T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

# ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD VE LORENTZ UZAYLARINDA WEİNGARTEN TİPİ REGLE YÜZEYLER

Mehmet Serkan GENÇCAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

Haziran 2019

Tezin Başlığı : ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD VE LORENTZ UZAYLARINDA WEİNGARTEN TİPİ REGLE YÜZEYLER

Tezi Hazırlayan : Mehmet Serkan GENÇCAN

Sınav Tarihi : 18.06.2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

**Sınav Jüri Üyeleri**

**Tez Danışmanı:** **Prof.Dr. Erol KILIÇ** ____________

İnönü Üniversitesi

**Prof.Dr.Rifat GÜNEŞ** ____________

İnönü Üniversitesi

**Doç.Dr.Mehmet GÜLBAHAR** ____________

Harran Üniversitesi

**Prof.Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL**

Enstitü Müdürü

## ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Üç Boyutlu Öklid ve Lorentz Uzaylarında Weingarten Tipi Regle Yüzeyler" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Mehmet Serkan GENÇCAN

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ÜÇ BOYUTLU ÖKLİD VE LORENTZ UZAYLARINDA WEİNGARTEN TİPİ REGLE YÜZEYLER

Mehmet Serkan GENÇCAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

100+v sayfa

2019

Danışman : Prof.Dr. Erol KILIÇ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.
Birinci bölüm giriş olarak düzenlenmiş ve Weingarten regle yüzeylerin gelişimi hakkında bilgi verilmiştir.

İkinci bölümde, 3-boyutlu Öklid ve Lorentzian uzayda eğriler ve yüzeyler ile ilgili bazı temel kavramlara ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde, 3-boyutlu Öklid uzayında regle Weingarten yüzeyler incelenmiştir. Bir regle yüzeyin Weingarten yüzeyi olması için gerek ve yeter şartları içeren teoremler ve şonuçlar verilmiştir.

Dördüncü bölümde ise 3-boyutlu Lorentz uzayında regle Weingarten yüzeyler gözönüne alınmıştır. $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha$ taban eğrisi ve doğrultman vektörü $X$ in causal karakterlerine göre geometrik sonuçlar verilmiştir.

**ANAHTAR KELİMELER:** Regle Yüzeyler, Weingarten Yüzeyler, Regle Weingarten Yüzeyler, Lorentz Weingarten Yüzeyler

# ABSTRACT

M.Sc. Thesis

RULED SURFACES OF WEINGARTEN TYPE IN EUCLIDEAN 3-SPACE AND LORENTZIAN 3-SPACE

Mehmet Serkan GENÇCAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

100+v pages

2019

Supervisor : Prof.Dr. Erol KILIÇ

This study prepared as master thesis consists of four chapters.

The first chapter is organized as an introduction and some fundamental information about the development of Weingarten ruled surfaces has been presented.

The second chapter is divided to some fundamental concepts related to curves and surfaces in 3-dimensional Euclidean and Lorentzian space.

In the third chapter, Weingarten ruled surfaces in the 3-dimensional Euclidean space have been investigated. The theorems and results including the necessary and sufficent conditions for a ruled surface to be Weingarten surface are given.

In the fourth chapter, the ruled Weingarten surfaces in 3-dimensional Lorentzian space are considered. The geometric conclusions with respect to the causal characteristics of the directed vector $X$ and base curve $\alpha$ in $\mathbb{E}_1^3$ are presented.

**KEYWORDS:** Regle Surfaces, Weingarten Surfaces, Regle Weingarten Surfaces, Lorentzian Weingarten Surfaces

# TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamı yöneten ve tezin hazırlanması sürecinde bana yardımcı olan, her zaman yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen, tez yazımı sırasında karşılaştığım her türlü güçlüğün üstesinden gelme konusunda bana yol gösteren, bilgi ve görüşlerinden istifade ettiğim çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Erol KILIÇ'a, ayrıca yüksek lisans sürecinde üzerimde büyük emekleri olduğunu düşündüğüm bölüm hocalarıma, matematik bölüm başkanı Prof. Dr.Sadık KELEŞ'e ve bilhassa maddi manevi desteklerinden dolayı AİLEM'e teşekkürü bir borç bilirim.

# İÇİNDEKİLER

# SİMGELER VE KISALTMALAR

| Kısaltmalar | Açıklamalar |
|---|---|
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar cümlesi |
| $\mathbb{R}^3$ | 3-boyutlu Reel uzay |
| $\mathbb{E}^3$ | 3-boyutlu Öklid uzay |
| $\mathbb{E}_1^3$ | 3-boyutlu Minkowski uzay |
| $E, F, G$ | Birinci temel formun katsayıları |
| $e, f, g$ | İkinci temel formun katsayıları |
| $K$ | Yüzeyin Gauss eğriliği |
| $H$ | Yüzeyin Ortalama eğriliği |
| $K_{II}$ | Yüzeyin İkinci Gauss eğriliği |
| $H_{II}$ | Yüzeyin İkinci Ortalama eğriliği |
| $W$ | Weingarten yüzey |

# 1. GİRİŞ

Regle yüzeyler diferensiyel geometrinin önemli çalışma alanlarından birisidir. Özellikle hareketler geometrisinde, mühendisliğin bazı alanlarında ve fiziksel problemlerin çözümünde kullanılan bir yapıdır. $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık, $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^3$ bir diferensiyellenebilir eğri ve $X$ de $\alpha$ boyunca $\mathbb{R}^3$ de bir vektör alanı olmak üzere

$$f(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$$

ifadesi $\mathbb{R}^3$ de bir regle yüzeyi tanımlar. Öklid uzayında regle yüzeylerin geometrisi, hareketler geometrisi açısından hemen hemen bütün özellikleri incelenmiş olup bu konuda bir çok çalışma yapılmıştır[3], [12], [23].

Regle yüzeyler ilk bakışta iki kısma ayrılır: Açılabilir regle yüzeyler ve açılabilir olmayan regle yüzeyler. Açılabilir regle yüzeyler silindirik regle yüzeyler olarak da adlandırılır. Bir regle yüzeyin sınıflandırılması Gauss eğriliği $K$ ve ortalama eğriliği $H$ yardımı ile yapılır. Buna göre açılabilir regle yüzeyler Gauss eğriliği $K$ nın sıfır olması ile karakterize edilir.

Öklid uzayında herhangi bir yüzeyin Gauss ve ortalama eğriliklerinin gradient vektörleri lineer bağımlı ise yüzeye Weingarten yüzey denir. $K$ ve $H$ nın bir polinomu $\phi$ olmak üzere $\phi(K,H) = 0$ denklemi ile tanımlanır. Bu tanıma $M$ yüzeyinin ikinci Gauss eğriliği $K_{II}$ nin katılmasıyla $W-$yüzeyinin farklı sınıfları elde edilir. Yani, $K$, $H$ ve $K_{II}$ nin gradient vektörlerinin üçünün birlikte lineer olması veya ikişer ikişer lineer bağımlı olmasıyla yeni sınıflamalar elde edilmiştir. $\phi(K,H) = 0$ denklemini sağlayan regle yüzeyler ise regle yüzeylerin önemli bir sınıfını oluşturur. Örneğin $K$ veya $H$ sı sabit olan regle yüzeyler bunların aşikar örnekleridir ve $a, b, c$ reel sabitler olmak üzere $aK + bH = c$ şartını sağlayan yüzeyler bir çok yüzey sınıfını içinde bulundurur.

Üç boyutlu Lorentz uzayı $\mathbb{E}^3_1$ de eğriler ve yüzeylerin geometrisi, Öklid uzayında olduğundan oldukça farklılıklar gösterir ve Öklid uzayına göre daha karmaşık bir yapıya sahiptir ve farklı disiplinlerde bazı problemlerin çözümünde önemli rol oynar (fizikte ve mühendislik bilimlerinde). Lorentz uzayı $\mathbb{R}_1^3$ de eğriler ve yüzeyler, kazıl (causal) karakterlerine göre şu şekilde isimlendirilir: $M$ nin normali $N$ timelike ise yüzeye spacelike, $N$ spacelike ise yüzeye timelike ve $N$ lightlike ise yüzeye lightlike yüzey denir. Dolayısıyla regle yüzeylerin incelenmesinde, regle yüzeyin taban eğrisinin ve doğrultman vektörünün kazıl karakterleri önemli rol oynar ve Lorentz geometride geniş bir yer tutar. Böylece Lorentz uzayda, regle $W$-yüzeyleri bir çok geometricinin ilgisini çekmiş hala günümüzde çalışılan konulardan birisidir[2], [20], [24].

$\mathbb{E}_1^3$ deki bir regle yüzeyin taban eğrisi ve doğrultman vektörünün causal karakterlerine göre regle yüzeylerin sınıflandırılması bir çok geometrici tarafından çalışılmıştır[16], [21], [22].

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma $3-$boyutlu Öklid uzayı ve $3-$boyutlu Lorentz uzayda regle Weingarten yüzeyleri ile ilgili bir derlemeden ibarettir.

Birinci bölüm daha sonraki bölümlerin anlaşılabilmesi için Öklid ve Lorentz uzayda eğriler ve yüzeylerle ilgili temel kavramlara ayrılmıştır. İkinci bölümde $3-$boyutlu Öklidyen regle Weingarten yüzeyleri incelenmiş ve bir regle yüzeyin Weingarten olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Bu bölümde ayrıca $K_{II}$ ikinci Gauss eğriliğine göre Weingarten olma durumları incelenmiştir. Üçüncü bölümde ise Lorentzian uzayda Weingarten yüzeylerine ayrılmıştır. Lorentzian uzayda regle Weingarten yüzeyler taban eğrisi ve doğrultman vektörünün causal karakterlerine göre irdelenmiş ve bu tür regle yüzeylerin Weingarten tipi regle yüzeyler olması için gerek ve yeter şartlar verilmiştir. Ayrıca bu bölümde $H_{II}$ ikinci ortalama eğriliği de katılarak bazı sınıflandırmalar verilmiştir.

# 2. TEMEL KAVRAMLAR

## 2.1 Öklid Uzayında Eğriler ve Yüzeyler

**Tanım 2.1.1.** *$A \neq 0$ bir cümle $V$ de $K$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Aşağıdaki şartları sağlayan*

$$f : A \times A \longrightarrow V$$

*fonksiyonu varsa $A$ ya $V$ ile birleştirilmiş bir* ***afin uzay*** *denir.*

*(i)* $\forall P, Q, R \in A$ *için* $f(P,Q) + f(Q,R) = f(P,R)$,

*(ii)* $\forall P \in A$ *ve* $\forall \alpha \in V$ *için* $f(P,Q) = \alpha$ *olacak biçimde bir tek* $Q \in A$ *noktası vardır[1].*

**Tanım 2.1.2.** $3-$*boyutlu standart reel vektör uzayı* $\mathbb{R}^3$ *ile birleştirilmiş* $\mathbb{R}^3$ *afin uzayını ele alalım.* $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3)$, $\vec{y} = (y_1, y_2, y_3)$ *olmak üzere* $\mathbb{R}^3$ *vektör uzayında* $x$ *ve* $y$ *nin Öklid iç çarpımı (skaler çarpımı)*

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(\vec{x}, \vec{y}) \longrightarrow \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$$

*biçiminde tanımlanır. Böylece* $\langle , \rangle$ *iç çarpımı ile* $\mathbb{R}^3$ *afin uzayına* ***3-boyutlu öklid uzayı*** *denir ve* $\mathbb{E}^3$ *ile gösterilir[1].*

**Tanım 2.1.3.** $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ *olmak üzere*

$$d : \mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$(x,y) \longrightarrow d(x,y) = \|\overrightarrow{xy}\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (y_i - x_i)^2}$$

*olarak tanımlanan $d$ fonksiyonuna $\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında* ***uzaklık fonksiyonu*** *ve $d(x,y)$ reel sayısına da $x,y \in \mathbb{E}^3$ noktaları arasındaki* ***uzaklık*** *ve $d$ ye de $\mathbb{E}^3$ üzerinde* ***Öklid metriği*** *denir[1].*

**Tanım 2.1.4.** *$\forall x,y,z \in \mathbb{E}^3$ için $\widehat{xyz}$ açısının ölçüsü*

$$\cos\theta = \frac{\langle \overrightarrow{yx}, \overrightarrow{yz} \rangle}{\|\overrightarrow{yx}\| \, \|\overrightarrow{yz}\|}$$

*ile tanımlanır[1].*

**Tanım 2.1.5.** *$\mathbb{E}^3$ de sıralı bir $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ nokta dörtlüsüne $\mathbb{R}^3$ de karşılık gelen $\left\{\overrightarrow{P_0P_1}, \overrightarrow{P_0P_2}, \overrightarrow{P_0P_3}\right\}$ vektör üçlüsü, $\mathbb{R}^3$ için bir ortonormal baz ise $\{P_0, P_1, P_2, P_3\}$ sistemine $\mathbb{E}^3$* ***ün bir dik çatısı*** *veya* ***Öklid çatısı*** *denir [1].*

**Tanım 2.1.6.** *$E^3$ de $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ vektörleri verilsin. Buna göre $\vec{a}$ ile $\vec{b}$ nin vektörel çarpımı (dış çarpımı)*

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

*veya*

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left( (a_2b_3 - a_3b_2), -(a_1b_3 - a_3b_1), (a_1b_2 - a_2b_1) \right)$$

*ile tanımlanır. Vektörel çarpım aşağıdaki özellikleri sağlar: $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{E}^3$ için*

1. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$.

2. $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) + (\vec{a} \wedge \vec{c})$.

3. $\left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \right\rangle = \left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \right\rangle = 0$.

4. $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = \det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \right\rangle = \left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \right\rangle$.

5. $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = \langle \vec{a}, \vec{c} \rangle \vec{b} - \left\langle \vec{b}, \vec{c} \right\rangle \vec{a}$.

6. $\left\langle \vec{a}\wedge\vec{b},\vec{x}\wedge\vec{y}\right\rangle = \begin{vmatrix} \langle\vec{a},\vec{x}\rangle & \left\langle\vec{b},\vec{x}\right\rangle \\ \langle\vec{a},\vec{y}\rangle & \left\langle\vec{b},\vec{y}\right\rangle \end{vmatrix} = \langle\vec{a},\vec{x}\rangle\left\langle\vec{b},\vec{y}\right\rangle - \langle\vec{a},\vec{y}\rangle\left\langle\vec{b},\vec{x}\right\rangle$
(*lagrange özdeşliği*).

7. $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)(\vec{x}\vec{y}\vec{z}) = \begin{vmatrix} \langle\vec{a},\vec{x}\rangle & \left\langle\vec{b},\vec{x}\right\rangle & \langle\vec{c},\vec{x}\rangle \\ \langle\vec{a},\vec{y}\rangle & \left\langle\vec{b},\vec{y}\right\rangle & \langle\vec{c},\vec{y}\rangle \\ \langle\vec{a},\vec{z}\rangle & \left\langle\vec{b},\vec{z}\right\rangle & \langle\vec{c},\vec{z}\rangle \end{vmatrix}.$

8. $\vec{a}\wedge\vec{b}=0$ *olması için gerek ve yeter şart* $\vec{a}$ *ve* $\vec{b}$ *vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır[2].*

**Tanım 2.1.7.** $I\subset\mathbb{R}$ *bir aralık olmak üzere*

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$u \longrightarrow \alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u))$$

*şeklinde tanımlanan sürekli fonksiyona* $\mathbb{R}^3$ *uzayında bir* ***eğri*** *denir[3].*

**Tanım 2.1.8.** $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$, $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u))$ *bir eğri olmak üzere* $\alpha_i : I \longrightarrow \mathbb{R}$, *türevlenebilir fonksiyonlar olsun.*

$$\alpha'(u) = \frac{d\alpha}{du}\,|_{\alpha(t_0)}$$

*vektörüne* $t_0 \in I$ *noktasında* $\alpha$ *nın* ***teğet vektörü*** *denir[3].*

**Tanım 2.1.9.** *Her* $u\in I$ *için* $\alpha'(u)\neq 0$ *koşulunu sağlayan, türevlenebilir, parametrik bir* $\alpha : I \longrightarrow R^3$ *eğrisine* ***regüler eğri*** *denir[3].*

**Tanım 2.1.10.** *Bir* $u\in I$ *için,* $\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *regüler parametrik eğrisinin* $u_0$ *noktasından* $u$ *noktasına kadar olan* ***yay uzunluğu***

$$s(u) = \int_{u_0}^{u} \|\alpha'(u)\|\,du$$

*olmak üzere,* $\alpha'(u)$ *vektörünün boyu*

$$\|\alpha'(u)\| = \sqrt{(\alpha_1'(u))^2 + (\alpha_2'(u))^2 + (\alpha_3'(u))^2}$$

*olarak tanımlanır.* $\alpha'(u) \neq 0$ *olduğu için* $s$ *yay uzunluğu* $u$ *değişkeninin türevlenebilir bir fonksiyonudur[3].*

**Tanım 2.1.11.** $\alpha$, $I \subset \mathbb{R}$ *aralığında tanımlı* $\mathbb{R}^3$ *de bir eğri olsun.* $\forall u \in I$ *için*

$$\|\alpha'(u)\| = 1$$

*ise* $\alpha$ *eğrisine* ***birim hızlı***, $u$ *parametresine de* ***yay parametresi*** *denir[1].*

**Tanım 2.1.12.** $E^3$ *de bir* $M$ *eğrisinin* $(I, \alpha)$ *ve* $(J, \beta)$ *gibi iki koordinat komşuluğu verilsin.*

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^3, \qquad \beta : J \longrightarrow \mathbb{E}^3,$$

*olmak üzere*

$$h : \alpha^{-1} \circ \beta : J \longrightarrow I$$

*diferansiyellenebilir fonksiyonuna* $M$ *nin bir* ***parametre değişimi*** *denir[1].*

**Tanım 2.1.13.**

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

*eğrisi verildiğinde* $\forall u \in I$ *için*

$$\alpha(u + T) = \alpha(u)$$

*olacak şekilde bir* $T \in \mathbb{R}$ *pozitif sayısı varsa* $\alpha$ *eğrisine* ***periyodiktir*** *denir. Ve en küçük* $T$ *sayısına da eğrinin* ***periyodu*** *denir.*

**Tanım 2.1.14.** $M$ *kümesi* $\mathbb{R}^3$ *içinde bir alt küme olsun. Her* $p \in M$ *noktası için* $\mathbb{R}^3$ *içinde aşağıdaki koşulları sağlayan bir* $V$ *komşuluğu ve bir* $U \subset \mathbb{R}^2$ *açık kümesinden* $V \cap M \subset \mathbb{R}^3$ *üzerine örten bir* $f : U \longrightarrow V \cap M$ *dönüşümü varsa,* $M$ *alt kümesine bir* ***regüler yüzey*** *denir. Regüler yüzeylerin üç özelliği vardır:*

1. $f$ *dönüşümü diferensiyellenebilirdir, yani* $f$ *fonksiyonunun* $U$ *üzerinde her mertebeden kısmi türevleri vardır.*

2. *$f$ bir homomorfizmadır($f$ in tersi de süreklidir),*

3. *Her $q \in U$ için $df_q : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ diferansiyeli bire-birdir(regülerlik şartı)[3].*

**Tanım 2.1.15.** *Regüler bir $M$ yüzeyi üzerinde bir $p$ noktasında, $\mathbb{E}^3$ uzayının $T_p(M)$ teğet düzlemine dik bir birim vektör vardır; bunların her birine $p$ noktasındaki* ***birim normal vektör*** *denir. $p$ noktasından geçen ve $p$ noktasındaki bir birim normal vektörü içeren doğruya $p$ noktasındaki* ***normal doğru*** *denir. $p \in M$ noktasında bir $f : N \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow M$ parametrelemesini sabitleyerek her $q \in f(N)$ noktasında,*

$$N(q) = \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|}(q)$$

*kuralıyla belirli bir birim normal vektör seçebiliriz. Böylece diferensiyellenebilir bir $N : f(N) \longrightarrow \mathbb{R}^3$ dönüşümü elde ederiz. Bu dönüşümü her $q \in f(N)$ noktasına, $q$ noktasında bir birim normal vektör karşılık getiriyorsa, $N$ dönüşümü $f(N)$ üzerinde diferensiyellenebilir bir* ***birim normal vektör alanıdır*** *denir[3].*

**Tanım 2.1.16.** *Regüler bir $M$ yüzeyini, bir $p \in M$ noktası iki komşuluğun kesişiminde olduğunda koordinat değişikliğinin $p$ noktasındaki jakobiyeni pozitif olacak biçimde bir koordinat komşulukları ailesi ile örtmek mümkünse $M$ yüzeyi* ***yönlendirilebilir*** *olarak adlandırılır. Bu biçimde bir aile seçimi, $M$ yüzeyinin bir* ***yönü*** *olarak adlandırılır ve bu durumda $M$ yüzeyine* ***yönlendirilmiş*** *denir. Eğer böyle bir seçim mümkün değilse $M$,* ***yönlendirilemez bir yüzey*** *olarak adlandırılır[3].*

**Tanım 2.1.17.** *$\mathbb{E}^3$ de bir $M$ yüzeyi üzerindeki diferansiyellenebilir bir birim normal vektör alanına $M$ üzerinde bir* ***Yön*** *denir. $\mathbb{E}^3$ deki herbir yönlendirilmiş $M$ yüzeyi üzerinde tam iki yön vardır. Bunlar pozitif ve negatif yöndür. Bir yüzey üzerinde yön seçilmiş ise bu yüzeye* ***yönlendirilmiş yüzey*** *denir. Bunun yanında Mobiüs şeridi gibi birçok yüzeyler de yönlendirilemezler. Bunlara da*

***yönlendirilemez yüzeyler*** *denir. O halde* $\mathbb{E}^3$ *ün bir* $M$ *yüzeyi üzerindeki yönü, tanıma göre,* $M$ *üzerindeki normal doğrultudur[1].*

**Tanım 2.1.18.** *Yönü* $N$ *olan bir* $M \subset \mathbb{R}^3$ *yüzeyini alalım.* $N : M \longrightarrow \mathbb{R}^3$ *dönüşümü,*

$$S^2 = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3;\ x^2 + y^2 + z^2 = 1\right\}$$

*birim küresi üzerinde değer alır. Bu biçimde tanımlanan* $N : M \longrightarrow S^2$ *dönüşümüne* $M$ *yüzeyinin* ***Gauss Dönüşümü*** *denir. Gauss dönüşümünün türevlenebilir olduğu kolayca doğrulanabilir.* $N$ *dönüşümünün* $p \in M$ *noktasındaki* $dN_p$ *diferansiyeli,* $T_p(M)$ *düzleminden* $T_{N(p)}(S^2)$ *düzlemine bir lineer dönüşümdür[3].*

*$M$ bir yüzey ve $N$ de $M$ nin birim normal vektör alanı olsun. Bu durumda* $p \in M$ *noktasında*

$$dN_p(e_1) = -k_1 e_1, \qquad dN_p(e_2) = -k_2 e_2$$

*olacak şekilde* $\{e_1, e_2\}$ *ortonormal bazı vardır. Burada* $k_1$ *ve* $k_2$ *sayıları* $p$ *noktasında normal eğriliğin ekstremum değerleridir, yani ikinci temel formun maksimum ve minimum değerleridir. Ayrıca* $k_1 \geqslant k_2$ *dir*[3].

**Tanım 2.1.19.** *Maksimum* $k_1$ *ve minimum* $k_2$ *değerlerine,* $p$ *noktasındaki* ***asli eğrilikler*** *denir;* $e_1, e_2$ *vektörlerine de* $p$ *noktasındaki* ***asli doğrultular*** *denir[3].*

*$dN$ dönüşümünün determinantı, asli eğriliklerin çarpımı* $(-k_1)(-k_2) = k_1 k_2$*, izi ise asli eğriliklerin toplamının tersi* $-(k_1 + k_2)$ *dir. Yüzeyin yönlendirilmesi değiştiğinde* $dN$ *nin determinantı değişmez, yani* $dN$ *nin determinantı yönlendirmeden bağımsızdır[3].*

**Tanım 2.1.20.** *Bir* $p \in M$ *noktasındaki Gauss Dönüşümünün diferansiyeli* $dN_p : T_p(M) \longrightarrow T_p(M)$ *olsun.* $dN_p$ *dönüşümünün determinantına* $M$ *yüzeyinin* $p$ *noktasındaki* ***Gauss eğriliği*** *denir ve* $K$ *ile gösterilir.* $dN_p$ *dönüşümünün izinin* *yarısının negatifine, $M$ yüzeyinin $p$ noktasındaki* ***Ortalama eğriliği*** *denir ve $H$ ile gösterilir. Asli eğrilikler cinsinden*

$$K = k_1 k_2, \qquad H = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

*yazabiliriz[3].*

**Tanım 2.1.21.** *Bir yüzeyin $p$ noktasına, eğer*

$K(p) > 0$ *ise eliptik,*

$K(p) < 0$ *ise hiperbolik,*

$K(p) = 0$ *ve* $H(p) \neq 0$ *ise parabolik,*

$k_1(p) = k_2(p)$ *ise umbilik,*

$k_1(p) = k_2(p) \neq 0$ *ise doğrusal umbilic*

$k_1(p) = k_2(p) = 0$ *ise seviye noktası*

*denir[4].*

**Önerme 2.1.1.** *$k_1$ ve $k_2$ asli eğrilikleri,*

$$k^2 - 2Hk + K = 0$$

*kuadratik denkleminin kökleridir. $k_1$ ve $k_2$ değerleri;*

$$k_1 = H + \sqrt{H^2 - K} \quad ve \quad k_2 = H - \sqrt{H^2 - K}$$

*dir[5].*

**Önerme 2.1.2.** *Bir $M$ yüzeyinin Gauss ve ortalama eğrilikleri*

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2}, \quad H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2}$$

*olarak verilir. Burada birinci temel formun bileşenleri*

$$E = \langle f_u, f_u \rangle, \quad F = \langle f_u, f_v \rangle, \quad G = \langle f_v, f_v \rangle$$

*ve ikinci temel formun bileşenleri*

$$e = \langle N, f_{uu} \rangle, \quad f = \langle N, f_{uv} \rangle, \quad g = \langle N, f_{vv} \rangle$$

*olarak verilir[7].*

## 2.2 Lorentz Uzayda Eğriler ve Yüzeyler

**Tanım 2.2.1.** *$V$ bir reel vektör uzayı olsun. $\forall a, b \in \mathbb{R}$ ve $\forall \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in V$ için*

$$\langle , \rangle = V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

*dönüşümü aşağıdaki*

1. $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = \langle \vec{y}, \vec{x} \rangle$ *(simetri)*,

2. $\langle a\vec{x} + b\vec{y}, \vec{z} \rangle = a \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle + b \langle \vec{y}, \vec{z} \rangle$ *(bilineerlik)*,

3. $\langle \vec{x}, a\vec{y} + b\vec{z} \rangle = a \langle \vec{x}, \vec{y} \rangle + b \langle \vec{x}, \vec{z} \rangle$ *(bilineerlik)*.

*özelliklerine sahip ise bu $\langle , \rangle$ dönüşümü $V$ vektör uzayı üzerinde bir* ***simetrik bilineer form*** *denir[5].*

**Tanım 2.2.2.** *$\langle , \rangle$, $V$ reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form olsun.*

1. *$\forall \vec{x} \in V$, $\vec{x} \neq 0$ için $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ oluyorsa $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna* ***pozitif tanımlı****,*

2. *$\forall \vec{x} \in V$, $\vec{x} \neq 0$ için $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ oluyorsa $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna* ***negatif tanımlı****,*

3. *$\forall \vec{x} \in V$, için $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \geqslant 0$ oluyorsa $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna* ***pozitif yarı tanımlı****,*

4. *$\forall \vec{x} \in V$ için $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \leqslant 0$ oluyorsa $\langle , \rangle$ simetrik bilineer formuna* ***negatif yarı tanımlı****,*

5. $\forall y \in V$ *için* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ *iken* $\vec{x} = 0$ *oluyorsa* $\langle , \rangle$ *simetrik bilineer formuna* ***nondejeneredir*** *denir,*

6. $\forall y \in V$ *için* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ *iken* $\vec{x} \neq 0$ *oluyorsa* $\langle , \rangle$ *simetrik bilineer formuna* ***dejeneredir*** *(singülerdir****)*** *denir[5].*

**Tanım 2.2.3.** *$V$ bir reel vektör uzayı olsun. $V$ üzerinde tanımlı*

$$\langle , \rangle : V \times V \longrightarrow \mathbb{R}$$

*dönüşümü bilineer, simetrik ve nondejenere ise $\langle , \rangle$ ye $V$ üzerinde bir* ***skaler çarpım****, bu durumda $(V, \langle , \rangle)$ ikilisine de bir* ***skaler çarpım uzayı*** *denir[5].*

**Tanım 2.2.4.** *$V$ bir skaler çarpım uzayı ve $W \subset V$ altuzay olsun. Eğer $W$ alt uzayı,*

$$\langle , \rangle \mid_W : W \times W \longrightarrow \mathbb{R}$$

*simetrik bilineer formu negatif tanımlı olacak şekilde $V$ nin en büyük boyutlu alt uzayı ise $W$ nin boyutuna $\langle , \rangle$* ***skaler çarpımın indeksi*** *denir ve $q$ ile gösterilir. Ayrıca $q$ ya $V$ vektör uzayının da* ***indeksi*** *denir ve $indV = q$ ile gösterilir. Bu ifade $0 \leqslant q \leqslant boyV$ olarak da yazılabilir[5].*

**Tanım 2.2.5.** *$V$ bir skaler çarpım uzayı ve $q$ de $V$ nin indeksi olsun. Eğer $q = 1$ ve $boyV \geqslant 2$ ise $V$ ye bir* ***Lorentz uzayı*** *denir[5].*

**Tanım 2.2.6.** *$\mathbb{R}^n$ n-boyutlu standart reel vektör uzayı olsun. Ayrıca $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $x = (x_1, x_2, ..., x_n)$ , $y = (y_1, y_2, ..., y_n)$ olmak üzere,*

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle = -x_1 y_1 + \sum_{i=2}^{n} x_i y_i$$

*fonksiyonu bir skaler çarpım fonksiyonudur. Bu fonksiyona $\mathbb{R}^n$ üzerinde* ***Lorentz metriği*** *denir[5].*

**Tanım 2.2.7.** *Özel olarak* $n = 3$ *için* $x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, $y = (y_1, y_2, y_3) \in \mathbb{R}^3$ *olmak üzere*

$$\langle , \rangle : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(x, y) \longrightarrow \langle x, y \rangle = -x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$$

*skaler Ã§arpımı tanımlı ise bu uzay* ***Minkowski 3-uzayı*** *veya* ***Lorentz 3-uzay*** *olarak isimlendirilir ve genellikle* $E_1^3$ *veya* $\mathbb{R}_1^3$ *ile gösterilir[5].*

**Tanım 2.2.8.** $\mathbb{E}_1^3$ *Minkowski uzayında bir* $\vec{x}$ *vektörüne,*

*(i)* $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle < 0$ *ise* ***timelike*** *vektör,*

*(ii)* $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle > 0$ *veya* $x = 0$ *ise* ***spacelike*** *vektör,*

*(iii)* $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ *ve* $\vec{x} \neq 0$ *ise* ***lightlike*** *vektör veya* ***null*** *vektör denir.*

*Ayrıca bu ifade edilen tanımdaki* $\vec{x}$ *vektörünün tipi, onun* ***causal*** *karakteri olarak adlandırılır[5].*

**Tanım 2.2.9.** $\vec{x}, \vec{y} \in \mathbb{E}_1^3$ *için* $\langle \vec{x}, \vec{y} \rangle = 0$ *ise* $\vec{x} \neq 0$, $\vec{y} \neq 0$ *vektörleri birbirine* ***diktir*** *denir ve* $\vec{x} \perp \vec{y}$ *ile gösterilir[5].*

**Tanım 2.2.10.** $\mathbb{R}_1^3$ *vektör uzayı üzerindeki skaler çarpım* $\langle , \rangle$ *olsun.* $\vec{x} \in \mathbb{E}_1^3$ *vektörünün* ***normu*** $\|\vec{x}\|$ *ile gösterilir ve*

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|} = |\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|^{\frac{1}{2}}$$

*ile tanımlanır[5].*

**Tanım 2.2.11.** *Bir* $\vec{x} \in \mathbb{E}_1^3$ *vektörünün normu* $1$ *e eşit ise yani*

$$\|\vec{x}\| = \sqrt{|\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|} = |\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle|^{\frac{1}{2}} = 1$$

*ise* $\vec{x}$ *vektörüne* ***birim vektör*** *denir[5].*

**Tanım 2.2.12.** *$M \subset \mathbb{E}_1^3$ eğrisi $(I, \alpha)$ koordinat komşuluğu ile verilsin. $\alpha'(u)$ da $\alpha(u)$ eğrisinin hız vektörü*

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$$
$$u \longrightarrow \alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u))$$

*biçiminde tanımlansın.*

(*i*) $\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle < 0$ *ise* $\alpha$ *eğrisine timelike,*

(*ii*) $\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle > 0$ *ise* $\alpha$ *eğrisine spacelike,*

(*iii*) $\langle \alpha'(u), \alpha'(u) \rangle = 0$ *ise* $\alpha$ *eğrisine null eğri denir[5].*

**Önerme 2.2.1.** *$\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında iki vektör $\vec{x}$ ve $\vec{y}$ olsun. $\vec{x} \wedge \vec{y}$ vektörel çarpımı için aşağıdaki ifadeler geçerlidir:*

(*i*) *$\vec{x}$ ve $\vec{y}$ spacelike vektör ise $\vec{x} \wedge \vec{y}$ bir timelike vektördür,*

(*ii*) *$\vec{x}$ ve $\vec{y}$ timelike vektör ise $\vec{x} \wedge \vec{y}$ bir spacelike vektördür,*

(*iii*) *$\vec{x}$ spacelike ve $\vec{y}$ timelike ise $\vec{x} \wedge \vec{y}$ bir spacelike vektördür,*

(*iv*) *$\vec{x}$ ve $\vec{y}$ null vektörler ise $\vec{x} \wedge \vec{y}$ bir spacelike vektördür,*

(*v*) *$\vec{x}$ timelike ve $\vec{y}$ null vektör ise $\vec{x} \wedge \vec{y}$ bir spacelike vektördür,*

(*vi*) *$\vec{x}$ spacelike ve $\vec{y}$ null vektör olmak üzere $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle = 0$ ise $\vec{x} \wedge \vec{y}$ bir null vektör, $\langle \vec{x}, \vec{x} \rangle \neq 0$ ise $\vec{x} \wedge \vec{y}$ bir spacelike vektördür[6].*

**Teorem 2.2.1.** *$\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(*i*) *İki timelike vektör asla ortogonal olamaz,*

(*ii*) *Bir timelike vektör, bir null vektöre asla ortogonal olamaz,*

(*iii*) *İki null vektör ortogonaldir ancak ve ancak bu vektörler lineer bağımlıdır[11].*

**Tanım 2.2.13.** $\mathbb{E}_1^3$ *Minkowski uzayında iki vektör* $\vec{a}$ *ve* $\vec{b}$ *olsun.* $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ *ve* $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ *olmak üzere* $\mathbb{E}_1^3$ *uzayında* ***skaler çarpım****(iç çarpım)*

$$\langle a, b\rangle = -a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

*ve* ***vektörel çarpım****(dış çarpım)*

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \left(-\left(a_2b_3 - a_3b_2\right),\ \ -\left(a_1b_3 - a_3b_1\right),\ a_1b_2 - a_2b_1\right)$$

*olarak yazılır.*

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \ i = j \ ise \\ \\ 0, \ i \neq j \ ise \end{cases} \quad ve \ e_i = (\delta_{i1}, \delta_{i2}, \delta_{i3})$$

*olmak üzere*

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} -e_1 & e_2 & e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

*veya*

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} e_1 & -e_2 & -e_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

*olarak hesaplanabilir. Burada*

$$e_1 \wedge e_2 = e_3, \quad e_2 \wedge e_3 = -e_1, \quad e_3 \wedge e_1 = -e_2$$

*dir. Saat yönünün ters yönü pozitif yön olarak alınmıştır.*

*Aşağıdaki Minkowski uzayındaki vektörel çarpımın özellikleri Öklid uzayındaki vektörel çarpımım özelliklerine benzerdir.* $\mathbb{E}_1^3$ *de vektörel çarpımın özellikleri aşağıdaki şekildedir:* $\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{x}, \vec{y}, \vec{z} \in \mathbb{E}_1^3$ *için*

1. $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$.

2. $\vec{a} \wedge \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) + (\vec{a} \wedge \vec{c})$.

3. $\left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \right\rangle = \left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{b} \right\rangle = 0.$

4. $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right) = -\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) = \left\langle \vec{a}, \vec{b} \wedge \vec{c} \right\rangle = \left(\vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c}\right).$

5. $\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right) \wedge \vec{c} = -\left\langle \vec{a}, \vec{c} \right\rangle \vec{b} + \left\langle \vec{b}, \vec{c} \right\rangle \vec{a}.$

6. $\left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{c} \right\rangle = -\det\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right).$

7. $\left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{x} \wedge \vec{y} \right\rangle = -\begin{vmatrix} \left\langle \vec{a}, \vec{x} \right\rangle & \left\langle \vec{b}, \vec{x} \right\rangle \\ \left\langle \vec{a}, \vec{y} \right\rangle & \left\langle \vec{b}, \vec{y} \right\rangle \end{vmatrix} = -\left\langle \vec{a}, \vec{x} \right\rangle \left\langle \vec{b}, \vec{y} \right\rangle + \left\langle \vec{a}, \vec{y} \right\rangle \left\langle \vec{b}, \vec{x} \right\rangle$
   ($\mathbb{E}_1^3$ *de lagrange özdeşliği*).

8. $\left\langle \vec{a} \wedge \vec{b}, \vec{a} \wedge \vec{b} \right\rangle = -\left\langle \vec{a}, \vec{a} \right\rangle \left\langle \vec{b}, \vec{b} \right\rangle + \left\langle \vec{a}, \vec{b} \right\rangle^2$

9. $\left(\vec{a}\vec{b}\vec{c}\right)\left(\vec{x}\vec{y}\vec{z}\right) = -\begin{vmatrix} \left\langle \vec{a}, \vec{x} \right\rangle & \left\langle \vec{b}, \vec{x} \right\rangle & \left\langle \vec{c}, \vec{x} \right\rangle \\ \left\langle \vec{a}, \vec{y} \right\rangle & \left\langle \vec{b}, \vec{y} \right\rangle & \left\langle \vec{c}, \vec{y} \right\rangle \\ \left\langle \vec{a}, \vec{z} \right\rangle & \left\langle \vec{b}, \vec{z} \right\rangle & \left\langle \vec{c}, \vec{z} \right\rangle \end{vmatrix}.$

10. $\vec{a} \wedge \vec{b} = 0$ *olması için gerek ve yeter koşul* $\vec{a}$ *ve* $\vec{b}$ *vektörlerinin lineer bağımlı olmasıdır[2].*

**Tanım 2.2.14.** $3-$*boyutlu Öklid uzayı* $\mathbb{E}^3$*de* $\alpha'' \neq 0$ *olmak üzere* $C^3-$*sınıfından diferensiyellenebilir regüler bir* $\alpha$ *eğrisine* ***Frenet eğrisi*** *denir. Buna ek olarak Frenet çatısındaki vektörler*

$$
\begin{aligned}
e_1 &= \alpha' && \textit{(teğet vektör)} \\
e_2 &= \frac{\alpha''}{|\alpha''|} && \textit{(asli normal vektör)} \\
e_3 &= e_1 \wedge e_2 && \textit{(binormal vektör)}
\end{aligned}
$$

*olarak bulunur.* $\kappa = \|\alpha''\|$ *fonksiyonuna* $\alpha$ *nın* ***eğriliği*** *denir. Bu sayının daima* *pozitif olduğunu varsayabiliriz. Yukarıdaki denklemlerin türevleri*

$$\begin{aligned}
e_1' &= \alpha'' = \kappa e_2 \\
e_2' &= \langle e_2', e_1\rangle e_1 + \langle e_2', e_2\rangle e_2 + \langle e_2', e_3\rangle e_3 \\
&= -\kappa e_1 + \tau e_3 \\
e_3' &= \langle e_3', e_1\rangle e_1 + \langle e_3', e_2\rangle e_2 + \langle e_3', e_3\rangle e_3 \\
&= -\langle e_3, e_1'\rangle e_1 - \langle e_3, e_2'\rangle e_2 + 0.e_3 \\
&= -\tau e_2
\end{aligned}$$

*olur.* $\tau = \langle e_2', e_3\rangle$ *fonksiyonuna* $\alpha$ *nın* ***burulması*** *denir.* $(e_1, e_2)$ *−düzlemi eğri boyunca değişimi açıklar. Bu 3 denklemin türevlerine* ***Frenet denklemleri*** *denir ve matris biçiminde aşağıdaki şekilde*

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

*yazılır[4].*

$\mathbb{E}_1^3$ *de Frenet çatısını, eğrinin eğriliğini ve burulmasını Öklid uzayına benzer şekilde aşağıda tanımlayabiliriz:*

*Vektörler* $e_1, e_2 \in \mathbb{E}_1^3$ *öyleki* $\langle e_i, e_i\rangle = \pm 1$, $\langle e_1, e_2\rangle = 0$ *ve* $e_3 = e_1 \wedge e_2$ *olsun. O halde* $e_1, e_2, e_3$ *vektörleri ortonormal çatı olsun. Eğer* $\langle e_1, e_1\rangle = \epsilon$ *ve* $\langle e_2, e_2\rangle = \eta$ *ise* $\epsilon, \eta \in \{-1, 1\}$ *da lagrange özdeşliğinden* $\langle e_3, e_3\rangle = -\epsilon\eta$ *dir. Her* $X \in \mathbb{E}_1^3$ *vektörü* $\{e_1, e_2, e_3\}$ *bazına göre*

$$X = \epsilon \langle X, e_1\rangle e_1 + \eta \langle X, e_2\rangle - \epsilon\eta \langle X, e_3\rangle e_3$$

*tek türlü yazılabilir[2].*

**Teorem 2.2.2.** $\mathbb{E}_1^3$ *Minkowski uzayında* $\alpha$ *bir spacelike veya timelike eğri olsun. Kabul edelım ki* $\alpha$ *eğrisi yay uzunluğu ile parametrelenmiş ve* $\langle \alpha'', \alpha''\rangle \neq 0$

*şartlarını sağlasın. Ayrıca bu eğrinin Frenet çatı elemanları*

$$e_1 = \alpha', \qquad e_2 = \frac{\alpha''}{\sqrt{|\langle \alpha'', \alpha'' \rangle|}}, \qquad e_3 = e_1 \wedge e_2$$

*için aşağıdaki Frenet denklemi*

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & \kappa\eta & 0 \\ -\kappa\epsilon & 0 & -\tau\epsilon\eta \\ 0 & -\tau\eta & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

*olarak $\alpha$ eğrisinin eğriliği $\kappa = \langle e_1', e_2 \rangle$ ve burulması $\tau = \langle e_2', e_3 \rangle$ ile gösterilir. Üçlü Frenet çatısının elemanları hesaplanırsa, Örneğin*

$$e_1' = \alpha'' = \eta \langle \alpha'', e_2 \rangle e_2 = \eta\kappa e_2,$$

$$\langle e_2', e_1 \rangle = - \langle e_1', e_2 \rangle = -\kappa$$

$$\langle e_3', e_2 \rangle = - \langle e_2', e_3 \rangle = -\tau$$

*olarak bulunur. Lorentzian uzayda non-dejenere eğriler için farklı frenet çatıları bulunabilir[4].*

**Tanım 2.2.15.** *$\mathbb{E}_1^3$ de $M$ yüzeyinin Gauss eğriliği $K$, birinci temel formun bileşenleri $E, F$ ve $G$ olmak üzere*

$$K = \frac{1}{(EG - F^2)^2} \left\{ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}E_{vv} + F_{uv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & -\frac{1}{2}E_v + F_u \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} \right\}$$

*formülüne $3-$Boyutlu Minkowski uzayında* ***Brioschi'nin Formülü*** *denir. Benzer şekilde $3-$Boyutlu Öklid uzayında bu formül hesaplanabilir[2].*

**Tanım 2.2.16.** *$\mathbb{E}_1^3$ de $M$ açılabilir olmayan yüzeyin ikinci Gauss eğriliği $K_{II}$, ikinci temel formun bileşenleri $e, f$ ve $g$ olmak üzere*

$$K_{II} = \frac{1}{(eg - f^2)^2} \left\{ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}e_{vv} + f_{uv} - \frac{1}{2}g_{uu} & \frac{1}{2}e_u & f_u - \frac{1}{2}e_v \\ f_v - \frac{1}{2}g_u & e & f \\ \frac{1}{2}g_v & f & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}e_v & \frac{1}{2}g_v \\ \frac{1}{2}e_v & e & f \\ \frac{1}{2}g_u & f & g \end{vmatrix} \right\}$$

*formülüne ikinci Gauss eğriliği için Brioschi Formülü denir[2].*

## 2.3 Regle Yüzeyler

**Tanım 2.3.1.** *$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$ eğrisi üzerinde $X$ birim vektör alanı verilsin. $X$, $I$ aralığının her bir $u$ elemanına karşılık, $\alpha(u)$ noktasında $X(u)$ vektörüne karşılık getiren bir dönüşümdür.*

$$f(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$$

$$f : I \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{E}^3$$

*dönüşümü bir regüler dönüşüm olmak üzere, $f(I \times \mathbb{R})$ yüzeyine, $\mathbb{E}^3$ uzayında bir* ***Regle Yüzey*** *denir. Burada $\alpha$ eğrisine yüzeyin bir* ***dayanak eğrisi*** *adı verilir. ve*

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$$

$$u \longrightarrow \alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \alpha_3(u))$$

*ile gösterilir. $X(u)$ vektörüne $f$ yüzeyinin $\alpha(u)$ noktasındaki* ***doğrultmanı*** *denir. $\alpha(u)$ noktasından geçen ve $X(u)$ vektörüne paralel olan doğruya, $\alpha(u)$ noktasından geçen* ***ana doğru*** *denir[8].*

**Tanım 2.3.2.** *Bir regle yüzeyin ana doğruları boyunca teğet düzlemleri aynı ise regle yüzeye* ***açılabilirdir*** *denir[1].*

**Tanım 2.3.3.** *Bir $f(u,v)$ regle yüzeyinde komşu iki doğrultmanın ortak dikmesinin esas doğrultman üzerindeki ayağına boğaz(merkez veya* ***striksiyon****) noktası adı verilir[1].*

**Tanım 2.3.4.** *Bir $f(u,v)$ regle yüzeyinin anadoğrusu dayanak eğrisi boyunca yüzeyi oluştururken boğaz noktalarının geometrik yerine regle yüzeyin boğaz* ***(striksiyon) çizgisi (eğrisi)*** *adı verilir[1].*

**Tanım 2.3.5.** *Regle yüzeyin komşu iki ana doğrusu arasındaki en kısa uzaklığın bu iki komşu ana doğru arasındaki açıya oranına regle yüzeyin*

***dağılma parametresi(drall'i)*** *denir. Bu regle yüzeyin dağılma parametresinin (drallinin) diferansiyel denklemi*

$$Q = \frac{\det(\alpha', X, X')}{\langle X', X' \rangle}$$

*ile ifade edilebilir[1].*

**Tanım 2.3.6.** $\mathbb{E}^3$ *de bir regüler* $M$ *yüzeyinin* $H$ *Ortalama eğriliği her yerde sıfırsa* $(H = 0)$*, bu yüzeye* ***minimal yüzey*** *denir[3].*

**Tanım 2.3.7.** $\mathbb{E}^3$ *de bir regüler* $M$ *yüzeyi için Gauss eğriliği* $K = 0$ *ise* $M$ *ye* ***Flat yüzey*** *(açılabilir yüzey) denir[3].*

**Tanım 2.3.8.**

$$\alpha(u) = (\cos u, \sin u, au), \qquad a \in \mathbb{R}, \qquad 0 < u < 2\pi$$

*olarak verilen helisi düşünelim. Helisin her noktasında, o noktadan geçen, xy düzlemine paralel olan z eksenini kesen bir doğru çizelim. Bu doğruların belirlediği yüzeye* ***helikoid*** *denir ve bir parametrelemesi,*

$$f(u, v) = (v \cos u, v \sin u, au)$$

$$0 < u < 2\pi$$

$$-\infty < v < \infty$$

*ile verilir.* $f$ *dönüşümü, uv düzleminde genişliği* $2\pi$ *olan bir açık şeridi, helis üzerinde* $2\pi$ *lik bir dönüşe karşılık gelen helikoid parçasına çevirir[3].*

**Tanım 2.3.9.** $M \subset \mathbb{E}^3$ *bir regle yüzey olsun.* $\forall \alpha(u) \in M$ *noktasında,* $\forall u \in I$ *için* $X$ *teğet vektörü ile anadoğrunun doğrultman vektörü lineer bağımsız olacak şekilde seçebiliriz.*

## 2.4 Weingarten Yüzeyler

**Tanım 2.4.1.** *$M$, $\mathbb{E}^3$ de bir yüzey olsun. Eğer $K$ ve $H$ nın gradient vektörleri lineer bağımlı ise $M$ yüzeyine* ***Weingarten Yüzey*** *denir. Buna göre $M$ nin Weingarten yüzeyi olması için gerek ve yeter şart*

$$K_v H_u - K_u H_v = 0$$

*olmasıdır[9].*

**Önerme 2.4.1.** *$M$, $\mathbb{E}^3$de bir yüzey olsun. $M$ yüzeyinin Weingarten yüzey olması için gerek ve yeter şart $K$ Gauss eğriliği ve $H$ ortalama eğrilikleri arasında*

$$\phi(H, K) = 0$$

*olacak şekilde aşikar olmayan fonksiyonel bir bağıntının var olmasıdır[9].*

**Tanım 2.4.2.** *$M \subset \mathbb{E}^3$ bir regle yüzey olsun. Eğer $M$ nin Ortalama eğriliği $H$ ve ikinci Gauss eğriliği $K_{II}$ (ikinci temel formun iç eğriliği), $\phi(H, K_{II}) = 0$ aşikar bağıntısını sağlıyor ise $M$ ye* ***II. Weingarten yüzey*** *denir.*

*Buna göre $II$. Weingarten yüzeyde $gradH$ ile $gradK_{II}$ lineer bağımlı vektörlerdir. Bu ise $H_u (K_{II})_v - H_v (K_{II})_u = 0$ olmasına denktir[10].*

**Tanım 2.4.3.** *$M$, $3-$boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{E}^3_1$ de bir yüzey olsun.*

$$H_{II} = H + \frac{1}{2}\Delta_{II} \ln\left(\sqrt{|K|}\right),$$

*ifadesine $M$ yüzeyinin* ***ikinci ortalama eğriliği*** *denir. Burada $H$ ve $K$, $M$ nin ortalama ve Gauss eğrilikleri ve*

$$\Delta_{II} = -\frac{1}{\sqrt{|h|}} \sum_{i,j=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|h|} h^{ij}\right) \frac{\partial}{\partial x^j},$$

*olup non-dejenere ikinci temel formun Laplasyan operatörüdür. Burada ikinci temel formun bileşenleri*

$$e = h_{11}, \quad f = h_{12}, \quad g = h_{22}$$

*olup*

$$h = \det(h_{ij}), \qquad \left(h^{ij}\right) = (h_{ij})^{-1}$$

*dir[16].*

# 3. $\mathbb{E}^3$ ÖKLİD UZAYINDA REGLE WEİNGARTEN YÜZEYLER

Bu bölümde 3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de Weingarten tipi regle yüzeyler incelenecektir. Birinci alt bölümde açılabilir olmayan regle yüzeyin Weingarten yüzey olması için gerek ve yeter şartlar verildi. İkinci bölümde ise bir regle yüzeyin $II$.Weingarten yüzey olması için gerekli şartlar verildi. Üçüncü alt bölümde ise Gauss eğriliği $K$, ortalama eğriliği $H$ ve ikinci Gauss eğriliği $K_{II}$ yi içeren kuadratik denklemleri sağlayan regle yüzeyler incelendi.

## 3.1 Regle Weingarten Yüzeyler

$\mathbb{E}^3$ Öklid uzayında,

$$f(u,v) = \alpha(u) + vX(u) \tag{3.1.1}$$

ile verilen $M$ regle yüzeyini göz önüne alalım. Burada, $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere,

$$\alpha : I \longrightarrow \mathbb{E}^3$$

bir diferensiyellenebilir eğri ve $X(u)$ da $\alpha$ eğrisi boyunca bir vektör alanıdır.

Kabul edelim ki (3.1.1) ile verilen $M$ regle yüzeyi, açılabilir olmayan bir regle yüzey olsun. Bu durumda $M$ nin Gauss eğriliği $K$ her noktada sıfırdan farklıdır. Burada $K$, $M$ nin Gauss eğriliği , $H$ ise $M$ nin ortalama eğriliğidir. Aynı zaman da kabul edelim ki

$$\|X\| = \|X'\| = 1 \text{ ve } \langle \alpha', X' \rangle = 0 \tag{3.1.2}$$

olsun. Bu durumda $\alpha(u)$ bir striksiyon çizgisidir. Şimdi regle yüzey üzerinde $E$,

$F$ ve $G$ birinci temel formun bileşenleri

$$E = \langle \alpha', \alpha' \rangle + v^2, \quad F = \langle \alpha', X \rangle, \quad G = 1 \tag{3.1.3}$$

dır. $I$, $M$ nin birinci temel formu olmak üzere

$$\det(I) = D^2 = EG - F^2 = Q^2 + v^2 \tag{3.1.4}$$
$$D = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{Q^2 + v^2}$$

diyelim. Ortonormal baz elemanlarımız $\{X, X', X \wedge X'\}$ olmak üzere

$$\alpha' = FX + QX \wedge X' \tag{3.1.5}$$

$$X'' = -X - JX \wedge X' \tag{3.1.6}$$

$$\alpha' \wedge X = QX' \tag{3.1.7}$$

bulunur. Bu eşitliklerde

$$Q = \det(\alpha', X, X') \neq 0 \tag{3.1.8}$$

$$J = \det(X'', X', X) \tag{3.1.9}$$

ifadelerini tanımlayalım. Burada $Q$ ya $M$ nin **dağılma parametresi (Drall'ı),** $J$ ise $X$ e bağlı **geodezik eğrilik fonksiyonu** dur. Buna göre $N$ birim normal vektör alanı

$$N = \frac{1}{D}(\alpha' \wedge X + vX \wedge X') = \frac{1}{D}(QX' - vX \wedge X'). \tag{3.1.10}$$

olarak elde edilir. İkinci temel formun bileşenleri $e$, $f$ ve $g$

$$e = \frac{1}{D}\left(Q(F + QJ) - Q'v + Jv^2\right), \quad f = \frac{Q}{D} \neq 0, \quad g = 0 \tag{3.1.11}$$

şeklinde bulunur. Şimdi bu regle yüzeyin $K$ Gauss eğriliğini ve $H$ ortalama eğriliğini hesaplayalım. $\mathbb{E}^3$ de bir $M$ yüzeyinin $K$ Gauss eğriliği

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = -\frac{Q^2}{D^4}, \tag{3.1.12}$$

ve $H$ ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2D^3}\left(Jv^2 - Q^{'}v + Q\left(QJ - F\right)\right) \tag{3.1.13}$$

olarak elde ederiz[10].

$f$ fonksiyonunun $u$ ve $v$ ye göre kısmi türevleri alınırsa

$$f_u = \alpha' + vX' \tag{3.1.14}$$

$$f_v = X \tag{3.1.15}$$

$$f_{uu} = \alpha'' + vX'' \tag{3.1.16}$$

$$f_{vv} = 0 \tag{3.1.17}$$

$$f_{uv} = X' \tag{3.1.18}$$

dır ve buradan

$$\begin{aligned} f_u \wedge f_v &= [\alpha' + vX'] \wedge X \\ &= (\alpha' \wedge X) + v\,(X' \wedge X) \end{aligned} \tag{3.1.19}$$

olarak bulunur. Şimdi birinci temel formun bileşenlerini hesaplayalım:

$$I = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

$$E = \langle f_u, f_u\rangle = \langle \alpha' + vX', \alpha' + vX'\rangle = \langle \alpha', \alpha'\rangle + v^2$$

elde edilir. Ayrıca

$$F = \langle f_u, f_v\rangle = \langle \alpha' + vX', X\rangle = \langle \alpha', X\rangle$$

ve

$$G = \langle f_v, f_v\rangle = \langle X, X\rangle = 1$$

olarak elde edilir. Eğrinin belirlenmesinde kullanılan ortonormal çatı elemanları, $\{X, X', X \wedge X'\}$ bazına göre hesaplanırsa

$$\begin{aligned}\alpha' &= \langle \alpha', X \rangle X + \langle \alpha', X' \rangle X' + \langle \alpha', X \wedge X' \rangle X \wedge X' \\ &= FX + 0.X' + QX \wedge X' \\ &= FX + QX \wedge X'\end{aligned}$$

$$(X \wedge X)' = X' \wedge X' + X \wedge X'' = 0 + X \wedge X'' = -JX'$$

$$\begin{aligned}\alpha'' &= (FX + QX \wedge X')' \\ &= FX' + Q(X \wedge X')' \\ &= FX' + Q(-JX') \\ &= (F - QJ) X'\end{aligned}$$

$$X'' = -X - JX \wedge X'$$

$$\alpha' \wedge X = QX'$$

lineer diferensiyel denklem sistemleri elde edilir.

Gerçekten $\langle N, f_u \rangle = 0$ olduğundan $u$ parametresine göre türev alınırsa

$$\langle N_u, f_u \rangle + \langle N, f_{uu} \rangle = 0$$

elde edilir ve buradan

$$e = -\langle N_u, f_u \rangle = \langle N, f_{uu} \rangle$$

dir. $\langle N, f_u \rangle = 0$ olduğundan $v$ parametresine göre türev alınırsa

$$\langle N_v, f_u \rangle + \langle N, f_{uv} \rangle = 0$$

elde edilir ve buradan

$$f = -\langle N_v, f_u \rangle = \langle N, f_{uv} \rangle$$

dir. $\langle N, f_v \rangle = 0$ olduğundan $v$ parametresine göre türev alınırsa

$$\langle N_v, f_v \rangle + \langle N, f_{vv} \rangle = 0$$

elde edilir ve buradan

$$g = -\langle N_v, f_v \rangle = \langle N, f_{vv} \rangle$$

dir. Doğal çatı elemanları $\{f_u, f_v\}$ olmak üzere regle yüzeyin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|}$$

dir. Bunun yanında (3.1.8) dağılma parametresi

$$\begin{aligned} Q &= \frac{\det(\alpha', X, X')}{\langle X', X' \rangle} \\ &= \frac{\det(\alpha', X, X')}{1} \\ &= \det(\alpha', X, X') \end{aligned}$$

elde edilir. Bu (3.1.8) ifadesinin $u$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned} Q_u &= [\det(\alpha', X, X')]_u \\ &= \det(\alpha'',\ X,\ X') + \det(\alpha',\ X',\ X') + \det(\alpha',\ X,\ X'') \\ &= \det(\alpha'',\ X,\ X') + \det(\alpha',\ X,\ X'') \\ &= -\det(X', X, \alpha'') \end{aligned}$$

veya

$$\det(X', X, \alpha'') = -Q_u = -Q'$$

bulunur. Şimdi de $D^2$ yi hesaplayalım:

$$\begin{aligned} \det(I) &= |f_u \wedge f_v|^2 \\ &= \langle f_u, f_u \rangle \langle f_v, f_v \rangle - \langle f_u, f_v \rangle^2 \\ &= EG - F^2 \end{aligned}$$

olduğundan (3.1.4) ifadesi

$$\det(I) = D^2 = EG - F^2$$

elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}
D^2 =& EG - F^2 \\
=& \left(\langle \alpha', \alpha' \rangle + v^2\right).1 - F^2 \\
=& \langle FX + QX \wedge X', FX + QX \wedge X' \rangle + v^2 - F^2 \\
=& F^2 \langle X, X \rangle + FQ \langle X, X \wedge X' \rangle + QF \langle X \wedge X', X \rangle + Q^2 \langle X \wedge X', X \wedge X' \rangle \\
& + v^2 - F^2
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadede Lagrange özdeşliği kullanıldığında

$$\begin{aligned}
\langle X \wedge X', X \wedge X' \rangle &= \langle X, X \rangle \langle X', X' \rangle - \langle X, X' \rangle \langle X, X' \rangle \\
&= \|X\|^2 . \|X'\|^2 - 0.0 = 1.1 = 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Bulmuş olduğumuz bu ifade (3.1.4) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$D^2 = Q^2 + v^2$$

olarak bulunur. Bu (3.1.4) eşitliğinin her iki tarafının karekökü alınırsa $D = \sqrt{Q^2 + v^2}$ ile de gösterilebilir. Şimdi de ikinci temel formun bileşenlerini hesaplayalım:

$$II = edu^2 + 2fdudv + gdv^2$$

$e = \langle N, f_{uu} \rangle$ olduğu gözönüne alınır ve (3.1.16) ve (3.1.19) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
e &= \left\langle \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|}, \alpha'' + vX'' \right\rangle \\
&= \frac{1}{D} \left( Q (F - QJ) - Q'v + Jv^2 \right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Benzer şekilde $f = \langle N, f_{uv} \rangle$ olduğu göz önüne alınır ve (3.1.18) ve (3.1.19) kullanılırsa

$$f = \langle N, f_{uv} \rangle = \left\langle \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|}, X' \right\rangle = \frac{Q}{\sqrt{EG - F^2}}$$

veya

$$f = \frac{Q}{D}$$

olarak bulunur. Bunun yanında (3.1.17) den

$$g = \langle N, f_{vv} \rangle = \langle N, 0 \rangle = 0$$

dır. Birim Normal vektör alanı (3.1.19) dan

$$N = \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|} = \frac{1}{\sqrt{Q^2 + v^2}} \left( QX' - vX' \wedge X \right)$$

veya

$$N = \frac{1}{D} \left( QX' - vX' \wedge X \right)$$

elde edilir. $K$ Gauss eğriliğinde birinci ve ikinci temel formun değerleri (3.1.12) de yerine yazılırsa

$$K = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{e.0 - \left( \frac{Q}{\sqrt{EG - F^2}} \right)^2}{D^2} = -\frac{Q^2}{D^4}$$

dır ve böylece (3.1.12) elde edilmiş olur. Benzer şekilde $H$ Ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2} \frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} = \frac{1}{2} \frac{e.1 - 2fF + 0.E}{D^2} = \frac{1}{2D^3} \left( Q^2 J - QF - Q'v + Jv^2 \right)$$

olarak bulunur ve (3.1.13) elde edilmiş olur.

Ayrıca (3.1.4) nin sırasıyla $u$ ve $v$ ye parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$D_u = \frac{QQ'}{D} \tag{3.1.20}$$

ve

$$D_v = \frac{v}{D} \tag{3.1.21}$$

elde edilir. Şimdi $M$ Regle yüzeyinin $K_v H_u - K_u H_v = 0$ denklemini sağlaması için gerekli olan şartları araştıralım. Buna göre (3.1.12) da sırasıyla $v$ ve $u$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$K_v = \frac{4Q^2}{D^6} v \tag{3.1.22}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.1.12) ifadesinin $u$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$K_u = -\frac{1}{D^6}\left(2QQ'D^2 - 4Q^3Q'\right)$$

$$K_u = \frac{2QQ'}{D^6}\left(-v^2 + Q^2\right) \tag{3.1.23}$$

elde edilir. Şimdi de (3.1.13) ifadesinin sırasıyla $v$ ve $u$ ya göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned} H_v &= \frac{1}{2}\left(\frac{(2Jv - Q' + 0)\,D^3 - (Jv^2 - Q'v + Q\,(QJ - F))\,3D^2D_v}{(D^3)^2}\right) \\ &= \frac{1}{2D^5}\left(-Jv^3 + 2Q^{'}v^2 - Q^2Jv + 3QFv - Q^2Q^{'}\right) \end{aligned} \tag{3.1.24}$$

ve

$$H_u = \frac{1}{2}\left(\frac{(Jv^2 - Q'v + Q\,(QJ - F))_u\,D^3 - (Jv^2 - Q'v + Q\,(QJ - F))\,3D^2D_u}{(D^3)^2}\right)$$

$$\begin{aligned} H_u =& \frac{1}{2D^5}\left[J'v^4 - Q''v^3 + \left(-QQ'J + 2Q^2J' - Q'F - QF'\right)v^2\right. \\ &\left.+ \left(3QQ'^2 - Q^2Q''\right)v + Q^2\left(-QQ'J + Q^2J' + 2Q'F - QF'\right)\right] \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

elde edilir. Bu elde edilen $K_u, K_v, H_u, H_v$ ifadelerini $K_vH_u - K_uH_v = 0$ denkleminde yerine yazalım.

$$\begin{aligned} K_vH_u - K_uH_v =& \frac{1}{D^{11}}\left[\left(2Q^2J' - QQ'J\right)v^5 + \left(2QQ'^2 - 2Q^2Q''\right)v^4\right. \\ &+ \left(-2Q^3Q'J + 4Q^4J' - 2Q^2Q'F - 2Q^3F' + 3Q^2Q'F\right)v^3 \\ &+ \left(6Q^3Q'^2 - 2Q^4Q'' - 3Q^3Q'^2\right)v^2 \\ &+ \left(-2Q^5Q'J + 2Q^6J' + 4Q^4Q'F - 2Q^5F' + Q^5Q'J - 3Q^4Q'F\right)v \\ &\left.+Q^5Q'^2\right] \end{aligned}$$

Burada bulmuş olduğumuz ifade $v$ nin kuvvetlerinden oluşan ve $v$ ye bağlı bir polinomdur. Bu polinomun sonucunun sıfır olması için $v$ nin kuvvetlerinin katsayılarının sıfır olması gerekir. $v^5$, $v^4$, $v^3$, $v^2$, $v^1$, $v^0$ nin katsayıları sırasıyla aşağıdaki gibi düzenlenecek olursa

$v^5 : 2Q^2J' - QQ'J = 0$

$v^4 : 2QQ'^2 - 2Q^2Q'' = 0$

$v^3 : -2Q^3Q'J + 4Q^4J' - 2Q^2Q'F - 2Q^3F' + 3Q^2Q'F = 0$

$v^2 : 6Q^3Q'^2 - 2Q^4Q'' - 3Q^3Q'^2 = 0$

$v^1 : -2Q^5Q'J + 2Q^6J' + 4Q^4Q'F - 2Q^5F' + Q^5Q'J - 3Q^4Q'F = 0$

$v^0 : Q^5Q'^2 = 0$

olması gerekir. $Q \not\equiv 0$ olduğundan $K \not\equiv 0$ dır. Böylece herhangi bir noktanın komşuluğunda $Q \neq 0$ olduğundan $v^0$ ve $v^5$ in katsayılarının sıfır olması için $Q' \equiv 0$ ve $J' \equiv 0$ olması gerektiği açıktır.

Aynı şekilde $v^3$ ün katsayısının sıfır olması için $F' \equiv 0$ olmalıdır. Bununla birlikte, $K \not\equiv 0$ olan herhangi bir regle Weingarten yüzeyin $Q$, $J$, $F$ fonksiyon değerleri sabit olmak zorundadır. Dikkat edilirse bu durumda regle yüzey analitiktir. Dolayısıyla $K$ Gauss eğriliği ve $H$ ortalama eğrilik sadece $v$ parametresine bağlı ise yüzey bir Weingarten yüzeydir.

**Teorem 3.1.1.** *Bir açılabilir olmayan $M$ regle yüzeyi üzerinde aşağıdaki şartlar denktir:*

*(i) $M$ bir Weingarten yüzeydir.*

*(ii) $Q$, $J$, $F$ ifadeleri sabittir.*

*(iii) $Q$, $J$, $F$ sabitleri için $2H\sqrt{\pm Q} = \sqrt[4]{-K}\left(J \mp F\sqrt{-K}\right)$ dir. Burada işaret $Q$ nun işaretidir.*

*(iv) $M$ bir klasik vida yüzeyi veya bir doğrunun vida hareketi ile tanımlanır[10].*

**İspat.** $(i) \Longleftrightarrow (ii)$ yukarıda gösterildi. $(ii) \Longleftrightarrow (iii)$ eğer $Q$, $J$, $F$ ifadeleri sabit alınırsa, (3.1.12) dan

$$K = -\frac{Q^2}{D^4}$$

ve bu (3.1.12) ifadesinde (3.1.4) eşitliği yazılırsa

$$K = -\frac{Q^2}{\left(Q^2+v^2\right)^2}$$

$$\begin{aligned}\left(Q^2+v^2\right)^2 &= -\frac{Q^2}{K}\\ Q^2+v^2 &= \sqrt{-\frac{Q^2}{K}}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu bulmuş olduğumuz eşitliği (3.1.13) $H$ Ortalama eğriliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}H &= \frac{1}{2D^3}\left(Jv^2 - Q'v + Q\left(QJ-F\right)\right) = \frac{1}{2D^3}\left(Jv^2 - 0.v + Q\left(QJ-F\right)\right)\\ &= \frac{1}{2D^3}\left(Jv^2 + Q^2J - QF\right)\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$H = \frac{1}{2D^3}\left(J\left(Q^2+v^2\right) - QF\right) \tag{3.1.26}$$

elde edilir. Bu (3.1.26) denklemi düzenlenirse

$$\begin{aligned}2H &= \frac{1}{\left(Q^2+v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\left(J\left(Q^2+v^2\right) - QF\right)\\ &= \frac{1}{\left(Q^2+v^2\right)^{\frac{1}{2}}} - \frac{QF}{\left(Q^2+v^2\right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}2H &= J\left(\sqrt{-\frac{Q^2}{K}}\right)^{-\frac{1}{2}} - QF\left(\sqrt{-\frac{Q^2}{K}}\right)^{-\frac{3}{2}}\\ &= J\left(-\frac{K}{Q^2}\right)^{\frac{1}{4}} - QF\left(-\frac{K}{Q^2}\right)^{\frac{3}{4}}\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada tekrar düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}2H &= J\frac{\sqrt[4]{-K}}{\sqrt[4]{Q^2}} - QF\frac{\sqrt[4]{-K^3}}{\sqrt[4]{\left(Q^2\right)^3}}\\ &= J\frac{\sqrt[4]{-K}}{\sqrt[4]{Q^2}} - QF\frac{\sqrt{-K}\,\sqrt[4]{-K}}{|Q|\,\sqrt[4]{Q^2}}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu denklemin her iki tarafı $\sqrt[4]{Q^2}$ ile çarpılırsa

$$2H\sqrt[4]{Q^2} = J\sqrt[4]{-K} - \frac{QF}{|Q|}\sqrt{-K}\sqrt[4]{-K} \tag{3.1.27}$$

elde edilir.

$(iii) \Longrightarrow (i)$ Açıktır.

$(ii) \Longrightarrow (iv)$ Bir doğrunun vida hareketi ile elde edilen açılabilir olmayan regle yüzeyde $Q$, $J$, $F$ katsayıları sabit olur. Tersine $Q$, $J$, $F$ fonksiyon değerleri sabit ise regle yüzey bir doğrunun vida hareketi ile tanımlanan regle yüzeydir. $\square$

Özel olarak (3.1.27) denkleminde $J = 0$ durumunda aşağıdaki basit denklemi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
2H\sqrt[4]{Q^2} &= J\sqrt[4]{-K} - \frac{Q}{|Q|}F\sqrt{-K}\sqrt[4]{-K} \\
2H\sqrt[4]{Q^2} &= 0\sqrt[4]{-K} - 1.F\sqrt[4]{-K^3} \\
2H\sqrt[4]{Q^2} &= -F\sqrt[4]{-K^3}
\end{aligned}$$

eşitliğin her iki tarafının 4.dereceden kuvveti alınırsa

$$\begin{aligned}
\left(2H\sqrt[4]{Q^2}\right)^4 &= \left(-F\sqrt[4]{-K^3}\right)^4 \\
16H^4Q^2 &= F^4\left(-K^3\right)
\end{aligned}$$

eşitliğin her iki tarafı $F^4$ ile bölünürse

$$-K^3 = 16\frac{Q^2}{F^4}H^4$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.1.27) denkleminde $F = 0$ durumunda aşağıdaki basit denklemi yazabiliriz:

$$\begin{aligned}
2H\sqrt[4]{Q^2} &= J\sqrt[4]{-K} - \frac{Q}{|Q|}F\sqrt{-K}\sqrt[4]{-K} \\
2H\sqrt[4]{Q^2} &= J\sqrt[4]{-K} - \frac{Q}{|Q|}.0.\sqrt{-K}\sqrt[4]{-K} \\
2H\sqrt[4]{Q^2} &= J\sqrt[4]{-K}
\end{aligned}$$

eşitliğin her iki tarafının 4.dereceden kuvveti alınırsa

$$\left(2H\sqrt[4]{Q^2}\right)^4 = \left(J\sqrt[4]{-K}\right)^4$$
$$16H^4Q^2 = J^4\left(-K\right)$$

eşitliğin her iki tarafı $J^4$ ile bölünürse

$$-K = 16\frac{Q^2}{J^4}H^4$$

elde edilir. Eğer $J = F = 0$ olması (3.1.27) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
2H\sqrt[4]{Q^2} &= J\sqrt[4]{-K} - \frac{Q}{|Q|}F\sqrt{-K}\sqrt[4]{-K} \\
2H\sqrt[4]{Q^2} &= 0.\sqrt[4]{-K} - \frac{Q}{|Q|}.0.\sqrt{-K}\sqrt[4]{-K} \\
2H\sqrt[4]{Q^2} &= 0 \\
H &= 0
\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız ki bu ise yüzeyin **sağ helikoid yüzey** olması demektir[10].

## 3.2 Regle II.Weingarten Yüzeyler

**Teorem 3.2.1.** *$M$ bir regle yüzey ve $M$ nin Gauss eğriliği $K$ her yerde sıfırdan farklı olsun. Bu durumda $M$ bir II.Weingarten yüzeydir ancak ve ancak aşağıdaki durumlardan birisi sağlanır:*

*(i)* $Q \neq 0$ *ve* $Q$, $J$, $F$ *sabittir.*

*(ii)* $JQ' = J'Q, \qquad 2Q'F = QF', \qquad 2Q'^2 = QQ'', \; Q \neq 0$

*veya eğer* $Q', J, F \neq 0$ *ise*

$$\frac{F}{F'} = 2\frac{J'}{J} = 2\frac{Q'}{Q} = \frac{Q''}{Q'}$$

*sağlanır.*

*(iii)* $J = F = 0$ *ve* $Q \neq 0$ *keyfi bir değerdir.*

*Bu durumda* $M$ *yüzeyi* $K_{II} = 2H$ *bağıntısını sağlayan klasik sağ konoiddir[10].*

**İspat.** $M$ regle yüzeyinin ikinci Gauss eğriliği $K_{II}$ ve $Q \neq 0$ ile başlayabiliriz.

$$K_{II} = \frac{1}{(eg - f^2)^2} \left\{ \begin{vmatrix} -\frac{1}{2}e_{vv} + f_{uv} - \frac{1}{2}g_{uu} & \frac{1}{2}e_u & f_u - \frac{1}{2}e_v \\ f_v - \frac{1}{2}g_u & e & f \\ \frac{1}{2}g_v & f & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}e_v & \frac{1}{2}g_v \\ \frac{1}{2}e_v & e & f \\ \frac{1}{2}g_u & f & g \end{vmatrix} \right\} \tag{3.2.1}$$

dır.

$$K_{II} = \frac{1}{f^4} \left\{ f f_v \left( f_u - \frac{1}{2}e_v \right) - f^2 \left( -\frac{1}{2}e_{vv} + f_{uv} \right) \right\}$$

$$K_{II} = \frac{1}{2Q^2D^3} \left( Jv^4 + Q\left(2QJ + F\right)v^2 - 2Q^2Q'v + Q^3\left(QJ - F\right) \right) \tag{3.2.2}$$

dır. Şimdi $K_{II}$ nin tanımında olan bileşenleri hesaplayalım. İkinci temel formun bileşenlerinden

$$e = \frac{1}{D}\left( Q\left(F - QJ\right) - Q'v + Jv^2 \right)$$

olduğundan $e$ nin $u$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned} e_u =& \frac{1}{D^2}\left[ \left( Q\left(F - QJ\right) - Q'v + Jv^2 \right)_u D - \left( Q\left(F - QJ\right) - Q'v + Jv^2 \right) D_u \right] \\ =& \frac{1}{D^3}[J'v^4 - Q''v^3 + \left(Q'F + QF' - 3QQ'J\right)v^2 + \left(-Q^2Q'' + QQ'^2\right)v \\ & - Q^4J' + Q^3F' - Q^3Q'J] \end{aligned}$$

elde edilir. $e$ nin $v$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned} e_v &= \frac{1}{D^2}\left[ \left( Q\left(F - QJ\right) - Q'v + Jv^2 \right)_v D - \left( Q\left(F - QJ\right) - Q'v + Jv^2 \right) D_v \right] \\ &= \frac{1}{D^3}\left[ Jv^3 + \left(-QF + 3Q^2J\right)v - Q^2Q' \right] \end{aligned}$$

elde edilir. $e_v$ nin $v$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned} e_{vv} &= \frac{1}{D^6}\left[ \left(3Jv^2 + 3Q^2J - QF\right)D^3 - \left(Jv^3 + \left(-QF + 3Q^2J\right)v - Q^2Q'\right)3D^2D_v \right] \\ &= \frac{1}{D^5}\left[ \left(-3Q^2J + 2QF\right)v^2 + 3Q^2Q'v + 3Q^4J - Q^3F \right] \end{aligned}$$

bulunur. İkinci temel formun bileşenlerinden

$$f=\frac{Q}{D}$$

olduğu gözönüne alınırsa $f$ nin $u$ parametresine göre kısmi türevi

$$f_u=\frac{1}{D^2}\left(Q_uD-QD_u\right)=\frac{Q'v^2}{D^3}$$

bulunur. $f$ nin $v$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$f_v=\frac{1}{D^2}\left(Q_vD-QD_v\right)=\frac{-Qv}{D^3}$$

elde edilir. $f_u$ nun $v$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$f_{uv}=\frac{1}{D^6}\left(2Q'vD^3-Q'v^2 3D^2D_v\right)=\frac{1}{D^5}\left(-Q'v^3+2Q^2Q'v\right)$$

bulunur. Ayrıca ikinci temel formun bileşenlerinden $g=0$ olduğundan $g_u=g_v=0$ olur. İkinci temel formun bileşenlerinden yararlanarak bulmuş olduğumuz bu değerler (3.2.1) de yerine yazılırsa

$$K_{II}=\frac{1}{2Q^2D^3}\left[Jv^4+Q\left(2QJ+F\right)v^2-2Q^2Q'v+Q^3\left(QJ-F\right)\right] \qquad (3.2.3)$$

(3.2.2) elde edilir. Buna göre (3.2.3) ifadesinin $v$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned}(K_{II})_v=&\frac{1}{(2Q^2D^3)^2}\left[\left(4Jv^3+2Q\left(2QJ+F\right)v-2Q^2Q'\right)2Q^2D^3\right.\\&\left.-\left(Jv^4+Q\left(2QJ+F\right)v^2-2Q^2Q'v+Q^3\left(QJ-F\right)\right)2Q^2 3D^2D_v\right]\end{aligned}$$

olur. Burada (3.1.20) ifadesi kullanılır ve $D^2=Q^2+v^2$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}(K_{II})_v=&\frac{1}{2Q^2D^5}\left[Jv^5+\left(2Q^2J-QF\right)v^3+4Q^2Q'v^2+\left(Q^4J+5Q^3F\right)v\right.\\&\left.-2Q^4Q'\right] \qquad (3.2.4)\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde (3.2.3) ifadesinin $u$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned}(K_{II})_u=&\frac{1}{(2Q^2D^3)^2}\left[\left(Jv^4+Q\left(2QJ+F\right)v^2-2Q^2Q'v+Q^3\left(QJ-F\right)\right)_u 2Q^2D^3\right.\\&\left.-\left(Jv^4+Q\left(2QJ+F\right)v^2-2Q^2Q'v+Q^3\left(QJ-F\right)\right)\left(2Q^2D^3\right)_u\right]\end{aligned}$$

ifadesine ulaşırız. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}(K_{II})_u = \frac{2QD}{4Q^4D^6}&\left[J'v^4 + \left(4QQ'J + 2Q^2J' + Q'F + QF'\right)v^2\right.\\
&+ \left(-4QQ'^2 - 2Q^2Q''\right)v + \left(4Q^3Q'J + Q^4J' - 3Q^2Q'F - Q^3F'\right)QD^2\\
&\left.- \left(Jv^4 + \left(2Q^2J + QF\right)v^2 - 2Q^2Q'v + Q^4J - Q^3F\right)\left(2Q'D^2 + 3Q^2Q'\right)\right]\end{aligned}$$

olur. (3.1.4) ifadesi burada kullanılırsa

$$\begin{aligned}(K_{II})_u =&\frac{1}{2Q^3D^5}\left[(QJ' - 2Q'J)v^6 + \left(3Q^3J' - 5Q^2Q' - QQ'F + Q^2F'\right)v^4\right.\\
&-2Q^3Q'^2v^3 + \left(-Q^4Q'J + 3Q^5J' - 5Q^3Q'F\right)v^2 + \left(6Q^4Q'^2 - 2Q^5Q'\right)v\\
&\left.+Q^7J' - Q^6Q'J + 2Q^5Q'F - Q^6F'\right] \qquad (3.2.5)\end{aligned}$$

olarak elde edilir. Şimdi de bulmuş olduğumuz bu sonuçları

$$(K_{II})_u H_v - (K_{II})_v H_u = 0$$

ifadesinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}&(K_{II})_u H_v - (K_{II})_v H_u\\
=&\frac{1}{2Q^3D^5}\left((QJ' - 2Q'J)v^6 + \left(3Q^3J' - 5Q^2Q' - QQ'F + Q^2F'\right)v^4 - 2Q^3Q'^2v^3\right.\\
&+ \left(-Q^4Q'J + 3Q^5J' - 5Q^3Q'F\right)v^2 + \left(6Q^4Q'^2 - 2Q^5Q'\right)v\\
&\left.+Q^7J' - Q^6Q'J + 2Q^5Q'F - Q^6F'\right]\\
&.\left(\frac{1}{2D^5}\left(-Jv^3 + 2Q^{'}v^2 + Q\left(-QJ + 3F\right)v - Q^2Q^{'}\right)\right)\\
&-\frac{1}{2Q^2D^5}\left[Jv^5 + \left(2Q^2J - QF\right)v^3 + 4Q^2Q'v^2 + \left(Q^4J + 5Q^3F\right)v - 2Q^4Q'\right]\\
&\frac{1}{2D^5}\left(J'v^4 - Q''v^3 + \left(-QQ'J + 2Q^2J' - Q'F - QF'\right)v^2 + \left(3QQ'^2 - Q^2Q''\right)v\right.\\
&\left.+Q^2\left(-QQ'J + Q^2J' + 2Q'F - QF'\right)\right)\end{aligned}$$

olur. Bu $v$ ye bağlı polinomda $v^9$, $v^8$, $v^0$ hariç diğer katsayıları sıfırdır. Buna göre $M$ nin II.Weingarten yüzeyi olması için

$v^9 : 2J\left(JQ' - J'Q\right) = 0$

$v^8 : 2QQ'J' - 4Q'^2J + QQ''J = 0$

$v^0 : Q^7Q'(-QQ'J + Q^2J' + 2Q'F - QF') = 0$

olmalıdır. Bu durumları ayrı ayrı inceleyelim. O halde $Q' \equiv 0$ olsun. Bu durumda $J' = 0$ olur. Buradan

$$(K_{II})_u H_v - (K_{II})_v H_u = \frac{F'(QJ+F)}{2D^6}v$$

olduğu sonucuna varılır. Sonucun sıfır çıkması ise $F$ nin sabit olmasına bağlıdır. Bu nedenle $Q$, $J$, $F$ değerleri sabittir. Bu ise teoremin $(i)$ durumudur. $Q' \not\equiv 0$ durumunda $Q' \neq 0$ ile bir noktanın komşuluğunu düşünelim. Birinci denklemde $J = 0$ veya $JQ' - J'Q = 0$ olmalıdır. $JQ' - J'Q = 0$ ve $J \neq 0$ olduğunu kabul edelim. O halde ikinci denklemden $QQ'' = 2Q'^2$ ve üçüncü denklemden $QF' = 2Q'F$ elde edilir. Böylece

$$(K_{II})_u = -v\frac{Q'}{Q}(K_{II})_v \ ,$$
$$H_u = -v\frac{Q'}{Q}H_v$$

olur ve $(K_{II})_u H_v - (K_{II})_v H_u = 0$ dır. Bu ise teoremin $(ii)$ durumudur.

$Q' \not\equiv 0$ ve $J \equiv 0$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}(K_{II})_u H_v - (K_{II})_v H_u =& \frac{1}{4Q^3D^{10}}\left(2\left(Q^2Q'F' - 2QQ'^2F\right) + 2QQ'^2F - Q^2Q''F\right)v^6 \\ &+ Q^2F(-4Q'F + 2QF')v^5 \\ &+ Q^3\left(\left(3QQ'F' - 6Q'^2F\right) + \left(4Q'^2F - 2QQ''F\right)\right)v^4 \\ &+ Q^4F(-8Q'F + 4QF')v^3 + Q^5F\left(2Q'^2 - QQ''\right)v^2 \\ &+ Q^6F(2QF' - 4Q'F)v + Q^7Q'(2Q'F - QF')\end{aligned}$$

sonucuna ulaşırız.

Eğer $F = 0$ ise bu ifade sıfır olur. Bu durumda $Q$ için herhangi bir şart olmaksızın $K_{II} = 2H$ durumu elde ederiz. Bu durum ise teoremin $(iii)$ dir.

Eğer $F \neq 0$ ise aynı şekilde $2Q'F = QF'$ve $2Q'^2 = QQ''$ denklemlerini elde ederiz. Bu ise teoremin $(ii)$ durumunun çalışmasına yol açar. Bunun tersi durumunda yukarıdaki denklemlerle kolayca elde edilir. Böylece teorem (3.2.1) ispatlanmış oldu[10]. □

**Örnek 3.2.1.**

$$J = 0, \ \frac{Q''}{Q'} = 2\frac{Q'}{Q} = \frac{F'}{F}$$

*özel durumunu sağlayacak şekilde bir örnek verelim.*

$$\frac{Q''}{Q'} = 2\frac{Q'}{Q} = \frac{F'}{F}$$

*diferansiyel denkleminde*

$$Q(u) = \frac{a}{u}$$
$$F(u) = \frac{b}{u^2},$$

*bir çözüm olur, burada $a$ ve $b$ sıfırdan farklı reel sabitlerdir.*

$$X(u) = (\cos u, \sin u, 0)$$

*küre üzerinde büyük çember $J = 0$ şartını sağlar. Buna göre $\alpha(u)$ eğrisi*

$$\alpha' = FX + QX \wedge X'$$

*olarak seçilirse*

$$\alpha' = \left(\frac{b}{u^2}\cos u, \frac{b}{u^2}\sin u, \frac{a}{u}\right)$$

*olur. Buradan*

$$\alpha(u) = \left(b\int_{u_0}^{u} \frac{\cos t}{t^2}dt, b\int_{u_0}^{u} \frac{\sin t}{t^2}dt, a\log|u|\right)$$

*elde edilir. Ancak $\alpha(u)$ nun tanımlanabilmesi için $u \neq 0$ ($u > 0$ veya $u < 0$) olmalıdır. Sonuç olarak $\mathbb{E}^3$ de regle yüzey tanımlanmış olur[10].*

## 3.3 Kuadratik Regle Yüzeyler

**Tanım 3.3.1.** $3-$*boyutlu Öklid uzayı* $\mathbb{E}^3$ *de açılabilir olmayan bir regle yüzey her doğrultman boyunca*

$$aK_{II} + bH = sabit, \quad 2a + b \neq 0 \tag{3.3.1}$$

*denklemini sağlıyor ise $M$ ye **doğrusal II. Weingarten yüzey** denir. Bu tip yüzeyler bir önceki alt bölümde incelendi. Bu* (3.3.1) *ile belirtilen regle yüzeyin $K_{II}$ ikinci Gauss eğriliğinin sıfır olması durumunda yüzey bir **Helikoid** olur[12].*

**Tanım 3.3.2.** $3-$*boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de her doğrultman boyunca*

$$aH + bK = sabit, \quad a \neq 0, \tag{3.3.2}$$

$$aK_{II} + bK = sabit, \quad a \neq 0, \tag{3.3.3}$$

*şartını sağlayan açılabilir olmayan regle yüzey denklemlerdir. Bu iki denklemden* (3.3.2) *deki birinci denklemde bahsedilen yüzeye **doğrusal Weingarten yüzey** adı verilir[13].*

**Tanım 3.3.3.** $3-$*boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$de*

$$aH^2 + 2bHK + cK^2 = sabit, \quad a \neq 0, \tag{3.3.4}$$

*şartını sağlayan açılabilir olmayan bir regle yüzeye $HK-$**kuadratik yüzeyi** denir[14]**.***

**Tanım 3.3.4.** $3-$*boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$de*

$$aH^2 + 2bHK_{II} + cK_{II}^2 = sabit, \quad a \neq -4\,(b+c)\,, \; c \neq 0 \tag{3.3.5}$$

*şartını sağlayan açılabilir olmayan bir regle yüzeye $HK_{II}-$**kuadratik yüzeyi** denir[14].*

**Tanım 3.3.5.** $3-$*boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$de*

$$aK^2 + 2bKK_{II} + cK_{II}^2 = sabit, \quad c \neq 0 \tag{3.3.6}$$

*şartını sağlayan açılabilir olmayan bir regle yüzeye $KK_{II}-$**kuadratik yüzeyi** denir[14].*

**Teorem 3.3.1.** *3−boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$ de $M$ açılabilir olmayan bir regle yüzey olsun. Bu durumda $M$ nin bir $HK-$kuadratik yüzeyi olması için gerek ve yeter şart $M$ nin bir helikoidin açık bir parçası olmasıdır[14].*

**İspat.** $M \subset \mathbb{E}^3$ de açılabilir olmayan bir regle yüzey ve $M$ yüzeyi

$$f = f(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$$

ile verilsin, burada $\langle X, X\rangle = \langle X', X'\rangle = 1$ ve $\langle \alpha', X'\rangle = 0$ olsun. Kabul edelim ki açılabilir olmayan regle yüzey $HK-$kuadratik yüzey olsun. (3.3.4) ifadesinin $v$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$2aHH_v + 2b(H_vK + HK_v) + 2cKK_v = 0$$

veya

$$aHH_v + b(H_vK + HK_v) + cKK_v = 0$$

elde edilir. $(3.1.12), (3.1.13)\,(3.1.22)$ ve $(3.1.24)$ den

$$\begin{aligned}
&a\left(\frac{1}{2D^3}\left(Jv^2 - Q'v + Q(QJ - F)\right)\right) \\
&.\left(\frac{1}{2D^5}\left(-Jv^3 + 2Q'v^2 + Q(-QJ + 3F)v - Q^2Q'\right)\right) \\
&+ b\left[\left(\frac{1}{2D^5}\left(-Jv^3 + 2Q'v^2 + Q(-QJ + 3F)v - Q^2Q'\right)\right)\left(-\frac{Q^2}{D^4}\right)\right. \\
&\left.+\left(\frac{1}{2D^3}\left(Jv^2 - Q'v + Q(QJ - F)\right)\right)\frac{4Q^2}{D^6}v\right] \\
&+ c\left(-\frac{Q^2}{D^4}\right)\left(\frac{4Q^2}{D^6}v\right) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}
-aD^2&\left[J^2v^5 - 3Q'Jv^4 - \left(4QJF - 2Q^2J^2 - 2Q'^2\right)v^3 - \left(2Q^2Q'J + 5QQ'F\right)v^2\right. \\
&\left.- \left(Q^2Q'^2 + 4Q^3JF - Q^4J^2 - 3Q^2F^2\right)v - \left(Q^3Q'F - Q^4Q'J\right)\right] \\
+2bD&\left(5Q^2Jv^3 - 6Q^2Q'v^2 + \left(5Q^4J - 7Q^3F\right)v + Q^4Q'\right) - 4c\left(4Q^4v\right) = 0
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}
A_1 =& 5Q^2Jv^3 - 6Q^2Q'v^2 + \left(5Q^4J - 7Q^3F\right)v + Q^4Q', \\
A_2 =& J^2v^5 - 3Q'Jv^4 - \left(4QJF - 2Q^2J^2 - 2Q'^2\right)v^3 - \left(2Q^2Q'J + 5QQ'F\right)v^2 \\
& - \left(Q^2Q'^2 + 4Q^3JF - Q^4J^2 - 3Q^2F^2\right)v - \left(Q^3Q'F - Q^4Q'J\right), \\
A_3 =& 4Q^4v. \qquad (3.3.7)
\end{aligned}$$

denilirse

$$-aD^2A_2 + 2bDA_1 - 4cA_3 = 0$$

bulunur. Burada negatif işaretli ifadeler eşitliğin sağına yazılırsa

$$2bDA_1 = aD^2A_2 + 4cA_3$$

eşitliğin her iki tarafının karesi alınırsa

$$4b^2D^2A_1^2 = a^2D^4A_2^2 + 8acD^2A_2A_3 + 16c^2A_3^2, \qquad (3.3.8)$$

olur. (3.1.4) ve (3.3.7) den (3.3.8) denkleminin en yüksek mertebesi $v^{14}$ ün katsayıları için

$$a^2J^4 = 0$$

elde edilir. Burada $a \neq 0$ olduğundan $J = 0$ olur. Dolayısıyla, (3.3.7)

$$\begin{aligned}
A_1 &= -6Q^2Q'v^2 - 7Q^3Fv + Q^4Q', \\
A_2 &= -2Q'^2v^3 + 5QQ'^2Fv^2 - \left(Q^2Q'^2 - 3Q^2F^2\right)v - Q^3Q'F, \\
A_3 &= 4Q^4v. \qquad (3.3.9)
\end{aligned}$$

haline gelir. Ayrıca (3.3.9)dan (3.3.8) denkleminin en yüksek mertebesi $v^{10}$ un katsayısı için

$$4a^2Q'^4 = 0,$$

bulunur. $a \neq 0$ olduğundan $Q' = 0$ dır. Bu nedenle (3.3.9) tekrar düzenlenirse

$$A_1 = -7Q^3 F v,$$

$$A_2 = 3Q^2 F^2 v,$$

$$A_3 = 4Q^4 v.$$

elde edilir. Böylece (3.3.8) den $F = 0$ ve $c = 0$ olmalıdır. Sonuç olarak, $K_{II} = H = 0$ dır. Bu durumda yüzey minimaldir. Yani helikoiddir. □

**Sonuç 3.3.1.** *3-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$de açılabilir olmayan bir regle yüzeyde*

$(i)$ $K_{II} = 0$ *ancak ve ancak* $H = 0$ *dır.*

$(ii)$ $K_{II} = H$ *ancak ve ancak* $K_{II} = H = 0$ *dır[14].*

**Teorem 3.3.2.** $3-$*boyutlu Öklid uzayı* $\mathbb{E}^3$ *de* $M$ *açılabilir olmayan bir regle yüzey olsun. Öyleki* $M$ *yüzeyinin* $HK_{II}-$*quadratik yüzeyi olması için gerek ve yeter şart* $M$ *nin bir helikoidin açık bir parçası olmasıdır[14].*

**İspat.** Kabul edelim ki $HK_{II}-$Kuadratik yüzeyi açılabilir olmayan bir regle yüzey olsun. O halde (3.3.5) denkleminin $v$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$2aHH_v + 2b\left(H_v K_{II} + H\left(K_{II}\right)_v\right) + 2cK_{II}\left(K_{II}\right)_v = 0$$

veya

$$aHH_v + b\left(H_v K_{II} + H\left(K_{II}\right)_v\right) + cK_{II}\left(K_{II}\right)_v = 0$$

elde edilir. (3.1.13),(3.1.24),(3.2.3) ve (3.2.4) de verilen ifadeler yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
&a\left[\left(\frac{1}{2D^2}\left(Jv^2-Q^{'}v+Q\left(QJ-F\right)\right)\right)\right.\\
&\left.\cdot\left(\frac{1}{2D^5}\left(-Jv^3+2Q^{'}v^2+Q\left(-QJ+3F\right)v-Q^2Q^{'}\right)\right)\right]\\
&+b\left[\left(\frac{1}{2D^5}\left(-Jv^3+2Q^{'}v^2+Q\left(-QJ+3F\right)v-Q^2Q^{'}\right)\right)\right.\\
&\left(\frac{1}{2Q^2D^3}\left[Jv^4+Q\left(2QJ+F\right)v^2-2Q^2Q'v+Q^3\left(QJ-F\right)\right]\right)\\
&+\frac{1}{2D^2}\left(Jv^2-Q^{'}v+Q\left(QJ-F\right)\right)\\
&\left.\left(\frac{1}{2Q^2D^5}\left(Jv^5+Q\left(2QJ-F\right)v^3+4Q^2Q'v^2+Q^3\left(5F+QJ\right)v-2Q^4Q'\right)\right)\right]\\
&+c\left[\left(\frac{1}{2Q^2D^3}\left[Jv^4+Q\left(2QJ+F\right)v^2-2Q^2Q'v+Q^3\left(QJ-F\right)\right]\right)\right.\\
&\left.\left(\frac{1}{2Q^2D^5}\left(Jv^5+Q\left(2QJ-F\right)v^3+4Q^2Q'v^2+Q^3\left(5F+QJ\right)v-2Q^4Q'\right)\right)\right]=0
\end{aligned}
$$

denklemi bulunur. Eğer bu denklemde

$$
\begin{aligned}
B_1=&-J^2v^5+3JQ'v^4+\left(4QJF-2Q^2J^2-2Q'^2\right)v^3+\left(2Q^2Q'J-5QQ'F\right)v^2\\
&+\left(Q^2Q'^2+4Q^3JF-Q^4J^2-3Q^2F^2\right)v+\left(Q^3Q'F-Q^4Q'J\right),\\
B_2=&Q'Jv^6+\left(7Q^2Q'J+3QQ'F\right)v^4+\left(8Q^3JF-8Q^2Q'^2+4Q^2F^2\right)v^3\\
&+\left(3Q^4Q'J+18Q^3Q'F\right)v^2+\left(8Q^5JF-8Q^4F^2+4Q^4Q'^2\right)v \qquad (3.3.10)\\
&-3Q^5Q'\left(QJ-F\right),\\
B_3=&J^2v^9+4Q^2J^2v^7+2Q^2Q'Jv^6+\left(6Q^4J^2+4Q^3JF-Q^2F^2\right)v^5\\
&+\left(2Q^4Q'J+6Q^3Q'F\right)v^4+\left(4Q^6J^2+8Q^5JF+6Q^4F^2-8Q^4Q'^2\right)v^3\\
&-\left(2Q^6Q'J+16Q^5Q'F\right)v^2+\left(4Q^6Q'^2+Q^8J^2+4Q^7JF-5Q^6F^2\right)v\\
&-2Q^4Q'\left(Q^4J-Q^3F\right)
\end{aligned}
$$

denilirse

$$aQ^4B_1+bQ^2B_2+cB_3=0 \qquad (3.3.11)$$

bulunur. (3.3.11) denkleminin en yüksek mertebeli $cJ^2v^9$ teriminin başkatsayısı sıfır

$$cJ^2 = 0$$

olur. Bu nedenle $c \neq 0$ olduğundan $J = 0$ dır. Bu sonuç (3.3.11) ifadesinde yazılır ve düzenleme yapılırsa $B_i$ $i = 1, 2, 3$ katsayıları

$$\begin{aligned} B_1 =& -2Q'^2v^3 - 5QQ'Fv^2 + \left(Q^2Q'^2 - 3Q^2F^2\right)v + Q^3Q'F, \\ B_2 =& 3QQ'Fv^4 + \left(-8Q^2Q'^2 + 4Q^2F^2\right)v^3 + 18Q^3Q'Fv^2 \\ & + \left(-8Q^4F^2 + 4Q^4Q'^2\right)v + 3Q^5Q'F, \\ B_3 =& -Q^2F^2v^5 + 6Q^3Q'Fv^4 + \left(6Q^4F^2 - 8Q^4Q'^2\right)v^3 \\ & - 16Q^5Q'Fv^2 + \left(4Q^6Q'^2 - 5Q^6F^2\right)v + 2Q^7Q'F. \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

halini alır. Benzer şekilde (3.3.10) de $J = 0$ ve $F = 0$ yazılırsa

$$\begin{aligned} B_1 &= -2Q'^2v^3 + Q^2Q'^2v \\ B_2 &= -8Q^2Q'^2v^3 + 4Q^4Q'^2v \\ B_3 &= -8Q^4Q'^2v^3 + 4Q^6Q'^2v \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

bulunur. (3.3.13) ifadesi (3.3.11) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & aQ^4\left(-2Q'^2v^3 + Q^2Q'^2v\right) + bQ^2\left(-8Q^2Q'^2v^3 + 4Q^4Q'^2v\right) \\ & + c\left(-8Q^4Q'^2v^3 + 4Q^6Q'^2v\right) = 0 \\ & \left(-2aQ^4Q'^2 - 8bQ^4Q'^2 + -8cQ^4Q'^2\right)v^3 + \left(aQ^6Q'^2 + 4bQ^6Q'^2 + 4cQ^6Q'^2\right)v = 0 \\ & -2Q^4\left[Q'^2(a + 4b + 4c)\right]v^3 + Q^6\left[Q'^2(a + 4b + 4c)\right] = 0 \\ & \left(-2Q^4 + Q^6\right)\left[Q'^2(a + 4b + 4c)\right] = 0 \end{aligned}$$

bulunur. $Q \neq 0$ olduğundan $Q'^2(a + 4b + 4c) = 0$ olduğu kolayca görülür. (3.3.5) deki $c \neq 0$ ve $a \neq -4(b + c)$ kabullerimize göre $Q' = 0$ olmalıdır. Sonuç olarak (3.1.8) yardımıyla bütün katsayılar sıfır olacağından Ortalama eğriliği $H = 0$ olur. Yani yüzey minimaldir. $\square$

Teorem 3.3.2 den aşağıdaki sonucu elde ederiz.

**Sonuç 3.3.2.** *$a = -4(b+c)$ ise $J = F = 0$ ile keyfi $Q'$ değerleri yardımıyla $K_{II} = 2H$ denklemi bulunabilir[14].*

**Örnek 3.3.1.** *Genelliği bozmaksızın, $X(0) = (1,0,0)$ olarak seçelim. Yani, $X'' = -X - JX \wedge X'$ ile $X'' = -X$ elde edebiliriz.*

$$X(u) = (d_1 \sin u, d_2 \sin u, \cos u + d_3 \sin u)$$

*denklemi için $\langle X, X \rangle = 1$ olduğundan $d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ yazılabilir. Bu birim vektörü sağlayan $d_1$, $d_2$, $d_3$ ifadeleri sabittir. $d_1^2 + d_2^2 = 0$ ve $d_3 = 0$ olmalıdır. Bu ifadeler yerine yazılırsa*

$$X(u) = \left( d_1 \sin u, \pm\sqrt{1-d_1^2} \sin u, \cos u \right),$$

*burada $-1 \leq d_1 \leq 1$ dir. Diğer taraftan $\alpha' = FX + QX \wedge X'$ ifadesine göre*

$$\alpha(u) = \left( \mp\sqrt{1-d_1^2}, d_1, 0 \right) f(u) + E,$$

*olur. Burada $f(u) = \int Q(u)\, du$ özel bir fonksiyon ve $E = (e_1, e_2, e_3)$ ise sabit vektördür. Yani, $M$ yüzeyi parametre ile gösterilirse*

$$f(u,v) = \Big( \mp\sqrt{1-d_1^2} f(u) + v d_1 \sin u + e_1, d_1 f(u) \mp v\sqrt{1-d_1^2} \sin u + e_2,$$
$$v \cos u + e_3 \big)$$

*olarak yazılabilir. Burada $-1 \leq d_1 \leq 1$, $f(u) = \int Q(u)\, du$ ve $(e_1, e_2, e_3)$ sabit vektördür.*

*Eğer $d_1 = 0$ veya $d_1 = \pm 1$ durumunda $M$ yüzeyi bir sağ konoiddir. Bu nedenle $K_{II} = 2H$ denklemi bir sağ konoid için yeterlidir[14].*

**Teorem 3.3.3.** *$3-$boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{E}^3$de $M$ açılabilir olmayan bir regle yüzey olsun. Öyleki $M$ yüzeyinin $KK_{II}-$kuadratik yüzeyi olması için gerek ve yeter şart $M$ nin bir helikoidin açık bir parçası olmasıdır[14].*

**İspat.** (3.3.6) denkleminin $v$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$2aKK_v + 2b\left(K_vK_{II} + K\left(K_{II}\right)_v\right) + 2cK\left(K_{II}\right)_v = 0$$

veya

$$aKK_v + b\left(K_vK_{II} + K\left(K_{II}\right)_v\right) + cK\left(K_{II}\right)_v = 0$$

elde edilir. (3.1.5),(3.1.7),(3.1.4),(3.1.12),(3.1.22),(3.2.2) ve (3.2.4) ifadeleri denklemde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& a\left[\left(-\frac{Q^2}{D^4}\right)\left(\frac{4Q^2}{D^6}v\right)\right] \\
& + b\left[\left(\frac{4Q^2}{D^6}v\right)\left(\frac{1}{2Q^2D^3}\left(Jv^4 + Q\left(2QJ+F\right)v^2 - 2Q^2Q'v + Q^3\left(QJ-F\right)\right)\right)\right. \\
& \left. + \left(-\frac{Q^2}{D^4}\right)\frac{1}{2Q^2D^5}\left(Jv^5 + Q\left(2QJ-F\right)v^3 + 4Q^2Q'v^2 + Q^3\left(5F+QJ\right)v - 2Q^4Q'\right)\right] \\
& + c\left[\left(-\frac{Q^2}{D^4}\right)\left(\frac{1}{2Q^2D^5}\left(Jv^5 + Q\left(2QJ-F\right)v^3 + 4Q^2Q'v^2\right.\right.\right. \\
& \left.\left.\left. + Q^3\left(5F+QJ\right)v - 2Q^4Q'\right)\right)\right] = 0
\end{aligned}$$

denklemi bulunur. Eğer bu denklemde

$$\begin{aligned}
C_1 &= -4Q^4v, \qquad (3.3.14)\\
C_2 &= 3Jv^5 + \left(6Q^2J + 5QF\right)v^3 - 12Q^2Q'v^2 + \left(3Q^4J - 9Q^3F\right)v + 2Q^4Q', \\
C_3 &= J^2v^9 + 4Q^2J^2v^7 + 2Q^2Q'Jv^6 + \left(2Q^3J^2 + 4Q^3JF + 2Q^2J - QF\right)v^5 \\
&\quad + \left(2Q^4Q'J + 6Q^3Q'F\right)v^4 + \left(6Q^6J^2 + 8Q^5JF + 6Q^4F^2 - 8Q^4Q'^2\right)v^3 \\
&\quad - \left(2Q^6Q'J + 16Q^5Q'F\right)v^2 + \left(4Q^6Q'^2 + Q^8J^2 + 4Q^7JF - 5Q^6F^2\right)v \\
&\quad - 2Q^4Q'\left(Q^4J - Q^3F\right).
\end{aligned}$$

denilirse

$$a\left(4Q^4C_1\right) + b\left(2Q^4DC_2\right) + c\left(D^2C_3\right) = 0 \qquad (3.3.15)$$

elde edilir. Buradan $b\left(2Q^4DC_2\right)$ ifadesi eşitliğin sağ tarafına alınırsa

$$4aQ^4C_1 + cD^2C_3 = -2bQ^4DC_2$$

eşitliğinin her iki tarafının karesi alınırsa

$$16a^2Q^8C_1^2 + c^2D^4C_3^2 + 8acQ^4D^2C_1C_3 = 4b^2Q^8D^2C_2^2$$

eşitliğin sağındaki $(4b^2Q^8D^2C_2^2)$ ifadesi sol tarafta yazılırsa

$$16a^2Q^8C_1^2 + c^2D^4C_3^2 + 8acQ^4D^2C_1C_3 - 4b^2Q^8D^2C_2^2 = 0 \tag{3.3.16}$$

denklemini elde ederiz. Bu durumda $J = F = Q' = 0$ ve $a = 0$ olur. Sonuç olarak (3.1.13) yardımıyla bütün katsayılar sıfır olacağından ortalama eğriliği $H = 0$ olur. Yani yüzey minimaldir. □

**Teorem 3.3.4.** 3*−boyutlu Öklid uzayı* $\mathbb{E}^3$*de*

$$K_{II} = KH \tag{3.3.17}$$

*şartını sağlayan bir açılabilir olmayan regle yüzey bir helikoidin parçasıdır[15].*

**İspat.** (3.3.17) denkleminin $v$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$(K_{II})_v = K_vH + KH_v$$

dir ve buradan

$$(K_{II})_v - K_vH - KH_v = 0$$

bulunur. Bu denklemde (3.1.12), (3.1.13), (3.1.22), (3.1.24) ve (3.2.4) deki değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2Q^2D^5}\left(Jv^5 + Q\left(2QJ - F\right)v^3 + 4Q^2Q'v^2 + Q^3\left(5F + QJ\right)v - 2Q^4Q'\right) \\
&-\left(\frac{4Q^2}{D^6}v\right)\left(\frac{1}{2D^2}\left(Jv^2 - Q^{'}v + Q\left(QJ - F\right)\right)\right) \\
&-\left(-\frac{Q^2}{D^4}\right)\left(\frac{1}{2D^5}\left(-Jv^3 + 2Q'v^2 + Q\left(-QJ + 3F\right)v - Q^2Q'\right)\right) = 0
\end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned}
&\frac{D^4}{2Q^2D^9}\left(Jv^5 + Q\left(2QJ - F\right)v^3 + 4Q^2Q'v^2 + Q^3\left(5F + QJ\right)v - 2Q^4Q'\right) \\
&-\frac{4Q^4v}{2Q^2D^9}\left(\left(Jv^2 - Q^{'}v + Q\left(QJ - F\right)\right)\right) \\
&+\frac{Q^4}{2Q^2D^9}\left(-Jv^3 + 2Q'v^2 + Q\left(-QJ + 3F\right)v - Q^2Q'\right) = 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki tarafı $2Q^2D^9$ ile çarpılırsa ve (3.1.4) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
&Jv^9 + \left(4Q^2J - QF\right)v^7 + 4Q^2Q'v^6 + \left(6Q^4J + 3Q^3F\right)v^5 + 6Q^4Q'v^4 \\
&+ \left(4Q^6J + 9Q^5F - 5Q^4J\right)v^3 + 6Q^4Q'v^2 + \left(5Q^7F + Q^8J + 7Q^5F - 5Q^6J\right) \\
&- \left(2Q^8Q' + Q^6Q'\right) = 0
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu denklemin $v$ ye göre bir polinomdur. O halde bu polinomun katsayıları sıfır olacağından

$v^9 : J = 0,$

$v^7 : 4Q^2J - QF = 0,$

$v^6 : 4Q^2Q' = 0,$

$v^5 : 6Q^4J + 3Q^3F = 0,$

$v^4 : 6Q^4Q' = 0,$

$v^3 : 4Q^6J + 9Q^5F - 5Q^4J = 0,$

$v^2 : 6Q^4Q' = 0,$

$v^1 : 5Q^7F + Q^8J + 7Q^5F - 5Q^6J = 0,$

$v^0 : Q^8Q' + Q^6Q' = 0$

elde edilir. Bu durumda $v$ kuvvet katsayılarının sıfır olması için $J = F = Q' = 0$ olması gerekir. Bu nedenle (3.2.2) yardımıyla $K_{II}$ ikinci Gauss eğriliği ve (3.1.13) yardımıyla $H$ ortalama eğriliği de sıfıra eşit olur. Sonuç olarak $M$ yüzeyi bir Helikoidin parçasıdır. $\square$

# 4. $\mathbb{E}_1^3$ MİNKOWSKİ UZAYINDA WEİNGARTEN REGLE YÜZEYLER

Bu bölümde 3-boyutlu Lorentzian (Minkowski) uzayında Weingarten tipi regle yüzeyler incelenecektir. $\mathbb{E}_1^3$ de bir $M$ regle yüzeyi

$$f(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$$

şeklinde alınacak ve $\alpha$ eğrisi ile $X$ vektörünün causal karakterlerinin durumuna göre irdelemeler yapılacaktır.

## 4.1 Lorentzian Hareketler Grubu

**Tanım 4.1.1.** *Lorentzian 3-uzayda bir $\ell$ ekseni etrafındaki Lorentzian dönme, dönme eksenin timelike, spacelike veya null olma durumuna göre sırasıyla aşağıdaki şekilde verilir:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & \sin u \\ 0 & -\sin u & \cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u & 0 \\ \sinh u & \cosh u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1+\frac{u^2}{2} & -\frac{u^2}{2} & u \\ \frac{u^2}{2} & 1-\frac{u^2}{2} & u \\ u & -u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

*Öklid uzayında olduğu gibi, Lorentzian uzayda da bir vida hareketi eksen doğrultusunda bir öteleme ile bir eksen etrafındaki dönme olarak tanımlanır*[*20*].

*Buna göre Lorentzian dönüşümlerin 1− parametreli gurubu, timelike eksenli bir dönme ile eksen doğrultusunda bir ötelemenin bileşkesi, spacelike eksenli bir dönme ile eksen doğrultusundaki bir ötelemenin bileşkesi ve null eksenli bir dönme ile eksen doğrultusundaki bir ötelemenin bileşkesi olan hareketlerden oluşur.*

**Önerme 4.1.1.** *Bütün Lorentzian hareketlerin gurubu, aşağıdaki belirlenen Lorentzian 3−uzayın 1−parametreli alt guruplarını ihtiva eder:*

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos u & \sin u \\ 0 & -\sin u & \cos u \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} hu \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \cosh u & \sinh u & 0 \\ \sinh u & \cosh u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ hu \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 + \frac{u^2}{2} & -\frac{u^2}{2} & u \\ \frac{u^2}{2} & 1 - \frac{u^2}{2} & u \\ u & -u & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + h \begin{pmatrix} \frac{u^3}{3} + u \\ \frac{u^3}{3} - u \\ u^2 \end{pmatrix}$$

$\mathbb{E}_1^3$ *de* $\ell$ *bir vida hareketinin eksenine bir* $p$ *noktasında dik olacak şekildeki bir doğru olsun. Bu durumda vida hareketi yardımıyla* $\ell$ *den elde edilen yüzey bir minimal yüzeydir, yani* $H$ *Ortalama eğriliği sıfırdır. Minimal regle yüzeyler helikoidlerdir. Lorentzian uzayda helikoidlerin üç tipi vardır. Bunları, genelliği bozmaksızın*

$$\text{\textit{Birinci çeşit:}}\ (u,v) \longrightarrow (hu, v\cos u, v\sin u) \tag{4.1.1}$$

$$\text{\textit{İkinci çeşit:}}\ (u,v) \longrightarrow (v\sinh u, v\cosh u, hu) \tag{4.1.2}$$

$$\text{\textit{Üçüncü çeşit:}}\ (u,v) \longrightarrow (v\cosh u, v\sinh u, hu) \tag{4.1.3}$$

*şeklinde verebiliriz. Bu yüzeylere **Lorentzian Helikoidler** denir[20]. Eğer vida hareketi sadece dönmeden ibaret ise buna **Kübik vida hareketi** denir[20]. Bir* $\ell$

*doğrusunu* $(0,0,v)$ *olarak alalım. Bu durumda Kübik vida hareketi altında*

$$\phi(u,v)=\left(h\left(\frac{u^3}{3}+u\right)+uv,h\left(\frac{u^3}{3}-u\right)+uv,hu^2+v\right) \tag{4.1.4}$$

*şeklinde bir minimal yüzeyi elde edilir. Buna* ***Lie'nin minimal yüzeyi*** *denir*[20].

**Tanım 4.1.2.** $3-$*boyutlu Minkowski uzayı* $\mathbb{E}_1^3$ *de* $M$ *regle yüzeyi*

$$f(u,v)=\alpha(u)+vX(u)$$

*ile verilsin. Burada* $\alpha$ *eğridir ve* $X$ *ise* $\alpha$ *eğrisi boyunca sıfırdan farklı vektör alanını göstermektedir.* $\alpha$ *eğrisine* ***baz eğri*** *ve* $X$ *vektör alanına ise* ***doğrultman vektör alanı*** *denir. Ayrıca* $X$ *i bir eğri olarak görebilir ve buna bir doğrultman eğrisi de denilebilir. Diğer taraftan* $X \wedge X'$ *sıfır olmaz ise* $M$ *regle yüzeyine (*$f$ *parametrelemesine uygun olacak şekilde)* ***non-silindirik yüzey*** *(silindirik olmayan) olduğu söylenebilir; aksi halde (*$f$ *parametrelemesine uygun olacak şekilde)* $M$ *regle yüzeyi* ***silindirik yüzey*** *denir.* $M$ *nin doğrultmanlarını*

$$v \longrightarrow \alpha(u)+vX(u)$$

*ile gösterebiliriz[19].*

## 4.2 Lorentzian 3-Uzayda Regle Weingarten Yüzeylerin Bazı Özellikleri

**Teorem 4.2.1.** $\mathbb{E}_1^3$ *de bir* $M$ *regle yüzeyi*

$$f(u,v)=\alpha(u)+vX(u) \tag{4.2.1}$$

*ile verilsin. Bu durumda;*

$(i)$ *Non-null doğrultmanlı, açılabilir olmayan herhangi bir Weingarten yüzey, bir helikoidal regle yüzeyin bir parçasıdır.*

(*ii*) *Açılabilir olmayan bir minimal regle yüzey ya Cayley regle yüzeyinin ya da Lorentzian helikoidlerin* $(4.1.1), (4.1.2)$ *ve* $(4.1.3)$ *üç tipinden birinin parçasıdır.*

(*iii*) *Null doğrultmanlı bir regle yüzey* $H^2 = K$ *denklemini sağlayan bir Weingarten yüzeydir. Sabit null doğrultmanlı bir regle yüzey flat ve minimaldir*($K = 0$ *ve* $H = 0$)[*20*].

**İspat.** Açılabilir olmayan bir yüzeyde $X$ doğrultman vektörünün sabit olmadığı açıktır. Aksi halde regle yüzey bir silindirin parçası olur. Dolayısıyla, $X' \not\equiv 0$ dır.

**Durum 1**: $X$ ve $X'$ nün non-null olduklarını kabul edelim. Öklid durumundakine benzer olarak

$$\langle X, X\rangle = \epsilon, \qquad \langle X', X'\rangle = \eta, \qquad \langle X \wedge X', X \wedge X'\rangle = -\epsilon\eta \quad \text{ve} \quad \langle \alpha', X'\rangle = 0 \tag{4.2.2}$$

olacak şekilde alalım, burada $\epsilon, \eta \in \{1, -1\}$ dir. Bu durumda $\alpha$ striksiyon çizgisi ve $X$ de yay parametresi ile verilmiş pseudo küresel eğridir. Birinci temel formunun bileşenleri

$$\begin{aligned} E &= \langle f_u, f_u\rangle = \langle \alpha', \alpha'\rangle + \eta v^2, \\ F &= \langle f_u, f_v\rangle = \langle \alpha' + vX', X\rangle = \langle \alpha', X\rangle, \\ G &= \langle f_v, f_v\rangle = \langle X, X\rangle = \epsilon \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

dir. $I$, $M$ nin birinci temel formu olmak üzere

$$\det I = D^2 = EG - F^2 = -\eta Q^2 + \epsilon\eta v^2 \tag{4.2.4}$$

$$D = \sqrt{Q^2 - \epsilon v^2} \tag{4.2.5}$$

$\{X, X', X \wedge X'\}$ bir çatı oluşturur ve çatının elemanlarının işaretleri sırasıyla $\epsilon, \eta, -\epsilon\eta$ dir. Bu çatıya göre

$$\alpha' = \epsilon F X - \epsilon\eta Q X \wedge X' \tag{4.2.6}$$

$$X'' = \epsilon \langle X'', X \rangle X - \epsilon\eta \langle X'', X \wedge X' \rangle X \wedge X' \tag{4.2.7}$$
$$= \epsilon\eta \left(-X + JX \wedge X'\right)$$

$$\alpha' \wedge X = \eta Q X' \tag{4.2.8}$$

olarak yazabiliriz, burada

$$Q = \langle \alpha', X \wedge X' \rangle = \det\left(\alpha', X, X'\right) \neq 0 \tag{4.2.9}$$

olup $M$ nin **dağılma parametresi** (**Drall'ı**) dir. Geodezik eğrilik fonksiyonu

$$J = \langle X'', X' \wedge X \rangle = \det\left(X'', X', X\right) \tag{4.2.10}$$

dır ve $M$ nin birim normal vektör alanı

$$\begin{aligned} N &= \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|} \\ &= \frac{1}{|EG - F^2|^{\frac{1}{2}}} \left(\eta Q X' - vX \wedge X'\right) \\ &= \frac{1}{|Q^2 - \epsilon v^2|^{\frac{1}{2}}} \left(\eta Q X' - vX \wedge X'\right) \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

olarak bulunur. İkinci temel formun bileşenleri

$$\begin{aligned} e &= \left\langle \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|}, \alpha'' + vX'' \right\rangle \\ &= \frac{1}{|EG - F^2|^{\frac{1}{2}}} \left(\epsilon Q \left(F - QJ\right) - Q'v + Jv^2\right) \\ &= \frac{1}{|Q^2 - \epsilon v^2|^{\frac{1}{2}}} \left(\epsilon Q \left(F - QJ\right) - Q'v + Jv^2\right) \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

$$f = \langle N, f_{uv} \rangle = \left\langle \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|}, X' \right\rangle = \frac{Q}{|EG - F^2|^{\frac{1}{2}}} = \frac{Q}{|Q^2 - \epsilon v^2|^{\frac{1}{2}}} \tag{4.2.13}$$

$$g = \langle N, X_{vv} \rangle = \langle N, 0 \rangle = 0 \tag{4.2.14}$$

olarak bulunur. Buna göre $M$ nin $K$ Gauss eğriliği

$$K = \langle N, N \rangle \frac{\det II}{\det I} = \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{Q^2}{\left(EG - F^2\right)^2} = \frac{Q^2}{\left(Q^2 - \epsilon v^2\right)^2} = \frac{Q^2}{D^2} \tag{4.2.15}$$

ve $H$ ortalama eğriliği ise

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG - 2fF + gE}{EG - F^2} \tag{4.2.16}$$
$$= \frac{1}{2D^3}\left(\epsilon J v^2 - \epsilon Q' v - Q\left(F + QJ\right)\right)$$

dir. Buradaki formüller Öklid uzayındaki formüllere benzemektedir. Ayrıca

$$f_u \wedge f_v = [\alpha' + vX'] \wedge X = \eta Q X' - vX \wedge X' \tag{4.2.17}$$

bulunur. Şimdi de $D^2$ yi hesaplayalım.

$$|f_u \wedge f_v|^2 = \langle f_u \wedge f_v, f_u \wedge f_v\rangle = F^2 - EG$$

yani

$$D^2 = F^2 - EG$$
$$D = \left|F^2 - EG\right|^{\frac{1}{2}} = \left|Q^2 - \epsilon v^2\right|^{\frac{1}{2}}$$

dir. Aşağıdaki Langrage özdeşliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} \langle X \wedge X', X \wedge X'\rangle &= -\langle X, X\rangle \langle X', X'\rangle + \langle X, X'\rangle \langle X, X'\rangle \\ &= -\left\|X\right\|^2 . \left\|X'\right\|^2 \\ &= -\epsilon.\eta \end{aligned}$$

Gerçekten

$$\begin{aligned} D &= \left|F^2 - EG\right|^{\frac{1}{2}} \\ &= \sqrt{F^2 - EG} \\ &= \sqrt{F^2 - \left(\langle \alpha', \alpha'\rangle + \eta v^2\right)\epsilon} \\ &= \sqrt{F^2 - \left(\langle \epsilon F X - \epsilon\eta Q X \wedge X', \epsilon F X - \epsilon\eta Q X \wedge X'\rangle + \eta v^2\right)\epsilon} \\ &= \left|Q^2 - \epsilon v^2\right|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

bulunur. (4.2.4) ifadesinin sırasıyla $v$ ye ve $u$ ya göre kısmi türevleri alınırsa

$$D_v = \frac{-\epsilon v}{D} \tag{4.2.18}$$

ve

$$D_u = \frac{QQ'}{D} \tag{4.2.19}$$

elde edilir. Şimdi de $M$ regle yüzeyinin Weingarten yüzey $K_v H_u - K_u H_v = 0$ denklemini sağlaması için gerekli şartları araştıralım. Burada (4.2.15) ifadesinin $v$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$K_v = \frac{4\epsilon Q^2 v}{D^6}$$

veya

$$K_v = \frac{4\epsilon Q^2 v}{\left(Q^2 - \epsilon v^2\right)^3} \tag{4.2.20}$$

dır. Benzer şekilde (4.2.15) ifadesinin $u$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$K_u = \frac{1}{D^6}\left[2QQ'\left(Q^2 + \epsilon v^2\right)\right]$$

veya

$$K_u = -\frac{2QQ'\left(Q^2 + \epsilon v^2\right)}{\left(Q^2 - \epsilon v^2\right)^3} \tag{4.2.21}$$

dır. Aynı şekilde (4.2.16) ifadesinin sırasıyla $v$ ye göre kısmi türevi alınırsa

$$H_v = \frac{1}{2D^5}\left[Jv^3 - 2Q'v^2 + \left(-3\epsilon QF - \epsilon Q^2 J\right)v - \epsilon Q^2 Q'\right]$$

veya

$$H_v = \frac{1}{2\left|Q^2 - \epsilon v\right|^{\frac{5}{2}}}\left[Jv^3 - 2Q'v^2 + \left(-3\epsilon QF - \epsilon Q^2 J\right)v - \epsilon Q^2 Q'\right] \tag{4.2.22}$$

benzer şekilde (4.2.16) ifadesinin sırasıyla $u$ ya göre kısmi türevleri alınırsa

$$\begin{aligned} H_u = \frac{1}{2D^5}&\left[\left(\epsilon J'v^2 - \epsilon Q''v - Q'F - QF' - 2QQ'J - Q^2J'\right)\left(Q^2 - \epsilon v^2\right)\right.\\ &\left.-\left(\epsilon Jv^2 - \epsilon Q'v - QF - Q^2J\right)3QQ'\right], \end{aligned}$$

veya

$$H_u = \frac{1}{2\left|Q^2-\epsilon v^2\right|^{\frac{5}{2}}}\left[-J'v^4+Q''v^3+\left(\epsilon Q'F+\epsilon QF'+2\epsilon Q^2J'-\epsilon QQ'J\right)v^2 \right.$$
$$\left. +\left(-\epsilon Q^2Q''+3\epsilon QQ'^2\right)v+2Q^2Q'F+Q^3Q'J-Q^3F'-Q^4J'\right] \quad (4.2.23)$$

elde edilir. Yukarıdaki ifadeler $K_vH_u - K_uH_v = 0$ de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} K_vH_u - K_uH_v = & \frac{1}{D^{11}}\left(-2\epsilon Q^2+\epsilon QQ'J\right)v^5+\left(2\epsilon Q^2Q''-2\epsilon QQ'^2\right)v^4 \\ & +\left(-Q^2Q'F+2Q^3F'+4Q^4J'-3Q^3J+Q^3Q'J\right)v^3 \\ & +\left(-2Q^4Q''+3Q^3Q'^2\right)v^2 \\ & +\left(\epsilon Q^4Q'F+\epsilon Q^5Q'J-2\epsilon Q^5F'-2\epsilon Q^6J'\right)v \\ & -\epsilon Q^5Q'^2 \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

ifadesine ulaşırız ve (4.2.24) ifadesi $v$ nin kuvvetlerinden oluşan ve $v$ ye bağlı bir polinomdur. Bu polinomun sonucunun sıfır olması için $v$ nin kuvvet katsayılarının da sıfır olması gerekir. $v$ nin farklı kuvvet katsayıları aşağıdaki gibi düzenlenirse

$v^5 : -2\epsilon Q^2+\epsilon QQ'J=0$

$v^4 : 2\epsilon Q^2Q''-2\epsilon QQ'^2=0$

$v^3 : -Q^2Q'F+2Q^3F'+4Q^4J'-3Q^3J+Q^3Q'J=0$

$v^2 : -2Q^4Q''+3Q^3Q'^2=0$

$v^1 : \epsilon Q^4Q'F+\epsilon Q^5Q'J-2\epsilon Q^5F'-2\epsilon Q^6J'=0$

$v^0 : -\epsilon Q^5Q'^2=0$

elde edilir. (4.2.15) dan

$$K=\frac{Q^2}{D^4}$$
$$K=\frac{Q^2}{\left(Q^2-\epsilon v^2\right)^2}$$

ifadesinde $v$ yalnız bırakılırsa

$$v=\sqrt{-\epsilon\left(\pm\frac{|Q|}{\sqrt{K}}-Q^2\right)}$$

elde edilir. Ayrıca (4.2.15) dan

$$K = \frac{Q^2}{D^4}$$
$$D^4 = \frac{Q^2}{K}$$

den ve eşitliğin her iki tarafının 4. dereceden kökü alınırsa

$$D = \pm\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{K}}$$

bulunur. (4.2.16) den

$$\begin{aligned} H &= \frac{1}{2D^3}\left(\epsilon J v^2 - \epsilon Q' v - Q\left(F + QJ\right)\right) \\ &= \frac{1}{2D^3}\left(\epsilon J v^2 - \epsilon Q' v - QF - Q^2 J\right) \end{aligned}$$

olduğundan düzenleme yapılırsa

$$2H = -\frac{J}{D} - \epsilon\frac{Q'v}{D^3} - \frac{QF}{D^3}$$

elde edilir, burada $D = \pm\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{K}}$ gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} 2H &= -\frac{J}{\left(\pm\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{K}}\right)} - \epsilon\frac{Q'v}{\left(\pm\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{K}}\right)^3} - \frac{QF}{\left(\pm\frac{\sqrt{Q}}{\sqrt[4]{K}}\right)^3} \\ &= \mp\frac{J}{\sqrt{Q}}\sqrt[4]{K} \mp \epsilon\frac{Q'\sqrt[4]{K^3}}{|Q|\sqrt{Q}}v \mp F\frac{\sqrt[4]{K^3}}{\sqrt{Q}} \end{aligned}$$

eşitliğine ulaşılır. Bu eşitlikte $v = \sqrt{-\epsilon\left(\pm\frac{|Q|}{\sqrt{K}} - Q^2\right)}$ yerine yazılırsa

$$2H = \mp\frac{J}{|Q|^{\frac{1}{2}}}K^{\frac{1}{4}} \mp \epsilon\frac{Q'}{|Q|}\sqrt{\pm K - |Q|\,K^{\frac{3}{2}}} - F\frac{K^{\frac{3}{4}}}{|Q|^{\frac{1}{2}}}$$

elde edilir. $K$ Gauss eğriliği, $u$ ve $v$ ye bağlı ve $K$ nın farklı kuvvetlerinin katsayıları bağımsız fonksiyonlar olduğundan, $H = \psi_0(K)$ eşitliği katsayıların sadece $u$ ya bağlı olması durumunda geçerlidir, yani eğer $J$, $F$, $Q$ sabit iseler $H = \psi_0(K)$ şeklinde ifade edilebilirler. Bu durum ise Öklidyen uzaydaki Weingarten olma şartlarıdır. Bu durumda $H$ ve $K$ arasındaki bağıntı

$$2H = \mp\frac{J}{|Q|^{\frac{1}{2}}}K^{\frac{1}{4}} - F\frac{K^{\frac{3}{4}}}{|Q|^{\frac{1}{2}}}$$

elde edilir. Weingarten yüzeyler için $K_v H_u - K_u H_v = 0$ olmak zorundadır. Lorentzian uzayda $K_v H_u - K_u H_v = 0$ şartının durumu Öklid uzayındaki duruma oldukça benzerdir. Sadece birkaç işaret değişikliği vardır. Buna göre

$$K_v H_u - K_u H_v = \frac{1}{2\left|Q^2 - \epsilon v^2\right|^{\frac{11}{2}}} \left(A_5 v^5 + A_4 v^4 + A_3 v^3 + A_2 v^2 + A_1 v + A_0\right)$$

olarak yazılabilir, burada $A_i = A_i(u)$, $u$ parametresine bağlı fonksiyonlardır. Böylece $K_v H_u - K_u H_v = 0$ şartının sağlanması için $A_i = 0$, $i = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ olması gerekir. $A_0 = 0$ ve $Q \neq 0$ ise ($M$ açılabilir olmadığından $Q \neq 0$ dır) $Q' = 0$ olmak zorundadır. $A_5 = 0$ ise $J' = 0$ olur. $A_3 = 0$ ise $F' = 0$ olur. Buradan açılabilir olmayan regle Weingarten yüzey için $Q, J, F$ sabitlerinin üçü de sabit olmak zorundadır. Bu açıklamalara göre $\alpha$ taban eğrisi ve $X$ doğrultmanını kesin olarak belirler. $Q$ ve $F$ değerleri birinci temel formu, $Q$ ise $K$ Gauss eğriliğini belirler.

Eğer $J$ sabit ise

$$X''' = -\epsilon\left(\eta - J^2\right) X'$$

elde edilir. Buradan ise

$$\langle X'', X'' \rangle = -\epsilon\eta\left(\eta - J^2\right)$$

olur.

**Altdurum 1.1**: $\eta - J^2 = 0$ durumunda $\eta = 1$ olmak zorundadır. Bu durumda $X''$ sabit bir vektördür. Eğer $X'' = 0$ ise $X'$ vektörü $\langle X', X' \rangle = \eta = 1$ i sağlayan bir sabit vektördür. Böylece $X(u) = X'u + C$

$$\epsilon = \langle X, X \rangle = u^2 + 2u \langle X', C \rangle + \langle C, C \rangle,$$

şartını sağlayan bir vektördür ve bu ise bir çelişkidir. Eğer $X''$ sabit bir null vektör ise $X(u)$ bir null paraboldür. Lorentz izometrisine uygun olarak $J = 1$

kabul edebiliriz ve

$$X(u) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -\epsilon u^2 + 1 - \epsilon \\ -\epsilon u^2 + 1 + \epsilon \\ 2u \end{pmatrix}$$

olarak yazabiliriz. Bu sıfır eğriliklidir ve bir null eksen etrafında Lorentzian dönme altında bir noktanın yörüngesidir. $\epsilon = -1$ için yukarıda verilen 3.tip dönüşümün altındaki $(1,0,0)$ ın görüntüsüdür.

$$X \wedge X'' = JX' = X' \text{ ve } \alpha' = \epsilon FX - \epsilon QX \wedge X'$$

denklemlerinden

$$\alpha'' = \epsilon FX' - \epsilon QX \wedge X' = \epsilon (F - Q) X'$$

$$\alpha''' = \epsilon (F - Q) X''$$

ve

$$\alpha''' = 0$$

elde ederiz. Böylece $F - Q = 0$ ise ya $\alpha'' = 0$ olacak şekilde $\alpha''' = 0$ dır ya da $\alpha'''$ bir null vektördür.

Birinci durumda $(\alpha'' = 0)$ $\alpha'$ bir sabit null vektör ve $\alpha$ bir doğrudur, ikinci durumda ise $\alpha$ bir null kübiktir. Eğer birinci durumda $Q - F = 0$ ise

$$\alpha' = \epsilon F (X - X \wedge X')$$

ve

$$X' - X \wedge X'' = 0$$

elde edilir. Böylece $X - X \wedge X'$ sabittir. Eğer bunu $u = 0$ da gözönüne alırsak

$$X - X \wedge X' = X'' = (1,1,0)$$

olarak bulunur ve $\alpha' = \epsilon F (1,1,0)$ ifadesine ulaşılır. Böylece yüzey, null dönmelerin $1-$parametreli gurubu altında invaryant olan bir helikoidal regle yüzeyidir. İkinci durumda $F-Q\neq 0$ ise $\alpha''$

$$\epsilon\left(F-Q\right)X'=\left(F-Q\right)\left(-u,-u,\epsilon\right)$$

olmasına denktir. Bu ise $\alpha'$ ile $\alpha''=\epsilon\left(F-Q\right)X'$ i yardımıyla tanımlanması demektir. Böylece $\alpha$ eğrisi $\alpha'''$, $X'$ doğrultusunda olacak şekilde bir null kübiktir. Aslında kübik önerme ([20]) de verilen kübik vida hareketinde bir doğrunun yörüngesidir. Buna ek olarak $H=0$ dan $F=J=0$ olduğunu varsayabiliriz.

**Alt durum 1.2**. $\eta-J^2\neq 0$ olmak üzere $\eta-J^2$ nin işareti $\sigma$ ile gösterelim. Bu durumda $X'$ ve $X''$

$$\left(X'\wedge X''\right)'=X'\wedge X'''=X'\wedge\left(\epsilon\left(J^2-\eta\right)X'\right)=0$$

olacak şekilde bir non-dejenere düzlemi gerer. Bu düzlemin normalinin işareti

$$\left\langle X'\wedge X'',X'\wedge X''\right\rangle=-\epsilon\left(\eta-J^2\right)=-\epsilon\sigma$$

dır. Frenet çatısında $e_1=X'$, $e_2=|\eta-J^2|^{-\frac{1}{2}}X''$ Frenet çatısında görülür ki $X$ sabit eğriliği bir düzlemsel eğridir ve

$$e_1'=X''=\left|\eta-J^2\right|^{\frac{1}{2}}e_2$$

$$e_2'=\left|\eta-J^2\right|^{-\frac{1}{2}}X'''=-\epsilon\sigma\left|\eta-J^2\right|^{\frac{1}{2}}e_1$$

dir. Bu durumu irdeleyelim:

1. Eğer $\eta=-1$ ise $\epsilon=1$ ve $X$ bir hiperboldür.

2. Eğer $\eta=1$ ve $1>J^2$ durumunda $\epsilon=-1$ ise $X$ bir hiperboldür ve $\epsilon=1$ ise bir çemberdir.

3. Eğer $\eta=1$ ve $1<J^2$ durumunda $\epsilon=1$ ise $X$ bir hiperboldür ve $\epsilon=-1$ ise bir çemberdir.

4. Her durumda $X$ düzlemsel eğriliğin sabit eğriliği $\pm\sqrt{\eta-J^2}$ dir. Bu ise birim küre $\{\xi\mid\langle\xi,\xi\rangle=\epsilon\}$ ile bir düzlemin kesişiminden başka birşey değildir.

$\alpha$ eğrisi $\alpha'' = \epsilon\,(F - QJ)\,X'$ ile tanımlanabilir. $F - QJ = 0$ özel durumunda $\alpha$ bir doğru olur, aksi halde $\alpha'$ sabit bir çarpan farkıyla $X$ ile çakışır. Bu $\alpha$ nın $X' \wedge X''$ doğrultusundaki eksen ile Lorentzian vida hareketi altında bir noktanın yörüngesidir. Buna ek olarak $H = 0$ dan $F = J = 0$ kabul edebiliriz. Böylece $\alpha$, $X$ e dik bir doğrudur. Yani yüzey üç tip helikoid'den biridir.

**Durum 2**. $X$ non-null ve $X'$ null olsun. Bu durumda $\langle X, X\rangle = 1$, $\langle X', X'\rangle = 0$ dır. $F = \langle \alpha', X\rangle = 0$ olacak şekilde bir $\alpha$ eğrisi seçelim. Bu durumda $X \wedge X'$ ve $X'$ ortogonal null vektörlerdir ve $X \wedge X' = X'$ olarak elde edilir. Ayrıca $X'$ nü bir null doğru olarak alabiliriz. Böylece $X'' = 0$ olduğunu kabul edebiliriz.

$P = |\langle \alpha', \alpha'\rangle|^{\frac{1}{2}}$, $R = \langle \alpha', \alpha'\rangle$ olmak üzere, eğer $\alpha'$ non-null ise $R$ nin işaretini $\epsilon$ ile gösterelim, $\alpha'$ null ise $\epsilon = 0$ olur. $\epsilon = 0$ olması durumunda farklı bir $\alpha + \lambda X$ eğrisinden geçen doğru olarak ifade edebiliriz. Bu durum daha sonra tartışılacaktır.

Şimdilik $\epsilon \neq 0$ olarak kabul edelim. Bu durumda

$$\frac{1}{P}\alpha', X, \frac{1}{P}\alpha' \wedge X$$

bir ortonormal çatı oluşturur. Buna göre $X'$ vektörünü

$$\begin{aligned} X' &= \frac{1}{R}\langle \alpha', X'\rangle\,\alpha' + \langle X, X'\rangle\,X - \frac{1}{R}\langle \alpha' \wedge X, X'\rangle\,\alpha' \wedge X \\ &= \frac{1}{R}\langle \alpha', X'\rangle\,\alpha' + 0.X - \frac{1}{R}\langle \alpha' \wedge X, X'\rangle\,\alpha' \wedge X \\ &= \frac{1}{R}\langle \alpha', X'\rangle\,\alpha' - \frac{1}{R}\langle \alpha' \wedge X, X'\rangle\,\alpha' \wedge X \end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. Eğer $Q = \langle \alpha', X'\rangle$ denilirse,

$$X' = \frac{Q}{R}\,(\alpha' - \alpha' \wedge X)$$

olarak yazabiliriz. Buradan

$$Q' = \langle \alpha'', X'\rangle$$

ve

$$\begin{aligned}\alpha'' &= \langle \alpha'', X\rangle X + \frac{1}{R}\langle \alpha'', \alpha'\rangle \alpha' - \frac{1}{R}\langle \alpha'', \alpha'\wedge X\rangle \alpha'\wedge X \\ &= -QX + \frac{R'}{2R}\alpha' + \left(\frac{Q'}{Q} - \frac{R'}{2R}\right)\alpha'\wedge X\end{aligned}$$

olur. Bu son denklemden

$$\langle \alpha'', \alpha'\wedge X\rangle = \frac{R'}{2} - R\frac{Q'}{Q}$$

elde edilir. Birinci temel formun bileşenlerini

$$E = R + 2Qv, \quad F = 0, \quad G = 1$$

olarak bulunur. Böylece

$$\begin{aligned}D^2 &= EG - F^2 \\ &= R + 2Qv\end{aligned}$$

ya da

$$D = \sqrt{R + 2Qv}$$

olur. Birim normal vektör alanı ise

$$\begin{aligned}N &= \frac{f_u \wedge f_v}{|f_u \wedge f_v|} \\ &= |E|^{-\frac{1}{2}}\left(\left(1 + \frac{Q}{R}v\right)\alpha'\wedge X - \frac{Q}{R}v\alpha'\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{|R + 2Qv|}}\left(\left(1 + \frac{Q}{R}v\right)\alpha'\wedge X - \frac{Q}{R}v\alpha'\right)\end{aligned}$$

olur. İkinci temel formun bileşenleri

$$\begin{aligned}e &= \langle N, f_{uv}\rangle \\ &= |E|^{-\frac{1}{2}}\left\langle \alpha'', \left(1 + \frac{Q}{R}v\right)\alpha'\wedge X - \frac{Q}{R}v\alpha'\right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{|R + 2Qv|}}\left(\frac{R'}{2} - R\frac{Q'}{Q} - Q'v\right)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
f &= \langle N, f_{uv} \rangle \\
&= |E|^{-\frac{1}{2}} \left\langle X', \left(1+\frac{Q}{R}v\right)\alpha' \wedge X - \frac{Q}{R}v\alpha' \right\rangle \\
&= \frac{1}{\sqrt{|R+2Qv|}} Q
\end{aligned}
$$

$$
g = \langle N, f_{vv} \rangle = \langle N, 0 \rangle = 0
$$

olarak bulunur. Buradan $K$ Gauss eğriliği

$$
K = sign\left(E\right) \frac{\det II}{\det I} = -\frac{eg-f^2}{EG-F^2} = \frac{Q^2}{E^2} = \frac{Q^2}{\left(R+2Qv\right)^2}
$$

ve $H$ Ortalama eğriliği

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{1}{2}\frac{eG-2fF+gE}{EG-F^2} \\
&= \frac{1}{2\left|R+2Qv\right|^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{R'}{2} - R\frac{Q'}{Q} - Q'v\right)
\end{aligned}
$$

bulunur. $\epsilon = 0$ olsa dahi buradaki $H$ ve $K$ formülleri geçerlidir. $H = 0$ olması için gerek ve yeter şart $R$ ve $Q$ nun sabit olmasıdır. Ayrıca $K$ ve $H$ ifadesinden

$$
4H = -\frac{Q'}{Q\left|Q\right|^{\frac{1}{2}}}K^{\frac{1}{4}} + \frac{1}{\left|Q\right|^{\frac{3}{2}}}\left(R' - R\frac{Q'}{Q}\right)K^{\frac{3}{4}}
$$

elde edilir. Böylece yüzeyin bir Weingarten yüzey olması için ancak ve ancak bu iki katsayının sabit olması ile mümkündür. Bu katsayılar için gerek ve yeter şart

$$
\frac{Q'}{\left(\pm Q\right)^{\frac{3}{2}}} = C_1, \qquad \left(\frac{R}{Q}\right)'\left(\pm Q\right)^{-\frac{1}{2}} = C_2
$$

olmasıdır. Eğer $C_1 = 0$ ise $Q' = 0$ olur. Aksi halde $Q\left(u\right) = \pm\frac{4}{C_1^2\left(u+C_3\right)^2}$ olarak bulunur. Burada ise $C_3 = 0$ olduğunu kabul edebiliriz. Böylece, $A$ sıfırdan farklı bir sabit olmak üzere ya $Q = A$ ya da $Q = \frac{A}{u^2}$ olur. Eğer $Q = \frac{A}{u^2}$ ise bu durumda $\frac{R}{Q} = D\log|u| + C$ olur. Eğer $Q = A$ ise $\frac{R}{Q} = Du + C$ olur. Burada $C$ ve $D$ reel sabitlerdir. Sonuç olarak yüzeyin minimal $(H = 0)$ bir yüzey olması için gerek ve yeter şart $Q$ ve $R$ nin her ikisinin de sabit olmasıdır.

Şimdi de $X = (u, u, 1)$ olacak şekilde Lorentz dönüşümü uygulayalım. O halde eğriyi $\alpha\left(u\right) = \left(\alpha_1\left(u\right), \alpha_2\left(u\right), \alpha_3\left(u\right)\right)$ olacak şekilde aşağıdaki denklemlerden yeniden oluşturabiliriz: Bu $\alpha$ eğrisi

$$\begin{aligned}(\alpha_2' - \alpha_1')(\alpha_2' + \alpha_1') + \alpha_3'^2 = \langle \alpha', \alpha' \rangle = R \\ (\alpha_2' - \alpha_1')\, u + \alpha_3' = \langle \alpha', X \rangle = 0 \\ \alpha_2' - \alpha_1' = \langle \alpha', X' \rangle = Q\end{aligned}$$

denklemini sağlaması gerektiğinden

$$\alpha' = \frac{Q}{2}\left(\frac{R}{Q^2} - 1 - u^2, \frac{R}{Q^2} + 1 - u^2, -2u\right)$$

olarak elde edilir.

**Alt durum 2.1** $Q = A$ ve $\frac{R}{Q} = Du + C$ olsun. Bu durumda

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(\frac{D}{2}u^2 + Cu - Au - \frac{A}{3}u^3, \frac{D}{2}u^2 + Cu + Au - \frac{A}{3}u^3, -Au^2\right)$$

olur. Buna göre yüzey $(0,0,1)$ doğrultusunda kübik vida hareketi altında $\left(-\frac{D}{2}, 0, 0\right)$ dan geçen doğrunun yörüngesidir. Bu yüzeyin minimal $(H = 0)$ olması sadece $D = 0$ olmasıyla mümkündür. Bu ise Cayley regle yüzeyidir.

**Alt durum 2.2** $Q = \frac{A}{u^2}$ ve $\frac{R}{Q} = D \log|u| + C$ olsun. Buna göre,

$$(x_1(u,v), x_2(u,v), x_3(u,v)) = \alpha(u) + vX(u)$$

regle yüzeyi

$$\begin{aligned}x_2 - x_1 &= -Au^{-1} \\ x_2 + x_1 &= D(u \log|u| - u) + C + 2uv \\ x_3 &= -A \log|u| + v\end{aligned}$$

denklemlerini sağlar. Bu denklem sisteminde $u$ ve $v$ yok edilirse

$$x_3 = \frac{1}{2A}\left(x_1^2 - x_2^2\right) + \left(A + \frac{D}{2}\right) \log|x_1 - x_2|$$

dik koordinatlarda yüzeyin denklemi elde edilir. Bu yüzey **Nomizu-Sasaki** yüzeyi olarak bilinir.

Eğer durum 2 de $\epsilon = 0$, yani $R = 0$ ise aynı yolla yüzey denklemini inşa edebiliriz.

$$\alpha' = -\frac{Q}{2}\left(u^2+1, u^2-1, 2u\right)$$

için $K$ ve $H$ ifadesindeki şartlar sağlanır. $\alpha'$ vektörü bir null kübik eğrinin teğetidir. $Q = A$ alt durumunda

$$f(u,v) = \left(a\left(\frac{u^3}{3}+u\right)+uv, a\left(\frac{u^3}{3}-u\right)+uv, au^2+v\right), (a \neq 0)$$

**Cayley Regle yüzeyinin** standart durumu elde edilir. $Q = \frac{A}{u^2}$ alt durumunda ise $D = 0$ olduğu durum elde edilir. Ancak $K = \frac{1}{4u^2}$ olması $A$ dan bağımsızdır ve $H = K^{\frac{1}{4}}$ bir sabit çarpan $A$ şartıyla sağlanır.

**Durum 3.** Üçüncü durum ise $X$ in null olması durumudur, yani $\langle X, X\rangle = 0$ durumudur. İlk olarak $X' \neq 0$ olduğunu kabul edelim. Burada $\langle X', X'\rangle > 0$ ve $F = \langle \alpha', X\rangle \neq 0$ olduğundan $\det I = -F^2$ olur. $u$ parametresini öyle seçelim ki

$$\langle X', X'\rangle = 1 \text{ ve } \langle \alpha', X'\rangle = 0$$

olsun. Birim normal vektörlerinden biri

$$N = \frac{1}{F}(\alpha' \wedge X + vX)$$

dir. İkinci temel formun bileşenleri

$$\begin{aligned} e &= \langle \alpha'' + vX'', N\rangle, \\ f &= \frac{1}{F}\langle X', \alpha' \wedge X + vX\rangle = -1 \\ g &= 0 \end{aligned}$$

dır. $K$ Gauss eğriliği

$$\begin{aligned} K &= \frac{\det II}{\det I} \\ &= \frac{1}{F^2} \end{aligned}$$

ve $H$ ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{-2F^2}(-2fF) = -\frac{1}{F} = \pm\sqrt{K}$$

dır. Bu durumda yüzey asla minimal $(H = 0)$ olamaz. $X$ in sabit olması durumunda, $K = 0$ ve $H = 0$ olur ve $K = H^2$ sağlanır. Böylece null doğrultmanlı regle yüzeylerde $K = H^2$ eşitliği vardır. $\square$

## 4.3 $\mathbf{E}_1^3$ de Regle Doğrusal Weingarten yüzeyler

Bu alt bölümde, Lorentzian $3-$uzay $E_1^3$ de regle yüzeylerini taban eğrisi ve doğrultmanın causal karakterlerine göre sınıflara ayıracağız. $M$ yüzeyinin ortogonal parametrelemesi

$$f(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$$

olsun. Öyleki $\alpha$ taban eğrisi spacelike veya timelike eğri, $X$ ise birim vektör alanı ve $\langle \alpha', X \rangle = 0$ olsun. Böylece yüzeylerin taban eğrileri ve doğrultman vektör alanlarının karakterize edildiği 5 sınıf vardır. Bunlar aşağıda verilirse: $M$ regle yüzeyinin $\alpha$ taban eğrisi spacelike regle yüzeye $M_+$ tipinde, aynı şekilde $\alpha$ taban eğrisi timelike ise $M_-$ tipinde denir. Buna ek olarak bu $M$ yüzeyi

. $X$ spacelike ve $X'$ non-null vektör alanı ise $M_+^1$,

. $X$ spacelike ve $X'$ null vektör alanı ise $M_+^2$,

. $X$ timelike ve $X'$ spacelike vektör alanı ise $M_+^3$,

. $X'$ non-null vektör alanı ise $M_-^1$,

. $X'$ null vektör alanı ise $M_-^2$

ile gösterilir. Buna göre açıkça görülür ki $M_-^1$ ve $M_-^2$ tipindeki regle yüzeylerin $X$ vektör alanı daima spacelike olur[19].

İyi bilinmelidir ki $\mathbb{E}^3$ de regle yüzeylerin Gauss eğriliği her çizgi boyunca sabit ise yüzey açılabilir yüzeydir. 1992 de Blair ve Koufogiorgos $\mathbb{E}^3$ de açılabilir olmayan regle yüzeyler üzerinde çalıştılar[12]. Öyleki $aK_{II} + bH$ doğrusal kombinasyonunda her çizgi boyunca $a$ ve $b$ reel sabitler olmak üzere $2a + b \neq 0$ eşitliği durumunda yüzey helikoid olur. Yani minimal yüzeydir. Şimdi bu sonuçlara benzer örnekler verelim.

$\mathbb{E}_1^3$ de açılabilir olmayan regle yüzeyler için aşağıda Lorentz helikoid örnekleri verelim.

**Örnek 4.3.1.** *(1.çeşit Helikoid) $a \neq 0$ sabiti için $\mathbb{E}_1^3$ de $M$ regle yüzeyinin parametrik ifadesi*

$$f(u,v) = (au, v\cos u, v\sin u)$$

*olsun. O halde $M$ non-silindirik regle yüzeyi $M_-^1$ tipindedir ve bu yüzeye **1.çeşit helikoid** denir[19].*

**Örnek 4.3.2.** *(2.çeşit Helikoid) $a \neq 0$ sabiti için $\mathbb{E}_1^3$ de $M$ regle yüzeyinin parametrik ifadesi*

$$f(u,v) = (v\sinh u, v\cosh u, au)$$

*olsun. O halde $M$ non-silindirik regle yüzeyi $M_+^1$ tipindedir ve bu yüzeye **2.çeşit helikoid** denir[19].*

**Örnek 4.3.3.** *(3.çeşit Helikoid) $a \neq 0$ sabiti için $\mathbb{E}_1^3$ de $M$ regle yüzeyinin parametrik ifadesi*

$$f(u,v) = (v\cosh u, v\sinh u, au)$$

*olsun. O halde $M$ non-silindirik regle yüzeyi $M_+^3$ tipindedir ve bu yüzeye **3.çeşit helikoid** denir[19].*

**Örnek 4.3.4.** *(2.çeşit Enneper yüzeyin eşleniği) $\mathbb{E}_1^3$ de $M$ regle yüzeyinin parametrik ifadesi*

$$f(u,v) = \left(\frac{1}{6}u^3 + vu, -\frac{1}{6}u^3 - vu + u, \frac{1}{2}u^2 + v\right)$$

*olsun. O halde $M$ silindirik olmayan regle yüzeyi $M_+^2$ tipindedir ve bu yüzeye* ***2.çeşit Enneper yüzeyin eşleniği*** *denir[19].*

3-boyutlu Öklid uzayında, bir **sağ konoid** bir düzleme paralel çizgilerin oluşturduğu regle yüzeydir ve düzleme dik doğrulardan geçer. Lorentz hareketlerde aynı şekildedir. $\mathbb{R}_1^3$ de açılabilir olmayan Lorentz konoidlerin 3 kategorisi vardır. Bu Lorentz konoid kategorileri aşağıda gösterilmiştir.

**Örnek 4.3.5.** *(1.çeşit sağ konoid) $h = h(u)$ düzgün fonksiyon olsun. Öyleki $h' \neq 0$ olacak şekilde $\mathbb{E}_1^3$ de $M$ regle yüzeyinin parametrik ifadesi*

$$f(u,v) = (h(u), v\cos u, v\sin u)$$

*olsun. O halde $M$ silindirik olmayan regle yüzeyi $M_-^1$ tipindedir ve bu yüzeye* ***1.çeşit sağ konoid*** *denir[19].*

**Örnek 4.3.6.** *(2.çeşit sağ konoid) $h = h(u)$ düzgün fonksiyon olsun. Öyleki $h' \neq 0$ olacak şekilde $\mathbb{E}_1^3$ de $M$ Regle yüzeyinin parametrik ifadesi*

$$f(u,v) = (v\sinh u, v\cosh u, h(u))$$

*olsun. O halde $M$ silindirik olmayan regle yüzeyi $M_+^1$ tipindedir ve bu yüzeye* ***2.çeşit sağ konoid*** *denir[19].*

**Örnek 4.3.7.** *(3.çeşit sağ konoid) $h = h(u)$ düzgün fonksiyon olsun. Öyleki $h' \neq 0$ olacak şekilde $\mathbb{E}_1^3$ de $M$ regle yüzeyinin parametrik ifadesi*

$$f(u,v) = (v\cosh u, v\sinh u, h(u))$$

*olsun. O halde $M$ silindirik olmayan regle yüzeyi $M_+^3$ tipindedir ve bu yüzeye* ***3.çeşit sağ konoid*** *denir[19].*

**Teorem 4.3.1.** *$\mathbb{E}_1^3$ de non-null doğrultmanlı regle yüzey*

$$f(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$$

*ile verilsin. Bu durumda:*

1. $K_{II}=0$ *ancak ve ancak* $H=0$ *dır.*

2. $K_{II}=H$ *ancak ve ancak* $K_{II}=H=0$ *dır.*

3. *öyleki* $a$, $b$ *ve* $c$ *reel sayılar olmak üzere* $a^2+b^2\neq 0$ *ve* $aK_{II}+bH+cK$ *sabit olsun. Bu durumda* $c=0$ *ve* $aK_{II}+bH+cK=0$ *dır. Ayrıca*

   (a) $X'$ *her yerde null ise o zaman* $M$ *yüzeyi 1. ve 3. çeşit sağ konoidlerden biridir.*

   (b) $X'$ *her yerde null ve* $2a-b\neq 0$ *ise bu durumda* $M$ *yüzeyi* 1., 2. *veya* 3. *çeşit helikoidlerden herhangi birisi olur.*

   (c) $X'$ *her yerde null ise o zaman* $M$ *yüzeyi* 2.*çeşit Enneper yüzeyinin eşleniğidir[19].*

**İspat.** İspatımızı 2 duruma ayıracağız.

**Durum 1**: $X'$ hiç bir yerde null olmasın. O zaman $M$ regle yüzeyi

$$f\left(u,v\right)=\alpha\left(u\right)+vX\left(u\right)$$

ile verilsin. Öyleki

$$\langle X,X\rangle=\epsilon,\quad \langle X',X'\rangle=\eta,\quad \langle X\wedge X',X\wedge X'\rangle=-\epsilon\eta,$$

$$\langle\alpha',X'\rangle=0\ \text{ ve }\ \epsilon,\eta\in\{1,-1\}$$

olsun. Birinci temel formun bileşenleri

$$E=\langle\alpha',\alpha'\rangle+\eta v^2,\quad F=\langle\alpha',X\rangle,\quad G=\epsilon$$

olarak bulunur. $\{X,X',X\wedge X'\}$ hareketli çatıdır ve işaretleri sırasıyla $\epsilon$, $\eta$, $-\epsilon\eta$ olur. Buna göre

$$\alpha'=\epsilon FX-\epsilon\eta QX\wedge X'$$

olarak yazılır. Burada $Q=(\alpha' XX')$ dağılma parametresidir. Ayrıca

$$EG-F^2=-\eta Q^2+\epsilon\eta v^2,$$

$$X'' = \epsilon\eta\left(-X + JX \wedge X'\right)$$

yazılabilir, burada $J = (X''X'X)$ geodezik eğrilik fonksiyonudur. Birim normal vektör alanı

$$N = \frac{1}{\sqrt{|Q^2 - \epsilon v^2|}}\left(\eta Q X' - vX \wedge X'\right)$$

bulunur. Dolayısıyla ikinci temel formun bileşenleri

$$e = \frac{1}{\sqrt{|Q^2 - \epsilon v^2|}}\left(\epsilon Q\left(F - QJ\right) - Q'v + Jv^2\right), \quad f = \frac{Q}{\sqrt{|Q^2 - \epsilon v^2|}}, \quad g = 0$$

olarak bulunur. Gauss eğriliği

$$K = \frac{Q^2}{\left(Q^2 - \epsilon v^2\right)^2},$$

ikinci Gauss eğriliği

$$K_{II} = \frac{1}{2Q^2\left|Q^2 - \epsilon v^2\right|^{\frac{3}{2}}}\left(Jv^4 + \epsilon Q\left(F - 2QJ\right)v^2 + 2\epsilon Q^2 Q' v + Q^3\left(F + QJ\right)\right),$$

ve Ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2\left|Q^2 - \epsilon v^2\right|^{\frac{3}{2}}}\left(\epsilon J v^2 - \epsilon Q' v - Q\left(F + QJ\right)\right)$$

olarak bulunur. Burada $Q \neq 0$ olduğundan $K \neq 0$ dır. Buradan şu sonuçlara ulaşabiliriz:

1. $K_{II} = 0 \Leftrightarrow Q' = J = F = 0 \Leftrightarrow H = 0$,
2. $K_{II} = H$, $Q' = J = F = 0$ ve $K_{II} = H = 0$ ifadeleri $K_{II} = H \Rightarrow Q' = J = F = 0 \Rightarrow K_{II} = 0 = H \Rightarrow K_{II} = H$ olduğundan denktir.

□

Dikkat edilecek olunursa $c\sqrt{|Q^2 - \epsilon v^2|}$ ifadesinin $v$ değişkenine göre bir rasyonel fonksiyon olması ancak ve ancak $c = 0$ olması ile mümkündür. $aK_{II} + bH + cK = 0$ ifadesinin $v$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$\left(aK_{II} + bH + cK\right)_v = 0$$

$$a\left(K_{II}\right)_v + bH_v + cK_v = 0$$

olur.

$$a\left[\frac{1}{2Q^2D^5}\left[-\epsilon Jv^5+Q\left(2QJ+F\right)v^3+4Q^2Q'v^2+\epsilon Q^3\left(5F-QJ\right)v+2\epsilon Q^4Q'\right]\right]$$
$$+b\left[\frac{1}{2D^5}\left[Jv^3-2Q'v^2+\left(-3\epsilon QF-\epsilon Q^2J\right)v-\epsilon Q^2Q'\right]\right]+c\left[\frac{4\epsilon Q^2v}{D^6}\right]=0$$

denklemine ulaşılır. Eşitliğin paydaları eşitlenir ve payları kullanılırsa, ayrıca $D^2=Q^2-\epsilon v^2$ ve $c=0$ yerine yazılırsa

$$a\left(Q^2-\epsilon v^2\right)\left[-\epsilon Jv^5+Q\left(2QJ+F\right)v^3+4Q^2Q'v^2+\epsilon Q^3\left(5F-QJ\right)v+2\epsilon Q^4Q'\right]$$
$$+bQ^2\left(Q^2-\epsilon v^2\right)\left[Jv^3-2Q'v^2+\left(-3\epsilon QF-\epsilon Q^2J\right)v-\epsilon Q^2Q'\right]=0$$

düzenleme yapılırsa

$$\begin{aligned}&aJv^7-\epsilon Q\left(3aQJ+aF+bQJ\right)v^5-2\epsilon\left(2a-b\right)Q^2Q'v^4\\&+Q^3\left(3aQJ-4aF+2bQJ+3bF\right)v^3+Q^4Q'\left(2a-b\right)v^2\\&+\epsilon Q^4\left(\left(5a-3b\right)QF-\left(a+b\right)Q^2J\right)v+\epsilon\left(2a-b\right)Q^6Q'=0\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin sıfıra eşit olması için $v$'ye göre bütün kuvvet katsayılarının sıfır olması gerekir. Yani

$$\begin{aligned}&v^7 && :aJ=0\\&v^5 && :\epsilon Q\left(3aQJ+aF+bQJ\right)=0\\&v^4 && :2\epsilon\left(2a-b\right)Q^2Q'=0\\&v^3 && :Q^3\left(3aQJ-4aF+2bQJ+3bF\right)=0\\&v^2 && :Q^4Q'\left(2a-b\right)=0\\&v^1 && :\epsilon Q^4\left(\left(5a-3b\right)QF-\left(a+b\right)Q^2J\right)=0\\&v^0 && :\epsilon\left(2a-b\right)Q^6Q'=0\end{aligned}$$

Eğer $a\neq 0$ ise $v^7$ ve $v^5$ katsayılarının sıfır olması için $J=0$ ve $F=0$ olmalıdır. Eğer $a=0$ olduğunda $b\neq 0$ dır, $v^5$ ve $v^3$ ün katsayılarının sıfır olması için $J=0$ ve $F=0$ olmalıdır. Her iki durumda da $J=F=0$ olmalıdır. $\alpha''=\epsilon\left(F-QJ\right)X'=0$ olduğundan $\alpha$ bir doğru olur. Böylece $M$ yüzeyi 1. veya 3.çeşit sağ konoidlerden biridir.

Kabul edelim ki bundan başka $2a - b \neq 0$ durumunda, yani $v^4$, $v^2$ ve $v^0$ ın katsayılarının sıfır olması için $Q' = 0$ olmalıdır. Bu nedenle $K_{II} = H = 0$ olur. Bu durumda $M$ yüzeyi 1., 2. veya 3. çeşit helikoidlerden herhangi birisi olur.

**Durum 2**: $X'$ null olsun. $M$ regle yüzeyi

$$f(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$$

ile verilsin, burada

$$\langle X, X\rangle = 1, \;\; \langle X', X'\rangle = 0, \;\; \langle \alpha', \alpha'\rangle = \xi\,(=\pm 1)\,, \;\; F = \langle \alpha', X'\rangle = 0$$

dır. $X \wedge X'$ ve $X'$ ortogonal null vektörleri olduğundan $X \wedge X'$ ile $X'$ lineer bağımlıdır ve $X \wedge X' = X'$ olarak alınabilir. Dikkat edilecek olunursa $X'$ tek kanatlı bir hiperbolidde bir null doğrultudur ve $X$ bir doğrudur. Böylece $X'' = 0$ olarak alabiliriz.

Her zaman olduğu gibi, $Q = \langle \alpha', X \wedge X'\rangle$ olduğundan $Q = \langle \alpha', X'\rangle$ yazılabilir. Birinci temel formun bileşenleri

$$E = \xi + 2Qv, \quad F = 0 \;\text{ ve }\; G = 1$$

olarak bulunur. Böylece $EG - F^2 = \xi + 2Qv$ olur. $\{\alpha', X, \alpha' \wedge X\}$ hareketli çatının işaretleri $\xi$, $+1$, $-\xi$ dir. Baz yardımıyla

$$\begin{aligned} X' &= \langle X', \alpha'\rangle \alpha' + \langle X', X\rangle X + \langle X', \alpha' \wedge X\rangle \alpha' \wedge X \\ &= \xi\alpha' + 0.X - \xi Q\alpha' \wedge X \\ &= \xi Q\alpha' - \xi Q\alpha' \wedge X \end{aligned}$$

elde edilir. $X'' = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} Q &= \langle \alpha', X'\rangle \\ Q' &= \langle \alpha'', X'\rangle + \langle \alpha', X''\rangle \\ &= \langle \alpha'', X'\rangle + \langle \alpha', 0\rangle \\ &= \langle \alpha'', X'\rangle \end{aligned}$$

$Q' = \langle \alpha'', X' \rangle = -\xi Q \langle \alpha'', \alpha' \wedge X \rangle$ olur. Böylece $\langle \alpha'', \alpha' \wedge X \rangle = -\frac{\xi Q'}{Q}$ bulunur. Birim normal vektör alanı

$$N = \frac{\alpha' \wedge X - vX'}{\sqrt{|\xi + 2Qv|}}$$

elde edilir. İkinci temel formun bileşenleri

$$e = \frac{-\frac{\xi Q'}{Q} - vQ'}{\sqrt{|\xi + 2Qv|}}, \quad f = \frac{Q}{\sqrt{|\xi + 2Qv|}} \text{ ve } g = 0$$

şeklinde bulunur. Gauss eğriliği

$$K = \frac{Q^2}{(\xi + 2Qv)^2},$$

ikinci Gauss eğriliği

$$K_{II} = \frac{1}{2} \frac{\xi Q'}{Q |\xi + 2Qv|^{\frac{3}{2}}}$$

ve ortalama eğriliği

$$H = -\frac{1}{2} \frac{\frac{\xi Q'}{Q} + vQ'}{|\xi + 2Qv|^{\frac{3}{2}}}$$

olarak bulunur. Buna göre

$$K_{II} = 0 \Leftrightarrow Q' = 0 \Leftrightarrow H = 0$$

olduğu açıktır, buradan da

$$K_{II} = H \Leftrightarrow Q' = 0 \Leftrightarrow K_{II} = H = 0$$

olduğunu görüyoruz.

$aK_{II} + bH + cK$ sabit olduğundan $(aK_{II} + bH + cK)_v = 0$ olur. Buradan

$$a (K_{II}) v + bH_v + cK_v = 0$$

$$a \left[ -\frac{3}{2} \frac{Q'v}{|\xi + 2Qv|^{\frac{5}{2}}} \right] + b \left[ \frac{1}{2} \frac{Q (2\xi^2 + 5Q\xi v + 2Q^2 v^2)}{|\xi + 2Qv|^{\frac{7}{2}}} \right] + c \left[ -\frac{4Q^3}{(\xi + 2Qv)^3} \right] = 0$$

denklemine ulaşılır. Eşitliğin paydaları eşitlenir ve payları kullanılırsa, ayrıca $D^2 = \xi + 2Qv$ ve $c = 0$ yerine yazılırsa

$$2bQ^2 Q' v^2 + \xi (6a - 5b) QQ'v + (3a - 2b) Q' = 0$$

elde edilir. Bu ifadenin sıfıra eşit olması için $v$'ye göre bütün kuvvet katsayılarının sıfır olması gerekir. Yani

$v^2 \quad : 2bQ^2Q' = 0,$

$v^1 \quad : \xi\,(6a - 5b)\,QQ' = 0$

$v^0 \quad : (3a - 2b)\,Q' = 0$

olur. $a^2 + b^2 \neq 0$ olduğundan $Q' = 0$ anlaşılır. Sonuç olarak, $K_{II} = H = 0$ olur. Bu durumda $M$ yüzeyi 2.çeşit Enneper yüzeyinin eşleniğidir. Her iki durumda da $aK_{II} + bH + cK = 0$ sonucuna ulaşırız.

**Sonuç 4.3.1.** 1., 2. , 3. *çeşit helikoid ve* 2.*çeşit Enneper yüzeyinin eşleniği yüzeyler açılabilir olmayan yüzeylerdir. Yani minimal ve ikinci flat yüzeylerdir.* $K_{II}$, $H$ *ve* $K$ *nın lineer kombinasyonu* $aK_{II} + bH + cK$ *olur. Bu ifade de* $cK$ *nın* $c = 0$ *olması dışında hiçbir doğrultman boyunca sabit değildir.*

**Sonuç 4.3.2.** $M$ *açılabilir olmayan regle yüzeyi* $X$ *vektör alanı doğrultusunda her yerde null dır.* $M$ *yüzeyi* $f(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$ *olsun. Öyleki* $\langle \alpha', X' \rangle = 0$, $\langle X, X \rangle = 0$, $\langle X', X' \rangle = 1$ *ve* $X \wedge X' = X$ *dir. Fakat* $\det I = EG - F^2 = -F^2$ *olarak bulunur. Yani* $F \neq 0$ *dır. Kabul edelim ki* $F = \langle \alpha', X \rangle > 0$ *olsun, O halde birim normal vektör alanı*

$$N = \frac{\alpha' \wedge X + Xv}{F}$$

*ve ikinci temel formun bileşenleri*

$$e = \frac{(\alpha''\alpha'X) + (\langle \alpha'', X \rangle + \langle \alpha'XX'' \rangle)\,v - v^2}{F}, \quad f = \frac{\langle X', \alpha' \wedge X + Xv \rangle}{F} = -1$$

*ve*

$$g = 0$$

*olur. Bu ifadelerden*

$$H = \frac{1}{F} \quad ve \quad K_{II} = -\frac{1}{F}$$

*dir. Böylece* $K_{II} + H = 0$ *olur.*

**Sonuç 4.3.3.** *$K_{II} + H = 0$ eşitliği $\mathbb{E}_1^3$ de her açılabilir olmayan regle yüzeyin $aK_{II} + bH$ özelliklerini içinde barındırır. $aK_{II} + bH$ özelliğinde $2a - b \neq 0$ ifadesi sabittir[19].*

## 4.4 3-Boyutlu Minkowski Uzayda Doğrultman Vektörüne Göre Regle Weingarten Yüzeylerin Sınıflandırılması

$\mathbb{E}_1^3$ Minkowski uzayında doğrultman $X$ ve türevi $X'$ non-null ise $M$ regle yüzeyine $M_1^1$ sınıfından; eğer $X$ non-null, $X'$ bir null vektör alanı ise $M$ regle yüzeyine $M_1^0$ sınıfından; $X$ null ise $M$ ye $M_0$ sınıfından regle yüzey denir.

Burada, $M_0$ veya $M_1^1$ sınıfları için $M$ açılabilir olmayan regle yüzeyin $K$, $K_{II}$, $H$ ve $H_{II}$ eğriliklerinin formüllerini belirleyelim[22].

**Durum1:** $M \in M_1^1$ durumunu inceleyelim. $M$ yüzeyi

$$f(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$$

ile verilsin. Öyleki

$$\langle X, X \rangle = \epsilon, \quad \langle X', X' \rangle = \eta, \quad \langle \alpha', X' \rangle = 0, \quad \text{ve} \quad \epsilon, \eta \in \{-1, 1\}$$

olsun. Bu nedenle $M$ nin striksiyon çizgisi $\alpha$ olsun. Birinci temel formun bileşenleri

$$E = \langle \alpha', \alpha' \rangle + \eta v^2, \quad F = \langle \alpha', X \rangle, \quad G = \epsilon$$

olsun. $X, X', X \wedge X'$ hareketli çatının işaretleri sırasıyla $\epsilon, \eta, -\epsilon\eta$ olsun.

$$\alpha' = \epsilon F X - \epsilon\eta Q X \wedge X'$$

denklemi verilebilir. Burada $Q = (\alpha', X, X')$ dağılma parametresidir. Öte yandan

$$EG - F^2 = -\eta Q^2 + \epsilon\eta v^2,$$

$$X'' = \epsilon\eta(-X + JX \wedge X')$$

olur. Burada $J = (X'', X', X)$ sabiti geodezik eğrilik fonksiyonu ve birim normal vektör alanı

$$N = \frac{1}{\sqrt{|Q^2 - \epsilon v^2|}} \left(\eta Q X' - vX \wedge X'\right)$$

olarak bulunur. Bu sebeple İkinci temel formun bileşenleri

$$e = \frac{1}{\sqrt{|Q^2 - \epsilon v^2|}} \left(\epsilon Q \left(F - QJ\right) - Q'v + Jv^2\right), \quad f = \frac{Q}{\sqrt{|Q^2 - \epsilon v^2|}}, \quad g = 0$$

elde edilir. $\lambda = \frac{F}{Q}$ denilirse

$$K = \frac{Q^2}{\left(Q^2 - \epsilon v^2\right)^2}, \tag{4.4.1}$$

$$K_{II} = \frac{1}{2} \frac{\frac{J}{Q^2}v^4 + \epsilon\left(\lambda - 2J\right)v^2 + 2\epsilon Q'v + Q^2\left(\lambda + J\right)}{|Q^2 - \epsilon v^2|^{\frac{3}{2}}}, \tag{4.4.2}$$

$$H = \frac{1}{2} \frac{\epsilon J v^2 - \epsilon Q'v - Q^2\left(\lambda + J\right)}{|Q^2 - \epsilon v^2|^{\frac{3}{2}}} \tag{4.4.3}$$

ve

$$H_{II} = \frac{1}{2} \frac{-\frac{2J}{Q^2}v^4 + \epsilon\left(5J + 2\lambda\right)v^2 + 3\epsilon Q'v + Q^2\left(\lambda - 3J\right)}{|Q^2 - \epsilon v^2|^{\frac{3}{2}}} \tag{4.4.4}$$

elde edilir.

**Sonuç 4.4.1.** *Bu durumda* $K_{II} = 0 \Longleftrightarrow H = 0 \Longleftrightarrow H_{II} = 0$ *dır.*

**Durum 2:** $M \in M_0$ durumunu inceleyelim. $M$ yüzeyi

$$f\left(u, v\right) = \alpha\left(u\right) + vX\left(u\right)$$

ile verilsin. Öyleki

$$\langle \alpha', X' \rangle = 0, \quad \langle X, X \rangle = 0, \quad \langle X', X' \rangle = 1 \text{ ve } X \wedge X' = X$$

olsun. Fakat $\det I = -F^2$ dir. Yani $F \neq 0$ olur. Bu sebeple

$$N = \frac{\{\alpha' \wedge X + Xv\}}{|F|}$$

olur. İkinci temel formun bileşenleri

$$
\begin{aligned}
e &= \frac{1}{|F|}\left\{(\alpha''\alpha' X) + (\langle \alpha'', X\rangle + (\alpha' X X''))\, v - v^2\right\}, \\
f &= \frac{1}{|F|}\langle X', \alpha' \wedge X + X v\rangle = -\frac{F}{|F|}, \\
g &= 0
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. Buradan

$$
K = \frac{1}{F^2}, \quad K_{II} = -\frac{1}{|F|}, \quad H = \frac{1}{|F|} \text{ ve } H_{II} = \frac{1}{|F|}
$$

elde edilir.

Bu bölümde $M$ regle Weingarten yüzeyinin $M_0$ veya $M_1^1$ sınıfından olanlar incelenecektir. $K$, $K_{II}$, $H$ ve $H_{II}$ eğriliklerinin herhangi ikisi arasında aşikar olmayan bir fonksiyonel bağıntı vardır. Dikkat edilecek olunursa her açılabilir olmayan regle yüzey $\mathbb{R}_1^3$ de null doğrultmanı ile daima $K = K_{II}^2 = H^2 = H_{II}^2$ Weingarten bağıntısını sağlar. Burada şimdilik $M \in M_1^1$ durumunu araştıracağız.

$M$ açılabilir olmayan yüzeyinin $K$, $K_{II}$, $H$ ve $H_{II}$ eğrilikleri olsun. $\{A, B\}$, $A \neq B$ parçaları için aşikar olmayan bir fonksiyonel bağıntı $\phi(A, B) = 0$ varsa $M$ yüzeyine $\{A, B\}-$Weingarten yüzeyi denir. Buna uyan eşitliğin Jakobiyen determinantı sıfıra denktir. Yani

$$
\frac{\partial (A, B)}{\partial (u, v)} \equiv 0
$$

dır.

Burada $\mathbb{E}_1^3$ de $\{H, H_{II}\} - W - \textit{yüzeyini}$ tartışacağız. $\mathbb{E}_1^3$ de $M \in M_1^1$ açılabilir olmayan regle yüzeyi (4.4.1) ve (4.4.2) den

$$
W = H_u (H_{II})_v - H_v (H_{II})_u = \frac{1}{2Q^3 (Q^2 - \epsilon v^2)^4} \sum_{i=0}^{7} A_i v^i,
$$

elde edilir. Burada $A_i = A_i(u)$ katsayıları $u$ nun reel değerli fonksiyonlarıdır. Kabul edelim ki $W = 0$ olsun. Bu durumda $A_0, A_1$ ve $A_7$ katsayıları sıfırdır. Buradan

$$
Q' (3QJ' - 3Q'J + Q\lambda' - Q'\lambda) = 0 \qquad (4.4.5)
$$

$$QJJ' - Q'J^2 + 4QJ'\lambda - 4Q'J\lambda + Q\lambda\lambda' - Q'\lambda^2 = 0 \tag{4.4.6}$$

$$2J\left(QJ' - Q'J\right) = 0 \tag{4.4.7}$$

elde edilir. İlk olarak $Q' = 0$ kabul edilirse $Q$ sabit olur. Bu (4.4.7) de göz önüne alınırsa $\left(J^2\right)' = 0$ olur ve $J$ sabittir. Bu durum (4.4.6) da göz önüne alınır ve $\left(\lambda^2\right)' = 0$ sonucuna ulaşılır, yani $\lambda$ sabittir. Böylece

$$W = 0 \Longleftrightarrow Q, J, F \ sabittir,$$

olur. Bu ise $M$ nin helikoidal regle yüzey olması demektir.

Bundan sonra, $Q' \neq 0$ olduğunu kabul edeceğiz. $3QJ' - 3Q'J + Q\lambda' - Q'\lambda = 0$ olduğundan $\left(\frac{3J}{Q} + \frac{\lambda}{Q}\right)' = 0$ elde edilir. (4.4.7) den $\left(\frac{J}{Q^2}\right)' = 0$ bulunur. Böylece $\frac{J}{Q}$ ve $\frac{\lambda}{Q}$ ifadelerinin her ikiside sabittir.

$$a = \frac{J}{Q} \quad \text{ve} \quad b = \frac{\lambda}{Q} \tag{4.4.8}$$

denilirse

$$H = \frac{1}{2}\frac{\epsilon a Q v^2 - \epsilon Q' v - (b + a)\,Q^3}{\left|Q^2 - \epsilon v^2\right|^{\frac{3}{2}}}$$

ve

$$H_{II} = \frac{1}{2}\frac{-\frac{2a}{Q}v^4 + \epsilon\,(5a + 2b)\,Qv^2 + 3\epsilon Q' v + (b - 3a)\,Q^3}{\left|Q^2 - \epsilon v^2\right|^{\frac{3}{2}}}$$

olarak yazılır. Böylece

$$W = -\frac{\left(QQ'' - 2\left(Q'\right)^2\right)\left(av^6 + \epsilon b Q^2 v^4 - (a + b)\,Q^4 v^2\right)}{2Q^2\left(Q^2 - \epsilon v^2\right)^4} = 0$$

olduğu sonucuna ulaşılır. Buradan

$$av^6 + \epsilon b Q^2 v^4 - (a + b)\,Q^4 v^2 = 0 \Longleftrightarrow a = b = 0$$

olduğunu gözlemleriz.

**Altdurum 1.1:** $a = b = 0$ durumunda $J = F = 0$ olur. Yani $\alpha'' = \epsilon\,(F - QJ)\,X' = 0$ ve $\alpha$ striksiyon çizgisi bir doğrudur. $\langle \alpha', X' \rangle = F = 0$ olduğundan $X$ ile $\alpha$ ortogonaldir. Bu sebeple $M$ Lorentzian konoiddir.

**Altdurum 1.2:** $a^2+b^2 \neq 0$ durumunda

$$QQ'' - 2\left(Q'\right)^2 = 0$$

olur. Bu diferansiyel denklemin genel çözümü

$$Q = \frac{c_1}{s+c_0}$$

dır, burada $c_0, c_1$ sabitlerdir. $u$ parametre değişimi ile $c_0 = 0$ olarak bulunabilir. Böylece

$$Q = \frac{c_1}{u}, \quad J = \frac{c_2}{u}, \quad F = \frac{c_3}{u^2}$$

olur, burada $c_1, c_2, c_3$ sabitler $c_1 \neq 0$ ve $c_2^2 + c_3^2 \neq 0$ dır. Not edelim ki $X$ regüler doğrultman eğrisinin yay parametresi $u$ dur.

**Teorem 4.4.1.** *$\{A,B\} - W-$yüzeylerin sınıflandırılması bunlar $M_1^1$ veya $M_0$ sınıfındandır, burada $(A,B) \in \{(H,K_{II}),(H,H_{II}),(K_{II},H_{II})\}$ dir.*
*$(A,B) \in \{(H,K_{II}),(H,H_{II}),(K_{II},H_{II})\}$ ve $M$*

$$f(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$$

*ile verilen açılabilir olmayan regle yüzey $M_1^1$ veya $M_0$ sınıfından olsun. Bu durumda $M$ bir $\{A,B\} - W-$yüzeyidir ancak ve ancak $M$ aşağıdaki özelliklerin birini sağlar:*

1. *$M \in M_1^1$ ve $M$ aşağıdaki yüzeylerden birisidir:*

   *(i) $M$ bir helikoidal regle yüzeydir;*

   *(ii) $M$ bir Lorentzian konoiddir;*

   *(iii) $M$*

   $$Q(u) = \frac{c_1}{u}, \quad J(u) = \frac{c_2}{u}, \quad F(u) = \frac{c_3}{u^2},$$

   *invaryantlarına sahip bir regle yüzeydir, burada $c_1, c_2, c_3$ ifadeleri $c_1 \neq 0$ ve $c_1^2 + c_2^2 \neq 0$ şartını sağlayan reel sabitler ve $u$ da $X$ in yay parametresidir.*

(iv) *Eğer $M$ minimal ise bu durumda $M$ Lorentzian helikoid dir.*

2. *$M \in M_0$ dır[22].*

**Teorem 4.4.2.** *$\{A, B\} - W-$yüzeylerin sınıflandırılması bunlar $M_1^1$ veya $M_0$ sınıfındandır, burada $(A, B) \in \{(K, H), (K, K_{II}), (K, H_{II})\}$ dir.*
*$(A, B) \in \{(K, H), (K, K_{II}), (K, H_{II})\}$ ve $M$*

$$f(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$$

*ile verilen açılabilir olmayan regle yüzeyi $M_1^1$ veya $M_0$ sınıfından olsun. Bu durumda $M$ bir $\{A, B\} - W-$yüzeyi ancak ve ancak aşağıdaki özelliklerden birini sağlar:*

1. *$M \in M_1^1$ ve $M$ bir helikoidal regle yüzeydir. Ayrıca $M$ minimal ise Lorentzian helikoid dir.*

2. *$M \in M_0$ dır[22].*

Bu bölümde $\mathbb{E}_1^3$ de açılabilir olmayan regle yüzeylerin lineer kombinasyonu $aK_{II} + bH + cH_{II} + dK$ ifadesini $M_1^1$ sınıfında karakterize edeceğiz. Öyleki $a, b, c, d$ sabitleri için $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ olmak üzere $aK_{II} + bH + cH_{II} + dK$ her doğrultman boyunca sabittir.

**Teorem 4.4.3.** *$\mathbb{E}_1^3$ de $M$*

$$f(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$$

*ile verilen açılabilir olmayan regle yüzeyi $M_1^1$ sınıfında olsun. $a, b, c, d$ ifadeleri $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, olan reel sabitler olmak üzere kabul edelim ki $aK_{II} + bH + cH_{II} + dK$ ifadesi $M$ nin her doğrultmanı boyunca sabit olsun. Bu durumda $d = 0$ ve $aK_{II} + bH + cH_{II} + dK = 0$ dir. Ayrıca $M$ aşağıdaki özellikleri sağlar:*

1. Eğer $2a - b + 3c \neq 0$ ise $M$ yüzeyi $Q$ invaryantı sıfırdan farklı olan bir ortogonal regle yüzeydir.

2. Eğer $2a - b + 3c = 0$ ise $M$ bir konoidal regle yüzeyi veya $2JQ + F = 0$ bağıntısını sağlar.

**İspat.** Not edelim ki $v$ parametresine göre $d\sqrt{|Q^2 - \epsilon v^2|}$ bir rasyonel fonksiyondur ancak ve ancak $d = 0$ dır. $aK_{II} + bH + cH_{II} + dK = sabit$ olduğundan $(aK_{II} + bH + cH_{II} + dK)_v = 0$ olur. Burada $d = 0$ alınırsa

$$(a - 2c)\, J = 0 \tag{4.4.9}$$

$$(3a + b - 5c)\, J + (a + 2c)\, \lambda = 0 \tag{4.4.10}$$

$$(-3a - 2b + 4c)\, J + (4a - 3b + 5c)\, \lambda = 0 \tag{4.4.11}$$

$$(-a - b + c)\, J + (5a - 3b + 7c)\, \lambda = 0 \tag{4.4.12}$$

$$(2a - b + 3c)\, Q' = 0 \tag{4.4.13}$$

olarak bulunur. □

**Durum 1**. $2a - b + 3c \neq 0$ durumunda (4.4.13) den $Q' = 0$ elde edilir.

**Altdurum 1.1** $J = 0$ durumunda (4.4.10) ifadesi 3 ile çarpılıp (4.4.11) ve (4.4.12) ile taraf tarafa toplanırsa

$$6\,(2a - b + 3c)\, \lambda = 0$$

denklemine sahip oluruz, buradan ise $\lambda = 0$ elde edilir.

**Altdurum 1.2** $J \neq 0$ durumunda (4.4.9) dan $a - 2c = 0$ dır. Yani (4.4.10), (4.4.11) ve (4.4.12) yeniden düzenlenirse

$$(b + c)\, J + 4c\lambda = 0 \tag{4.4.14}$$

$$(-2b - 2c)\, J + (-3b + 13c)\, \lambda = 0 \tag{4.4.15}$$

$$(-b-c)\,J+(-3b+17c)\,\lambda=0 \tag{4.4.16}$$

bulunur. (4.4.16) denklemi 2 ile çarpılır ve bundan (4.4.15) denklemi çıkartılırsa

$$-3\,(b-7c)\,\lambda=0$$

elde edilir. Eğer $b-7c=0$ ise $2a-b+3c=2\,(a-2c)-(b-7c)=0$ bulunur ki bu bir çelişkidir. Böylece $b-7c\neq 0$ dır. Yani $\lambda=0$ olur. Öte yandan $a=-2b=2c\,(\neq 0)$ ve (4.4.14) sağlanmış olur.

Bu durumda $M$ ortogonal regle yüzeydir.

**Durum 2.** $2a-b+3c=0$ durumunda $(4.4.10)\,,(4.4.11)$ ve $(4.4.12)$ yeniden düzenlenirse

$$(5a-2c)\,J+(a+2c)\,\lambda=0 \tag{4.4.17}$$

$$(-7a-2c)\,J+(-2a-4c)\,\lambda=0 \tag{4.4.18}$$

$$(-3a-2c)\,J+(-a-2c)\,\lambda=0 \tag{4.4.19}$$

elde edilir.

**Altdurum 2.1**. $J=0$ durumunda $(a+2c)\,\lambda=0$ sonucu çıkar ki böylece $a+2c=0$ veya $\lambda=0$ bulunur. Birinci durumda $a=2b=-2c\,(\neq 0)$, ikinci durumda ise $3K_{II}=-6H=2H_{II}$ ile $M$ bir konoiddir. Buradan ise $aK_{II}+bH+cH_{II}=a\,(K_{II}+2H)+c\,(3H+H_{II})=0$ elde edilir. $\lambda=0$ durumda da $2K_{II}+H-H_{II}=0$ sonucuna ulaşırız.

**Altdurum 2.2.** $J\neq 0$ durumunda (4.4.9) dan $a-2c=0$ dir. Böylece $(4.4.17)\,,(4.4.18)$ ve $(4.4.19)$ denklemlerinden $2JQ+F=0$ denklemi elde edilir. Bunun yanında $7a=2b=14c\,(\neq 0)$ olur.

Her durumda daima $aK_{II}+bH+cH_{II}+dK=0$ denklemi sağlanır.

Yukarıdaki teoremdeki adı geçen $K_{II}$, $H$ ve $H_{II}$ regle yüzeyler arasındaki ilişkiyi aşağıdaki tablodaki bağıntılarla verebiliriz.

| $X$ ve $X'$ null olmasın | Keyfi $Q, J, F$ için koşullar | $K_{II}, H$ ve $H_{II}$ arasındaki bağıntılar |
|---|---|---|
| $2a - b + 3c \neq 0$ | $Q' = F = 0$ | $2K_{II} - H + H_{II} = 0$ Özellikle $J = 0$ ise $K_{II} = H = H_{II} = 0$ |
| $2a - b + 3c = 0$ | $J = 0$ | $2K_{II} + H - H_{II} = 0$ Özellikle $F = 0$ ise $3K_{II} = -6H = 2H_{II}$ |
| | $2JQ + F = 0$ | $2K_{II} + 7H + H_{II} = 0$ |

[22].

## 4.5 3-Boyutlu Minkowski Uzayında Regle Yüzeylerin Eğrilikleri

$a$, $b$, $c$ sabit olmak üzere 3-boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ de açılabilir olmayan regle yüzeyi

$$aH^2 + 2bHH_{II} + cH_{II}^2 = sabit, \tag{4.5.1}$$

denklemini sağlıyorsa $HH_{II}$ kuadratik yüzeyi ve

$$aK^2 + 2bKH_{II} + cH_{II}^2 = sabit, \tag{4.5.2}$$

denklemini sağlıyorsa $KH_{II}$ kuadratik yüzeyi olarak adlandırılır[16].

$\mathbb{E}_1^3$ de $M$ regle yüzeyi

$$f = f(u, v) = \alpha(u) + vX(u), \quad u \in J, \quad v \in I$$

ile verilsin. Böyle bir regle yüzeyde $\alpha$ taban eğrisi ve $X$ ise vektör alanının doğrultmanıdır. $\alpha'$ ve $X$ in causal karakterlerine göre dört durumu söz konusudur:

(1) $\alpha'$ ve $X$ non-null ve lineer bağımsızdırlar.

(2) $\langle \alpha', X \rangle \neq 0$ olmak üzere $\alpha'$ null ve $X$ non-null,

(3) $\langle \alpha', X \rangle \neq 0$ olmak üzere $\alpha'$ non-null ve $X$ null,

(4) $\langle \alpha', X \rangle \neq 0$ olmak üzere $\alpha'$ ve $X$ null

dır. İlk olarak birinci durumu düşünelim:

**Durum 1.** $X$ vektör alanının doğrultmanı sabitse $M$ regle yüzeyi silindirik, aksi halde non-silindiriktir. $\alpha$ taban eğrisi ve doğrultman vektör alanı $X$ non-null olsun. Her $u \in J$ için $X$ in normalleştirilmiş şekli $\langle X(u), X(u)\rangle = \epsilon(\pm 1)$ olur. Bu durumda, $\alpha'$ vektör alanı ve $X$ doğrultmanı olmak üzere regle yüzeyler karakterlerine göre 5 farklı çeşide sahiptir. Bunlar:

$M$ regle yüzeyinin $\alpha$ taban eğrisi spacelike ise $M_+$ tipinde, timelike ise $M_-$ tipindedir. Ayrıca $M_+$ tipinin regle yüzeyinde 3 tipe ayrılabilir.

$X$ vektör alanı spacelike ve $X'$ non-null ise $M$ ye $M_+^1$ tipinde,

$X$ vektör alanı spacelike ve $X'$ null ise $M$ ye $M_+^2$ tipinde,

$X$ vektör alanı timelike, $X'$ spacelike ise $M$ ye $M_+^3$ tipindedir denir.

Regle yüzey $M_-$ tipinde ise doğrultman vektör alanı daima spacelike dır.

$X$ spacelike ve $X'$ ($X$ in türevi) non-null ise $M$ ye $M_-^1$ tipinde,

$X$ spacelike ve $X'$ null ise $M$ ye $M_-^2$ tipindedir denir.

$M$ regle yüzeyine (4) durumunda ise $M$ ye **null scroll** denir. Null scroll un tipik örneklerinden biri aşağıda **B-scroll** için tanımlanmıştır:

$\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha(u)$ null eğri ve $\{A, B, C\}$ Cartan çatı olsun. Bu durumda $A, B, C$ çatı elemanları $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha$ boyunca aşağıdaki koşulları sağlar:

$$\langle A, A\rangle = \langle B, B\rangle = 0, \qquad \langle A, B\rangle = -1,$$

$$\langle A, C\rangle = \langle B, C\rangle = 0, \qquad \langle C, C\rangle = -1,$$

ve

$$\alpha' = A$$

$$C' = -aA - k(u)B,$$

burada $a$ sabit ve $k(u)$ fonksiyonu her yerde sıfırdan farklıdır. Böylece

$$f : M \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$$

$$(u, v) \longrightarrow f(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$$

haritası ile verilen $\mathbb{E}_1^3$ de $M$ Lorentz yüzeyine **B-scroll** denir[16].

$\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha(u)$ null eğrisi ve $\{A,B,C\}$ Cartan çatıdır. Yani $A,B,C$ çatı elemanları $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha$ vektör alanı boyunca aşağıdaki koşulları sağlar:

$$sp(\{A,B,C\}) = \mathbb{R}^3, \qquad det(ABC) = 1,$$
$$\langle A,A\rangle = \langle B,B\rangle = 0, \qquad \langle A,B\rangle = -1,$$
$$\langle A,C\rangle = \langle B,C\rangle = 0, \qquad \langle C,C\rangle = -1,$$

ve

$$\alpha'(u) = A(u), \qquad A'(u) = a(u)\,C(u),$$
$$B'(u) = bC(u), \qquad C'(u) = bA(u) + a(u)\,B(u),$$

burada her $u$ için $a(u) \neq 0$ ve $b$ sabittir. Böylece

$$f : M \longrightarrow \mathbb{E}_1^3$$
$$(u,v) \longrightarrow f(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$$

haritası ile verilen $\mathbb{E}_1^3$ de $M$ timelike regle yüzeyine **B-scroll** denir.

$M$ yüzeyinde $N$ birim normal vektör alanı olmak üzere

$$N(u,v) = bvB(u) + C(u)$$

elde edilir[2].

**Teorem 4.5.1.** *$\mathbb{E}_1^3$ de $M$ non-silindirik regle yüzeyinin taban eğrisi spacelike veya timelike olsun. O halde Gauss haritası 1.tip noktasal olması için gerek ve yeter şart $M$ nin aşağıdaki uzaylardan birinin açık bir parçası olmasıdır: 1., 2.ve 3. çeşit helikoidler spacelike veya timelike olur. 2. çeşit Enneper yüzeyinin eşleniği spacelike veya timelike olur[16].*

Bu bölümde 3 boyutlu Minkowski uzayı $\mathbb{E}_1^3$ de $M$ regle $HH_{II}$ kuadratik yüzeyi ve $KH_{II}$ kuadratik yüzeyini inceleyeceğiz. Böylece $M$ regle yüzeyinin ikinci temel formu non-dejenere ise $M$ açılabilir olmayan bir yüzeydir.

**Teorem 4.5.2.** *$a$, $b$, $c$ sabit olmak üzere $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$, $a - 6b + 9c \neq 0$ olsun. Eğer $\mathbb{E}_1^3$ de $M$ açılabilir olmayan $HH_{II}$ kuadratik regle yüzey ise taban eğrisi non-null dır. Bu durumda $M$ yüzeyi aşağıdaki yüzeylerden birinin açık bir parçasıdır:*

(1) $M$ yüzeyi spacelike veya timelike ise 1. çeşit helikoid,

(2) $M$ yüzeyi spacelike veya timelike ise 2. çeşit helikoid,

(3) $M$ yüzeyi spacelike veya timelike ise 3. çeşit helikoid,

(4) $M$ yüzeyi spacelike veya timelike ise 2. çeşit Enneper yüzeyinin eşleniği olur[16].

**İspat.** İspatı iki ayrı durumda yapacağız.

**Durum 1.** $M$ açılabilir olmayan regle yüzeyi $M_+^1$, $M_+^3$ veya $M_-^1$ üç tipinde olsun. O halde $M$ regle yüzeyi

$$f = f(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$$

ile verilsin. Öyleki $\langle X, X \rangle = \epsilon$, $\langle X', X' \rangle = \eta$, burada $\epsilon$,$\eta \in \{-1, 1\}$ ve $\langle \alpha', X' \rangle = 0$ dır. Bu durumda $\alpha$ eğrisi $f$ in striksiyon eğrisi ve $X$ (pseudo) küresel eğrisi $u$ parametresine bağlı yay uzunluğudur. $M$ yüzeyinin birinci temel formunun bileşenleri

$$E = \langle \alpha', \alpha' \rangle + \eta v^2, \quad F = \langle \alpha', X \rangle, \quad G = \epsilon$$

olarak bulunur. Daha sonra kullanacağımız $Q$, $J$ ve $D$ düzgün fonksiyonları aşağıda verilirse

$$Q = \langle \alpha', X \wedge X' \rangle \neq 0, \quad J = \langle X'', X' \wedge X \rangle, \quad D = \sqrt{|EG - F^2|}$$

olur. $\{X, X', X \wedge X'\}$ ortonormal bazına göre

$$\alpha' = \epsilon F X - \epsilon\eta Q X \wedge X'$$
$$X'' = \epsilon\eta\left(-X + J X \wedge X'\right)$$
$$\alpha' \wedge X = \eta Q X'$$

olarak yazılır. Buradan $EG - F^2 = -\eta Q^2 + \epsilon\eta v^2$ eşitliği bulunur. Ve $N$ birim normal vektör alanı

$$N = \frac{1}{D}\left(\eta Q X' - v X \wedge X'\right)$$

olarak bulunur. Buradan $e$, $f$ ve $g$ ikinci temel formun bileşenleri

$$e = \frac{1}{D}\left(\epsilon Q\left(F - QJ\right) - Q'v + Jv^2\right), \quad f = \frac{Q}{D} \neq 0, \quad g = 0$$

elde edilir. Bu nedenle, $K$ Gauss eğriliği

$$K = \frac{Q^2}{D^4},$$

$H$ ortalama eğriliği

$$H = \frac{1}{2D^3}\left(\epsilon J v^2 - \epsilon Q' v - QF - Q^2 J\right)$$

ve $H_{II}$ ikinci ortalama eğriliği

$$H_{II} = \frac{1}{2Q^2 D^3}\left(-2Jv^4 + \left(2\epsilon QF + 5\epsilon Q^2 J\right)v^2 + 3\epsilon Q^2 Q' v + Q^3 F - 3Q^4 J\right) \tag{4.5.3}$$

olarak bulunur.

Kabul edelim ki $Q^2 - \epsilon v^2 > 0$ olsun. $H$ ortalama eğriliğinin $v$ ye göre kısmi türevi alınırsa

$$H_v = \frac{1}{2D^5}\left[Jv^3 - 2Q'v^2 - \epsilon Q\left(3F + QJ\right)v - \epsilon Q^2 Q'\right]$$

ve $H_{II}$ ikinci ortalama eğriliğinin $v$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$\begin{aligned}\left(H_{II}\right)_v =& \frac{1}{2Q^2 D^5}\left[2\epsilon J v^5 + \left(2QF - 3Q^2 J\right)v^3 + 6Q^2 Q' v^2 + \left(7\epsilon Q^3 F + \epsilon Q^4 J\right)v\right. \\ &\left. + \epsilon Q^4 Q'\right]\end{aligned} \tag{4.5.4}$$

olarak bulunur. Şimdi kabul edelim ki açılabilir olmayan regle yüzey $HH_{II}$ kuadratik yüzey olsun. O halde (4.5.1) ifadesinin $v$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$2aHH_v + 2b\left(H_v H_{II} + H\left(H_{II}\right)_v\right) + 2cH_{II}\left(H_{II}\right)v = 0$$

veya

$$aHH_v + b\left(H_v H_{II} + H\left(H_{II}\right)_v\right) + cH_{II}\left(H_{II}\right)v = 0 \tag{4.5.5}$$

olarak bulunur. (4.2.16) (4.2.22) (4.5.3) (4.5.4) de verilen ifadeler (4.5.5) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& a\left[\left(\frac{1}{2D^3}\left(\epsilon J v^2 - \epsilon Q' v - QF - Q^2 J\right)\right)\right. \\
& \left.\left(\frac{1}{2D^5}\left[Jv^3 - 2Q'v^2 - \epsilon Q\left(3F + QJ\right)v - \epsilon Q^2 Q'\right]\right)\right] \\
& + b\left[\left(\frac{1}{2D^5}\left[Jv^3 - 2Q'v^2 - \epsilon Q\left(3F + QJ\right)v - \epsilon Q^2 Q'\right]\right)\right. \\
& \left.\left(\frac{1}{2Q^2D^3}\left(-2Jv^4 + \left(2\epsilon QF + 5\epsilon Q^2 J\right)v^2 + 3\epsilon Q^2 Q' v + Q^3 F - 3Q^4 J\right)\right)\right] \\
& c\left[\left(\frac{1}{2Q^2D^3}\left(-2Jv^4 + \left(2\epsilon QF + 5\epsilon Q^2 J\right)v^2 + 3\epsilon Q^2 Q' v + Q^3 F - 3Q^4 J\right)\right)\right. \\
& \left(\frac{1}{2Q^2D^5}\left(2\epsilon J v^5 + \left(2QF - 3Q^2 J\right)v^3 + 6Q^2 Q' v^2 + 7\epsilon Q^3 F + \epsilon Q^4 J\right)v\right. \\
& \left.\left. + \epsilon Q^4 Q'\right)\right] = 0
\end{aligned}$$

denklemi bulunur. Eğer bu denklemde

$$\begin{aligned}
A_1 =& \epsilon J^2 v^5 - 3\epsilon J Q' v^4 + \left(4QJF - 2Q^2J^2 + 2\epsilon Q'^2\right) v^3 + \left(2Q^2Q'J + 5QQ'F\right) v^2 \\
&+ \left(Q^2Q'^2 + 4\epsilon Q^3 JF + \epsilon Q^4 J^2 + 3\epsilon Q^2 F^2\right) v + \epsilon Q^3 Q' \left(f + QJ\right), \\
B_1 =& 2Q'Jv^6 + \left(8\epsilon QJF + 2\epsilon Q^2 J^2\right) v^5 + \left(-6\epsilon QQ'F + 4\epsilon Q^2 Q' J\right) v^4 \\
&- \left(12\epsilon Q^2 Q'^2 + 8Q^2F^2 + 8Q^3JF + 4Q^4J^2\right) v^3 - \left(26Q^3Q'F + 2Q^4Q'J\right) v^2 \\
&- \left(6Q^4Q'^2 + 10\epsilon Q^4 F^2 - 2\epsilon Q^6 J^2\right) v - 4\epsilon Q^5 Q' F, \qquad (4.5.6) \\
C_1 =& -4\epsilon J^2 v^9 + 16Q^2J^2v^7 - 6Q^2Q'Jv^6 + \epsilon Q^2 \left(4F^2 8QJF - 23Q^2J^2\right) v^5 \\
&+ \epsilon Q^3 Q' \left(18F + 15QJ\right) v^4 + Q^4 \left(18\epsilon Q' + 16F^2 + 28QJF + 14Q^2J^2\right) v^3 \\
&+ 23Q^5Q'Fv^2 + Q^6 \left(9Q'^2 + 7\epsilon F^2 - 20\epsilon QJF - 3\epsilon Q^2 J^2\right) v \\
&+ 3\epsilon Q^7 Q' F - 9\epsilon Q^8 Q' J.
\end{aligned}$$

denilirse

$$aQ^4 A_1 + bQ^2 B_1 + cC_1 = 0 \qquad (4.5.7)$$

bulunur. (4.5.7) denkleminin sol tarafının hesaplanmasında $v$ ye göre verilen polinomun $u$ ya göre fonksiyonlarının katsayıları sıfır olmak zorundadır. (4.5.7) denkleminin $v^{16}$ dereceli ifadenin katsayısı

$$4c\epsilon J^2 = 0$$

elde edilir. Bu nedenle $c \neq 0$ ise $J = 0$ olur. $v^5$ dereceli ifadenin katsayısı

$$4c\epsilon Q^2 F^2 = 0$$

elde edilir. Bu nedenle $Q \neq 0$ ve $c \neq 0$ olduğundan $F = 0$ bulunur. Böylece $J = F = 0$ ise

$$\left(a - 6b + 9c\right) Q'^2 = 0$$

olur. $a - 6b + 9c \neq 0$ olduğundan $Q' = 0$ elde edilir. Bu durumda yüzey minimaldir. $EG - F^2 = \epsilon\eta v^2 - \eta Q^2$ olduğundan $Q^2 - \epsilon v^2 > 0$ bulunur. Bu nedenle, yüzey spacelike yüzey olduğunda $\eta = -1$ veya timelike yüzey olduğunda $\eta = 1$ olur.

Fakat, $(\epsilon, \eta) = (-1, -1)$ imkansızdır. $(\epsilon, \eta) = (-1, 1)$ olsun. O halde $M$ yüzeyi $M_+^3$ tipinde olur. Böylece yüzey 3.çeşit helikoid olur. Eğer $(\epsilon, \eta) = (-1, \pm 1)$ ise $M$ yüzeyi $M_+^1$ veya $M_-^1$ olur. Dolayısıyla regle yüzey 1. çeşit veya 2. çeşit helikoid olur.

Kabul edelim ki $Q^2 - \epsilon v^2 < 0$ olsun. Benzer şekilde $a - 6b + 9c \neq 0$ ise $J = F = 0$ ve $Q' = 0$ elde edilir. Bu nedenle yüzey minimaldir. $EG - F^2 = -\eta\left(Q^2 - \epsilon v^2\right)$ olduğundan $Q^2 - \epsilon v^2 < 0$ dır. Sonuç olarak $M$ yüzeyi spacelike ise $\eta = 1$ veya $M$ yüzeyi timelike ise $\eta = -1$ dir. Bu durumda $\epsilon = 1$ dir. Bu nedenle $\eta = \pm 1$ e bağlı olarak $M$ yüzeyi $M_+^1$ veya $M_-^1$ tipindedir. Böylece yüzey 1. çeşit veya 2. çeşit helikoid olur.

**Durum 2.** $M$ açılabilir olmayan regle yüzeyi $M_+^2$ veya $M_-^2$ tipinde olsun. O halde $M$ yüzeyi

$$f = f(u, v) = \alpha(u) + vX(u)$$

olarak yazılabilir. Bu durumda $\alpha$ taban eğrisi spacelike veya timelike olur. Ayrıca $X$ doğrultman vektör alanı spacelike fakat $X'$ null dır. Yani $\langle \alpha', X \rangle = 0$, $\langle X, X \rangle = 1$, $\langle X', X' \rangle = 0$ ve $\langle \alpha', \alpha' \rangle = \epsilon(\pm 1)$ olarak almak genelliği bozmaz. Aşağıda sıfırdan farklı $q$ ve $R$ fonksiyonları

$$q = \|f_u\|^2 = \varepsilon \langle f_u, f_u \rangle = \varepsilon(\epsilon + 2Rv), \quad R = \langle \alpha', X' \rangle$$

yazılabilir. Burada $f_u$ nun işareti $\varepsilon$ dır. Bu nedenle birinci temel formun bileşenleri

$$E = \varepsilon q, \quad F = 0, \quad G = 1$$

bulunur. $X \wedge X'$ null vektör alanı $X'$ e ortogonal olduğundan $X \wedge X' = X'$ alınabilir. $X'$ hiperboloid de bir null doğrultman olduğundan $\{x \mid \langle x, x \rangle = 1\}$, $X$ bir doğru seçilebilir. Gerekirse $u$ parametresi değiştirilirse, $X'' = 0$ olmalıdır.

$M$ yüzeyinde hareketli çatı elemanları $\{\alpha', X, \alpha' \wedge X\}$ olsun. O halde $X'$ yazılırsa

$$X' = \epsilon R(\alpha' - \alpha' \wedge X) \tag{4.5.8}$$

olur. $M$ de $R$ fonksiyonu heryerde sıfırdan farklı olarak aşağıda yazılabilir. $X'' = 0$ olduğundan (4.5.8) den $X' = \epsilon R(\alpha' - \alpha' \wedge X)$ yardımıyla

$$\alpha'' = -RX + \frac{R'}{R}\alpha' \wedge X \tag{4.5.9}$$

olarak bulunur. Diğer taraftan $M$ yüzeyinin birim normal vektör alanı

$$N = \frac{1}{\sqrt{q}}(\alpha' \wedge X - vX')$$

elde edilir. $e$, $f$ ve $g$ ikinci temel formun bileşenleri

$$e = -\frac{\varepsilon}{\sqrt{q}R}(RR'v + \epsilon R'), \quad f = \frac{\varepsilon}{\sqrt{q}}R, \quad g = 0$$

olarak bulunur. Böylece $K$ Gauss eğriliği

$$K = \frac{R^2}{q^2}, \tag{4.5.10}$$

$H$ ortalama eğriliği

$$H = -\frac{\varepsilon}{2Rq^{\frac{3}{2}}}(RR'v + \epsilon R'), \tag{4.5.11}$$

ve $H_{II}$ ikinci ortalama eğriliği

$$H_{II} = \frac{\varepsilon}{2Rq^{\frac{3}{2}}}(-RR'v + \epsilon R') \tag{4.5.12}$$

olarak bulunur.

Kabul edelim ki $M$ yüzeyi $HH_{II}$ kuadratik yüzeydir. Durum 1 e benzer şekilde

$$(a + 2b + c)\, RR'^2 = 0,$$

$$(3a - 2b - 5c)\, RR'^2 = 0,$$

$$(a - 3b + 2c)\, RR'^2 = 0$$

olur. $a$, $b$, $c$ sıfırdan farklı sabitler ve $R \neq 0$ olduğundan $R' = 0$ olmak zorundadır. Böylece (4.5.11) den $H$ ortalama eğriliği sıfır olur. $M$ yüzeyi minimaldir. Yani $M$ yüzeyi ya 2.çeşit Enneper yüzeyin eşleniği yada spacelike veya timelike yüzeydir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Teorem 4.5.2 ispatındaki durum 1 de eğer $a - 6b + 9c = 0$ ise bu durumda $J = F = 0$ ve $Q'$ keyfi bir ifadedir. (4.2.16) ve (4.5.3) denklemlerinden $H_{II} = -3H$ elde edilir. Durum 2 ve (4.2.7) den

$$\alpha' = -\epsilon\eta Q X \wedge X' \tag{4.5.13}$$
$$X'' = -\epsilon\eta X$$

olur. (4.5.13) diferensiyel denkleminin özel çözümlerinden aşağıdaki regle yüzey örneklerini elde edebiliriz.

1. $(\epsilon, \eta) = (1, 1)$ genelliği bozmaksızın $X(0) = (0, 0, 1)$ alabiliriz. O halde

$$X(u) = (d_1 \sin u, d_2 \sin u, \cos u + d_3 \sin u)$$

olmalıdır. Bazı $d_1$, $d_2$, $d_3$ sabitleri için $-d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 = 1$ sağlanır. $\langle X, X\rangle = 1$ olduğundan $-d_1^2 + d_2^2 = 1$ ve $d_3 = 0$ olmalıdır. Bazı $d_1$ sabiti için

$$\alpha(u) = \left(\mp\sqrt{1 + d_1^2}, -d_1, 0\right) f(u) + E,$$

olmalıdır. Burada $f(u) = \int Q(u)\, du$ ve $E = (e_1, e_2, e_3)$ sabit vektördür. Böylece $M$ yüzeyi

$$f(u, v) = \Big(\mp\sqrt{1 + d_1^2} f(u) + v d_1 \sin u + e_1, \tag{4.5.14}$$
$$-d_1 f(u) \pm v\sqrt{1 + d_1^2} \sin u + e_2, v \cos u + e_3\Big),$$

olur. Burada $d_1$ sabit, $f(u) = \int Q(u)\, du$ ve $(e_1, e_2, e_3)$ sabit vektördür. $d_1 = 0$ ise $M$ yüzeyi 3. çeşit konoid olur.

2. $(\epsilon, \eta) = (1, -1)$ genelliği kaybetmeksizin $X(0) = (0, 0, 1)$ alabiliriz. O halde

$$X(u) = \left(d_1 \sinh u, \pm\sqrt{d_1^2 - 1} \sinh u, \cosh u\right),$$

olur. Burada $d_1 \leq -1$ veya $d_1 \geq 1$ dir. Bu nedenle

$$\alpha(u) = \left(\mp\sqrt{d_1^2 - 1}, d_1, 0\right) f(u) + E,$$

olur. Burada $f(u) = \int Q(u)\,du$ ve $E = (e_1, e_2, e_3)$ sabit vektördür. Böylece $M$ yüzeyi

$$f(u,v) = \left(\mp\sqrt{d_1^2 - 1}f(u) + vd_1 \sinh u + e_1,\right. \tag{4.5.15}$$
$$\left. d_1 f(u) \pm v\sqrt{d_1^2 - 1}\sinh u + e_2, v\cosh u + e_3\right),$$

olur. Burada $d_1 \leq -1$ veya $d_1 \geq 1$ dir. $f(u) = \int Q(u)\,du$ ve $(e_1, e_2, e_3)$ sabit vektördür. Eğer $d_1 = \pm 1$ ise $M$ yüzeyi 1. çeşit konoid olur.

3. $(\epsilon, \eta) = (-1, 1)$ dir. $X(0) = (1, 0, 0)$ alabiliriz. O halde

$$X(u) = \left(\cosh u, d_2 \sinh u, \pm\sqrt{1 - d_2^2}\sinh u\right),$$

olur. Burada $-1 \leq d_2 \leq 1$ dir. Bu nedenle,

$$\alpha(u) = \left(0, \pm\sqrt{1 - d_2^2}, -d_2\right) f(u) + E,$$

olmalıdır. Burada $f(u) = \int Q(u)\,du$ ve $E = (e_1, e_2, e_3)$ sabit vektördür. Böylece, $M$ yüzeyi

$$f(u,v) = \left(v\cosh u + e_1, \pm\sqrt{1 - d_2^2}f(u) + vd_2 \sinh u + e_2,\right. \tag{4.5.16}$$
$$\left. -d_2 f(u) \pm v\sqrt{1 - d_2^2}\sinh u + e_3\right),$$

olur. Burada $-1 \leq d_2 \leq 1$ dir. $f(u) = \int Q(u)\,du$ ve $(e_1, e_2, e_3)$ sabit vektördür. Eğer $d_2 = 0$ veya $d_2 = \pm 1$ ise $M$ yüzeyi 2. çeşit konoid olur.

4. $(\epsilon, \eta) = (-1, -1)$ durumunda bu mümkün değildir. Çünkü $X$ ve $X'$ nün her ikiside timelike olamaz.

**Teorem 4.5.3.** *$a$, $b$, $c$ sabit ve $c \neq 0$ olsun. 3−boyutlu Minkowski uzayında eğer $M$ açılabilir olmayan $KH_{II}$ kuadratik regle yüzey ise baz eğriliği non-null dır. O halde $M$ yüzeyi aşağıdaki açık parçalardan biridir:*

(1) *$M$ yüzeyi spacelike veya timelike ise 1. çeşit helikoid,*

(2) *$M$ yüzeyi spacelike veya timelike ise* 2. *çeşit helikoid,*

(3) *$M$ yüzeyi spacelike veya timelike ise* 3. *çeşit helikoid,*

(4) *$M$ yüzeyi spacelike veya timelike ise* 2. *çeşit Enneper yüzeyinin eşleniği olur [16].*

**İspat.** Teoremi ispatlamak için 2 duruma ayırdık.

**Durum 1.** (4.5.2) açıklandığı gibi benzer şekilde $M$ açılabilir olmayan regle yüzeyin üç tipinin $M_+^1$, $M_+^3$ veya $M_-^1$ parametrelemesi

$$f = f(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$$

ile verilsin öyleki $\langle X, X\rangle = \epsilon(\pm 1)$, $\langle X', X'\rangle = \eta(\pm 1)$ ve $\langle \alpha', X'\rangle = 0$ dır.

Diğer taraftan, $K$ Gauss eğriliği (4.2.15) ve $H_{II}$ ikinci ortalama eğriliği (4.5.3) yardımıyla verilebilir.

Kabul edelim ki $M$ yüzeyi $KH_{II}-$kuadratik yüzey olsun. O halde (4.5.2) denkleminin $v$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$2aKK_v + 2b\left(K_v H_{II} + K\left(H_{II}\right)_v\right) + 2cH_{II}\left(H_{II}\right)_v = 0$$

veya

$$aKK_v + b\left(K_v H_{II} + K\left(H_{II}\right)_v\right) + cH_{II}\left(H_{II}\right)_v = 0 \qquad (4.5.17)$$

elde edilir. İlk olarak, kabul edelim ki $Q^2 - \epsilon v^2 > 0$ olsun. (4.2.15) ün $v$ parametresine göre kısmi türevi alınırsa

$$K_v = \frac{4\epsilon Q^2 v}{D^6}$$

(4.2.20) bulunur. O halde (4.2.15), (4.5.3), (4.2.22) ve (4.2.20) ifadeleri (4.5.17) denklemi içine yazılırsa ve

$$
\begin{aligned}
A_2 &= -10\epsilon J v^5 + \left(23Q^2 J + 6QF\right) v^3 + 6Q^2 Q' v^2 - \left(3\epsilon Q^3 F + 4\epsilon Q^4 J\right) v - 3\epsilon Q^4 Q', \\
B_2 &= 4\epsilon J^2 v^9 - 16Q^2 J^2 v^7 + 6Q^2 Q' J v^6 + \left(28\epsilon Q^3 JF - 4\epsilon Q^2 F^2 + 23Q^4 J^2\right) v^5 \\
&\quad - \left(18\epsilon Q^3 Q' F + 15\epsilon Q^4 Q' J\right) v^4 \\
&\quad - \left(16Q^4 F^2 + 18Q^5 JF + 14Q^6 J^2 + 18\epsilon Q^4 Q'^2\right) v^3 \\
&\quad - \left(33Q^5 Q' F\right) v^2 + \left(3\epsilon Q^8 J^2 + 20\epsilon Q^7 JF - 7\epsilon Q^6 F^2 - 9Q^6 Q'^2\right) v \\
&\quad - 3\epsilon Q^7 Q' F + 9\epsilon Q^8 Q' J
\end{aligned} \tag{4.5.18}
$$

olarak alınırsa aşağıdaki

$$4b^2 Q^8 D^2 A_2^2 = \left(16a\epsilon Q^8 v + cD^2 B_2\right)^2 \tag{4.5.19}$$

elde edilir. (4.5.18) deki ifadeler (4.5.19) denkleminde yerine yazılırsa $v$ nin en büyük dereceli katsayısından

$$16c^2 J^4 = 0$$

elde edilir. $c \neq 0$ ise $J = 0$ olur. $v^{14}$ ün katsayısından

$$16cQ^4 F^4 = 0,$$

olur. $c \neq 0$ ve $Q \neq 0$ olduğundan $F = 0$ olmalıdır. Böylece $J = F = 0$ den $Q' = 0$ elde edilir. Sonuç olarak, $H$ ortalama eğriliği sıfırdır. Yani yüzey minimaldir.

Kabul edelim ki $Q^2 - \epsilon v^2 < 0$ olsun. Bu durumda, (4.5.17) den $M$ yüzeyinin minimal olduğunu gösterebiliriz. Sonuç olarak teorem 4.5.2 deki ispatımız ile $M$ yüzeyi 1. çeşit, 2.çeşit ve 3.çeşit helikoidin açık bir parçası iken yüzey spacelike veya timelike dır.

**Durum 2.** $M$ açılabilir olmayan regle yüzeyi $M_+^2$ veya $M_-^2$ tipinde olsun. Bu durumda, $\alpha$ eğrisi spacelike veya timelike, $X$ spacelike fakat $X'$ null dır. Ayrıca teorem 4.5.2 deki notasyonları kullanacağız. O halde $K$ Gauss eğriliğini (4.5.10) den ve $H_{II}$ ikinci ortalama eğriliği (4.5.12) den bulabiliriz.

Şimdi kabul edelim ki $M$ yüzeyi $KH_{II}-$ kuadratik yüzey olsun. O halde (4.5.10), (4.5.12) ve (4.5.17) denklemlerinden teorem 4.5.2 de durum 1 e benzer bir tartışma ile ayrıca $R' = 0$ alabiliriz. Çünkü $c \neq 0$ dır. Aşağıda $H$ ortalama eğriliği aynı şekilde sıfır olur. Sonuç olarak teorem 4.5.2 deki ispatı ile $M$ yüzeyi 2.Enneper yüzeyinin eşleniği iken yüzey spacelike veya timelike dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Son olarak $\mathbb{E}_1^3$ de null scroll un $H_{II}$ ikinci ortalama eğriliği, $K$ Gauss eğriliği ve $H$ ortalama eğriliği arasındaki ilişkiyi araştıracağız.

Kabul edelim ki $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha = \alpha(u)$ null eğri ve $\alpha$ eğrisi boyunca $B = B(u)$ null vektör alanı olsun. O halde null scroll $M$ yüzeyi

$$f = f(u,v) = \alpha(u) + vX(u)$$

ile verilsin. Öyleki $\langle \alpha', \alpha' \rangle = 0$, $\langle B, B \rangle = 0$ ve $\langle \alpha', X \rangle = -1$ dir. Diğer taraftan genelliği bozmaksızın $M$ yüzeyinin bir null geodeziği olarak $\alpha$ yı seçebiliriz. Bu durumda her $u$ için $\langle \alpha'(u), X'(u) \rangle = 0$ dır. Burada $C = \alpha' \wedge B$ diyelim. O halde $\mathbb{E}_1^3$ de $\alpha$ boyunca ortonormal baz $\{\alpha', B, C\}$ dır. Bazın elemanları

$$\begin{aligned} \alpha'' &= tC, \\ B' &= -sC, \\ C' &= -s\alpha' + tB \end{aligned} \tag{4.5.20}$$

dır. Burada $s = \langle B, C' \rangle$ ve $t = \langle \alpha'', C \rangle$ dir. $M$ de Lorentz metriğinin alt uzayınında birinci temel formun bileşenleri

$$E = s^2v^2, \quad F = -1, \quad G = 0$$

ve $N$ birim normal vektörünü

$$N = C + vB' \wedge B$$

ile verilsin. Böylece ikinci temel formun bileşenleri

$$e = \langle \alpha'' + vB'', N \rangle = s^3v^2 - s'v + t, \quad f = \langle B', C \rangle = -s, \quad g = 0,$$

olur ki bu ise $H = s$ ve $K = s^2$ demektir[16]. $\square$

# KAYNAKLAR


[1] H. Hilmi Hacisalihoğlu, *Diferansiyel Geometri*, Cilt I-II, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi yayınları, 2000

[2] Wijarn Sodsiri, *Ruled Surfaces of Weingarten Type in Minkowski 3-Space*, PhD.Thesis, Katholieke University Leuven Belgium, 2005

[3] Manfredo Perdıgao do Carmo , *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice-Hall Inc, New Jersey, 1976

[4] Wolfgang Kühnel, *Differential Geometry: curves-surfaces-manifolds*, Student Mathematical Library, Volume 77, American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2015

[5] Barrett O'neill, *Elementary Differential Geometry*, Acedemic press, Inc, 1966

[6] Patrick J. Ryan, *Euclidean and non-Euclidean geometry*, Cambridge University Press, New york, 1986

[7] Andrew Pressley, *Elementary Differential Geometry, Second Edition,* 2000

[8] Arif Sabuncuoğlu, *Diferensiyel Geometri*, Nobel Yayın Dağıtım, 2001

[9] Zeljka Mılın Sipus, *Ruled Weingarten surfaces in Galilean space*, **Periodica Math. Hungarica**, 56(2): (2008) 213-225

[10] Wolfgang Kühnel, *Ruled W-surfaces*, **Arch. Math.** (Basel), 62, (1994), 475-480

[11] Werner H. Greub, *Linear algebra*, Springer-Verlag, New York-Heidelberg Berlin, 1981

[12] David E. Blair and Themis Koufogiorgos, *Ruled surfaces with vanishing second Gaussian curvature*, **Monatsh. Math.**,113, (1992) 177-181

[13] Dae Won Yoon, *Some properties of the helicoid as ruled surfaces*, **JP Jour, Geometry and Topology 2**, (2002) 141-147

[14] Dae Won Yoon, *On non-developable ruled surfaces in euclediean 3-spaces*, **Indian J.pure appl.Math.**, 38(4): (August 2007) 281-290

[15] Dae Won Yoon, *On The Second Gaussian Curvature Of Ruled Surfaces İn Euclidean 3-Space*,**Tamkang Journal of Mathematics**, 37(3): (2006) 221-226

[16] Dae Won Yoon and Joon Hee Park, *On curvatures of ruled surfaces in Minkowski 3-spaces*, **Note di Matematica**, Note mat.28,n. 2, (2008) 43-56

[17] Eugenio Beltrami, *Risoluzione di un problema relativo alla teoria delle superficie gobbe*, **Ann. Mat. Pura Appl.** 7, (1865-1866) 139-150

[18] Franki Dillen and Wijarn Sodsiri, *Ruled surfaces of Weingarten type in Minkowski 3-space*, **J.Geom.** 83, (2005) 10-21(Basel)

[19] Wijarn Sodsiri, *Ruled Linear Weingarten Surfaces in Minkowski 3-space*, **Soochow journal of mathematics**, Volume 29, No. 4, (October 2003) pp. 435-443,

[20] Franki Dillen-Wolfgang Kühnel, *Ruled Weingarten surfaces in Minkowski 3-space*, **manuscripta math**, 98, (1999) 307-320

[21] Franki Dillen and Wijarn Sodsiri, *Ruled surfaces of Weingarten type in Minkowski 3-space II*, **J.Geom.** 84, (2005) 37-44 (Basel)

[22] Franki Dillen and Wijarn Sodsiri, *Ruled surfaces of Weingarten type in Minkowski 3-space*, **J.Geom.** 83, (2005) 10-21(Basel)

[23] Wolfgang Kühnel, *On the inner curvature of the second fundamental form. Proc. 3rd. Congress Geometry*, Thessaloniki, 248-253 (1991)

[24] Jun-ich Hano and Katsumi Nomizu, *Surfaces of revolution with constant mean curvature in Lorentz-Minkowski space.* **Tohoku Math.** J. 36, (1984) 427-437

# ÖZGEÇMİŞ

**Kişisel Bilgiler**

| | | |
|---|---|---|
| **Adı Soyadı** | **:** | Mehmet Serkan GENÇCAN |
| **Doğum Yeri ve Yılı** | **:** | Adıyaman, 1977 |
| **Medeni Hali** | **:** | Evli |
| **İletişim** | **:** | mserkangenccan@gmail.com |

**Eğitim**

| | | |
|---|---|---|
| **Lisans** | **:** | Selçuk Üniversitesi,<br>Eğitim Fakültesi, Matematik Öğretmenliği<br>Bölümü (1999) |
| **Tezli Yüksek Lisans** | **:** | İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,<br>Matematik Ana Bilim Dalı (2019) |