T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAKIN KÜMELER VE UYGULAMALARI

Ahmet KARAGÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA

2019

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAKIN KÜMELER VE UYGULAMALARI

Ahmet KARAGÖZ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2019

Tezin Başlığı: YAKIN KÜMELER VE UYGULAMALARI

Tezi Hazırlayan: Ahmet KARAGÖZ

Sınav Tarihi:05.08.2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: Prof.Dr. İlhan İÇEN

İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. Fulya ŞAHİN

Ege Üniversitesi

Doç. Dr. A. Fatih ÖZCAN

İnönü Üniversitesi

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof.Dr. H. İbrahim ADIGÜZEL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Yakın Kümeler Ve Uygulamaları" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerde oluştuğunu belirtir ve onurumla doğrularım.

Ahmet KARAGÖZ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

YAKIN KÜMELER VE UYGULAMALARI

Ahmet KARAGÖZ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

69 + x sayfa

2019

Danışman: Prof.Dr. İlhan İÇEN

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, diğer bölümlerin daha iyi anlaşılması adına yeni küme yaklaşımları olarak ele alınan bulanık küme, yaklaşımlı küme, esnek küme, yakın küme kavramları ile temel yaklaşım uzayı ve yakın yaklaşım uzayı kavramları değerlendirilmiştir. Birinci bölüm sonunda ayrıca tanımsal tabanlı küme işlemlerine yer verilmiştir.

İkinci bölümde; klasik küme, yakın küme, esnek küme, yaklaşımlı küme ve bulanık küme kavramları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Klasik Cantor küme kuramı ile yeni yaklaşımlar arasındaki ilişkilerle birlikte bu küme kuramları arasındaki geçişlere ve bu küme yaklaşımlarıyla ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde yeni küme yaklaşımları üzerine uygulamalar ele alınmıştır. Bu küme yaklaşımlarına ait bilgiler detaylı bilgi verme açısından incelenmiş ve her küme türünde aynı örnekler üzerinde durulmuştur. El yazısı ile karakter analizi yapan ve adli belge incelemede oldukça fazla kullanılan bilim dalı olan grafoloji bilimi üzerine uygulamalar yapılmıştır. Grafoloji bilimi ile yeni küme yaklaşımları ilişkilendirilerek kitlesel grupların kişilik özellikleri arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Üçüncü bölüm bu tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır.

Dördüncü bölümde ise klasik küme kuramındaki alt küme kavramından hareketle elde edilen sonuçlar ile yeni küme yaklaşımları arasındaki üstünlük ve eksiklikler incelenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Bulanık küme, Esnek küme, Yakın küme, Yakın yaklaşım uzayı, Temel yaklaşım uzayı, Alt yaklaşım, Üst yaklaşım.

ABSTRACT

MSc Thesis

NEAR SETS AND APPLICATIONS

Ahmet KARAGÖZ

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

69 + x sayfa

2019

Supervisor: Prof.Dr. İlhan İÇEN

This study, which is prepared as a master thesis, consists of four sections. In the first section, the concept of fuzzy sets, rough sets, soft sets and near sets concept fundamental approximation spaces and nearness approximation spaces concept are discussed for better understanding of other sections. At the end of the first chapter definition based set operations are also included.

In the second section; the relationship between the concepts of classical set, near sets, soft sets and fuzzy sets are investigated. With the relations between classic Cantor set theory and the new approaches, the transitions between these set theories and the basic definitions and theorems related to these set approaches are specified.

In the third section, applications on new set approaches are discussed. Information about these set approaches were examined in terms of giving detailed information and the same examples were discussed in each set type. It has been made applications on the science of graphology which makes character analysis with handwriting and forensic document analysis that is used quite a lot.The relationship between the personal characters of mass groups was investigated by associating new set approaches with the science of graphology. The third section generates the original part of this thesis.

In the fourth chapter, the superiority and the shortcomings between the new cluster approaches and the results obtained from the concept of subset in classical cluster theory were examined.
KEY WORDS: Fuzzy sets, Soft sets, Rough sets, Near sets, Nearness approximation spaces,Fundamental approximation spaces, Lower approximations, Upper approximation.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada bana destek olan ve her aşamasında bilgisini, tecrübelerini ve yakın ilgisini esirgemeyen danışman hocam sayın Prof. Dr. İlhan İÇEN’ e şükranlarımı sunuyorum. Yapıcı tavsiyeleri ve yönlendirmeleriyle bu tezin araştırılması ve yazılması esnasındaki desteklerinden dolayı sayın Doç. Dr. A. Fatih ÖZCAN’ a, teşekkür ediyorum. Ayrıca manevi desteklerini esirgemeyen aileme, değerli eşim Gamze ÇİÇEK KARAGÖZ’ e ve oğlum Ahmet Alaz KARAGÖZ’ e sonsuz teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

I^X	X' den I' ya bütün dönüşümlerin kümesi
$\mu_A(x)$	x elemanının üyelik derecesi
$\mu_{A\cup B}(x)$	A ve B bulanık kümelerinin birleşimi
$\mu_{A\cap B}(x)$	A ve B bulanık kümelerinin kesişimi
$\mu_{\bar{A}}$	A bulanık kümesinin tümleyeni
(F, A)	Esnek Küme
$\neg E$	Parametrelerin değilleri
$(F,A)^c$	(F, A) esnek kümesinin değili
$\tilde{\subseteq}$	Esnek kümelerde alt küme sembolü
$\tilde{A}$	A mutlak esnek kümesi
$\tilde{\wedge}$	VE operatörü
$\tilde{\vee}$	VEYA operatörü
$\tilde{\cup}$	Esnek kümelerin birleşimi
$\tilde{\cap}$	Esnek Kümelerin kesişimi
B	Denklik bağıntısı
B_*	Alt yaklaşım
B^*	Üst yaklaşım
BN_B	Sınır bölgesi
α_B	Yaklaşım katsayısı

μ_X^B	Yaklaşımlı üyelik fonksiyonu
ξ	Bölüm kümesi
$\mathcal{F}$	Çıkarım fonksiyonu
Φ	Nesne tanımı
$(O,\mathcal{F})$	Algısal sistem
$[x]$	Denklik sınıfları
Δ_φ	Çıkarım fonksiyonlarının farkı
N_r	Ayrışımlar kümesi
v_{N_r}	Yakınlık fonksiyonu
$Bnd_{N_r(B)}$	Yakın kümelerin sınırı
$\wp(O)$	O' nun kuvvet kümesi
$\underset{\Phi}{\cap}$	Tanımsal arakesit
$\underset{\Phi}{\cup}$	Tanımsal birleşim
$\underset{\Phi}{\setminus}$	Tanımsal fark
$C_{\underset{\Phi}{X}}$	X kümesinin tanımsal tümleyeni
dNM	Tanımsal tabanlı yakınlık ölçüm fonksiyonu

GİRİŞ

Tarihin başlangıcından beri insanoğlunun doğa ile olan mücadelesi ve bu mücadele sonucunda elde ettiği bilgi ve tecrübe, beraberinde teknolojik gelişmeler de getirmiştir. Yapılan her araştırma ileri bir adıma taşınmaya çalışılarak, evreni keşfetme ve doğayı tanıma konularında büyük ilerlemeler kaydedilmiştir. Bu araştırmalar sonucunda elde edilen yeni bilgiler bilim insanlarını yeni buluşlar yapmaya teşvik etmiştir. Bu buluşların temelinde her zaman matematik yer almıştır. Nesneler dünyası ile matematik arasında mükemmel bir uyum görülür [1].

Yapılan gözlemleri matematiksel olarak ifade etme gücümüz, mevcut küme teorileri ile mümkün olabilmektedir. Karşılaşılan olay veya durumları matematiksel olarak ifade edebilmedeki gücümüzü kısıtlayan tek sebep mevcut olan küme teorilerinin yetkinliğidir. Bu yetkinliğin sınırlarını zorlamak bizi geleceğin teknolojisine ulaştıracaktır.

Küme kavramını bu günkü anlamıyla ilk kullanan ünlü matematikçi B. Balzano olmuştur. Bu süreçten sonra küme konusu birçok matematikçi tarafından merak edilmiş ve araştırma konusu olmuştur. Ancak kümeler teorisine ilişkin ilk matematiksel çalışma ise bu teorinin kurucusu olarak nitelendirilen G. Cantor’ un [2] deki makalesidir. Cantor 1879-1884 yılları arasında yayınlanan makaleleriyle kümeler teorisinin temel sonuçlarını ispatlamıştır [4, 5]. Cantor’un son çalışması 1895 ve 1897 yıllarında yayınlanmıştır. Kümeler teorisinde bu gün de kullanılan alt küme kavramı ve diğer kavramlarda bu makalede yer verilmiştir. Cantor’un çalışmaları doğru kabul edilmekte ve matematik geçmişinin önemli buluşlarından biri olarak bütün matematikçiler tarafından kabul edilmektedir. Birçok bilim adamı kümeler teorisinin gelişmesine ve ilerletilmesine farklı fikirlerle katkıda bulunmuştur [6, 7].

G. Cantor tarafından başlatılan klasik küme teorisi matematiğe ve matematikçilere büyük kolaylıklar sağlamıştır. Bilgi işlemenin temellerinde bu gün hala küme teorisi kullanılmaktadır. Bununla birlikte matematikte farklı bakış açıları veya bir konuyu ifade etmenin farklı yolları olduğu gerçeği de kabullenilmelidir.

Aslında kümeler teorisi sembolik mantık olarak da bilinen Aristo mantığının doğal bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Mantık kendi başına bir ihtisas alanı olmakla birlikle aynı zamanda bir felsefe dalıdır. Matematik ve bilgisayar bilimleri açısından sembolik mantık, oldukça önemlidir. Mantık, Aristo tarafından M.Ö. 300 lü yıllarda çalışılmıştır. Aristo, doğal yaşamda gerçekleşen veya gündelik meydana gelen olayları daha iyi anlamak ve doğru sonuçlar elde edebilmek için mantık konusunda birçok çalışma gerçekleştirmiştir. Aristo'nun klasik mantık üzerine kategoriler, önermeler, birinci analitikler, ikinci analitikler, topikler ve sofistik deliller olmak üzere altı ciltlik kitap serisi vardır. Aristo'nun izleyicileri bu seriye daha sonra "Organon" adı vermiştir [1].

Birçok felsefecinin dikkatini çektiği gibi doğada karşılaşılan belirsiz durumlar matematikçilerin de dikkatini çekmiştir. Doğadaki belirsizlikleri ifade etmede sembolik mantık olarak da bilinen Aristo mantığının yetersiz kaldığı görüldükten sonra Türk matematikçi L.A. Zadeh, 1965 ve 1975 yıllarında "Bulanık Küme" ve "Bulanık Mantık" teorilerini ortaya atarak matematikte yeni bir çığır açmıştır [8, 9]. Bu kavramlar matematik mantığına yeni bir bakış açısı kazandırmakla birlikte birçok matematikçi tarafından da çalışma konusu olmuş ve birçok uygulama alanı bulmuştur. Günlük hayatta ifade edilebilen ancak matematik dilinde karşılık bulamayan birçok kavram bu çalışmalarla cebirsel olarak da ifade edilebilmiştir.

Özellikle bilgi sistemlerindeki tutarsızlık ve karışıklıkların giderilmesi ve modellenebilmesi için 1982'de Z. Pawlak tarafından "Yaklaşımlı Küme" teorisi geliştirilmiştir [10]. G. Frege'nin belirsizlikleri modelleyebilme fikrinden esinlenilerek ortaya atılan yaklaşımlı kümeler, bu modellemelerin özel bir uygulaması olarak düşünülebilir [11]. Yaklaşımlı küme teorisi teorik anlamda birçok çalışmaya konu olsa da uygulama ve mühendislik alanlarında da çok fazla yer bulmuştur. T. B. Iwinski ile birlikte yaklaşımlı kümeler üzerinde cebirsel yapılar çalışılmaya başlanmıştır [12]. Bu çalışmadan sonra R. Biswas ve S. Nanda yaklaşımlı alt grup kavramını [13], N. Kuroki yaklaşımlı alt halka kavramını [14] tanımlamış ve bu konular üzerinde çalışmalar yapmıştır. Normal alt grup için alt ve üst yaklaşımların bazı özelliklerini N. Kuroki ve P. P. Wang [15] incelemişlerdir. Yaklaşımlı kümelerde yapılan benzer cebirsel yapılar için [16-25] referanslarına bakılabilir.

D. Molodtsow 1999 da, farklı bir küme teorisi olarak "Esnek Küme" kavramını açıklamıştır [26]. Bu küme teorisi de belirsiz durumlar için kullanılabildiği gibi belirli ve sınıflama gerektiren birçok soruna kolaylıklar getirmiştir. Hem mühendislik ve uygulamalarda hem de teorik alanda bu küme teorisi de oldukça rağbet görmüştür [27, 28]. Esnek kümeler ile farklı matematik yapıları arasındaki benzerlikler ve yeni tanımlar da cebirsel olarak çalışılmıştır [29, 30]. Nesnelerin veya nesne gruplarının parametrelendirilmesi mantığına dayanan bu çalışma ile birlikte bilgilerin sınıflandırılması ve gruplanması konularında birçok çalışma yapılmıştır.

J. F. Peters tarafından yaklaşımlı kümelerin genelleştirilmesi olarak "Yakın Küme" teorisi ise 2002 de geliştirilmiştir [31]. Yakın kümelerde veriler, reel değerli fonksiyonlar kullanılarak elde edilir. Yaklaşımlı kümelerin çok yer kaplayan bilgi tablolarının aksine yakın kümelerdeki bu durum yakın küme teorisini matematiksel olarak modellemede birçok kolaylık getirmiştir. Özellikle gözlemlenebilen olayların olduğu gibi aktarılabilmesini veya matematiksel modellenmesini sağlar. Mühendislik ve doğa problemlerinin yanı sıra görüntü işleme, görüntü analizi gibi insan algısı ile ilgili problemlerin çözümü için yakın kümeler, ideal bir yapı sunar. Konu ile ilgili [32-37] referanslarına bakılabilir.

G. Cantor tarafından verilen klasik küme teorisi tanımı dikkate alındığında bulanık küme, yaklaşımlı küme, esnek küme ve yakın küme kavramları klasik kümeyi tamamlayan tanımlara sahiplerdir. Bütün bu yeni yaklaşımların temel tanımları Cantor küme kuramına dayanmaktadır.

Z. Pawlak yaklaşımlı küme teorisini G. Cantor tarafından ortaya atılan klasik küme teorisinin bir genellemesi olarak ortaya atmıştır. Ayrıca yaklaşımlı kümelerle yakın kümeler arasında oldukça önemli bağlantılar yer almaktadır. Her yaklaşımlı küme bir yakın kümedir ancak bu ifadenin tersi doğru değildir [1]. Buradan hareketle aslında yakın kümeler yaklaşımlı kümelerin bir genellemesidir.

Yakın kümelerle ilgili çalışmalar Peters'in [38]'deki makalesinden sonra hız kazanmıştır. Peters ve Wasilewski yakın kümelerin temelleri makalesini [39] ve Wolski ise yakın kümeler ile yaklaşımlı kümeler için yeni yaklaşımlar makalesini yayınladılar [20]. Ayrıca J. F. Peters, bilgisayarlı uygulamaları [40-44] ve özellikle de görüntü analizi üzerine araştırmalar yapmaktadır [45-49]. Daha sonra, yaklaşım uzayları ve yakın kümeler üzerine birçok araştırmacı yayın yaptı. Öztürk ve İnan, [50] yakın grupları tanımladı ve temel özelliklerini çalıştılar.

Yakın kümeler reel değerli çıkarım fonksiyonlarıyla tanımlanırken bulanık kümeler bulanık üyelik fonksiyonuyla karakterize edilir [51]. Her bulanık üyelik fonksiyonu yakın kümelerdeki çıkarım fonksiyonunun özel bir hali olduğundan yakın kümelerle bulanık kümeler arasında oldukça önemli bağlantılara sahiplerdir.

Benzer şekilde klasik küme ile bulanık küme arasında, bulanık küme ile esnek küme arasında, esnek küme ile yaklaşımlı küme arasında da oldukça önemli bağlantılar ve geçişler söz konusudur. Tüm bu bağlantılar farklı küme teorilerinin birbirinin devamı veya birbirini tamamlar nitelikte olduklarının bir göstergesidir.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma 4 bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde diğer bölümlerin daha iyi anlaşılması adına yeni küme yaklaşımları ele alınmıştır. Bu küme teorileri ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilmiş ve daha iyi anlaşılması adına orijinal örneklerle açıklanmıştır. Genel olarak bütün küme yaklaşımları ile ilgili özelliklere ve bilgilere yer verilmiştir. İkinci bölümde; klasik küme, yakın küme, esnek küme, yaklaşımlı küme ve bulanık küme kavramları arasındaki ilişkiler incelenmiştir. Klasik Cantor küme kuramı ile yeni yaklaşımlar arasındaki ilişkilerle birlikte bu küme kuramları arasındaki geçişlere yer verilmiştir. Üçüncü bölümde yeni küme yaklaşımları üzerine uygulamalar ele alınmıştır. Bu küme yaklaşımlarının verdiği bilgiler detaylı bilgi verme yönü bakımından incelenmiş ve her küme türünde aynı örnekler üzerinde durulmuştur. İlk defa el yazısı ile karakter analizi yapan ve adli belge incelemede oldukça fazla kullanılan bilim dalı olan grafoloji bilimi üzerine uygulamalar yapılmıştır. Dördüncü bölümde ise klasik küme kuramındaki alt küme kavramından hareketle elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. Bununla birlikte örnekler sonucunda elde edilen veriler incelenmiş ve yeni küme yaklaşımları arasındaki üstünlük ve eksiklikler incelenmiştir.

I. BÖLÜM

1.FUZZY (BULANIK) KÜME, SOFT (ESNEK) KÜME, ROUGH (YAKLAŞIMLI) KÜME VE NEAR (YAKIN) KÜME

1.1. Fuzzy (Bulanık) Küme

Bu bölümde, belirsizliğin ölçülmesinde güçlü ve anlamlı araçlar sunmasının yanı sıra, doğal dildeki belirsiz ve bulanık kavramları temsil etmemize yarayan bulanık kümeler tanıtılacaktır. Klasik küme anlayışından farklı olarak bulanık kümelerde elemanlar kümeye belirli bir derecede ait olurlar. Bu durum ise çıkarım fonksiyonları yardımıyla gerçekleşmektedir. Her eleman üyelik derecesiyle birlikte sunulur. Böylece günlük konuşma dilindeki veya daha genel anlamda evrendeki her nesneyi tanımlanan üyelik fonksiyonuna göre bir kümeye belli derecede dahil eder ve matematik dilinde sunmasına imkan tanır. Bu ise matematik formüllerinin bilgisayar sistemlerine işlenerek kullanılabildiği gibi insan düşüncelerinin de bu şekilde kullanılmasına olanak sağlar. Bulanık küme sadece kavramlara değil kullanıldıkları koşullara da bağlıdır. Örneğin "yüksek hız" kavramı kara yolu ulaşımı için farklı, hava yolu ulaşımı için farklı bulanık kümelerle sunulur [52].

Bu kısımda bulanık küme kavramı ele alınmıştır. Bulanık kümelerle ilgili temel tanım ve teoremler verilmiştir. Bu amaçla bulanık kümelerin ilk tanımını yapan ve konunun bulucusu olarak kabul edilen Türk matematikçi L. A. Zadeh tarafından 1965 yılında yayınlanan orijinal makalesinden yararlanılmıştır.

Tanım 1.1.1: [8] $X \neq \emptyset$ bir küme ve $I = [0,1]$ olsun. X den I ya tanımlı bütün dönüşümlerin kümesi I^X olmak üzere I^X in her elemanına X de bir bulanık küme denir.

Bulanık kümeler A,B,C… gibi büyük harflerle gösterilir. $\forall x \in U$ için $\mu_A(x)$ değerine A kümesinin x elemanının üyelik derecesi denir.

X deki A bulanık kümesi $A = \{(x, \mu_A(x): x \in X\}$ şeklinde yazılır. Burada $\mu_A(x)$, üyelik fonksiyonudur. Yani başka bir ifadeyle bulanık küme bir nesne topluluğunu [0,1] kapalı aralığına eşleyen bir fonksiyonla karakterize edilir.

Bulanık küme kuramı, bir elemanın bir kümeye kısmi üyeliğine olanak sağlar. Eğer üyelik derecesi olarak adlandırılan üyelik fonksiyonunun değeri bire eşitse $(\mu_A(x) = 1)$ x elemanı bulanık kümeye tamamen aittir. Eğer bu değer sıfır ise $(\mu_A(x) = 0)$ x bulanık kümeye ait değildir. Eğer üyelik derecesi $[0,1]$ aralığında ise x bulanık kümenin kısmi üyesidir.

Bulanık küme ve bulanık mantık kavramlarının ilk uygulamaları Mandani ve arkadaşları tarafından yapıldıktan sonra bu alanda oldukça önemli adımlar atılmaya başlanmıştır [53-55].

Bulanık kümeler klasik Cantor küme kuramı için bir alternatif değil aksine klasik küme kuramının tamamlayıcısıdır. Yani daha genel anlamda bulanık küme klasik kümenin genişletilmesidir. Bu nedenle de klasik Cantor küme kuramı üzerinde yapılan işlemler de genişletilerek bulanık küme için uygulanır. Klasik küme kuramında kullanılan kesişim işlemi, birleşim işlemi gibi işlemleri bulanık kümede tanımlayalım.

Tanım 1.1.2: [56] $X \neq \emptyset$ olmak üzere A ve B kümeleri X de birer bulanık küme olsun. A ve B bulanık kümelenin birleşimi

$$\forall x \in X \; için, \mu_{A \cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.3: [56] $X \neq \emptyset$ olmak üzere A ve B kümeleri X de birer bulanık küme olsun. A ve B bulanık kümelenin kesişimi

$$\forall x \in X \; için, \mu_{A \cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.4: [56] $X \neq \emptyset$ olmak üzere A bulanık kümesinin tümleyeni $\mu_{\bar{A}}$ olarak ifade edilir ve üyelik fonksiyonunun matematiksel ifadesi şöyledir;

$$\forall x \in X \; için, \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$$

şeklinde tanımlanır.

Bulanık kümeler, birleşme, değişme, dağılma ve De-Morgan kuralları gibi özellikleri ile klasik kümelerle benzerdir. Bulanık kümeler ile klasik kümeler arasındaki en büyük fark herhangi bir kümenin tümleyenini alma işleminde ortaya çıkmaktadır.

Klasik küme kuramında sınırlar çok net ve keskin olduğundan bir küme ile tümleyeninin kesişimi boş küme ve birleşimi evrensel küme iken bulanık kümelerde böyle bir durum yoktur.

Tanım 1.1.5: X bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $R: X \times X \to [0,1]$ dönüşümüne bir benzerlik bağıntısı denir.

(i) Yansıyan: $\forall x \in X \text{ } için \text{ } R(x,x) = 1$

(ii) Simetri: $\forall x,y \in X \text{ } için \text{ } R(x,y) = R(y,x)$

(iii) Geçişme: $\forall x,y,z \in X \text{ } için \text{ } R(x,z) \geq min\{R(x,y), R(y,z)\}$

Tanımlanan bu bağıntıyla *(X,R)* ikilisine ise bulanık yaklaşım uzayı denir [57].

Tanım 1.1.6: X boştan farklı herhangi bir küme, A ve B kümeleri X de iki bulanık küme olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_A(x) = \mu_B(x)$ ise A ve B ye eşit bulanık kümeler denir [8].

Teorem 1.1.1: $X \neq \emptyset$ bir küme ve $A, B \subset X$ iki bulanık küme olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir [56]:

i)$\overline{(\bar{A})} = A$,

ii)$A \leq B \Leftrightarrow \bar{B} \leq \bar{A}$,

iii)$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ ve $\overline{(A \cap B)} = \bar{A} \cup \bar{B}$,

İspat: i) $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$ ve $\mu_{\overline{(\bar{A})}} = 1 - \big(1 - \mu_A(x)\big) = \mu_A(x)$ olduğundan $\overline{(\bar{A})} = A$ olur.

ii) $\mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x)$, $\mu_{\bar{B}}(x) = 1 - \mu_B(x)$ dir. Dolayısıyla

$A \leq B \Leftrightarrow \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$

$\Leftrightarrow 1 - \mu_A(x) \geq 1 - \mu_B(x)$

$\Leftrightarrow \mu_{\bar{B}}(x) \leq \mu_{\bar{A}}(x) \Leftrightarrow \bar{B} \leq \bar{A}$

iii)$\overline{(A \cup B)} = \bar{A} \cap \bar{B}$ eşitliğini göstermek için $\forall x \in X$ için $\mu_{\overline{(A \cup B)}}(x) = \mu_{\bar{A} \cap \bar{B}}(x)$ eşitliği gösterilmelidir. Buradan $\overline{(A \cap B)}$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$, $A \cup B$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$, $\overline{(A \cup B)}$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu da $1 - max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ dir.

$1 - max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = min\{1 - \mu_A(x), 1 - \mu_B(x)\}$ eşitliği göz önüne alınırsa $\overline{(A \cup B)}$ bulanık kümesinin üyelik fonksiyonu $min\{1 - \mu_A(x),\ 1 - \mu_B(x)\}$ olur. Dolayısıyla $\overline{(A \cup B)}\ = \bar{A}\ \cap\ \bar{B}$ bulunur.

Benzer şekilde $\overline{(A \cap B)}\ = \bar{A} \cup \bar{B}$ eşitliği de elde edilir.

Teorem 1.1.2: [56] A ve B, X kümesinde iki bulanık küme olsun.

i) $A \cup B$ bulanık kümesi A ve B kümelerini kapsayan en küçük bulanık kümedir.

ii) $A \cap B$ bulanık kümesi A ve B tarafından içerilen en büyük bulanık kümedir.

İspat:

i) A ve B bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla μ_A ve μ_B olsun. $\forall x \in X$ için $\mu_{A \cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ olduğundan $A \leq\ A \cup B$ ve $B \leq\ A \cup B$ dir. Öte yandan A ve B yi içeren herhangi bir bulanık küme D olsun. Yani $A \leq\ D$ ve $B \leq\ D$ olsun. O halde $\forall x \in X$ için $\mu_A(x)\ \leq \mu_D(x)$ ve $\mu_B(x)\ \leq \mu_D(x)$ dir. Dolayısıyla $\forall x \in X$ için $max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \leq\ \mu_D(x)\ \Leftrightarrow\ \mu_{A \cup B}(x) \leq\ \mu_D(x)$ dir. Yani $A \cup B \leq D$ dir. Dolayısıyla $A \cup B$ bulanık kümesi A ve B yi içeren herhangi bir D bulanık kümesi tarafından içerildiğinden A ve B yi içeren en küçük bulanık küme $A \cup B$ dir.

ii) A ve B bulanık kümelerinin üyelik fonksiyonları sırasıyla $\mu_A(x)\ ve\ \mu_B(x)$; ve $\forall x \in X, \mu_{A \cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ olduğundan $A \cap B \leq\ A$ ve $A \cap B \leq B$dir. Öte yandan A ve B tarafından içerilen herhangi bir D bulanık kümesi alalım. Yani $D \leq A$ ve $D \leq B$ olsun. O halde $\forall x \in X$ için $\mu_D(x) \leq\ \mu_A(x)$ ve $\mu_D(x) \leq\ \mu_B(x)$ olur. Dolayısıyla $\forall x \in X$ için $\mu_D(x)\ \leq min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\,\}$ dir. Yani $D \leq A \cap B$ dir. Dolayısıyla $A \cap B$ bulanık kümesi A ve B tarafından içerilen en büyük bulanık kümedir.

Uyarı 1.1.1: [56] X herhangi bir küme ve A bir bulanık küme olsun. Bu durumda

i) $A \cap \bar{A} = \emptyset$ olmak zorunda değildir.

ii) $A \cup \bar{A} = X$ olmak zorunda değildir. Dolayısıyla klasik küme kuramından bu yönüyle farklılık oluşturur.

Örnek 1.1.1: $X = \{a, b\}$ ve $A = \{(a, 0.3), (b, 0.8)\}$ olsun.

$A' = \{(a, 0.7), (b, 0.2)\}$, $\mu_{A\cap B}(x) = min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ şeklinde tanımlandığından $A\cap\bar{A} = \{(a, 0.3), (b, 0.2)\} \neq \emptyset$ bulunur. Ayrıca $\mu_{A\cup B}(x) = max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\}$ olduğundan $A\cup A' = \{(a, 0.7), (b, 0.8)\} \neq X$ bulunur.

Tanım 1.1.7: [56] $\mathrm{A} = \{(\mathrm{x}, \mu_A(x): x \in X\}$ bulanık küme olmak üzere

$A^n = \{(\mathrm{x}, (\mu_A(x))^n: x \in X\}$ şeklinde tanımlanır.

Örnek 1.1.2: $\mathrm{A} = \{(2,0.2), (4,0.5), (9,0.4)\}$ bulanık küme olmak üzere

$A^2 = \{(2,0.4), (4,0.25), (9,0.16)\}$ olarak elde edilir.

1.2. Soft (Esnek) Küme

20. yüzyıl başlarına kadar matematikte anlık değişkenler içermeyen Aristo mantığına uygun problemlere çözüm aranırken teknolojik gelişmeler ve çözülemeyen doğal problemler insanları belirsiz durumları açıklamaya mecbur bırakmıştır. Bu andan sonra da yapılan ilk çalışma olan bulanık kümede de üyelik fonksiyonlarının seçiminin zorluğu bazı problemler ortaya çıkarmıştır. Bulanık küme teorisindeki bu ve benzeri problemlerden kurtulmak için 1999 da Molodtsov tarafından esnek küme kavramı ortaya atılmıştır [26]. Bulanık kümelerdeki reel değerli üyelik fonksiyonu yerini esnek kümede kullanılan seçim fonksiyonuna bırakarak bu problemi ortadan kaldırmıştır. Molodtsov ilk çalışmasında esnek kümeler teorisini bir fonksiyonun pürüzsüzlüğü, oyun teorisi, Riemann integrali, Perron integrali ve ölçü teorisi gibi birçok alana başarıyla uygulamıştır [58]. Bu çalışmalardan sonra birçok yazar [27, 28, 59, 60] esnek küme kavramını başka alanlarda ve günlük hayatta karşılaşılan problemlerin çözümlerinde kullanmışlardır. Shabir ve Naz esnek kümelerdeki topolojik yapıları çalışmışlardır [61]. Oğuz [62], cebirsel yapılardan bazılarını esnek küme olarak incelemiş, esnek simetrik grup ve esnek grup etkisi gibi yeni kavramlar tanımlamış, soft grupoid ve soft grup-grupoid kavramlarını tanımlayarak bunlara ait özellikleri araştırmıştır. Aynı araştırmada çalışılan bu cebirsel yapıların esnek kümelerdeki yaklaşımlarının yanında kategorileri de oluşturulmuştur [62]. Ayrıca birçok yazar [63-68] esnek topoloji üzerinde çalışmalar yapmıştır. Esnek küme teorisi, kısa süre içerisinde mühendislikte, bilgi sistemlerinde, karar verme

problemlerinde vb. birçok alanda pratik uygulamaları sayesinde zengin bir potansiyele ulaşmıştır.

Bu kısımda ilk olarak Molodtsov tarafından verilen esnek küme tanımına ve devamında da Çağman tarafından verilmiş tanımlara yer verilmiştir. Esnek kümelerle ilgili alt tanımlar ve teoremler incelenmiştir.

Tanım 1.2.1: [26] U evrensel küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. P(U), U nun kuvvet kümesini ve A, E nin boştan farklı bir alt kümesini göstersin. F:A →P(U) şeklinde bir dönüşüm olmak üzere (F, A) sıralı ikilisi U üzerinde bir esnek küme olarak adlandırılır. Bir başka deyişle, U üzerinde bir esnek küme, U evrensel kümesinin alt kümelerini parametrize edilmiş bir ailesidir. ε∈A için F(ε) , (F, A) esnek kümesinin ε –yaklaşık elemanlarının kümesi olarak düşünülebilir. Esnek bir küme ile klasik kümenin aynı olmadığı açıktır.

Tanım 1.2.2: X evrensel küme ve E parametre kümesi olsun.$F: E \to P(X)$ fonksiyonuna X üzerinde esnek küme denir. Yani bir esnek küme

$$F = \{(e, F(e)) : e \in E\}$$

Şeklinde sıralı ikililerin bir kümesi olarak görülebilir. X üzerinde E parametre kümesi ile tanımlı tüm esnek kümelerin kümesi S ile gösterilir.

Örnek 1.2.1: [28] Bay X in satın alacağını düşünerek "evlerin çekiciliği" ni tanımlayan bir (F, A) esnek kümesi oluşturalım.

U düşünülen evlerin bir kümesi ve A bir parametre kümesi olsun. Her parametre bir kelime veya bir cümledir.

$A = \{pahalı, güzel, ağaç, ucuz, yeşil\ çevreli, modern, iyi\ durumda, kötü\}$

Bu durumda bir esnek kümeyi tanımlamak pahalı evleri, güzel evleri… işaret etmek anlamındadır. Kabul edelim ki U evreninde $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ gibi altı adet ev olsun. $A = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6, e_7, e_8\}$ olarak verilsin.

e_1 parametresi "pahalı"

e_2 parametresi "güzel"

e_3 parametresi "ağaç"

e_4 parametresi "ucuz"

e_5 parametresi "yeşil çevreli"

e_6 parametresi "modern"

e_7 parametresi “iyi durumda”

e_8 parametresi “kötü”

olarak tanımlansın.

$F: A \to P(U)$ fonksiyonu $F(e_1) = \{h_2, h_4\}$, $F(e_2) = \{h_1, h_3\}$,

$F(e_3) = \{h_3, h_4, h_5\}$, $F(e_4) = \{h_1\}$, $o$larak tanımlansın.

Böylece (F, A) esnek kümesini yaklaşımların bir koleksiyonu olarak aşağıdaki gibi gösterebiliriz.

$$(F, A) = \left\{ \begin{matrix} (pahalı\ evler, \{h_2, h_4\}), (güzel\ evler, \{h_1, h_3\}), \\ (\text{ahşap evler}, \{h_3, h_4, h_5\}), (\text{ucuz evler}, \{h_1\}), \end{matrix} \right\}$$

Tanım 1.2.3: [28] (F,A) ve (G,B), X evrensel kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer;

i. $A \subset B$

ii. $\forall x \in A$ için $\mathrm{F}(x)$ ve $\mathrm{G}(x)$ aynı kümeler

ise F(A) ya G(B) nin bir esnek alt kümesi denir ve $\mathrm{F(A)} \cong \mathrm{G(B)}$ ile gösterilir.

Tanım 1.2.4: [28] (F,A) ve (G,B), X evrensel kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. $\mathrm{F(A)} \cong \mathrm{G(B)}$ ve $\mathrm{G(B)} \cong \mathrm{F(A)}$ ise F(A) ve G(B) esnek kümeleri eşittir denir.

Bir esnek kümenin tümleyenini tanımlayabilmek için öncelikle esnek küme tanımının önemli bir parçası olan E parametre kümesinin değili tanımlanmalıdır;

Tanım 1.2.5: [28] $\mathrm{E} = \{\mathrm{e}_1, \mathrm{e}_2, \mathrm{e}_3, \dots \mathrm{e}_\mathrm{n}\}$ bir parametre kümesi olsun. E’ nin değili - $\neg E = \{\neg\mathrm{e}_1, \neg\mathrm{e}_2, \neg\mathrm{e}_3, \dots \neg\mathrm{e}_\mathrm{n}\}$ ile tanımlanır. Burada $\forall\ \mathrm{e}_\mathrm{i} \in E$ için $\neg\mathrm{e}_\mathrm{i} = \text{değil}\ \mathrm{e}_\mathrm{i}$ şeklinde ifade edilir.

Önerme 1.2.1: [28] A parametre kümesinin bir alt kümesi olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanır.

i.¬(¬A)=A

ii.$\neg(A \cup B) = (\neg A \cup \neg B)$

iii.$\neg(A \cap B) = (\neg A \cap \neg B)$

İspat:

i.$A = \{e_i : e_i \in E\}$, $\neg A = \{\neg e_i : \neg e_i \in E\}$

ii.$A \cup B = \{\mathrm{e_i} : \mathrm{e_i} \in \mathrm{A} \tilde{\vee} \mathrm{e_i} \in \mathrm{B}\}$

$\neg(A \cup B) = \neg\{\mathrm{e_i} : \mathrm{e_i} \in \mathrm{A} \tilde{\vee} \mathrm{e_i} \in \mathrm{B}\}$

$= \{\neg \mathrm{e_i} : \neg \mathrm{e_i} \in \neg \mathrm{A} \tilde{\vee} \neg\in \neg \mathrm{B}\}$

$= \{\neg \mathrm{e_i} : \neg \mathrm{e_i} \in \neg \mathrm{A}\} \cup \{\neg \mathrm{e_i} : \neg \mathrm{e_i} \in \neg \mathrm{B}\}$

$= (\neg A \cup \neg B)$

iii.$\neg(A \cap B) = \{\neg \mathrm{e_i} : \neg \mathrm{e_i} \in \neg \mathrm{A} \ \tilde{\wedge}\ \neg \mathrm{e_i} \in \neg \mathrm{B}\} = (\neg A \cap \neg B)$

Tanım 1.2.6: [28] (F,A), X evrensel kümesi üzerinde bir esnek küme olsun. (F,A) esnek kümesinin tümleyeni $(F,A)^c$ ile gösterilir ve $(F,A)^c = (F^c, \neg A)$ olmak üzere $F^c : \neg A \longrightarrow P(X)$ fonksiyonu her $x \in \neg A$ için $F^c(x) = X - F(x)$ ile tanımlıdır.

Tanım 1.2.7: [28] (F,A), X evrensel kümesi üzerinde bir esnek küme olsun. Eğer her $e \in E$ için $F(e) = \emptyset$ ise (F,A) esnek kümesine boş esnek küme denir ve Φ ile gösterilir.

Tanım 1.2.8: [28] (F,A), X evrensel kümesi üzerinde iki esnek küme olsun. Eğer her $e \in E$ için $F(e) = X$ ise (F,A) esnek kümesine A mutlak esnek küme denir ve $\tilde{A}$ ile gösterilir. $\tilde{A}^c = \Phi$ ve $\tilde{\Phi}^c = \tilde{\mathrm{A}}$ olur.

Tanım 1.2.9: [28] (F,A) ve (G,B), X üzerinde iki esnek küme olsun. (F,A) VE (G,B) kümesi $(\mathrm{F,A})\, \tilde{\wedge}\, (\mathrm{G,B})$ ile gösterilir ve $(\mathrm{F,A})\, \tilde{\wedge}\, (\mathrm{G,B}) = (\mathrm{H, A \times B})$ ile tanımlıdır. Burada her $(\alpha, \beta) = \ \mathrm{A \times B}$ için $H(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cap G(\beta)$ dir.

Tanım 1.2.10: [28] (F,A) ve (G,B), X üzerinde iki esnek küme olsun. (F,A) VEYA (G,B) kümesi $(\mathrm{F,A})\, \tilde{\vee}\, (\mathrm{G,B})$ ile gösterilir ve $(\mathrm{F,A})\, \tilde{\vee}\, (\mathrm{G,B}) = (\mathrm{H, A \times B})$ ile tanımlıdır. Burada her $(\alpha, \beta) \in \ \mathrm{A \times B}$ için $H(\alpha, \beta) = F(\alpha) \cup G(\beta)$ dir.

Önerme 1.2.2: [28] (F,A) ve (G,B), X üzerinde iki esnek küme olsun. O halde aşağıdakiler sağlanır.

i.$((\mathrm{F,A})\, \tilde{\vee}\, (\mathrm{G,B}))^{\mathrm{c}} = (\mathrm{F,A})^{\mathrm{c}}\, \tilde{\vee}\, (\mathrm{G,B})^{\mathrm{c}}$

ii.$((\mathrm{F,A})\, \tilde{\wedge}\, (\mathrm{G,B}))^{\mathrm{c}} = (\mathrm{F,A})^{\mathrm{c}}\, \tilde{\wedge}\, (\mathrm{G,B})^{\mathrm{c}}$

İspat:

i. $(F,A)\,\tilde{\vee}\,(G,B) = (H, A\times B)$ olsun. Buradan

$((F,A)\,\tilde{\vee}\,(G,B))^c = (H, A\times B)^c = (H^c, \neg(A\times B))$ olur.

$(F,A)^c\,\tilde{\vee}\,(G,B)^c = (F^c, \neg A)\ \tilde{\wedge}\ (G^c, \neg B)$

$=(J, , \neg(A\times B)), \quad J(x,y) = F^c(x) \cap\ G^c(x)$ olur

$= (J, \neg(A\times B))$

Şimdi $(\neg\alpha, \neg\beta) \in\ \neg(A\times B)$ ele alalım buradan

$H^c(\neg\alpha, \neg\beta) = X - H(\alpha,\beta) = X - [F(\alpha) \cup G(\beta)]$

$= [X - F(\alpha)] \cup [X - G(\beta)] = J(\neg\alpha, \neg\beta)$ böylece $H^c = J$ olur. Yani $((F,A)\,\tilde{\vee}\,(G,B))^c = (F,A)^c\,\tilde{\vee}\,(G,B)^c$ dir.

ii. $(F,A)\,\tilde{\wedge}\,(G,B) = (H, A\times B)$ olsun bu durumda

$((F,A)\,\tilde{\wedge}\,(G,B))^c = (H, A\times B)^c$ dir. Diğer taraftan

$(F,A)^c\,\tilde{\vee}\,(G,B)^c = (F^c, \neg A)\,\tilde{\vee}\,(G^c, \neg B) = (K, \neg(A\times B))$

Şimdi $(\neg\alpha, \neg\beta) \in\ \neg(A\times B)$ ele alalım buradan

$H^c(\neg\alpha, \neg\beta) = X - H(\alpha,\beta) = X - [F(\alpha) \cap G(\beta)]$

$= [X - F(\alpha)] \cup [X - G(\beta)] = J(\neg\alpha, \neg\beta)$
böylece $H^c = J$ olur. Yani $((F,A)\,\tilde{\wedge}\,(G,B))^c = (F,A)^c\,\tilde{\vee}\,(G,B)^c$ dir.

Şimdi de esnek küme üzerinde kesişim ve birleşim işlemlerinin tanımlayalım. Bu işlemler tanımlanırken önemli olan nokta parametre kümesinin hangi kümeye ait olduğudur. Parametrelerin bulunduğu yere göre fonksiyonlar tanımlanabilir.

Tanım 1.2.11: [28] (F,A) ve (G,B), X üzerinde iki esnek küme olsun. Buna göre $C = A \cup B$ olmak üzere $\forall x \in C$ için

$$H(x) = \begin{cases} F(x), & x \in A - B \\ G(x), & x \in B - A \\ F(x) \cup G(x), & x \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (H,C) esnek kümesine F(A) ile G(B) esnek kümelerinin birleşimi denir ve $(F, A) \tilde{\cup} (G, B) = (H, C)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 1.2.12: [28] (F,A) ve (G,B), X üzerinde iki esnek küme olsun. $C = A \cap B$ olmak üzere $\forall x \in C$ için H(x)= F(x) veya G(x) şeklinde tanımlanan (H,C) esnek kümesine F(A) ile G(B) esnek kümelerinin arakesiti denir ve $(F, A) \tilde{\cap} (G, B) = (H, C)$ şeklinde gösterilir.

Önerme 1.2.3: [28] (F,A), X evrensel kümesi üzerinde bir esnek küme olmak üzere aşağıdakiler sağlanır.

i. $(F, A) \tilde{\cap} (F, A) = (F, A)$
ii. $(F, A) \tilde{\cup} \emptyset = (F, A)$
iii. $(F, A) \tilde{\cap} \emptyset = \emptyset$
iv. $(F, A) \tilde{\cup} \tilde{A} = \tilde{A}$
v. $(F, A) \tilde{\cap} \tilde{A} = (F, A)$

Önerme 1.2.4: [28] (F,A) ve (G,B), X üzerinde iki esnek küme olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

i. $((F, A) \tilde{\cup} (G, B))^c = (F, A)^c \tilde{\cap} (G, B)^c$
ii. $((F, A) \tilde{\cap} (G, B))^c = (F, A)^c \tilde{\cup} (G, B)^c$

Tanım 1.2.13: [69] (F,E) ve (G,E) X üzerinde iki esnek küme olsun. Esnek fark kümesi $(H, E) = (F, E) \setminus (G, E)$ ile gösterilir ve $(H, e) = (F, e) \setminus (G, e)$ dir.

1.3. Rough (Yaklaşımlı) Küme

Yaklaşımlı (kaba) küme teorisi bir evrenin alt kümelerinin, evrenin bir parçalanışının denklik sınıfları yardımıyla ifade edilmesi ihtiyacından ortaya çıkmıştır. Yaklaşımlı kümeler kuramında her nesnenin bilgi ve ölçümlerle ifade edilebileceği varsayılan evren dikkate alınmıştır. Bu teorinin dayanak noktası ayırt edilemezlik bağıntısıdır. Bir veri veya nesne grubu için elimizde var olan bilgilerin bazı nesne veya verileri açıklamada yetersiz kaldığı durumlarda bu nesnelerin aldığı değerlere göre denklik sınıfları oluşturularak bu karışıklık ortadan kaldırılır. Bu şekilde ayırt edilemezlik bağıntısı kendi görevini tanımlamış olur.

Yaklaşımlı kümelerde sınır bölgesi kavramı vardır. Sınır bölgesi ne kümenin kendisine ne de tümleyenine ait olan elemanlardan oluşan bölgedir. Mevcut verilerle sınıflandırılamayacak elemanları barındıran bölgeler vardır.

Nesnelerin sadece mevcut verileriyle belirlenebileceği varsayımı bilgilerin parçalı yapısını ortaya çıkarmıştır. Bu fark edilme durumundan dolayı nesnelerin ayrımı yapılamaz ve aynı veya benzer olarak gözlemlenir. Bu sebeple belirsiz kavramlar belirli kavramların aksine elemanlarla ilgili bilgiler cinsinden tanımlanamazlar. Bundan dolayı önerilen yöntemde belirsiz kavramın alt ve üst belirsizlik kavramları olarak adlandırılan belirli iki kavramla yer değiştireceği varsayılır [1].

Yaklaşımlı kümeler ilk olarak veri çizelgeleriyle başlar. Bu veri çizelgeleri en basit anlamda bilgi sistemleri içeren yapılardır. U nesneler kümesi ve A özellikler kümesi olmak üzere satırlar nesnelerle ve sütunlar özelliklerle kesiştirilerek her nesnenin özellikleriyle bu bilgi sistemleri oluşturulur. Bu bilgi sistemleriyle belirsiz kavramlar matematiksel yapılara dönüştürülmüş olur ve bu sayede belirsiz birçok kavram bilgisayar ortamında kullanılabilir [70]. Bununla birlikte yaklaşımlı küme teorisi, diskriminant analiz gibi birçok metotla da bağlantılıdır [71]. Karar analizi de yaklaşımlı küme teorisi için geliştirilen yöntemlerdendir [72, 73].

Bu bölümde yaklaşımlı küme kavramı ve yaklaşım uzayı ele alınmıştır.

Tanım 1.3.1.: [10] U objelerin bir kümesi, X de U'nun bir alt kümesi olsun. X kümesini U üzerinde tanımlanan bir B denklik bağıntısına göre karakterize edelim. B_x bir x elemanının denklik sınıfını göstermek üzere alt ve üst yaklaşımlar aşağıdaki gibi verilir.

$$B(X)_* = \{x \in U | B_x \subset X\}$$

$$B(X)^* = \{x \in U | B_x \cap X \neq \emptyset\}$$

Bu şekilde tanımlanan alt ve üst yaklaşımla $(B(X)^*, B(X)_*)$ ikilisine yaklaşımlı (kaba) küme denir.

Bu tanımla görülür ki klasik küme kavramıyla yaklaşımlı küme kavramı tamamen farklı değildir. Yaklaşımlı küme kavramı klasik küme kavramının bir tamamlayıcısıdır. Ayrıca şu açıkça görülüyor ki bir kümenin alt ve üst yaklaşımları ayırt edilemezlik bağıntısı tarafından türetilen topolojide içine ve kapalı işlemlerdir.

Böylece aşağıdaki ifadeler söylenebilir.

• X kümesinin B'ye göre alt yaklaşımı, B'ye göre kesin X'in elemanı olarak sınıflandırılabilinen tüm elemanların kümesidir. (B'ye göre kesinlikle X'de olanlar)

• X kümesinin B'ye göre üst yaklaşımı, B'ye göre muhtemelen X'in elemanı olarak sınıflandırılabilen tüm elemanların kümesidir. (B'ye göre muhtemelen X'de olanlar)

• X kümesinin B'ye göre sınır bölgesi, B'ye göre ne X'in elemanı olarak ne de olmayarak sınıflandırılabilen tüm elemanların kümesidir.

Verilen bu açıklamalar yaklaşımlı kümeler için yeni tanımlar yapılabilmesine zemin hazırlamıştır. Örneğin "Eğer X'in sınır bölgesi boş küme değil ise X kümesi kaba kümedir." Şeklinde yeni bir tanım yaklaşımlı küme tanımı olarak kullanılabilir.

Önerme 1.3.1: [74] (U,R) yaklaşım uzayı olmak üzere U nun X ve Y alt kümelerinin alt ve üst yaklaşımları aşağıdaki özellikleri sağlar.

1. $B(X)_* \subseteq X \subseteq B(X)^*$
2. $B(\emptyset)_* = B(\emptyset)^* = \emptyset, B(U)_* = B(U)^* = U$
3. $B(X \cup Y)^* = B(X)^* \cup B(Y)^*$
4. $B(X \cap Y)_* = B(X)_* \cap B(Y)_*$
5. $B(X \cup Y)_* \supseteq B(X)_* \cup B(Y)_*$
6. $B(X \cap Y)^* \subseteq B(X)^* \cap B(Y)^*$
7. $X \subset Y \Longrightarrow B(X)_* \subseteq B(Y)_*\ ve\ B(X)^* \subseteq B(Y)^*$
8. $B(-X)_* = -B(X)^*$
9. $B(-X)^* = -B(X)_*$
10. B_*B_*(X)= $B^*B_*(X) = B(X)_*$
11. $B^*B^*(X) = B_*B^*(X) = B^*(X)$.

Bu yaklaştırmaların aslında topolojik olarak geliştirilmiş bir veride dâhili ve kapanma uygulamaları olduğu kolaylıkla görülebilir. Bu nedenle bulanık küme teorisi ve yaklaşımlı küme teorisi tamamen farklı matematiksel çerçeveler gerektirir.

Tanım 1.3.2. [74] U evrensel küme ve $X \subseteq U$ olsun.

$$BN_B(X) = B(X)^* - B(X)_*$$

kümesine X kümesinin sınır bölgesi denir.

Eğer $BN_B(X) = \emptyset$ ise X kümesi B ye göre klasiktir denir. Diğer taraftan $BN_B(X) \neq \emptyset$ ise X kümesi B ye göre yaklaşımlı kümedir denir.

Yaklaşımlı küme, yaklaşımın kesinlik durumunu belirten

$$\alpha_B(X) = \left|\frac{B(X)_*}{B(X)^*}\right|$$

katsayısı ile de ifade edilebilir [6]. Bu ifade $|X|$ in eleman sayısını gösterdiği yerde yaklaşımın tutarlılığı için kullanılır. Eğer $\alpha_B(X) = 1$ ise açıkça görülür ki bu durum alt ve üst yaklaşımların eşit olduğu anlamına gelir ki bu da sınırın boş küme olduğu yani X kümesinin B ye göre klasik olduğu anlamına gelir. Eğer $\alpha_B(X) < 1$ ise bu durumda X kümesi B aracılığıyla bir yaklaşımlı kümedir.

Yaklaşımlı kümeler alt yaklaşımın boş olup olmama ve üst yaklaşımın evrensel kümeye eşit olup olmama durumuna göre dört kategoride sınıflandırılırlar.

Tanım 1.3.3: [74] $|X|$, X kümesinin kardinalitesini göstermek üzere yaklaşımlı üyelik fonksiyonu

$$\mu_X^B(x) = \left(\frac{X \cap B_x}{B_x}\right)$$

şeklinde tanımlanır [8].

Bu fonksiyon x' in X' e ait olmasının şartlı ihtimalini ve B tarafından x hakkında verilen bilgi ile x' in X' e ait olma derecesini açıklar. Bu haliyle bulanık kümede kullanılan üyelik fonksiyonuyla oldukça benzerdir. Kabaca üyelik fonksiyonu bir kümenin sınır bölgelerini ve yaklaşımlarını tanımlamak için kullanılabilir. Bu durum aşağıda gösterilmiştir.

$B(X)_* = \{x \in U | \mu_X^B(x) = 1\}$

$B(X)^* = \{x \in U | \mu_X^B(x) > 0\}$ ve $BN_B(X) = \{x \in U | 0 < \mu_X^B(x) < 1\}$

1.4. Temel Yaklaşım Uzayı

Algılanabilir nesneler kümesi U, nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi F ve $\sim_B$, U nesneler kümesinin $B \subseteq F$ ile ilgili $\xi_B = U \setminus \sim_B$ ayrışımını belirleyen ayırt edilemezlik bağıntısı olmak üzere $(U, F, \sim_B)$ yapısına temel yaklaşım uzayı FAS (Fundamental Approximation Space) denir [38].

Yaklaşımlı küme teorisinin temeli "temel yaklaşım uzayı" ile oluşturulur [75]. Ayrıca bir yaklaşım uzayı algılarımızın matematiksel modelleri olarak gözlemlenebilir.

Yaklaşım uzayı kavramı U nesnelerin kümesinin "$\sim_B$" ayırt edilemezlik bağıntısı yardımıyla ξ_B ayrışımının oluşturulmasıyla başlar. Bununla birlikte U nun herhangi bir alt kümesinin yaklaşımları ile ilgili B tarafından oluşturulan bölüntü kümesinin seçilen alt küme ile ilişkisi göz önüne alınır. $X \subseteq U$ daki nesneler için ξ_B ayrışımı arasındaki ilişkiler, X ile ortak nesnelere sahip olan sınıfların belirlenmesi ile tespit edilir.

Tanım 1.4.1: [38] U nesneler kümesi olmak üzere, $X \subseteq U$ kümesinin bir yaklaşımı X in alt kümesi olan $B_x \in \ \xi_B = U \setminus \sim_B$ sınıflarının birleşiminden oluşur. Bu ayrışıma X kümesinin B- alt yaklaşımı denir ve

$$B_*X = \bigcup_{B_x \subseteq X} B_x$$

İle gösterilir.

Sonuç olarak B_*X boştan farklı ise B_*X in her bir sınıfındaki nesneler X deki nesnelerin tanımlamaları ile eşleşen tanımlamalara sahiptir.

Teorem 1.4.1: [38] U nesneler kümesi ve $X \subseteq U$ olmak üzere, X kümesi boştan farklı bir B_*X alt yaklaşımına sahip ise X bir yakın kümedir.

İspat: Boştan farklı bir B_*X alt yaklaşımına sahip olan bir X kümesi dikkate alınsın. B_*X alt yaklaşımı yakın küme olduğundan ve yakın küme içeren her küme yakın olduğundan $(B_*X \subseteq X)$ X bir yakın kümedir.

Tanım 1.4.2: [38] $X \subseteq U$ algılanabilir nesneler kümesi ve B kümesi de U daki nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $X \subseteq U$ kümesinin başka bir yaklaşımı, X kümesi ile ara kesiti boştan farklı olan $B_x \in U \setminus \sim_B$ sınıflarının birleşiminden oluşur. Bu yaklaşıma X in B- üst yaklaşımı denir ve

$$\mathrm{B}^*\mathrm{X} = \bigcup_{B_x \cap X \neq \emptyset} B_x$$

İle gösterilir.

Diğer bir ifadeyle $\mathrm{B}^*\mathrm{X}$ üst yaklaşımı X deki nesne tanımıyla eşleşen tanımlara sahip en az bir nesne içeren $B_x \in U \setminus \sim_B$ sınıflarının birleşiminden oluşur.

B_*X alt yaklaşımı, $\mathrm{B}^*\mathrm{X}$ üst yaklaşımının alt kümesidir. $\mathrm{B}^*\mathrm{X}$ üst yaklaşımının alt kümesi olmayan bir veya birden fazla $B_x \in U \setminus \sim_B$ sınıfları olabilir ya da olmayabilir.

Teorem 1.4.2: [38] U nesneler kümesi ve $X \subseteq U$ olmak üzere $\mathrm{B}^*\mathrm{X}$ üst yaklaşımı ve X kümesi yakın kümelerdir.

İspat: Yakın kümelerin hiyerarşisinden $\mathrm{B}^*\mathrm{X}$ üst yaklaşımı bir veya birden fazla yakın küme sınıfları içerdiğinden bir yakın kümedir. Üst yaklaşımın tanımından B_*Xve X bir veya birden fazla ortak nesne içerir ve bu ortak nesneler eşleşen tanımlara sahiptir. Böylece $\mathrm{B}^*\mathrm{X}$ üst yaklaşımı ve X kümesi yakın kümelerdir.

Bir kümenin sınır bölgesi boştan farklı ise alt ve üst yaklaşımlara sahip küme olarak dikkate alınabilir. $Bnd_B X \neq \emptyset$ ise X, yaklaşıma sahip olan ya da yaklaşık olarak B deki fonksiyonlarla ilişkili olan yakın kümedir. $Bnd_B X \neq \emptyset$ ise $|Bnd_B X| > 0$ dır. Bu durumda X yaklaşıma sahip olan yakın kümedir.

Teorem 1.4.3: [38] U, nesneler kümesi $X \subseteq U$ olmak üzere $|Bnd_B X| \geq 0$ ise X kümesi yaklaşımlı kümedir.

İspat: $|Bnd_B X| > 0$ ve $|Bnd_B X| = 0$ olmak üzere iki durum söz konusudur.

i. $|Bnd_B X| > 0$ $(|Bnd_B X| \neq \emptyset)$ olsun. Boştan farklı sınır bölgesi olan $X \subseteq U$ kümesi dikkate alınsın. Bunun anlamı B_*X alt yaklaşımı, $\mathrm{B}^*\mathrm{X}$ üst yaklaşımının bir öz alt kümesidir. $B_x \in B_*X$ sınıfları ξ_B ayrışımının elemanlarıdır. Alt yaklaşımın tanımından X kümesi B_*X alt yaklaşımındaki sınıfları içerir. B_*X alt yaklaşımı yakın küme olduğundan X bir yakın kümedir.

ii. $|Bnd_B X| = 0$ ($|Bnd_B X| = \emptyset$ olsun. $|Bnd_B X| = 0$ ise $B_*X = \mathrm{B}^*\mathrm{X}$ ve $B_*X \subset X$ dir. Buradan B_*X ve X ortak tanımlara sahip nesneler içerir. Böylece X bir yakın kümedir.

1.5. Yakın Küme

1.5.1. Yakın Küme Kavramının Temelleri

Yakınlık günlük yaşamımızda işlev görmemizi sağlayan sezgisel bir kavramdır. Günlük konuşma dilimizdeki birçok kavram arasındaki yakınlık için zarflar ve sıfatlar kullanılmaktadır. Bu yakınlık fikrinin matematiksel olarak ifade edilmesi yakın küme teorisiyle ortaya atılmıştır.

Yakın küme teorisi 1981 yılında Z. Pawlak tarafından ortaya atılan yaklaşımlı küme teorisi [75] ve E. Orlovska' nın yaklaşma alanları üzerine yaptığı çalışmalardan oldukça etkilenmiştir [76]. Yakın küme teorisi iki yaklaşımlı küme arasında ayrılmazlık ilişkisi kurularak tanımlanabilmesiyle birlikte eğer aynı tanımlara sahip nesneler içeriyorlarsa bu iki kümenin yakın olduğu görüşü üzerine kurulmuştur. Genel olarak yakın kümeler, nesnelerin kendisi ile veya başka bir küme ile benzer tanımlamalar taşıması ile belirlenir.

Yakın küme teorisi ayrık kümeler olarak oluşturulan bölüntü kümelerindeki nesnelerden elde edilen benzer bilgilerin metot olarak kullanılabilmesini sağlar. Yakın kümelerin keşfi gözlemlenen nesnelerin fiziksel olarak tanımlanmasıyla başlar. Bu ise fiziksel dünyada var olan nesnelerin (algısal nesnelerin) özelliklerini temsil eden fonksiyonların seçilmesi ile başlar. Yani nesnelerin gözlemlenmesi, karşılaştırılması ve sınıflandırılması için yakın küme teorisi kullanılır [51].

Yakın küme teorisinde nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonları, bir nesneden gözlemlenen özelliklerin değerine karşılık gelen bir reel sayıya tanımlıdır [38].

Tanım 1.5.1: [33, 38] Algılanabilen nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden fonksiyona çıkarım (probe) fonksiyonu denir.

Çıkarım fonksiyonları benzer nesneler arasında olduğu gibi benzer nesnelerden oluşan kümeler arasında da benzerlik kurar [42]. Bir çıkarım fonksiyonu çevremizdeki nesnelerin gözlemlenen fiziksel karakterlerini ölçer. Yani bir çıkarım fonksiyonu bir özelliği ölçen kısmi bir işlevdir. Her biri ölçülmek istenen fiziksel özelliği algılayarak reel karşılığını oluşturan birer sensör olarak düşünülebilir. Her özelliğe bir çıkarım fonksiyonu atanabileceği gibi birden fazla çıkarım fonksiyonuyla bir özellik de ölçülebilir. Çıkarım fonksiyonlarının kümesi ile algılanabilir nesneler kümesi yakın kümenin temelini oluşturur. Bu iki kavramın birleşmesi veya birlikte düşünülmesi algısal sistemleri oluşturur [77].

Çıkarım fonksiyonları reel değerler aldığı gibi reel olmayan değerlerle de tanımlanabilir. Yani $V \neq \emptyset, X \subseteq O$ olmak üzere $\varphi: X \to V$ şeklinde de tanımlanabilir [78].

Reel değerli çıkarım fonksiyonları ile her ne kadar cebirsel yapılar çalışılabilse de bu tanım mantık ve cebirsel yapıların teorik olarak da çalışılmasını sağlar.

Önerme 1.5.1: [77] Bir nesne algılanabilirdir ancak ve ancak nesne tanımlanabilirdir.

Fiziksel evrende bir nesne hangi ölçüde algılanabiliyor ise o şekilde tanımlanmaktadır. Renkler, şekiller, ebat veya hacimler gibi tanımları oluşturularak nesnelerin algılanabilir yapısı oluşturulur.

Önerme 1.5.2: [77] Nesne tanımlamalarını formülleştirmek nesnelerin matematiksel olarak algılanmasını sağlar.

Tanım 1.5.2: [38] O, algılanabilir nesnelerin boştan farklı bir kümesi ve $\mathcal{F}$ nesnelerin ayırt edici özeliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının boş olmayan bir kümesi olmak üzere $(O, \mathcal{F})$ ye bir algılanabilir sistem denir.

Algısal sistem kavramı, belirli bir örnek O uzayında bulunan ve örnek algısal nesnelerin seçiminden kaynaklanan çok farklı ve çeşitli yorumları açığa çıkarır.

1.5.2. Yakın Kümeler

Sembol	**Anlamı**
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
O	Algılanabilir nesnelerin kümesi
X	$X \subseteq O$ örnek nesnelerin kümesi
x	$x \in O$ örnek nesne
$\mathcal{F}$	Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi
B	$B \subseteq \mathcal{F}$
L	Tanım uzunluğu
İ	i $\leq L, L \in Z^{+}$
φ_i	$\varphi_i : O \to R$
Φ	$\Phi : O \to R^{L}$
$\Phi(\mathrm{x})$	$\Phi(\mathrm{x}) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_L)$

Tablo – 1

Algısal sistemde var olan fiziksel nesnelerin bilgisayar sistemlerinde algılanabilmeleri için matematiksel bir takım tanımlamalara sahip olmaları gereklidir. Bir $x \in X$ algısal nesnesinin tanımı çıkarım fonksiyonları yardımıyla belirlenen $\Phi(\mathrm{x})$ fonksiyonu ile belirlenir. Nesne tanımlamalarındaki önemli konulardan biri de seçilen çıkarım fonksiyonlarının belirlenirken nesnelerin hangi özelliklerinin ölçülmesi istendiğidir. Ölçülmek istenen özelliklerin kümesi $B \subseteq \mathcal{F}$ olmak üzere B kümesindeki nitelikler $x \in X$ nesnelerinin ayırt edici özelliklerini temsil etsin. $\varphi_i : O \to R$ olmak üzere $\varphi_i \in B$ olsun. Bu çıkarım fonksiyonlarının birleşimi dikkate alınırsa

$$\Phi : O \to R^{L}$$

$$\Phi(\mathrm{x}) = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \dots \varphi_L)$$

tanım uzunluğu $|\varphi_i| = L$ olan nesne tanımlamasıdır. $\Phi(x)$ tanımlamasının altında φ_i fonksiyonları tarafından modellenen her bir sensörün ölçümlerinin kaydedilmesi vardır [38].

Sembol	Anlamı
$\sim_B$	$\sim_B = \{(x, x') \mid \varphi_i(x) = \varphi_i(x'), \forall\varphi \epsilon B\}$,
$[x]_B$	$[x]_B = \{x' \epsilon X \mid x \sim_B x'\}$, yakınlık sınıfı
$O/\sim_B$	$O/\sim_B = \{[x]_B \mid x \in O\}$, bölüm kümesi
ξ_B	$\xi_B = O/\sim_B$
Δ_{φ_i}	$\Delta_{\varphi_i} = \lvert\varphi_i(x) - \varphi_i(x')\rvert$, çıkarım fonksiyonlarının farkı

Tablo – 2

$X \subseteq O$ kümesindeki nesneler aynı veya benzer tanımlamalara sahip iseler bu kümeler yakın olarak düşünülmektedir. Her Φ, bir özelliği ölçmektedir. Bu durumda $x, x' \epsilon O$ olmak üzere Δ_{φ_i} farkı

$$\Delta_{\varphi_i} = |\varphi_i(x) - \varphi_i(x')|$$

şeklinde tanımlanır. Δ_φ farkı Z. Pawlak tarafından tanımlanan ayırt edilemezlik bağıntısını belirler [75].

Tanım 1.5.3. [38] $x, x' \epsilon O$, $B \subseteq F$ olsun. $i \leq |\Phi|$ tanım uzunluğu olmak üzere

$$\left\{(x, x') \in O \times O \middle| \forall \varphi_i \in B, \Delta_{\varphi_i} = 0\right\}$$

şeklinde tanımlanan bağıntıya O üzerinde ayırt edilemezlik bağıntısı denir ve "$\sim_B$" ile gösterilir.

Tanım 1.5.4. [38] $B \subseteq F$, nesnelerin tanımlanması için oluşturulan ilgili çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $x, x' \epsilon O$ olmak üzere $x \sim_{\varphi_i} x'$ ($\Delta_{\varphi_i} = 0$) olacak şekilde en az bir $\varphi_i \in B$ varsa, $x\ ve\ x'$ nesneleri birbirine minimal yakındır denir. Minimal yakınlık "Yakınlık Tanımlama İlkesi- NDP" olarak da adlandırılır.

Teorem 1.5.1: [38] $[x]_B \in \xi_B$ sınıflarındaki nesneler yakın nesnelerdir.

İspat: $\xi_B = O/\sim_B$, O nesneler kümesinin bir ayrışımı ve $[x]_B \in \xi_B$ olmak üzere $x, x' \epsilon [x]_B$ olsun. Ayırt edilemezlik bağıntısının tanımı dikkate alınırsa her bir $\varphi_i \in B$ için $\Delta_{\varphi_i} = |\varphi_i(\mathrm{x}) - \varphi_i(x')| = 0$ dır. Böylece yakınlık tanımlama prensibi kavramından $x\ ve\ x'$ nesneleri yakın nesnelerdir.

Tanım 1.5.5: [38] $B \subseteq \mathcal{F}$ örnek nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi, $X, X' \subseteq O$ kümeleri de sırasıyla ilgili nesnelerin ve test nesnelerinin kümesi ve i $\leq |B|$ olmak üzere $\varphi_i \in B$ olsun.

$$\mu_X^B(X') = \frac{\left|\left\{\varphi_i \in B \middle| x \sim_{\varphi_i} x'; x \epsilon X, x' \epsilon X'\right\}\right|}{|B|}$$

şeklinde tanımlanan $\mu_X^B: P(O) \to [0,1]$ fonksiyonuna yakınlık ölçüm fonksiyonu denir.

Tanım 1.5.6: [38] $X, X' \subseteq O$ ve $B \subseteq \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda $x \epsilon X, x' \epsilon X'$ için $x \sim_{\varphi_i} x'$ olacak şekilde $\varphi_i \in B$ varsa X kümesi X' kümesine yakındır denir.

Uyarı: [38] X, X' ile yakın ise bu durumda X, X' ile ilgili yakın küme ve X' de X ile ilgili yakın kümedir. Bu iki küme yer değiştirirse bu durumda yansımalı yakınlık kavramı oluşur.

Tanım 1.5.7: [38] $X \subseteq O$ ve $x, x' \in X$ olsun. x, x' nesnesine yakın ise X kümesine kendisi ile ilgili yakın küme veya bu duruma X kümesinin yansımalı yakınlığı denir.

Teorem 1.5.2: [38] $\xi_B = O/\sim_B =$ ayrışımındaki her bir sınıf yakın kümedir.

İspat: $O/\sim_B = \{[x]_B | x \in O\}$ ayrışımındaki herhangi bir $[x]_B$ sınıfı aynı tanımlara sahip nesnelerin kümesidir. Yani $x, x' \in [x]_B$ ise $x \sim_B x'$ olur. Yansımalı yakınlık tanımı dikkate alınırsa, $[x]_B \in \xi_B$ sınıfı yakın kümedir.

Teorem 1.5.3: [38] ξ_B ayrışımı bir yakın kümedir.

İspat: $\sim_B$, O nesneler kümesinin $\xi_B = O/\sim_B$ ayrışımını tanımlayan bir ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. $[x]_B \in \xi_B$ sınıfının yakın küme olduğundan ve ξ_B ayrışımı birbiriyle yakın olan nesneler içerdiğinden ξ_B yakın kümedir.

Tanım 1.5.8: [38] $X \subseteq O$ ve $X', X'' \subseteq X$ olsun. Bu durumda X', X'' yakın kümeler ise X bir yakın kümedir. Buna yakın kümelerin hiyerarşisi denir.

Tanım 1.5.9: [38] Yakın küme içeren herhangi bir küme yakın kümedir. Buna kalıtımsal yakınlık denir.

Teorem 1.5.4: [38] Yakın küme içeren bir kümenin kendisi de yakın kümedir.

İspat: X kümesinin bir yakın küme içerdiğini kabul edelim. Yakın kümelerin hiyerarşisi ve kalıtımsal yakınlık kavramları dikkate alınırsa X bir yakın kümedir.

1.6. Yakın Yaklaşım Uzayı

1.6.1. Yakın Yaklaşım Uzayının Temelleri

Bu bölümde yakın yaklaşım uzayı kavramları ve yapısı tüm bileşenleri ile dikkate alınacaktır. Yakın yaklaşım uzaylarında tanımlanan alt yaklaşım üst yaklaşım ve sınır bölgesi kavramları genel anlamda tekrar ele alınacaktır.

Sembol	Anlamı
B	$B \subseteq \mathcal{F}$
R	$\binom{\lvert B\rvert}{r}$ yani $\varphi_i \in B$ fonksiyonlarının sayısının r li kombinasyonu
B_r	$r \leq \lvert B\rvert$
$\sim_{B_r}$	B_r Yardımıyla tanımlanan ayırt edilemezlik bağıntısı
$[x]_{B_r}$	$[x]_{B_r} = \{x' \in O \mid x \sim_{B_r} x'\}$ yakınlık sınıfı
$O/\sim_{B_r}$	$O/\sim_{B_r} = \{[x]_{B_r} \mid x \in O\}$ bölüm kümesi
ξ_{O,B_r}	$\xi_{O,B_r} = O/\sim_{B_r}$
$N_r(B)$	$N_r(B) = \{\xi_{O,B_r} \mid B_r \subseteq B\}$ ayrışımlar kümesi
v_{N_r}	$v_{N_r} = \wp(O) \times \wp(O) \rightarrow [0,1]$ yakınlık fonksiyonu
$N_r(B)_*X$	$N_r(B)_*X = \cup_{[x]_{B_r} \subseteq X} [x]_{B_r}$ yakın alt yaklaşım
$N_r(B)^*X$	$N_r(B)^*X = \cup_{[x]_{B_r} \cap X \neq \emptyset} [x]_{B_r}$ yakın üst yaklaşım
$Bnd_{N_r(B)}(X)$	$N_r(B)^*X \setminus N_r(B)_*X = \{x \in N_r(B)^*X \mid x \notin N_r(B)_*X\}$

Tablo – 3

O algılanabilir nesneler kümesi ve F çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. R, kısıtlanmış $B_r \subseteq B \subseteq F$ alt kümesinin kardinalitesi olmak üzere "$\sim_{B_r}$" yaklaşımlı küme teorisinden $B_r \subseteq B$ alt kümesine kısıtlanmışı olan ayırt edilemezlik bağıntısıdır. B_r kümesinin her seçimi "$\sim_{B_r}$" bağıntısının O nesneler kümesinin farklı bir ayrışımına yol açar. Bu seçim $|B|$, B deki fonksiyonların sayısı, r B_r kümesinin kardinalitesi olmak üzere $\binom{|B|}{r}$ farklı şekilde yapılır.

"$\sim_{B_r}$" ayırt edilemezlik bağıntısı nesneler kümesini ikişer ikişer ayrık denklik sınıflarına ayırır. Bu denklik sınıfları da nesneler kümesini $O/\sim_{B_r} = \{[x]_{B_r} \,|x \in O\}$ olacak şekilde bölüm kümesine ayırır. Ayrışımların bir kümeler ailesi de $N_r(B) = \{\xi_{O,B_r} | B_r \subseteq B\}$ dir.

Yakınlık fonksiyonu $v_{N_r} = \wp(O) \times \wp(O) \to [0,1]$ şeklinde tanımlanmıştır. Yani yakınlık fonksiyonu bir küme çiftinden $[0,1]$ aralığına tanımlı bir fonksiyon olup, bu yakınlık fonksiyonu seçilen çıkarım fonksiyonlarına göre özellikleri belli olan nesne kümeleri arasındaki yakınlık derecesini temsil eder [79].

Nesneler için seçilen özellikleri temsil eden $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının her bir seçimi farklı bir ayırt edilemezlik bağıntısı, denklik sınıfı, bölüm kümesi ve yakınlık fonksiyonu belirler. Bu durumda $x, x' \in \sim_{B_r}$ ise x ve x' nesnelerine B_r deki tüm çıkarım fonksiyonlarına göre B-ayırt edilemezdir denir.

Tanım 1.6.1: [38] O, algılanabilen nesnelerin bir kümesi; F nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $r \leq |B|$ olmak üzere "$\sim_{B_r}$", O nesneler kümesinin $B_r \subseteq B \subseteq F$ ile ilgili $\xi_{O,B_r} = O/\sim_{B_r}$ ayrışımını belirleyen bir ayırt edilemezlik bağıntısı, $N_r(B) = \{\xi_{O,B_r} | B_r \subseteq B\}$ ayrışımların kümesi ve v_{N_r} yakınlık fonksiyonu olsun. $(O, F, \sim_{B_r,} N_r(B), v_{N_r})$ yapısına yakın yaklaşım uzayı denir[9].

Teorem 1.6.1: [38] Ayrışımların ailesi olan $N_r(B)$ kümesi bir yakın kümedir.

İspat: $\xi_{O,B_r} \in N_r(B)$ ayrışımı, $[x]_{B_r}$ sınıflarını içerdiğinden ve bu sınıflar birer yakın küme olduklarından ξ_{O,B_r} bir yakın kümedir. Böylece $N_r(B)$ kümesi bir yakın kümedir.

Tanım 1.6.2: [38] O, nesneler kümesi ve $X \subseteq O$ olmak üzere $B \subseteq F$ ile ilgili $N_r(B)$-alt yaklaşımı

$N_r(B)_* X = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq X} [x]_{B_r}$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.6.3: [38] O, nesneler kümesi ve $X \subseteq O$ olmak üzere $B \subseteq F$ ile ilgili $N_r(B)$- üst yaklaşımı

$$N_r(B)^* X = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap X \neq \emptyset} [x]_{B_r}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.6.2: [38] O, nesneler kümesi ve $X \subseteq O$ olmak üzere $B \subseteq F$ ile ilgili $N_r(B)$- alt yaklaşımı bir yakın kümedir.

İspat: Alt yaklaşımın tanımı dikkate alınırsa, $N_r(B)_* X \subseteq X$ ve $N_r(B)_* X, X$ in alt kümeleri olan $[x]_{B_r}$ sınıflarından oluşur. $[x]_{B_r}$ sınıfları yakın kümeler olduklarından $N_r(B)_* X$ alt yaklaşımı da yakın kümedir.

Benzer durum üst yaklaşım için de geçerlidir.

Teorem 1.6.3: [38] Nesneler kümesi O ve $X \subseteq O$ olmak üzere $B \subseteq F$ ile ilgili $N_r(B)^*$ üst yaklaşımı yakın kümedir.

Tanım 1.6.4: [38] Bir $X \subseteq O$ kümesinin sınır bölgesi

$$Bnd_{N_r(B)}(X) = N_r(B)^* X \setminus N_r(B)_* X = \{x \in N_r(B)^* X | x \notin N_r(B)_* X\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.6.4: [38] O, nesneler kümesi ve $X \subseteq O$ olmak üzere X kümesinde $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| \geq 0$ ise X kümesi yakın kümedir.

İspat: $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| > 0$ ve $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| = 0$ durumlarının incelenmesi gerekir.

i. $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| > 0$ $\left(\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| \neq 0\right)$ olsun. Boştan farklı sınır bölgesi olan $X \subseteq O$ kümesi dikkate alınsın. Bunun anlamı $N_r(B)_* X \subseteq N_r(B)^* X$ yani $N_r(B)_* X$ alt yaklaşımı $N_r(B)^* X$ üst yaklaşımının bir alt kümesi ve aynı zamanda $N_r(B)_* X$ alt yaklaşımı X in bir alt kümesidir. Böylece teorem 1.6.2 den X bir yakın kümedir.

ii. $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| = 0$ $\left(\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| = \emptyset\right)$ olsun. $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| = 0$ ise $N_r(B)_* X = N_r(B)^* X$ ve $N_r(B)_* X \subseteq X$ dir. Buradan $N_r(B)_* X$ ve X ortak tanımlara sahip nesneler içerir. Her yakınlık sınıfı bir yakın kümedir. Alt yaklaşımın tanımından $N_r(B)_*X$ deki tüm sınıflar aynı zamanda X in alt kümeleridir. Böylece X bir yakın kümedir.

Teorem 1.6.5: [38] Alt veya üst yaklaşıma sahip olan her küme bir yakın kümedir.

İspat: Teorem 1.6.4. dikkate alınırsa X kümesi bir yakın kümedir ancak ve ancak $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| \geq 0$ dır. $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| > 0$ ise X kümesi yaklaşıma sahip olan bir kümedir. Yani X kümesi yakın kümedir. $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| = 0$ ise X yakın küme olarak dikkate alınabilir. Ancak alt veya üst yaklaşıma sahip olamaz. Sonuç olarak alt veya üst yaklaşıma sahip olan bir küme yakın kümedir, ancak her yakın küme alt veya üst yaklaşıma sahip olmayabilir.

1.6.2. Yakınlık Fonksiyonu

İki kümenin birbirlerine yakınlık derecelerini ölçmek için kullanılan yakınlık fonksiyonu farklı yollarla tanımlanabilir. $X, Y \subseteq O$ iki yakın küme olmak üzere yakınlık fonksiyonunun farklı iki formu;

$$v_{N_r} = \wp(O) \times \wp(O) \to [0,1]$$

$$v_{N_r}(X,Y) = \begin{cases} \dfrac{|X \cap Y|}{|Y|} & , \quad |X| \leq |Y| \\ 1 & , \quad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

$$v_{N_r}(X,Y) = \begin{cases} \dfrac{|X \cap Y|}{|X|} & , \quad |Y| \leq |X| \\ 1 & , \quad diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [38].

1.6.3. Tanımsal Tabanlı Küme İşlemleri

Algılanabilir elemanlardan oluşan kümelerdeki elemanların tanımlanmalarının dikkate alınması tanımsal tabanlı küme işlemlerinin çıkış noktasıdır. Bu kısımdaki tüm kümeler algılanabilir nesnelerden oluşmaktadır. Genel olarak Φ çıkarım fonksiyonu ve V boştan farklı bir küme olmak üzere $\Phi: \mathrm{O} \to \mathrm{V}^{\mathrm{L}}$ şeklindedir.

Tanım 1.6.5: [32] O, algılanabilir nesneler kümesi ve $X \subseteq O$ ve $\Phi(x) \in V^L$olsun.

$$Q(X) = \{\Phi(x) | x \in X\}$$

kümesine X in küme tanımlaması denir.

Tanım 1.6.6: [32, 44] O, algılanabilir nesneler kümesi ve $X, Y \subseteq O$ olsun.

$$X \underset{\Phi}{\cap} Y = \{a \in X \cup Y | \Phi(a) \in Q(X) \; ve \; \Phi(a) \in Q(Y)\}$$

kümesine X ve Y kümelerinin tanımsal arakesiti denir.

Tanım 1.6.7: [49] O, algılanabilir nesneler kümesi ve $X, Y \subseteq O$ olsun.

$$X \underset{\Phi}{\cup} Y = \{a \in X \cup Y | \Phi(a) \in Q(X) \; veya \; \Phi(a) \in Q(Y)\}$$

kümesine X ve Y kümelerinin tanımsal birleşimi denir.

Tanım 1.6.8: [49] O, algılanabilir nesneler kümesi ve $X, Y \subseteq O$ olsun.

$$X \underset{\Phi}{\setminus} Y = \{x \in X | \Phi(x) \notin Q(Y) \}$$

kümesine X kümesinin Y kümesinden tanımsal farkı denir.

Tanım 1.6.9: [49] O, algılanabilir nesneler kümesi ve $X \subseteq O$ ve $Y \subseteq X$ olsun.

$$C_{\underset{\Phi}{X}}(Y) = \{x \in X | \Phi(x) \notin Q(Y) \}$$

kümesine Y kümesinin X kümesine göre tanımsal tümleyeni denir.

Tanım 1.6.10: [49] O, algılanabilir nesneler kümesi ve $X \subseteq O$ olsun. X kümesinin tanımsal tümleyeni

$$\underset{\Phi}{\mathrm{C}\,(\mathrm{X})} = \underset{\Phi}{C_{\mathrm{O}}}(X) = O \underset{\Phi}{\setminus} X$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.6.11: [49] O, algılanabilir nesneler kümesi ve $X, Y \subseteq O$ olsun.

$$dNM(X,Y) = 1 - \frac{\left|X \underset{\Phi}{\cap} Y\right|}{|X \cup Y|}$$

şeklinde tanımlanan

$$dNM: \wp(O) \times \wp(O) \rightarrow [0,1]$$

fonksiyonuna tanımsal tabanlı yakınlık ölçüm fonksiyonu denir.

Burada $dNM(X,Y) = 0$ olması, X ve Y nin tanımsal olarak çok yakın veya aynı olduğu anlamına gelir. $dNM(X,Y) = 1$ olması ise X ve Y kümelerinin tanımsal olarak yakın hiçbir eleman içermediklerini yani yakın olmadıklarını gösterir.

II. BÖLÜM

2.FUZZY (BULANIK) KÜME, SOFT (ESNEK) KÜME, ROUGH (YAKLAŞIMLI) KÜME VE NEAR (YAKIN KÜME) KÜME ARASINDAKİ İLİŞKİLER

Klasik küme kuramının yetersizliği anlaşıldıktan sonra ortaya çıkan ve klasik mantık kuralları ile tam olarak karar verilemeyen konularda bilimsel gelişmelere katkı sağlayan yeni küme yaklaşımları ortaya atılmıştır. Bunlardan ilki 1965 ve 1975 de ortaya çıkan "Bulanık Küme" ve "Bulanık Mantık" teorileridir. L.A. Zadeh tarafından ortaya atılan bu teoriden sonra 1982 de Z.Pawlak "Yaklaşımlı Küme" teorisini tanıtmıştır. Her iki yaklaşım da klasik mantık kuralları ile tam olarak açıklanamayan durumlarda birçok fayda sağlamıştır. 1999 da Molodtsov yeni bir küme teorisi olarak "Esnek Küme" ve daha sonra 2002 de Peters "yakın Küme" teorilerini tanıtmıştır.

Bu teorilerin birbirinden farklı yapıları ve tanıtım şekilleri olsa da birçok yönden benzerlikleri ve kendi aralarında çeşitli geçişleri mevcuttur. Klasik küme bir gösterim ve sezgisel veya aksiyomlarla tanımlanır. Bulanık kümeler, ileri düzeyde matematik yapılar, sayılar ve fonksiyonlar içeren, üyelik fonksiyonlarıyla tanımlanır. Yaklaşımlı kümeler ise yaklaşımlarla tanımlanır. Esnek kümeler ve yakın kümelerde de benzer durumlar mevcuttur. Görüldüğü gibi yaklaşımlı küme, yakın küme ve esnek küme teorileri bulanık küme teorisinde olduğu gibi klasik küme teorisine bir alternatifi değil aksine onun bir parçasıdır. Bu dört küme teorisi farklı bir küme teorisi değil aksine Cantor tarafından tanıtılan klasik küme teorisinin tamamlayıcısıdır.

Bu bölümde 1. Bölümde tanıtılan bu küme teorileri arasındaki ilişkiler ve birbiri arasındaki geçişler ele alınmıştır. Bu küme teorileri arasında geçişler olduğu gibi bunların birlikte yorumlanması konusunda da yeni buluşlar çeşitli şekillerde araştırılmış ve çalışmalar yapılmıştır.

2.1. Klasik Küme ile Bulanık Küme Arasındaki İlişki

Bu bölümde klasik küme kuramı ile bulanık (fuzzy) küme kuramı arasındaki ilişki incelenmiştir.

Klasik küme teorisinde X boştan farklı bir küme ve $B \subset X$ ise üyelik fonksiyonu

$$\mu_B(x) = \begin{cases} 1 \ , x \in B \\ 0 \, , x \notin B \end{cases}$$

şeklindedir.

$\mu_X: X \to [0,1]$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için $\mu_X(x) = 1$ olarak tanımlanırsa X kümesi

$$\emptyset = \{(x, 0) | x \in X\}$$

bulanık kümesi olarak yazılabilir.

$\mu_\emptyset: X \to [0,1]$ fonksiyonu $\forall x \in X$ için $\mu_X(x) = 0$ olarak tanımlanırsa X kümesi

$$X = \{(0,1) | x \in X\}$$

elde edilir.

Sonuç olarak her klasik küme bir bulanık küme olarak dikkate alınabilir ancak bu ifadenin tersi doğru değildir. Yani her bulanık küme bir klasik küme olmayabilir [80].

2.2. Bulanık Küme ile Esnek Küme Arasındaki İlişki

Önerme 2.2.1: [80] Her bulanık küme bir esnek kümedir.

İspat: F bir bulanık küme ve U evrensel kümesinden [0,1] kapalı aralığına tanımlı bulanık üyelik fonksiyonu olsun. $\mu_F(x) = sup\{\alpha | x \in F(\alpha)\}$ ile tanımlı μ_F fonksiyonu için $F(\alpha)$ α- seviye kümelerinin ailesi dikkate alınsın. Bu durumda F ailesi bilinirse $\mu_F(x)$ fonksiyonları $\mu_F(x) = sup\{\alpha | x \in F(\alpha)\}$ eşitliği ile bulunabilir. Böylece her F bulanık kümesi aynı zamanda $(F, [0,1])$ şeklinde bir esnek küme olarak dikkate alınabilir.

Bulanık küme ile esnek küme arasındaki bu ilişkiyi daha iyi anlamak için aşağıdaki örneği inceleyelim.

Örnek 2.2.1: [80] U evrensel kümesi olmak üzere, $U = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5, h_6\}$ olacak şekilde altı tane evden ve parametre kümesi, sadece evlerin cazipliğini değerlendiren sözel değişken "evlerin kalitesi" parametrelerinden oluşsun. Bu sözel değişken parametre için değişken terimlerin kümesi $T(kalite) = \{en\, iyi, iyi, orta, kötü\}$ şeklinde tanımlanabilir. Her bir değişken terim kendi bulanık kümesi ile ilgilidir. Bunlardan ikisi;

$$F_{en\, iyi} = \{(h_1, 0.2), (h_2, 0.7), (h_5, 0.9), (h_6, 1.0)\}$$

$$F_{kötü} = \{(h_1, 0.9), (h_2, 0.3), (h_3, 1.0), (h_4, 1.0), (h_5, 0.2)\}$$

Şeklinde düşünülebilir. $F_{kötü}$ bulanık kümesinin α- seviye kümeleri

$F_{kötü}(0.2) = \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}$

$F_{kötü}(0.3) = \{h_1, h_2, h_3, h_4\}$

$F_{kötü}(0.9) = \{h_1, h_3, h_4\}$ ve

$F_{kötü}(1.0) = \{h_3, h_4\}$ dir.

$A = \{0.2, 0.3, 0.9, 1.0\} \subset [0,1]$ parametrelerin kümesi ve her $\alpha \in A$ için $F_{kötü}(\alpha)$ ile tanımlı

$F_{kötü}: A \to \wp(U)$

küme değerli dönüşümü dikkate alınsın. Böylece

$(F_{kötü}, [0,1]) = \{(0.2, \{h_1, h_2, h_3, h_4, h_5\}), (0.3, \{h_1, h_2, h_3, h_4\}), (0.9, \{h_1, h_3, h_4\}), (1.0, \{h_3, h_4\})\}$

bir esnek kümedir.

2.3. Yaklaşımlı Küme ile Yakın Küme Arasındaki İlişki

Önerme 2.3.1: [52] Her yaklaşımlı küme bir yakın kümedir.

İspat: (O,F) algısal nesneleri içeren algısal sistem olsun ve F, O daki nesnelerin özelliklerini temsil etsin. Dahası $O_{\sim B}$, $B \subset F$ için $\sim B$ tarafından tanımlanan O nun bölüntüsündeki bütün sınıflar olsun. Hatırlatalım ki $O_{\sim B}$, $x \in O$ ya ait denklik sınıfları anlamına geliyordu. $X \subset O$, $B \subset F$ için bir algısal örnek algısal parçacık X, B- alt yaklaşımı B_* ile tanımlanabilir ve B-üst yaklaşımı B^* ile tanımlanır.

$$B_*(X) = \bigcup_{x:[x]_{B \subseteq X}} [x]_B \qquad B^*(X) = \bigcup_{x:[x]_{B \cap X \neq \emptyset}} [x]_B$$

$\mathrm{BndX} = \mathrm{B}^*(\mathrm{X}) - \mathrm{B}_*(\mathrm{X})$ sınır yaklaşımı anlamına gelsin. Bir X kümesi BndX boş olmadığı durumda bir yaklaşımlı kümedir. Yani $\mathrm{B}^*(\mathrm{X}) - \mathrm{B}_*(X) \neq \emptyset$ bu ise $B_*(X)$, $B^*(X)$ in alt kümesi olduğu sürece geçerlidir. Yani örnek X eşlenil olarak sınıflandırılmıştır ve X yaklaşımlı küme olarak kabul edilir. Zayıfça yakınlık bağıntısı tanımından

$$B(X)^* \bowtie_B X \; ve \; B(X)_* \bowtie_B X$$

Çünkü X deki en az bir nesnenin tanımı ile eşleşen nesneler içeren X in yaklaşım sınıflarındandır. Bu yüzden $(B(X)^*, X) \; ve \; (B(X)_*, X)$ çiftleri yakın kümelerdir.

2.4. Bulanık Küme ile Yaklaşımlı Küme Arasındaki İlişki

Tanım 2.4.1: [80] U boştan farklı sonlu bir küme olarak verilsin. R, U üzerinde bir bulanık bağıntı ve A, U nun bir bulanık alt kümesi olsun.

$$R^*(A)(x) = \bigvee_{u \in U} \left(R(u,x) \wedge A(u)\right), \quad x \in U$$

$$R_*(A)(x) = \bigwedge_{u \in U} ((1 - R(u,x)) \vee A(u)), \quad x \in U$$

ile tanımlanan bulanık kümelerine sırasıyla A nın **alt ve üst yaklaşımı** denir. $(R_*(A), R^*(A))$ ikilisine de U üzerinde bir **bulanık yaklaşımlı küme** denir.

2.5. Yaklaşımlı Küme ile Esnek Küme Arasındaki İlişki

Önerme 2.5.1: Her yaklaşımlı küme bir esnek kümedir [80].

İspat: U evreninde bir X kümesi ve U üzerindeki bir R denklik bağıntısıyla X in B(X) yaklaşımlı kümesini ele alalım. "$B(x) \subseteq X$" için $p_1(x)$ ve "$B(x) \cap X \neq \emptyset$" için $p_2(x)$ yazalım. Bu durumda $p_1(x)$ ve $p_2(x)$ koşulları bir parametre kümesinin elemanları olarak düşünülebilir. Şöyle ki $E = \{p_1(x), p_2(x)\}$ alırsak;

$$F: E \to P(U); F(p_i(x)) = \{x \in U: p_i(x) doğru\}\ i \in \{1,2\}$$

fonksiyonunu yazabiliriz. Böylece X in her B(X) yaklaşımlı kümesi

$F(E) = \{(p_1(x), B_*(X), (, p_2(x), B^*(X))\}$ formunda bir esnek kümedir.

2.6. Yakın Küme ile Esnek Küme Arasındaki İlişki

Önerme 2.6.1: Her komşuluklar ailesi bir esnek küme olarak tanımlanabilir [81].

İspat: $N_r(B)(X)$, O nesneler kümesinde R ayırt edilmezlik ilişkisine ve r çıkarım fonksiyonlarına göre X kümesinin koşuluklarının bir ailesi olsun. X kümesinin alt yaklaşımı $N_r(B)^*X \neq \emptyset$ ve üst yaklaşımı $N_r(B)_*X \neq \emptyset$ olarak tanımlansın. $[x]_R \subset X$ anlamına gelen $p_1(x) = \left\{h_1, h_2 \dots, h_{|B|}\right\}$ öngörüler $[x]_R \cap X \neq \emptyset$ anlamına gelen $r \leq |B|$ ve $p_2(x)$ için boş değildir. Aynı zamanda $Bnd_{N_r(B)}(X) \geq 0$ dır.

$p_1(x)$ ve $p_2(x)$ durumları parametre kümesinin elemanları olarak ele alınabilir. Bu da $E = \{p_1(x),\ p_2(x)\}$ şeklindedir.

Bu durumda fonksiyonu yazabiliriz.

$$\mathrm{F}: \mathrm{E} \to \mathrm{P(U)}, \mathrm{F}\big(\mathrm{p_i(x)}\big) = \{\mathrm{x} \in \mathrm{U} |\ \mathrm{p_i(x)}\ \}\ \mathrm{i} = 1{,}2.$$

Böylece X' e ait $N_r(B)(X)$ komşularının her ailesi aynı zamanda temsili bir esnek kümedir.

$$(F, E) = \{(p_1(x), N_r(B)_*X), (p_2(x), N_r(B)^*X)\}.$$

III. BÖLÜM

3. YENİ KÜME YAKLAŞIMLARI ÜZERİNDE UYGULAMALAR

El yazısı üzerinde yapılan bilimsel incelemelerle kişilerin karakterlerini ortaya çıkaran bilim dalı olan grafoloji bilimi graphe (yazı) ve logos (bilim) kelimelerinin birleşiminden oluşur. Grafoloji kişilerin yazdıkları yazılar ile onların karakterleri ve bazı diğer özellikleri hakkında yorum yapma sanatı olarak da düşünülmektedir. Ancak grafoloji bir bilim dalı olarak multidisiplinerdir. Birçok bilim dalı ile doğrudan ilişkilidir.

Kişilik ile el yazısı arasında bir ilişki olduğu anekdotu tarihsel dönemde ilk olarak Roma döneminde Sezar ile Agusto arasında geçtiği bilinen "yazısında kelimeleri ayrı ayrı yazmayanlara güvenmem" cümlesiyle karşımıza çıkmaktadır [82]. Tarihçi yazar Suetonius birçok imparatorun el yazılarını inceleyerek farklılıklar olduğunu ifade etmiştir [83]. Bir filozof olan "El yazısı şaşmaz bir şekilde bir kişinin akıllı biri mi yoksa akılsız biri mi olduğunu gösteriyor." demiştir. Roger Bacon el yazısının kişilikle ilgili olduğunu 1270 yılında Compendium Studii Philosophiae isimli eserinde belirtmiştir [84]. Alderius Prosper bu konudaki ilk kitabı 17. Yüzyıl baişarında "İdeographia" ismiyle yayınlamıştır. Fransa'da özellikle rahipler arasında 19. Yüzyılda yazı bilimi tekrar dikkat çekmiştir. Bu rahiplerden en önde gelenlerinden biri olan Michon çalışmaları ile büyük bir ün kazanmıştır. Grafoloji sözünü de ilk kullanan kişi olmuştur. Rahip Michon "La Graphologie" isimli bir gazete yayınlamış ve grafoloji ile ilgili beş kitap yazmıştır. Michon her ne kadar bu bilim dalının kurucusu olarak kabul edilse de modern grafolojinin kurucusu olarak en gözde öğrencisi J. Crepieux Jamin görülmektedir [85].

1880 yılından itibaren farklı toplumlarda ve farklı alanlarda bu bilim dalı yaygınlaşmaya başlamıştır. İlk olarak Fransa dışında Almanya'da psikiyatrist ve psikologlar grafoloji bilimine önemli katkılar yapmışlardır. Daha sonra "The German Graphological Society" isimli bir dernek kurulmuştur [86].Ayrıca Avrupa'da bu konuda çalışan birçok yazar daha vardır. Bunlardan bazıları Ulrich Sonnemann, Daniel Anthony, Felix Klein, Nadya Olyanova, Thea Stein Lewinson, Alfred O.Mendel ve İrene Marcuse' dır [87].

1900’lü yılların başında İngiltere’de ilk grafoloji dergisi çıkarılmış ve aynı dönemde ABD’de Iowa Üniversitesinden June Downey’in öncülüğünde başlamıştır. bu alanda ABD’de en önde gelen isimlerden biri de Klara Roman’ dır. Roman, konuşma güçlüğü çeken insanların iletişim kurmasına yardımcı olmak amacıyla kalem baskısını ölçen bir alet icat etmiştir. Günümüzde birçok bilim adamı Avrupa ve Amerika’da grafoloji bilimiyle ilgilenmektedir. Birçok gelişmiş ülkede bu bilim dalıyla ilgili dernek, topluluk ve meslek grupları oluşturulmuştur [88].

Ülkemizde de benzer süreçler yaşanmaya 1959’da başlanmıştır. İlk olarak Hayrettin Arpınar “Grafoloji” isimli bir yayınlamıştır. 1955 yılında “Adli Tıp Müessesesi” içinde “Fizik Tetkikler Şubesi” kurulmuştur [89].

Grafoloji biliminin kullanıldığı birçok uygulama alanı vardır. İnsanların el yazılarını inceleyerek kişilik ve karakter çıkarımı yapmayı amaçlayan grafoloji, bilimselliği kanıtlanmış bir metottur. Bu konuda ulaşılan sonuçlar ve elde edilen bilgiler oldukça şaşırtıcıdır. Sosyal yapının her düzeyinde kullanılan grafoloji bilimi işçi seçimiyle endüstride, hastalıkların teşhisiyle tıpta, suçluların belirlenmesiyle adli alanda, mesleğe yönlendirmeyle eğitimde, rehberlikte ve daha birçok alanda oldukça yaygındır. Bu bilim dalı ile uygun iş seçimi, yeteneğe göre en çok verimin alınacağı işçi bölümleri, olumsuz evliliklerin önlenmesi, psişik hastalıklar gibi birçok bölümde olumlu sonuçlar elde edilmiştir [90]. Grafoloji yalnızca sorunlu bireyleri tespitinde veya hastalıklarda değil olumlu alanlarda da kullanılmaktadır. İnsanların kendi kabiliyetlerini keşfetmesi ve toplum yararına kabiliyetleri doğrultusunda yönlendirilmesi de çok önemli bir kullanım alanıdır.

İşe alımlarda el yazısı biliminin kullanımı 1970 yılından itibaren başlamıştır. İnsan kaynaklarında yaşanan gelişmelerle daha fazla bu alanda kullanılmıştır. İşe alımlarda personel seçimi konusunda grafolojinin kullanıldığı ilk ülke Fransa’dır. Özellikle ABD, Kanada ve İngiltere bu bilim dalının aktif olarak en çok kullanıldığı ülkelerdir. İşe alımlarda veya suçluyu tanıma gibi alanlarda oldukça fayda sağlayabileceği, hatta sağlanmakta olduğu da bilinmektedir [91, 92].

İşe alımlarda grafolojinin kullanımının bazı avantajları vardır. Bunlar:

- Test yöntemleri ile yapılan personel seçimlerinde oluşan hata ve aldatmalar ortadan kaldırılır.
- Bir uzman tarafından öğretilmesi oldukça kolay ve maliyeti de düşüktür.
- İşe alımlarda kullanılan testler için gerekli olan üvreti ve test uygulamasında geçen zamanı azaltmaktadır.

- Oluşması veya ortaya çıkması muhtemel olan yasal problemleri önler. Şuana kadar bu konuda yasalara aykırı bir durum ve olumsuz bir yasa ortaya çıkmamıştır.

şeklindedir [93-95].

Ülkemizde ise en yoğun kullanıldığı alan adli tıptır. Özellikle suçluların tespiti, suç işleme sebepleri ve oranları gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Kriminoloji, Kriminalistik, Kaligrafi, Grafoloji ile direkt bağlantılı olan bu uzmanlık alanı adli belge incelemesinde bulunur [96]. Çok uluslu bazı firmalarda ise yine işçi alımında kullanılmaktadır [84].

Eğitim öğretimin başlangıcından itibaren öğrencileri tanımak ve yönlendirmek gelecek nesillerin yetişmesi konusunda oldukça önemlidir. Bu durumun gerçekleştirilmesinde hiçbir aracı kullanmadan el yazıları kullanılarak öğrenciler hakkında bilgiler toplanılabilir. Böylece eğitsel rehberlik ve özellikle yönlendirilme amacıyla mesleki rehberlik alanlarında doğru yönlendirmeler gerçekleştirilebilir [97].

Eğitimin en başında aynı sınıftaki öğrencilere aynı öğretmenin okuma ve yazma öğretmesine rağmen her birinin farklı yapılarda ve şekillerde yazı tipi kullandığı aşikârdır. Eğitimde çocukların yazı tipleri kültürlerine göre farklılıklar göstermektedir [98].

İlköğretim birinci kademede okuma ve yazma öğretilmesiyle kazandırılacak becerilerin sonraki eğitim kademelerinde de öğrencilere kazandırılmaya çalışılması sadece Türkçe dersinde değil diğer derslerde de başarını olumlu yönde etkileyecektir [99, 100].

Bir iş başvurusu yapılırken el yazısı ile form doldurulmasını isteyen firmalar bunu bir grafoloji uzmanına analiz ettirerek personelde aradığı özellikleri bulmada kullanmaktadır. Yazının nasıl kaleme alındığı, özenli veya özensiz yazıldığı, acele edilip edilmediği analizi etkilememektedir [87]. Arat "Genel el yazısında radikal değişiklikler olmaz. Yazının hangi şartlar altında yazıldığından bağımsız olan parametrelerden y ve g harflerinin kuyrukları veya t,l ve k harflerinin üst kısımları her zaman yazdığımız şekliyle yazılır" bilgisini vermektedir [84].

Çağımızda kullanılan her bilim dalında olduğu gibi grafolojinin de kendine ait yasa ve prensipleri vardır. Bunlar:

- Her insanın yazısı eşsizdir.
- Her insanın el yazısı bir bütündür.

- Her insanın el yazısı bir bütündür.

şeklindedir [101].

Grafolojinin bir el yazısına uygulanmasında bazı parametreler kullanılmaktadır. Bu parametrelerden ilki yazının sayfadaki eğimidir. Yazının sağa veya sola eğik olduğu durumu farklı kişilik özelliklerinin bir göstergesidir. El yazısının dik bir açıyla yazılmış olması yazan kişinin bağımsızlığına düşkün ve sınır tanımaz biri olduğunun göstergesidir. Sağa doğru eğimli yazılan el yazıları duygusallığın göstergesi olarak yorumlanmaktadır. Eğim açısı arttıkça duygusallığın derecesi artmakta ve aşırı duygusal tepkiler gösterme eğilimleri çoğalmaktadır. Sola eğik yazılan yazılar duygusal olarak ihtiyatlılığı göstermektedir. Sola eğik el yazısı kullanan bireyler daha detaycı ve doğrulama ihtiyacı hisseden kişilerdir [83].

El yazısında büyük veya küçük yazı kullanmak da bir başka parametredir. Büyük el yazısı yazan kişiler dışa dönük ve dost tavırlı kişilerdir. Yabancılara karşı mesafeli olmakla birlikte çekingenliğini belli etmeyen karaktere sahiplerdir. Mantığı temsil eden el yazısı ise küçük yazılardır. Ancak karşıt görüşlü kişilere karşı da oldukça acımazsızdırlar [87].

Koyu el yazısı kullanan kişiler verdikleri söze yerine getirmek konusunda oldukça dikkatlidirler. Silik yazı kullananlar ise ortama ve insana karşı hassastırlar. Çok koyu yazılar gerginlik, eleştiriye karşı ani sinirlenme, alınganlık gösterme özelliklerine sahip kişiler tarafından kullanılmaktadır [87].

Grafolojide kullanılan parametrelerden biri de L, T ve H harflerinin yazılma şekillerinde ortaya çıkmaktadır. Bu harflerin üst kısımlarının uzun olması kişilerin hedeflerinin ve mevcut hırslarının olduğunu göstermektedir. Ancak üst kısımların fazla uzun olması kişinin planlarını gerçek dışı beklentilerle kurduğunu göstermektedir. Yazıların üst kısımlarının oranlı bir şekilde kıvrılması konuların üzerinde etraflıca düşünen mantıklı hayallere sahip olan kişilerin özelliklerini göstermektedir. Kıvrımın enli olması yeni fikirler üretme ve bunların üzerinde çok fazla düşünme eğilimini ortaya koyar. Üst kıvrımın tekrar harfe dönmesi ise kişinin hayal gücünü kullanmaktan kaçındığını göstermektedir [87].

Harflerin kullanıldığı bir diğer parametrede incelenen harfler G, Y ve P harfleridir. Bu harflerin kuyruğunun dik olması sabırız ve hiperaktif bir yapıya sahip olmanın göstergesidir. Kuyruğun basık olarak yuvarlanması kişilerin olay karşısında saldırgan tavır sergileyen bireyler olduklarını gösterir. Tam bir kanca halinde yazılmış kuyruk ise hırsı ve para kazanma istediğini temsil etmektedir. Bastırılmamış kanca şekli ise güvenlik ihtiyacı ve korkunun temsilidir [87].

Kelimeler arasındaki mesafeler de ilginç bilgiler veren parametrelerdendir. Kelimeler arasındaki mesafenin az olması kişinin başkalarıyla birlikte olma isteğini ortaya koyar ancak bu kişiler genellikle istenmeyen kalabalığa sebep olan dayatmacı kişilerdir. Çok mesafeli yazılmış kelimeler kişinin yalnız kalma isteğini gösterir [87].

Satırlar arası mesafenin fazla olması olaylara sakin ve geniş perspektiften bakma eğilimini ortaya koyar. Dar olması ise kişinin hareketi sevdiğini ve her türlü eylemin içinde olmaktan hoşlandığını gösterir. Satır araları dar ancak harfler arası mesafeler düzenli ise kişi baskı altında sükûnetini koruma özelliğine sahiptir yorumu yapılır. Bu bireyler hemen sinirlenmez ancak sinir anında etraflarına zarar verme eğilimi gösterirler [87].

Bir diğer parametre sayfanın genel yazım düzeniyle ilgilidir. Sayfanın sol tarafındaki boşluğun çok olması hareketliliği sürdürme isteğini ortaya koymaktadır. Az olması ise kişinin temkinliliğini, başına buyrukluğunu ve hazır olmadığı takdirde bir şeyleri yapmaktan kaçındığını göstermektedir. Sağ taraftaki boşluğun az olması sabırsızlığı ifade eder. Sağa bırakılmış fazla boşluk ise her şeyin net olmasından hoşlanan başka bir değişle belirsizlikten hoşlanmayan bireylerin el yazısı özelliğidir [87].

Grafoloji biliminde kullanılan parametrelerden bazıları bu şekilde sıralanabilir. Açısal değerlerin ölçüldüğü veya bilgisayar programlarının kullanıldığı daha birçok parametre farklı yorumlarla karşımıza çıkmaktadır.

Cantor ile başlayan küme kavramı zamanla farklı yapılara zemin oluşturmuştur. Önceki bölümlerde bahsedilen yeni küme yaklaşımları özellikle uygulama ve mühendislik alanlarında olukça rağbet görmüştür. Bununla birlikte mühendislik alanlarındaki uygulamalar kadar cebirsel alanlarda da birçok çalışmaya konu olmuştur.

Mamdani ve arkadaşları tarafından bulanık mantık ve bulanık denetim alanlarında ilk uygulamalarını yapmıştır [53-55]. Bulanık denetim alanı uygulama alanı olarak bulanık mantığın en çok kullanıldığı alan olmuştur. Denetim sistemleri dışında da çok fazla uygulama alanında bulanık küme ve bulanık mantık kullanılmıştır.

Yaklaşımlı küme yaklaşımı bilgi sistemleri yani veri tabloları kullanılarak başlar. Bu bilgi tabloları kullanılarak veri grupları arasında veya kendi içinde yorumlar yapılabilir. Kaba küme yaklaşımının kullanıldığı uygulama alanlarından bazıları ekonomi, biyoinformatik, bilişim, robotik, kimya, biyoloji, görüntü analizi, sosyal bilimler, sağlık sektörü ve mühendislik bilimleridir.

Molodtsov ilk çalışmasında esnek kümeler teorisini bir fonksiyonun pürüzsüzlüğü, oyun teorisi, Riemann integrali, Perron integrali ve ölçü teorisi gibi birçok alana başarıyla uygulamıştır [26, 58]. Bu teori kullanılarak karar verme problemleri, bilgi sistemleri, cebirsel yapılar, matematiksel analiz gibi belirsizlikler içeren birçok alanda da faydalı çalışmalar yapılmıştır. Ayrıca, 2004 yılında "Esnek Küme Teorisi" isimli bir kitap yayımladı. Molodtsov'un çalışmalarından sonra esnek kümeler teorisinin diğer alanlara ve gerçek hayatta karşılaştığımız problemlere uygulamaları olmuştur.

Bu bölümde yeni küme yaklaşımlarının bir uygulaması olarak orijinal örneklerimizi vereceğiz. Örnek olarak grafoloji biliminin bir uygulaması kullanılmıştır.

3.1. Rough (Yaklaşımlı) Küme

O, nesneler kümesi ve F, çıkarım fonksiyonlarının kümesi olmak üzere;

$O = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8, O_9\}$ ve $F = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$

olsun.

$v_1 : O \to \{sol, sağ, dik\}$

$v_2 : O \to \{küçük, büyük\}$

$v_3 : O \to \{silik, koyu\}$

$v_4 : O \to \{uzun, oranlı\}$

$v_5 : O \to \{yayvan, kanca\}$

$v_6 : O \to \{az, çok\}$

$v_7 : O \to \{az, çok\}$

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
O_1	Sol	Küçük	Silik	Uzun	Yayvan	Az	Az
O_2	Sağ	Büyük	Koyu	Uzun	Yayvan	Az	Az
O_3	Sağ	Küçük	Koyu	Oranlı	Kanca	Çok	Çok
O_4	Sol	Büyük	Koyu	Oranlı	Kanca	Az	Az
O_5	Dik	Büyük	Koyu	Oranlı	Kanca	Çok	Çok
O_6	Sol	Büyük	Silik	Uzun	Kanca	Çok	Çok
O_7	Sağ	Büyük	Koyu	Uzun	Yayvan	Çok	Az
O_8	Sol	Büyük	Koyu	Uzun	Kanca	Çok	Az
O_9	Dik	Küçük	Koyu	Uzun	Yayvan	Çok	Az

Tablo - 4

Burada F çıkarım fonksiyonlarının kümesi olmak üzere $\forall v_i \in F \; için \; v_i, O$ nesneler kümesinden el yazısı parametrelerinin aldığı değerler kümesine tanımlı olsun. F çıkarım fonksiyonları, nesneler kümesinden değer kümesine Tablo-1 de aşağıdaki gibi tanımlansın.

$v_1 \; fonksiyonu \; yazının \; eğimini,$

$v_2 \; fonksiyonu \; harf \; boyutunu,$

$v_3 \; fonksiyonu \; yazının \; basıncını,$

$v_4 \; fonksiyonu \; L, T, H \; hafrlerini,$

$v_5 \; fonksiyonu \; G, Y, P \; harflerini,$

$v_6 \; fonksiyonu \; kelimeler \; arası \; mesafeyi,$

$v_7 \; fonksiyonu \; yazının \; satır \; arası \; mesafesini \; temsil \; etsin.$

Burada $B \subseteq F$ çıkarım fonksiyonu için aradığımız özellikleri ölçen (sosyal ilişki düzeyi, başarı gücü, olumlu kişilik özelliği…) çıkarım fonksiyonları belirleyerek aranan özelliklere uygun adaylar seçilebilir. Oluşan sınır bölgesi için de ayrıca istenen çıkarım fonksiyonlarından ne kadar özelliği sağlarsa (μ_x^B , 1 e ne kadar yakın olursa) aranılan özellikler de o kadar elde edilmiş olur.

Bu yorumdan hareketle elde edilmek istenen iş verimi ve iş başarısı hakkında da geleceğe dönük yorumlar yapılabilir. İstenen verim, başarı düzeyi ve bunlarla doğru orantılı olarak toplam veri ve kazanç adına görüşler sunulabilir. İş görüşmeleri ve mülakatlarda yanıltıcılık payı kişiden bağımsız bir halde tutularak karar verilebilir.

Çıkarım fonksiyonu v_1 için sağa eğimli yazı sahibi mesleği alanında başarı potansiyeli olan cömert ve verimli kişiyi temsil eder. Dik açılı ise analizci, titiz ve sorumluluk sahibi olduğundan seçilecek pozisyona göre de değer değiştirilebilir. Çıkarım fonksiyonu v_2 için harf ebatının büyüklüğü yaratıcılığın ve üretkenliğin göstergesidir. Çıkarım fonksiyonu v_5 için kuyruklu harflerde kuyruk durumuna göre tam bir kanca halini alması durumunda enerji ve para kazanma isteğini temsil eder. Benzeri şekilde diğer çıkarım fonksiyonları için de aldığı değere göre kişilik hakkında yorum yapılabilir.

Şimdi bu bilgilere dayanarak aşağıdaki örnekler verilebilir.

Örnek 3.1.1:$X \subseteq O$ olmak üzere $X = \{O_1, O_4, O_6, O_8\}$ kümesi v_1 çıkarım fonksiyonun karakterize ettiği "geçmişi sorgulayan baskı ile büyümüş bireyler" kümesi olsun. $B \subset F$ ve $B = \{v_2, v_3, v_6\}$ çıkarım fonksiyonları olmak üzere

$[O_1]_B = \{O_1\}$

$[O_2]_B = \{O_2, O_4\}$

$[O_3]_B = \{O_3, O_9\}$

$[O_5]_B = \{O_5, O_7, O_8\}$

$[O_6]_B = \{O_6\}$

$\xi_B = O/{\sim_B}\{[O_1]_B, [O_2]_B, [O_3]_B, [O_5]_B, [O_6]_B\}$

O nesneler kümesinin her bir elemanının seçilen $B \subset F$ çıkarım fonksiyonlarına göre oluşan denklik sınıfları ve bu denklik sınıflarının oluşturduğu bölüm kümesi bulunmuştur. Şimdi de seçilen bir $X \subset O$ kümesinin alt yaklaşımını, üst yaklaşımını, sınır bölgesini ve yaklaşımın kesinlik durumunu belirten $\alpha_B(X)$ katsayısını bulalım.

$B_*(X) = \bigcup_{[x]_B \subseteq X}[x]_B = \{O_1, O_6\}$ kümesi seçilen bir $X \subset O$ kümesinin alt yaklaşımıdır.

$B^*(X) = \bigcup_{[x]_B \cap X \neq \emptyset}[x]_B = \{O_1, O_2, O_4 O_5, O_6, O_7, O_8\}$ kümesi seçilen bir $X \subset O$ kümesinin üst yaklaşımıdır.

$Bnd_B(X) = B^*(X) \setminus B_*(X) = \{O_2, O_4, O_5, O_7, O_8\}$ kümesi X kümesinin sınır bölgesi ve

$\alpha_B(X) = \frac{|B_*(X)|}{|B^*(X)|} = \frac{2}{7}$ yaklaşımın kesinliğini ifade eden katsayısı bulunur.

Buradan baskı ile büyümüş bireyler için harf boyutu, yazı basıncı ve kelimeler arası mesafe çıkarım fonksiyonları ile kısmi olarak karakterize edilebileceği sonucuna varılır. Yani baskı ile büyümüş bireyleri bu fonksiyonları kullanarak kısmi olarak belirleyebileceğimiz görülmüştür.

Farklı bir örnek olarak aşağıdaki örneği inceleyelim.

<u>Örnek 3.1.2</u>: $X \subseteq O$ olmak üzere $X = \{O_3, O_5, O_6\}$ kümesi v_7 çıkarım fonksiyonu ile ölçülen ve el yazısında satır aralarında çok fazla boşluk bırakan bireylerin alt kümesidir. Bu çıkarım fonksiyonunda satır boşluğu fazla olan bireylerin kariyer sahibi bireyler olduğu yorumu yapıldığından seçilen $X \subseteq O$ nesne kümesi kariyer sahibi bireylerden oluşmaktadır. Bir yöneticide aranan özellikler yaratıcılık, enerjisi yüksek ve olaylara geniş açıdan bakabilen liderlik özellikleri olduğundan bu özellikleri ölçen fonksiyonları $B \subset F$ çıkarım fonksiyonları olarak seçelim. $B = \{v_2, v_4, v_5\}$ şeklinde "harf boyutu" , "L-T-H harfleri" ve "G-Y-P harfleri olsun.

$[O_1]_B = \{O_1, O_9\}$

$[O_2]_B = \{O_2, O_7\}$

$[O_3]_B = \{O_3\}$

$[O_4]_B = \{O_4, O_5\}$

$[O_6]_B = \{O_6, O_8\}$

$\xi_B = O/{\sim_B}\{[O_1]_B, [O_2]_B, [O_3]_B, [O_5]_B, [O_6]_B\}$

$X \subseteq O$ kümesinin yazının harf boyutu ve belli özellikleri temsil eden harfler tarafından oluşturulan denklik sınıfları bulunmuştur. Şimdi de bu $X \subseteq O$ kümesinin alt yaklaşımı, üst yaklaşımı ve sınır bölgesini bulalım.

$B_*(X) = \bigcup_{[x]_B \subseteq X} [x]_B = \{O_3\}$ X kümesinin alt yaklaşımı,

$B^*(X) = \bigcup_{[x]_B \cap X \neq \emptyset} [x]_B = \{O_3, O_4 O_5, O_6, O_8\}$ X kümesinin üst yaklaşımı,

$Bnd_B(X) = B^*(X) \setminus B_*(X) = \{O_4, O_5, O_6, O_8\}$ X kümesinin sınırı ve

$\alpha_B(X) = \frac{|B_*(X)|}{|B^*(X)|} = \frac{1}{5}$ katsayısı bulunur.

Seçilen bu çıkarım fonksiyonları ile kariyer sahibi bireyler seçmek için geleceğe dönük yorum yapılması durumu daha az karakterizedir. Seçilen bireyler kariyer sahibi bireyler olmalarına karşın çıkarım fonksiyonları ile kısmi olarak karakterize edilmiş olmasından dolayı sadece bu üç çıkarım fonksiyonuyla lider vasıflı bireyler seçilmesi kısmi olarak başarılı sonuç vereceği görülmüştür. Çıkarım fonksiyonları ve lider özellikleri artırılarak seçilen gruplarda bulunan lider özellikli yöneticilerin bulunması olasılığı daha da artmaktadır.

Bu örnekler hakkında yapılacak bir diğer yorum için ayrıca yaklaşımlı üyelik fonksiyonunu kullanabiliriz. Yaklaşımlı üyelik fonksiyonu B verildiğinde x elemanının X kümesine ait olmasının şartlı ihtimalidir. Bu şartı seçilen B çıkarım fonksiyonları kümesi oluşturmaktadır. Bu fonksiyon B' nin yardımıyla x hakkında verilen bilgi göz önünde tutularak x elemanının X kümesine ait olma derecesini açıklar. Yaklaşımlı üyelik fonksiyonu $(\mu_X^B(x))$ kullanarak her bir nesne için ayrıca yorum yapılabilir. Bir diğer örnekte bu fonksiyonu kullanarak yorumlar yapılmıştır.

Örnek 3.1.3: Tüm dünyada kurumlarda ve özel şirketlerde yöneticilik yapabilecek kişilerde aranan özellikler üretken, canlı ve çalışkan, kariyer sahibi, sorumluluk sahibi ve benzeri özelliklerdir. Bu özelliklerden bazılarını ölçen çıkarım fonksiyonları "harf boyutu" ve "satır boşluğu" fonksiyonlarıdır.

Bir grup sakin ve olaylara geniş açıdan bakabilen $(v_6\,,(çok))$ kişileri ele alalım.

$X = \{O_3, O_5, O_6, O_7, O_8, O_9\} \subset O$ kümesi sakin yapılı ve olaylara geniş açıdan bakabilen bireyler ve $B \subset F, B = \{v_2\,, v_7\ \}$ kümesi ise yöneticilik özelliklerinden bazılarını ölçen çıkarım fonksiyonları olsun.

$[O_1]_B = \{O_1, O_9\}$

$[O_2]_B = \{O_2, O_{4,}O_7, O_8\}$

$[O_3]_B = \{O_3\}$

$[O_5]_B = \{O_5, O_6\}$

$\xi_B = O/\sim_B\{[O_1]_B, [O_2]_B, [O_3]_B, [O_5]_B, [O_6]_B\}$

Seçilen kariyer sahibi bireyler kümesinin belli özelliklerini ölçen çıkarım fonksiyonlarına göre oluşan denklik sınıfları ve bölüm kümesidir. Şimdi bu bireylerin kümesinin alt ve üst yaklaşımları ile sınır bölgesini bulalım.

$B_*(X) = \bigcup_{[x]_B \subseteq X}[x]_B = \{O_3, O_5, O_6\}$, X kümesinin alt yaklaşımı,

$B^*(X) = \bigcup_{[x]_B \cap X \neq \emptyset}[x]_B = \{O_1, O_{2,}O_3, O_4O_5, O_6, O_7, O_8\}$, X kümesinin üst yaklaşımı

$Bnd_B(X) = B^*(X) \setminus B_*(X) = \{O_1, O_2, O_4, O_7, O_8\}$, X kümesinin sınır bölgesidir.

B yardımıyla elde edilen bilgiler göz önüne alındığında

$$B_*(X) = \bigcup_{[x]_B \subseteq X}[x]_B = \{O_3, O_5, O_6\}$$

kişileri yöneticilik özelliklerini istediğimiz özellikler bakımından $(\{v_2\,, v_7\ \})$ taşıyan yani verilen özelliklerle örtüşen kişilerdir.

Diğer kişiler için örneğin $\{O_2\}$ kişisini yaklaşımlı üyelik fonksiyonu ile ifade edelim.

$\mu_X^B(O_2) = \frac{|X \cap B(O_2)|}{|B(O_2)|} = \frac{2}{4}$

ve $\{O_1\}$ kişisi için;

$$\mu_X^B(O_1) = \frac{|X \cap B(O_1)|}{|B(O_1)|} = \frac{1}{2}$$

değerleri bulunur. Bu değerler seçilen bir elemanın seçilen çıkarım fonksiyonlarına göre kümeye olan aidiyet derecesini ifade etmektedir.

Bu sonuçlardan hareketle B yaklaşımlı olarak ifade edilen X kümesinin sınır bölgesi elemanlarından olan $\{O_1\}$ ve $\{O_2\}$ elemanları bu kümeye aynı oranda aittir. Yani, yöneticilik özelliklerini aynı oranda taşımaktadır.

<u>Örnek 3.1.4:</u> $O = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ Türkiye'deki bölgeleri temsil eden nesneler kümesi olsun. F çıkarım fonksiyonları olmak üzere

$F = \{V_1 = bulutlu, V_2 = yağmurlu, V_3 = güneşli, V_4 = karlı\}$ olsun.

$$V_1 : O \rightarrow \{1,2,3\}$$

$$V_2 : O \rightarrow \{1,2,3\}$$

$$V_3 : O \rightarrow \{1,2,3\}$$

$$V_4 : O \rightarrow \{1,2,3\}$$

olsun. Burada seçilen değer kümeleri ({1,2,3}) bir bölgedeki hava durumu oranını temsil etmektedir. Örneğin V_1çıkarım fonksiyonunun {1} değerini alması bulutluluk yüzdesine daha az sahip olduğu anlamına gelmektedir.

O	V_1	V_2	V_3	V_4
a	1	3	2	1
b	2	1	3	2
c	1	3	2	1
d	2	1	3	2
e	2	1	3	2
f	3	1	3	3
g	3	1	3	3

Tablo – 5

$B \subseteq F$ olmak üzere $B = \{V_1\}$ havanın bulutluluk düzeyini ölçen çıkarım fonksiyonunu seçelim.

$[a]_B = \{a, c\}$

$[b]_B = \{b, d, e\}$

$[f]_B = \{f, g\}$

Türkiye'deki 7 coğrafi bölgenin bulutluluk düzeyi bakımından denklik sınıflarını ifade etmektedir.

$X = \{a, c, b, f\}$ seçilirse X kümesinin alt ve üst yaklaşımı ve sınır bölgesini bulalım.

$B_*(X) = \bigcup_{[x]_B \subseteq X}[x]_B = \{a, c\}$, X kümesinin alt yaklaşımı,

$B^*(X) = \bigcup_{[x]_B \cap X \neq \emptyset}[x]_B = \{a, c\} \cup \{b, d, e\} \cup \{f, g\} = \{a, b, c, d, e, f, g\} = O$, üst yaklaşımını ve

$Bnd_B(X) = B^*(X) \setminus B_*(X) = \{b, d, e, f, g\}$ sınır bölgesini bulmuş oluruz.

Böylece seçilen bölgelerin bulutluluk düzeyleri bakımından az bulutlu olan bölgeler ile daha fazla bulutlu olan bölgeler kümeleri bulunmuş olur. Bulutluluk düzeyi bakımından bulutlu ve bulutsuz hava şeklinde klasik küme mantığı yerine daha az veya daha çok bulutlu bölgeler bulunarak daha doğru sonuçlar elde edilmiştir.

3.2. Soft (Esnek) Küme

Toplumsal yapıda genel toplum kurallarınca uygun görülen davranıştan uygun olmayan davranışa doğru sırasıyla 1,2,3… rakamlarıyla v_i fonksiyonlarının aldığı değerleri tekrar oluşturalım.

	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	v_6	v_7
O_1	3	2	2	1	2	1	2
O_2	2	1	1	1	2	1	2
O_3	2	2	1	2	1	2	1
O_4	3	1	1	2	1	1	2
O_5	1	1	1	2	1	2	1
O_6	3	1	2	1	1	2	1
O_7	2	1	1	1	2	2	2
O_8	3	1	1	1	1	2	2
O_9	1	2	1	1	2	2	2

Tablo - 6

Toplum içinde istenen davranışları sergileyen bireyleri belirlemek amacıyla "toplumda düzgün bireyler" i tanımlayan bir (F, E) esnek kümesi tanımlayalım.

O, toplumda var olan bireyler kümesi ve E parametre kümesi olsun. Her parametre bir kelime veya bir cümle olarak seçilebilir. Toplumsal yapıda uygun görülen davranış ve kişilik özellikleri "1" ile derecelendirilmiş kelime gruplarını parametre olarak seçelim.

$$E = \begin{Bmatrix} analizci\ ve\ titiz\ , canlı\ ve\ enerjik\ , sözlerini\ tutan, hırslı, \\ enerji\ ve\ istek, hareketli\ ve\ çalışkan, kariyer\ sahibi \end{Bmatrix}$$

Bu durumda bir esnek küme oluşturmak toplum içindeki hırslı bireyleri, kariyer sahibi bireyleri,… belirlemek ve işaretlemek anlamındadır.

$O = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8, O_9\}$ toplumdaki bireyler kümesi ve

$E = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7\}$ parametre kümesi sırasıyla kelime gruplarını temsil etsin. $F: E \to P(O)$ fonksiyonu tabloda alınan "1" değerlerine göre tanımlandığından

$F(v_1) = \{O_5, O_9\}$

$F(v_2) = \{O_2, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8\}$

$F(v_3) = \{O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8, O_9\}$

$F(v_4) = \{O_1, O_2, O_6, O_7, O_8, O_9\}$

$F(v_5) = \{O_3, O_4, O_5, O_6, O_8\}$

$F(v_6) = \{O_1, O_2, O_4\}$

$F(v_7) = \{O_3, O_5, O_6\}$

$A \subset E$ $parametre\ kümesi\ olmak$ $üzere$ (F, A) esnek kümesi O kümesinin alt kümelerinin parametrelendirilmiş halidir ve bir kişinin var olan ve toplumca desteklenen kişilik özelliklenin bir koleksiyonunu verir. Örneğin $F(v_1) = \{O_5, O_9\}$ fonksiyonunun görüntü kümesi olan $\{O_5, O_9\}$ elemanları analizci titiz ve sorumluluk sahibi bireyleri temsil eder. $(F, A) =$

$$\left\{ \begin{matrix} (v_1, \{O_5, O_9\}), (v_2, \{O_2, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8\}), (v_3, \{O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8, O_9\}), \\ (v_4, \{O_1, O_2, O_6, O_7, O_8, O_9\}), (v_5, \{O_3, O_4, O_5, O_6, O_8\}), (v_6, \{O_1, O_2, O_4\}) \end{matrix} \right\}$$

Böylece (F, A) esnek kümesini yukarıdaki gibi oluşturabiliriz.

Örnek 3.2.1: $X = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ Türkiye'deki bölgeleri temsil etsin. E parametre kümesi $E = \{kar\ yağışlı,\ yağmurlu,\ bulutlu,\ güneşli\}$ şeklinde olsun. $F: E \to P(X)$ olmak üzere $F_E = \{(e, F_E(e)) | e \in E, F_E \in P(X)\}$ sıralı ikilisini oluşturarak esnek kümeyi oluşturalım.

$$F_E = \left\{ \begin{matrix} (kar\ yağışlı, \{a, b, c\}), (yağmurlu, \{d, e\}), \\ (bulutlu, \{a, b, c, d, e\}), (güneşli, \{f, g\}) \end{matrix} \right\}$$

F_E esnek kümesi Türkiye'deki bölgelerin seçilen parametrelerle karakterize edilmiş halini oluşturmaktadır. Örnekte de görüldüğü gibi kar yağışlı olan bir bölge aynı zamanda bulutlu olarak da karakterize edilmektedir.

3.3. Fuzzy (Bulanık) Küme

Hatırlatalım ki U, boş olmayan bir küme olmak üzere U da A bulanık kümesi

$$\forall x \in U, \mu_A: U \to I = [0,1]$$

fonksiyonu ile verilir. μ_A ya bulanık kümeye karşılık gelen üyelik fonksiyonu denir. Bulanık A kümesi ise U da her elemanın üyelik derecesiyle birlikte oluşturduğu kümedir.

$U = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8, O_9\}$ olsun. Seçilen bu bir grup kişi için bireylerin toplumsal saygınlık düzeyleri bulanık küme oluşturur.

Bir davranışın her toplumda farklı etik yorumları olabilir. Yani bir davranışın topluma yansıması toplumdan topluma değişebilir. Genel olarak tüm dünyada toplumsal yaşamda genel geçer ahlak kurallarını baz alarak toplumsal saygınlığı bir bireyin hangi oranda gördüğü bulanık küme olarak oluşturulabilir. Seçilen uygun bir üyelik fonksiyonuna göre istenilen şartların hangi oranda sağlandığı bu sayede bulunmuş olur. Bu örnek sayesinde "saygınlık" bulanık kümesi bir çok yorum yapmamıza yardımcı olur. Örneğin bu bulanık küme dışında kalan bireyler toplumun beklediği özellikleri barındırmayan veya dışlanmış olarak yorumlanabilir. Benzer şekilde aranılan özellikleri sağlayan (yani $\mu_A(x) = 1$ olan) sağlayan bireylerin toplumsal statüleri ve çekiciliklerinin fazla olduğu yorumu yapılabilir. Buradan hareketle toplum içinden gelen ve genel etik kurallarından istenilenleri toplumun isteği düzeyinde kendinde barındıran bireylerin toplum tarafından kendi yönetiminde hakem veya yönetici seçmeleri daha muhtemeldir. Toplumdaki genel etik kurallarından bazıları verdiği sözü tutmak (v_3), saygılı ve kendi halinde olmak (v_1) ... şenlindedir. Bu toplum kuralları ile bulanık kümeler oluşturarak seçilen bireylerin toplumsal saygınlığı ile ilgili yorum yapılabilir.

Örnek 3.3.1: $U = \{O_1, O_2, O_3, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8, O_9\}$ örnek 4.1.1'de kullanılan nesneler kümesi olsun. $I = [0,1]$ olmak üzere

$\mu_A: U \rightarrow I = [0,1]$ fonksiyonu verilen tabloda istenen davranış düzeyleri kullanılarak belirlensin.

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1 + (x-1)^2}$$

olsun. Burada alınan x değerleri v_1 tarafından ölçülen “sorumluluk sahibi bireyler” e göre oluşturulan üyelik fonksiyon değeridir. Bu değer ölçüsü toplum tarafından en çok istenen davranış düzeyine göre oluşturulmuştur.

$$\mu_{Sorumluluk} = \frac{1}{1+(x-1)^2}$$

$$\mu_S(O_1) = \frac{1}{1+(3-1)^2} = \frac{1}{5} \quad \mu_S(O_2) = \frac{1}{1+(2-1)^2} = \frac{1}{2} \quad \mu_S(O_3) = \frac{1}{1+(2-1)^2} = \frac{1}{2}$$

$$\mu_S(O_4) = \frac{1}{1+(3-1)^2} = \frac{1}{5} \quad \mu_S(O_5) = \frac{1}{1+(1-1)^2} = 1 \quad \mu_S(O_6) = \frac{1}{1+(3-1)^2} = \frac{1}{5}$$

$$\mu_S(O_7) = \frac{1}{1+(2-1)^2} = \frac{1}{2} \quad \mu_S(O_8) = \frac{1}{1+(3-1)^2} = \frac{1}{5} \quad \mu_S(O_1) = \frac{1}{1+(1-1)^2} = 1$$

$$\mu_S(x) = \left\{ \begin{matrix} (O_1, 0.2), (O_2, 0.5), (O_3, 0.5), (O_4, 0.2), \\ (O_5, 1), (O_6, 0.2), (O_7, 0.5), (O_8, 0.2), (O_9, 1) \end{matrix} \right\}$$

Burada $\mu_S(x)$ kümesi toplum içinden seçilen 9 kişinin sorumluluk sahibi bireyler kümesine ait olma olasılığını ifade etmektedir. Başka bir değişle bireylerin toplumdaki sorumluluklarına sahip olma yüzdesini ifade etmektedir.

Seçilen özelliklere göre çıkarım fonksiyonlarını da değiştirebiliriz.

İstediğimiz birkaç özelliği aynı anda inceleyelim. Örneğin v_1 ve v_3 özeliklerini aynı anda inceleyelim. Söz konusu iki özellik olduğundan

$$\mu_A(x) = \frac{1}{1+(v_{1_x}-1)^2+(v_{3_x}-1)^2}$$

seçilirse istenen özellikleri barındırma yüzdeleri elde edilir. Bu sayede istenen özelliklere sahip olma düzeyi ile toplumsal saygınlığı örtüşmüş olur.

$$\mu_A(O_1) = \frac{1}{1+4+1} = \frac{1}{6} \quad \mu_A(O_2) = \frac{1}{1+1+0} = \frac{1}{2} \quad \mu_A(O_3) = \frac{1}{1+1+0} = \frac{1}{2}$$

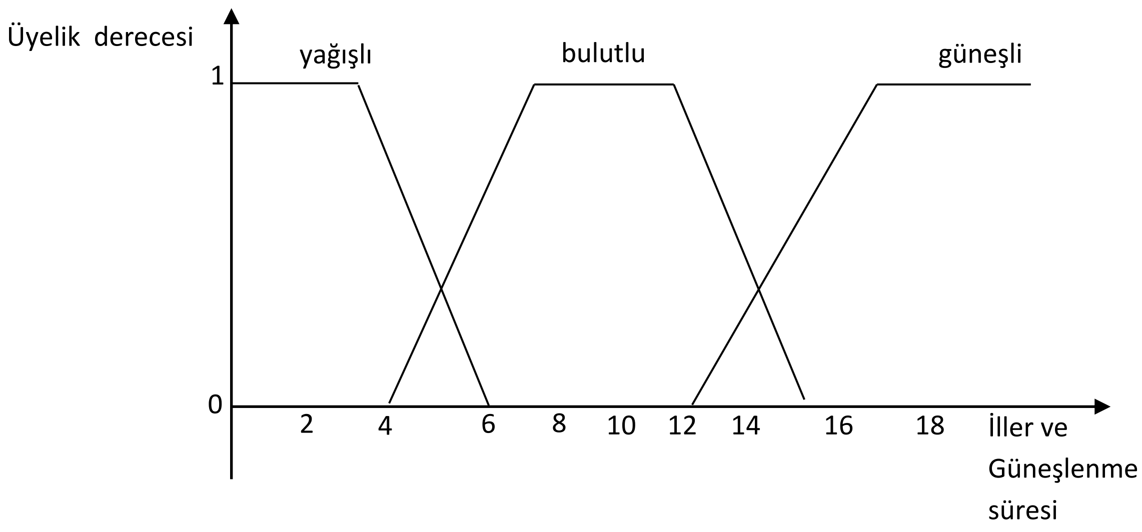
$$\mu_A(O_4) = \frac{1}{1+4+0} = \frac{1}{5} \quad \mu_A(O_5) = \frac{1}{1+0+0} = 1 \quad \mu_A(O_6) = \frac{1}{1+4+1} = \frac{1}{6}$$

$$\mu_A(O_7) = \frac{1}{1+1+0} = \frac{1}{2} \quad \mu_A(O_8) = \frac{1}{1+4+0} = \frac{1}{5} \quad \mu_A(O_9) = \frac{1}{1+0+0} = 1$$

bulunur. Böylece bireylerin aynı anda iki veya daha çok özelliğe sahip olam düzeyleri elde edilmiş olur. v_1 ve v_3 özellikleri sırasıyla bireylerin sorumluluk sahibi ve verdiği sözü tutan bireyler olma özelliklerini ölçtüğünden bu iki özellik aynı anda incelenmiş olur.

Örnek 3.3.2: $X = \{x_i | x_i, bütün\ il\ ve\ ilçeler\}$ Türkiye'yi sürekli değişken olarak temsil etsin. X kümesi üzerinde A bulanık kümesi "İl ve ilçelerin bulutlu hava durumu" olmak üzere;

$$\mu_X : X \to [0,1]$$



$$\mu_{bulutlu} = \begin{cases} 0 & , \quad x < 4 \; ve \; x > 15 \\ \dfrac{x-4}{4} & , \quad 4 < x < 8 \\ \dfrac{15-x}{3} & , \quad 12 < x < 15 \\ 1 & , \quad 8 < x < 12 \end{cases}$$

$$A(x) = \{(x, \mu_x) | x \epsilon X\}$$

şeklinde oluşturulan μ_x üyelik fonksiyonu ile A bulanık kümesi oluşturularak bulutlu, parçalı bulutlu, çok bulutlu… şeklinde illerin hava durumunun bulanık kümesi elde edilir.

3.4. Near (Yakın) Küme

Yakınlık Bağıntısı: (O,F) algısal sistem $X, Y \subseteq O$ olsun. X kümesi Y kümesine algısal yakındır ⟺ $F_1, F_2 \subset F,\ f \subset F$ olmak üzere $A \in O/\sim_{F_1}, B \in O\ /\sim_{F_2}$ ve $A \subset X, B \subset Y$ olacak şekilde $(C \in O/\sim_f)$ $A, B \subset C$ varsa X kümesi Y kümesine algısal yakındır denir. $X \rhd\!\lhd_F Y$ şeklinde gösterilir.

Bu bağıntıdan hareketle $F_1, F_2 \subset F$ olduğundan her ikisi de iki ayrı yaklaşımlı küme oluşturur. Bu yaklaşımlı kümeler A ve B şeklinde alt yaklaşımlara sahiplerdir. Yakın kümelerde yaklaşımlı kümeler karşılaştırılabileceği gibi bir kümenin yakın küme olması incelenebilir. Bunun için aşağıdaki önerme verilmiştir.

Önerme 3.4.1: (O,F) algısal sistem, $X \subseteq O$ için aşağıdakiler denktir.

1. X, yakın kümedir.
2. $A \subset X$ olacak şekilde A denklik sınıfı vardır.
3. $A \subset X$ olacak şekilde $A \in O/\sim_F$ vardır.

Örnek 3.4.1: $X \subseteq O$ örnek 4.4.1'de kullanılan bireyler kümesi olmak üzere $X = \{O_3, O_5, O_6\}$ kümesi kariyer sahibi bireyler kümesi olsun. $F_1 = \{v_2, v_4, v_5\}$ şeklinde "harf boyutu" , "L-T-H harfleri" ve "G-Y-P harfleri olarak seçilirse $[O_3]_{F_1} \subset X$ vardır. Aynı şekilde $Y = \{O_3, O_5, O_6, O_7, O_8, O_9\}$ ve $F_2 = \{v_2, v_7\}$

seçilirse $[O_3]_{F_2} \subset Y$ vardır. Buradan X ve Y kümeleri yakın kümelerdir. Bu iki küme arasındaki yakınlığın derecesi ise

$v_{N_r(B)}(X,Y) = \frac{|X \cap Y|}{|Y|} = \frac{3}{6}$ olur.

Yani X, kariyer sahibi bireyler kümesiyle Y, olaylara geniş açıdan bakabilen ve sakin bireyler kümesi algısal olarak yakındırlar. Gerçek hayattaki yöneticilik ve liderlik vasıflarının algısal olarak yakın olduğu görülmektedir.

Örnek 3.4.2: $X \subseteq O$ olmak üzere $X = \{O_3, O_5, O_6, O_7, O_8, O_9\}$ Örnek 4.4.1'de kullanılan bireyler olmak üzere X kümesi sakin ve olaylara geniş açıdan bakabilen bireyler kümesi olsun. $B \subset F, B = \{v_2, v_7\}$ özelliklerine göre X kümesinin alt yaklaşım üst yaklaşım ve sınır bölgelerini bulalım.

$[O_1]_{v_2} = \{O_{1,}O_3, O_9\}$

$[O_2]_{v_2} = \{O_2, O_4, O_5, O_6, O_7, O_8\}$

$\xi_{v_2} = \{[O_1]_{v_2}, [O_2]_{v_2}\}$, kümesi v_2 ye göre oluşturulan bölüm kümesi,

$[O_1]_{v_7} = \{O_{1,}O_2, O_{7,}O_8, O_9\}$

$[O_3]_{v_7} = \{O_{3,}O_5, O_6\}$

$\xi_{v_7} = \{[O_1]_{v_7}, [O_3]_{v_7}\}$, kümesi v_7 ye göre oluşturulan bölüm kümesidir.

Böylece r=1 için O algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlar kümesi

$N_1(B) = \{\xi_{v_2}, \xi_{v_7}\}$ dir.

$N_1(B)^*(X) = \cup_{[x]_{V_i} \cap X \neq \emptyset} [x]_{[x]_{V_i}} = O$, X kümesinin üst yakın yaklaşımı,

$N_1(B)_* X = \cup_{[x]_{V_i} \subseteq X} [x]_{[x]_{V_i}} = [O_3]_{v_7} = \{O_{3,}O_5, O_6\}$ X kümesinin alt yakın yaklaşımıdır.

Ayrıca X kümesinin sınır bölgesi de

$Bnd_{N_1(B)}(X) = N_1(B)^* X \setminus N_1(B)_* X = \{O_1, O_2, O_4, O_7, O_8, O_9\}$ olur.

Şekilde en az bir $\varphi_i \in B$ varsa X kümesi X′ kümesine yakındır denir.

Burada kullanılan örnek ve seçilen X kümesi Örnek 4.1.1'de kullanılan küme ve çıkarım fonksiyonları da yine aynı örnekte kullanılan fonksiyonlar olmalarına rağmen bulunan alt yaklaşım kümeleri aynı ancak üst yaklaşım kümeleri ve sınır kümeleri farklıdır. Yakın küme yaklaşımı ile bulunan üst yaklaşım kümesi ve sınır kümesi daha detaylı bilgi vermektedir.

Örnek 3.4.3: $O = \{a, b, c, d, e, f, g\}$ Türkiye'deki bölgeleri temsil eden nesneler kümesi olsun. $B \subseteq F$ çıkarım fonksiyonları olmak üzere

$B = \{V_1 = bulutlu, V_2 = yağmurlu, V_3 = güneşli, V_4 = karlı\}$ olsun.

$V_1 : O \rightarrow \{1,2,3\}$, $V_2 : O \rightarrow \{1,2,3\}$, $V_3 : O \rightarrow \{1,2,3\}$, $V_4 : O \rightarrow \{1,2,3\}$ olsun.

O	V_1	V_2	V_3	V_4
A	1	3	2	1
B	2	1	3	2
C	1	3	2	1
D	2	1	3	2
E	2	1	3	2
F	3	1	3	3
G	3	1	3	3

Tablo - 7

Bu durumda

$[a]_{V_1} = \{a, c\}$, $[b]_{V_1} = \{b, d, e\}$, $[f]_{V_1} = \{f, g\}$ olur. O zaman

$\xi_{V_1} = \{[a]_{V_1}, [b]_{V_1,} [f]_{V_1}\}$, V_1 e göre oluşturulan bölüm kümesi olur.

$[a]_{V_2} = \{a, c\}$, $[b]_{V_2} = \{b, d, e, f, g\}$, olur. O zaman

$\xi_{V_2} = \{[a]_{V_2}, [b]_{V_2,}\}$, V_2 ye göre oluşturulan bölüm kümesi olur.

$[a]_{V_3} = \{a, c\}$, $[b]_{V_3} = \{b, d, e, f, g\}$ olur. O zaman

$\xi_{V_3} = \{[a]_{V_3}, [b]_{V_3,}\}$, V_3 e göre oluşturulan bölüm kümesi olur.

$[a]_{V_4} = \{a, c\}$, $[b]_{V_4} = \{b, d, e\}$, $[f]_{V_4} = \{f, g\}$ olur. O zaman

$\xi_{V_4} = \{[a]_{V_4}, [b]_{V_4,} [f]_{V_4}\}$, V_4 e göre oluşturulan bölüm kümesi olur.

Böylece r=1 için O algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi

$N_1(B) = \{ \xi_{V_1}, \xi_{V_2}, \xi_{V_3}, \xi_{V_4}\}$ tür.

$X = \{a, b, c, f\} \subseteq O$ kümesinin üst yaklaşımı

$$N_1(B)^* X = \bigcup_{[x]_{V_i} \cap X \neq \emptyset} [x]_{[x]_{V_i}}$$

$$= [a]_{V_1} \cup [b]_{V_1} \cup [f]_{V_1} \cup [a]_{V_2} \cup [b]_{V_2} \cup [a]_{V_3} \cup [b]_{V_3} \cup [a]_{V_4} \cup [b]_{V_4} \cup [f]_{V_4}$$

$= O$ bulunur.

$$N_1(B)_* X = \bigcup_{[x]_{V_i} \subseteq X} [x]_{[x]_{V_i}} = [a]_{V_1} \cup [a]_{V_2} \cup [a]_{V_3} \cup [a]_{V_4} = \{a, c\}$$

$X = \{a, b, c, f\} \subseteq O$ alt yaklaşımı bulunur.

X kümesinin sınırı;

$Bnd_{N_1(B)}(X) = N_1(B)^* X \setminus N_1(B)_* X = \{b, d, e, f, g\}$ bulunur.

Böylece örnek 4.1.3'de kullanılan küme ve çıkarım fonksiyonları yakın küme yaklaşımıyla aynı şekilde kullanılmıştır. Aynı alt ve üst yaklaşımların bulunmasına rağmen oluşturulan bölüm kümeleri yakın küme uygulamasında oldukça detaylı bilgiler vermektedir.

IV. BÖLÜM

4.TARTIŞMA-SONUÇ VE ÖNERİLER

Yaklaşım uzayı ve yakın yaklaşım uzayı günlük hayatta sözel olarak ifade edilen belirsiz birçok kavramın matematiksel olarak ifade edilmesinde oldukça faydalı olmuştur. Teorik alanda olduğu gibi uygulama alanında da günlük hayatı kolaylaştırıcı projeler üretilmesini sağlamıştır. Yaklaşımlı küme teorisi tıp, farmoloji, bankacılık, pazarlama gibi birçok alanda kullanılmaktadır. Yaklaşımlı küme teorisinin avantajlarından bazıları şunlardır:

- Verilerdeki saklı ilişkilerin fark edilebilmesi için etkili algoritmalar sunar.
- Veri hazırlanmasında kullanılır.
- Verilerin önemini değerlendirir.
- Verilerden karar alma ilkeleri belirleyebilecek algoritmalar oluşturur.
- Anlamayı kolaylaştırır.
- Elde edilen sonuçların yorumlanabilmesini sağlar [1].

Yakın küme teorisi de yaklaşımlı küme teorisinde olduğu gibi birçok uygulama alanına sahiptir. Özellikle yakın küme teorisinin çıkış noktası olan görüntü analizi ve dijital görüntüler arasındaki benzerliklerin karşılaştırılması problemlerinde oldukça önemli sonuçlar elde edilmiştir. Yani yakın küme teorisi gözlemlenen nesnelerin sınıflandırılması için bir yöntem sağlar.

Temel yaklaşım uzayı ve yakın yaklaşım uzaylarındaki sınır $(BN_B(X) = B(X)^* - B(X)_*)$ tanımından hareketle yapılan örneklerin aksine farklı bir sonuca da varılabilir. Klasik Cantor küme kuramının doğal bir sonucu olarak kümenin alt yaklaşımı ve sınırı biliniyorsa kümenin kendisinin ne olabileceği hakkında farklı küme kombinasyonları elde edilebilir. Klasik kümelerde bir kümenin eleman sayısı “n” olmak üzere alt küme sayısı “2^n” olduğundan ve alt yaklaşım elemanlarının mutlaka kümede olması yani küme tarafından ihtiva edilmesi gerektiğinden hareketle sınır bölgesi elemanları tarafından oluşturulabilecek bütün alt kümelere alt yaklaşım kümesi eklenerek seçilen ilk küme $(X \subseteq O)$ hakkında farklı kombinasyonlar elde edilerek yorumlar yapılabilir.

Bu çalışmada yeni küme yaklaşımları incelenmiş, bu küme yaklaşımlarının arasındaki bağlantılara değinilmiş, bunlarla ilgili tanım ve teoremler verişmiştir. Ayrıca yapılan bu çalışmada yeni küme yaklaşımlarıyla ilgili yapılmış örneklere ve özgün örneklere yer verilmiştir. Tüm küme yaklaşımlarına aynı örnek uyarlanarak bazı sonuçlar elde edilmiştir. Yapılan bu çalışma sonucunda yakın yaklaşım uzayının diğer kümelere göre daha detaylı bilgi verdiği kanısına ulaşılmıştır.

KAYNAKÇA

[1] E. İnan, *Yakın Yaklaşım Uzaylarında Cebirsel Yapılar,* Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi Türkiye, 2015.

[2] G. Cantor, *Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen*, **J. Reina Angew. Math.**, 77 (1874) 258-262.

[3] P. E. Johnson, *A History of Set Theory*, Prindle, Weber & Schmidt, Weber & Schmidt: ISBN 0-87150-154-6, 1972.

[4] G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, **Math. Ann.**, 46 (1895) 481-512.

[5] G. Cantor, *Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre*, **Math. Ann.**, 49 (1987) 207-246.

[6] B. Russell, *The principles of Mathematics*, London: George Allen &Unwin Ltd., 1st. Ed., 1903 (2nd Ed. in 1937).

[7] A. N. Whitehead ve B. Russell, Principia Mathematica, 3 vols, Cambridge University Press, 1910, 1912, and 1913. 2nd Ed., 1925 (Vol. 1), 1927 (Vols 2, 3).Abridged as Principia Mathematica to 56, Cambridge University Press, 1962.

[8] L. A. Zadeh, *Fuzzy Sets*, **Inform. and Cont.**, 8 (1965) 338-353.

[9] L. A. Zadeh, *Fuzzy logic and approximate reasoning*, **Klu. Aca. Pub.**, 30:3-4 (1975) 407-428.

[10] Z. Pawlak, *Rough Sets*, **Int. J. Comput. Inform. Sci.**, 11:5 (1982) 341-356.

[11] G. Frege, *Grundgesetze der Arithmetik*, Jena: Verlag von Hermann Pohne, 1893.

[12] T. B. Iwinski, *Algebraic approach to rough sets*, **Bull. Pol. Acad. Sci. Math.**, 35 (1987) 673-683.

[13] R. Biswas ve S. Nanda, *Rough groups and rough subgroups*, **Bull. Pol. Acad. Sci. Math.**, 42 (1994) 251-254.

[14] N. Kuroki, *Rough ideals in semigroups*, **Inform. Sci.**, 100 (1997) 139-163.

[15] N. Kuroki ve P. P. Wang, *The lower and upper approximations in a fuzzy group*, **Inform. Sci.**, 90 (1996) 203-220.

[16] B. Davvaz, *Roughness in rings*, **Inform Sci.**, 164 (2004) 147-163.

[17] B. Davvaz ve M. Mahdavipour, *Roughness in modules*, **Inform. Sci.**, 176 (2006) 3658-3674.

[18] Z. Pawlak, *Rough sets - theoretical aspects of reasoning about data*, Kluwer Academic Puplishers, Boston, London, Dordrecht, 1991.

[19] Y. Yao, *On generalizing Pawlak approximation operators,* **Lecture Notes in Artificial Intelligence**, 1424 (1994) 298-307.

[20] M. Wolski, *Perception and classification. A note on near sets and rough sets,* **Fund. Inform.**, 101 (2010) 143-155.

[21] M. Wolski, Gauges, pregauges and completions: Some theoretical aspects of near and rough sets approaches to data, Rough Sets and Knowledge Technology LNCS 6954, Berlin, (2011) 559-568.

[22] S. S. Ahn, Y. B. Jun ve K. J. Lee, *Roughness in subtraction algebras*, **Commun. Korean. Math. Soc.**, 21:4 (2006), 653-664.

[23] C. Wang ve D. Chen, *A short note on some properties of rough groups*, **Compet. Math. Appl.**, 59 (2010) 431-436.

[24] S. Rasouli ve B. Davvaz, Roughness in MV-algebras, **Inform. Sci.**, 180 (2010) 737-747.

[25] S. Yamak, O. Kazancı ve B. Davvaz, *Generalized lower and upper approximations in a rings*, **Inform. Sci.**, 180 (2010) 1759-1768.

[26] D. Molodtsov, *Soft set theory- First Results,* **Comput. Math. Apple**, 37 (1999) 19-31.

[27] P. K. Maji, R. Biswas ve A. R. Roy, *An application of soft sets in a decision making problem*, **Comput. Math. Apple.**, 44 (2002) 1077-1083.

[28] P. K. Maji, R. Biswas ve A. R. Roy, *Soft set theory*, **Comput. Math. Apple.**, 45 (2003) 555-562.

[29] G. Oğuz, M. H. Gürsoy ve İ. İçen, *A Soft Approach to Ring-Groupoids,* ITM Web of Conferences 22, 01012, (2018).

[30] G. Oğuz, İ. İçen ve M. H. Gürsoy, *Actions Of Soft Groups*, **Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser.**, cilt 68, no. 1, pp. 1163-1174, (2019).

[31] Z. Pawlak ve J. F. Peters, Jack Blisko (How near) Systemy Wspomagania,

Decyzji I, 57, 109, ISBN:83-920730-4-5, 2002-2007.

[32] S. A. Naimpally ve J. F. Peters, *Topology with applications. Topological spaces via near and far*, World Scientific, Singapore, 2012.

[33] J. F. Peters, *Classification of perceptual abject by means of features*, **Info. Technol. Intell. Comput.**, 3:2 (2008) 1-35.

[34] J. F. Peters, *Sufficiently near sets of neighbourhoods*, **Rough Sets and Knowledge technology**, LNCS 6954, Springer, Berlin, (2011) 17-24.

[35] S. A. Naimpally ve J. F. Peters, *Approach spaces for near filters*, **Gen. Math. Notes.**, 2:1 (2011) 159-164.

[36] J. F. Peters, *Topology of Digital Images. Visual Pattern Discovery in Proximity Spaces*, Springer- Verlag, Berlin, Heidelberg, 2014.

[37] J. F. Peters ve S. Tiwari, *Approach merotopies and near Filters*, **Gen. Math. Notes**, 3:1 (2011) 1-15.

[38] J. F. Peters, *Near sets. General theory about nearness of objects*, **Appl. Math.Sci.**, 1:53-56 (2007) 2609-2629.

[39] J. F. Peters ve P. Wasilewski, *Foundations of near sets*, **Inform. Sci.**, 179 (2009) 3091-3109.

[40] J. F. Peters, *Rough ethology: Towards a biologically-inspired study of collective behaviour in intelligent systems with approximation spaces*, **Transactions on Rough Sets**, III, LNCS 3400 (2005) 153-174.

[41] J. F. Peters ve C. Henry, *Reinforcement learning with approximation spaces*, **Fund. Inform**, 71:2-3 (2006) 323-349.

[42] J. F. Peters ve S. Ramanna, *Affinities between perceptual granules:Foundations and perspectives. In Human-centric information processing through granular modelling sci 182, Eds A*, Bargiela and W. Pedrycz, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[43] J. F. Peters, C. Henry ve D. S. Gunderson, *Biologically-inspired approximate adaptive learning control strategies: A rough set approach*, **International Journal of Hybrid Intelligent Systems**, 4:4 (2007) 203-216.

[44] J. F. Peters ve S. A. Naimpally, *Applications of near sets*, **Notices Amer. Math. Soc.**, 59:4 (2012) 536-542.

[45] A. E. Hassanien, A. Abraham, J. F. Peters, G. Schaefer ve C. Henry, *Rough sets and near sets in medical imaging: A review*, **IEEE Trans Info. Tech. in Biomedicine**, 13:6 (2009) 955-968.

[46] C. Henry, *Near sets: Theory and applications*, PhD Thesis, Department of Electrical & Computer Engineering, University of Manitoba Canada, (2010).

[47] J. F. Peters, *Corrigenda and addenda: Tolerance near sets and image correspondence*, **Int. J. Bio-Inspired Comput**, 2:5 (2010) 310-318.

[48] C. Henry ve J. F. Peters, *Near set evaluation and recognition (NEAR) system V2.0*, University of Manitoba Computational Intelligence Laboratory Technical Report, TR-2010-017.

[49] C. Henry ve G. Smith, *Proximity System*, University of Manitoba Computational Intelligence Laboratory Technical Report, TR-2012-021.

[50] E. İnan ve M. A. Öztürk, *Near groups in nearness approximation spaces*, **Hacettepe Jr. of Math. and Stat.**, 41 (2012) 544-558.

[51] M. Pavel, *Fundamentals of pattern recognition*, 2nd ed. marcel Dekker, Inc., New york, 1993.

[52] M. Durna, *Yakın Kümeler ve Yakın Kümelerin Temel Özellikleri,* Yüksel Lisans Tezi, Cumhuriyet Üniversitesi, Sivas, 2014.

[53] E. H. Mamdani ve S. Assilian, *An experiment in linguistic synthesis with a fuzzy logic controller*, **Int. J. Man-Mac. Stud.**, (1975) 1-13.

[54] E. H. Mamdani, *Application of fuzzy algorithms for control of simple dynamic plant*, **Proc.Iee**, Vol.121, No.12, 1585-1588, December 1974.

[55] E. H. Mamdani, *Advances in the linguistic synthesis of fuzzy controllers*, **Int. J. Man Machine Studies**, (1976),8,669-678.

[56] C. L. Chang, *Fuzzy Topological Spaces*, **J. of Math. Anal. and Appl.**, 24: (1968), 182-190, pp. 182-190.

[57] N. Çağman ve H. Aktaş, *Bulanık ve Yaklaşımlı Kümeler,* **J of Arts and Sci.,** Sayı: 3, (Mayıs 2005), 13-25, pp. 13-25.

[58] V. Y. Leonov, D. V. Kovkov ve D. Molodtsov, S*oft sets technique and its application*, **Nechetkie Sistemyi Myagkie Vychisleniya**, (2006) 8-39.

[59] D. Chen, *The parametrization reduction of soft sets and its applications*,

Comput. and Math. with Appl. vol. 49, pp, (2005), 757-765, pp. 757-765.

[60] D. Pie ve D. Maio, F*rom soft sets to information systems*, **IEEE Inter. Conf.** pp, (2005) 617-621.

[61] M. Shabir ve M. Naz, *On soft topological spaces,* **Comput. and Math. with Appl.** vol. 61, (2011) 1786-1799.

[62] G. Oğuz, *Bazı Cebirsel Yapılara Esnek (Soft) Yaklaşım*, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi,Malatya, (2018).

[63] W. K. Min, *A note on soft topological spaces,* **Comput. Math.Appl. vol.** 62, (2011) 3524-3528.

[64] N. Çağman, S. Enginoğlu ve S. Karataş, *Soft topology,* **Comp. and Math. with Appl.** vol. 62, (2011) 351-358, pp. 351-358.

[65] A. Aygünoğlu ve H. Aygün, *Some notes on soft topological spaces,* **Neural Comput&Applic** vol. 21, pp, (2012) 113-119.

[66] İ. Zorlutuna, M. Akdağ, W. K. Min ve S. Atmaca, *Remarks on soft topological spaces,* **Ann. Fuzzy Math. Inform.** vol. 3, no. 2, pp, (2012) 171-185.

[67] B. P. Varol ve H. Aygün, *On soft Hausdorff spaces,* **Ann. of Fuzzy Math. and Inform.** vol. 5(1), pp, (2012) 15-24.

[68] E. Peyghan, B. Samadi ve A. Tayebi, O*n Soft Connectedness*, arXiv:1202. 1668, 2012.

[69] M. İ. Ali, F. Feng, X. Liu, W. K. Min ve M. Shabir, *On some new operations in soft set theory,* **Comput. Math. Appl.**, 57: (2009), 1547-1553, pp. 1547-1553.

[70] S. Bayhan, *Kaba Küme Teorisinin Matematiksel Temelleri*, **Göller Bölgesi Aylık Hakemli Ekonomi ve Kültür Derg.**, Sayı:52, 2017.

[71] E. Krusinska, R. Slowinski ve J. Stefanowski, *Discriminant versus rough set approach to vague data analysis,* **J. Appl. Stat. and Data Analysis**, 8 (1992) 43-56.

[72] Z. Pawlak ve R. Slowinski, *Decision analysis using rough sets,* **International Transactions on Operational Research**, 1 (1994) 107-104.

[73] R. Slowinski, *Rough set approach to decision analysis*, AI Expert, 10 (1995) 18-25.

[74] Z. Pawlak, Why rough sets?, New Orleans, Louisiana: The 5th IEEE International conference on fuzzy systems (FUZZ-IEEE 96), Sept. (1996) 738-743.

[75] Z. Pawlak, *Classification of objects by means of attributes*, Institute for Computer Science, Polish Academy of Sciences, 1981.

[76] E. Orlowska, *Semantics of vague concepts*. *Applications of rough sets*, Institute for Computer Science, Polish Academy of Sciences, 1982.

[77] S. K. Pal ve J. F. Peters, *Rough Fuzzy Image Analysis. Foundations and Methodologies*, CRC Press, Taylor & Francis Group, (2010), ISBN 13:9781439803295 ISBN 10: 1439803293.

[78] L. Polkowski, *Rough Sets, Mathematical Foundations*, Heidelberg: Springer-Verlag, 2002.

[79] A. Skowron ve J. Stepaniuk, *Tolerance approximation spaces*, **Fund. Inform.**, 27:2-3 (1996) 245-253.

[80] H. Aktaş ve N. Çağman, *Soft sets and soft groups*, 177(13), (2007), 2726-2735, pp. 2726-2735.

[81] H. Taşbozan, İ. İçen, N. Bağırmaz ve A. F. Özcan, S*oft Sets and Soft Topology on Nearness Approximation Spaces,* **Published by Faculty of Sciences and Mathematics,** Serbia, 31:13 (2017), 4117–4125.

[82] H. C. Özen, *Kısa Adli Tıp Ders Kitabı*, İstanbul: İstanbul Üniversitesi Tıp Fakültesi, (1983), 20-23.

[83] P. Roberts, *Love Letters, The Romantic Secrets*, New Page, 2002.

[84] D. Boz, *İnsan Kaynakları Seçiminde Grafoloji,* S**ocial Sciences Studies Journal (SSSJournal)**, ISSN:2587-1587, 4, 22, 2018, pp. 3817-3826.

[85] T. Altınköprü, *Yazı ve Karakter*, Hayat Yayıncılık, İstanbul, 2007.

[86] N. Marmara, *El Yazısının Kişiye Ait Olup Olmadığını Belirleyen Grafik Göstergeler*, Yayınlanmamış Doktora Tezi, İstanbul Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü İstanbul, 1994.

[87] M. Arat, E. N. Erbil, N. Yelden ve F. Peltek, *El Yazısındaki Sır*, Hayykitap, İstanbul, 2011.

[88] N. Alkan, Ş. Sözen ve Ö. Kurtaş, *Dünyada Adli Belge İncelemesi,* **Adli Tıp**

Bülteni, (1998);3(2):61-6..

[89] A. İ. Birincioğlu, *Adli Belge İncelemesi*, Bafra, İmza Yazı ve İncelemeleri, (2000) s. 1-16,49-59, 128-131, 175-219.

[90] B. Gülmez ve M. Özçataloğlu, *El Yazınız Sizi Anlatıyor*, Efil Yayınevi, Ankara, 2011.

[91] R. Smith, *Anecdotes of a Graphologist*, *The Graphologist*, (1986);4(1): 16-7.

[92] B. L. Beyerstein ve D. Bayerstein, *The Write Stuff : Evaluations of Graphology The Study of Handwriting Analysis*, New York: Prometheus Book, (1992): 9-23.

[93] R. N. King ve D. J. Koehler, *Illusory correlations in graphological inference*, Journal of Experimental Psychology: Applied, 6(4), 336., 2000.

[94] J. A. Spohn, *The legal implications of graphology*, **Wash. ULQ**, 75, 1307, 1997.

[95] C. Dazzi ve L. Pedrabissi, *Graphology and personality: an empirical study on validity of handwriting analysis.Psychological reports*, **Psychological Reports,** 105,3, (2009), 1255-1268, pp. 1255-1268.

[96] F. Aşıcıoğlu, *Adli Belge İncelemesi*, Beta Basım Yayım Dağıtım A.Ş., İstanbul, 2005.

[97] A. Sarıyıldız, *El Yazısı Biliminin (Grafoloji) Türkçe Eğitimi Açısından Önemi*, **Marmara Üniversitesi TSA** / Yıl: 17 S: 2, (2013).

[98] A. Gökmener, *Grafoloji ve Personel Seçimi,* Yüksek Lisans Tezi, Yeditepe Üniversitesi Sosyal Bilimler Enstitüsü, İstanbul, 2009.

[99] A. Göçer, *İlköğretim Öğretmeni Adaylarına İlk okuma Yazma Çalışmaları ile İlgili Pratik Öneriler,* **Ankara: Millî Eğitim**, Sayı:148, (2000).

[100] A. Kılıç, *İlkokuma Yazma Öğretiminde Programlandırılmış Öğretime Göre Metin Yönteminin Etkililiği*, Doktora Tezi, Hacettepe Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü Ankara, (2000).

[101] İ. H. Baltacıoğlu, *Grafoloji Konusu, Metodu, Prensipleri,* **Ankara Üniv. Dil ve Tarih-Coğrf. Fak. Der.**, 12, 1-2, (1954), 133-138.

[102] F. Feng, Y. B. Jun ve X. Zhao, *Soft semirings,* **Comp. and Math. with App.,** (2008) 2621-2628.

[103] G. Oğuz, M. H. Gürsoy ve İ. İçen, *Lie Rough Groups,* **Published by Faculty of Sciences and Mathematics**, Serbia, 32:16, (2018), 5735–5741.

ÖZGEÇMİŞ

Ahmet KARAGÖZ 1990 yılında Adıyaman'da doğdu. İlköğrenimini ve orta öğrenimini Adıyaman'da tamamladı. 2009 yılında kazandığı Atatürk Üniversitesi Eğitim Fakültesi Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi (Matematik Öğretmenliği) bölümünden 2014 yılında mezun oldu. Aynı yıl Gölbaşı Anadolu İmam Hatip Lisesine matematik öğretmeni olarak atandı. 2016 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans eğitimine başladı. Halen Gölbaşı Anadolu İmam Hatip Lisesinde matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.