gamma \Gamma(3 - \gamma)$ olmak üzere elde edilir.

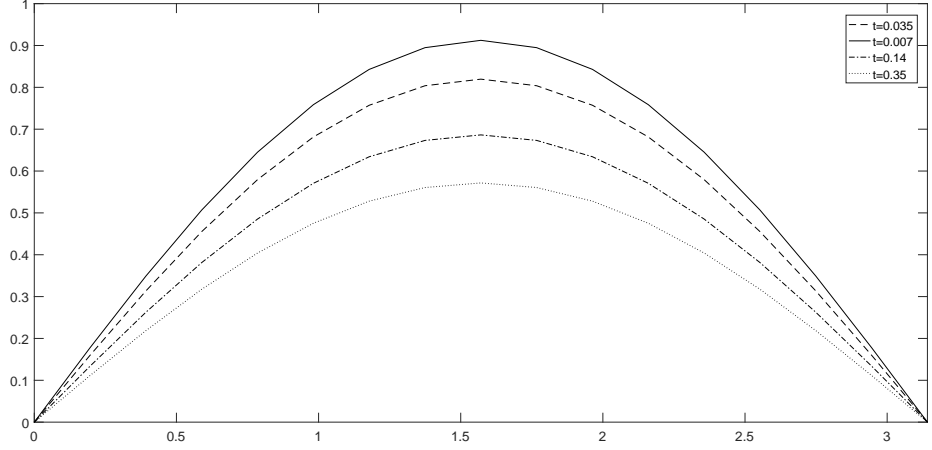
$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n(x) - \frac{s}{2} \sum_{n=0}^N c_n^{j+1} L_n''(x) = & 2 \sum_{n=0}^N c_n^j L_n(x) - \frac{s}{2} \sum_{n=0}^N c_n^j L_n''(x) \\ & - \sum_{k=1}^j b_k^\gamma \left[\sum_{n=0}^N c_n^{j-k+1} L_n(x) - 2 \sum_{n=0}^N c_n^{j-k} L_n(x) \right] \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Burada $\frac{\partial^\gamma U}{\partial t^\gamma}$ Caputo kesirli türevinin $L2$ formülü ile diskrize edildiğine dikkat edilmelidir.

4.3.1 Nümerik Çözümler

Bu kısımda, Lucas polinom yöntemiyle model problem olarak ele alınan (4.2)-(4.5) ile verilen Difüzyon ve (4.6)-(4.8) ile verilen Difüzyon dalga problemlerinin nümerik çözümleri bulundu.

Difüzyon denkleminin, $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.00007$, $t = 0.35$ ve farklı N değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 4.1' de verildi. Tablo incelendiğinde her ne kadar N için seçilen bu değerler sonuçlar bakımından yeterli ise de, N değerinin daha büyük değerleri için yöntem kondisyon sayısının çok küçülmesi ile oluşan kötü koşullu (ill condition) sistem kararlı sonuçlar vermediği görüldü. Aşlında



Şekil 4.1: $\Delta t = 0.00007$, $t = 0.35$, $N = 16$ ve $\gamma = 0.5$ için elde edilen nümerik çözümler

bunun nedeni büyüyen N değerleri ile birlikte polinomun derecesinin de büyümesinden kaynaklanmaktadır.

Tablo 4.1: $\gamma = 0.5$, $\Delta t = 0.0015$, $t = 3.75$ ve farklı N değerleri için problemin L_2 ve L_∞ hata normları

	$N = 8$	$N = 10$	$N = 12$	$N = 14$
$L_2 \times 10^3$	0.0008478	0.0017138	0.0017036	0.0017037
$L_\infty \times 10^3$	0.0007889	0.0013652	0.0013593	0.0013593

Şekil 4.1 ile $\Delta t = 0.00007$, $t = 0.35$, $N = 16$ ve $\gamma = 0.5$ için elde edilen nümerik çözümler grafik yardımıyla gösterildi.

Difüzyon denklemi için elde edilen çözümler ile Ref. [23]'da verilen Kuadratik B-spline Galerkin yöntemi ile bulunan çözümlerin bir karşılaştırılması Tablo 4.2' de verilmiştir. Ref.[23] çalışmasında $N = 40$ değeri seçilerek bulunan sonuçlara karşılık bu çalışmada $N = 14$ alınarak elde edilmiş sonuçların karşılaştırıldığı göz önünde tutulursa sunulan çalışma ile elde edilen çözümlerin oldukça yeterli olduğu söylenebilir. Tablodan açıkça görülmektedir ki γ 'nın küçük değerlerinde sunulan yöntem artan değerlerinde Galerkin yöntemi öne çıkmaktadır.

Tablo 4.3' de, kesirli mertebeden Difüzyon denkleminin Lucas polinom yöntemi

Tablo 4.2: Problem 1 için elde edilen çözümlerin Ref. [23] ile verilen çözümler ile karşılaştırılması

	$\gamma = 0.25$		$\gamma = 0.50$		$\gamma = 0.75$	
	[23]	Lucas	[23]	Lucas	[23]	Lucas
$L_2 \times 10^3$	0.003766	0.000563	0.003122	0.003498	0.008343	0.010774
$L_\infty \times 10^3$	0.004662	0.000449	0.004853	0.002791	0.007251	0.008596

yardımı ile elde edilen çözümleri, $N = 14$, $\Delta t = 0.00007$, $t = 0.35$ ve farklı γ değerleri için nümerik ve tam çözümleri verildi. Ayrıca Tabloda herbir γ değeri için L_2 ve L_∞ hata normları da verildi. Tablo dikkatle incelendiğinde bulunan çözümlerin tam çözümler ile uyumlu ve hata normlarının oldukça küçük olduğu ve γ 'nın küçük değerlerinde hata normlarında küçük olduğu görüldü. Problemin $\gamma = 0.5$, $N = 14$, $t = 0.35$ ve farklı Δt değerleri için nümerik çözümleri ile L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 4.4'de verildi. Δt değerinin küçülen değerleri için giderek hatalarının küçüldüğü tablodan açıkça görülmektedir.

Tablo 4.3: $N = 14$, $\Delta t = 0.00007$, $t = 0.35$ ve farklı γ değerleri için problemin nümerik çözümlerinin tam çözümler ile karşılaştırılması

x	$\gamma = 0.25$			$\gamma = 0.50$			$\gamma = 0.75$		
	Nümerik	T_{am}	Nümerik	T_{am}	Nümerik	T_{am}	Nümerik	T_{am}	
0.000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	
0.224	0.11817348	0.11817338	0.12718853	0.12718791	0.14014730	0.14014730	0.14014539	0.14014539	
0.449	0.23042125	0.23042105	0.24799929	0.24799808	0.27326704	0.27326704	0.27326331	0.27326331	
0.673	0.33111473	0.33111445	0.35637434	0.35637260	0.39268402	0.39268402	0.39267866	0.39267866	
0.898	0.41520474	0.41520439	0.44687929	0.44687710	0.49241018	0.49241018	0.49240346	0.49240346	
1.122	0.47847465	0.47847425	0.51497584	0.51497333	0.56744485	0.56744485	0.56743710	0.56743710	
1.346	0.51775185	0.51775141	0.55724935	0.55724663	0.61402545	0.61402545	0.61401707	0.61401707	
1.571	0.53106680	0.53106635	0.57158006	0.57157727	0.62981626	0.62981626	0.62980767	0.62980767	
1.795	0.51775185	0.51775141	0.55724935	0.55724663	0.61402545	0.61402545	0.61401707	0.61401707	
2.020	0.47847465	0.47847425	0.51497584	0.51497333	0.56744485	0.56744485	0.56743710	0.56743710	
2.244	0.41520474	0.41520439	0.44687929	0.44687710	0.49241018	0.49241018	0.49240346	0.49240346	
2.468	0.33111473	0.33111445	0.35637434	0.35637260	0.39268402	0.39268402	0.39267866	0.39267866	
2.693	0.23042125	0.23042105	0.24799929	0.24799808	0.27326704	0.27326704	0.27326331	0.27326331	
2.917	0.11817348	0.11817338	0.12718853	0.12718791	0.14014730	0.14014730	0.14014539	0.14014539	
3.142	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	
$L_2 \times 10^3$	0.00056308		0.00349767		0.01077392		0.01077392		
$L_\infty \times 10^3$	0.00044927		0.00279074		0.00859635		0.00859635		

Tablo 4.4. $\gamma = 0.5$, $N = 14$, $t = 0.35$ ve farklı Δt değerleri için problemin nümerik çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması

x	$\Delta t = 0.0035$	$\Delta t = 0.0007$	$\Delta t = 0.00035$	$\Delta t = 0.00007$	T_{am}
0.000	-0.00000000	0.00000000	-0.00000000	0.00000000	0.00000000
0.224	0.12722279	0.12719441	0.12719110	0.12718853	0.12718791
0.449	0.24806611	0.24801075	0.24800430	0.24799929	0.24799808
0.673	0.35647035	0.35639080	0.35638153	0.35637434	0.35637260
0.898	0.44699968	0.44689993	0.44688831	0.44687929	0.44687710
1.122	0.51511457	0.51499963	0.51498623	0.51497584	0.51497333
1.346	0.55739948	0.55727510	0.55726060	0.55724935	0.55724663
1.571	0.57173404	0.57160647	0.57159160	0.57158006	0.57157727
1.795	0.55739948	0.55727510	0.55726060	0.55724935	0.55724663
2.020	0.51511457	0.51499963	0.51498623	0.51497584	0.51497333
2.244	0.44699968	0.44689993	0.44688831	0.44687929	0.44687710
2.468	0.35647035	0.35639080	0.35638153	0.35637434	0.35637260
2.693	0.24806611	0.24801075	0.24800430	0.24799929	0.24799808
2.917	0.12722279	0.12719441	0.12719110	0.12718853	0.12718791
3.142	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000	0.00000000
$L_2 \times 10^3$	0.19648843	0.03659620	0.01795698	0.00349767	
$L_\infty \times 10^3$	0.15677509	0.02919955	0.01432760	0.00279074	

Tablo 4.5: $\gamma = 1.5$, $\Delta t = 0.0015$, $t = 3.75$ ve farklı N değerleri için problemin L_2 ve L_∞ hata normları

	$N = 8$	$N = 10$	$N = 12$	$N = 14$
$L_2 \times 10^3$	0.000478	0.001625	0.001611	0.001754
$L_\infty \times 10^3$	0.000446	0.001295	0.001285	0.001282

Kesirli mertebeden Difüzyon dalga denkleminin $\gamma = 1.5$, $\Delta t = 0.0015$, $t = 3.75$ ve farklı N değerleri için L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 4.5’de verildi. N ’in küçülen değerlerinde daha iyi sonuçlar alındığı görüldü. Bölüntü sayısı küçük olarak seçilmesine rağmen bulunan çözümlerdeki hataların çok küçük olduğu gözlemlendi. Difüzyon dalga denklemi içinde Difüzyon denkleminde olduğu gibi N değerinin daha büyük olarak seçilmesi polinomun derecesini artırdığından kararsız sonuçlar elde edilmesine neden olduğu ve bunun yöntemin bir dezavantajı olarak karşımıza çıktığı görüldü.

Tablo 4.6’da $\Delta t = 0.0015$, $t = 3.75$ değerleri için sunulan yöntemle elde edilen hatalar ile Ref. [23]’de verilen hataların bir karşılaştırması yapıldı. Lucas polinom yönteminde bölüntü sayısı $N = 14$ ve kuadratik B-spline Galerkin[23] yönteminde ise $N = 40$ olarak kullanıldığı gözönünde bulundurularak tablo incelendiğinde γ ’nın 1.25 ve 1.5 değerlerinde Lucas polinom yöntemi ile elde edilen çözümlerin Ref. [23]’de verilenlere göre daha iyi olduğu ancak artan $\gamma = 1.75$ değerinde bu üstünlüğü koruyamadığı görüldü. Bölüntü sayısının yeterince büyük seçilmemesine rağmen elde edilen çözümlerin yöntemin olumlu yönü olarak karşımıza çıktığı söylenebilir.

Tablo 4.6: Problem 2 için elde edilen çözümlerin Ref. [23] verilen çözümler ile karşılaştırılması

	$\gamma = 1.25$		$\gamma = 1.50$		$\gamma = 1.75$	
	[23]	Lucas	[23]	Lucas	[23]	Lucas
$L_2 \times 10^3$	0.000758	0.000236	0.002714	0.001666	0.073826	0.381161
$L_\infty \times 10^3$	0.000890	0.000188	0.002229	0.001282	0.057599	0.555311

$\Delta t = 0.0015$, $t = 3.75$, $N = 14$ ve farklı γ değerleri için nümerik çözümler ile L_2 ve L_∞ hata normları Tablo 4.7' de verildi. Kullanılan yöntemle elde edilen çözümler incelendiğinde γ 'nın daha küçük değerlerinde metodun sonuçlarının da iyi olduğu görüldü. Difüzyon dalga denkleminin $\gamma = 1.5$, $N = 14$, $t = 3.75$ ve farklı Δt değerleri için çözümlerin davranışının incelenmesi amacı ile Tablo 4.8 hazırlandı. Küçülen Δt değerlerinde hatalarında giderek küçüldüğü görülen tabloda yine N değerinin çok büyük değerlerinin seçilmesine gerek kalmadan tatmin edici çözümler elde edildiği söylenebilir.



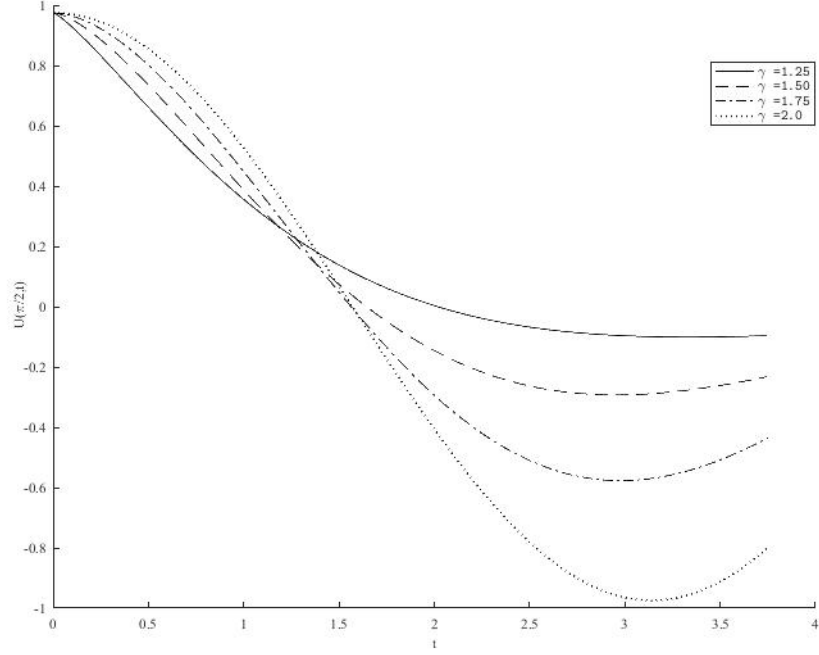
Tablo 4.7: $\Delta t = 0,0015$, $t = 3.75$, $N = 14$ ve farklı γ değerleri için problemin nümerik çözümlerinin tam çözümler ile karşılaştırılması

x	$\gamma = 1.25$			$\gamma = 1.50$			$\gamma = 1.75$		
	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	Nümerik	Tam	
0.00000	-0.00000	-0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	-0.00000	
0.22440	-0.02193	-0.02193	-0.05291	-0.05291	-0.09878	-0.09878	-0.09933	-0.09933	
0.44880	-0.04276	-0.04276	-0.10317	-0.10317	-0.19375	-0.19375	-0.19368	-0.19368	
0.67320	-0.06144	-0.06144	-0.14825	-0.14825	-0.27835	-0.27835	-0.27832	-0.27832	
0.89760	-0.07705	-0.07705	-0.18590	-0.18590	-0.34895	-0.34895	-0.34900	-0.34900	
1.12200	-0.08879	-0.08879	-0.21423	-0.21423	-0.40213	-0.40213	-0.40219	-0.40219	
1.34640	-0.09607	-0.09607	-0.23182	-0.23182	-0.43515	-0.43515	-0.43520	-0.43520	
1.57080	-0.09854	-0.09854	-0.23778	-0.23778	-0.44634	-0.44634	-0.44639	-0.44639	
1.79520	-0.09607	-0.09607	-0.23182	-0.23182	-0.43515	-0.43515	-0.43520	-0.43520	
2.01960	-0.08879	-0.08879	-0.21423	-0.21423	-0.40213	-0.40213	-0.40219	-0.40219	
2.24399	-0.07705	-0.07705	-0.18590	-0.18590	-0.34895	-0.34895	-0.34900	-0.34900	
2.46839	-0.06144	-0.06144	-0.14825	-0.14825	-0.27835	-0.27835	-0.27832	-0.27832	
2.69279	-0.04276	-0.04276	-0.10317	-0.10317	-0.19375	-0.19375	-0.19368	-0.19368	
2.91719	-0.02193	-0.02193	-0.05291	-0.05291	-0.09878	-0.09878	-0.09933	-0.09933	
3.14159	0.00000	-0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000	0.00000	-0.00000	-0.00000	
$L_2 \times 10^3$	0.00023593		0.00166566		0.38116058				
$L_\infty \times 10^3$	0.00018824		0.00128228		0.55531149				

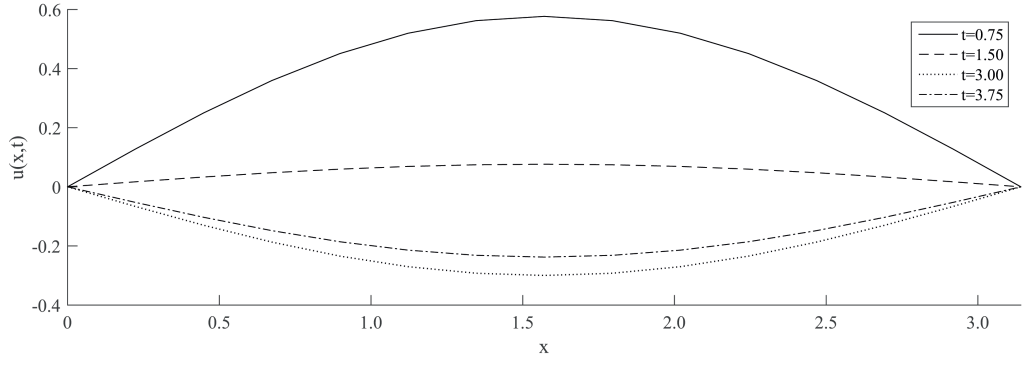
Tablo 4.8. $\gamma = 1.5$, $N = 14$, $t = 3.75$ ve farklı Δt değerleri için problemin nümerik çözümlerinin tam çözüm ile karşılaştırılması

x	$\Delta t = 0.075$	$\Delta t = 0.015$	$\Delta t = 0.0075$	$\Delta t = 0.0015$	T_{am}
0.00000	-0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000	-0.00000
0.22440	-0.05302	-0.05292	-0.05291	-0.05291	-0.05291
0.44880	-0.10338	-0.10319	-0.10317	-0.10317	-0.10317
0.67320	-0.14856	-0.14828	-0.14826	-0.14825	-0.14825
0.89760	-0.18628	-0.18594	-0.18591	-0.18590	-0.18590
1.12200	-0.21467	-0.21427	-0.21424	-0.21423	-0.21423
1.34640	-0.23229	-0.23186	-0.23183	-0.23182	-0.23182
1.57080	-0.23827	-0.23782	-0.23779	-0.23778	-0.23778
1.79520	-0.23229	-0.23186	-0.23183	-0.23182	-0.23182
2.01960	-0.21467	-0.21427	-0.21424	-0.21423	-0.21423
2.24399	-0.18628	-0.18594	-0.18591	-0.18590	-0.18590
2.46839	-0.14856	-0.14828	-0.14826	-0.14825	-0.14825
2.69279	-0.10338	-0.10319	-0.10317	-0.10317	-0.10317
2.91719	-0.05302	-0.05292	-0.05291	-0.05291	-0.05291
3.14159	-0.00000	0.00000	-0.00000	0.00000	-0.00000
$L_2 \times 10^3$	0.61257429	0.05293717	0.01842787	0.00166566	
$L_\infty \times 10^3$	0.48876357	0.04223682	0.01471281	0.00128228	

Şekil 4.2'de Lucas polinom yönteminin Difüzyon dalga denklemi için $N = 14$, $\Delta t = 0.0015$ değerlerinde $U(\pi/2, t)$ değerlerinin farklı γ değerleri için grafikte gösterildi. Şekil 4.3'de $N = 14$, $\Delta t = 0.0015$, $\gamma = 1.5$ değerleri ve farklı t bitiş zamanları için çözüm profili gösterildi.



Şekil 4.2: $N = 14$, $\Delta t = 0.0015$ değerlerinde $U(\pi/2, t)$ değerlerinin farklı γ değerleri için çözüm profili



Şekil 4.3: $N = 14$, $\Delta t = 0.0015$, $\gamma = 1.5$ değerleri ve farklı t bitiş zamanları için çözüm profili



5. TARTIŞMA VE SONUÇ

Bu çalışmada, kesirli mertebeden Difüzyon ve Difüzyon dalga denklemlerinin Lucas polinomları yardımıyla nümerik çözümlerinin bulunması amaçlandı. Çalışmanın ikinci bölümünde yöntem tanıtımı yapılarak, ısı iletim ve dalga denklemlerinin çözümü bu yöntem yardımı ile elde edildi. Klasik anlamda (kesirli mertebeden olmayan) ele alınan bu problemler için yöntemin doğrudan uygulanabilir olması, çalışmanın esasını oluşturan dördüncü ve son bölümün hazırlanmasında büyük kolaylıklar sağlamıştır. Kesirli mertebeden olan kısmi diferansiyel denklemlere ilk kez uygulanan yöntemde N bölüntü sayısının çok büyük seçilememesi yöntemin bir dezavantajı olarak karşımıza çıksada literatürde yer alan çalışmalara göre daha küçük seçilen bölüntü sayısı için yöntemle elde edilen çözümlerin yeterli derecede iyi olduğu görülmüştür. Sonuç olarak ele alınan model problemlerin nümerik çözümlerinde kullanılan Lucas polinom yönteminin literatürde yer alan lineer/lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerinde kullanılabilir olduğu söylenebilir.

KAYNAKLAR

- [1] C. Li and A. Chen, *Numerical methods for fractional partial differential equations*, **Int. J. Comput. Math.**, 95:6-7(2018) 1048-1099.
- [2] M. Dalir and M. Bashour, *Applications of fractional calculus*, **Appl. Math. Sci.**, 21 (2010) 1021-1032.
- [3] A. Loverro, *Fractional Calculus: History, Definitions and Applications for the Engineer*; Rapport Technique Univeristy of Notre Dame, Department of Aerospace and Mechanical Engineering; Notre Dame, IN, USA, 2004; pp. 1–28.
- [4] I. Podlubny, *Fractional Differential Equations*, Academic Pres, New York, 1999.
- [5] A. Erdelyi, *Higher Transcendental Functions*, Vol.1. McGraw-Hill, New York, 1955.
- [6] K.B. Oldham and J. Spanier, *The Fractional Calculus*, Academic Pres, New York, 1974.
- [7] K.S. Miller and K.S. Ross, *An Introduction to the Fractional Calculus and Fractional Differential Equations*, Wiley, New York, 1993.
- [8] R. Hilfer, *Applications of Fractional Calculus in Physics*, World Scientific, Singapore, 2000.
- [9] A. A. Kilbas, H. M. Srivasta, J. J. Trujillo, *Theory and applications of Fractional differantial equations*, Elseviar, New York, 2006.
- [10] L. Debnath, D. Bhata, *Integral transforms and their applications*, Chapman-Hall/CRC, USA, 2007.
- [11] S. G. Samko, A. A. Kilbas, O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivative theory and applications*, Gordon and Breach, Longhorne, 1993.
- [12] R. Bertram, *Fractional calculus and its applications*, Springer-Verlag, Berlin, 1975.
- [13] R. A. Dunlap, *Altın oran ve Fibonacci sayıları*, Tübitak, 2013.
- [14] L.C. Andrews, *Special Functions for Engineers and Applied Mathematicians*, Macmillan, New York, 1985.
- [15] M.A. Chaudhry and S.M. Zubair, *Generalized incomplete gamma functions with applications*, **J.Comput. Appl. Math.** 55 (1994) 99-124.

- [16] J.Q. Murillo and S.B. Yuste, *An explicit differences method for solving fractional Diffusion and Diffusion-Wave equations in the Caputo form*, **J.Comput. Nonlinear Dynam.**, 6 (2011) 021014.
- [17] D.A. Murio, *Implicit Finite Difference Approximation for Time Fractional Diffusion Equations*, **Comput. Math. Appl.**, 56 (2008) 1138-1145.
- [18] Yusuf Sökmen. *Genelleştirilmiş Caputo Kesirli Türevi ve Uygulamaları*, Yüksek Lisans Tezi, Ahi Evran Üniversitesi, 2012.
- [19] Orkun Tasbozan. *Lineer Olmayan Kesirli Mertebeden Türevli Kısmi Diferansiyel Denklemlerin Homotopi Analiz Yöntemi ile Çözümü*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, 2011.
- [20] A.B. Koç, M. Çakmak, A. Kurnaz, K. Uslu, *A new Fibonacci type collocation procedure for boundary value problems*, **Difference Equ.**, 2013 (2013) 1-11.
- [21] Ö.Oruç, *A New Algorithm Based on Lucas Polynomials for Approximate Solution of 1D and 2D Nonlinear Generalized Benjamin-Bona-Mahony-Burgers Equation*, **Comput. Math. Appl.**, 74:12(2017) 3042-3057.
- [22] G.D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, Oxford University Press, New York, 1985.
- [23] A. Esen, Y. Uçar, N. M. Yağmurlu and O. Taşbozan, *A Galerkin Finite Element Method to Solve Fractional Diffusion and Fractional Diffusion-Wave Equations*, **Math. Model. Anal.**, 18:2 (2013) 260-273.
- [24] H.G. Sun, W. Chen, K. Y. Sze, *A semi-discrete finite element method for a class of time-fractional diffusion equations*, **Phil Trans R Soc A**, 371(2013) 20120268
- [25] N.H. Sweilam, M.M. Khader, A.M.S. Mahdy, *Crank-Nicolson finite difference method for solving time-fractional diffusion equation*, **J. Fract. Calc. Appl.**, 2(2012) 1-9.
- [26] S. Momami and Z. Odibat . *Analytical approach to linear fractional partial differential equations arising in fluid mechanics*, **Phys. Lett. A** , 355 (2006) 271-279.
- [27] C. Celik and M. Duman, *Crank-Nicolson method for the fractional diffusion equation with the riesz fractional derivative*, **J. Comput. Phys.** , 231 (2012) 1743-1750.

ÖZGEÇMİŞ

Merve KAYA 31.08.1991 yılında Malatya'da doğdu. İlk ve Orta öğrenimini Malatya'da tamamladı. 2010 yılında İnönü Üniversitesi Yabancı Diller Yüksekokulunda İngilizce hazırlık eğitimi aldıktan sonra 2011 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümüne başladı ve 2015 yılında bu bölümden mezun oldu. 2016 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans yapmaya hak kazandı.

