T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MUTLAK OLMAYAN TİPTEN $\ell(\widetilde{B}, p)$ DİZİ UZAYI VE BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Ahmet AKAR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2019

Tezin Başlığı : MUTLAK OLMAYAN TİPTEN $\ell(\widetilde{B}, p)$ DİZİ UZAYI VE BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Tezi Hazırlayan : Ahmet AKAR

Sınav Tarihi : 01.07.2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: **Doç.Dr. Murat CANDAN** ____________

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr.Yılmaz YILMAZ ____________

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Mustafa YILDIRIM ____________

Cumhuriyet Üniversitesi

Prof.Dr. H. İbrahim ADIGÜZEL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Mutlak Olmayan Tipten $\ell(\widetilde{B}, p)$ Dizi Uzayı ve Bazı Geometrik Özellikleri" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ahmet AKAR

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

MUTLAK OLMAYAN TİPTEN $\ell(\widetilde{B},p)$ DİZİ UZAYI VE BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Ahmet AKAR

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

70+iv sayfa

2019

Danışman : Doç.Dr. Murat CANDAN

Bu tez toplamda altı bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümünde matris etki alanı vasıtası ile yeni bir dizi uzayı inşa etme yönteminden ve literatürde mevcut bu teknik için kullanılan farklı sonsuz band matrislerinden bahsetikten sonra tezin bölümlerinin kısa bir özeti sunulmuştur.

İkinci bölümde, tezde kulanılacak olan temel kavramların yanı sıra klasik dizi uzayları ve $\ell(p)$, Maddox uzayı hatırlatılmıştır.

Üçüncü bölümde çift dizisel band matrisi $\tilde{B}$ kullanılarak inşa edilmiş olan mutlak olmayan tipten $\ell(\widetilde{B},p)$ dizi uzayı inşa edilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir.

Dördüncü bölümde mutlak olmayan tipten $\ell(\widetilde{B},p)$ dizi uzayının $\alpha-$, $\beta-$ ve $\gamma-$ dualleri sunulmuştur.

Beşinci bölümde $\ell(\widetilde{B},p)$ dizi uzayından bazı dizi uzaylarına matris sınıflarının karekterizasyonu verilmiştir.

Altıncı bölümde $\ell(\widetilde{B},p)$ dizi uzayının rotundluğu, Kadec-Klee ve düzgün Opial özelikleri gibi bazı geometrik özelikleri ifade ve ispat edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Matris etki alanı, matris dönüşümleri, rotundluk, Kadec-Klee özelliği, düzgün Opial özelliği.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SEQUENCE SPACE $\ell(\widetilde{B}, P)$ OF NON-ABSOLUTE TYPE AND SOME OF ITS GEOMETRIC PROPERTIES

Ahmet AKAR

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

70+iv pages

2019

Supervisor : Doç.Dr. Murat CANDAN

This master thesis consists of six chapters.

In the introductory chapter of the thesis, preliminary information is briefly given about the purpose of this study after mentioning various band matrices.

The second chapter is devoted to the collecting sequence space and all the fundamental concepts which are frequently used in this thesis.

In the third chapter, after the definition of the matrix domain, the literature search of the matrix domain is described in detail. Moreover, the linear sequence space $\ell(\tilde{B}, p)$ is defined and proved that it is a complete paranormed space with a Schauder basis.

In the fourth chapter, two different situations of the sequence $p = (p_k)$ are taken into consideration and alpha-, betha- and gamma- duals of the sequence space $\ell(\tilde{B}, p)$ are determined by means of some given lemmas.

In the fifth chapter, the classes $(\ell(\widetilde{B}, p), \ell_\infty)$, $(\ell(\widetilde{B}, p), f)$, $(\ell(\widetilde{B}, p), c)$ and $(\ell(\widetilde{B}, p), c_0)$ of infinite matrices are characterized. In addition to those, the characterizations of some other classes of matrix transformations from the space $\ell(\tilde{B}, p)$ to the Euler, Riesz, difference; and so forth sequence spaces are found out using some presented lemmas.

In the sixth chapter, constituting the main body of the thesis, the geometric properties of the non-absolute space $\ell(\widetilde{B}, p)$ such as rotundity, and Kadec-Klee and uniform Opial ones are investigated.

KEYWORDS: Matrix domain, matrix transformations, rotunduty, Kadec-Klee property, uniform Opial property.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez çalışmamı yöneten, tezin hazırlanmasının her aşamasında disiplinli ve sistematik bir şekilde beni yönlendiren tecrübe ve deneyimleri ile büyük katkılarda bulunan ve üzerimde emekleri olan danışman hocam Doç. Dr. Murat Candan'a, yine tecrübe ve deneyimleri ile bana katkı sunan saygıdeğer hocalarım Prof. Dr. Yılmaz Yılmaz'a ve Doç. Dr. Kemal Özdemir'e sonsuz şükranlarımı sunarım. Bununla birlikte tez yazımında kullandığım latex programında karşılaştığım zorluklarını gidermede ve diğer konularda yardımını esirgemeyen Doç Dr. Kemal Özdemir ile birlikte İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalına kayıt yaptırdığım günden bu yana yüksek lisans programında her türlü konuda bana yardımcı olan ve yönlendiren başta bölüm başkanımız Prof. Dr. Sadık Keleş ve tüm bölüm elemanlarına teşekkür etmeyi bir borç bilirim. Eğitim öğretim sürecim boyunca anlayış ve sabrı ile her zaman katkıda bulunan benden desteklerini hiç bir zaman esirgemeyen ve bu hayatta ki en büyük değerlerim olan annem Havva Akar, babam Memet Akar ve sevgili eşim Fadime Akar'a da şükranlarımı sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Literatürde bir çok farklı yol izlenilerek dizi uzayı inşa etme yöntemi bulunmaktadır. Son zamanlarda özel bir matrisin etki alanı vasıtasıyla, bir dizi uzayı inşa etme düşüncesi, bazı matematikçiler tarafından kullanılan yeni bir teknik olmuştur. Söz konusu matrislerden bir kısmı fark matrisi, genelleştirilmiş fark matrisi, üç sabit dizi ile oluşturulmuş üçlü band matrisi, ikili dizisel band matrisi, Fibonacci dizileri ile teşkil edilmiş band matrisleri, özel tanımlı fonksiyonların kullanıldığı matrisler olup farklı dizi uzaylarındaki etki alanları bir çok yazar tarafından ele alınıp incelenmiştir. Yine son zamanlarda matris etki alanı kullanılarak inşa edilmiş mutlak olmayan tipten dizi uzaylarının cebirsel, topolojik ve geometrik özelliklerinin incelenmesi araştırılmaya değer görülmüştür. Bu araştırma çalışmalarının bazıları [1–22] nolu referanslarda verilmiştir.

Yakınsaklıkla alakalı olarak adi, koşullu, mutlak ve düzgün yakınsaklık gibi çeşitli tiplerde yakınsaklık kavramlarının tanımlandığı bilinmektedir. Bu durum, dizi ve serilere ilişkin teori ve uygulamalarda büyük bir esneklik sağlamaktadır. Temelde düzgün sınırlılık teoremine dayanan bir diğer yakınsaklık kavramı olan zayıf yakınsaklık kavramı varyasyon hesap, genel diferansiyel denklemler teorisi gibi çok çeşitli uygulama alanlarına sahiptir. Bu kavram, fonksiyonel analizin temel ilkelerinden birini ya da daha açık bir ifade ile uzayların incelenmesinin çoğunlukla bu uzayların dualleri ile ilişkin olduğu gerçeğini açığa çıkarır. Tezde $\ell(\widetilde{B}, p)$ dizi uzayının Kadec-Klee özelliğine sahip olduğu gerçeği ispatlanırken zayıf yakınsaklık kavramından yararlanılmıştır.

Bu tezin temel kaynakları H. Nergis ve F. Başar'ın [23] ve [24] nolu referanstaki makaleleri olup bu yüksek lisans tezi toplamda altı bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür. İkinci bölüm standart fonksiyonel analiz derslerinden iyi bilinen ve tezde kullanılacak olan temel kavramları hatırlatmayı amaçlamaktadır. Üçüncü bölümde çift dizisel band matrisinin $\ell(p)$ etki alanında olan mutlak olmayan tipten $\ell(\widetilde{B}, p)$ dizi uzayı tanımı verilerek ilgili uzayın çeşitli cebirsel ve topolojik özellikleri formel olarak sunulmuştur. 4-üncü bölümde $\ell(\widetilde{B}, p)$ uzayının Köthe-Toeplitz duali, genelleştirilmiş Köthe-Toeplitz duali ve Garling duallerine değinilmiştir. 5-inci bölümde matris sınıflarına giriş yapılıp belirli durumlarda $\ell(\widetilde{B}, p)$ den standart dizi uzaylarına matris dönüşümleri başta olmak üzere çeşitli matris dönüşümleri irdelenmiştir. 6-ıncı ve son bölümde bir Banach uzayının en önemli geometrik özelliklerinden biri olan kesin konvekslik, Kadec-Klee özelliği, Opial özelliği ve düzgün Opial özelliği kavramları sunularak $\ell(\widetilde{B}, p)$ uzayının bu özelliklerle olan ilişkisi ortaya konulmuştur.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde sunulanlar analiz branşının temel kavramları olup tezde ihtiyaç duyulan tanımlar, teoremler ve eşitsizliklerdir.

2.1 Gerekli Tanımlar, Teoremler ve Eşitsizlikler

Tanım 2.1.1. *X boş olmayan bir cümle ve $\mathbb{F}$ reel ya da kompleks sayıların bir cismi olsun. Her $\lambda, \mu \in \mathbb{F}$ ve $x, y, z \in X$ için*

$$+ : X \times X \to X$$

$$. : \mathbb{F} \times X \to X$$

işlemleri,

i) $x + y = y + x$,

ii) $x + (y + z) = (x + y) + z$,

iii) $x + \theta = x$ *olacak şekilde bir* $\theta \in X$ *mevcut,*

iv) $x + (-x) = \theta$ *olacak şekilde bir* $-x \in X$ *mevcut,*

v) $1x = x$,

vi) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

vii) $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$,

iix) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$

şartlarını sağlayan X cümlesine $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir *lineer uzayı* veya *vektör uzayı* denir [25].

Tanım 2.1.2. *X bir vektör uzayı ve $Y \subset X$ olsun. X deki işlemlere göre Y alt cümlesi de bir vektör uzayı ise Y cümlesine bir alt uzay denir. Alt uzaylar bazen lineer katman olarak da adlandırılırlar [25].*

Lemma 2.1.1. *X bir vektör uzayı, $\phi \neq Y \subset X$ olsun. Eğer her $x, y \in Y$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{F}$ için*

$$\alpha x + \beta y \in Y$$

ise Y ye X in bir alt vektör uzayıdır [25].

Tanım 2.1.3. *X bir lineer uzay olsun. Her $\lambda \in \mathbb{F}$ ve her $x, y \in X$ için*

i) $\|\theta\| = 0$

ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartlarını sağlayan $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonuna bir yarınorm $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir yarınormlu uzay denir. (i) ve (iii) şartlarının yanında $\|x\| = 0$ iken $x = \theta$ şartını da sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna *norm*, $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir *normlu uzay* denir. Yarınormun tanımından her $x \in X$ için $\|x\| \geq 0$ dır [26].

Tanım 2.1.4. *X bir lineer uzay olsun. Her $x, y \in X$ için*

i) $h(\theta) = 0$

ii) $h(x) = h(-x)$

iii) $h(x + y) \leq h(x) + h(y)$

iv) Eğer $\lambda_n, \lambda_o \in \mathbb{F}$ için $\lambda_n \to \lambda_o$ $(n \to \infty)$ ve $x_n, x_o \in X$ için $h(x_n - x_o) \to 0$ $(n \to \infty)$ iken $h(\lambda_n x_n - \lambda_o x_o) \to 0$ $(n \to \infty)$

şartlarını sağlayan $h : X \to \mathbb{R}$ fonsiyonuna bir *paranorm*, (X, h) ikilisine de bir *paranormlu uzay* denir. Ayrıca $h(x) = 0$ ise $x = \theta$ şartını da sağlıyorsa h ya bir *total paranorm*, (X, h) ikilisine de bir *total paranormlu uzay* denir [25–29].

Tanım 2.1.5. *Bir $M \neq \varnothing$ kümesi üzerinde tanımlı bir metrik her $x, y \in M$ için*

(a) $d(x, y) = 0 \iff x = y$;

(b) $d(x, y) = d(y, x)$;

(c) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (*üçgen eşitsizliği*)

özeliklerini sağlayan bir $d : M \times M \to \mathbb{R}$ fonksiyonudur. Eğer d, M üzerinde bir metrik ise o zaman (M, d) çiftine bir *metrik uzay* denir [29].

Tanım 2.1.6. (X, d) *bir metrik uzay olmak üzere bu uzaydaki her Cauchy dizisi yakınsak ise X e bir tam metrik uzay denir [25].*

X normlu vektör uzayı olmak üzere, norm aracılığı ile $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$d(x, y) = \|x - y\| \tag{2.1.1}$$

olarak tanımlandığında (2.1.1) ile tanımlanan d fonksiyonu X vektör uzayı üzerinde bir metriktir. Normdan üreyen bu metriğe X normlu uzayı üzerinde *doğal metrik* adı verilir.

Tanım 2.1.7. *Doğal metriğe göre tam olan bir normlu uzaya Banach uzayı adı verilir [25].*

Tanım 2.1.8. *X boştan farklı bir cümle ve τ, X in alt cümlesinin bir sınıfı olsun. Eğer τ,*

i) $\varnothing \in \tau$ *ve* $X \in \tau$

ii) τ *daki cümlelerin herhangi bir birleşimi* τ *da ise* *iii) τ daki cümlelerin herhangi bir sonlu sayıdaki kesişimi τ da ise*

τ ya X için bir *topoloji*, (X, τ) ikilisine de bir *topolojik uzay* denir [25–31].

Bir yarınormun bir paranorm olduğu kolayca görülebilir. Böylece her yarınormlu uzay bir paranormlu uzaydır. Benzer şekilde her normlu uzayın bir total paranormlu uzay olduğu kolayca görülür. Ancak her paranorm bir yarınorm ve her total paranorm bir norm değildir.

Diziler ve seriler analizin toplanabilme teorisinde ağırlıklı olarak kullanılması ile birlikte matematiğin diğer branşları ile fizik, bilgisayar bilimleri başta olmak üzere son zamanlarda yüz tanıma yazılımlarında da kullanılan bir kavramdır.

Aşağıda özellikle temel analizden çok iyi bilinen dizi tanımı verilecek ve tezde lazım olacak belirli bilgiler sunulacaktır.

Boş cümleden farklı olan herhangi bir cümle X olmak üzere bir dizi $f : \mathbb{N} \to X$ fonksiyonu olarak tanımlanır. Daha başka bir ifade ile X içinde bir dizi X in elemanlarının sıralı bir listesi olarak düşünülebilir ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k = f(k)$$

olmak üzere

$$(x_1, x_2, ..., x_k, ...)$$

biçiminde yazılır. Genellikle bir dizi için (x_k) notasyonu kullanılır. Herhangi bir karışıklık olmaması için gerekli görüldüğü durumlarda hangi değişkenin diziyi indekslediğini belirtmek önemli ise $(x_k)_{k=1}^{\infty}$ notasyonu kullanılır. Burada x_k ya dizinin $k-$ıncı terimi ya da genel terimi denir.

Diziler X cümlesine göre adlandırılır. Eğer $X = \mathbb{R}$ ise diziye reel sayılar dizisi, $X = \mathbb{C}$ ise diziye kompleks sayılar dizisi, $X = \mathbb{R}_2^2$ ise diziye terimleri reel sayılar olan 2×2 tipindeki matrislerin dizisi denir.

Tüm reel değerli $x = (x_k)$ dizilerinin cümlesi $\omega(\mathbb{R})$, ω veya s notasyonlarından biri ile gösterilir. ω üzerinde özdeşlik dönüşümü, toplama ve bir skaler ile çarpma işlemleri doğal yolla tanımlanır. $x = (x_k)$ ve $y = (y_k)$ dizileri verildiğinde her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = y_k$ ise $x = y$ ve λ, herhangi bir reel sayı olduğunda

$$x + y = (x_k + y_k)$$

ve

$$\lambda x = (\lambda x_k)$$

dır. Tüm x, y ve $z \in \omega$ için Tanım 2.1.1 de verilen şartlar sağlandığından ω bir vektör uzayıdır. ω nın sıfır elemanı tüm terimleri sıfır olan $\theta = (0)$ dizisidir.

Bu açıklamaların ışığında ω uzayı aşağıdaki gibi verilebilir.

Tanım 2.1.9. *Reel terimli tüm dizilerin uzayı ω,*

$$\omega = \{x = (x_k) : her\ k \in \mathbb{N}\ için\ x_k \in \mathbb{R}\}$$

cümlesi ile gösterilir.

ω nın herbir alt vektör uzayına bir dizi uzayı adı verilir. Aşağıda bazı dizi uzayları sunulmuştur.

Tanım 2.1.10. *Sınırlı dizilerin ℓ_∞ uzayı, sıfıra yakınsak ve yakınsak dizilerin uzayları sırası ile*

$$\begin{aligned}
\ell_\infty &= \left\{x = (x_k) \in \omega : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty\right\} \\
c_0 &= \left\{x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \to \infty} x_k = 0\right\} \\
c &= \left\{x = (x_k) \in \omega : \lim_{k \to \infty} |x_k - \ell| = 0,\ en\ az\ bir\ \ell \in \mathbb{R}\ için\right\}
\end{aligned}$$

cümleleri ile tanımlanır.

Tanım 2.1.11. *Bir (x_k) dizisi için, genel terimi*

$$s_k = x_1 + x_2 + ... + x_k$$

şeklinde tanımlanan (s_k) *dizisi düşünüldüğünde* $((x_k), (s_k))$ *sıralı ikilisine kısaca seri ismi verilir. Burada* x_k *terimine, serinin genel terimi denir. Genel terimi* x_k *olan seri de*

$$\sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

notasyonu ile gösterilir. Eğer $\lim_{k\to\infty} s_k = s$ *ise* $\sum_k x_k$ *serisine yakınsak ve toplamı* s *denir.*

Tanım 2.1.12. *Sırası ile yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı, sınırlı seri teşkil eden dizilerin uzayı ve mutlak p-toplanabilir dizilerin* ℓ_p *uzayı*

$$\begin{aligned} cs &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} x_k \ \textit{yakınsak} \right\} \\ bs &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sup_{n\in\mathbb{N}} \left| \sum_{k=0}^{n} x_k \right| < \infty \right\} \\ \ell_p &= \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p < \infty \right\}, \qquad 0 < p < \infty \end{aligned}$$

ile gösterilir.

Tanım 2.1.13. *Pozitif reel sayıların sınırlı bir dizisi* (p_k) *dizisi aynı zamanda* H *ile* M *ise* $H = \sup p_k$, $M = \max\{1, H\}$ *olmak üzere Maddox [32] (aynı zamanda Simons [33], Nakano [34]) tarafından tanımlanan* $\ell(p)$ *lineer uzayı*

$$\ell(p) = \left\{ x = (x_k) \in \omega : \sum_k |x_k|^{p_k} < \infty \right\}$$

cümlesidir ve bu uzay

$$h(x) = \left(\sum_k |x_k|^{p_k} \right)^{\frac{1}{M}}$$

ile tam paranormlu uzaydır.

Tanım 2.1.14. *Her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $(Px)_n = x + 1$ *eşitliği ile verilen* ω *üzerindeki* P *operatörüne* $shift$ *operatörü denir. (* ℓ_∞ *üzerinde bir* L *Banach limiti negatif olmayan bir lineer fonksiyonel olarak tanımlanır öyle ki* $L(Px) = L(x)$ *ve* $L(e) = 1$, *burada* $e = (1, 1, ...)$ *dir.)*

Tanım 2.1.15. *Bir $x = (x_n)$ dizisinin bir l sayısına hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter koşul bütün L Banach limitleri için $L(x) = l$ olmasıdır.*

1948'de Lorentz, x in l ye hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şartın

$$\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_{n+k} \to l \quad (m \to \infty) \ n \text{ ye göre düzgün}$$

olduğunu ispatlamıştır. Yani hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı

$$\hat{c} = \left\{ x : \lim_{m} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} x_{n+k} \text{ mevcut, } n \text{ ye göre düzgün} \right\}$$

cümlesidir. Literatürde hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı $\hat{c}$ veya f sembollerinden biri ile de gösterilmektedir.

Tanım 2.1.16. *Eğer $M \subset \mathbb{N}$ ise $S_M : \omega \to \omega$ lineer dönüşümü*

$$(S_M(x))_i = \begin{cases} x_i, i \in M \ \textit{ise} \\ 0, i \notin M \ \textit{ise} \end{cases}$$

ile tanımlanır. Eğer $M = \{1, 2, ..., n\}$ ise S_M için S_n yazılır. $S_n(x)$ öğesine $x \in \omega$ nın $n-$inci kısmı adı verilir bazen $S_n(x)$ için $x^{(n)}$ gösterimi de kullanılır. Yani, $x_1, x_2, ...$ ler x in koordinatları ise

$$e^i = \delta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

olmak üzere

$$S_n(x) = x^{(n)} = \{x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...\} = \sum_{i=1}^{n} x_i e^i$$

dir [35].

Tanım 2.1.17. *$(X, \|\cdot\|_X)$ ve $(Y, \|\cdot\|_Y)$ normlu uzaylar ve $f : X \to Y$ bir dönüşüm ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için*

$$\|x - x_0\|_X < \delta \ \textit{olan her } x \in X \ \textit{için} \ \|f(x) - f(x_0)\|_Y < \varepsilon$$

olacak biçimde bir $\delta(x_0, \varepsilon) > 0$ sayısı varsa f ye x noktasında süreklidir denir. Eğer f fonsiyonu X in her noktasında sürekli ise f ye X üzerinde süreklidir denir [29].

Tanım 2.1.18. *X bir vektör uzayı ve τ, X üzerinde bir topoloji olsun. Bu takdirde eğer*

$$
\begin{aligned}
+ : X \times X \to & X \\
(x, y) \to & x + y
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\cdot : \mathbb{F} \times X \to & X \\
(\lambda, x) \to & \lambda x
\end{aligned}
$$

dönüşümleri sürekli ise, bu takdirde (X, τ) topolojik uzayına bir topolojik vektör uzayı denir ve bu durum kısa olarak TVS olarak gösterilir. (X, τ) topolojik vektör uzayı üzerindeki topolojiye lineer ya da vektör topoloji denir [25–31, 35].

Tanım 2.1.19. *Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k(x) = x_k$ ile tanımlanan $p_k : \lambda \to \mathbb{F}$ dönüşümlerinin her biri sürekli ise bir lineer topoloji ile birlikte bu λ dizi uzayına $K-$uzayı (koordinat uzayı) denir [35].*

Tanım 2.1.20. *λ; bir K-uzayı olmak üzere aynı zamanda bir Banach uzayı ise yani bir tam lineer metrik uzay ise λ, $K-$uzayına bir $BK-$uzayı denir [35].*

Örnek 2.1.1. *c_0, c ve ℓ_∞ uzayları $\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$ normu ile Banach uzayı ve her bir k için*

$$|x_k| \leq \|x\|_\infty$$

olduğundan bu dizi uzaylarının koordinat izdüşüm fonksiyonları süreklidir. Bundan dolayı c_0, c ve ℓ_∞ uzayların her biri BK-uzayıdır. Bundan başka $1 \leq p < \infty$ olmak üzere ℓ_p uzayı

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

normu ile bir $BK-$uzayıdır.

Herhangi bir $1 \leq k \leq m$ için $p_k(x) = x_k$, $k \geq 1$ ile tanımlı izdüşüm fonksiyonları $\left(\ell_p, \|x\|_{\ell_p}\right)$ üzerinde süreklidir. Gerçekten $y = (y_1, y_2, ..., y_m, ...)$ için

$$\begin{aligned} |p_k(x) - p_k(y)| &= |x_k - y_k| \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} |x_k - y_i|^p\right)^{1/p} \\ &= \|x - y\|_{\ell_p} \end{aligned}$$

bulunur. Her $\varepsilon > 0$ için $\delta = \varepsilon$ seçilirse

$$\|x - y\|_{\ell_p} < \delta$$

için

$$|p_k(x) - p_k(y)| < \delta = \varepsilon$$

bulunur. Bu nedenle p_k izdüşüm fonksiyonları süreklidir.

Tanım 2.1.21. *(X, τ) bir $K-$uzayı ve $x = (x_k) \in (X, \tau)$ olsun. Bu takdirde eğer*

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} x_k e^k \to x \in (X, \tau)$$

ise x, AK-özelliğine sahiptir denir. Eğer (X, τ) uzayının her x elemanı AK-özelliğine sahip ise (X, τ) uzayına $AK-$uzayı denir [36, 37].

Tanım 2.1.22. *Sınırlı dizileri sınırlı dizilere dönüştüren lineer dönüşümlere limitleme metodu denir [38].*

Tanım 2.1.23. *A ve B iki limitleme metodu olmak üzere her B-limitlenebilen dizi aynı limite A-limitlenebilir ise A ya B den daha kuvvetlidir denir ve bu durum $A \supseteq B$ şeklinde yazılır [38].*

Tanım 2.1.24. *X ve Y aynı bir $\mathbb{F}$ cismi üzerinde tanımlanan iki vektör uzayı olmak üzere $T : X \longrightarrow Y$ lineer dönüşümü birebir ve örten ise bu dönüşüme lineer izomorfizm adı verilir [25, 27, 39].*

Tanım 2.1.25. *λ ve μ herhangi iki dizi uzayı ve her $k, n \in \mathbb{N}$ için a_{nk} lar reel veya kompleks sayılar olmak üzere $A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris olsun. Bu takdirde her bir $n \in \mathbb{N}$ için*

$$(Ax)_n = \sum_k a_{nk} x_k$$

olmak üzere; eğer her $x = (x_k) \in \lambda$ dizisi için x in A dönüşümü olan $Ax = \{(Ax)_n\}$ dizisi, μ dizi uzayında ise A matrisine λ dan μ ye bir matris dönüşümü tanımlıyor denir ve $A : \lambda \longrightarrow \mu$ olarak yazılır. $A : \lambda \longrightarrow \mu$ ye olan bütün A matrislerinin sınıfı $(\lambda : \mu)$ ile gösterilir [36, 40].

$A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris için $(Ax)_n = \sum_k a_{nk} x_k$ dir. Daha açık olarak

$$(Ax)_n = \begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \dots & a_{0k} & \dots \\ a_{10} & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1k} & \dots \\ . & . & . & \dots & . & \dots \\ a_{n0} & a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nk} & \dots \\ . & . & . & \dots & . & \ddots \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_k a_{0k} x_k \\ \sum_k a_{1k} x_k \\ \vdots \\ \sum_k a_{nk} x_k \\ \vdots \end{bmatrix}$$

şeklindedir.

$\widetilde{r} = (r_k)$ ve $\widetilde{s} = (s_k)$ reel sayıların yakınsak iki dizisi olmak üzere her $k, n \in \mathbb{N}$ için

$$b_{nk}(r_k, s_k) = \begin{cases} r_k & , \quad k = n \\ s_k & , \quad k = n-1 \\ 0 & , \quad - \end{cases}$$

olarak tanımlanan $B(\widetilde{r}, \widetilde{s}) = \{b_{nk}(r_k, s_k)\}$ matrisine ikili dizisel band matrisi denir. Daha açık bir ifade ile

$$B(\widetilde{r},\widetilde{s}) = \begin{bmatrix} r_0 & 0 & 0 & 0 & ... \\ s_0 & r_1 & 0 & 0 & ... \\ 0 & s_1 & r_2 & 0 & ... \\ 0 & 0 & s_2 & r_3 & ... \\ . & . & . & . & ... \end{bmatrix}$$

dir.

İlk olarak ikili dizisel band matrisini Srivastara ve Kumar [41, 42], Panigrahi ve Srivastava [43] ve Akmedov ve El-Shabrawy [44] kullanmış olup son zamanlarda Candan [1–3], Nergis ve Başar [23, 24] ve bazı matematikçiler çalışmalarında bahsi geçen matrisi kullanmışlardır.

Kirişçi ve Başar'ın [45] nolu çalışmasının devamında; $B(\widetilde{r},\widetilde{s})$ dönüşümleri klasik dizi uzaylarında ve hemen hemen yakınsak dizilerin uzayın da olan tüm dizilerin uzaylarını Candan [1] ve [3] nolu çalışmalarda, $\ell(p)$ uzayında olan bütün dizileri içeren mutlak olmayan tipten $\ell(\widetilde{B},p)$ dizi uzayını ise H. Nergis ve F. Başar [24] nolu çalışmalarında tanımladılar. Kısaca [23] nolu çalışmada $\ell(\widetilde{B},p)$ uzayının alpha-, betha- ve gamma- duallerini hesaplayıp bazını inşa ettikten sonra $\ell(\widetilde{B},p)$ uzayından bazı dizi uzaylarına matris dönüşümlerini karekterize ettiler. Yine H. Nergis ve F. Başar [24] nolu çalışmalarında $\ell(\widetilde{B},p)$ uzayının rotundluğu gibi geometrik özelliklerinin yanı sıra Kadec-Klee ve düzgün Opial özeliklerini incelediler.

$B(\widetilde{r},\widetilde{s})$ matrisinde özel olarak $\widetilde{r}=e$ ve $\widetilde{s}=-e$ alınırsa açık olarak $\Delta^{(1)}$ matrisi elde edilir. Bununla birlikte $\widetilde{r}=re$ ve $\widetilde{s}=se$ alınırsa genelleştirilmiş fark matrisi olan $B(r,s)$ matrisi elde edilir. Dolayısıyla $B(\widetilde{r},\widetilde{s})$ matrisinin etki alanı ile ilgili sonuçlar $\Delta^{(1)}$ ve $B(r,s)$ matrislerinin etki alanı ile ilgili sonuçlardan daha genel ve daha kapsamlıdır. Burada şunu da belirtelim ki tüm çalışma boyunca

$$\frac{1}{p_k}+\frac{1}{p_k'}=1 \tag{2.1.2}$$

olarak kabul edilecektir. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$ doğal sayılar cümlesinin bütün sonlu cümlelerinin koleksiyonu da $\mathcal{F}$ ile gösterilecektir.

3. $\widetilde{B}$ ÇİFT BANT MATRİSİNİN $\ell(p)$ UZAYINDAKİ ETKİ ALANI

Bu bölümde matris etki alanı tanımından faydalanılarak inşa edilmiş olan literatürdeki bazı çalışmalara yer verildikten sonra $B(\widetilde{r}, \widetilde{s})$ dizisel çift band matrisinin $\ell(p)$ dizi uzayındaki etki alanı olan $\ell(\widetilde{B}, p)$ tam paranormlu lineer dizi uzayı tanımlanarak bazı özellikleri incelenmiştir.

3.1 Mutlak Olmayan Tipten $\ell(\widetilde{B}, p)$ Dizi Uzayı

Tanım 3.1.1. *λ bir dizi uzayı, A da sonsuz bir matris olmak üzere;*

$$\lambda_A = \{x = (x_k) \in \omega : Ax \in \lambda\} \tag{3.1.1}$$

olarak tanımlanan cümleye A matrisinin $\lambda-$etki alanı denir. Burada λ_A da bir dizi uzayıdır [23].

Her k ve n doğal sayısı için

$$s_{nk} = \begin{cases} 1 & , \quad 0 \leq k \leq n \\ 0 & , \quad \quad k > n \end{cases}$$

ile tanımlanan $S = (s_{nk})$ matrisi için S dönüşümleri, $\ell(p)$ uzayında olan bütün dizileri içeren $\overline{\ell(p)}$ notasyonu ile gösterilen dizi uzayı Choudhary ve Mishra [46] tarafından tanımlanmıştır.

Kısmi toplamlar dizisi, $\ell_\infty(p)$ dizi uzayında olan tüm dizilerin cümlesi [47] nolu çalışmada Başar tarafından $bs(p)$ dizi uzayı olarak tanımlanmıştır. (3.1.1) gösterimi ile $\overline{\ell(p)}$ ve $bs(p)$ uzayları; $\overline{\ell(p)} = [\ell(p)]_S$, $bs(p) = [b_\infty(p)]_S$ olarak gösterilir. Çok yakın zamanda Nergiz ve Başar [24] ve [23] nolu çalışmalarında $B(\widetilde{r}, \widetilde{s})$ dönüşümleri $\ell(p)$ uzayında olan bütün dizilerin cümlesini $\ell(\widetilde{B}, p)$ dizi uzayı olarak tanımladılar. Daha açık bir ifade ile $0 < p_k \leq H < \infty$ olmak üzere $\ell(\widetilde{B}, p)$

uzayı

$$\ell(\widetilde{B},p)=\left\{(x_k)\in\omega:\sum_k|s_{k-1}x_{k-1}+r_kx_k|^{p_k}<\infty\right\}$$

cümlesidir.

Her $k\in\mathbb{N}$ için $p_k=p$ alınması durumunda $\ell(\widetilde{B},p)$ dizi uzayı daha önce Kirişçi ve Başar [45] tarafından tanımlanan $\tilde{\ell}_p$ uzayına indirgenir. $\ell(\widetilde{B},p)$ dizi uzayı (3.1.1) gösterimi kullanılırsa aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\ell(\widetilde{B},p):=[\ell(p)]_{\widetilde{B}}.$$

Bir $x=(x_k)$ dizisinin $B(\widetilde{r},\widetilde{s})$ dönüşümü olan dizi $y=(y_k)$ dizisi ise her $k\in\mathbb{N}$ için

$$y_k=\{B(\widetilde{r},\widetilde{s})x\}_k=s_{k-1}x_{k-1}+r_kx_k \tag{3.1.2}$$

olur ki, buradan çok açık bir şekilde

$$\begin{aligned}\ell(\widetilde{B},p)&=[\ell(p)]_{B(\widetilde{r},\widetilde{s})}\\&=\{x=(x_k)\in\omega:B(\widetilde{r},\widetilde{s})x\in\ell(p)\}\\&=\{x=(x_k)\in\omega:y\in\ell(p)\}\\&=\left\{x=(x_k)\in\omega:\sum_k|y_k|^{p_k}<\infty\right\}\\&=\left\{(x_k)\in\omega:\sum_k|s_{k-1}x_{k-1}+r_kx_k|^{p_k}<\infty\right\}\end{aligned} \tag{3.1.3}$$

elde edilir.

Şimdi aşağıdaki teoremde kullanılacak olan, Alman matematikçi Hermann Minkowski tarafından elde edilen ve literatürde Minkowski eşitsizliği olarak bilinen eşitsizliği verelim.

Lemma 3.1.1. *Hepsi birden sıfır olmayan x_i,y_i $i=1,2,...$ reel ya da kompleks sayıları ve $1<p<\infty$ sayısı için*

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i+y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leq\left(\sum_{i=1}^{\infty}|x_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{\infty}|y_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

dir.

Teorem 3.1.1. *$1 \leq p < \infty$ ve $x = (x_n) \in \ell_p$ olmak üzere*

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanan $\|.\|_{\ell_p} : \ell_p \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ℓ_p üzerinde bir normdur.

$\|.\|_{\ell_p}$, ℓ_p uzayı için doğal normdur. Bu norm ℓ_p üzerindeki d_{ℓ_p} metriğini indirger yani

$$d_{\ell_p}(f, g) = \|f - g\|_{\ell_p}$$

dir [29].

İspat. i) Her $x = (x_n) \in \ell_p$ için $\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \geq 0$ dır. $x = (x_n) \in \ell_p$ için $\|x\|_{\ell_p} = 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\|x\|_{\ell_p} = 0 &\Longleftrightarrow \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} = 0 \\
&\Longleftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p = 0 \\
&\Longleftrightarrow |x_n| = 0 \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için} \\
&\Longleftrightarrow x_n = 0 \text{ her } n \in \mathbb{N} \text{ için} \\
&\Longleftrightarrow x = 0
\end{aligned}$$

olduğu görülür.

ii) Her $x = (x_n) \in \ell_p$ ve her $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned}
\|\lambda x\|_{\ell_p} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |\lambda|^p |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= \left(|\lambda|^p \sum_{n=1}^{\infty} |\lambda x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= (|\lambda|^p)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
&= |\lambda| \, \|x\|_{\ell_p}
\end{aligned}$$

olur.

iii) Minkowski eşitsizliği kullanılarak üçgen eşitsizliğinin sağlandığı gösterilebilir. Her $x = (x_n) \in \ell_p$ ve $y = (y_n) \in \ell_p$ için Minkowski eşitsizliğini kullanılarak

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

yazılabilir. Buna göre

$$\begin{aligned} \|x+y\|_{\ell_p} &= \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n + y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|x\|_{\ell_p} + \|y\|_{\ell_p} \end{aligned}$$

olur. O halde $\left(\ell_p, \|.\|_{\ell_p}\right)$ bir normlu uzaydır. □

Burada şunu da belirtelim ki $0 < p < 1$ olması durumunda

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

norm tanımlamaz. Gerçekten

$$x = (1, 0, 0, ..., 0, ...)$$

$$y = (0, 1, 0, ..., 0, ...)$$

alındığında

$$x + y = (1, 1, 0, ..., 0, ...)$$

olur. Bu durumda

$$\|x\|_{\ell_p} = (1^p)^{\frac{1}{p}} = 1$$

ve

$$\|y\|_{\ell_p} = (1^p)^{\frac{1}{p}} = 1$$

olup

$$\|x+y\|_{\ell_p} = (1^p + 1^p)^{\frac{1}{p}} = 2^{\frac{1}{p}}$$

bulunur. Böylece $\frac{1}{p} > 1$ olduğundan

$$\|x\|_{\ell_p} + \|y\|_{\ell_p} = 1 + 1 = 2 < 2^{\frac{1}{p}} = \|x+y\|_{\ell_p}$$

elde edilir ki bu $0 < p < 1$ olması durumunda $\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x_n|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ nin ℓ_p üzerinde norm tanımlamadığını ispatlar. Fakat

$$d_{\ell_p}(x,y) = \|x-y\|_{\ell_p}^p, \qquad 0 < p < 1$$

ℓ_p için bir metriktir.

Teorem 3.1.2. $\ell(\widetilde{B},p)$ *dizi uzayı,*

$$h(x) = \left(\sum_k |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} \tag{3.1.4}$$

paranormu ile paranormlu tam metrik uzaydır [23].

İspat. $\ell(\widetilde{B},p)$ uzayının toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile bir lineer uzay olduğunu göstermek kolaydır.

i) Her $x,y \in \ell(\widetilde{B},p)$ için $(x+y) \in \ell(\widetilde{B},p)$ olduğu gösterilmeli. $\ell(\widetilde{B},p)$ nin (3.1.3) daki tanımından

$$\begin{aligned}
&\sum_k |s_{k-1}(x_{k-1}+y_{k-1}) + r_k(x_k+y_k)|^{p_k} \\
&= \sum_k \left[|(s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k) + (s_{k-1}y_{k-1} + r_k y_k)|^{\frac{p_k}{M}}\right]^M \\
&\leq \sum_k \left[|s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{\frac{p_k}{M}} + |s_{k-1}y_{k-1} + r_k y_k|^{\frac{p_k}{M}}\right]^M \\
&\leq \left[\sum_k |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{\frac{p_k}{M}}\right]^M + \left[\sum_k |s_{k-1}y_{k-1} + r_k y_k|^{\frac{p_k}{M}}\right] \\
&< \infty
\end{aligned}$$

dur. Böylece $(x+y) \in \ell(\widetilde{B},p)$ dir.

ii) Her $x,y \in \ell(\widetilde{B},p)$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha x \in \ell(\widetilde{B},p)$ olduğunu göstermek için

$$\begin{aligned}
\sum_k |\alpha(s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k)|^{p_k} &= |\alpha|^{p_k} \sum_k |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k} \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olup $\alpha x \in \ell(\widetilde{B},p)$ dir. O halde $\ell(\widetilde{B},p)$ bir lineer uzaydır.

Öncelikle (3.1.4) ile tanımlanan h nın bir paranorm olduğu gösterilmeli. $\theta = (0,0,...)$ olduğundan $h(\theta)=0$ olduğu ve $x \in \ell(\widetilde{B},p)$ için $h(x)=h(-x)$ eşitliğinin sağlandığı kolay bir şekilde görülebilir. Üçgen eşitsizliği için Minkowski eşitsizliğinden faydalanıldığında her $x,y \in \ell(\widetilde{B},p)$ alınıp kolay bir şekilde aşağıdakiler yazılabilir:

$$\begin{aligned}
h(x+y) &= \left[\sum_k \left|s_{k-1}\left(x_{k-1}+y_{k-1}\right)+r_k\left(x_k+y_k\right)\right|^{p_k}\right]^{\frac{1}{M}} \\
&= \left[\sum_k \left[\left|(s_{k-1}x_{k-1}+r_kx_k)+(s_{k-1}y_{k-1}+r_ky_k)\right|^{\frac{p_k}{M}}\right]^M\right]^{\frac{1}{M}} \\
&\leq \left\{\sum_k \left[\left|s_{k-1}x_{k-1}+r_kx_k\right|^{\frac{p_k}{M}}+\left|s_{k-1}y_{k-1}+r_ky_k\right|^{\frac{p_k}{M}}\right]^M\right\}^{\frac{1}{M}} \\
&\leq \left[\sum_k \left|s_{k-1}x_{k-1}+r_kx_k\right|^{p_k}\right]^{\frac{1}{M}}+\left[\sum_k \left|s_{k-1}y_{k-1}+r_ky_k\right|^{p_k}\right]^{\frac{1}{M}} \\
&= h(x)+h(y)
\end{aligned}$$

dir. (λ_n), $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ $(n \to \infty)$ olmak üzere skalerlerin bir dizisi, $\left(x^{(n)}\right)_{n=0}^{\infty}$ dizisi de $x^n \in \ell(\widetilde{B},p)$ elemanlarının $h(x^{(n)}-x) \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ olacak şekilde ki bir dizisi olsun. Buna göre

$$h(\lambda_n x^{(n)}-\lambda x) \leq h\left[(\lambda_n-\lambda)\left(x^n-x\right)\right]+h\left[\lambda\left(\lambda_n-\lambda\right)\right]+h\left[(\lambda_n-\lambda)x\right] \quad (3.1.5)$$

yazılabilir ki $\lambda_n \longrightarrow \lambda$ $(n \to \infty)$ olduğundan yeterince büyük n ler için $|\lambda_n-\lambda|<1$ alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} h\left[(\lambda_n-\lambda)\left(x^n-x\right)\right] \leq \lim_{n\to\infty} h(x^{(n)}-x)=0 \quad (3.1.6)$$

olur. Buna ilaveten

$$\lim_{n\to\infty} h\left[\lambda\left(\lambda_n-\lambda\right)\right] \leq \max\left\{1,|\lambda|^M\right\}.\lim_{n\to\infty} h(x^{(n)}-x)=0 \quad (3.1.7)$$

dir. Aynı zamanda

$$\lim_{n\to\infty} h\left[(\lambda_n-\lambda)x\right] \leq \lim_{n\to\infty} |\lambda_n-\lambda|.h(x)=0 \quad (3.1.8)$$

dır. Dolayısı ile (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7) ve (3.1.8) den

$$h(\lambda_n x^{(n)} - \lambda x) \longrightarrow 0, \qquad (n \to \infty)$$

elde edilir. Bu da h nın $\ell(\widetilde{B}, p)$ üzerinde bir paranorm olduğunu gösterir. Bunlara ilaveten $h(x) = 0$ ise

$$\left[\sum_k |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k}\right]^{\frac{1}{M}} = 0$$

dır. Buradan her bir $k \in \mathbb{N}$ için $|s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k} = 0$ elde edilir. Eğer $k = 0$ yazılırsa $|s_{-1}x_{-1} + r_0 x_0|^{p_0} = 0$ olup $r_0 \neq 0$ ve $s_{-1} = 0$ olduğundan $x_0 = 0$ olur. Eğer $k = 1$ ise $x_0 = 0$ olduğundan $x_1 = 0$ olur. Bu şekilde tümevarım ile her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k = 0$ elde edilir. Yani $x = (0, 0, ...) = \theta$ dır. Bu ise h nın total paranorm olduğunu gösterir. Şimdi $\ell(\widetilde{B}, p)$ dizi uzayının tam olduğunu gösterebilmek için

$$x^n = \left\{x_0^{(n)}, x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, ..., x_k^{(n)}, ...\right\}$$

olmak üzere $\left\{x_0^{(n)}\right\}$, $\ell(\widetilde{B}, p)$ de bir Cauchy dizisi olsun. (İspatın geri kalan kısmında $B(\widetilde{r}, \widetilde{s})$ matrisinin yerine $\widetilde{B}$ yazılacaktır.) Bu taktirde verilen her $\varepsilon > 0$ için $n_0(\varepsilon)$ pozitif tamsayısı vardır öyle ki her $n, m > n_0(\varepsilon)$ için $h(x^{(n)} - x^{(m)}) < \varepsilon$ kalır. Her bir $k \in \mathbb{N}$ sabiti ve $n, m > n_0(\varepsilon)$ için

$$\begin{aligned}\left|\left(\widetilde{B}x^n\right)_k - \left(\widetilde{B}x^m\right)_k\right| &\leq \left[\sum_k \left|\left(\widetilde{B}x^n\right)_k - \left(\widetilde{B}x^m\right)_k\right|^{p_k}\right]^{\frac{1}{M}} \\ &= h(x^{(n)} - x^{(m)}) < \varepsilon\end{aligned}$$

dur. Her $n, m > n_0(\varepsilon)$ için $\left\{\left(\widetilde{B}x^0\right)_k, \left(\widetilde{B}x^1\right)_k, ...\right\}$ dizisi her k sabiti için reel sayıların bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan dolayı $\left(\widetilde{B}x^n\right)_k \longrightarrow \left(\widetilde{B}x\right)_k$, $(n \to \infty)$ yazılabilir. Bu sonsuz tane elemanın $\left(\widetilde{B}x\right)_0, \left(\widetilde{B}x\right)_1, \left(\widetilde{B}x\right)_2, ...$ limitleri kullanılarak $\left\{\left(\widetilde{B}x\right)_0, \left(\widetilde{B}x\right)_1, \left(\widetilde{B}x\right)_2, ...\right\}$ dizisi tanımlanırsa, her bir $k \in \mathbb{N}$ ve her $n, m \geq n_0(\varepsilon)$ için

$$\left[\sum_k \left|\left(\widetilde{B}x^n\right)_k - \left(\widetilde{B}x^m\right)_k\right|^{p_k}\right]^{\frac{1}{M}} \leq h(x^n - x^m) < \varepsilon$$

olur. $m, k \longrightarrow \infty$ için limit alınırsa her $n > n_0(\varepsilon)$ için

$$h(x^n - x) = \left[\sum_k \left|\left(\widetilde{B}x^n\right)_k - \left(\widetilde{B}x^m\right)_k\right|^{p_k}\right]^{\frac{1}{M}} < \varepsilon$$

kalır. Bu ise $x^n \longrightarrow x \in \ell(\widetilde{B}, p)$ olduğunu gösterir. $\ell(\widetilde{B}, p)$ lineer uzay olduğundan $x \in \ell(\widetilde{B}, p)$ dir, yani $x^n \longrightarrow x$ $(n \to \infty)$ ve $x \in \ell(\widetilde{B}, p)$ olduğundan dolayı $\ell(\widetilde{B}, p)$ tamdır. □

Teorem 3.1.3. $\ell(\widetilde{B}, p)$ *uzayı mutlak olmayan tipten bir dizi uzayıdır.*

İspat. $|x| = (|x_k|)$ olmak üzere en az bir $x \in \ell(\widetilde{B}, p)$ için $h(x) \neq h(|x|)$ olduğunu gösterelim. Bunun için

$$(x_k) = \left(1, -1, 1, -1, ..., (-1)^k, ...\right)$$

ve $(s_k) = (r_{k+1})$ olarak tanımlanırsa

$$\begin{aligned} h(x) &= \left(\sum_k |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} \\ &= \left(|s_{-1}x_{-1} + r_0x_0|^{p_0} + |s_0x_0 + r_1x_1|^{p_1} + |s_1x_1 + r_2x_2|^{p_2} + ...\right)^{\frac{1}{M}} \\ &= \left(r_0^{p_0} + (r_1 + r_1(-1))^{p_1} + (r_2(-1) + r_2)^{p_2} + ...\right)^{\frac{1}{M}} \\ &= \left(r_0^{p_0}\right)^{\frac{1}{M}}, \qquad (x_{-1} = 0) \end{aligned}$$

olur. Buna karşın

$$\begin{aligned} h(|x|) &= \left(\sum_k |s_{k-1}|x_{k-1}| + r_k|x_k||^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} \\ &= \left(|s_{-1}|x_{-1}| + r_0|x_0||^{p_0} + |s_0|x_0| + r_1|x_1||^{p_1} + |s_1|x_1| + r_2|x_2||^{p_2} + ...\right)^{\frac{1}{M}} \\ &= \left(r_0^{p_0} + (r_1 + r_1)^{p_1} + (r_2 + r_2)^{p_2} + ...\right)^{\frac{1}{M}} \\ &= \left(r_0^{p_0} + 2r_1^{p_1} + 2r_2^{p_2} + ...\right)^{\frac{1}{M}} \end{aligned}$$

bulunur ki açık olarak $h(x) \neq h(|x|)$ dir. Bu da ispatı tamamlar. □

Teorem 3.1.4. $\ell(\widetilde{B}, p)$ *deki yakınsaklık koordinatsal yakınsaklıktan daha kuvvetlidir [23].*

İspat. Öncelikle $h(x^n - x) \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ olmasının her $k \in \mathbb{N}$ için $x_k^n \longrightarrow x_k$ $(n \to \infty)$ olmasını gerektireceği göstermelidir.

Sabit bir k için

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\left|s_{k-1}x_{k-1}^{(n)} + r_k x_k^{(n)} - s_{k-1}x_{k-1} - r_k x_k\right|^{p_k} \\
&\leq \lim_{n\to\infty}\sum_k \left|s_{k-1}x_{k-1}^{(n)} + r_k x_k^{(n)} - s_{k-1}x_{k-1} - r_k x_k\right|^{p_k} \qquad (3.1.9)\\
&= \lim_{n\to\infty}\left[h(x^n - x)\right] \\
&= 0
\end{aligned}$$

dir. Böylece $k = 0$ için

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left|s_{-1}x_{-1}^{(n)} + r_0 x_0^{(n)} - s_{-1}x_{-1} - r_0 x_0\right|^{p_0} &= \lim_{n\to\infty}\left|r_0 x_0^{(n)} - r_0 x_0\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}|r_0|\left|x_0^{(n)} - x_0\right| \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır ve $|r_0| > 0$ olduğundan $\lim\limits_{n\to\infty}|r_0|\left|x_0^{(n)} - x_0\right| = 0$, yani $\left|x_k^{(n)} - x_k\right| \longrightarrow 0$ $(n \to \infty)$ gerçeği elde edilir. Benzer olarak her bir k doğal sayısı için

$$\left|x_k^{(n)} - x_k\right| \longrightarrow 0, \qquad (n \to \infty) \tag{3.1.10}$$

sonucuna ulaşılır. $\square$

Teorem 3.1.5. $(\ell_p)_{\widetilde{B}}$ *koordinatsal toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında lineer uzaydır ve* $1 \leq p < \infty$ *olmak üzere*

$$\|x\| := \left[\sum_k |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^p\right]^{\frac{1}{p}} \tag{3.1.11}$$

ile bir $BK-$ *uzayıdır [23].*

İspat. Teoremin ilk kısmının ispatı rutin bir uygulamadır, bu nedenle detayları bırakılmıştır. ℓ_p nin bilinen normuna göre bir $BK-$uzayı ve $B(\widetilde{r}, \widetilde{s})$ matrisi bir üçgen matris olduğundan Wilansky'nin [48] nolu çalışmasındaki Teorem 4.3.2 ye göre $1 \leq p < \infty$ için $(\ell_p)_{B(\widetilde{r},\widetilde{s})}$ bir $BK-$uzayıdır. $\square$

Teorem 3.1.6. *(r_n) ve (s_n) pozitif reel sayıların yakınsak iki dizisi ise mutlak olmayan tipten $\ell(\widetilde{B}, p)$ dizi uzayı, her $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olmak üzere $\ell(p)$ uzayına lineer paranorm olarak izomorfiktir [23].*

İspat. Bu iddianın doğruluğunu ispatlamak için $\ell(\widetilde{B}, p)$ dizi uzayı ile $\ell(p)$ dizi uzayı arasında bir lineer bijecsiyonun mevcut olduğunu göstermek gerekir.

$$\begin{aligned} T : \ell(\widetilde{B}, p) &\longrightarrow \ell(p) \\ x &\longrightarrow T(x) = \widetilde{B}(\tilde{r}, \tilde{s})x \end{aligned}$$

dönüşümü tanımlansın. Her $x, z \in \omega$ ve her $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} T(\alpha x + z) &= \widetilde{B}(\tilde{r}, \tilde{s})\,(\alpha x + z) \\ &= \widetilde{B}(\tilde{r}, \tilde{s})\alpha x + \widetilde{B}(\tilde{r}, \tilde{s})z \\ &= s_{k-1}\alpha x_{k-1} + r_k \alpha x_k + \widetilde{B}(\tilde{r}, \tilde{s})z \\ &= \alpha\,(s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k) + \widetilde{B}(\tilde{r}, \tilde{s})z \\ &= \alpha\widetilde{B}(\tilde{r}, \tilde{s})x + \widetilde{B}(\tilde{r}, \tilde{s})z \\ &= \alpha T(x) + T(z) \end{aligned}$$

olduğundan T dönüşümü lineerdir.

$$T(x) = \widetilde{B}(\tilde{r}, \tilde{s})x = \theta$$

ise $x = \theta$ olduğunun gösterilmesi için aşağıdaki yol izlenir. Her $k \in \mathbb{N}$ için $s_{k-1} > 0$ ve $r_k > 0$ olduğundan

$$T(x) = \widetilde{B}(\tilde{r}, \tilde{s})x = s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k = 0$$

ise $x = \theta$ olur ki bu T dönüşümünün injectif olduğunu gösterir.

Her $y \in \ell(p)$ için $B^{-1}(\tilde{r}, \tilde{s})$ invers matrisi kullanılırsa $T(x) = y$ den $\widetilde{B}(\tilde{r}, \tilde{s})x = y$ ve buradan $x = B^{-1}(\tilde{r}, \tilde{s})y$ veya daha açık bir ifade ile

$x_k = \{B^{-1}(\tilde{r},\tilde{s})y\}_k$ olur. Bu eşitlikten faydalanılarak x dizisi için genel terim aşağıdaki gibi elde edilir.

$$x_0 = \frac{1}{r_0}y_0$$

$$x_1 = \frac{1}{r_1}\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)y_0 + \frac{1}{r_1}y_1$$

$$x_2 = \frac{1}{r_2}\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)y_0 + \frac{1}{r_2}\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)y_1 + \frac{1}{r_2}y_2$$

$$x_3 = \frac{1}{r_3}\left(\frac{-s_2}{r_2}\right)\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)y_0 + \frac{1}{r_3}\left(\frac{-s_2}{r_2}\right)\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)y_1 + \frac{1}{r_3}\left(\frac{-s_2}{r_2}\right)y_2 + \frac{1}{r_3}y_3$$

$$\vdots$$

$$\begin{aligned} x_k =& \frac{1}{r_k}\left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{-s_2}{r_2}\right)\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)y_0 \\ &+ \frac{1}{r_k}\left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{-s_2}{r_2}\right)\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)y_1 \\ &+ \frac{1}{r_k}\left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right)\cdot\dots\cdot\left(\frac{-s_2}{r_2}\right)y_2 \\ &\vdots \\ &+ \frac{1}{r_k}\left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right)y_{k-1} \\ &+ \frac{1}{r_k}y_k \end{aligned}$$

olduğu görülür. Yani

$$x_k = \sum_{j=0}^{k}\frac{1}{r_k}\prod_{i=k-j}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-j}$$

olur ki bundan faydalanılarak

$$\begin{aligned} s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k =& s_{k-1}\sum_{j=0}^{k-1}\frac{1}{r_{k-1}}\prod_{i=k-1-j}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-1-j} + r_k\sum_{j=0}^{k}\frac{1}{r_k}\prod_{i=k-j}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-j} \\ =& \frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{i=k-1-j}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-1-j} + \sum_{j=0}^{k-1}\prod_{i=k-j}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-j} \\ &+ \prod_{i=k-k}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-k} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
=&\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{i=k-1-j}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-1-j}+\sum_{j=0}^{k-1}\prod_{i=k-j}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-j}+\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_0\\
=&\sum_{j=0}^{k-1}\left[\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\prod_{i=k-1-j}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-1-j}+\prod_{i=k-j}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-j}\right]+\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_0\\
=&\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\prod_{i=k-1}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-1}+\prod_{i=k}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_k+\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\prod_{i=k-2}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-2}\\
&+\prod_{i=k-1}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-1}+\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\prod_{i=k-3}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-3}+\prod_{i=k-2}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-2}\\
&+\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\prod_{i=k-4}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-4}+\prod_{i=k-3}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_{k-3}\\
&\vdots\\
&+\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\prod_{i=0}^{k-2}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_0+\prod_{i=1}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_1+\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_0\\
=&\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}y_{k-1}+y_k+\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right)y_{k-2}+\left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right)y_{k-1}\\
&+\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\left(\frac{-s_{k-3}}{r_{k-3}}\right)\left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right)y_{k-3}+\left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right)\left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right)y_{k-2}\\
&+\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\left(\frac{-s_{k-4}}{r_{k-4}}\right)\left(\frac{-s_{k-3}}{r_{k-3}}\right)\left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right)y_{k-4}\\
&+\left(\frac{-s_{k-3}}{r_{k-3}}\right)\left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right)\left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right)y_{k-3}\\
&\vdots\\
&+\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\dots\left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right)y_0\\
&+\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\left(\frac{-s_2}{r_2}\right)\dots\left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right)y_1\\
&+\prod_{i=0}^{k-1}(\frac{-s_i}{r_i})y_0\\
=&y_k+\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\dots\left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right)y_0+\prod_{i=0}^{k-1}\left(\frac{-s_i}{r_i}\right)y_0\\
=&y_k+\frac{s_{k-1}}{r_{k-1}}\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\dots\left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right)y_0\\
&+\left(\frac{-s_0}{r_0}\right)\left(\frac{-s_1}{r_1}\right)\dots\left(\frac{-s_{k-2}}{r_{k-2}}\right)\left(\frac{-s_{k-1}}{r_{k-1}}\right)y_0\\
=&y_k+0y_0\\
=&y_k
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu $T(x) = y$ demektir. Bu ise T nin surjectif olduğunu gösterir. O halde her $x \in \ell(\widetilde{B}, p)$ için

$$h(T(x)) = h(B(\tilde{r}, \tilde{s})x) = h(y)$$

dir. Böylece T paranormu korur. □

Teorem 3.1.7. *$\ell(\widetilde{B}, p)$ uzayı $AK-$özelliğine sahiptir [23].*

İspat. Herbir $x = (x_k) \in \ell(\widetilde{B}, p)$ için

$$x^{\langle m \rangle} = \sum_{k=0}^{m} x_k e^{(k)}, \qquad \forall m \in \{1, 2, ...\} \tag{3.1.12}$$

yazılırsa bu takdirde her $\varepsilon > 0$ ve verilen $x \in \ell(\widetilde{B}, p)$ için bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki

$$\sum_{k=0}^{\infty} |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k} < \infty$$

dir. Bu ise negatif terim içermeyen $\sum_{k} |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k}$ serisinin yakınsak olduğunu gösterir. Yakınsak bir seride çok iyi bilindiği gibi kalan terimin limiti 0 olacağından

$$\sum_{k=N}^{\infty} |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k} < \varepsilon^M$$

dır. Bu takdirde her $m \geq N$ için

$$\begin{aligned} h(x - x^{\langle m \rangle}) &= h\left(x - \sum_{k=0}^{m} x_k e^k\right) \\ &= h\left[(x_0, x_1, ..., x_m, x_{m+1}, x_{m+2}, ...) - (x_0, x_1, ..., x_m, 0, 0, ...)\right]^n \\ &= h(0, 0, ..., x_{m+1}, x_{m+2}, ...) \\ &= \left(\sum_{k=m+1}^{\infty} |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} \\ &\leq \left(\sum_{k=N}^{\infty} |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k}\right)^{\frac{1}{M}} \\ &\leq \left(\varepsilon^M\right)^{\frac{1}{M}} \\ &= \varepsilon \end{aligned}$$

olup $x = \sum_k x_k e^{(k)}$ dir.

Şimdi bu gösterimin tek olduğunu göstermek için $x = \sum_k \lambda_k e^{(k)}$ olduğu varsayılırsa bu takdirde her bir k için

$$\begin{aligned}
&[|(s_{k-1}\lambda_{k-1} + r_k\lambda_k) - (s_{k-1}x_{k-1} + r_kx_k)|^{p_k}]^{\frac{1}{M}} \\
&= [|s_{k-1}\lambda_{k-1} + r_k\lambda_k - s_{k-1}x_{k-1} - r_kx_k|^{p_k}]^{\frac{1}{M}} \\
&\leq [\sum |s_{k-1}\lambda_{k-1} + r_k\lambda_k - s_{k-1}x_{k-1} - r_kx_k|^{p_k}]^{\frac{1}{M}} \\
&= [\sum |s_{k-1}(\lambda_{k-1} - x_{k-1}) + r_k(\lambda_k - x_k)|^{p_k}]^{\frac{1}{M}} \\
&= h(x - x) \\
&= h(0) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır. Bundan dolayı

$$s_{k-1}\lambda_{k-1} + r_k\lambda_k - (s_{k-1}x_{k-1} + r_kx_k) = 0$$

dan

$$s_{k-1}\lambda_{k-1} + r_k\lambda_k = s_{k-1}x_{k-1} + r_kx_k$$

olur. Yukarıdaki eşitlikte $k = 0$ yazılırsa

$$s_{-1}\lambda_{-1} + r_0\lambda_0 = s_{-1}x_{-1} + r_0x_0$$

elde edilir ki $s_{-1} = 0$ ve $r_0 \neq 0$ olduğundan $\lambda_0 = x_0$ dır.

Yine yukarıdaki eşitlikte $k = 1$ yazılırsa

$$s_0\lambda_0 + r_1\lambda_1 = s_0x_0 + r_1x_1$$

elde edilir ve $r_1 \neq 0$ olduğundan $\lambda_1 = x_1$ bulunur.

Bu şekilde devam edilirse her bir k için $\lambda_k = x_k$ elde edilir. Sonuç olarak $x = \sum_k x_k e^{(k)}$ gösterimi bir tektir. □

Şimdi bir paranormlu dizi uzayı için Schauder bazı kavramını tanımladıktan sonra $\ell(\widetilde{B},p)$ dizi uzayının bazı verilecektir.

Tanım 3.1.2. (X,h) *bir paranormlu uzay olsun. X in elemanlarının bir (b_k) dizisine bir baz denir ancak ve ancak*

$$\lim_{n\to\infty} h\left(x-\sum_{k=0}^{n} a_k b_k\right)=0$$

olacak şekilde bir tek (α_k) skaler dizisi varsa X toplamına sahip olan $\sum_k \alpha_k b_k$ serilerine (b_n) ye göre x in açılımı denir ve $x=\sum_k \alpha_k b_k$ olarak yazılır.

Lemma 3.1.2. *Bir λ dizi uzayının, λ_A matris etki alanının bir baza sahip olması için gerek ve yeter şart A üçgen matris olmak üzere λ nın bir baza sahip olmasıdır [49].*

Sonuç 3.1.1. $0<p_k\le H<\infty$ *ve $k\in\mathbb{N}$ için $\alpha_k=(\widetilde{B}x)_k$ olsun. Her sabit $k\in\mathbb{N}$ için $\ell(\widetilde{B},p)$ uzayının elemanlarının $b^k=\{b_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi*

$$b_n^{(k)}=\begin{cases}\frac{(-1)^{n-k}}{r_n}\prod\limits_{j=k}^{n-1}\frac{s_j}{r_j} & , \quad 0\le k\le n\\ 0 & , \quad k>n\end{cases} \tag{3.1.13}$$

olarak tanımlansın. Bu takdirde (3.1.13) ile verilen $\{b_n^{(k)}\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $\ell(\widetilde{B},p)$ için bir bazdır ve herhangi bir $x\in\ell(\widetilde{B},p)$ elemanı, $x=\sum_k \alpha_k b^{(k)}$ formunda bir tek gösterime sahiptir [23].

4. MUTLAK OLMAYAN TİPTEN $\ell(\widetilde{B}, p)$ UZAYININ $\alpha-, \beta-$ ve $\gamma-$ DUALLERİ

Bu bölümde iki dizi uzayının çarpım uzayı tanımı vasıtası ile herhangi bir dizi uzayının alpha-, betha- ve gamma- dualleri tanımları verildikten sonra mutlak olmayan tipten $\ell(\widetilde{B}, p)$ dizi uzayının alpha-, betha- ve gamma- duallerini belirleyecek teoremler ifade ve ispat edilecektir.

4.1 $\ell(\widetilde{B}, p)$ Uzayının Alpha-, Betha- ve Gamma- Dualleri

λ ve μ dizi uzayları için $S(\lambda, \mu)$ cümlesi

$$S(\lambda, \mu) = \{z = (z_k) \in \omega : xz = (x_k z_k) \in \mu, \qquad \forall x = (x_k) \in \lambda\} \tag{4.1.1}$$

olarak tanımlanır ve $S(\lambda, \mu)$ cümlesine λ ve μ uzaylarının çarpımı denir. Bir λ dizi uzayının alpha-, betha- ve gamma- dualleri (4.1.1) gösterimi kullanılarak sırası ile $\lambda^\alpha = S(\lambda, \ell_1)$, $\lambda^\beta = S(\lambda, cs)$, $\lambda^\gamma = S(\lambda, bs)$ olarak tanımlanır. Daha açık bir ifade ile aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$\begin{aligned}
\lambda^\alpha &= S(\lambda, \ell_1) \\
&= \{z = (z_k) \in \omega : xz = (x_k z_k) \in \ell_1, \qquad \forall x = (x_k) \in \lambda\} \\
&= \left\{z = (z_k) \in \omega : \sum_k |x_k z_k| < \infty, \qquad \forall x = (x_k) \in \lambda\right\}, \\
\lambda^\beta &= S(\lambda, cs) \\
&= \{z = (z_k) \in \omega : xz = (x_k z_k) \in cs, \qquad \forall x = (x_k) \in \lambda\} \\
&= \left\{z = (z_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} x_k z_k \ yakınsak, \qquad \forall x = (x_k) \in \lambda\right\}, \\
\lambda^\gamma &= S(\lambda, bs) \\
&= \{z = (z_k) \in \omega : xz = (x_k z_k) \in \ell_1, \qquad \forall x = (x_k) \in \lambda\} \\
&= \left\{z = (z_k) \in \omega : \sum_{k=1}^{\infty} x_k z_k \quad sınırlı, \qquad \forall x = (x_k) \in \lambda\right\}.
\end{aligned}$$

$p = (p_k)$ dizisi için $0 < p_k \leq 1$ olması durumu için ispat $1 < p_k \leq H < \infty$ olması durumunun ispatına benzer olarak yapılabiliceğinden dolayı, bu durumun detayları gözardı edilerek Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.3 de sadece $1 < p_k \leq H < \infty$ olması durumu incelenecektir. Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.3 ün ispatında ihtiyaç duyulacak olan üç lemma aşağıda verilmiştir.

Lemma 4.1.1. *[(3.1.9), Teorem 3.1.2 in (i) ve (ii) maddeleri]* $A = (a_{nk})$ *sonsuz bir matris olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

i) Her $k \in \mathbb{N}$ *için* $0 < p_k \leq 1$ *olduğunda* $A \in (\ell(p), \ell_\infty)$ *olması için gerek ve yeter şart*

$$\sup_{n,k\in\mathbb{N}} |a_{nk}|^{p_k} < \infty \tag{4.1.2}$$

olmasıdır.

ii) Her $k \in \mathbb{N}$ *için* $1 < p_k \leq H < \infty$ *olduğunda* $A \in (\ell(p), \ell_\infty)$ *olması için gerek ve yeter şart*

$$\sup_{n,k\in\mathbb{N}} \sum_k \left|a_{nk}M^{-1}\right|^{p_k'} < \infty \tag{4.1.3}$$

olacak şekilde bir $M > 1$ *tamsayısı vardır [50].*

Lemma 4.1.2. *[(3.1.9), Teorem 3.1.2] Her* $k \in \mathbb{N}$ *için* $0 < p_k \leq H < \infty$ *olduğunda* $A = (a_{nk}) \in (\ell(p), c)$ *olması için gerek ve yeter şartlar (4.1.2) ve (4.1.3) ile birlikte her* $k \in \mathbb{N}$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} a_{nk} = \beta_k \tag{4.1.4}$$

olmasıdır [50].

Lemma 4.1.3. *[(3.1.10)]* $A = (a_{nk})$ *sonsuz bir matris olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır .*

i) Her $k \in \mathbb{N}$ *için* $0 < p_k \leq 1$ *olduğunda* $A \in (\ell(p) : \ell_1)$ *olması için gerek ve yeter şart*

$$\sup_{N\in\mathcal{F}} \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\sum_{n\in N} a_{nk}M^{-1}\right|^{p_k} < \infty$$

olmasıdır.

ii) Her $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \le H < \infty$ olduğunda $A \in (\ell(p), \ell_1)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{N \in \mathcal{F}} \sum_k \left| \sum_{n \in N} a_{nk} M^{-1} \right|^{p_k^{'}} < \infty$$

olacak şekilde bir $M > 1$ tamsayısı vardır [51].

Teorem 4.1.1.

$$S_1(p) := \bigcup_{M>1} \left\{ a = (a_{nk}) \in \omega : \sup_{N \in \mathcal{F}} \sum_k \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-k}}{r_n} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{s_j}{r_j} a_n M^{-1} \right|^{p_k^{'}} < \infty \right\}$$

$$S_2(p) := \left\{ a = (a_{nk}) \in \omega : \sup_{N \in \mathcal{F}} \sup_{k \in \mathbb{N}} \sum_k \left| \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^{n-k}}{r_n} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{s_j}{r_j} a_n M^{-1} \right|^{p_k} < \infty \right\}$$

olmak üzere

$$\left\{ \ell(\widetilde{B}, p) \right\}^{\alpha} = \begin{cases} S_1(p) & , \quad 1 < p_k \le H < \infty \\ S_2(p) & , \quad 0 < p_k \le 1 \end{cases}$$

dir [23].

İspat. Herhangi bir $a = (a_n) \in \omega$ alınsın. (3.1.2) kullanılırsa her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{r_n} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{s_j}{r_j} y_k$$

elde edilir ve böylece;

$$a_n x_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^{n-k}}{r_n} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{s_j}{r_j} a_n y_k = (Cy)_n, \qquad n \in \mathbb{N}$$

bulunur. Burada her $k, n \in \mathbb{N}$ için $C = (c_{nk})$ matrisi

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{(-1)^{n-k}}{r_n} \prod_{j=k}^{n-1} \frac{s_j}{r_j} a_n & , \quad 0 \le k \le n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

olarak tanımlanır. Bu takdirde Lemma 4.1.3 (ii) göz önünde tutulduğunda; $x = (x_k) \in \ell(\widetilde{B}, p)$ olduğunda $ax = (a_n x_n) \in \ell_1$ olması için, gerek ve yeter şartın $y = (y_k) \in \ell(p)$ olduğunda $Cy \in \ell_1$ olduğu görülür. Bu ise

$$\left\{ \ell(\widetilde{B}, p) \right\}^{\alpha} = S_1(p)$$

anlamına gelmektedir. □

Teorem 4.1.2.

$$S_3(p) := \bigcup_{M>1}\left\{a=(a_{nk})\in\omega : \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum\nolimits_k \left|\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^{i-k}}{r_i}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{s_j}{r_j}a_iM^{-1}\right|^{p_k'}<\infty\right\},$$

$$S_4(p) := \left\{a=(a_{nk})\in\omega : \sum_{i=k}^{\infty}\frac{(-1)^{i-k}}{r_i}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{s_j}{r_j}a_i<\infty\right\},$$

$$S_5(p) := \left\{a=(a_{nk})\in\omega : \sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^{i-k}}{r_i}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{s_j}{r_j}a_i\right|^{p_k}<\infty\right\}$$

tanımlanırsa

$$\left\{\ell(\widetilde{B},p)\right\}^{\beta}=\begin{cases} S_3(p)\cap S_4(p) & ,\quad 1<p_k\le H<\infty, \qquad \forall k\in\mathbb{N}\\ S_4(p)\cap S_5(p) & ,\qquad 0<p_k\le 1, \qquad \forall k\in\mathbb{N}\end{cases}$$

dir [23].

İspat. Herhangi bir $a=(a_i)\in\omega$ alındığında ve (3.1.2) ile elde edilen denklem düşünüldüğünde

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{n}a_ix_i &= \sum_{i=0}^{n}\left[\sum_{k=0}^{i}\frac{(-1)^{i-k}}{r_i}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{s_j}{r_j}y_k\right]a_i\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left[\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^{i-k}}{r_i}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{s_j}{r_j}a_i\right]y_k\\ &= (Dy)_n \qquad (4.1.5)\end{aligned}$$

eşitlikleri kolayca yazılabilir. Burada $D=(d_{nk})$, her $k,n\in\mathbb{N}$ için

$$d_{nk}=\begin{cases}\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^{n-k}}{r_n}\prod_{j=k}^{n-1}\frac{s_j}{r_j}a_n & ,\quad 0\le k\le n\\ 0 & ,\quad k>n\end{cases} \qquad (4.1.6)$$

olarak tanımlanır. O halde (4.1.5) ile birlikte Lemma 4.1.2 beraber düşünüldüğünde $x=(x_i)\in\ell(\widetilde{B},p)$ iken $ax=(a_ix_i)\in cs$ olması için gerek ve yeter şart $y=(y_k)\in\ell(p)$ iken $Dy\in c$ olmasıdır. Böylece (4.1.3) ve (4.1.4) den

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum\left|\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^{i-k}}{r_i}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{s_j}{r_j}a_iM^{-1}\right|^{p_k'}<\infty$$

ve buradan

$$\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^{i-k}}{r_i}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{s_j}{r_j}a_i<\infty$$

elde edilir. Bu ise

$$\left\{\ell(\widetilde{B},p)\right\}^{\beta}=S_3(p)\cap S_4(p)$$

olduğunu gösterir. □

Teorem 4.1.3.

$$\left\{\ell(\widetilde{B},p)\right\}^{\gamma}=\begin{cases} S_3(p) & , \quad 1<p_k\leq H<\infty, \qquad \forall k\in\mathbb{N} \\ S_5(p) & , \qquad 0<p_k\leq 1, \qquad \forall k\in\mathbb{N} \end{cases}$$

İspat. Bir önce ki ispatta (4.1.5) ile verilen eşitlik ve Lemma 4.1.1 hesaba katıldığında $x=(x_i)\in\ell(\widetilde{B},p)$ iken $ax=(a_ix_i)\in bs$ olması için gerek ve yeter şart $D=(d_{nk})$, (4.1.6) da tanımlanan matris olmak üzere $y=(y_k)\in\ell(p)$ iken $Dy\in\ell_\infty$ olmasıdır. Böylece (4.1.2) ve (4.1.3) den $p_k>1$ için $\left\{\ell(\widetilde{B},p)\right\}^{\gamma}=S_3(p)$ ve $p_k\leq 1$ için $\left\{\ell(\widetilde{B},p)\right\}^{\gamma}=S_5(p)$ elde edilir. □

5. BAZI MATRİS SINIFLARI

Bu bölümde iki dizi uzayı arasındaki matris dönüşümleri kavramı açıklandıktan sonra mutlak olmayan tipten $\ell(\widetilde{B},p)$ dizi uzayından bazı dizi uzaylarına matris sınıflarının karakterizasyonu verilmiş olup, ki bunlardan biri olan Teorem 5.1.1 de $p=(p_k)$ dizisinde $0<p_k\leq 1$ ve $1<p_k\leq H<\infty$ olması durumlarına göre $\ell(\widetilde{B},p)$ dizi uzayından sınırlı dizilerin uzayı olan ℓ_∞ a matris dönüşümlerinin karakterizasyonu verilmiştir.

5.1 $\ell(\widetilde{B},p)$ Dizi Uzayı Üzerinde Matris Dönüşümleri

Lemma 5.1.1. *Herhangi iki $a,b\in\mathbb{C}$ ve herhangi bir $M>0$ için*

$$|a\cdot b|\leq M\left(\left|aM^{-1}\right|^{p'}+|b|^{p}\right)$$

dir. Burada p ve p' (2.1.2) de verilen eşitlik ile birbirine bağlıdır [23].

Teorem 5.1.1. *$A=(a_{nk})$ bir sonsuz matris olduğunda $p=p_k$ dizisinin farklı durumlarına göre aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

i) Her $k\in\mathbb{N}$ için $1<p_k\leq H<\infty$ olsun. Bu durumda $A\in(\ell(\widetilde{B},p),\ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şartlar

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_k\left|\sum_{i=k}^{n}\frac{(-1)^{i-k}}{r_i}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{s_j}{r_j}a_{ni}M^{-1}\right|^{p_k'}<\infty, \tag{5.1.1}$$

olacak şekilde bir $M>1$ tamsayısının olması ve

$$\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(-1)^{i-k}}{r_i}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{s_j}{r_j}a_{ni}<\infty \tag{5.1.2}$$

olmasıdır.

ii) Her $k\in\mathbb{N}$ için $0<p_k\leq 1$ olduğunda $A\in(\ell(\widetilde{B},p),\ell_\infty)$ olması için gerek ve yeter şartlar (5.1.2) nın yanı sıra

$$\sup_{n,k\in\mathbb{N}}\sum_k\left|\sum_{n\in\mathbb{N}}\frac{(-1)^{n-k}}{r_n}\prod_{j=k}^{n-1}\frac{s_j}{r_j}a_nM^{-1}\right|^{p_k}<\infty \tag{5.1.3}$$

olmasıdır [23].

İspat. Öncelikle (5.1.1) şartının ve (5.1.2) şartının sağlandığını kabul ederek şartların yeterliliğini göstermek için $x \in (\ell(\widetilde{B}, p)$ olduğu kabul edildiğinde, her sabit n doğal sayısı için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \left\{\ell(\widetilde{B}, p)\right\}^{\beta}$ olduğundan dolayı x in A dönüşümü mevcuttur. Her $m, n \in \mathbb{N}$ için (3.1.2) kullanılarak aşağıdaki eşitlik hesaplanabilir.

$$\sum_{k=0}^{m} a_{nk}x_k = \sum_{k=0}^{m}\sum_{i=k}^{m}\frac{(-1)^{i-k}}{r_i}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{s_j}{r_j}a_{ni}y_k. \tag{5.1.4}$$

Hipotez dikkate alındığında, (5.1.4) de $m \longrightarrow \infty$ için limit alınırsa her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}x_k = \sum_{k}\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(-1)^{i-k}}{r_i}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{s_j}{r_j}a_{ni}y_k \tag{5.1.5}$$

elde edilir. (5.1.5) eşitliğini ve Lemma 5.1.1 şartı kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}}\left|\sum_{k} a_{nk}x_k\right| &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k}\left|\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(-1)^{i-k}}{r_i}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{s_j}{r_j}a_{ni}\right||y_k| \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k} M\left(\left|\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(-1)^{i-k}}{r_i}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{s_j}{r_j}a_{ni}M^{-1}\right|^{p_k'} + |y_k|^{p_k}\right) \\
&\leq M\left(\sup_{n\in\mathbb{N}}\sum_{k}\left|\sum_{i=k}^{\infty}\frac{(-1)^{i-k}}{r_i}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{s_j}{r_j}a_{ni}M^{-1}\right|^{p_k'} + \sum_{k}|y_k|^{p_k}\right) \\
&< \infty
\end{aligned}$$

olduğu kolayca görülebilir.

Tersine, $A \in (\ell(\widetilde{B}, p), \ell_\infty)$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olduğu kabul edildiğinde, her $x \in \ell(\widetilde{B}, p)$ için Ax mevcut olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\{a_{nk}\}_{k\in\mathbb{N}} \in \left\{\ell(\widetilde{B}, p)\right\}^{\beta}$ dir ve (5.1.2) nin gerekliliği direkt elde edilir. Bunun yanısıra (5.1.5) den her $n, k \in \mathbb{N}$ için

$$b_{nk} = \sum_{i=k}^{\infty}\frac{(-1)^{i-k}}{r_i}\prod_{j=k}^{i-1}\frac{s_j}{r_j}a_{ni}$$

olarak tanımlanan B matrisi (4.1.3) şartını sağlar ki bu (5.1.1) şartına denktir. Bu da ispatı tamamlar. $\square$

Lemma 5.1.2. *[(3.1.11), Teorem 3.1.2] $A = (a_{nk}) \in (\ell(\widetilde{B}, p), f)$ olması için gerek ve yeter şart (4.1.2) ile (4.1.3) mevcut ve her bir $k \in \mathbb{N}$ için*

$$\exists\ \alpha_k \in \mathbb{C} \text{ öyle ki } f - \lim a_{nk} = \alpha_k$$

olmasıdır [23].

Teorem 5.1.2. *Her $k, n \in \mathbb{N}$ için*

$$e_{nk} := s_{k-1} f_{n,k-1} + r_k f_{nk} \text{ ve } f_{nk} := \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(-1)^i}{r_i} \prod_{j=k}^{i-1} \frac{s_j}{r_j} e_{ni}$$

ile $E = (e_{nk})$ ve $F = (f_{nk})$ matrisleri tanımlansın. Bu takdirde $E \in (\ell(\widetilde{B}, p), f)$ olması için gerek ve yeter şart $F \in (\ell(p), f)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ sabiti için

$$F^n \in (\ell(p), c)$$

olmasıdır. Burada $F^n = (f_{mk}^{(n)})$, her $m, k \in \mathbb{N}$ için

$$f_{mk}^{(n)} = \begin{cases} \sum_{i=k}^{m} \frac{(-1)^i}{r_i} \prod_{j=k}^{i-1} \frac{s_j}{r_j} e_{ni} & , \quad 0 \leq k \leq m \\ 0 & , \quad k > m \end{cases}$$

olarak tanımlanır [23].

İspat. $E = (e_{nk}) \in (\ell(\widetilde{B}, p) : f)$ olsun ve $x \in \ell(\widetilde{B}, p)$ alınsın. Bu takdirde her $m, n \in \mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitlikler yazılabilir

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{m} e_{nk} x_k &= \sum_{k=0}^{m} e_{nk} \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^{k-i}}{r_i} \prod_{j=i}^{k-1} \frac{s_j}{r_j} y_i \right] \\ &= \sum_{k=0}^{m} \left[\sum_{i=0}^{k} \frac{(-1)^i}{r_i} \prod_{j=k}^{i-1} \frac{s_j}{r_j} e_{ni} \right] y_i \\ &= \sum_{k=0}^{m} f_{mk}^{(n)} y_k. \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Buna göre Ex mevcut olduğundan $F^n \in (\ell(p), c)$ dir. (5.1.6) eşitliğinde $m \longrightarrow \infty$ için limite geçilirse $Ex = Fy$ elde edilir. $Ex \in f$ olduğundan $Fy \in f$ olur. Yani $F \in (\ell(p) : f)$ dir.

Tersine, $F \in (\ell(p), f)$ ve $F^n \in (\ell(p), c)$ olsun ve $x \in \ell(\widetilde{B}, p)$ alındığında $(f_{nk})_{n\in\mathbb{N}} \in \{\ell(p)\}^{\beta}$ ve $F \in (\ell(p), f)$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $(e_{nk})_{n\in\mathbb{N}} \in \{\ell(\widetilde{B}, p)\}^{\beta}$ elde edilir. Böylece Ex mevcut olur. (5.1.6) de $m \longrightarrow \infty$ için limit alınırsa $Ex = Fy$ sonucuna ulaşılır ki buradan da $E \in (\ell(p), f)$ olduğu görülür.

□

Teorem 5.1.3. *Her $k \in \mathbb{N}$ için $0 < p_k \leq H < \infty$ olsun. $A \in (\ell(\widetilde{B}, p) : c)$ olması için gerek ve yeter şart (5.1.1) ve (5.1.3) mevcut ve her sabit $k \in \mathbb{N}$*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(-1)^{k-i}}{r_k} \prod_{j=i}^{k-1} \frac{s_j}{r_j} a_i = \alpha_k \tag{5.1.7}$$

olmasıdır [23].

İspat. $A \in (\ell(\widetilde{B}, p), c)$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için $1 < p_k \leq H < \infty$ olduğu kabul edildiğinde, $c \subset \ell_\infty$ kapsama ilişkisi, Teorem 5.1.1 ün (i) kısmından (5.1.1) ve (5.1.2) in gerekliliği hemen elde edilir. (5.1.7) nin gerekliliğini ispatlamak için her sabit $k \in \mathbb{N}$ için $\ell(\widetilde{B}, p)$ uzayında olan (3.1.13) ile tanımlanan $b^{(k)}$ dizisi gözönüne alındığında hipotezden her $x \in \ell(\widetilde{B}, p)$ nin A dönüşümü mevcut ve c nin elemanı olduğundan her $k \in \mathbb{N}$ için

$$Ab^{(k)} = \left\{ \sum_{i=k}^{\infty} \frac{(-1)^{k-i}}{r_k} \prod_{j=i}^{k-1} \frac{s_j}{r_j} a_{nk} \right\}_{n\in\mathbb{N}} \in c$$

elde edilir ki bu (5.1.7) nin gerekliliğini gösterir.

Tersine (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.7) koşulları mevcut ve $\ell(\widetilde{B}, p)$ uzayında herhangi bir $x = (x_k)$ alındığında Ax mevcuttur. Bu takdirde her $m, n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=0}^{m} \left| \sum_{k=i}^{m} \frac{(-1)^{k-i}}{r_k} \prod_{j=i}^{k-1} \frac{s_j}{r_j} a_{nk} M^{-1} \right|^{p_k'} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k=0}^{m} \left| \sum_{k=i}^{m} \frac{(-1)^{k-i}}{r_k} \prod_{j=i}^{k-1} \frac{s_j}{r_j} a_{nk} M^{-1} \right|^{p_k'} < \infty$$

elde edilir. (5.1.1) den $m, n \longrightarrow \infty$ için limit alınır ve (5.1.7) kullanılırsa

$$\lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=0}^{m} \left| \sum_{k=i}^{m} \frac{(-1)^{k-i}}{r_k} \prod_{j=i}^{k-1} \frac{s_j}{r_j} a_{nk} M^{-1} \right|^{p_k'} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k} \left| \sum_{k=i}^{m} \frac{(-1)^{k-i}}{r_k} \prod_{j=i}^{k-1} \frac{s_j}{r_j} a_{nk} M^{-1} \right|^{p_k'}$$

$$< \infty$$

olduğu görülür. Bu $\sum\limits_k |\alpha_k M^{-1}|^{p'_k} < \infty$ olduğunu gösterir ki burada $\alpha_k = \left(\widetilde{B}x\right)_k$ olup böylece $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \left\{\ell(\widetilde{B},p)\right\}^{\beta}$ olur ki bu her $x \in \ell(\widetilde{B},p)$ için $\sum\limits_k \alpha_k x_k$ serilerinin yakınsak olduğunu ifade eder. Şimdi a_{nk} yerine $a_{nk}-\alpha_k$ yazarsak (5.1.5) den elde edilen eşitsizliği düşünüldüğünde her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_k (a_{nk}-\alpha_k)\, x_k = \sum_i \sum_{k=i} \frac{(-1)^{k-i}}{r_k} \prod_{j=i}^{k-1} \frac{s_j}{r_j} (a_{nk}-\alpha_k)\, y_i = \sum_k c_{ni} y_i \tag{5.1.8}$$

olur ki burada $c = (c_{ni})$ her $n, i \in \mathbb{N}$ için

$$c_{ni} = \sum_i \sum_{k=i} \frac{(-1)^{k-i}}{r_k} \prod_{j=i}^{k-1} \frac{s_j}{r_j} (a_{nk}-\alpha_k)$$

olarak tanımlanır. Bu takdirde Lemma 4.1.2'den C matrisi $(\ell(p), c_0)$ sınıfına ait olur. Böylece (5.1.8) den

$$\lim_{n\to\infty} \sum_k (a_{nk}-\alpha_k) x_k = 0 \tag{5.1.9}$$

olduğu görülür. Son olarak da (5.1.9) denkleminden $x \in \ell(\widetilde{B},p)$ olduğunda $Ax \in c$ olduğu kolayca elde edilir ki, bu da ispatlanmak istenen şeydir. □

Bunların ışığında aşağıdaki sonuç verilebilir.

Sonuç 5.1.1. *Her k doğal sayısı için $0 < p_k \le H < \infty$ olsun. $A \in \left(\ell(\widetilde{B},p), c_0\right)$ olması için gerek ve yeter şart (5.1.1) ve (5.1.3) şartlarının sağlanmasının yanında her $k \in \mathbb{N}$ için $\alpha_k = 0$ olmak üzere (5.1.7) şartının da sağlanmasıdır.*

Lemma 5.1.3. *λ ve μ herhangi iki dizi uzayı, A sonsuz bir matris ve B de üçgen bir matris olsun. Bu takdirde $A \in (\lambda, \mu_B)$ olması için gerek ve yeter şart $BA \in (\lambda, \mu)$ olmasıdır [52].*

Teorem 5.1.1, Teorem 5.1.2, Teorem 5.1.3 ve Sonuç 5.1.1 ile Lemma 5.1.3 ü birleştirerek aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 5.1.2. *$A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris ve her $n, k \in \mathbb{N}$ için $C = (c_{nk})$ matrisi*

$$c_{nk} = s a_{n-1,k} + r a_{nk}$$

olarak tanımlandığında A matrisinin $\left(\ell(\widetilde{B},p),\widehat{f}\right)$ *sınıfına ait bulunması için gerek ve yeter şartlar Teorem 5.1.2 de A matrisinin yerine C matrisinin yazılması ile elde edilir.Burada* $r,s\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ *ve* $\widehat{f},\ B(r,s)$ *dönüşümleri hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı f de olan tüm dizilerin uzayını göstermektedir ki bu çalışmada Başar ve Kirişçi [53] tarafından yapılmıştır.*

Sonuç 5.1.3. *$A=(a_{nk})$ bir sonsuz matris ve her $n,k\in\mathbb{N}$ için $C=(c_{nk})$ matrisi*

$$c_{nk}=s_{n-1}a_{n-1,k}+r_na_{nk}$$

olarak tanımlandığında A matrisinin $\left(\ell(\widetilde{B},p),f(\widetilde{B})\right)$ *sınıfına ait bulunması için gerek ve yeter şart Teorem 5.1.2 de A matrisinin yerine C matrisinin yazılması ile elde edilir. Burada her $n\in\mathbb{N}$ için $r_n,s_n\in\mathbb{R}\backslash\{0\}$ ve $f(\widetilde{B}),\ B(\tilde{r},\tilde{s})$ dönüşümleri hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı f de olan tüm dizilerin uzayını göstermektedir ki bu çalışmada Candan [3] tarafından yapılmıştır.*

Sonuç 5.1.4. *$A=(a_{nk})$ bir sonsuz matris ve her $n,k\in\mathbb{N}$ için $C=(c_{nk})$ matrisi*

$$c_{nk}=\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}a_{jk}$$

olarak tanımlanırsa A matrisinin $\left(\ell(\widetilde{B},p),\widehat{f}\right)$ *sınıfına ait bulunması için gerek ve yeter şartlar Teorem 5.1.2'de A matrisinin yerine C matrisinin yazılması ile elde edilir. Burada* $\widehat{f},\ C_1-$*dönüşümleri hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı f de olan tüm dizilerin uzayını göstermektedir ki bu çalışmada Kayaduman ve Şengönül [54] taraflarından yapılmıştır.*

Sonuç 5.1.5. *$A=(a_{nk})$ bir sonsuz matris ve $t=(t_k)$ pozitif sayıların bir dizisi olsun. Her $n\in\mathbb{N}$ için $T_n=\sum_{k=0}^{n}t_k$ olmak üzere her $n,k\in\mathbb{N}$ için $C=(c_{nk})$ matrisi*

$$c_{nk}=\frac{1}{T_n}\sum_{j=0}^{n}a_{jk}$$

olarak tanımlanırsa A matrisinin $\left(\ell(\widetilde{B},p),r_\infty^t\right)$, $\left(\ell(\widetilde{B},p),r_c^t\right)$ *ve* $\left(\ell(\widetilde{B},p),r_0^t\right)$ *sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar Teorem 5.1.1,* *Teorem 5.1.3 ve Sonuç 5.1.1'de A matrisinin yerine C matrisinin yerleştirilmesi ile elde edilir. Burada r_∞^t, r_c^t ve r_0^t, Altay ve Başar tarafından [55] numaralı çalışmada tanımlanmıştır ki bu uzaylar, R^t-dönüşümleri sırası ile ℓ_∞, c ve c_0 da olan bütün dizilerin uzaylarıdır ve her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = p$ olması durumunda $r_\infty^t(p)$, $r_c^t(p)$ ve $r_0^t(p)$ paranormlu uzaylarından elde edilir.*

$x^\infty, \widetilde{c}$ ve $\widetilde{c}_0$; C_1-dönüşümleri sırası ile ℓ_∞, c ve c_0 uzaylarında olan tüm dizilerin oluşturduğu Cesàro dizi uzayları; Ng ve Lee [56], Şengönül ve Başar [57] yazarları tarafından tanımlandılar ve incelendiler. Burada C_1, 1-inci sıradan Cesàro ortalamasını göstermektedir. [55] nolu çalışmada tanımlanan r_∞^t, r_c^t ve r_0^t uzaylarında $t = e$ olması durumunda bu uzaylar sırası ile mutlak olmayan tipten x^∞, $\widetilde{c}$ ve $\widetilde{c}_0$ Cesàro dizi uzaylarına indirgendiğinden dolayı Sonuç 5.1.5, $(\ell(\widetilde{B},p), x^\infty)$, $(\ell(\widetilde{B},p), \widetilde{c})$ ve $(\ell(\widetilde{B},p), \widetilde{c}_0)$ sınıflarının karekterizasyonlarını da özel bir durum olarak içermektedir.

Sonuç 5.1.6. *$A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris ve her $n, k \in \mathbb{N}$ için $C = (c_{nk})$ matrisi $c_{nk} = a_{nk} - a_{n+1,k}$ olarak tanımlanırsa A matrisinin $\Big(\ell(\widetilde{B},p), \ell_\infty(\Delta)\Big)$, $\Big(\ell(\widetilde{B},p), c(\Delta)\Big)$ ve $\Big(\ell(\widetilde{B},p), c_0(\Delta)\Big)$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar Teorem 5.1.1, Teorem 5.1.3 ve Sonuç 5.1.1'de A matrisinin yerine C matrisinin yerleştirilmesi ile elde edilir. Burada $\ell_\infty(\Delta), c(\Delta)$ ve $c_0(\Delta)$; Kızmaz [58] tarafından tanımlanan fark dizi uzaylarını göstermektedir.*

Sonuç 5.1.7. *$A = (a_{nk})$ bir sonsuz matris ve her $n, k \in \mathbb{N}$ için $C = (c_{nk})$ matrisi $c_{nk} = \sum_{j=0}^{n} a_{jk}$ olarak tanımlanırsa A matrisinin $\Big(\ell(\widetilde{B},p), bs\Big)$, $\Big(\ell(\widetilde{B},p), cs\Big)$ ve $\Big(\ell(\widetilde{B},p), cs_0\Big)$ sınıflarından herhangi birine ait olması için gerek ve yeter şartlar Teorem 5.1.1, Teorem 5.1.3 ve Sonuç 5.1.1 de A matrisinin yerine C matrisinin yerleştirilmesi ile elde edilir. Burada cs_o, sıfıra yakınsayan tüm serilerin cümlesini göstermektedir [23].*

6. $\ell(\widetilde{B}, p)$ DİZİ UZAYININ BAZI GEOMETRİK ÖZELLİKLERİ

Fonksiyonel analizde geometrik özelliklerin en önemlilerinden biri bir Banach uzayının rotundluğudur. Bu bölümde öncelikle $\ell(\widetilde{B}, p)$ uzayının Luxemburg normu ile birlikte bir Banach uzayı olduğu gösterildikten sonra $\ell(\widetilde{B}, p)$ uzayının rotund olması için gerek ve yeter şart verilmiştir. Bunların yanı sıra $\ell(\widetilde{B}, p)$ dizi uzayının Kadec-Klee ve düzgün Opial özelliğine sahip olduğu ifade ve ispat edilmiştir.

6.1 $\ell(\widetilde{B}, p)$ Dizi Uzayının Rotundluğu

1906 da J.Jensen tarafından Konveks fonksiyonlar teorisinin temelleri atılmış akabinde 1934'te G.Hardy, J.Littlewood ve G.Polya "Inequalities" adlı çalışmalarında konveks fonksiyonları kapsamlı olarak incelemişlerdir. Konveks fonksiyonların özel bir sınıfı ise 1931 yılında "Über die Verallgemeinerung des Begriffes der zueinander konjugierten Potenzen" adlı çalışma ile Z.W.Birnbaum ve W.Orlicz taraflarından yapılmış olup ilgili konu ile ilgili çok daha kapsamlı olan bir diğer inceleme ise "Convex Functions and Orlicz Spaces" isimli çalışma ile M.A.Krasnosel'skii ve Y.B.Rutickii taraflarından 1961 yılında yapılmıştır.

Tanım 6.1.1. *X bir vektör uzayı ve X in boştan farklı bir A alt cümlesi için $x, y \in A$ iken x, y noktalarını birleştiren doğru parçası yine A ya ait oluyorsa yani $0 \leq t \leq 1$ için*

$$(1-t)x + ty \in A$$

ise veya denk olarak $\lambda \geq 0$, $\mu \geq 0$ olmak üzere $\lambda + \mu = 1$ için $\lambda x + \mu y \in A$ ise A'ya dışbükey veya konveks cümle denir.

Tanım 6.1.2. *X bir vektör uzayı ve X için de bir A konveks cümlesi ve bir $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\lambda \geq 0$ ve $\mu \geq 0$ ve $\lambda + \mu = 1$ olmak üzere $x, y \in A$ olduğunda*

$$f(\lambda x + \mu y) \leq \lambda f(x) + \mu f(y)$$

sağlanırsa f ye, A üzerinde bir konveks fonksiyondur denir.

Tanım 6.1.3. *$S(X)$, bir X Banach uzayının birim küresi olsun. Her $y, z \in S(X)$ için, eğer $2x = y + z$ olması $y = z$ olmasını gerektirir ise bir $x \in S(X)$ noktasına bir ekstremum noktası denir. Eğer $S(X)$ in her noktası bir ekstremum noktası ise bir X Banach uzayına rotund (kesin konveks) denir.*

Tanım 6.1.4. *X bir vektör uzayı olsun. X içindeki bir (x_n) dizisi, eğer her $f \in X$ için $f(x_n) \longrightarrow f(x)$, yani $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$, özelliğini sağlarsa (x_n) dizisi $x \in X$ e zayıf yakınsar (ya da zayıf olarak yakınsaktır) denir ve $x \in X$ elemanına (x_n) dizisinin zayıf limiti denir ve $x_n \xrightarrow{\omega} x$ yazılır [25–28].*

Tanım 6.1.5. *X bir Banach uzayı olmak üzere; eğer birim küre üzerinde her zayıf yakınsak dizi, norma göre yakınsak ise X e Kadec-Klee özelliğine (veya H özelliğine) sahiptir denir.*

Tanım 6.1.6. *X bir Banach uzayı olmak üzere*

i) *Eğer $x_0 \in X$ e zayıf yakınsak olan her (x_n) dizisi $x \neq x_0$ olmak üzere*

her $x \in X$ için

$$\liminf_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| < \liminf_{n\to\infty} \|x_n + x\|$$

eşitsizliğini sağlar ise X e Opial özelliğine sahiptir denir.

ii) *Eğer her bir $\varepsilon > 0$ ve $x \in X$ için $\|x\| > \varepsilon$ olmak üzere X de ki her bir (x_n)*

dizisi hem $x_n \to 0$ $(n \to \infty)$ hem de $\liminf\limits_{n\to\infty} \|x_n\| > 1$ özelliğini sağlarken

$$1 + r \leq \liminf_{n\to\infty} \|x_n + x\|$$

eşitsizliğini sağlayan bir $r > 0$ *mevcut ise* X *e düzgün Opial özelliğine sahiptir denir.*

Lemma 6.1.1. *Her* $k = \{1, 2, 3, ...\}$ *için eğer* $p_k \geq 1$ *ise* $x \geq 0$ *için* $f(x) = x^{p_k}$ *konveks fonksiyondur [24].*

İspat. Her $k = \{1, 2, 3, ...\}$ için $p_k \geq 1$ ise $x \geq 0$ olduğu durum gözönüne alındığında $f(x) = x^{p_k}$ ise $f'(x) = p_k x^{p_k - 1}, f''(x) = p_k \cdot (p_k - 1)\, x^{p_k - 2} \geq 0$ olduğundan f konveks fonksiyondur. □

Tanım 6.1.7. *X bir reel vektör uzayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan bir* $\sigma : X \to [0, \infty)$ *fonksiyoneline bir modüler denir [24].*

i) $\sigma(x) = 0$ *gerek ve yeter şart* $x = \theta$,

ii) $|\alpha| = 1$ *olacak şekilde ki* α *skalerleri için* $\sigma(\alpha x) = \sigma(x)$,

iii) $\alpha + \beta = 1$ *olacak şekilde ki her* $\alpha, \beta \geq 0$ *ve her* $x, y \in X$ *için*

$\sigma(\alpha x + \beta y) \leq \sigma(x) + \sigma(y)$,

iv) $\alpha + \beta = 1$ *olacak şekilde ki her* $\alpha, \beta > 0$ *ve her* $x, y \in X$ *için*

$\sigma(\alpha x + \beta y) \leq \alpha\sigma(x) + \beta\sigma(y)$ *eşitsizliğini sağlayan* σ *modülerine konveks denir.*

X *üzerinde ki* σ *modülerine*

a) *Her* $x \in X_\sigma$ *için* $\lim\limits_{\alpha \to 1^+} \sigma(\alpha x) = \sigma(x)$ *ise sağdan süreklidir.*

b) *Her* $x \in X_\sigma$ *için* $\lim\limits_{\alpha \to 1^-} \sigma(\alpha x) = \sigma(x)$ *ise soldan süreklidir.*

c) σ, *hem sağdan hem de soldan sürekli ise süreklidir denir. Burada*

$$X_\sigma = \left\{ x \in X : \lim_{\alpha \to 1^+} \sigma(\alpha x) = 0 \right\}$$

dır [24].

$\ell(\widetilde{B}, p)$ üzerindeki σ_p

$$\sigma_p(x) = \sum_k |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k}$$

olarak tanımlanır. Eğer her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k \geq 1$ ise her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$t \to |t|^{p_k}$$

fonksiyonun konveksliğinden dolayı σ_p; $\ell(\widetilde{B}, p)$ üzerinde bir konveks modülerdir.

Önerme 6.1.1. *Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k \geq 1$ ile $\ell(\widetilde{B}, p)$' de bir σ_p modüleri aşağıdaki şartları sağlar.*

i) *Eğer $0 < \alpha \leq 1$ ise $\alpha^M \sigma_p(\frac{x}{\alpha}) \leq \sigma_p(x)$ ve $\sigma_p(\alpha x) \leq \alpha \sigma_p(x)$ dir.*

ii) *Eğer $\alpha \geq 1$ ise $\sigma_p(x) \leq \alpha^M \sigma_p(\frac{x}{\alpha})$ dır.*

iii) *Eğer $\alpha \geq 1$ ise $\sigma_p(x) \leq \alpha \sigma_p(\frac{x}{\alpha})$ dır.*

iv) *σ_p modüleri $\ell(\widetilde{B}, p)$ uzayı üzerinde süreklidir. Burada $M = \max\{1, \sup p_k\}$ dır [24].*

İspat. $\ell(\widetilde{B}, p)$ üzerindeki σ_p modüleri gözönüne alındığında

i) $0 < \alpha \leq 1$ olsun. O halde $\frac{\alpha^M}{\alpha^{p_k}} \leq 1$ dir ve böylece

$$\begin{aligned}
\alpha^M \sigma_p(\frac{x}{\alpha}) &= \alpha^M \sum_k \left| s_{k-1}\frac{x_{k-1}}{\alpha} + r_k \frac{x_k}{\alpha} \right|^{p_k} \\
&= \alpha^M \sum_k \left| \frac{1}{\alpha}\left(s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k\right) \right|^{p_k}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \alpha^M \sum_k \frac{1}{\alpha^{p_k}} \left|s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k\right|^{p_k} \\
&= \sum_k \frac{\alpha^M}{\alpha^{p_k}} \left|s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k\right|^{p_k} \\
&\leq \sum_k \left|s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k\right|^{p_k} \\
&= \sigma_p(x)
\end{aligned}
$$

olur ve ayrıca

$$
\begin{aligned}
\sigma_p(\alpha x) &= \sum_k \left|s_{k-1}\alpha x_{k-1} + r_k \alpha x_k\right|^{p_k} \\
&= \sum_k \left|\alpha\left(s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k\right)\right|^{p_k} \\
&= \sum_k \alpha^{p_k} \left|s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k\right|^{p_k} \\
&\leq \sum_k \alpha \left|s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k\right|^{p_k} \\
&= \alpha \sum_k \left|s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k\right|^{p_k} \\
&= \alpha \sigma_p(x)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür.

ii) $\alpha \geq 1$ olsun. O halde her $p_k \geq 1$ için $\frac{\alpha^M}{\alpha^{p_k}} \geq 1$ dir. Daha açık olarak

$$
\frac{\alpha^M}{\alpha^{p_0}} \geq 1, \frac{\alpha^M}{\alpha^{p_1}} \geq 1, ..., \frac{\alpha^M}{\alpha^{p_k}} \geq 1, ...
$$

olup buradan

$$
\begin{aligned}
& 1.\left|s_{-1}x_{-1} + r_0 x_0\right|^{p_0} + 1.\left|s_0 x_0 + r_1 x_1\right|^{p_1} + \\
& ... + 1.\left|s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k\right|^{p_k} + ... \\
& \leq \frac{\alpha^M}{\alpha^{p_0}} \left|s_{-1}x_{-1} + r_0 x_0\right|^{p_0} + \frac{\alpha^M}{\alpha^{p_1}} \left|s_0 x_0 + r_1 x_1\right|^{p_1} + \\
& ... + \frac{\alpha^M}{\alpha^{p_k}} \left|s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k\right|^{p_k} + ...
\end{aligned}
$$

$$= \alpha^M \left[\begin{array}{c} \frac{|s_{-1}x_{-1}+r_0x_0|^{p_0}}{\alpha^{p_0}} + \frac{|s_0x_0+r_1x_1|^{p_1}}{\alpha^{p_1}} + \\ ... + \frac{|s_{k-1}x_{k-1}+r_kx_k|^{p_k}}{\alpha^{p_k}} + ... \end{array} \right]$$

$$= \alpha^M \left[\begin{array}{c} \left|\frac{s_{-1}x_{-1}+r_0x_0}{\alpha}\right|^{p_0} + \left|\frac{s_0x_0+r_1x_1}{\alpha}\right|^{p_1} + \\ ... + \left|\frac{s_{k-1}x_{k-1}+r_kx_k}{\alpha}\right|^{p_k} + ... \end{array} \right]$$

$$= \alpha^M \left[\begin{array}{c} \left|s_{-1}\frac{x_{-1}}{\alpha} + r_0\frac{x_0}{\alpha}\right|^{p_0} + \left|s_0\frac{x_0}{\alpha} + r_1\frac{x_1}{\alpha}\right|^{p_1} + \\ ... + \left|s_{k-1}\frac{x_{k-1}}{\alpha} + r_k\frac{x_k}{\alpha}\right|^{p_k} + ... \end{array} \right]$$

yazılabilir. Yani

$$\sum_{k=0}^{\infty} |s_{k-1}x_{k-1} + r_kx_k|^{p_k} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left|s_{k-1}\frac{x_{k-1}}{\alpha} + r_k\frac{x_k}{\alpha}\right|^{p_k}$$

eşitsizliği sağlanır ki bu

$$\sigma_p(x) \leq \alpha^M \sigma_p(\frac{x}{\alpha})$$

demektir.

iii) $\alpha \geq 1$ olsun. O halde her $p_k \geq 1$ için $\frac{\alpha}{\alpha^{p_0}} \leq 1, \frac{\alpha}{\alpha^{p_1}} \leq 1, ..., \frac{\alpha}{\alpha^{p_k}} \leq 1, ...$ dir ve

böylece

$$\begin{aligned} \sum_k |s_{k-1}x_{k-1} + r_kx_k|^{p_k} =& |s_{-1}x_{-1} + r_0x_0|^{p_0} + |s_0x_0 + r_1x_1|^{p_1} + \\ & ... + |s_{k-1}x_{k-1} + r_kx_k|^{p_k} + ... \\ \geq& \frac{\alpha}{\alpha^{p_0}} |s_{-1}x_{-1} + r_0x_0|^{p_0} + \frac{\alpha}{\alpha^{p_1}} |s_0x_0 + r_1x_1|^{p_1} + \\ & ... + \frac{\alpha}{\alpha^{p_k}} |s_{k-1}x_{k-1} + r_kx_k|^{p_k} + ... \\ =& \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha}{\alpha^{p_k}} |s_{k-1}x_{k-1} + r_kx_k|^{p_k} \\ =& \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\alpha^{p_k}} |s_{k-1}x_{k-1} + r_kx_k|^{p_k} \\ =& \alpha \sum_{k=0}^{\infty} \left|s_{k-1}\frac{x_{k-1}}{\alpha} + r_k\frac{x_k}{\alpha}\right|^{p_k} \\ =& \alpha\sigma_p(\frac{x}{\alpha}) \end{aligned}$$

dır.

iv) $\alpha > 1$ için (ii) ve (iii) den

$$\sigma_p(x) \leq \alpha\sigma_p(x) \leq \sigma_p(\alpha x) \leq \alpha^M \sigma_p(x) \tag{6.1.1}$$

olduğunu gösterelim. $\alpha > 1$ olduğundan

$$\sigma_p(x) \leq \alpha\sigma_p(x) \tag{6.1.2}$$

dir.

$$\begin{aligned} \alpha\sigma_p(x) &= \alpha\sum_k |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k} \\ &= \sum_k \alpha |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_k \alpha^{p_k} |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k} \\ &= \sum_k |\alpha (s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k)|^{p_k} \\ &= \sum_k |s_{k-1}\alpha x_{k-1} + r_k \alpha x_k|^{p_k} \\ &= \sigma_p(\alpha x) \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

O halde $\alpha\sigma_p(x) \leq \sigma_p(\alpha x)$ dir.

(iii) nin ispatında $\frac{\alpha^M}{\alpha^{p_k}} \geq 1$ olduğundan $\alpha^{p_k} \leq \alpha^M$ dir.

$$\begin{aligned} \sigma_p(\alpha x) &= \sum_k |s_{k-1}\alpha x_{k-1} + r_k \alpha x_k|^{p_k} \\ &= \sum_k |\alpha (s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k)|^{p_k} \\ &= \sum_k \alpha^{p_k} |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k} \\ &\leq \sum_k \alpha^M |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k} \\ &= \alpha^M \sum_k |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k} \\ &= \alpha^M \sigma_p(x). \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

Yani $\sigma_p(\alpha x) \leq \alpha^M \sigma_p(x)$ dir.

(6.1.2), (6.1.3) ve (6.1.4) den

$$\sigma_p(x) \leq \alpha\sigma_p(x) \leq \sigma_p(\alpha x) \leq \alpha^M \sigma_p(x)$$

eşitsizliği yazılabilir. (6.1.1) de $\alpha \to 1^+$ iken limit alınırsa

$$\lim_{\alpha \to 1^+} \sigma_p(x) \leq \lim_{\alpha \to 1^+} \sigma_p(\alpha x) \leq \lim_{\alpha \to 1^+} \alpha^M \sigma_p(x)$$

$$\sigma_p(x) \leq \lim_{\alpha \to 1^+} \sigma_p(\alpha x) \leq \sigma_p(x)$$

olup sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{\alpha \to 1^+} \sigma_p(\alpha x) = \sigma_p(x)$$

dir. Bundan dolayı sağdan süreklidir. Eğer $0 < \alpha < 1$ ise (i) den

$$\alpha^M \sigma_p(x) \leq \sigma_p(\alpha x) \leq \alpha\sigma_p(x) \tag{6.1.5}$$

elde edilir. Şimdi (6.1.5) eşitsizliğini gösterelim.

$0 < \alpha < 1$ için (i) nin ispatında $\frac{\alpha^M}{\alpha^{p_k}} \leq 1$ olduğundan $\alpha^M \leq \alpha^{p_k}$ dır.

$$\begin{aligned}
\alpha^M \sigma_p(x) &= \alpha^M \sum_k |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k} \\
&= \sum_k \alpha^M |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k} \\
&\leq \sum_k \alpha^{p_k} |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k} \\
&= \sum_k |\alpha\left(s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k\right)|^{p_k} \\
&= \sum_k |s_{k-1}\alpha x_{k-1} + r_k \alpha x_k|^{p_k} \\
&= \sigma_p(\alpha x).
\end{aligned}$$

(i) den $\sigma_p(\alpha x) \leq \alpha\sigma_p(x)$ olduğunu biliyoruz. O halde

$$\alpha^M \sigma_p(x) \leq \sigma_p(\alpha x) \leq \alpha\sigma_p(x)$$

yazılır. (6.1.5) de $\alpha \to 1^-$ iken limit alınırsa

$$\lim_{\alpha\to 1^-} \alpha^M \sigma_p(x) \leq \lim_{\alpha\to 1^-} \sigma_p(\alpha x) \leq \lim_{\alpha\to 1^+} \alpha\sigma_p(x)$$

ve böylece

$$\sigma_p(x) \leq \lim_{\alpha\to 1^-} \sigma_p(\alpha x) \leq \sigma_p(x)$$

olup sıkıştırma teoreminden

$$\lim_{\alpha\to 1^-} \sigma_p(\alpha x) = \sigma_p(x)$$

olur. Bundan dolayı σ_p aynı zamanda soldan da süreklidir ve böylece σ_p süreklidir. □

Tanım 6.1.8. *$\ell(\widetilde{B},p)$ uzayı*

$$\|x\| = \inf\left\{\alpha > 0 : \sigma_p(\frac{x}{\alpha}) \leq 1\right\}$$

olarak tanımlanan Luxemburg normu ile donatılmıştır.

Önerme 6.1.2. *Herhangi bir $x \in \ell(\widetilde{B},p)$ için aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

i) Eğer $\|x\| \leq 1$ ise $\sigma_p(x) \leq \|x\|$.

ii) Eğer $\|x\| > 1$ ise $\sigma_p(x) \geq \|x\|$.

iii) $\|x\| = 1$ olması için gerek ve yeter şart $\sigma_p(x) = 1$ olmasıdır.

iv) $\|x\| < 1$ olması için gerek ve yeter şart $\sigma_p(x) < 1$ olmasıdır.

v) $\|x\| > 1$ olması için gerek ve yeter şart $\sigma_p(x) > 1$ olmasıdır.

İspat. $x \in \ell(\widetilde{B},p)$ olsun.

i) $0 < \varepsilon < 1 - \|x\|$ olacak şekilde $\varepsilon > 0$ olsun. $\|.\|$ un tanımından bir $\alpha > 0$ mevcut öyle ki $\|x\| + \varepsilon > \alpha$ ve $\sigma_p(x) \leq 1$ dir. Önerme 6.1.1 in (i) ve (ii) şartlarından

$$\sigma_p(x) \leq \sigma_p\left[(\|x\| + \varepsilon)\frac{x}{\alpha}\right] \leq (\|x\| + \varepsilon)\,\sigma_p\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq \|x\| + \varepsilon$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan (i) elde edilir.

ii) $\varepsilon > 0$ seçilsin öyle ki $0 < \varepsilon < 1 - \frac{1}{\|x\|}$ olsun. Bu eşitsizlik -1 ile çarpılırsa

$$-1 + \frac{1}{\|x\|} < -\varepsilon < 0$$

olur. Eşitsizliğin her tarafına 1 ilave edilirse

$$1 - 1 + \frac{1}{\|x\|} < 1 - \varepsilon < 1$$

yani

$$\frac{1}{\|x\|} < 1 - \varepsilon < 1$$

olur. Yine eşitsizlikte her yer $\|x\|$ ile çarpılırsa

$$1 < (1-\varepsilon) \,.\, \|x\| < \|x\|$$

elde edilir. $\|x\|$ in tanımından ve Önerme 6.1.1 in (i) şartından

$$1 < \sigma_p \left[\frac{x}{(1-\varepsilon)\|x\|} \right] \leq \frac{1}{(1-\varepsilon)\|x\|} \sigma_p(x) \tag{6.1.6}$$

elde edilir. Böylece her $\varepsilon \in \left(0, 1 - \frac{1}{\|x\|}\right)$ için (6.1.6) nın her tarafını $(1-\varepsilon)\|x\|$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} 1.\,(1-\varepsilon)\|x\| &< \sigma_p \left[\frac{x}{(1-\varepsilon)\|x\|} \right] .\,(1-\varepsilon)\|x\| \\ &\leq \frac{1}{(1-\varepsilon)\|x\|} \sigma_p(x).\,(1-\varepsilon)\|x\| \end{aligned}$$

olur ki buradan

$$(1-\varepsilon)\|x\| < \sigma_p \left[\frac{x}{(1-\varepsilon)\|x\|} \right] .\,(1-\varepsilon)\|x\| \leq \sigma_p(x)$$

elde edilir. Bundan $\|x\| \leq \sigma_p(x)$ kastedilmiştir.

iii) σ_p nin sürekliliğinden, Teorem 6.1.1 tarafından ve (6.1.5) den (iii) ye doğrudan elde edilir.

$\square$

Teorem 6.1.1. $\ell(\widetilde{B}, p)$, *Luxemburg normu ile bir Banach uzayıdır.*

İspat. Her $x \in \ell(\widetilde{B}, p)$ için $S_x = \left\{\alpha > 0 : \sigma_p\left(\frac{x}{\alpha}\right) \le 1\right\}$ ve $\|x\| = \inf S_x$ olsun. Bu takdirde $S_x \subset (0, \infty)$ dur. Bu nedenle her $x \in \ell(\widetilde{B}, p)$ için $\|x\| \ge 0$ dır.

$x = \theta = (0, 0, ..., 0, ...)$ ve her $\alpha > 0$ için $\sigma_p(\theta) = 0$ dır. Böylece $S_\theta = (0, \infty)$ ve

$$\|\theta\| = \inf S_\theta = \inf (0, \infty) = 0$$

dır. $x \ne \theta$ ve $\mathbf{Y} = \left\{kx : k \in \mathbb{C} \text{ ve } x \in \ell(\widetilde{B}, p)\right\}$ cümlesi $\ell(\widetilde{B}, p)$ nin boş olmayan bir alt cümlesi olsun.

$$\mathbf{Y} \subsetneq S\left[\ell(\widetilde{B}, p)\right]$$

olduğundan dolayı $k_1 \in \mathbb{R}$ mevcuttur öyle ki

$$k_1.x \notin S\left[\ell(\widetilde{B}, p)\right]$$

dir. Açık olarak $k_1 \ne 0$ dır. Şimdi $0 < \alpha < \frac{1}{k_1}$ ve $\alpha \in S_x$ olduğu kabul edildiğinde, Önerme 6.1.1 in (i) şıkkından ve Önerme 6.1.2 nin (iii) ve (iv) şıklarından $\frac{x}{\alpha} \in S\left[\ell(\widetilde{B}, p)\right]$ dir. Bu takdirde $k_1\alpha < 1$ olduğundan

$$k_1 x = k_1\alpha.\frac{x}{\alpha} \in S\left[\ell(\widetilde{B}, p)\right]$$

elde edilir ki bu bir çelişir. Böylece eğer $\alpha \in S_x$ ise $\alpha \ge \frac{1}{|k_1|}$ dir. Bunun manası

$$\|x\| \ge \frac{1}{|k_1|} > 0$$

dır. Sonuç olarak $\|x\| = 0$ dır gerek ve yeter sart $x = \theta$ olduğu ispatlanmış olur.

Şimdi $k \ne 0$ ve $\alpha \in S_{kx}$ olsun. Bu takdirde

$$S_x = \left\{\alpha > 0 : \sigma_p\left(\frac{x}{\alpha}\right) \le 1\right\}$$

olduğundan

$$S_{kx} = \left\{\alpha > 0 : \sigma_p\left(\frac{kx}{\alpha}\right) \le 1\right\}$$

olup buradan $\sigma_p\left(\frac{kx}{\alpha}\right) \le 1$ ve Önerme 6.1.2 nın (iii) ve (iv) şıkkından $\left\|\frac{kx}{\alpha}\right\| \le 1$ yani $\frac{kx}{\alpha} \in S\left[\ell(\widetilde{B}, p)\right]$ dir. Böylece

$$\frac{|k|\,x}{\alpha} = \frac{|k|}{k}.\frac{kx}{\alpha} \in S\left[\ell(\widetilde{B}, p)\right], \frac{\alpha}{|k|} \in S_x$$

elde edilir. Yani her $\alpha \in S_x$ için $\|x\| \leq \frac{\alpha}{|k|}$ ve buradan da $|k| \, . \, \|x\| \leq \alpha$ olur. Buna göre $|k| \, . \, \|x\| \leq \|k.x\|$ kalır. Bu son eşitsizlikte k yerine $\frac{1}{k}$ ve x yerine $k.x$ alındığında

$$\left|\frac{1}{k}\right| . \, \|k.x\| \leq \left\|\frac{1}{k}.k.x\right\| = \|x\|$$

yani

$$\left|\frac{1}{k}\right| . \, \|k.x\| \leq \|x\| \tag{6.1.7}$$

veya bir başka ifade ile

$$\|k.x\| \leq |k| \, . \, \|x\|$$

olur. Böylece

$$\|k.x\| = |k| \, . \, \|x\|$$

elde edilir ki bu eşitsizlik $k = 0$ için de sağlanır.

Üçgen eşitsizliğini ispatlamak için $x, y \in \ell(\widetilde{B}, p)$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu takdirde $\alpha \in S_x$ ve $\beta \in S_y$ mevcuttur öyle ki

$$\alpha < \|x\| + \varepsilon \text{ ve } \beta < \|y\| + \varepsilon$$

yazılabilir. $S\left[\ell(\widetilde{B}, p)\right]$ konveks olduğundan dolayı $\frac{x}{\alpha} \in S\left[\ell(\widetilde{B}, p)\right]$, $\frac{y}{\beta} \in S\left[\ell(\widetilde{B}, p)\right]$ ve

$$\frac{x+y}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha.\frac{x}{\alpha} + \beta.\frac{y}{\beta}}{\alpha+\beta} = \frac{\alpha}{\alpha+\beta}\left(\frac{x}{\alpha}\right) + \frac{\beta}{\alpha+\beta}\left(\frac{y}{\beta}\right) \in S\left[\ell(\widetilde{B}, p)\right]$$

dir ve böylece $\alpha + \beta \in S_{x+y}$ olur ki buradan da

$$\|x+y\| \leq \alpha + \beta < \|x\| + \|y\| + 2\varepsilon$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ keyfi olduğundan

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

üçgen eşitsizliği elde edilir. Netice olarak

$$\|x\| = \inf\left\{\alpha > 0 : \sigma_p\left(\frac{x}{\alpha}\right) \leq 1\right\}$$

$\ell(\widetilde{B},p)$ üzerinde bir normdur.

Şimdi $\ell(\widetilde{B},p)$ deki her Cauchy dizisinin Luxemburg normuna göre yakınsak olduğunu göstermeye ihtiyaç vardır. $\left\{x_k^{(n)}\right\}$, $\ell(\widetilde{B},p)$ de bir Cauchy dizisi ve $\varepsilon \in (0,1)$ olsun. Tanım gereğince her $m,n \geq n_0$ olduğunda $\left\|x^{(n)}-x^{(m)}\right\| < \varepsilon$ kalacak şekilde bir n_0 mevcuttur. Her $m,n \geq n_0$ için Önerme 6.1.2 nın (i) kısmından

$$\sigma_p\left(x^{(n)}-x^{(m)}\right) \leq \left\|x^{(n)}-x^{(m)}\right\| < \varepsilon, \qquad \varepsilon \in (0,1) \tag{6.1.8}$$

bu ise

$$\sum_k \left|\left[\widetilde{B}\left(x^{(n)}-x^{(m)}\right)\right]_k\right|^{p_k} < \varepsilon \tag{6.1.9}$$

olduğunu söyler. Bu takdirde her bir sabit k ve her $m,n \geq n_0$ için

$$\left|\left[\widetilde{B}\left(x^{(n)}-x^{(m)}\right)\right]_k\right| = \left|\left(\widetilde{B}x^{(n)}\right)_k - \left(\widetilde{B}x^{(m)}\right)_k\right| < \varepsilon \tag{6.1.10}$$

kalır. Dolayısıyla $\left\{\left(\widetilde{B}x^{(n)}\right)_k\right\}$, $\mathbb{R}$ de bir Cauchy dizisidir. $\mathbb{R}$ tam olduğundan

$$\left(\widetilde{B}x^{(m)}\right)_k \longrightarrow \left(\widetilde{B}x\right)_k, \qquad (m \to \infty)$$

olacak şekilde $\left(\widetilde{B}x\right)_k \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Böylece (6.1.9) den her $n \geq n_0$ için

$$\sum_k \left|\left[\widetilde{B}\left(x^{(n)}-x^{(m)}\right)\right]_k\right|^{p_k} < \varepsilon$$

kalır. İspatı tamamlamak için (x_n) dizisinin $\ell(\widetilde{B},p)$ nin bir elemanı olduğu gösterilmesi gerekir. $m \to \infty$ için

$$\left(\widetilde{B}x^{(m)}\right)_k \longrightarrow \left(\widetilde{B}x\right)_k$$

olduğundan dolayı

$$\lim_{m\to\infty} \sigma_p\left(x^{(n)}-x^{(m)}\right) = \sigma_p\left(x^{(n)}-x\right) \tag{6.1.11}$$

olur. (6.1.8) dan ise her $n \geq n_0$ için

$$\sigma_p\left(x^{(n)}-x\right) \leq \left\|x^{(n)}-x\right\| < \varepsilon$$

kalır. Bu ise $n \to \infty$ için $x^n \to x$ demektir. Böylece

$$x = x^n - \left(x^{(n)} - x\right) \in \ell(\widetilde{B}, p)$$

elde edilmiş olur. Sonuç olarak $\ell(\widetilde{B}, p)$ dizi uzayı Luxemburg normuna göre tamdır. Bu da ispatı tamamlar. □

Teorem 6.1.2. *$\ell(\widetilde{B}, p)$ uzayının Rotund olması için gerek ve yeter şart her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k > 1$ olmasıdır.*

İspat. $\ell(\widetilde{B}, p)$'nin Rotund ve $k < 3$ için $p_k = 1$ olduğunu kabul edilerek aşağıdaki gibi tanımlanan x ve y dizilerini göz önüne alındığında

$$\begin{aligned} x &= \left(0, \frac{1}{r_1}, \frac{-s_1}{r_1.r_2}, \frac{s_1.s_2}{r_1.r_2.r_3}, ...\right) \\ y &= \left(0, 0, \frac{1}{r_2}, \frac{-s_2}{r_2.r_3}, \frac{s_1.s_2}{r_1.r_2.r_3}, ...\right) \end{aligned} \tag{6.1.12}$$

açık olarak $x \neq y$ dir ve

$$\begin{aligned} \sigma_p(x) =& \sum_k |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k} \\ =& |s_{-1}x_{-1} + r_0 x_0|^{p_0} + |s_0 x_0 + r_1 x_1|^{p_1} + |s_1 x_1 + r_2 x_2|^{p_2} + \\ & |s_2 x_2 + r_3 x_3|^{p_3} + ... \\ =& |0 + r_0.0|^1 + \left|s_0.0 + r_1.\frac{1}{r_1}\right|^1 + \left|s_1.\frac{1}{r_1} - r_2.\frac{s_1}{r_1.r_2}\right|^1 \\ & + \left|-s_0.\frac{s_1}{r_1.r_2} + r_3.\frac{s_1.s_2}{r_1.r_2.r_3}\right|^{p_3} + ... \\ =& 0^1 + 1^1 + 0^1 + 0^{p_3} + ... \\ =& 1 \end{aligned}$$

dir. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} \sigma_p(y) =& \sum_k |s_{k-1}y_{k-1} + r_k y_k|^{p_k} \\ =& |s_{-1}y_{-1} + r_0 y_0|^{p_0} + |s_0 y_0 + r_1 y_1|^{p_1} + |s_1 y_1 + r_2 y_2|^{p_2} \\ & + |s_2 y_2 + r_3 y_3|^{p_3} + ... \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |0 + r_0.0|^1 + |s_0.0 + r_1.0|^1 + \left| s_1.0 + r_2.\frac{1}{r_2} \right|^1 \\
&\quad + \left| s_2.\frac{1}{r_2} - r_3.\frac{s_2}{r_2.r_3} \right|^{p_3} + ... \\
&= 0^1 + 0^1 + 1^1 + 0^{p_3} + ... \\
&= 1
\end{aligned}
$$

dir. Ancak

$$
\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(0, \frac{1}{2r_1}, \frac{r_1 - s_2}{2r_1 r_2}, \frac{s_1 s_2 - r_1 s_1}{2r_1 r_2 r_3}, ...\right)
$$

için

$$
\begin{aligned}
\sigma_p(\frac{x+y}{2}) &= \sum_k \left| s_{k-1}\left(\frac{x_{k-1}+y_{k-1}}{2}\right) + r_k\left(\frac{x_k+y_k}{2}\right) \right|^{p_k} \\
&= \left| s_{-1}\left(\frac{x_{-1}+y_{-1}}{2}\right) + r_0\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) \right|^{p_0} \\
&\quad + \left| s_0\left(\frac{x_0+y_0}{2}\right) + r_1\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right) \right|^{p_1} \\
&\quad + \left| s_1\left(\frac{x_1+y_1}{2}\right) + r_2\left(\frac{x_2+y_2}{2}\right) \right|^{p_2} \\
&\quad + \left| s_2\left(\frac{x_2+y_2}{2}\right) + r_3\left(\frac{x_3+y_3}{2}\right) \right|^{p_3} + ... \\
&= |0 + r_0.0|^1 + \left| s_0.0 + r_1.\frac{1}{2r_1} \right|^1 \\
&\quad + \left| s_1.\frac{1}{2r_1} + r_2.\left(\frac{r_1 - s_1}{2r_1.r_2}\right) \right|^1 \\
&\quad + \left| s_2.\left(\frac{r_1 - s_1}{2r_1.r_2}\right) + r_3.\left(\frac{s_1 s_2 - r_1 s_1}{2r_1 r_2 r_3}\right) \right|^{p_3} + ... \\
&= 0^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 0^{p_3} + ... \\
&= 1
\end{aligned}
$$

olur. Önerme 6.1.2'nın (iii) kısmı, $x, y, \frac{x+y}{2} \in \mathbf{S}\left[\ell(\widetilde{B}, p)\right]$ olması, $\ell(\widetilde{B}, p)$ dizi uzayının rotund olması ile çelişir.

Tersine her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ olduğunu kabul edilerek $\ell(\widetilde{B}, p)$ uzayının rotund olduğu aşağıdaki gibi gösterilir. Bunun için $x, v, z \in \mathbf{S}\left[\ell(\widetilde{B}, p)\right]$ öyle ki

$$x = \frac{v+z}{2}$$

olduğu kabul edilip, σ_p'nin konveksliği ve Önerme 6.1.2'nın (iii) kısmından

$$1 = \sigma_p(x) \leq \frac{\sigma_p(v) + \sigma_p(z)}{2} \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \tag{6.1.13}$$

olur ki bu $\sigma_p(v) = \sigma_p(z) = 1$ ve

$$\sigma_p(x) = \frac{\sigma_p(v) + \sigma_p(z)}{2} \tag{6.1.14}$$

olduğunu verir. Aynı zamanda (6.1.14) dan

$$\begin{aligned} &\sum_k |s_{k-1}x_{k-1} + r_k x_k|^{p_k} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_k |s_{k-1}v_{k-1} + r_k v_k|^{p_k} + \sum_k |s_{k-1}z_{k-1} + r_k z_k|^{p_k}\right) \end{aligned} \tag{6.1.15}$$

yazılabilir ki $x = \frac{v+z}{2}$ olduğundan

$$\begin{aligned} &\sum_k |s_{k-1}(v_{k-1} + z_{k-1}) + r_k (v_k + z_k)|^{p_k} \\ &= \frac{1}{2}\left(\sum_k |s_{k-1}v_{k-1} + r_k v_k|^{p_k} + \sum_k |s_{k-1}z_{k-1} + r_k z_k|^{p_k}\right) \end{aligned} \tag{6.1.16}$$

elde edilir bu ise her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} &|s_{k-1}(v_{k-1} + z_{k-1}) + r_k (v_k + z_k)|^{p_k} \\ &= \frac{1}{2}|s_{k-1}v_{k-1} + r_k v_k|^{p_k} + \frac{1}{2}|s_{k-1}z_{k-1} + r_k z_k|^{p_k} \end{aligned} \tag{6.1.17}$$

olduğunu gösterir. Her $k \in \mathbb{N}$ için $t \to |t|^{p_k}$ fonksiyonu kesin konveks olduğundan dolayı (6.1.17) dan her $k \in \mathbb{N}$ için $v_k = z_k$ elde edilir yani $v = z$ dir. Bu da $\ell(\widetilde{B}, p)$ dizi uzayının rotund olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 6.1.3. *$x \in \ell(\widetilde{B}, p)$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

i) $0 < \alpha < 1$ ve $\|x\| > \alpha$ ise $\sigma_p(x) > \alpha^M$,

ii) $\alpha \geq 1$ ve $\|x\| < \alpha$ ise $\sigma_p(x) < \alpha^M$.

İspat. $x \in \ell(\widetilde{B}, p)$ olsun.

i) $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $\|x\| > \alpha$ olduğu kabul edildiğinde $\left\|\frac{x}{\alpha}\right\| > 1$ olduğu çok kolay bir şekilde görülür. Önerme 6.1.2 nın (ii) şıkkından dolayı $\left\|\frac{x}{\alpha}\right\| > 1$ olması $\sigma_p(\frac{x}{\alpha}) \geq \left\|\frac{x}{\alpha}\right\| > 1$ olmasını gerektirir yani $\sigma_p(\frac{x}{\alpha}) > 1$ dir. $0 < \alpha < 1$ olduğundan dolayı Önerme 6.1.1'in (i) şıkkından

$$\alpha^M.\sigma_p(\frac{x}{\alpha}) \leq \sigma_p(x)$$

elde edilir. Böylece $\alpha^M < \sigma_p(x)$ olduğu görülür.

ii) $\alpha \geq 1$ ve $\|x\| < \alpha$ olması durumunda $\left\|\frac{x}{\alpha}\right\| < 1$ kaldığı kolayca görülür. Bununla birlikte Önerme 6.1.2 nın (i) şıkkından $\left\|\frac{x}{\alpha}\right\| < 1$ olması $\sigma_p(\frac{x}{\alpha}) \leq \left\|\frac{x}{\alpha}\right\| < 1$ olmasını gerektirir yani $\sigma_p(\frac{x}{\alpha}) < 1$ dir. Eğer $\alpha = 1$ ise

$$\sigma_p(\frac{x}{\alpha}) = \sigma_p(x) < 1 = \alpha^M$$

dir. Eğer $\alpha > 1$ ise Önerme 6.1.1 in (ii) şıkkından

$$\sigma_p(x) \leq \alpha^M.\sigma_p(\frac{x}{\alpha})$$

yazılabilir. Bu

$$\sigma_p(x) \leq \alpha^M$$

demektir.

□

Teorem 6.1.4. (x_n); $\ell(\widetilde{B}, p)$ *de bir dizi ise aşağıdaki ifadeler sağlanır.*

i) $\lim\limits_{n\to\infty} \|x\| = 1$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_p(x_n) = 1$ dir.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \sigma_p(x_n) = 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} \|x\| = 0$ dır.

İspat. (x_n); $\ell(\widetilde{B},p)$ de bir dizi olsun. Bu takdirde

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\|x\| = 1$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ olsun. Bu durumda bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki her $n \geq n_0$ için

$$1-\varepsilon < \|x\| < 1+\varepsilon$$

yazılabilir. Bir önceki teoremden $1-\varepsilon < \|x\|$ ise

$$\sigma_p(x_n) > (1-\varepsilon)^M \tag{6.1.18}$$

dir ve $\|x\| < 1+\varepsilon$ ise yine bir önceki teoremden

$$\sigma_p(x_n) < (1+\varepsilon)^M \tag{6.1.19}$$

olduğu kolayca ifade edilebilir. (6.1.18) ve (6.1.19) dan $\varepsilon \in (0,1)$ ve her $n \geq n_0$ için bir $n_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki

$$(1-\varepsilon)^M < \sigma_p(x_n) < (1+\varepsilon)^M$$

yani

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_p(x_n) = 1$$

dir.

ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_p(x_n) \neq 0$ ve $\varepsilon \in (0,1)$ olduğunu kabul edildiğinde (x_n) dizisinin bir (x_{n_k}) alt dizisi mevcuttur öyle ki her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\|x_{n_k}\| > \varepsilon$$

dur. Bir önceki teoremden $0 < \varepsilon < 1$, $\|x_{n_k}\| > \varepsilon$ ve $\sigma_p(x_{n_k}) > \varepsilon^M$ olmasını gerektirir. Böylece her $k \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_p(x_n) \neq 0$ dır. Bu ise hipotez ile çelişir ve böylece $\lim\limits_{n\to\infty}\sigma_p(x_n) = 0$ ise $\lim\limits_{n\to\infty}\|x\| = 0$ dır.

□

Teorem 6.1.5. *$x \in \ell(\widetilde{B}, p)$ ve $\left(x^{(n)}\right) \subset \ell(\widetilde{B}, p)$ olmak üzere, eğer*

$$\sigma_p(x^{(n)}) \to \sigma_p(x), \qquad (n \to \infty)$$

ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k^{(n)} \to x_k, \qquad (n \to \infty)$$

ise

$$x^{(n)} \to x, \qquad (n \to \infty)$$

olur.

İspat. $\varepsilon > 0$ verilsin. $x \in \ell(\widetilde{B}, p)$ ise

$$\sigma_p(x) = \sum_k \left| \left(\widetilde{B}x \right)_k \right|^{p_k} < \infty$$

olur ki yakınsak bir seri de kalan terimin limiti sıfır olduğundan dolayı

$$\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left| \left(\widetilde{B}x \right)_k \right|^{p_k} < \frac{\varepsilon}{3.\,(2^{M+1})} \tag{6.1.20}$$

kalacak şekilde bir $k_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki her $n \geq n_0$ ve her k için

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sigma_p(x^{(n)}) - \sum_{k=1}^{k_0} \left| \left(\widetilde{B}x^{(n)} \right)_k \right|^{p_k} \right] = \sigma_p(x) - \sum_{k=1}^{k_0} \left| \left(\widetilde{B}x \right)_k \right|^{p_k} \tag{6.1.21}$$

elde edilir ve $n \geq n_0$ için

$$\sigma_p(x^{(n)}) - \sum_{k=1}^{k_0} \left| \left(\widetilde{B}x^{(n)} \right)_k \right|^{p_k} < \sigma_p(x) - \sum_{k=1}^{k_0} \left| \left(\widetilde{B}x \right)_k \right|^{p_k} + \frac{\varepsilon}{3.2^M} \tag{6.1.22}$$

eşitsizliği geçerlidir. Burada tanım gereğince $\sigma_p(x^{(n)}) = \sum_k \left| \left(\widetilde{B}x^{(n)} \right)_k \right|^{p_k}$ ve $\sigma_p(x) = \sum_k \left| \left(\widetilde{B}x \right)_k \right|^{p_k}$ olup hipotezden $\sigma_p(x^{(n)}) \to \sigma_p(x)$ $(n \to \infty)$ olduğundan dolayı $n \to \infty$ için

$$\sum_k \left| \left(\widetilde{B}x^{(n)} \right)_k \right|^{p_k} \longrightarrow \sum_k \left| \left(\widetilde{B}x \right)_k \right|^{p_k}$$

yazılabilir. Buna göre $n \to \infty$ için

$$\left| \sum_k \left| \left(\widetilde{B}x^{(n)} \right)_k \right|^{p_k} - \sum_k \left| \left(\widetilde{B}x \right)_k \right|^{p_k} \right| \longrightarrow 0$$

olur ki buradan $n \to \infty$ için

$$\sum_k \left|\left(\widetilde{B}x^{(n)}\right)_k\right|^{p_k} - \sum_k \left|\left(\widetilde{B}x\right)_k\right|^{p_k} \longrightarrow 0$$

yazılabilir. Böylece $n \to \infty$ için

$$\sum_k \left|\left(\widetilde{B}x^{(n)}\right)_k - \left(\widetilde{B}x\right)_k\right|^{p_k} \longrightarrow 0$$

olup nihayetinde $n \to \infty$ için

$$\sum_k \left|\left\{\widetilde{B}\left(x^{(n)} - x\right)\right\}_k\right|^{p_k} \longrightarrow 0$$

olur. Bu seri sıfıra yakınsak olduğundan kısmi toplamlar dizisi sıfıra yakınsak olmak zorundadır. Bundan dolayı

$$\sum_{k=1}^{k_0} \left|\left\{\widetilde{B}\left(x^{(n)} - x\right)\right\}_k\right|^{p_k} < \frac{\varepsilon}{3} \tag{6.1.23}$$

kalır. Böylece $(6.1.20), (6.1.22)$ ve $(6.1.23)$ dan

$$\begin{aligned}
\sigma_p(x^{(n)} - x) &= \sum_{k=1}^{\infty} \left|\left\{\widetilde{B}\left(x^{(n)} - x\right)\right\}_k\right|^{p_k} \qquad (6.1.24)\\
&= \sum_{k=1}^{k_0} \left|\left\{\widetilde{B}\left(x^{(n)} - x\right)\right\}_k\right|^{p_k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left|\left\{\widetilde{B}\left(x^{(n)} - x\right)\right\}_k\right|^{p_k}\\
&< \sum_{k=1}^{k_0} \left|\left\{\widetilde{B}\left(x^{(n)} - x\right)\right\}_k\right|^{p_k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left|\left(\widetilde{B}x^{(n)}\right)_k - \left(\widetilde{B}x\right)_k\right|^{p_k}\\
&< \frac{\varepsilon}{3} + 2^{M-1}\left[\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left|\left(\widetilde{B}x^{(n)}\right)_k\right|^{p_k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left|\left(\widetilde{B}x\right)_k\right|^{p_k}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&< \frac{\varepsilon}{3} + 2^{M}\left[\sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left|\left(\widetilde{B}x^{(n)}\right)_k\right|^{p_k} + \sum_{k=k_0+1}^{\infty} \left|\left(\widetilde{B}x\right)_k\right|^{p_k}\right]\\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2^{M}\left[2.\frac{\varepsilon}{3.2^{M}.2} + \frac{\varepsilon}{3.2^{M}}\right]\\
&= \frac{\varepsilon}{3} + 2^{M}\left[\frac{2\varepsilon}{3.2^{M}}\right]\\
&= \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2\varepsilon}{3}\\
&= \frac{3\varepsilon}{3}\\
&= \varepsilon.
\end{aligned}$$

Bu ise n$\to\infty$ için

$$\sigma_p(x^{(n)}-x)\to 0$$

demektir. Teorem 6.1.4 un (ii) kısmından

$$\sigma_p(x^{(n)}-x)\to 0, \qquad (n\to\infty)$$

olması

$$\left\|x^{(n)}-x\right\|\to 0, \qquad (n\to\infty)$$

olmasını gerektirir. Sonuç olarak

$$x^{(n)}\to x, \qquad (n\to\infty)$$

elde edilir. □

Teorem 6.1.6. *$\ell(\widetilde{B},p)$ dizi uzayı Kadec-Klee özelliğine sahiptir.*

İspat. $x\in S\left[\ell(\widetilde{B},p)\right]$ ve $\left(x^{(n)}\right)\in\ell(\widetilde{B},p)$ olsun öyle ki $\|x\|\to 1$ ve $x^{(n)}\overset{\omega}{\longrightarrow} x$ verilsin. Teorem 6.1.4 un (i) kısmından $\sigma_p\left(x^{(n)}\right)\longrightarrow 1$ $(n\to\infty)$ olduğunu biliyoruz. Aynı zamanda $x\in S\left[\ell(\widetilde{B},p)\right]$ olması $\|x\|=1$ olmasını gerektirir. Önerme 6.1.2 nın (iii) kısmından $\sigma_p(x)=1$ olduğu kolayca görülür. Böylece $n\to\infty$ için (6.1.18) dan

$$\sigma_p\left(x^{(n)}\right)\longrightarrow\sigma_p(x)$$

elde edilir.

$x^{(n)}\overset{\omega}{\longrightarrow} x$ ve $q_k(x)=x_k$ olarak tanımlanan $q_k:\ell(\widetilde{B},p)\longrightarrow\mathbb{R}$ sürekli olduğundan dolayı her $k\in\mathbb{N}$ için

$$x_k^{(n)}\to x_k, \qquad (n\to\infty)$$

olur. Böylece

$$x^{(n)}\to x, \qquad (n\to\infty)$$

elde edilir.

$\ell(\widetilde{B},p)$ de herhangi bir zayıf yakınsak dizi yakınsak olduğundan dolayı $\ell(\widetilde{B},p)$ dizi uzayı Kadec-Klee özelliğine sahiptir. □

Teorem 6.1.7. *Herhangi bir* $1 < p < \infty$ *için* $(\ell_p)_{\widetilde{B}}$ *düzgün Opial özelliğine sahiptir.*

İspat. $\varepsilon > 0$, $\varepsilon_0 \in (0,\varepsilon)$ ve $1 + \frac{\varepsilon^p}{2} > (1+\varepsilon_0)^p$ olacak şekilde verilsin. Aynı zamanda $\|x\|_{\widetilde{B}} \geq \varepsilon$ ve $x \in (\ell_p)_{\widetilde{B}}$ olsun. $x \in (\ell_p)_{\widetilde{B}}$ ise $\left(\widetilde{B}x\right) \in \ell_p$ dir, buna göre $\sum_k \left|\left(\widetilde{B}x\right)_k\right|^p < \infty$ dur. Yakınsak bir seride kalan terimin limiti sıfır olduğundan

$$\sum_{k=k_1+1}^{\infty} \left|\left(\widetilde{B}x\right)_k\right|^p < \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^p \tag{6.1.25}$$

olacak şekilde bir $k_1 \in \mathbb{N}$ mevcuttur. Dolayısıyla

$$\begin{aligned} \left\|\sum_{k=k_1+1}^{\infty} x_k e_k\right\|_{\widetilde{B}} &= \|(0,0,...,x_{k_1+1},x_{k_1+2},...)\|_{\widetilde{B}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left|\left(\widetilde{B}x\right)_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \left(\sum_{k=k_1+1}^{\infty} \left|\left(\widetilde{B}x\right)_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &< \left(\left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}} \\ &= \frac{\varepsilon_0}{4} \end{aligned} \tag{6.1.26}$$

dür. Bunların da ötesinde $\|x\|_{\widetilde{B}} \geq \varepsilon$ olduğundan

$$\begin{aligned} \varepsilon &\leq \|x\|_{\widetilde{B}} \\ &= \left\|\widetilde{B}x\right\|_{\ell_p} \\ &= \left(\sum_k \left|\left(\widetilde{B}x\right)_k\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} \varepsilon^p &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \left|\left(\widetilde{B}x\right)_k\right|^p \\ &= \sum_{k=1}^{k_1} \left|\left(\widetilde{B}x\right)_k\right|^p + \sum_{k=k_1+1}^{\infty} \left|\left(\widetilde{B}x\right)_k\right|^p \\ &< \sum_{k=1}^{k_1} \left|\left(\widetilde{B}x\right)_k\right|^p + \left(\frac{\varepsilon_0}{4}\right)^p \\ &< \sum_{k=1}^{k_1} \left|\left(\widetilde{B}x\right)_k\right|^p + \frac{\varepsilon_0^p}{4} \end{aligned} \tag{6.1.27}$$

yazabiliriz çünkü $\varepsilon_0 \in (0, \varepsilon)$ kabulünden $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ olup $1 < p < \infty$ olduğundan $\frac{\varepsilon_0^p}{4} < \frac{\varepsilon^p}{4}$ dür. Yukarıdaki son eşitsizlikten

$$\varepsilon^p - \frac{\varepsilon^p}{4} < \sum_{k=1}^{k_1} \left| \left(\widetilde{B}x \right)_k \right|^p$$

ve böylece

$$\frac{3\varepsilon^p}{4} < \sum_{k=1}^{k_1} \left| \left(\widetilde{B}x \right)_k \right|^p \tag{6.1.28}$$

elde edilir.

$\left(x^{(m)}\right) \subset \mathbf{S}\left[(\ell_p)_{\widetilde{B}}\right]$ zayıf sıfır dizisi için tanım gereğince her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$x_k^{(m)} \longrightarrow 0, \qquad (m \to \infty)$$

olduğundan dolayı bir $m_0 \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyle ki her $m > m_0$ için

$$\left\| \sum_{k=1}^{k_1} x_k^{(m)} e_k \right\|_{\widetilde{B}} < \frac{\varepsilon^p}{4} \tag{6.1.29}$$

kalır. Böylece her $m > m_0$ için

$$\begin{aligned}
\left\| x^{(m)} + x \right\|_{\widetilde{B}} &= \left\| \left(x_1^{(m)} + x_1 \right) + \left(x_2^{(m)} + x_2 \right) + ... + \left(x_k^{(m)} + x_k \right) + ... \right\|_{\widetilde{B}} \\
&= \left\| \begin{array}{c} \left(x_1^{(m)} + x_1 \right)(1, 0, ..., 0, ...) + \left(x_2^{(m)} + x_2 \right)(0, 1, ..., 0, ...) + \\ ... + \left(x_k^{(m)} + x_k \right)(0, 0, ..., 1, ...) + ... \end{array} \right\|_{\widetilde{B}} \\
&= \left\| \left(x_1^{(m)} + x_1 \right) e_1 + \left(x_2^{(m)} + x_2 \right) e_2 + ... + \left(x_k^{(m)} + x_k \right) e_k + ... \right\|_{\widetilde{B}} \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k^{(m)} + x_k \right) e_k \right\|_{\widetilde{B}} \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{k_1} \left(x_k^{(m)} + x_k \right) e_k + \sum_{k=k_1+1}^{\infty} \left(x_k^{(m)} + x_k \right) e_k \right\|_{\widetilde{B}} \\
&= \left\| \sum_{k=1}^{k_1} x_k^{(m)} e_k + \sum_{k=1}^{k_1} x_k e_k + \sum_{k=k_1+1}^{\infty} x_k^{(m)} e_k + \sum_{k=k_1+1}^{\infty} x_k e_k \right\|_{\widetilde{B}} \\
&\geq \left\| \sum_{k=1}^{k_1} x_k^{(m)} e_k + \sum_{k=k_1+1}^{\infty} x_k^{(m)} e_k \right\|_{\widetilde{B}} - \left\| \sum_{k=1}^{k_1} x_k e_k \right\|_{\widetilde{B}} - \left\| \sum_{k=k_1+1}^{\infty} x_k e_k \right\|_{\widetilde{B}} \\
&\geq \left\| \sum_{k=1}^{k_1} x_k^{(m)} e_k + \sum_{k=k_1+1}^{\infty} x_k^{(m)} e_k \right\|_{\widetilde{B}} - \frac{\varepsilon^p}{4} - \frac{\varepsilon^p}{4}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir. Üstelik

$$\left\|\sum_{k=1}^{k_1} x_k^{(m)} e_k + \sum_{k=k_1+1}^{\infty} x_k^{(m)} e_k\right\|_{\widetilde{B}}^p = \left\|\left(x_1, x_2, ..., x_{k_1}, x_{k_1+1}^{(m)}, x_{k_1+2}^{(m)}, ...\right)\right\|_{\widetilde{B}}^p \tag{6.1.30}$$

$$\begin{aligned}
&= \|z_1, z_2, ..., z_k, z_{k+1}, z_{k+2}, ...\|_{\widetilde{B}}^p \\
&= \sum_k \left|\left(\widetilde{B}z\right)_k\right|^p \\
&= \sum_{k=1}^{k_1} \left|\left(\widetilde{B}x\right)_k\right|^p + \sum_{k=k_1+1}^{\infty} \left|\left(\widetilde{B}x^{(m)}\right)_k\right|^p \\
&\geq \frac{3\varepsilon^p}{4} + 1 - \frac{\varepsilon^p}{4} \\
&= 1 + \frac{\varepsilon^p}{2} \\
&> (1+\varepsilon_0)^p
\end{aligned}$$

ve buradan

$$\left\|\sum_{k=1}^{k_1} x_k^{(m)} e_k + \sum_{k=k_1+1}^{\infty} x_k^{(m)} e_k\right\|_{\widetilde{B}} > 1 + \varepsilon_0$$

eşitsizliğine ulaşılır. Son olarak yukarıda elde edilenlerin ışığında

$$\begin{aligned}
\left\|x^{(m)} + x\right\| &\geq \left\|\sum_{k=1}^{k_1} x_k^{(m)} e_k + \sum_{k=k_1+1}^{\infty} x_k^{(m)} e_k\right\| - \frac{\varepsilon^p}{2} \\
&\geq 1 + \varepsilon_0 - \frac{\varepsilon^p}{2} \\
&> 1 + \frac{\varepsilon_0^p}{2}
\end{aligned}$$

eşitsizliği yazılabilir ki bu bize $(\ell_p)_{\widetilde{B}}$ uzayının düzgün Opial özelliğine sahip olduğunu gösterir. □

KAYNAKLAR

[1] M. Candan, *Domain of the double sequential band matrix in the classical sequence spaces*, **J Inequal Appl.** (2012) 15pp.

[2] M. Candan, *Domain of the double sequential band matrix in the spaces of convergent and null sequences,* **Adv Difference Equ**. 163 (2014) 18pp.

[3] M. Candan, *Almost convergence and double sequential band matrix*, **Acta Math Sci.,** (2014) 354-366.

[4] M. Candan and A. Güneş, *Paranormed sequence space of non-absolute type founded using generalized difference matrix*, **Proc. Natl. Acad. Sci., India, Sect. A Phys. Sci.,** (2015) 269-276.

[5] M. Candan and İ. Solak, *On some difference sequences spaces generated by infinite matrices*, **Int J. of Pure and App Math.** 25:1 (2005) 79-85.

[6] M. Candan, *Some new sequence spaces defined by a modulus function and an infinite matrix in a seminormed space*, **Journal of Math. Anal**. 3 (2012) 1-9.

[7] M. Candan, *Some new sequence spaces derived from the spaces of bounded, convergent and null sequences*, **Int J. of Modern Math Sci.,** 12:2 (2014) 74-87.

[8] M. Candan, *Vector-valued Fk-Spaces defined by a modulus function and an infinite matrix*, **Thai J. of Math.** 12 (2014) 155-165.

[9] M. Candan, *A new sequences space isomorphic to the space l(p) and compact operators*, **J. Math. Comput. Sci.** 4:2 (2014) 3006-334.

[10] M. Candan and E. E Kara, *A study on topological and geometrical characteristics of new Banach sequence spaces*, **Gulf J. of Math.** 3:4 (2015) 67-84.

[11] M. Candan, *Vector valued orlicz sequence space generalized with an infinite matrix and some of its specific characteristics*, **Gen. Math. Notes,** 29:2 (2015) 1-16.

[12] M. Candan and K. Kayaduman, *Almost convergent sequence spaces derived by generalized Fibonnacci core*, **British J. Math. Computer Sci.** 7:2 (2015) 150-167.

[13] M. Candan, *A new approach on the spaces of generalized Fibonacci difference null and convergent sequences*, **Math, Aeterna** 5:1 (2015) 191-210.

[14] M. Candan, *A new perspective on paranored Riesz sequence space of non-absolute type*, **Global Journal of Math. Anal.**, 3:4 (2015) 150-163.

[15] G. Kılınç and M. Candan, *Some generalized Fibonacci difference spaces defined by a sequence of modulus functions*, **Facta Uni.** 32:1 (2017) 95-116.

[16] M. Candan and G. Kılınç, *A novel layout for almost convergent sequence spaces*, **Scholar J. of Research in Math and Comp. Sci** 2:1 (2017).

[17] M. Candan and İ. Solak, *On new difference sequence spaces generalized by infinite matrices*, **İnt. J of Sci and Tech.** 1:1 (2005) 15-17.

[18] Y. Yılmaz, M. K. Özdemir, İ. Solak and M. Candan, *Operators on some vector- valued orlicz sequence spaces,* **Fırat Ü. Fen ve Müh. Dergisi** 17:1 (2005) 59-71.

[19] M. Candan and G. Kılınç, *A different look for paranormed Riesz sequence space derived by Fibonacci matrix*, **Konuralp J. of Math.** 3:2 (2015) 62-76.

[20] G. Kılınç and M. Candan, *A different approach for almost sequence spaces defined by a generalized weighted means*, **Saü. J. S.,** 21:6 (2017) 1529-1536,.

[21] M. Candan, *A new outlook for almost convergent sequence spaces*, **Cumhuriyet Sci J.,** 39:1 (2018) 34-46.

[22] M. Candan and İ. Solak, *A novel generalized difference spaces constructed by the modulus function*, **Konuralp J. of Math.,** 6:1 (2018) 17-25.

[23] H. Nergiz and F. Başar, *Domain of the double sequential band matrix $B(\widetilde{r},\widetilde{s})$ in the sequence space $\ell(p)^*$*, **Abstr. Appl. Anal.**, Vol. (2013) 7pp.

[24] H. Nergiz and F. Başar, *Some topologial and geometric properties of the domain of the double sequential band matrix $B(\widetilde{r},\widetilde{s})$ in the sequence spaces $\ell(p)$*, **AIP Conf Proc.,** vol. 1470 (2012) 163-168.

[25] E. Şuhubi, *Fonksiyonel Analiz*, İTÜ Vakfı, İstanbul, 2001.

[26] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis With Applications*, John Wiley and Sons, Canada, 1978.

[27] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analiysis*, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2nd dedition, 1988.

[28] H. Kizmaz, *Fonsiyonel Analize Giriş*, K.T.Ü. Basımevi, Trabzon, 1993.

[29] Y. Soykan, *Fonsiyonel Analiz,* Nobel Yay., Ankara, 2012.

[30] A. Wilansky, *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, McGraw Hill Inc., New York, 1978.

[31] S. Lipschutz, *Schaum's Outline Theory and Problems of General Topology*, McGraw-Hill Inc., Singapore, 1965.

[32] I. J. Maddox, *Spaces of strongly summable sequences,* **Q J Math.**, vol. 18 (1967) 345-355.

[33] S. Simons, *The sequence spaces* $\ell(p_v)$ *and* $m(p_v)$, **P Lond Math Soc**, vol. 15 (1965) 422-436.

[34] H. Nakano, *Modulared sequences spaces*, **Proc Jpn Acad**, vol. 27 (1951) 508-512.

[35] P.K. Kamthan and M.Gupta, *Sequence Spaces and Series*, Marcel Dekler, Inc., New York and Basel, 1981.

[36] F. Başar, *Summability Theory and Its Applications*, Bentham Science Publishers, e-books, Monographs, İstanbul, 2011.

[37] J. Boos and P. Cass, *Classical and Modern Methods in Summability*, Oxford University Press, Inc. New York, 2000.

[38] G. M. Petersen, *Regular Matrix Transformations*, 1966.

[39] B. Musayev ve M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yay., Kütahya, 2000.

[40] B. Choudhary and S. Nanda, *Functional Analysis With Applications*, John Wiley & Sons Inc., New York, 1989.

[41] P. D. Srivastara and S. Kumar, *Fine spectrum of the generalized difference operator* $\triangle_v$ *on sequence space* ℓ_1, **Thai Journal of Math.,** vol. 8:2 (2010) 221-233.

[42] P. D. Srivastara and S. Kumar, *Fine spectrum of the generalized difference operator* $\triangle_{uv}$ *on sequence space* ℓ_1, **Appl Math Comput.**, vol. 218:11 (2012) 6407-6414.

[43] B. L. Panigrahi and P. D. Srivastava, *Spectrum and fine of the generalized second order difference operator*$\triangle^2_{uv}$ *on sequence space* c_0, **Thai Journal of Math.**, vol. 9:1 (2011) 57-74.

[44] A. M. Akhmedov and S. R. El-Shabrawy, *On the ne spectrum of the operator* $\triangle_{a,b}$ *over the sequence space* c, **Comput Math Appl.**, vol. 61:10 (2011) 2994-3002.

[45] M. Kirişçi and F. Başar, *Some new sequence space derived by the domain of generalized difference matrix*, **Comput Math Appl**, vol. 60:5 (2010) 1299-1309.

[46] B. Choudhary and S. K. Mishra, *On Köthe-Teoplitz duals of certain sequnce space and their matrix transformation*, **Indian J Pure Ap Mat,** vol. 24:5 (1993) 291-301.

[47] F. Başar, *Infinite matrices and almost boundedness*, **Boll. Unione Mat. Ital.,** vol. 6:3 (1992) 395-402.

[48] A. Wilansky, *Summability Through Functional Analysis*, vol. 85 of North-Holland Mathematics Studies, North-Holland Publishing Amsterdam, The Neterlands, 1984.

[49] A.M. Jarrah, E. Malkowsky, *Ordinary, absolute and strong summability and matrix transformations*, **Filomat** 17 (2003) 59-78.

[50] C. G. Lascarides and I. J. Maddox, *Matrix transformations between some classes of sequences,* **Proc. Camb. Philos. Soc**, vol. 68 (1970) pp. 99-104.

[51] K. G. Grosse-Erdmann, *Matrix transformations between the sequence spaces of maddox,* **J. Math Anal Appl.**, vol. 180:1 (1993) pp. 223-238.

[52] F. Başar and B. Altay, *On the space o squences of pounded variation and related matrix mappings*, **Ukr Math J.**, vol. 55:1 (2003) 136-147.

[53] F. Başar and M. Kirişçi, *Almost convergence and generalized difference matrix*, **Comput Math Appl.,** vol. 61:3 (2011) 602-611.

[54] K. Kayaduman and M. Şengönül, *The spaces of Cesàro almost convergent sequences and core theorems*, **Acta Math Sci.,** vol. 32:6 (2012) 2265-2278.

[55] B. Altay and F. Başar, *Some paranormed Riezs sequence space of non-absolute type*, **Southeast Asian Bull. Math.,** vol. 30:4 (2006) 591-608.

[56] P. N. Ng and P. Y. Lee, *Cesàro sequence soacesof non-absolute type*, **Mathematicae. Prace Matematyczne. Polsk. Carolin**, vol. 20:2 (1978) 429-433.

[57] M. Şengönül and F. Başar, *Some new Cesàro sequence soacesof non-absolute type which include the spaces c_0 and c*, **Soochow J. Math.,** vol. 31:1 (2005) 107-119.

[58] H. Kızmaz, *On certain sequnce spaces*, **Can Math Bull.**, vol. 24:2 (1981), 169-176.

ÖZGEÇMİŞ

10.11.1991 tarihinde Malatya'da doğdu. 2002 yılında Orduzu Eti İlkokulunu, 2005 yılında Barbaros İlköğretim Okulunu, 2009 yılında ise Orduzu Bahçebaşı Lisesini bitirdi. 2010 yılında başladığı Atatürk Üniversitesi Kazım Karabekir Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği bölümünü 2014 yılında bitirdi. 2016 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında yüksek lisansa başladı. 2014 yılının Eylül ayında Pütürge Yibo'da Matematik Öğretmeni olarak göreve başladı ve halen göreve devam etmektedir. Evli ve bir çoçuk babasıdır.