

T.C.  
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BİLGİSAYAR DESTEKLİ GEOMETRİK TASARIMDA  
GEÇİŞ EĞRİLERİ

Akın LEVENT

DOKTORA TEZİ  
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Temmuz 2019

Tezin Başlığı : BİLGİSAYAR DESTEKLİ GEOMETRİK TASARIMDA  
GEÇİŞ EĞRİLERİ

Tezi Hazırlayan : Akın LEVENT

Sınav Tarihi : 04.07.2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında  
Doktora Tezi olarak kabul edilmiřtir.

### Sınav Jüri Üyeleri

**Tez Danışmanı: Prof.Dr. Bayram şahin** \_\_\_\_\_  
Ege Üniversitesi

**Prof.Dr.Rıfat Güneř** \_\_\_\_\_  
İnönü Üniversitesi

**Prof. Dr. Alper Osman Öğrenmiř** \_\_\_\_\_  
Fırat Üniversitesi

**Doç. Dr. N. Murat Yađmurlu** \_\_\_\_\_  
İnönü Üniversitesi

**Doç. Dr. Yılmaz Gündüzalp** \_\_\_\_\_  
Dicle Üniversitesi

**Prof.Dr. H. İbrahim Adıgüzel**  
Enstitü Müdürü

## ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduđum “Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarımda Geçiř Eđrileri”bařlıklı bu çalıřmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı dűşecek bir yardıma bařvurmaksızın tarafımdan yazıldıđını ve yararlandıđım bűtűn kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yűntemine uygun biçimde gűsterilenlerden oluřtuđunu belirtir, bunu onurumla dođrularım.

Akın LEVENT



# ÖZET

Doktora Tezi

## BİLGİSAYAR DESTEKLİ GEOMETRİK TASARIMDA GEÇİŞ EĞRİLERİ

Akm LEVENT

İnönü Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Ana Bilim Dalı

69+iv sayfa

2019

Danışman : Prof.Dr. Bayram Şahin

Bilgisayar Destekli Geometrik Tasarımda Geçiş Eğrileri isimli bu tez çalışmasının ilk bölümünde Bézier eğrileri ve B-spline eğrileri ile ilgili literatür özeti verilmiştir. Ayrıca bu eğrilerin uygulama alanlarından bahsedilmiştir.

İkinci bölümde tezde kullanılan eğrilerin diferansiyel geometrisine ilişkin temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir. Daha sonra Bézier eğrileri ve B-spline eğrilerinin bazı önemli özellikleri incelenmiştir.

Üçüncü bölümde Beta-Bézier eğrisinin tanımı verilmiştir ve kübik Beta-Bézier eğrisinin cusp ve loop noktalarının varlığı incelenmiştir. Daha sonra iki kübik Beta-Bézier eğrisinin birleştirilmesi için gerekli şartlar araştırılmıştır. Son olarak kübik Beta-Bézier eğrileri için Pisagor-Hodograf eğri olma şartları verilmiştir.

Dördüncü bölümde yeni bir kübik Bézier-Benzeri baz fonksiyonu tanımlanmış ve bu baz fonksiyonu yardımıyla yeni bir kübik Bézier-Benzeri eğrisi oluşturulmuştur. Ayrıca bu eğrilerin özellikleri incelenmiştir. Daha sonra birbirine komşu olmayan bu eğriler ile geçiş eğrisi oluşturulmuştur.

Beşinci ve son bölümde kuadratik B-spline eğrisi oluşturulmuştur. Ayrıca bu eğrinin spiral bir eğri olması için gerekli şartlar araştırılmıştır.

**ANAHTAR KELİMELELER:** Bézier eğrileri, Baz fonksiyonları, B- spline eğriler, Trigonometrik Bézier eğrileri, Geçiş eğrileri.

# ABSTRACT

Ph.D. Thesis

TRANSITION CURVES IN COMPUTER AIDED GEOMETRIC DESIGN

Akın LEVENT

İnönü University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

69+iv pages

2019

Supervisor : Prof.Dr. Bayram Şahin

In the first chapter of this study titled as Transition Curves in Computer Aided Geometric Design a summary of the literature related to the Bézier curves and B-spline curves is given. Also, the application areas of these curves are presented.

In the second chapter, some fundamental definitions and theorems with respect of differential geometry of the curves used in the thesis are given. Next, some important properties of the Bézier curves and B-spline curves are recalled.

In the third chapter, the definition of the Beta-Bézier curve is given and the existence of the cusp and loop points of the cubic Beta-Bézier curve is researched. Next, the necessary conditions to join two cubic Beta-Bézier curves are investigated. Lastly, the conditions of the Pythagorean-Hodograph curve for the cubic Beta-Bézier curves are presented.

In the fourth chapter, new cubic Bézier-like basis functions are defined and a new cubic Bézier-like curve is created by using this base functions. Further, the properties of these curves are investigated.

In the fifth and last chapter, the quadratic B-spline curve is considered. Moreover, the necessary conditions are researched so that the curve is a spiral curve.

**KEYWORDS:** Bézier curves, Basis functions, B-spline curves, Trigonometric Bézier curves, Transition curves.

## TEŞEKKÜR

Tüm lisansüstü çalışmam boyunca ve bu doktora tezimin tüm aşamalarında engin bilgi ve birikimlerini sonuna kadar bana sunan ve bu uzun süreçte her türlü desteğini esirgemeyen çok değerli hocam sayın Prof. Dr. Bayram ŞAHİN' e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca her zaman bilgilerini ve tecrübelerini bize sunan Matematik Anabilim Dalı Başkanı sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ' , tez yazım süresince yardımlarını hiç esirgemeyen sayın Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR' e ve grafik çizimlerinde bilgilerini paylaşmaktan kaçınmayan değerli arkadaşım Aslı AYAR' a ve TÜBİTAK tarafından “ 2221 Konuk veya Akademik İzinli (Sabbatical) Bilim İnsanı Destekleme Programı” kapsamında aldığımız destek ile çalışmalarında önemli katkılar sunan COMSATS Institute of Information Technology' de görevli Prof. Dr. Zulfiqar HABİB' e sonsuz teşekkür ederim.

Bu zorlu çalışmalarım sürecinde işlerimi kolaylaştıran ve hep desteğini yanımda gördüğüm biricik eşim Halise LEVENT' e, bu günlere gelmemde hayatımın tüm evrelerinde hep fedakarlıklarını gördüğüm canım aileme ve dostlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca 2228-B; Yüksek Lisans Öğrencileri İçin Doktora Burs Programı kapsamında maddi desteklerinden dolayı TÜBİTAK- Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığına teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım.

# İÇİNDEKİLER

<b>ÖZET</b> .....	i
<b>ABSTRACT</b> .....	ii
<b>TEŞEKKÜR</b> .....	iii
<b>İÇİNDEKİLER</b> .....	iv
<b>1. GİRİŞ</b> .....	1
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR</b> .....	5
2.1. Temel Tanım ve Teoremler .....	5
2.2. Bezier Eğrileri ve İlgili Kavramlar .....	7
<b>3. BETA-BÉZIER EĞRİLERİ</b> .....	14
3.1. Beta-Bézier Baz Fonksiyonları ve Temel Özellikleri .....	14
3.2. Kübik Beta-Bézier Eğrilerinin Şekil Analizi .....	21
3.3. Kübik Beta-Bézier Eğrilerinin Birleştirilmesi .....	26
3.4. Kübik Beta-Bézier Eğrilerinin Pisagor-Hodograf Eğrileri.....	33
<b>4. KÜBİK TRİGONOMETRİK BÉZIER-BENZERİ EĞRİLER</b> ..	39
4.1. Kübik Trigonometrik Bézier-Benzeri Baz Fonksiyonları ve Özellikleri ..	39
4.2. Kübik Trigonometrik Bézier-Benzeri Eğrileri ve Özellikleri.....	42
4.3. Kübik Trigonometrik Bézier-Benzeri Eğrisinin Şekil Kontrolü.....	46
4.4. Kübik Trigonometrik Bézier-Benzeri eğrisinin kontrol poligonuna yaklaşımı	48
4.5. İki Kübik Trigonometrik Bézier-Benzeri Eğri İçin Süreklilik Şartları ...	49
4.6. Komşu Olmayan İki Kübik Trigonometrik Bézier-Benzeri Eğrileri Arasında Geçiş Eğrisi .....	52
<b>5. KUADRATİK B-SPLİNE SİRİAL EĞRİLERİ</b> .....	57
5.1. Kuadratik B-spline Eğrilerinin Temel Özellikleri .....	57
5.2. Kuadratik B-spline Spiral Eğrisi İçin Bir Yaklaşım .....	59
<b>KAYNAKLAR</b> .....	67
<b>ÖZGEÇMİŞ</b> .....	69

# 1. GİRİŞ

Özellikle matematiğin yeni bir uygulaması ve mühendislik biliminin önemli bir konusu olan bilgisayar destekli geometrik tasarım (kısaca CAGD) tasarımcı için önemli avantajları olmasıyla beraber uygulamalarda sıkıntı oluşturan bazı konularda kolaylık sağlamaktadır. Bu sıkıntı oluşturan konulardan en önemlilerinden biri özellikle mühendislikte ve geometrik dizaynda tasarımı yapılacak nesnelere birleşme noktalarındaki süreklilik şartları tasarımcı için en önemli sorunlardan biridir. Bu sorunların giderilmesi için yıllarca bilim insanları bazı önemli çalışmalar yaparak bu sorunların giderilmesi için bazı özel eğriler üzerine çalışmalar yapmışlardır.[28]

Bu bilgisayar destekli geometrik tasarımda yapılan en önemli çalışmalardan bazıları Citroen şirketinde çalışan Casteljau ve aynı dönemde Renault şirketinde çalışan Pierre Bézier tarafından sağlanmıştır. İkiside aynı çalışmaları yapmış olmalarına rağmen Bézier'in çalışmaları daha önce kabul gördüğünden günümüzde yaygın olarak bilgisayar destekli geometrik tasarımda kullanılan Bézier eğrileri bu kişinin ismi ile adlandırılmıştır. Bu eğriler parametrik eğriler olup eğriyi oluşturan kontrol noktaları sayısı bu eğrinin derecesini vermektedir. Bu eğrilerde derece sayısı eğriyi oluşturmak için kullanacağımız kontrol nokta sayısının bir eksiği kadardır. Pierre Bézier  $n$ . dereceden bu eğrileri

$$B(t) = \sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) \quad , t \in [0, 1]$$

şeklinde tanımlamış olup burada  $P_0, P_1, \dots, P_n$  kontrol noktaları ve  $B_i^n(t) = C_i^n(1-t)^{n-i}t^i$  ise Bernstein polinomlarıdır. Eğer  $n = 2$  olarak alırsa

$$B(t) = P_0(1-t)^2 + 2P_1(1-t)t + P_2t^2$$

kuadratik Bézier eğrisi adını alırken  $n = 3$  için



$$B(t) = P_0(1-t)^3 + 3P_1(1-t)^2t + 3P_2(1-t)t^2 + P_3t^3$$

kübik Bézier eğrisi ismini alır. Kontrol noktaları ile oluşturulan bir Bézier eğrisinde başlangıç noktası  $P_0$  ve bitiş noktası  $P_n$  olup bu kontrol noktalarının oluşturduğu çokgene kontrol çokgeni denir. Bir Bézier eğrisi kontrol çokgeni boyunca uç noktalar olan  $P_0$  ve  $P_n$  noktalarından geçer. Yani eğri kontrol çokgeninin uç noktalarına bağlıdır. Ayrıca Bézier eğrisi tamamen kontrol noktalarının oluşturduğu kontrol çokgeninin içinde kalmaktadır. Hatta bu eğri bir  $\phi$  afin dönüşümü altında invaryant olup koordinat eksenlerinin seçiminden bağımsızdır. Bézier eğrileri eğri dizaynı ve modellemede birçok avantaja sahip olsa da bazı dezavantajlarında bulunmaktadır. Eğer eğri kompleks bir şekilde modellenirse, eğriyi dizayn etmek için birleşik Bézier eğrilerini kullanmak gerekir. Dolayısıyla bu birleşik eğrileri için birleşme noktalarında süreklilik şartlarını araştırmak gerekir. Yani iki eğrinin  $G^0$  sürekliliği iki eğrinin nokta birleşimi olurken,  $G^1$  süreklilik ise eğri hem  $G^0$  sürekli olup bunun yanında iki vektörün birleşme noktalarındaki teğet vektörlerinin eşit olduğu anlamına gelir.  $G^2$  süreklilik ise bu şartların yanında iki eğrinin birleşme noktalarında eğriliklerinin eşit olması demektir.[2]

$n$ . mertebeden bir Rasyonel Bézier eğrisi  $P_0, P_1, \dots, P_n$  ler kontrol noktaları,  $w_0, w_1, \dots, w_n$  ler ağırlık fonksiyonları ve  $t \in [0, 1]$  olmak üzere,

$$c(t) = \frac{\sum_{i=0}^n w_i P_i B_i^n(t)}{\sum_{i=0}^n w_i B_i^n(t)}$$

şeklinde olup bu eğriler genellikle Bézier eğrilerinin konik veya çember gibi kapalı eğri olmasını sağlar ve bu eğrilerde tıpkı Bézier eğrileri gibi afin dönüşümü altında invaryanttır. Ayrıca konveks kafes, uç nokta interpolasyonu ve azalan varyasyon özelliği sağlanır.

Bilgisayar destekli geometrik tasarım da bir diğer önemli ve kullanışlı eğri

ise B-spline eğrisi olup eğri Bézier eğrisinin bir genelleştirilmesidir ve spline baz fonksiyonları tarafından oluşturulur. B-spline eğrisi bu spline baz fonksiyonlarının yinelemeli özelliğinin uygulanması ile elde edilir. B-spline kavramını ilk ortaya atan I.J. Schoenberg olsada ilk uygulamalar Gordon ve Riesenfeld tarafından yapılmıştır. Bu eğrilerde tıpkı Bézier eğrileri gibi kontrol noktaları ile ifade edilir. Ancak bu eğrilerin Bézier eğrilerine göre bir dezavantajı, eğri Bézier eğrisi gibi tek bir eğri parçası değil bir ya da daha çok polinom fonksiyonlarının oluşturduğu parçalı eğri şeklinde ifade edilir. Ayrıca B-spline eğrisinin Bézier eğrisine göre dezavantajı olduğu gibi avantajları de vardır. Bu avantajlarından en önemlisi ise şekil kontrolüdür. Yani Bezier eğrisinde eğri lokal olarak kontrol edilemezken B-spline eğrisinde eğri lokal olarak kontrol edilebilir.

Bilgisayar destekli geometrik tasarımda son dönemlerde önemli kavramlardan biride geometrik nesnelere arasında süreklilik şartlarını koruyarak geçiş eğrileri oluşturmaktır.[4, 8, 9] Bu geçiş eğrilerinin uygulamasına katkıda bulunan bazı önemli isimler D.J.Walton, D.S.Meek, Zulfiqar Habib and Manabu Sakai gibi bilim insanlarıdır. Bu bilim insanları bu geçiş eğrilerinin, tasarımcı için önemli bir avantaja sahip olan spiral olma şartlarını bulmuşlardır. Bu spiral geçiş eğrilerinin çeşitlerinden ilki  $J$ -şeklinde spiral geçiş eğrisi olup bu eğriler bir doğrudan bir çembere doğru tanımlanan eğriler olarak görülebilir.  $J$ -şeklinde eğrinin başlangıç noktasında eğriliği sıfır olup verilen doğruya teğet olur ve son noktadaki eğriliği çemberin eğriliğine eşit olup son noktada çember ile bağlantılı olur. Bir diğer spiral geçiş eğrisi ise çemberden çembere geçiş eğrisi olarak adlandırılır ki bu eğriler  $C$ - ve  $S$ -şeklinde geçiş eğrileridir.  $C$ -şeklinde geçiş eğrisinde eğrinin ilk noktasındaki eğriliği ilk çemberin eğriliğine eşit olup son noktasındaki eğriliği ise ikinci çemberin eğriliğine eşit olup bu eğriliklerin işaretleri aynıdır.  $S$ -şeklinde çemberden çembere geçiş eğrisinde ise eğrinin ilk noktadaki eğriliği ilk çemberin eğriliğine eşit olup son noktadaki eğriliği ikinci çemberin eğriliğine eşittir ve bu

eğrilerin işaretleri birbirine zıttır.[3, 4, 5, 8, 9]

Beş bölümden oluşan bu tezin ikinci bölümünde çalışmalarımıza temel teşkil eden ve diğer bölümleri destekleyeceğimiz temel tanım ve teoremlere yer vereceğiz. Tezin üçüncü bölümünde önce Beta-Bézier eğrilerinin temel özelliklerinden bahsedilecektir. Daha sonra bu eğrilerin şekil analizi yapılacak ve bu eğrilerinin birleştirilmesi için gerekli şartlar araştırılacaktır. Ve son olarak bu Beta-Bézier eğrilerinin kontrol noktalarının hangi şartlar altında seçilmesi ile Pisagor-Hodograf eğri oluşturulacağı araştırılmıştır. Dördüncü bölümünde yeni baz fonksiyonları tanımlanacak ve bu baz fonksiyonları ile kübik bir eğri oluşturularak bu eğri ile kübik Bézier arasındaki ilişki gözlenecektir. Tezin beşinci bölümünde ise kuadratik B-spline eğrisi oluşturulacak ve bu eğrinin spiral eğri olması için gerekli şartlar araştırılacaktır.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm iki altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde eğrilerin diferansiyel geometrisi kısaca hatırlatılmaktadır. İkinci altbölümde bilgisayar destekli geometrik tasarımda çok kullanılan bazı kavramlar tanıtılmaktadır.

### 2.1 Temel Tanım ve Teoremler

Bu altbölümde tezin diğer bölümlerinde kullanılacak kavramlar detaylandırılmadan hatırlatılmaktadır.

**Tanım 2.1.1.**  $I \subset \mathbb{R}$  bir açık aralık ve  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu verilsin.

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

olmak üzere  $u \in I$  için  $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \dots, \alpha_n(u))$  şeklinde tanımlı  $\alpha(u)$ ' ya  $\mathbb{R}^n$  de bir eğri denir. Burada  $I$  aralığına  $\alpha$  eğrisinin parametre aralığı,  $u \in I$  ya  $\alpha$  eğrisinin parametresi denir.[1]

**Tanım 2.1.2.**  $\mathbb{R}^n$  de bir  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$u \in I$  ve  $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \dots, \alpha_n(u))$  olmak üzere bu ifadenin türevi olan  $\alpha'(u) = (\alpha'_1(u), \alpha'_2(u), \dots, \alpha'_n(u))$  ile tanımlı vektöre  $M$  eğrisinin hız vektörü denir.[1]

**Tanım 2.1.3.**  $\mathbb{R}^n$  de bir  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$|\alpha'| : I \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu verilsin.  $u \in I$  için  $|\alpha'| (u) = |\alpha'(u)|$  oluyorsa bu fonksiyona  $M$  eğrisinin  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu,  $|\alpha'(u)| \in \mathbb{R}$  reel sayısına da skaler hız denir.[1]

**Tanım 2.1.4.**  $\mathbb{R}^n$  de bir  $M$  eğrisi  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğu ile verilsin. Her  $u \in I$  için,

$$|\alpha'(u)| = 1 \quad (2.1.1)$$

oluyorsa  $M$  eğrisine  $(I, \alpha)$  koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğri denir.[1]

**Tanım 2.1.5.** Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir. Yani,

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

olmak üzere her  $u \in I$  için  $\alpha'(u) \neq 0$  ise  $\alpha$  eğrisi regüler eğridir.[1]

**Tanım 2.1.6.**  $J : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  bir dönüşüm olsun. Eğer,

$$J(x, y) = (-y, x)$$

eşitliği sağlanıyorsa bu dönüşüme  $\mathbb{R}^2$  üzerinde bir kompleks yapı denir. Buradan kolayca görülebilir ki,  $u(x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$  bir vektör olmak üzere bu vektör Öklidyen 2-uzayda eğrinin teğet vektörü olmak üzere,  $Ju$  eğrinin normal vektörü olur.[24]

**Tanım 2.1.7.**  $\mathbb{R}^2$  de bir  $M$  eğrisi  $\alpha(t) = (\alpha_1(t), \alpha_2(t))$  şeklinde verilsin.  $t$  yay parametresi olmak üzere bu eğrinin Frenet çatısı

$$T = (\alpha'_1(t), \alpha'_2(t))$$

$$N = (-\alpha'_2(t), \alpha'_1(t))$$

şeklinde yazılır.

**Tanım 2.1.8.**  $r(t)$  parametrik düzlemsel eğri olsun.

$$\kappa = \frac{r'' \cdot Jr'}{\|r'\|^3}$$

eşitliğine  $r(t)$  eğrisinin eğriligi denir.[24]

**Teorem 2.1.1.**  $\mathbb{R}^2$  de bir eğri  $x(s)$  olsun. Bu durumda düzlemsel bir eğrinin Frenet çatısının türev denklemleri,

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{t}}{ds} &= k(s).\mathbf{n} \\ \frac{d\mathbf{n}}{ds} &= -k(s).\mathbf{t}\end{aligned}$$

şeklinde yazılır. Burada  $k(s)$ ,  $x(s)$  eğrisinin eğrilik fonksiyonudur.[25]

**Önerme 2.1.1.**  $r(t) = (x(t), y(t))$  bir parametrik düzlem eğrisi olsun. Bu eğrinin eğriliği,

$$\kappa(t) = \frac{x'(t)y''(t) - x''(t)y'(t)}{(x'^2(t) + y'^2(t))^{\frac{3}{2}}}\tag{2.1.2}$$

ile hesaplanır.[24]

**Tanım 2.1.9.** Sabit bir nokta etrafında dönerek ve belirli bir kurala göre sürekli olarak bu noktadan uzaklaşan (yada bu noktaya yaklaşan) noktaların geometrik yeri olan eğrilere spiral eğri denir. Özel olarak eğri üzerindeki herhangi bir noktanın verilen sabit bir noktaya olan uzaklığının, bu nokta ile sabit noktayı birleştiren doğrunun sabit noktadan geçen sabit bir doğru ile yaptığı açya oranı daima sabit olan noktaların geometrik yerine spiral denir.[26]

**Tanım 2.1.10.** Sabit işaretli monoton eğriliğe sahip eğriye spiral yay denir.[25]

## 2.2 Bezier Eğrileri ve İlgili Kavramlar

Bu altbölümde bilgisayar destekli geometrik tasarımda çok kullanılan bazı kavramlar tanıtılmaktadır.

**Tanım 2.2.1.**  $k \geq 3$  olmak üzere, düzlemdeki sıralı  $A_1, A_2, \dots, A_k$  noktalarını ardışık olarak birbirine ve sonuncusunu da birincisine doğru parçalarıyla bağlayarak elde edilen geometrik şekle düzlemde bir  $k$ -kenarlı poligon denir.[27]

**Tanım 2.2.2.**  $P_i$  ler  $i = 0, 1, \dots, n$  için  $(n + 1)$  tane kontrol noktası olmak üzere,

$$r(t) = \sum_{i=0}^n C_i^n (1-t)^{n-i} t^i P_i = \sum_{i=0}^n B_i^n(t) P_i, \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (2.2.1)$$

şeklinde tanımlı eğriye Bézier eğrisi denir. Burada  $B_i^n(t) = C_i^n (1-t)^{n-i} t^i$  ifadesine Bernstein polinomu denir.[2]

**Teorem 2.2.1.** Bernstein polinomu aşağıdaki özellikleri sağlar :

1. Non-negatiftir.  $0 \leq t \leq 1$  için  $B_i^n(t)$  fonksiyonlarının tamamı non-negatiftir.
2. Birimin parçalanması.  $\sum_{i=0}^n B_i^n(t) = 1$  eşitliği sağlanır.
3. Simetriktir.  $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$  dir.
4. Yinelemelidir.  $B_i^n(t) = (1-t)B_i^{n-1}(t) + tB_{i-1}^{n-1}(t)$  dir.
5. Türevlenebilirdir.  $\frac{dB_i^n(t)}{dt} = n [B_{i-1}^{n-1}(t) - B_i^{n-1}(t)]$  dir.[2]

**Teorem 2.2.2.** Bézier eğrileri aşağıdaki özellikleri sağlar :

1. Uç nokta şartları sağlanır.  $t = 0$  iken eğri başlangıç noktasından geçerken  $t = 1$  noktasında eğri bitiş noktasından geçer. Yani Bézier eğrisi kontrol çokgeninin başlangıç ve bitiş noktalarından geçer.
2. Uç noktalarda teğet şartları sağlanır.  $t = 0$  noktasında eğri ilk iki kontrol noktasının farkı olan  $P_1 - P_0$  vektörüne teğet iken  $t = 1$  noktasında eğri son iki kontrol noktasının farkı olan  $P_n - P_{n-1}$  vektörüne teğettir.
3. Geometrik invaryanttır. Yani, Bernstein polinomunda birimin parçalanması özelliğinden dolayı eğrinin şekli koordinat sisteminin dönme ve ötelemesi altında değişmezdir.
4. Konveks kafes özelliğine sahiptir. Bézier eğrisi kontrol noktaları ile oluşturulan konveks kafesin tamamen içerisinde kalmaktadır ve bu tasarımcı için büyük kolaylık sağlamaktadır.

5. Azalan varyasyon özelliği sağlanır.

6. Simetri özelliği sağlanır.  $\sum_{i=0}^n P_i B_i^n(t) = \sum_{i=0}^n P_{n-i} B_i^n(1-t)$  dir.[2]

**Tanım 2.2.3.**  $t_0, t_1, \dots, t_m$  knot vektörleri ve  $i = 0, 1, \dots, n$  için

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & t \in [t_i, t_{i+1}) \\ 0 & t \notin [t_i, t_{i+1}) \end{cases} \quad (2.2.2)$$

$$N_{i,d} = \frac{t - t_i}{t_{i+d} - t_i} N_{i,d-1}(t) + \frac{t_{i+d+1} - t}{t_{i+d+1} - t_{i+1}} N_{i+1,d-1}(t)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona  $d$ . dereceden  $B$ -spline baz fonksiyonları denir.[11]

**Teorem 2.2.3.**  $N_{i,k}(t)$   $B$ -spline baz fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar :

1. Pozitiflik.  $t \in (t_i, t_{i+k+1})$  için  $N_{i,k}(t) > 0$  dir.
2. Lokal destek.  $t \notin (t_i, t_{i+k+1})$  için  $N_{i,k}(t) = 0$  dir.
3. Parçalı polinom.  $N_{i,k}(t)$  fonksiyonları  $k$ . dereceden parçalı polinom fonksiyonlarıdır.
4. Birimin parçalanması.  $t \in (t_i, t_{i+k+1})$  için  $\sum_{j=r-k}^r N_{j,k}(t) = 1$  dir.
5. Süreklilik. Eğer  $t_i$  iç knot'ı  $p_i$  kez tekrarlanırsa,  $N_{i,k}(t)$   $t = t_i$  de  $C^{k-p_i}$  süreklidir yani  $N_{i,k}(t)$  fonksiyonu  $C^\infty$  sınıfından süreklidir.[11]

**Tanım 2.2.4.**  $t_0, t_1, \dots, t_m$  knot vektörleri,  $b_0, b_1, \dots, b_n$  ler kontrol noktaları olmak üzere  $[t_d, t_{m-d}]$  aralığında ,

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t) \quad (2.2.3)$$

şeklinde tanımlı eğriye  $d$ . dereceden  $B$ -spline eğri denir.[11]

**Teorem 2.2.4.**  $B$ -spline eğrisi aşağıdaki özellikleri sağlar :



1. *Lokal kontrol.* B-spline eğri parçalı fonksiyonların oluşturduğu parçalı eğrilerin birleşimi olup bu eğri parçalarının hepsi  $d + 1$  kontrol noktası tarafından belirlenir.
2. *Konveks kafes.*  $t \in (t_r, t_{r+1})$  için  $B(t) \in CH \{b_{r-d}, \dots, b_r\}$  dir. Yani eğri her zaman kontrol noktalarının oluşturduğu kafesin içinde kalır.
3. *Süreklilik.*  $B(t)$  eğrisi  $C^\infty$  sınıfından sürekli dir.
4. *Afın dönüşümü altında invarianttir.*  $T$  bir afın dönüşümü ise  $T(\sum_{i=0}^n b_i N_{i,d}(t)) = \sum_{i=0}^n T(b_i) N_{i,d}(t)$  dir.[11]

**Tanım 2.2.5.**  $\alpha$  ve  $\beta$  sıfırdan büyük reel sayılar olmak üzere,

$$B(\alpha, \beta) = \int_0^1 x^{\alpha-1} (1-x)^{\beta-1} dx \quad (2.2.4)$$

şeklinde tanımlı fonksiyona Beta fonksiyonu denir.

**Teorem 2.2.5.** Beta fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. *Pozitifdir.* Her  $\alpha, \beta > 0$  için,

$$B(\alpha, \beta) > 0$$

dir.

2. *Simetriktir.* Her  $\alpha, \beta > 0$  için,

$$B(\alpha, \beta) = B(\beta, \alpha)$$

dir.

3. *Yinelemelidir.* Yani,

$$B(\alpha + 1, \beta) = \frac{\alpha}{\alpha + \beta} B(\alpha, \beta) \quad (2.2.5)$$

$$B(\alpha, \beta + 1) = \frac{\beta}{\alpha + \beta} B(\alpha, \beta) \quad (2.2.6)$$

dır.

Şimdi şekil analizinde önemli olan iki kavramı hatırlatalım.

**Tanım 2.2.6.** Bir  $r(t)$  parametrik eğrisinin tanjant vektörü olan  $r'(t)$  herhangi bir  $t_0$  noktasında işaret değiştiriyorsa yani  $r'(t_0; \lambda) = 0$  ise  $r(t)$  eğrisi  $t_0$ 'da bir cusp noktasına sahiptir denir.[10]

**Tanım 2.2.7.** Bir  $r(t)$  parametrik eğrisinde  $t_1 \neq t_2$  için  $r(t_1) = r(t_2)$  ise  $r(t)$  eğrisi bir loop noktasına sahiptir denir.[10]

Şimdi ise iki eğrinin birleştirilmesinde ortaya çıkan süreklilik şartlarını hatırlatalım.

**Tanım 2.2.8.**  $r_1(t)$  ve  $r_2(t)$  parametrik eğrisi  $[0, 1]$  aralığında tanımlı iki Bézier eğrisi olsun. Eğer ilk eğrinin yani  $r_1(t)$  nin son noktasındaki değeri, ikinci eğrinin yani  $r_2(t)$  nin ilk noktasındaki değerine eşitse bu iki eğri birleştikleri o noktada  $C^0$  süreklidir denir. Yani

$$r_1(1) = r_2(0) \quad (2.2.7)$$

eşitliği sağlanıyorsa bu iki eğri  $C^0$  süreklidir.[2]

**Tanım 2.2.9.**  $r_1(t)$  ve  $r_2(t)$  parametrik eğrisi  $[0, 1]$  aralığında tanımlı iki Bézier eğrisi olsun. Eğer ilk eğrinin türevinin son noktasındaki değeri, ikinci eğrinin türevinin başlangıç noktasındaki değerine eşitse bu iki eğri birleştikleri o noktada  $C^1$  süreklidir denir. Yani,

$$r'_1(1) = r'_2(0) \quad (2.2.8)$$

eşitliği sağlanıyorsa bu iki eğri  $C^1$  süreklidir.[2]

**Tanım 2.2.10.**  $r_1(t)$  ve  $r_2(t)$  parametrik eğrisi  $[0, 1]$  aralığında tanımlı iki Bézier eğrisi olsun. Eğer ilk eğrinin bitiş noktasındaki eğriliği ile ikinci eğrinin başlangıç noktasındaki eğriliği birbirine eşit ise bu iki eğri birleştikleri o noktada  $C^2$  süreklidir denir. Yani ilk eğrinin eğriliği  $\kappa_1(t)$  ve ikinci eğrinin eğriliği  $\kappa_2(t)$  olmak üzere

$$\kappa_1(1) = \kappa_2(0) \quad (2.2.9)$$

eşitliği sağlanıyorsa bu iki eğri  $C^2$  süreklidir.[2]

Bu altbölümde son olarak hodograf eğri kavramını hatırlatalım.

**Tanım 2.2.11.**  $r(t) = (x(t), y(t))$  parametrik düzelemsel eğrisi

$$r : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$$

şeklinde verilsin. Bu  $r(t)$  eğrisinin hodograf'ı

$$r'(t) = (x'(t), y'(t))$$

şeklinde bir vektör alanıdır. Bu  $r(t)$  eğrisinin Pisagor-Hodograf eğrisi olması için

$$x'(t)^2 + y'(t)^2 = \sigma(t)^2$$

olacak şekilde bir  $\sigma(t)$  polinomu mevcut olmalıdır. Böylece bu eğriyi kısaca PH eğrisi olarak isimlendireceğiz.[23]

**Teorem 2.2.6.** Pisagor şartı olan

$$a(t)^2 + b(t)^2 = c(t)^2$$

olup bu ifade  $u$  ve  $v$  fonksiyonları aralarında asal olmak üzere

$$a(t) = w(t)(u^2(t) - v^2(t))$$

$$b(t) = 2w(t)u(t)v(t)$$

$$c(t) = w(t)(u^2(t) + v^2(t))$$

*şeklinde yazılabilir.[23]*

Dolayısıyla bu teoremden *PH* eğrisi

$$x'(t) = w(t)(u^2(t) - v^2(t)) \quad (2.2.10)$$

$$y'(t) = 2w(t)u(t)v(t)$$

formunda da ifade edilebilir. Biz burada (2.2.10) de verilen eşitliklerde  $w(t) = 1$  ve  $obeb(u(t), v(t)) = c$  olup burada  $c$  sayısı sabit olup bu durum ilkel Pisagor-Hodograf olma durumudur.

### 3. BETA-BÉZIER EĞRİLERİ

Bu bölüm dört altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde Beta-Bézier baz fonksiyonları ve Beta-Bézier eğrileri tanıtılmakta ve özellikleri sağlanmaktadır. İkinci altbölümde Beta-Bézier eğrilerinin cusp ve loop noktalarının varlığı araştırılmaktadır. Üçüncü altbölümde iki Beta-Bézier eğrisinin birleşme noktalarındaki süreklilik durumları incelenmektedir. Dördüncü altbölümde Beta-Bézier eğrilerinin Pisagor-Hodograf olma durumu belirlenmektedir.

#### 3.1 Beta-Bézier Baz Fonksiyonları ve Temel Özellikleri

**Tanım 3.1.1.**  $\mu > 0$  reel değerli bir parametre,  $n$  pozitif bir tamsayı olsun.  $t \in (0, 1)$  ve  $k = 0, 1, \dots, n$  için,

$$\beta_k^n(t; \mu) = \binom{n}{k} \frac{B(k + \mu t, n - k + \mu(1 - t))}{B(\mu t, \mu(1 - t))} \quad (3.1.1)$$

ile tanımlı fonksiyona  $\mu$  şekil parametresi ile tanımlanmış  $n$ . dereceden Beta-Bézier bazları denir.[22]

**Önerme 3.1.1.** Aşağıdaki önermeler Beta-Bézier bazları için geçerlidir:

1.  $\phi_k^n(t; \mu)$   $n$ . dereceden polinomu,

$$\phi_k^n(t; \mu) = \binom{n}{k} \frac{\mu t}{\mu} \frac{\mu t + 1}{\mu + 1} \dots \frac{\mu t + k - 1}{\mu + k - 1} \frac{\mu(1 - t)}{\mu + k} \quad (3.1.2)$$

$$\frac{\mu(1 - t) + 1}{\mu + k + 1} \dots \frac{\mu(1 - t) + n - k - 1}{\mu + n - 1}$$

şeklinde tanımlı olup  $t \in (0, 1)$  için,

$$\beta_k^n(t; \mu) = \phi_k^n(t; \mu) \quad (3.1.3)$$

dir.

2.  $\beta_k^n(t; \mu)$  fonksiyonu  $k = 0, 1, \dots, n$  için lineer bağımsızdır.

3. Eğer  $\mu \rightarrow \infty$  ise bu  $\{\beta_k^n(t; \mu) : k = 0, 1, \dots, n\}$  bazları Bernstein-Bézier bazına dönüşür. Yani,

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \beta_k^n(t; \mu) = B_k^n(t) \quad (3.1.4)$$

olup burada  $B_k^n(t) = \binom{n}{k} t^k (1-t)^{n-k}$  dir.[22]

Şimdi bu Beta-Bézier bazlarının özel olarak birinci, ikinci ve üçüncü mertebeden nasıl yazacağımızı araştıralım.

- $n = 1$  için birinci mertebeden baz fonksiyonlarını yazalım.

$$\beta_k^1(t; \mu) = \phi_k^1(t; \mu)$$

olduğundan  $k = 0$  için,

$$\phi_0^1(t; \mu) = \binom{1}{0} \left( \frac{\mu(1-t)}{\mu} \right)$$

$$\phi_0^1(t; \mu) = 1 - t$$

ve  $k = 1$  için,

$$\phi_1^1(t; \mu) = \binom{1}{1} \left( \frac{\mu t}{\mu} \right)$$

$$\phi_1^1(t; \mu) = t$$

olarak yazılır.

- $n = 2$  için ikinci mertebeden baz fonksiyonlarını yazalım.

$$\beta_k^2(t; \mu) = \phi_k^2(t; \mu)$$

olur.  $k = 0$  için

$$\phi_0^2(t; \mu) = \binom{2}{0} \left( \frac{\mu(1-t)}{\mu} \frac{(\mu(1-t)+1)}{\mu+1} \right)$$

$$\phi_0^2(t; \mu) = \frac{\mu^2 t^2 + (-2\mu^2 - \mu)t + (\mu^2 + \mu)}{\mu + 1}$$

$k = 1$  için

$$\phi_1^2(t; \mu) = \binom{2}{1} \left( \frac{\mu t}{\mu} \frac{\mu(1-t)}{\mu+1} \right)$$

$$\phi_1^2(t; \mu) = \frac{-\mu t^2 + \mu t}{\mu + 1}$$

ve  $k = 2$  için

$$\phi_2^2(t; \mu) = \binom{2}{2} \left( \frac{\mu t}{\mu} \frac{\mu t + 1}{\mu + 1} \right)$$

$$\phi_2^2(t; \mu) = \frac{\mu t^2 + t}{\mu + 1}$$

olarak yazılır.

- $n = 3$  için ikinci mertebeden baz fonksiyonlarını yazalım.

$$\beta_k^3(t; \mu) = \phi_k^3(t; \mu)$$

olur. Buradan  $k = 0$  için

$$\phi_0^3(t; \mu) = \binom{3}{0} \left( \frac{\mu(1-t)}{\mu} \frac{(\mu(1-t)+1)}{\mu+1} \frac{(\mu(1-t)+2)}{\mu+2} \right)$$

$$\phi_0^3(t; \mu) = \left( \frac{\mu^2(1-t)^3 + 3\mu(1-t)^2 + 2(1-t)}{(\mu+1)(\mu+2)} \right)$$

$$\phi_0^3(t; \mu) = \left( \frac{-\mu^2 t^3 + (3\mu^2 + \mu)t^2 + (-3\mu^2 - 6\mu - 2)t + (\mu^2 + 3\mu + 2)}{(\mu+1)(\mu+2)} \right)$$

$k = 1$  için

$$\phi_1^3(t; \mu) = \binom{3}{1} \left( \frac{\mu t}{\mu} \frac{\mu(1-t)}{\mu+1} \frac{(\mu(1-t)+1)}{\mu+2} \right)$$

$$\phi_1^3(t; \mu) = 3 \left( \frac{\mu(1-t)^2 t + t(1-t)}{(\mu+1)(\mu+2)} \right)$$

$$\phi_1^3(t; \mu) = \left( \frac{3\mu^2 t^3 + (-6\mu^2 - 3\mu)t^2 + (3\mu^2 + 3\mu)t}{(\mu+1)(\mu+2)} \right)$$

$k = 2$  için

$$\phi_2^3(t; \mu) = \binom{3}{2} \left( \frac{\mu t}{\mu} \frac{\mu t + 1}{\mu+1} \frac{\mu(1-t)}{\mu+2} \right)$$

$$\phi_2^3(t; \mu) = 3 \left( \frac{\mu t(1-t)(\mu t + 1)}{(\mu+1)(\mu+2)} \right)$$

$$\phi_2^3(t; \mu) = \left( \frac{-3\mu^2 t^3 + (3\mu^2 - 3\mu)t^2 + 3\mu t}{(\mu+1)(\mu+2)} \right)$$

dir. Son olarak  $k = 3$  için



$$\phi_3^3(t; \mu) = \binom{3}{3} \left( \frac{\mu t}{\mu} \frac{\mu t + 1}{\mu + 1} \frac{\mu t + 2}{\mu + 2} \right)$$

$$\phi_3^3(t; \mu) = \left( \frac{t(\mu t + 1)(\mu t + 1)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right)$$

$$\phi_3^3(t; \mu) = \left( \frac{\mu^2 t^3 + (3\mu)t^2 + 2t}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right)$$

olarak yazılır.

**Teorem 3.1.1.** *Beta-Bézier baz fonksiyonları aşağıda verilen özellikleri sağlar:*

1. *Negatif değildir. Her  $t \in (0, 1)$  için*

$$\beta_k^n(t; \mu) \geq 0$$

*dir.*

2. *Birimin parçalanması özelliği sağlanır. Yani,*

$$\sum_{k=0}^n \beta_k^n(t; \mu) = 1$$

*dir.*

3. *Simetriktir. Yani,*

$$\beta_k^n(t; \mu) = \beta_{n-k}^n(1 - t; \mu)$$

*dir.*

4. *Uç sınır şartları sağlanır. Burada,*

$$\beta_k^n(0; \mu) = \lim_{t \rightarrow 0} \beta_k^n(t; \mu) = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 0, & 0 < k \leq n \end{cases} \quad (3.1.5)$$

$$\beta_k^n(1; \mu) = \lim_{t \rightarrow 1} \beta_k^n(t; \mu) = \begin{cases} 1, & k = n \\ 0, & 0 \leq k < n \end{cases}$$

eşitlikleri geçerlidir.

5. Yinelemelidir. Bu baz fonksiyonları,

$$\beta_k^n(t; \mu) = \frac{\mu t + k - 1}{\mu + n - 1} \beta_{k-1}^{n-1}(t; \mu) + \frac{\mu(1-t) + n - k - 1}{\mu + n - 1} \beta_k^{n-1}(t; \mu)$$

eşitliği sağlanır.

6. Derece yükseltme özelliği vardır. Yani,

$$\beta_k^n(t; \mu) = \frac{k+1}{n+1} \beta_{k+1}^{n+1}(t; \mu) + \left(1 - \frac{k}{n+1}\right) \beta_k^{n+1}(t; \mu)$$

dır.[22]

**Tanım 3.1.2.**  $\mu > 0$  bir parametre,  $t \in [0, 1]$  ve  $k = 0, 1, \dots, n$  için  $b_i$  ler kontrol noktaları olmak üzere,

$$r(t; \mu) = \sum_{k=0}^n b_k \beta_k^n(t; \mu) \quad (3.1.6)$$

şeklinde tanımlı eğriye Beta-Bézier eğrisi denir.[22]

**Teorem 3.1.2.** Beta-Bézier eğrileri aşağıdaki özellikleri sağlar:

1. Geometrik invarianttır. Beta-Bézier eğrilerinin şekli koordinat sisteminin seçiminden bağımsızdır.

2. *Konveks kafes özelliği sağlanır. Beta-Bézier eğrileri kontrol noktalarının oluşturduğu konveks kafes içerisinde yatar. Ayrıca oluşan eğri başlangıç ve bitiş noktasından geçer ve eğrinin tamamı bu kontrol noktalarını oluşturduğu çokgenin içinde kaldığından geometrik olarak eğri dizaynında avantaj sağlamaktadır.*

3. *Simetriktir. Kontrol noktalarının sırası ters çevrildiğinde zıt yönlü aynı Beta-Bézier eğrisi meydana gelir.*

4. *Uç nokta interpolasyon özelliği sağlanır. Beta-Bézier eğrisi kontrol noktalarının oluşturduğu çokgenin uç noktalarından geçer. Yani,*

$$r(0; \mu) = b_0$$

$$r(1; \mu) = b_n$$

*dir.*

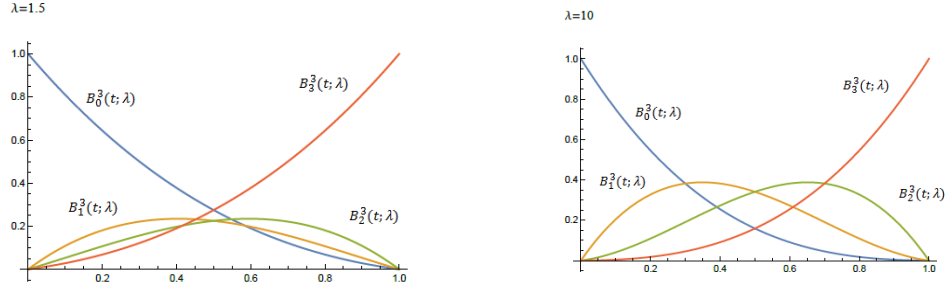
5. *Şekil ayarlanabilme özelliği sağlanır. Yani, kontrol noktaları sabit kalsa bile şekil parametresinin değiştirilmesi ile şekil istediğimiz gibi değiştirilir.[22]*

**Tanım 3.1.3.**  $\mu > 0$  bir parametre,  $t \in (0, 1)$  ve  $k = 0, 1, 2, 3$  için

$$\beta_k^3(t; \mu) = \phi_k^3(t; \mu)$$

$$= \binom{3}{k} \frac{\mu t}{\mu} \frac{\mu t + 1}{\mu + 1} \dots \frac{\mu t + k - 1}{\mu + k - 1} \frac{\mu(1-t)}{\mu + k} \frac{\mu(1-t) + 1}{\mu + k + 1} \dots \frac{\mu(1-t) + 2 - k}{\mu + 2}$$

*şeklinde tanımlı fonksiyona  $\mu$  şekil parametresi ile tanımlı kübik Beta-Bézier bazları denir.*



Şekil 3.1: Farklı şekil parametreleri ile tanımlı 3. dereceden dört Beta-Bézier baz fonksiyonları, [22]

**Tanım 3.1.4.**  $\mu > 0$  bir parametre,  $t \in [0, 1]$  ve  $i = 0, 1, 2, 3$  için  $b_i$  kontrol noktaları olmak üzere,

$$r(t; \mu) = \sum_{k=0}^3 b_k \phi_k^3(t; \mu) \quad (3.1.7)$$

şeklinde tanımlı eğriye  $\mu$  şekil parametresi ile tanımlı kübik Beta-Bézier eğrileri denir.

Beta-Bézier baz fonksiyonların özelliklerini kullanarak, kübik Beta-Bézier eğrilerinin 1-) Geometrik invariant, 2-) Konveks kafes özelliği, 3-) Uç nokta interpolasyon özelliği, 4-) Şekil ayarlanabilme özellikleri sağlanır.

### 3.2 Kübik Beta-Bézier Eğrilerinin Şekil Analizi

Bu alt bölümde tezin orjinal kısımlarından biri çalışılmaktadır. Bu alt bölümde bir Beta-Bézier eğrisinin çeşitli özellikleri incelenecektir. Esasen bu özellikler geometrik tasarımda olması istenmeyen Cusp ve Loop noktalarıdır. İlk olarak Cusp olma durumu incelenecektir.

(3.1.7) eşitliğindeki Beta-Bézier eğrisinin denklemini,

$$r(t; \mu) = b_0 + [1 - \phi_0^3(t; \mu)] q_1 + [1 - \phi_0^3(t; \mu) - \phi_1^3(t; \mu)] q_2 \quad (3.2.1)$$

$$+ [1 - \phi_0^3(t; \mu) - \phi_1^3(t; \mu) - \phi_2^3(t; \mu)] q_3$$

şeklinde yazılır ki burada  $i = 1, 2, 3$  için  $q_i = b_i - b_{i-1}$  dir.[23] Ayrıca kübik Beta-Bézier baz fonksiyonlarını  $\mu$  şekil parametresi olmak üzere

$$\phi_0^3(t; \mu) = \frac{(-\mu^2)t^3 + (3\mu^2 + 3\mu)t^2 + (-3\mu^2 - 6\mu - 2)t + (\mu^2 + 3\mu + 2)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \quad (3.2.2)$$

$$\phi_1^3(t; \mu) = \frac{(3\mu^2)t^3 + (-6\mu^2 - 3\mu)t^2 + (3\mu^2 + 3\mu)t}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \quad (3.2.3)$$

$$\phi_2^3(t; \mu) = \frac{(-3\mu^2)t^3 + (3\mu^2 - 3\mu)t^2 + (3\mu)t}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \quad (3.2.4)$$

$$\phi_3^3(t; \mu) = \frac{(\mu^2)t^3 + (3\mu)t^2 + 2t}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \quad (3.2.5)$$

şeklinde yazılır. İlk olarak  $q_1$  in  $q_3$  e paralel olmadığını düşünelim. Bu durumda  $q_2 = uq_1 + vq_3$  şeklinde yazıp bu ifadeyi (3.2.1) te yerine yazılırsa,

$$r(t; \mu) = b_0 + [(1 + u) - \phi_0^3(t; \mu) - u(\phi_0^3(t; \mu) + \phi_1^3(t; \mu))] q_1 \quad (3.2.6)$$

$$+ [v + \phi_3^3(t; \mu) - v(\phi_0^3(t; \mu) + \phi_1^3(t; \mu))] q_3$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$r(t; \mu) = b_0 + [1 - \phi_0^3(t; \mu) + u(\phi_2^3(t; \mu) + \phi_3^3(t; \mu))] q_1$$

$$+ [\phi_3^3(t; \mu) + v(\phi_2^3(t; \mu) + \phi_3^3(t; \mu))] .q_3$$

eşitliği elde edilir.

Bir Beta-Bézier eğrisinin cusp noktasına sahip olması için  $r'(t; \mu) = 0$  olması gerekmektedir.[23] (3.2.6) eşitliğinden

$$r'(t, \mu) = [-\phi_0^3(t; \mu)' + u(\phi_2^3(t; \mu)' + \phi_3^3(t; \mu)')] q_1 \\ + [\phi_3^3(t; \mu)' + v(\phi_2^3(t; \mu)' + \phi_3^3(t; \mu)')] q_3$$

olup burada  $q_1$  ve  $q_3$  paralel olmayıp lineer bağımsızdır. Böylece,

$$-\phi_0^3(t; \mu)' + u(\phi_2^3(t; \mu)' + \phi_3^3(t; \mu)') = 0, \quad (3.2.7) \\ \phi_3^3(t; \mu)' + v(\phi_2^3(t; \mu)' + \phi_3^3(t; \mu)') = 0,$$

eşitliklerini yazabiliriz. Bu eşitlik kullanılarak,

$$u(\phi_2^3(t; \mu)' + \phi_3^3(t; \mu)') = \phi_0^3(t; \mu)' \quad (3.2.8) \\ v(\phi_2^3(t; \mu)' + \phi_3^3(t; \mu)') = -\phi_3^3(t; \mu)'$$

olur ve (3.2.2)-(3.2.5) de tanımlanan fonksiyonlar için

$$\phi_0^3(t; \mu)' = \frac{-3\mu^2 t^2 + (6\mu^2 + 6\mu)t - (3\mu^2 + 6\mu + 2)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \\ \phi_2^3(t; \mu)' = \frac{-9\mu^2 t^2 + (6\mu^2 - 6\mu)t - 3\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \\ \phi_3^3(t; \mu)' = \frac{3\mu^2 t^2 + 6\mu t + 2}{(\mu + 1)(\mu + 2)}$$

eşitliklerini (3.2.8) da yerine yazıp  $u$  ve  $v$  yi yalnız bırakırsak

$$C = \begin{cases} u = \frac{(3\mu^2)t^2 - (6\mu^2 + 6\mu)t + (3\mu^2 + 6\mu + 2)}{6\mu^2 t^2 - 6\mu^2 t - 3\mu - 2} \\ v = \frac{(3\mu^2)t^2 + 6\mu t + 2}{6\mu^2 t^2 - 6\mu^2 t - 3\mu - 2} \end{cases} \quad (3.2.9)$$

şeklinde  $C$  parametrik eğrisi elde edilir. Buradan

$$\frac{dv}{du} = \frac{\frac{dv}{dt}}{\frac{du}{dt}}$$

$$\frac{dv}{du} = \frac{(6\mu^2t+6\mu)(6\mu^2t^2-6\mu^2t-3\mu-2)-(3\mu^2t^2+6\mu t+2)(12\mu^2t-6\mu^2)}{(6\mu^2t-(6\mu^2+6\mu))(6\mu^2t^2-6\mu^2t-3\mu-2)-(3\mu^2t^2-(6\mu^2+6\mu)t+(3\mu^2+6\mu+2))(12\mu^2t-6\mu^2)}$$

olur ve

$$\frac{dv}{du} = -(18\mu^4t^2 + 36\mu^3t^2 + 18\mu^3t + 36\mu^2t + 6\mu^2 + 12\mu)$$

elde edilir ve buradan

$$\frac{dv}{du} = -(18\mu^4t^2 + 36\mu^3t^2 + 18\mu^3t + 36\mu^2t + 6\mu^2 + 12\mu) < 0$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{-(36\mu^4t - 72\mu^3t - 18\mu^3 - 36\mu^2)}{36\mu^4t + 72\mu^3t - 36\mu^4 - 90\mu^3 - 36\mu^2}$$

olur ve

$$\frac{d^2v}{du^2} = \frac{-(36\mu^4t - 72\mu^3t - 18\mu^3 - 36\mu^2)}{36\mu^4t + 72\mu^3t - 36\mu^4 - 90\mu^3 - 36\mu^2} > 0$$

eşitliklerini yazarız. Böylece  $C$  eğrisi monoton azalan ve konkav bir eğri olur.

Öte yandan, (3.2.7) ve (3.2.9) eşitliklerinde tanımladığımızı benzer olarak

$$-\phi_0^3(t; \mu)'' + u(\phi_2^3(t; \mu)'' + \phi_3^3(t; \mu)'') = 0, \quad (3.2.10)$$

$$\phi_3^3(t; \mu)'' + v(\phi_2^3(t; \mu)'' + \phi_3^3(t; \mu)'') = 0$$

ve

$$\begin{cases} u = \frac{6\mu^2t-12\mu^2-6\mu}{12\mu^2t-6\mu^2} \\ v = \frac{6\mu^2t+6\mu}{12\mu^2t-6\mu^2} \end{cases} \quad (3.2.11)$$

olarak yazılır. Burada (3.2.9) ve (3.2.11) eşitlikleri kıyaslandığında bu iki eşitlik aynı  $\mu$  değeri için sağlanmaz. Böylece  $C$  eğrisi cusp noktasına sahip bir eğridir. Böylece aşağıdaki teoremi ispatlamış oluruz.

**Teorem 3.2.1.** *Eğer  $(u_0, v_0)$  noktası (3.2.9) eşitliğinde tanımlı  $C$  eğrisine ait ise bu nokta kübik Beta-Bézier eğrisi olan  $r(t; \mu)$ ' nin bir cusp noktasıdır.*

Bu alt bölümün son kısmında ise loop noktalarının varlığı araştırılmaktadır.

Bir kübik Beta-Bézier eğrisinin loop noktasına sahip olması için  $0 \leq t_1 \leq t_2 \leq 1$  için  $r(t_1, \mu) - r(t_2, \mu) = 0$  eşitliği geçerli olmalıdır.[23] (3.1.7) eşitliği kullanılarak,

$$r(t_1, \mu) = b_0\phi_0^3(t_1; \mu) + b_1\phi_1^3(t_1; \mu) + b_2\phi_2^3(t_1; \mu) + b_3\phi_3^3(t_1; \mu)$$

ve

$$r(t_2, \mu) = b_0\phi_0^3(t_2; \mu) + b_1\phi_1^3(t_2; \mu) + b_2\phi_2^3(t_2; \mu) + b_3\phi_3^3(t_2; \mu)$$

eşitlikleri yazılır.  $r(t_1, \mu) - r(t_2, \mu) = 0$  olduğu için ve (3.2.2)-(3.2.5) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} & b_0 \left( \frac{(-\mu^2)(t_1^3 - t_2^3) + (3\mu^2 + 3\mu)(t_1^2 - t_2^2) + (-3\mu^2 - 6\mu - 2)(t_1 - t_2) + (\mu^2 + 3\mu + 2)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\ & + b_1 \left( \frac{(3\mu^2)(t_1^3 - t_2^3) + (-6\mu^2 - 3\mu)(t_1^2 - t_2^2) + (3\mu^2 + 3\mu)(t_1 - t_2)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\ & + b_2 \left( \frac{(-3\mu^2)(t_1^3 - t_2^3) + (3\mu^2 - 3\mu)(t_1^2 - t_2^2) + (3\mu)(t_1 - t_2)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\ & + b_3 \left( \frac{(\mu^2)(t_1^3 - t_2^3) + (3\mu)(t_1^2 - t_2^2) + 2(t_1 - t_2)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) = 0 \end{aligned}$$



denklemini elde edilir. Bu ifadeyi daha düzenli olarak

$$\frac{1}{(\mu+1)(\mu+2)} \begin{pmatrix} (t_1^3 - t_2^3)(-\mu^2 b_0 + 3\mu^2 b_1 - 3\mu^2 b_2 + \mu^2 b_3) + \\ (t_1^2 - t_2^2)((3\mu^2 + 3\mu)b_0 + (-6\mu^2 - 3\mu)b_1 + \\ (3\mu^2 - 3\mu)b_2 + (3\mu)b_3) + (t_1 - t_2)((-3\mu^2 - 6\mu - 2)b_0 + \\ (3\mu^2 + 3\mu)b_1 + (3\mu)b_2 + 2b_3) + (\mu^2 + 3\mu + 2)b_0 \end{pmatrix} = 0$$

şeklinde yazabiliriz.  $t_1^3 - t_2^3 \neq 0$ ,  $t_1^2 - t_2^2 \neq 0$  ve  $t_1 - t_2 \neq 0$  olduğundan bu ifade

$$\frac{1}{(\mu+1)(\mu+2)} \begin{bmatrix} -\mu^2 & 3\mu^2 & -3\mu^2 & \mu^2 \\ 3\mu^2 + 3\mu & -6\mu^2 - 3\mu & 3\mu^2 - 3\mu & 3\mu \\ -3\mu^2 - 6\mu - 2 & 3\mu^2 + 3\mu & 3\mu & 2 \\ \mu^2 + 3\mu + 2 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

olur. Bu ifadeyi düzenlersek

$$18\mu^5 + 9\mu^4 = 0$$

olup bu ise  $\mu > 0$  için mümkün olmayan bir durum olur. Dolayısıyla aşağıdaki teorem geçerli olur.

**Teorem 3.2.2.** *Kübik Beta-Bézier eğrisi loop noktasına sahip değildir.*

### 3.3 Kübik Beta-Bézier Eğrilerinin Birleştirilmesi

Bir tasarımcı eğrileri kullanırken iki eğrinin birleştirilmesi gibi bir durumla karşı karşıya kalır. Eğrilerin birleştirilmesi için düzgünlük şartları olan  $C^0$ ,  $C^1$  ve  $C^2$  şartlarının sağlanması gerekir. Bu altbölümde Beta-Bézier eğrilerinin birleştirilme şartları aranacaktır.

$i = 0, 1, 2, 3$  için  $a_i$  ve  $b_i$  ler  $\mathbb{R}^2$  veya  $\mathbb{R}^3$  te kontrol noktaları,  $t_1, t_2 \in [0, 1]$  ve  $\mu > 0$  bir parametre olmak üzere,

$$r_1(t_1, \mu) = \sum_{i=0}^3 a_i \phi_i^3(t_1; \mu)$$

$$r_2(t_2, \mu) = \sum_{i=0}^3 b_i \phi_i^3(t_2; \mu)$$

şeklinde iki tane kübik Beta-Bézier eğrisini ele alalım. Buradan,

$$r_1(t_1, \mu) = \sum_{i=0}^3 a_i \phi_i^3(t_1; \mu)$$

$$r_1(t_1, \mu) = a_0 \phi_0^3(t_1; \mu) + a_1 \phi_1^3(t_1; \mu) + a_2 \phi_2^3(t_1; \mu) + a_3 \phi_3^3(t_1; \mu)$$

ve

$$r_2(t_2, \mu) = \sum_{i=0}^3 b_i \phi_i^3(t_2; \mu)$$

$$r_2(t_2, \mu) = b_0 \phi_0^3(t_2; \mu) + b_1 \phi_1^3(t_2; \mu) + b_2 \phi_2^3(t_2; \mu) + b_3 \phi_3^3(t_2; \mu)$$

eşitliklerini yazabiliriz.  $r_1(t_1, \mu)$  eğrisinin sırasıyla  $t_1 = 0$  ve  $t_1 = 1$  noktalarındaki değerleri

$$r_1(0, \mu) = a_0$$

$$r_1(1, \mu) = a_3$$

ve benzer şekilde  $r_2(t_2, \mu)$  eğrisinin sırasıyla  $t_2 = 0$  ve  $t_2 = 1$  noktalarındaki değerleri

$$r_2(0, \mu) = b_0$$

$$r_2(1, \mu) = b_3$$

şeklinde yazılır. Bu iki eğrinin birleşme noktasındaki  $C^0$  süreklilik için birinci eğrinin bitiş noktasındaki değeri ile ikinci eğrinin başlangıç noktasındaki değeri birbirine eşit olmalıdır. Buradan aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Sonuç 3.3.1.**  $r_1(t_1, \mu)$  ve  $r_2(t_2, \mu)$  iki kübik Beta-Bézier eğrisi olsun. Eğer

$$a_3 = b_0$$

eşitliği sağlanıyorsa bu iki eğri birleşme noktalarında  $C^0$  sürekliliğe sahiptir.

Öte yandan bu iki kübik Beta-Bézier eğrisinin birleşme noktalarında  $C^1$  sürekliliğe sahip olması için iki eğrinin birleşme noktalarındaki teğetlerinin aynı doğrultuda olması gerekir. Yani,

$$\dot{r}_1(1, \mu) = \dot{r}_2(0, \mu)$$

eşitliği sağlanıyor ise bu iki eğri  $C^1$  sürekliliğe sahiptir denir.

**Teorem 3.3.1.**  $r_1(t_1, \mu)$  ve  $r_2(t_2, \mu)$  iki kübik Beta-Bézier eğrisi olsun. Bu iki eğrinin birleşme noktalarında  $C^1$  sürekliliğe sahip olması için,

$$b_1 = a_0 \left( \frac{-2}{3\mu^2 + 3\mu} \right) + a_1 \left( \frac{-3\mu}{3\mu^2 + 3\mu} \right) - a_2 + b_0 \left( \frac{6\mu^2 + 12\mu + 4}{3\mu^2 + 3\mu} \right) \\ + b_2 \left( \frac{-3\mu}{3\mu^2 + 3\mu} \right) + b_3 \left( \frac{-2}{3\mu^2 + 3\mu} \right)$$

eşitliği geçerli olmalıdır.

**İspat.**  $r_1(t_1, \mu)$  eğrisinin  $t_1$  parametresine göre türevi alınıp, (3.2.2)-(3.2.5) eşitliklerini kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\dot{r}_1(t_1, \mu) &= a_0 (\phi_0^3(t_1; \mu))' + a_1 (\phi_1^3(t_1; \mu))' + a_2 (\phi_2^3(t_1; \mu))' + a_3 (\phi_3^3(t_1; \mu))' \\
&= a_0 \left( \frac{(-3\mu^2)t_1^2 + (6\mu^2 + 6\mu)t_1 + (-3\mu^2 - 6\mu - 2)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\
&\quad + a_1 \left( \frac{(9\mu^2)t_1^2 + (-12\mu^2 - 6\mu)t_1 + (3\mu^2 + 3\mu)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\
&\quad + a_2 \left( \frac{(-9\mu^2)t_1^2 + (6\mu^2 - 6\mu)t_1 + 3\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\
&\quad + a_3 \left( \frac{(3\mu^2)t_1^2 + (6\mu)t_1 + 2}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right)
\end{aligned}$$

bulunur.  $\dot{r}_1(t_1, \mu)$  eğrisinin  $t_1 = 1$  noktasındaki değeri için

$$\begin{aligned}
\dot{r}_1(1, \mu) &= a_0 \left( \frac{-2}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) + a_1 \left( \frac{-3\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\
&\quad + a_2 \left( \frac{-3\mu^2 - 3\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) + a_3 \left( \frac{3\mu^2 + 6\mu + 2}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Benzer şekilde,  $r_2(t_2, \mu)$  eğrisinin  $t_2$  parametresine göre türevi alınıp, (3.2.2)-(3.2.5) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\dot{r}_2(t_2, \mu) &= b_0 (\phi_0^3(t_2; \mu))' + b_1 (\phi_1^3(t_2; \mu))' + b_2 (\phi_2^3(t_2; \mu))' + b_3 (\phi_3^3(t_2; \mu))' \\
&= b_0 \left( \frac{(-3\mu^2)t_2^2 + (6\mu^2 + 6\mu)t_2 + (-3\mu^2 - 6\mu - 2)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\
&\quad + b_1 \left( \frac{(9\mu^2)t_2^2 + (-12\mu^2 - 6\mu)t_2 + (3\mu^2 + 3\mu)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\
&\quad + b_2 \left( \frac{(-9\mu^2)t_2^2 + (6\mu^2 - 6\mu)t_2 + 3\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\
&\quad + b_3 \left( \frac{(3\mu^2)t_2^2 + (6\mu)t_2 + 2}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right)
\end{aligned}$$

olur.  $\dot{r}_2(t_2, \mu)$  eğrisinin  $t_2 = 0$  noktasındaki değeri

$$\begin{aligned}
\dot{r}_2(0, \mu) &= b_0 \left( \frac{-3\mu^2 - 6\mu - 2}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) + b_1 \left( \frac{3\mu^2 + 3\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\
&\quad + b_2 \left( \frac{3\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) + b_3 \left( \frac{2}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right)
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Bu iki eğrinin birleşme noktalarında  $C^1$  sürekli olması için

$$\dot{r}_1(1, \mu) = \dot{r}_2(0, \mu)$$

eşitliğinin geçerli olması gerekir. Buradan

$$\begin{aligned}
b_1 &= a_0 \left( \frac{-2}{3\mu^2 + 3\mu} \right) + a_1 \left( \frac{-3\mu}{3\mu^2 + 3\mu} \right) - a_2 + b_0 \left( \frac{6\mu^2 + 12\mu + 4}{3\mu^2 + 3\mu} \right) \\
&\quad + b_2 \left( \frac{-3\mu}{3\mu^2 + 3\mu} \right) + b_3 \left( \frac{-2}{3\mu^2 + 3\mu} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir ki bu ifade teoremin ispatını tamamlar.  $\square$

Ayrıca bu iki kübik Beta-Bézier eğrisinin birleşme noktalarında  $C^2$  sürekliliğe sahip olması için iki eğrinin birleşme noktalarındaki eğriliklerinin aynı olması gerekir. Yani,

$$\frac{\dot{r}_1(1, \mu) \times \ddot{r}_1(1, \mu)}{\|\dot{r}_1(1, \mu)\|^3} = \frac{\dot{r}_2(0, \mu) \times \ddot{r}_2(0, \mu)}{\|\dot{r}_2(0, \mu)\|^3}$$

veya

$$\ddot{r}_1(1, \mu) = \left(\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right)^2 \ddot{r}_2(0, \mu) + \mu \dot{r}_2(0, \mu)$$

eşitliği geçerli olmalıdır. Özel olarak,  $\frac{\alpha_2}{\alpha_1} = 1$  ve  $\mu = 1$  seçilirse

$$\ddot{r}_1(1, \mu) = \ddot{r}_2(0, \mu) + \dot{r}_2(0, \mu)$$

eşitliği yazılır.

**Teorem 3.3.2.**  $r_1(t_1, \mu)$  ve  $r_2(t_2, \mu)$  iki kübik Beta-Bézier eğrisi olsun. Bu iki eğrinin birleşme noktalarında  $C^2$  sürekliliğe sahip olması için gerek ve yeter şart

$$b_2 = (2)a_0 + (2\mu - 2)a_1 + (-4\mu - 2)a_2 + \left(\frac{3\mu^2 + 6\mu + 2}{3\mu}\right)b_0 \\ + (3\mu + 1)b_1 + \left(\frac{-6\mu - 2}{3\mu}\right)b_3$$

olmasıdır.

**İspat.**  $r_1(t_1, \mu)$  eğrisinin  $t_1$  parametresine göre ikinci türevi

$$\ddot{r}_1(t_1, \mu) = a_0 (\phi_0^3(t_1; \mu))'' + a_1 (\phi_1^3(t_1; \mu))'' + a_2 (\phi_2^3(t_1; \mu))'' + a_3 (\phi_3^3(t_1; \mu))''$$

olur. Burada(3.2.2)-(3.2.5) eşitliklerini kullanılarak

$$\begin{aligned}\ddot{r}_1(t_1, \mu) &= a_0 \left( \frac{(-6\mu^2)t_1 + (6\mu^2 + 6\mu)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) + a_1 \left( \frac{(18\mu^2)t_1 + (-12\mu^2 - 6\mu)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\ &+ a_2 \left( \frac{(-18\mu^2)t_1 + (6\mu^2 - 6\mu)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) + a_3 \left( \frac{(6\mu^2)t_1 + 6\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right)\end{aligned}$$

elde edilir.  $\ddot{r}_1(t_1, \mu)$  eğrisinin  $t_1 = 1$  noktasındaki değeri

$$\begin{aligned}\ddot{r}_1(1, \mu) &= a_0 \left( \frac{6\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) + a_1 \left( \frac{6\mu^2 - 6\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\ &+ a_2 \left( \frac{-12\mu^2 - 6\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) + a_3 \left( \frac{6\mu^2 + 6\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right)\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde,  $r_2(t_2, \mu)$  eğrisinin  $t_2$  parametresine göre ikinci türevi

$$\ddot{r}_2(t_2, \mu) = b_0 (\phi_0^3(t_2; \mu))'' + b_1 (\phi_1^3(t_2; \mu))'' + b_2 (\phi_2^3(t_2; \mu))'' + b_3 (\phi_3^3(t_2; \mu))''$$

olur. Burada(3.2.2)-(3.2.5) kullanılarak

$$\begin{aligned}\ddot{r}_2(t_2, \mu) &= b_0 \left( \frac{(-6\mu^2)t_2 + (6\mu^2 + 6\mu)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) + b_1 \left( \frac{(18\mu^2)t_2 + (-12\mu^2 - 6\mu)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\ &+ b_2 \left( \frac{(-18\mu^2)t_2 + (6\mu^2 - 6\mu)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) + b_3 \left( \frac{(6\mu^2)t_2 + 6\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right)\end{aligned}$$

bulunur.  $\ddot{r}_2(t_2, \mu)$  eğrisinin  $t_2 = 0$  noktasındaki değeri

$$\begin{aligned}\ddot{r}_2(0, \mu) &= b_0 \left( \frac{6\mu^2 + 6\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) + b_1 \left( \frac{-12\mu^2 - 6\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\ &+ b_2 \left( \frac{6\mu^2 - 6\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) + b_3 \left( \frac{6\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right)\end{aligned}$$

olur. Bu ise  $\dot{r}_1(1, \mu) = \dot{r}_2(0, \mu) + \dot{r}_2(0, \mu)$  sağlandığını gösterir.

Son olarak  $b_3$  kontrol noktası ise keyfi olarak seçilerek iki kübik Beta-Bézier eğrisini birleştirmek için kontrol noktalarının seçimi belirlenmiş olur.  $\square$

### 3.4 Kübik Beta-Bézier Eğrilerinin Pisagor-Hodograf Eğrileri

Bu altbölümde kübik Beta- Bézier eğrilerinin Pisagor-Hodograf eğrisi olma şartı aranacaktır.

Aşağıdaki teorem verilen üçüncü dereceden bir Beta- Bézier eğrisinin Pisagor-Hodograf olma şartını kontrol noktaları türünden vermektedir.

**Teorem 3.4.1.** *Eğer kontrol noktaları arasında*

$$\begin{aligned} b_1 &= b_0 + \frac{x_1}{x_2}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0) \\ b_2 &= b_1 + \frac{y_1}{y_2}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0) \\ b_3 &= b_2 + \frac{z_1}{z_2}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1) \end{aligned}$$

*eşitlikleri varsa kübik Beta-Bézier eğrisi Pisagor-Hodograf eğrisi olur. Burada*

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{(\mu+1)(1-t)}{\mu(\mu(1-t)+1)}, y_1 = \frac{\mu+1}{\mu}, z_1 = \frac{(\mu t+t)}{(\mu t+1)}, x_2 = \frac{3\mu^2 t^2 - (6\mu^2 + 6\mu)t + (3\mu^2 + 6\mu + 2)}{(\mu+2)(\mu^2 t^2 + t(-2\mu^2 - \mu) + (\mu^2 + \mu))}, \\ y_2 &= \frac{-6\mu^2 t^2 + 6\mu^2 t + 3\mu + 2}{(\mu+2)((-\mu)t^2 + \mu t)} \text{ ve } z_2 = \frac{3\mu^2 t^2 + 6\mu^2 t + 2}{(\mu+2)(\mu t^2 + t)} \text{ dir. Ayrıca } b_0 \text{ kontrol noktası keyfi} \end{aligned}$$

*olarak seçilebilir.*

**İspat.**  $w(t) = 1$  ve Bernstein polinomlarının lineerlik özelliğinden

$$u(t) = u_0 b_0^1(t) + u_1 b_1^1(t)$$

$$v(t) = v_0 b_0^1(t) + v_1 b_1^1(t)$$



ifadelerini yazabiliriz ki burada  $b_0^1(t)$  ve  $b_1^1(t)$  Bézier baz fonksiyonları olup  $u_0v_1 - u_1v_0 \neq 0$  ve  $(u_1 - u_0)^2 + (v_1 - v_0)^2 \neq 0$  eşitlikleri sağlanmış olup  $u(t)$  ve  $v(t)$  aralarında asal olur. Bu  $u(t)$  ve  $v(t)$  değerlerini (2.2.10) de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} x'(t) &= (u_0^2 - v_0^2)b_0^2(t) + (u_0u_1 - v_0v_1)b_1^2(t) + (u_1^2 - v_1^2)b_2^2(t) \\ y'(t) &= 2u_0v_0b_0^2(t) + (u_0v_1 + u_1v_0)b_1^2(t) + (2u_1v_1)b_2^2(t) \end{aligned} \quad (3.4.1)$$

hodograf elde edilir ki burada  $b_0^2(t), b_1^2(t)$  ve  $b_2^2(t)$  Bézier baz fonksiyonlarıdır. Beta-Bézier baz fonksiyonlarını kullanarak bu ifadeyi

$$\begin{aligned} x'(t) &= x_1(u_0^2 - v_0^2)\phi_0^2(t) + y_1(u_0u_1 - v_0v_1)\phi_1^2(t) + z_1(u_1^2 - v_1^2)\phi_2^2(t) \\ y'(t) &= x_12u_0v_0\phi_0^2(t) + y_1(u_0v_1 + u_1v_0)\phi_1^2(t) + z_1(2u_1v_1)\phi_2^2(t) \end{aligned} \quad (3.4.2)$$

şeklinde yazılabilir. Öte yandan Beta-Bézier eğrisinin türevi

$$\begin{aligned} r'(t) &= b_0\phi_0^3(t; \mu)' + b_1\phi_1^3(t; \mu)' + b_2\phi_2^3(t; \mu)' + b_3\phi_3^3(t; \mu)' \\ &= b_0 \left( \frac{(-3\mu^2)t^2 + (6\mu^2 + 6\mu)t + (-3\mu^2 - 6\mu - 2)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\ &\quad + b_1 \left( \frac{(9\mu^2)t^2 + (-12\mu^2 - 6\mu)t + (3\mu^2 + 3\mu)}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\ &\quad + b_2 \left( \frac{(-9\mu^2)t^2 + (6\mu^2 - 6\mu)t + 3\mu}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \\ &\quad + b_3 \left( \frac{(3\mu^2)t^2 + (6\mu)t + 2}{(\mu + 1)(\mu + 2)} \right) \end{aligned}$$

olup bu eşitliklerin düzenlenmesi ile

$$\begin{aligned}
r'(t) = & b_0 \left( \frac{(-3\mu^2)t^2 + (6\mu^2 + 6\mu)t + (-3\mu^2 - 6\mu - 2)}{(\mu + 2)(\mu^2 t^2 + (-2\mu^2 - \mu)t + (\mu^2 + \mu))} \phi_0^2(t; \mu) \right) \\
& + b_1 \left( \frac{(3\mu^2)t^2 - (6\mu^2 + 6\mu)t - (-3\mu^2 - 6\mu - 2)}{(\mu + 2)(\mu^2 t^2 + (-2\mu^2 - \mu)t + (\mu^2 + \mu))} \phi_0^2(t; \mu) \right. \\
& + \frac{(6\mu^2)t^2 - 6\mu^2 t - 3\mu - 2}{(\mu + 2)((-\mu)t^2 + \mu t)} \phi_1^2(t; \mu) \\
& + b_2 \left( \frac{(-6\mu^2)t^2 + 6\mu^2 t + 3\mu + 2}{(\mu + 2)((-\mu)t^2 + \mu t)} \phi_1^2(t; \mu) + \frac{(-3\mu^2)t^2 - (6\mu)t - 2}{(\mu + 2)(\mu t^2 + t)} \phi_2^2(t; \mu) \right) \\
& + b_3 \left( \frac{3\mu^2 t^2 + 6\mu t + 2}{(\mu + 2)(\mu t^2 + t)} \phi_2^2(t; \mu) \right)
\end{aligned} \tag{3.4.3}$$

elde edilir. Böylece bu ifadeyi biraz daha düzenlersek teoremdede tanımladığımız  $x_1, x_2, y_1, y_2, z_1$  ve  $z_2$  türünden

$$r'(t) = x_2(b_1 - b_0)\phi_0^2(t; \mu) + y_2(b_2 - b_1)\phi_1^2(t; \mu) + z_2(b_3 - b_2)\phi_2^2(t; \mu) \tag{3.4.4}$$

şeklinde yazabiliriz. (3.4.2) ve (3.4.4) eşitliklerinden

$$x_2(b_1 - b_0) = x_1(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0) \implies b_1 = b_0 + \frac{x_1}{x_2}(u_0^2 - v_0^2, 2u_0v_0)$$

$$y_2(b_2 - b_1) = y_1(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0) \implies b_2 = b_1 + \frac{y_1}{y_2}(u_0u_1 - v_0v_1, u_0v_1 + u_1v_0)$$

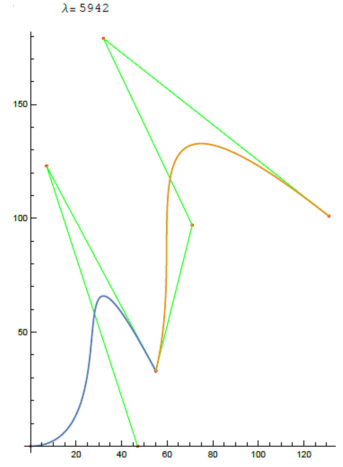
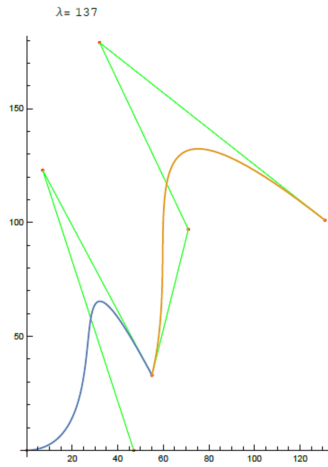
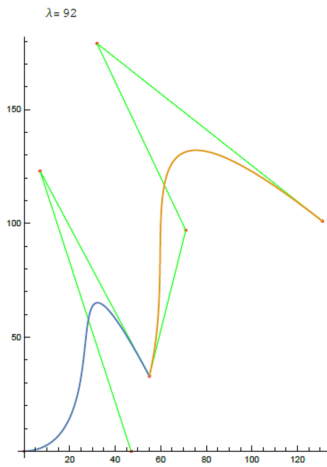
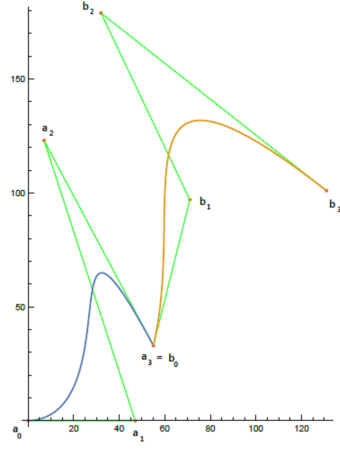
$$z_2(b_3 - b_2) = z_1(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1) \implies b_3 = b_2 + \frac{z_1}{z_2}(u_1^2 - v_1^2, 2u_1v_1)$$

ifadelerini elde ederiz. Eğer  $x_2 = 0$  ise bu durumda çözüm kümesi  $\{t \in \mathbb{R} : t > 1 \text{ and } -2 < \mu < 0\}$  olup bu ifade  $\mu$  ve  $t$  değerleri için mümkün değildir. Benzer şekilde  $y_2$  ve  $z_2$  değerlerinin de sıfırdan farklı olduğu gösterilebilir.

□

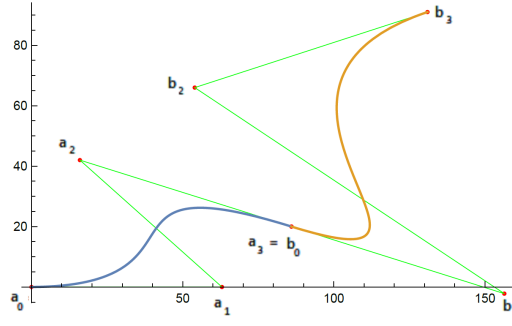
**Örnek 3.4.1.** *Bu bölümde keyfi  $\mu$  şekil parametreleri ve kontrol noktaları için eğrileri birleştirmek için gerekli olan  $C^0, C^1$  ve  $C^2$  süreklilik şartlarının sağlandığı bazı örnekleri vereceğiz.*

$\lambda = 69$   
 $r_1$   
 $r_2$   
 $a_0 = (0,0)$   
 $a_1 = (47,0)$   
 $a_2 = (7,123)$   
 $a_3 = b_0 = (55,33)$   
 $b_1 = (71,32)$   
 $b_2 = (97,179)$   
 $b_3 = (131,101)$

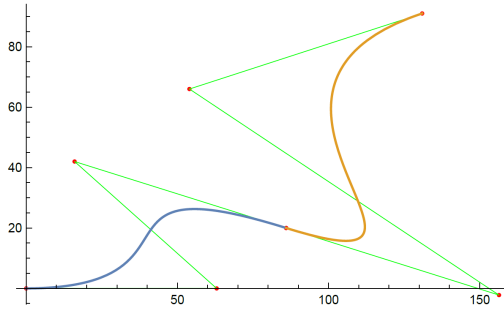


Şekil 3.2:  $C^0$  süreklilik

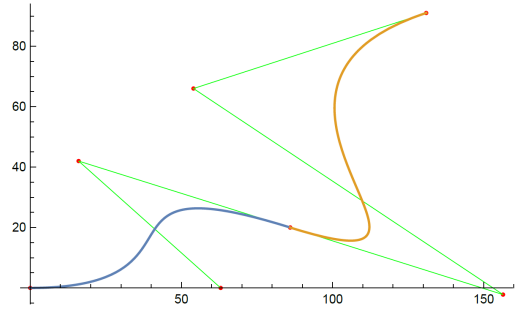
$\lambda = 129$   
 $r_1$   
 $r_2$   
 $a_0 = (0,0)$   
 $a_1 = (63,0)$   
 $a_2 = (16,42)$   
 $a_3 = b_0 = (86,20)$   
 $b_1 = (7869727/50310, -18464/8385)$   
 $b_2 = (54,66)$   
 $b_3 = (131,91)$



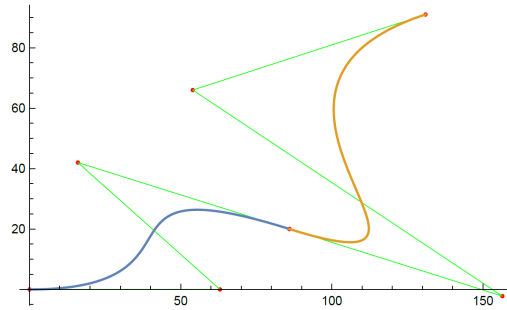
$\lambda = 212$



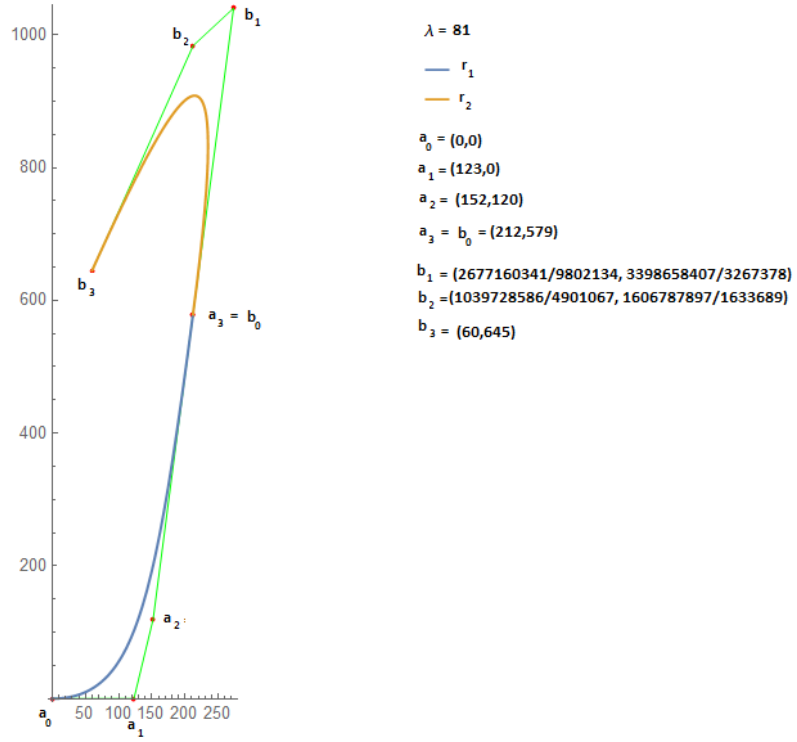
$\lambda = 1007$



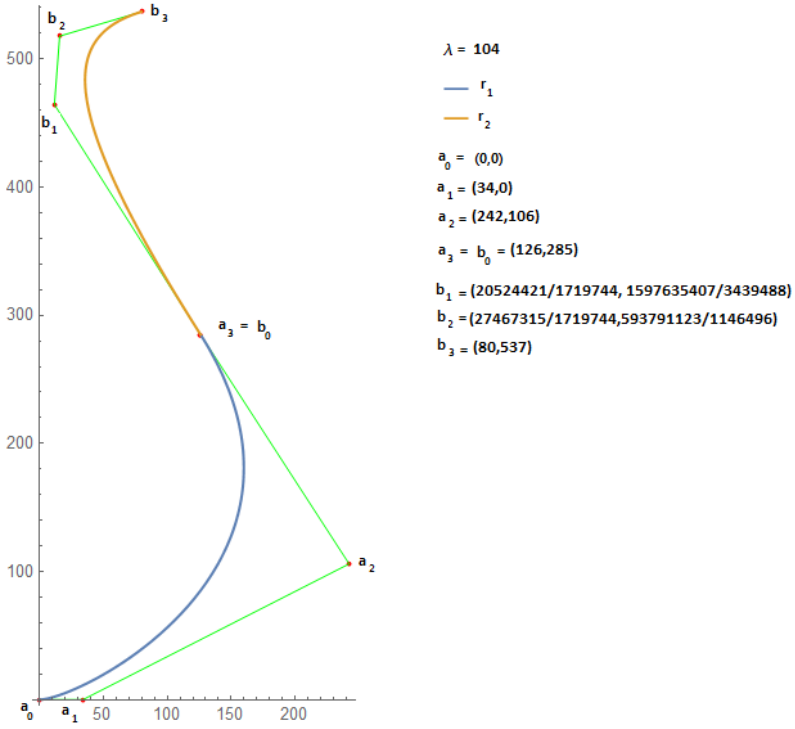
$\lambda = 17483$



Şekil 3.3:  $C^1$  süreklilik



Şekil 3.4:  $C^2$  süreklilik



Şekil 3.5:  $C^2$  süreklilik

## 4. KÜBİK TRİGONOMETRİK BÉZIER-BENZERİ EĞRİLER

Bu bölüm altı altbölümden oluşmaktadır. Birinci altbölümde kübik trigonometrik Bézier-Benzeri adı verilen yeni Bézier-Benzeri baz fonksiyonları tanımlanmakta ve özellikleri incelenmektedir. İkinci altbölümde yeni tanımlanan Bézier-Benzeri baz fonksiyonları yardımı ile kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğri adı verilen yeni Bézier-Benzeri eğri tanımlanmakta ve özellikleri incelenmektedir. Üçüncü altbölümde kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğri ile üçüncü dereceden Bézier eğrisinin davranışı karşılaştırılmaktadır. Dördüncü altbölümde kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrisinin kontrol çokgenine yaklaşımı incelenmektedir. Beşinci altbölümde yeni tanımlanan Bézier-Benzeri eğriler için süreklilik şartları araştırılacaktır. Altıncı bölümde komşu olmayan iki kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğri arasında geçiş eğrisi oluşturulmaktadır.

### 4.1 Kübik Trigonometrik Bézier-Benzeri Baz Fonksiyonları ve Özellikleri

Bu altbölümde yeni baz fonksiyonları ve bu baz fonksiyonları yardımı ile Bézier-Benzeri eğriler tanımlanacaktır. Bu tanımlayacağımız eğri , [16] tarafından tanımlanmış eğrinin daha genel bir halidir. Bu eğriler Bézier eğrilerinin sağladığı özelliklerinin bir çoğunu sağladığından bu eğrileri Bézier-Benzeri eğriler diye isimlendireceğiz.

**Tanım 4.1.1.**  $\lambda \in [0, 1]$  reel değerli bir parametre ve  $t \in [0, 1]$  için,

$$\begin{aligned}
b_0(t) &= \frac{1}{4}(1 - \lambda \sin \frac{\pi}{2}t)(1 - \sin \frac{\pi}{2}t)^2 \\
b_1(t) &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1 - \lambda \cos \frac{\pi}{2}t)(1 - \cos \frac{\pi}{2}t)^2 \right\} \\
b_2(t) &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1 - \lambda \sin \frac{\pi}{2}t)(1 - \sin \frac{\pi}{2}t)^2 \right\} \\
b_3(t) &= \frac{1}{4}(1 - \lambda \cos \frac{\pi}{2}t)(1 - \cos \frac{\pi}{2}t)^2
\end{aligned} \tag{4.1.1}$$

*şeklinde tanımlı fonksiyonlara kübik trigonometrik Bézier-Benzeri baz fonksiyonları denir.*

Aşağıdaki teorem yeni tanımlanan baz fonksiyonlarının Bézier eğrilerinin baz fonksiyonlarının özelliklerini sağladığını gösterir.

**Teorem 4.1.1.** *Kübik trigonometrik Bézier-Benzeri baz fonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar :*

1. *Non-negatiftir.  $i = 0, 1, 2, 3$  için  $b_i(t) \geq 0$  dir.*
2. *Birimin parçalanması.  $\sum_{i=0}^3 b_i(t) = 1$  dir.*
3. *Simetriklik.  $i = 0, 1, 2, 3$  için  $b_i(t; \lambda) = b_{3-i}(1-t; \lambda)$  dir.*
4. *Monotonluk.  $\lambda$  şekil parametresi artarken  $b_0(t)$  ve  $b_3(t)$  azalırken,  $\lambda$  şekil parametresi azalırken  $b_1(t)$  ve  $b_2(t)$  artar.*

Şimdi yukarıda sıralanan ifadeleri ispatlayalım.

**İspat.** Verilen teoremi sırasıyla ispatlayacak olursak,

1.  $t \in [0, 1]$  ve  $\lambda \in [0, 1]$  için  $1 - \sin \frac{\pi}{2}t \geq 0, 1 - \cos \frac{\pi}{2}t \geq 0,$   
 $0 \leq 1 - \lambda \sin \frac{\pi}{2}t \leq 1, 0 \leq 1 - \lambda \cos \frac{\pi}{2}t \leq 1, 0 \leq \frac{1}{4}(1 - \lambda \sin \frac{\pi}{2}t) \leq 1$  ve  
 $0 \leq \frac{1}{4}(1 - \lambda \cos \frac{\pi}{2}t) \leq 1$  olduğundan  $i = 0, 1, 2, 3$  için  $b_i(t) \geq 0$  dir.

2.  $\sum_{i=0}^3 b_i(t) = \frac{1}{4}(1-\lambda \sin \frac{\pi}{2}t)(1-\sin \frac{\pi}{2}t)^2 + \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1-\lambda \cos \frac{\pi}{2}t)(1-\cos \frac{\pi}{2}t)^2 \right\} + \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1-\lambda \sin \frac{\pi}{2}t)(1-\sin \frac{\pi}{2}t)^2 \right\} + \frac{1}{4}(1-\lambda \cos \frac{\pi}{2}t)(1-\cos \frac{\pi}{2}t)^2 = 1$  eşitliği birimin parçalanması özelliğinin ispatını tamamlamış olur.

3.  $i = 0, 1, 2, 3$  için  $b_i(t; \lambda) = b_{3-i}(1-t; \lambda)$  olduğunu gösterelim.

$$b_0(t; \lambda) = b_3(1-t; \lambda)$$

olur ve bu ifadeyi ispatlarsak

$$b_0(t; \lambda) = \frac{1}{4}(1-\lambda \sin \frac{\pi}{2}t)(1-\sin \frac{\pi}{2}t)^2 \quad (i)$$

dir. Öte yandan,

$$\begin{aligned} b_3(1-t; \lambda) &= \frac{1}{4}(1-\lambda \cos \frac{\pi}{2}(1-t))(1-\cos \frac{\pi}{2}(1-t))^2 \\ &= \frac{1}{4}(1-\lambda \sin \frac{\pi}{2}t)(1-\sin \frac{\pi}{2}t)^2 \quad (ii) \end{aligned}$$

olur. (i) ve (ii) den  $b_0(t; \lambda) = b_3(1-t; \lambda)$  eşitliği sağlanmış olur.

Benzer şekilde,

$$b_1(t; \lambda) = b_2(1-t; \lambda)$$

eşitliğini gösterirsek,

$$b_1(t; \lambda) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1-\lambda \cos \frac{\pi}{2}t)(1-\cos \frac{\pi}{2}t)^2 \right\} \quad (iii)$$

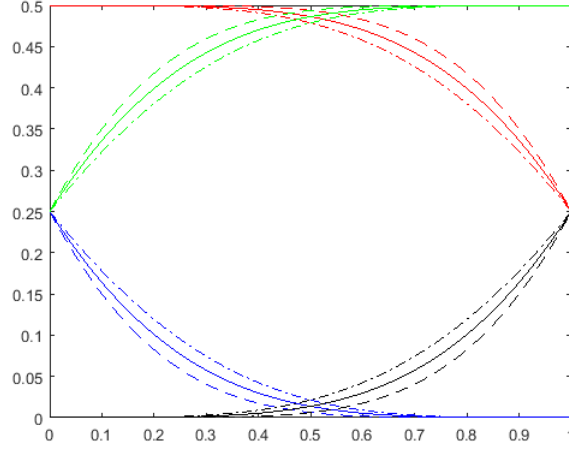
ve

$$\begin{aligned} b_2(1-t; \lambda) &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1-\lambda \sin \frac{\pi}{2}(1-t))(1-\sin \frac{\pi}{2}(1-t))^2 \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1-\lambda \cos \frac{\pi}{2}t)(1-\cos \frac{\pi}{2}t)^2 \right\} \quad (iv) \end{aligned}$$

olur. (iii) ve (iv) den  $b_1(t; \lambda) = b_2(1-t; \lambda)$  olur ve bu da simetri özelliğinin sağlandığını gösterir.

4. Bu şartı Şekil 4.1 de açıkça görebiliriz. Burada şekilde de görüldüğü gibi kübik trigonometrik Bézier-Benzi baz fonksiyonları olan  $b_0(t)$  mavi,  $b_1(t)$





Şekil 4.1: Farklı şekil parametresi değerleri için kübik trigonometrik Bézier-Benzeri baz fonksiyonları

kırmızı,  $b_2(t)$  yeşil ve  $b_3(t)$  siyah çizgiler  $\lambda = 0$  için noktalı kesikli doğrular,  $\lambda = 0.5$  için koyu çizgiler ve  $\lambda = 1$  için kesikli çizgiler ile gösterilmiştir.

□

## 4.2 Kübik Trigonometrik Bézier-Benzeri Eğrileri ve Özellikleri

Aşağıda (4.1.1) de verilen baz fonksiyonları kullanılarak yeni bir eğri tanımlanmaktadır.

**Tanım 4.2.1.**  $\mathbb{R}^2$  veya  $\mathbb{R}^3$  te  $i = 0, 1, 2, 3$  için  $P_i$  kontrol noktaları verilsin.  $t \in [0, 1]$  ve  $\lambda \in [0, 1]$  için,

$$r(t) = \sum_{i=0}^3 P_i b_i(t) \quad (4.2.1)$$

şeklinde tanımlı eğriye  $\lambda$  şekil parametresi ile tanımlı kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrisi denir.

**Teorem 4.2.1.** Kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrisi aşağıdaki özellikleri sağlar :

1. Uç nokta özellikleri.

$$\begin{aligned}
r(0) &= \frac{1}{4}P_0 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2 & (4.2.2) \\
r(1) &= \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{4}P_3 \\
r'(0) &= \left(\frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right)(P_2 - P_0) + \frac{1}{2}(P_2 + P_1) \\
r'(1) &= \left(\frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4}\right)(P_3 - P_1) + \frac{1}{2}(P_2 + P_1) \\
r''(0) &= \left(\frac{\lambda\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right)(P_0 - P_2) + \frac{1}{2}(P_2 + P_1) \\
r''(1) &= \left(\frac{\lambda\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}\right)(P_3 - P_1) + \frac{1}{2}(P_2 + P_1)
\end{aligned}$$

şeklinde uç noktalardaki  $t = 0$  ve  $t = 1$  noktalarındaki değerleri ve bu noktalardaki çeşitli mertebeden türev değerleri belirlenir.

2. Simetri özelliği.  $i = 0, 1, 2, 3$  için  $P_i$  ler kontrol noktaları,  $t \in [0, 1]$  ve  $\lambda \in [0, 1]$  için

$$r(t; \lambda; P_0, P_1, P_2, P_3) = r(1 - t; \lambda; P_3, P_2, P_1, P_0) \quad (4.2.3)$$

eşitliği sağlanır.

3. Geometrik invariant özelliği. Kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrisi koordinat sistemlerinin seçiminden bağımsızdır. Yani  $q$ ,  $\mathbb{R}^2$  veya  $\mathbb{R}^3$  te keyfi bir vektör ve  $T$ ,  $2 \times 2$  veya  $3 \times 3$  tipinde keyfi bir matris olmak üzere,

$$r(t; \lambda; P_0 + q, P_1 + q, P_2 + q, P_3 + q) = r(t; \lambda; P_0, P_1, P_2, P_3) + q, \quad (4.2.4)$$

$$r(t; \lambda; P_0 * T, P_1 * T, P_2 * T, P_3 * T) = r(t; \lambda; P_0, P_1, P_2, P_3) * T$$

eşitlikleri geçerlidir.

4. *Konveks kafes özelliği. Kúbik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrisinin tamamı*

*$P_0, P_1, P_2$  ve  $P_3$  kontrol noktalarının gerdiği kontrol çokgeninin içinde yatar.*

**İspat.** 1.

$$b_0(t) = \frac{1}{4}(1 - \lambda \sin \frac{\pi}{2}t)(1 - \sin \frac{\pi}{2}t)^2$$

$$b_0(0) = \frac{1}{4}$$

$$b_1(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1 - \lambda \cos \frac{\pi}{2}t)(1 - \cos \frac{\pi}{2}t)^2 \right\}$$

$$b_1(0) = \frac{1}{2}$$

$$b_2(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1 - \lambda \sin \frac{\pi}{2}t)(1 - \sin \frac{\pi}{2}t)^2 \right\}$$

$$b_2(0) = \frac{1}{4}$$

olur ve  $r(0) = \frac{1}{4}P_0 + \frac{1}{2}P_1 + \frac{1}{4}P_2$  eđitliđi sağlanır.

$$b_1(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1 - \lambda \cos \frac{\pi}{2}t)(1 - \cos \frac{\pi}{2}t)^2 \right\}$$

$$b_1(1) = \frac{1}{4}$$

$$b_2(t) = \frac{1}{2} \left\{ 1 - \frac{1}{2}(1 - \lambda \sin \frac{\pi}{2}t)(1 - \sin \frac{\pi}{2}t)^2 \right\}$$

$$b_2(1) = \frac{1}{2}$$

$$b_3(t) = \frac{1}{4}(1 - \lambda \cos \frac{\pi}{2}t)(1 - \cos \frac{\pi}{2}t)^2$$

$$b_3(1) = \frac{1}{4}$$

olur ve  $r(1) = \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{4}P_3$  eğitliği sağlanır. Benzer mantıkla,

$$b'_0(0) = \frac{-\lambda\pi}{8} - \frac{\pi}{4}$$

$$b'_1(0) = \frac{1}{2}$$

$$b'_2(0) = \frac{1}{2} + \frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4}$$

eşitliklerinden  $r'(0) = (\frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4})(P_2 - P_0) + \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$  ve

$$b'_1(1) = \frac{1}{2} - \frac{\lambda\pi}{8} - \frac{\pi}{4}$$

$$b'_2(1) = \frac{1}{2}$$

$$b'_3(1) = \frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4}$$

eşitliklerinden  $r'(1) = (\frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4})(P_3 - P_1) + \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$  ifadeleri sağlanmış olur. Son olarak,

$$b''_0(0) = \frac{\lambda\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{4}$$

$$b''_1(0) = \frac{1}{2}$$

$$b''_2(0) = \frac{1}{2} - \frac{\lambda\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{8}$$

eşitliklerinden  $r''(0) = (\frac{\lambda\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8})(P_0 - P_2) + \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$  ve

$$b''_1(1) = \frac{1}{2} - \frac{\lambda\pi^2}{4} - \frac{\pi^2}{8}$$

$$b''_2(1) = \frac{1}{2}$$

$$b''_3(1) = \frac{\lambda\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8}$$

eşitliklerinden  $r''(1) = (\frac{\lambda\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8})(P_3 - P_1) + \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$  ifadeleri sağlanmış olur ve ispat tamamlanır.

2. Kübik Bézier-Benzeri baz fonksiyonlarının simetri özelliğinden,

$$\begin{aligned} r(t; \lambda; P_0, P_1, P_2, P_3) &= \sum_{i=0}^3 P_i b_i(t) \\ &= \sum_{i=0}^3 P_{3-i} b_i(1-t) \\ &= r(1-t; \lambda; P_3, P_2, P_1, P_0) \end{aligned}$$

olur.

3.  $q, \mathbb{R}^2$  veya  $\mathbb{R}^3$  te keyfi bir vektör ve  $T, \mathbb{R}^2$  veya  $\mathbb{R}^3$  te  $d = 2, 3$  için  $d \times d$  tipinde matrisi olsun.

$$\begin{aligned} r(t; \lambda; P_0 + q, P_1 + q, P_2 + q, P_3 + q) &= \sum_{i=0}^3 (P_i + q) b_i(t) \\ &= \sum_{i=0}^3 P_i b_i(t) + q \sum_{i=0}^3 b_i(t) \end{aligned}$$

olarak yazılır. Baz fonksiyonlarının birimin parçalanması özelliğinden

$$\sum_{i=0}^3 b_i(t) = 1$$

olur ve bu ifadeyi yerine yazarsak

$$r(t; \lambda; P_0 + q, P_1 + q, P_2 + q, P_3 + q) = r(t; \lambda; P_0, P_1, P_2, P_3) + q$$

eşitliği sağlanmış olur. Ve diğer eşitliğide benzer şekilde gösterebiliriz.

4. Bézier eğrileri, eğriyi oluşturan kontrol noktalarının oluşturduğu kontrol poligonunun içinde yattığından, kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğride kontrol noktalarının oluşturduğu kontrol poligonunun içinde yatar.

□

### 4.3 Kübik Trigonometrik Bézier-Benzeri Eğrisinin Şekil Kontrolü

Bu alt bölümde elde ettiğimiz kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrisinin şekil kontrolünde yani bu eğrinin kübik Bezier eğrisine göre kontrol çokgenine nasıl yaklaştığını ve  $\lambda$  parametresi ile bu yaklaşımın nasıl değiştiği gösterilecektir.

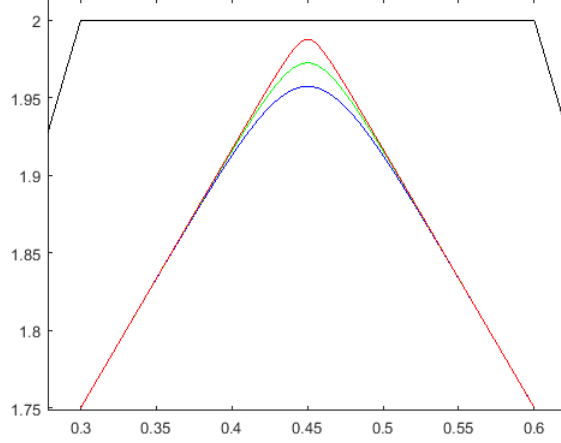
$t \in [0, 1]$  için (4.2.1) denklemini,

$$\begin{aligned}
r(t) &= P_0 c_0(t) (1 - \sin \frac{\pi}{2} t)^2 + P_1 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (1 - \lambda \cos \frac{\pi}{2} t) (1 - \cos \frac{\pi}{2} t)^2 \right] \\
&\quad + P_2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (1 - \lambda \sin \frac{\pi}{2} t) (1 - \sin \frac{\pi}{2} t)^2 \right] + P_3 c_3(t) (1 - \cos \frac{\pi}{2} t)^2 \\
r(t) &= P_0 c_0(t) (1 - \sin \frac{\pi}{2} t)^2 + P_1 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (1 - \lambda \cos \frac{\pi}{2} t) (1 - 2 \cos \frac{\pi}{2} t + \cos^2 \frac{\pi}{2} t) \right] \\
&\quad + P_2 \left[ \frac{1}{2} - \frac{1}{4} (1 - \lambda \sin \frac{\pi}{2} t) (1 - 2 \sin \frac{\pi}{2} t + \sin^2 \frac{\pi}{2} t) \right] + P_3 c_3(t) (1 - \cos \frac{\pi}{2} t)^2 \\
r(t) &= P_0 c_0(t) + (\sin^2 \frac{\pi}{2} t - 2 \sin \frac{\pi}{2} t) P_0 c_0(t) \\
&\quad + P_1 \left[ c_1(t) - \frac{1}{4} (1 - \lambda \cos \frac{\pi}{2} t) (\cos^2 \frac{\pi}{2} t - 2 \cos \frac{\pi}{2} t) \right] \\
&\quad + P_2 \left[ c_2(t) - \frac{1}{4} (1 - \lambda \sin \frac{\pi}{2} t) (\sin^2 \frac{\pi}{2} t - 2 \sin \frac{\pi}{2} t) \right] \\
&\quad + P_3 c_3(t) + (\cos^2 \frac{\pi}{2} t - 2 \cos \frac{\pi}{2} t) P_3 c_3(t)
\end{aligned}$$

ve bu ifade biraz daha düzenlenirse

$$\begin{aligned}
r(t) &= \sum_{i=0}^3 P_i c_i(t) + (\sin^2 \frac{\pi}{2} t - 2 \sin \frac{\pi}{2} t) P_0 c_0(t) \tag{4.3.1} \\
&\quad - \frac{1}{4} P_1 (1 - \lambda \cos \frac{\pi}{2} t) (\cos^2 \frac{\pi}{2} t - 2 \cos \frac{\pi}{2} t) \\
&\quad - \frac{1}{4} P_2 (1 - \lambda \sin \frac{\pi}{2} t) (\sin^2 \frac{\pi}{2} t - 2 \sin \frac{\pi}{2} t) \\
&\quad + (\cos^2 \frac{\pi}{2} t - 2 \cos \frac{\pi}{2} t) P_3 c_3(t) \\
r(t) &= \sum_{i=0}^3 P_i c_i(t) + \frac{1}{4} (\sin \frac{\pi}{2} t) (\sin \frac{\pi}{2} t - 2) (1 - \lambda \sin \frac{\pi}{2} t) (P_0 - P_2) \\
&\quad + \frac{1}{4} (\cos \frac{\pi}{2} t) (\cos \frac{\pi}{2} t - 2) (1 - \lambda \cos \frac{\pi}{2} t) (P_3 - P_1)
\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. Burada  $c_0(t) = \frac{1}{4} (1 - \lambda \sin \frac{\pi}{2} t)$ ,  $c_1(t) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2} (1 - \lambda \cos \frac{\pi}{2} t))$ ,  $c_2(t) = \frac{1}{2} (1 - \frac{1}{2} (1 - \lambda \sin \frac{\pi}{2} t))$ ,  $c_3(t) = \frac{1}{4} (1 - \lambda \cos \frac{\pi}{2} t)$  dir. Buradan açıkça görülür ki  $\lambda$  şekil parametresi sadece  $(P_0 - P_2)$  ve  $(P_3 - P_1)$  üzerinde etkilidir.  $\lambda$  şekil parametresi artarsa eğri  $(P_0 - P_2)$  ve  $(P_3 - P_1)$  kontrol noktalarının doğrultusunda hareket edip,  $\lambda$  şekil parametresi azalırken eğri  $(P_0 - P_2)$  ve  $(P_3 - P_1)$  kontrol noktalarının doğrultusuna zıt doğrultuda hareket eder. Şekil-4.2 de  $\lambda = 1$  için



Şekil 4.2: Şekil parametresinin kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrisi üzerine etkisi

mavi çizgi,  $\lambda = 0.5$  için yeşil çizgi ve  $\lambda = 0$  için kırmızı çizgiyle belirlenen eğriler  $\lambda$  nın kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrisi üzerine etkisini göstermektedir.

#### 4.4 Kübik Trigonometrik Bézier-Benzeri eğrisinin kontrol poligonuna yaklaşımı

Burada aynı kontrol poligonuna sahip kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrisi ile Bézier eğrisi arasındaki ilişki incelenecektir. Kabul edelim ki  $P_0, P_1, P_2$  ve  $P_3$  aynı doğru üzerinde olmayan dört kontrol noktası olsun.  $r(t)$ , kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrisi ve  $B(t) = \sum_{i=0}^3 P_i \binom{3}{i} (1-t)^{3-i} t^i$  kübik Bézier eğrisi olmak üzere  $\lambda \in [0, 1]$  için,

$$r(0) = \frac{1}{4}(P_0 + 2P_1 + P_2), \quad r(1) = \frac{1}{4}(P_1 + 2P_2 + P_3) \quad (4.4.1)$$

$$P_0 = B(0), \quad P_3 = B(1)$$

olur.  $P^* = \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$  ve  $0 < (\frac{1}{2} - \frac{\lambda\sqrt{2}}{4}) < 1$  için Bézier eğrilerinde  $B(\frac{1}{2}) - P^* = \frac{1}{8}(P_0 - P_1 - P_2 + P_3)$  eşitliği geçerli olup kübik trigonometrik

Bézier-Benzeri eğrisi için

$$\begin{aligned} r\left(\frac{1}{2}\right) - P^* &= \frac{1}{16} (2 - \lambda\sqrt{2}) (3 - 2\sqrt{2}) (P_0 - P_1 - P_2 + P_3) \quad (4.4.2) \\ &= \frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda\sqrt{2}}{4}\right) (3 - 2\sqrt{2}) (P_0 - P_1 - P_2 + P_3) \\ &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda\sqrt{2}}{4}\right) \frac{1}{8} (P_0 - P_1 - P_2 + P_3) \\ &\leq \left(\frac{1}{2} - \frac{\lambda\sqrt{2}}{4}\right) \left(B\left(\frac{1}{2}\right) - P^*\right) \end{aligned}$$

geçerli olur ki bu da kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrisinin kontrol poligonuna Bézier eğrisine göre daha fazla yaklaştığını gösterir.

## 4.5 İki Kübik Trigonometrik Bézier-Benzeri Eğri İçin Süreklilik Şartları

Bu alt bölümde iki kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğri için  $C^0$ ,  $C^1$  ve  $C^2$  süreklilik şartlarını sağlaması için gerekli koşulları oluşturacağız. Bunun için keyfi iki kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğri alıp bu eğrilerin geometrik dizayn da önemli bir rolü olan eğrilerin birleşim noktalarındaki süreklilik şartlarını belirleyeceğiz. Bu yüzden seçeceğimiz iki eğri,

$$r_1(t) = P_0b_0(t) + P_1b_1(t) + P_2b_2(t) + P_3b_3(t)$$

$$r_2(t) = Q_0b_0(t) + Q_1b_1(t) + Q_2b_2(t) + Q_3b_3(t)$$

olarak ele alalım.



- $C^0$  süreklilik için birinci eğrinin son noktasındaki değeri ile ikinci eğrinin başlangıç noktasındaki değeri birbirine eşit olmalıdır. Yani,

$$r_1(1) = r_2(0)$$

eşitliği sağlanmalıdır.

$$r_1(1) = \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{4}P_3$$

ve

$$r_2(0) = \frac{1}{4}Q_0 + \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{4}Q_2$$

olur. Bu durumda  $r_1(1) = r_2(0)$  eşitliğini sağlamak için kontrol noktaları arasında

$$P_1 + 2P_2 + P_3 = Q_0 + 2Q_1 + Q_2$$

eşitliği sağlanırsa  $C^0$  süreklilik şartı sağlanmış olur.

**Teorem 4.5.1.** *Eğer kontrol noktaları arasında*

$$P_1 + 2P_2 + P_3 = Q_0 + 2Q_1 + Q_2$$

*eşitlikleri sağlanıyorsa  $r_1(t)$  ve  $r_2(t)$  eğrisi  $C^0$  süreklidir.*

- $C^1$  süreklilik için birinci eğrinin son noktasındaki teğeti ile ikinci eğrinin başlangıç noktasındaki teğetin bir katı şeklinde yazılmalıdır. Yani,

$$r'_1(1) = m.r'_2(0)$$

eşitliği sağlanmalıdır.

$$\begin{aligned}
r'_1(1) &= P_0.b'_0(1) + P_1b'_1(1) + P_2b'_2(1) + P_3b'_3(1) \\
r'_1(1) &= P_0.0 + P_1 \left( \frac{1}{2} - \frac{\lambda\pi}{8} - \frac{\pi}{4} \right) + P_2\frac{1}{2} + P_3 \left( \frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) \\
r'_1(1) &= \frac{1}{2}(P_1 + P_2) + \left( \frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) (P_3 - P_1)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
r'_2(0) &= Q_0.b'_0(0) + Q_1b'_1(0) + Q_2b'_2(0) + Q_3b'_3(0) \\
r'_2(0) &= Q_0 \cdot \left( -\frac{\lambda\pi}{8} - \frac{\pi}{4} \right) + Q_1\frac{1}{2} + Q_2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) + Q_3.0 \\
r'_2(0) &= \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2) + \left( \frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) (Q_2 - Q_0)
\end{aligned}$$

olur. Eğer  $P_1 = -P_2$ ,  $Q_1 = -Q_2$  seçilirse ve  $(P_3 - P_1) = m(Q_2 - Q_0)$  yazılırsa  $r'_1(1) = m.r'_2(0)$  eşitliği sağlanmış olur. Bu ise verilen iki ifadenin  $C^1$  süreklilik şartı sağlanmış olur.

**Teorem 4.5.2.** *Eğer  $P_1 = -P_2$ ,  $Q_1 = -Q_2$  ve  $(P_3 - P_1) = m(Q_2 - Q_0)$  eşitlikleri sağlanıyorsa  $r_1(t)$  ve  $r_2(t)$  eğrisi  $C^1$  süreklidir.*

- $C^2$  süreklilik için birinci eğinin son noktasındaki eğriliği ile ikinci eğrinin başlangıç noktasındaki eğriliği birbirine eşit olmalıdır. Yani,

$$\kappa(t) = \frac{|r'(t) \times r''(t)|}{|r'(t)|^3} \quad (4.5.1)$$

eğrilik fonksiyonu olmak üzere verilen iki eğri için

$$\kappa_1(1) = \kappa_2(0)$$

eşitli sağlanmalıdır.

$$\begin{aligned}\kappa_1(1) &= \frac{|r_1'(1) \times r_1''(1)|}{|r_1'(1)|^3} \\ \kappa_1(1) &= \frac{\left| \left( \frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) (P_3 - P_1) \times \left( \frac{\lambda\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8} \right) (P_3 - P_1) \right|}{|r_1'(1)|^3} \\ \kappa_1(1) &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\kappa_2(0) &= \frac{|r_2'(0) \times r_2''(0)|}{|r_2'(0)|^3} \\ \kappa_2(0) &= \frac{\left| \left( \frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) (Q_2 - Q_0) \times \left( \frac{\lambda\pi^2}{4} + \frac{\pi^2}{8} \right) (Q_0 - Q_2) \right|}{|r_2'(0)|^3} \\ \kappa_2(0) &= 0\end{aligned}$$

olur ve bu ise  $\kappa_1(1) = \kappa_2(0) = 0$  eşitliği ile iki eğrinin  $C^2$  sürekliliği sağlanmış olur.

**Teorem 4.5.3.**  $r_1(t)$  ve  $r_2(t)$  eğrisi  $C^2$  süreklilik şartını her zaman sağlamaktadır.

## 4.6 Komşu Olmayan İki Kübik Trigonometrik Bézier-Benzeri Eğrileri Arasında Geçiş Eğrisi

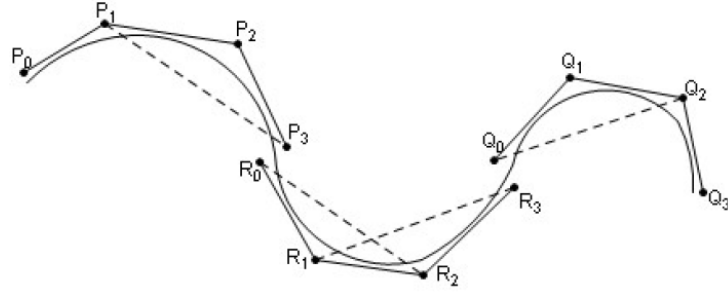
İki komşu olmayan kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrilerini,

$$r_1(t) = P_0b_0(t) + P_1b_1(t) + P_2b_2(t) + P_3b_3(t) \quad (4.6.1)$$

ve

$$r_2(t) = Q_0b_0(t) + Q_1b_1(t) + Q_2b_2(t) + Q_3b_3(t) \quad (4.6.2)$$

şeklinde yazalım. Bu kısımda bu iki eğri ile bu iki eğri arasında  $C^0, C^1$  ve  $C^2$  süreklilik şartlarının sağlanacağı



Şekil 4.3: [17] Komşu olmayan kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrileri ile geçiş eğrisi

$$r_3(t) = R_0b_0(t) + R_1b_1(t) + R_2b_2(t) + R_3b_3(t) \quad (4.6.3)$$

geçiş eğrisini belirleyeceğiz. Bu iki komşu olmayan kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrisini birleştiren geçiş eğrisini Şekil-4.3 te açıkça görebiliriz.

Burada, iki tane komşu olmayan kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrisi ile bunları birleştiren ve Şekil-4.3 te de görülen geçiş eğrisini ile bu eğrilerin bağlantı noktalarında süreklilik şartları olan  $C^0$ ,  $C^1$  ve  $C^2$  süreklilik şartlarını sağlamak gerekecektir.

$C^0$  süreklilik şartı için,

$$r_1(1) = r_3(0) \quad (4.6.4)$$

$$r_3(1) = r_2(0)$$

eşitlikleri sağlanmalıdır.

$C^1$  süreklilik şartı için,

$$r'_1(1) = r'_3(0) \quad (4.6.5)$$

$$r'_3(1) = r'_2(0)$$

eşitlikleri sağlanmalıdır. Ve son olarak  $C^2$  süreklilik şartı için,

$$\kappa_1(1) = \kappa_3(0) \quad (4.6.6)$$

$$\kappa_3(1) = \kappa_2(0)$$

eşitliklerinin sağlandığını göstermemiz gerekir.

**Teorem 4.6.1.** *İki tane kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrisi (4.6.1) ve (4.6.2) verilen  $r_1(t)$  ve  $r_2(t)$  olsun. Eğer,  $P_1 = -P_2, Q_1 = -Q_2, R_1 = -R_2$  ve  $m = n$  şeklinde seçilirse,  $r_1(t)$  ve  $r_2(t)$  kübik trigonometrik Bézier-Benzeri eğrilerini birleştiren (4.6.3) deki  $r_3(t)$  geçiş eğrisi bulunmuş olur.*

**İspat.** İki tane komşu olmayan trigonometrik kübik Bézier-Benzeri eğrileri,

$$r_1(t) = P_0b_0(t) + P_1b_1(t) + P_2b_2(t) + P_3b_3(t)$$

$$r_2(t) = Q_0b_0(t) + Q_1b_1(t) + Q_2b_2(t) + Q_3b_3(t)$$

olsun. Ve bunları birbirine bağlayan trigonometrik kübik Bézier-Benzeri eğrisi ise

$$r_3(t) = R_0b_0(t) + R_1b_1(t) + R_2b_2(t) + R_3b_3(t)$$

olarak yazalım. Bu  $r_3(t)$  eğrisinin  $r_1(t)$  ve  $r_2(t)$  eğrilerinin birleşme noktalarında  $C^0$  süreklilik şartı için,

$$r_1(1) = r_3(0)$$

$$r_3(1) = r_2(0)$$

eşitliklerini sağlatmamız yeterlidir. Bu durumda,

$$r_1(1) = \frac{1}{4}P_1 + \frac{1}{2}P_2 + \frac{1}{4}P_3$$

$$r_3(0) = \frac{1}{4}R_0 + \frac{1}{2}R_1 + \frac{1}{4}R_2$$

olur ve bu iki eşitlikten

$$P_1 + 2P_2 + P_3 = R_0 + 2R_1 + R_2 \quad (4.6.7)$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} r_3(1) &= \frac{1}{4}R_1 + \frac{1}{2}R_2 + \frac{1}{4}R_3 \\ r_2(0) &= \frac{1}{4}Q_0 + \frac{1}{2}Q_1 + \frac{1}{4}Q_2 \end{aligned}$$

olur ve

$$R_1 + 2R_2 + R_3 = Q_0 + 2Q_1 + Q_2 \quad (4.6.8)$$

yazılır. Ayrıca  $C^0$  süreklilik için,

$$\begin{aligned} r'_1(1) &= mr'_3(0) \\ r'_3(1) &= nr'_2(0) \end{aligned}$$

eşitliklerini sağlatmamız gerekir.

$$\begin{aligned} r'_1(1) &= P_0b'_0(1) + P_1b'_1(1) + P_2b'_2(1) + P_3b'_3(1) \\ r'_1(1) &= P_0 \cdot 0 + P_1 \left( \frac{1}{2} - \frac{\lambda\pi}{8} - \frac{\pi}{4} \right) + P_2 \frac{1}{2} + P_3 \left( \frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) \\ r'_1(1) &= \frac{1}{2}(P_1 + P_2) + \left( \frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) (P_3 - P_1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} r'_3(0) &= R_0 \cdot b'_0(0) + R_1b'_1(0) + R_2b'_2(0) + R_3b'_3(0) \\ r'_3(0) &= R_0 \cdot \left( -\frac{\lambda\pi}{8} - \frac{\pi}{4} \right) + R_1 \frac{1}{2} + R_2 \left( \frac{1}{2} + \frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) + R_3 \cdot 0 \\ r'_3(0) &= \frac{1}{2}(R_1 + R_2) + \left( \frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) (R_2 - R_0) \end{aligned}$$

olur ve buradan  $P_1 = -P_2$  ve  $R_1 = -R_2$  olarak alınırsa

$$(P_3 - P_1) = m(R_2 - R_0) \quad (4.6.9)$$

olur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} r'_3(1) &= R_0 \cdot b'_0(1) + R_1 b'_1(1) + R_2 b'_2(1) + R_3 b'_3(1) \\ r'_3(1) &= \frac{1}{2}(R_1 + R_2) + \left( \frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) (R_3 - R_1) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} r'_2(0) &= Q_0 \cdot b'_0(0) + Q_1 b'_1(0) + Q_2 b'_2(0) + Q_3 b'_3(0) \\ r'_2(0) &= \frac{1}{2}(Q_1 + Q_2) + \left( \frac{\lambda\pi}{8} + \frac{\pi}{4} \right) (Q_2 - Q_0) \end{aligned}$$

olur ve  $Q_1 = -Q_2$  olarak seçilirse

$$(R_3 - R_1) = n(Q_2 - Q_0) \quad (4.6.10)$$

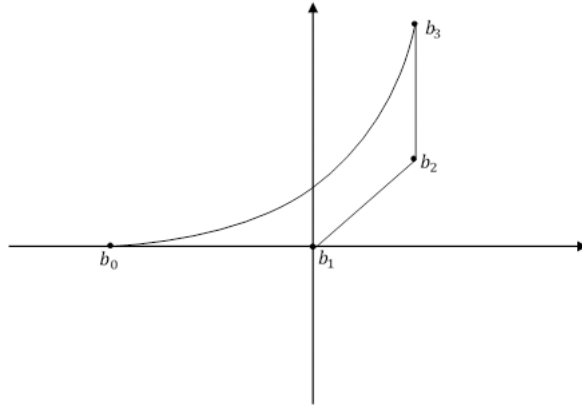
olur. Ve  $m = n$  olarak seçilirse  $C^1$  süreklilik şartı sağlanmış olur. Bu ifadeler benzer yollar izlenerek (4.5.1) ve (4.6.7)-(4.6.10) eşitlikleride kullanılarak eğriliklerin birbirine eşit olduğunu görebiliriz ve bu ispatı tamamlamış olur.  $\square$

## 5. KUADRATİK B-SPLİNE SİRAL EĞRİLERİ

Bu bölüm iki altbölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde kuadratik B-spline eğrilerinin özellikleri hatırlatılmakta ve kuadratik B-spline eğrinin açık denklemi elde edilmektedir. İkinci altbölümde kuadratik B-spline eğrisinin spiral olma şartları araştırılmaktadır.

### 5.1 Kuadratik B-spline Eğrilerinin Temel Özellikleri

(2.2.2) ve (2.2.3) eşitliklerinde B-spline baz fonksiyonları ile tanımlanan B-spline eğrisini ele alalım. Şimdi,  $b_0, b_1, b_2, b_3$  kontrol noktaları,  $t_0, t_1, \dots, t_6$  knot değerleri ve  $N_{0,2}, N_{1,2}, N_{2,2}, N_{3,2}$  ler B-spline baz fonksiyonları olmak üzere kuadratik B-spline eğrisini tanımlayarak bu eğrinin spiral olma durumunu araştıralım.



Şekil 5.1: Bir Geçiş Eğrisi

Kontrol noktalarını Şekil-5.1 de gösterilen  $b_0 = (g, 0), b_1 = (0, 0), b_2 = (k, m), b_3 = (k, s)$  ve B-spline eğrilerde uç nokta interpolasyonunu sağlamak için knot değerlerini  $t_0 = t_1 = t_2 = 0, t_3, t_4 = t_5 = t_6 = 1$  şeklinde seçelim. Burada  $g, k, m, s$  koordinat sistemindeki vektörler ve  $b_0b_1$  vektörü ile  $b_1b_2$  vektörü arasındaki açı  $\theta$



olsun. Bu durumda  $[t_d, t_{m-d}] = [t_2, t_4]$  arasındaki parçalı fonksiyon olarak temsil edilen quadratik B-spline eğrisi,

$$B(t) = \begin{cases} B_1(t) = b_0 \frac{(t_3-t)^2}{(t_3)^2} + b_1 \left[ \frac{(t)(t_3-t)}{(t_3)^2} + \frac{(1-t)(t)}{(t_3)} \right] \\ \quad + b_2 \frac{(t)^2}{(t_3)} \quad , 0 \leq t < t_3 \\ B_2(t) = b_1 \frac{(1-t)^2}{(1-t_3)} + b_2 \left[ \frac{(t)(1-t)}{(1-t_3)} + \frac{(1-t)(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \right] \\ \quad + b_3 \frac{(t-t_3)^2}{(1-t_3)^2} \quad , t_3 \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (5.1.1)$$

şeklinde yazılır.

Burada  $B_1(t)$  eşitliğini  $0 \leq t < t_3$

$$B_1(t) = b_0 \frac{(t_3-t)^2}{(t_3)^2} + b_1 \left[ \frac{(t)(t_3-t)}{(t_3)^2} + \frac{(1-t)(t)}{(t_3)} \right] + b_2 \frac{(t)^2}{(t_3)} \quad (5.1.2)$$

şeklinde yazabiliriz. Ayrıca bu  $B_1(t)$  fonksiyonunun birinci ve ikinci türevleri olan  $B_1'(t)$  ve  $B_1''(t)$  fonksiyonlarını yine  $0 \leq t < t_3$  için,

$$B_1'(t) = b_0 \frac{-2(t_3-t)}{(t_3)^2} + b_1 \left[ \frac{t_3-2t}{(t_3)^2} + \frac{1-2t}{t_3} \right] + b_2 \frac{2t}{t_3} \quad (5.1.3)$$

$$B_1''(t) = b_0 \frac{2}{(t_3)^2} + b_1 \left[ \frac{-2}{(t_3)^2} + \frac{-2}{t_3} \right] + b_2 \frac{2}{t_3}$$

şeklinde yazılır.

Benzer mantıkla  $B_2(t)$  eşitliğini  $t_3 \leq t \leq 1$  için,

$$B_2(t) = b_1 \frac{(1-t)^2}{(1-t_3)} + b_2 \left[ \frac{(t)(1-t)}{(1-t_3)} + \frac{(1-t)(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \right] + b_3 \frac{(t-t_3)^2}{(1-t_3)^2} \quad (5.1.4)$$

şeklinde yazılır ve  $B_2(t)$  fonksiyonunun birinci ve ikinci türevi olan  $B_2'(t)$  ve  $B_2''(t)$  fonksiyonlarını yine  $t_3 \leq t \leq 1$  için,

$$B_2'(t) = b_1 \frac{-2(1-t)}{1-t_3} + b_2 \left[ \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right] + b_3 \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \quad (5.1.5)$$

$$B_2''(t) = b_1 \frac{2}{1-t_3} + b_2 \left[ \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right] + b_3 \frac{2}{(1-t_3)^2}$$

şeklinde yazabiliriz.

Burada  $0 \leq t < t_3$  aralığında

$$\begin{aligned} \left( \frac{(t_3-t)^2}{(t_3)^2} \right) &> 0, \left( \frac{(t)(t_3-t)}{(t_3)^2} + \frac{(1-t)(t)}{(t_3)} \right) > 0 \\ \left( \frac{(t)^2}{(t_3)} \right) &> 0, \left( \frac{-2(t_3-t)}{(t_3)^2} \right) < 0 \\ \left( \frac{t_3-2t}{(t_3)^2} + \frac{1-2t}{t_3} \right) &> 0, \left( \frac{2}{(t_3)^2} \right) > 0 \\ \left( \frac{-2}{(t_3)^2} + \frac{-2}{t_3} \right) &< 0, \left( \frac{2}{t_3} \right) > 0 \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

eşitsizlikleri geçerli olur. Benzer şekilde  $t_3 \leq t \leq 1$  aralığında

$$\begin{aligned} \left( \frac{(1-t)^2}{(1-t_3)} \right) &> 0, \left( \frac{(t)(1-t)}{(1-t_3)} + \frac{(1-t)(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \right) > 0 \\ \left( \frac{(t-t_3)^2}{(1-t_3)^2} \right) &> 0, \left( \frac{-2(1-t)}{1-t_3} \right) < 0 \\ \left( \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \right) &> 0, \left( \frac{2}{1-t_3} \right) > 0 \\ \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) &< 0, \left( \frac{2}{(1-t_3)^2} \right) > 0 \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

## 5.2 Kuadratik B-spline Spiral Eğrisi İçin Bir Yaklaşım

Bu altbölümde B-spline eğrinin spiral olma şartı elde edilmektedir.

**Teorem 5.2.1.** Eğer  $|g|(1 - t_3)^2 = |k|(t_3)^2$  ve  $\frac{s}{m} > \frac{1}{t_3} - \frac{1}{(t_3)^2} - 1$  eşitlikleri sağlanırsa (5.1.1) de tanımlanan eğri bir kuadratik B-spline spiral eğri olur.

**İspat.** İlk olarak  $B_1(t)$  ve  $B_2(t)$  eğrilerinin Hermite şartlarını sağlatalım.

Öncelikle  $B_1(t)$  eğrisinin Hermite şartlarını sağlatalım:

- $B_1(0) = P_0$  olmalıdır.

$$B_1(0) = b_0 \left( \frac{(t_3)^2}{(t_3)^2} \right) + b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot 0$$

$$B_1(0) = P_0 = (g, 0)$$

dır.

- $B_1'(0) \parallel (1, 0)$  olmalıdır.

$$B_1'(0) = b_0 \cdot \left( \frac{-2t_3}{(t_3)^2} \right) + b_1 \cdot \left( \frac{t_3}{(t_3)^2} + \frac{1}{t_3} \right) + b_2 \cdot 0$$

$$B_1'(0) = b_0 \cdot \left( \frac{-2}{t_3} \right) + b_1 \cdot \left( \frac{2}{t_3} \right) + b_2 \cdot 0$$

$$B_1'(0) = \frac{2}{t_3} (b_1 - b_0) \parallel (1, 0)$$

dır.

- $B_1'(t_3) \parallel (k, m)$  olmalıdır.

$$B_1'(t_3) = b_0 \cdot 0 + b_1 \cdot \left( \frac{-t_3}{(t_3)^2} + \frac{1 - 2t_3}{t_3} \right) + b_2 \cdot \left( \frac{2t_3}{t_3} \right)$$

$$B_1'(t_3) = b_1 \cdot \left( \frac{-1}{t_3} + \frac{1}{t_3} - 2 \right) + b_2 \cdot 2$$

$$B_1'(t_3) = 2(b_2 - b_1)$$

dir.

- İlk eğri parçası olan  $B_1(t)$  eğrisinin son uç noktasındaki eğriliği,

$$\begin{aligned}\kappa_1(t_3) &= \frac{|B_1'(t_3) \times B_1''(t_3)|}{|B_1'(t_3)|^3} \\ \kappa_1(t_3) &= \frac{\left| 2(b_2 - b_1) \times \left( \frac{2}{(t_3)^2}(b_0 - b_1) + \frac{2}{t_3}(b_2 - b_1) \right) \right|}{|2(b_2 - b_1)|^3} \\ \kappa_1(t_3) &= \frac{\frac{4}{(t_3)^2} |(b_2 - b_1) \times (b_0 - b_1)|}{8 |b_2 - b_1|^3} \\ \kappa_1(t_3) &= \frac{1}{2(t_3)^2} \frac{|b_0 - b_1| \sin \theta}{|b_2 - b_1|^2}\end{aligned}$$

olur.

Şimdi ise  $B_2(t)$  eğrisinin Hermite şartlarını sağlatalım:

- $B_2(t_3) = B_1(t_3)$  olmalıdır.

$$B_2(t_3) = b_1 \cdot (1 - t_3) + b_2 \cdot t_3 + b_3 \cdot 0$$

$$B_2(t_3) = b_1 + t_3(b_2 - b_1)$$

$$B_2(t_3) = t_3(b_2 - b_1) = B_1(t_3)$$

olur. Bu ise ilk eğrinin son noktasının ikinci eğrinin ilk noktasındaki değerine eşit olduğunu gösterir.

- $B_2'(t_3) = B_1'(t_3)$  olmalıdır.

$$B_2'(t_3) = b_1 \cdot (-2) + b_2 \cdot \left( \frac{1 - 2t_3}{1 - t_3} + \frac{1}{1 - t_3} \right) + b_3 \cdot 0$$

$$B_2'(t_3) = b_1 \cdot (-2) + b_2 \cdot 2$$

$$B_2'(t_3) = 2(b_2 - b_1) = B_1'(t_3)$$

olup burada ilk eğrinin son noktasındaki türevi ikinci eğrinin başlangıç noktasındaki türevine eşittir.

- $B_2'(1) \parallel (0, 1)$  olmalıdır.

$$B_2'(1) = b_1 \cdot 0 + b_2 \cdot \left( \frac{-1}{1 - t_3} - \frac{1}{1 - t_3} \right) + b_3 \cdot \left( \frac{2}{1 - t_3} \right)$$

$$B_2'(1) = \left( \frac{2}{1 - t_3} \right) (b_3 - b_2) \parallel (0, 1)$$

dir.

- İkinci eğri olan  $B_2(t)$  eğrisinin başlangıç noktasındaki eğriliği,

$$\begin{aligned}\kappa_2(t_3) &= \frac{|B_2'(t_3) \times B_2''(t_3)|}{|B_2'(t_3)|^3} \\ \kappa_2(t_3) &= \frac{\left| 2(b_2 - b_1) \times \left( \frac{2}{(1-t_3)}(b_1 - b_2) + \frac{2}{(1-t_3)^2}(b_3 - b_2) \right) \right|}{|2(b_2 - b_1)|^3} \\ \kappa_2(t_3) &= \frac{\frac{4}{(1-t_3)^2} |(b_2 - b_1) \times (b_3 - b_2)|}{8 |b_2 - b_1|^3} \\ \kappa_2(t_3) &= \frac{1}{2(1-t_3)^2} \frac{|b_3 - b_2| \sin \theta}{|b_2 - b_1|^2}\end{aligned}$$

elde edilir. Eğrilerin uç noktalarındaki eğrilikleri birbirine eşit olacağından yani  $\kappa_2(t_3) = \kappa_1(t_3)$  olup buradan

$$|g| (1 - t_3)^2 = |k| (t_3)^2 \quad (5.2.1)$$

elde edilir.

Son olarak (5.1.1) deki quadratik B-spline eğrilerinin  $\forall t \in [0, 1]$  değeri için  $\kappa'(t) \neq 0$  olduğunu göstermeliyiz ki burada

$$\kappa'(t) = \frac{(x'y''' - x'''y')(x'^2 + y'^2) - 3(x'y'' - x''y')(x'x'' + y'y'')}{(x'^2 + y'^2)^{\frac{5}{2}}} \quad (5.2.2)$$

dir. (5.1.3) ve (5.1.6) eşitliklerinden  $B_1(t)$  eğrisinin eğrilik fonksiyonunun türevi,

$$\kappa_1'(t) = \frac{-3 \left( \begin{array}{l} (gm \frac{-2(t_3-t)}{(t_3)^2} \frac{2}{t_3} - gm \frac{2}{(t_3)^2} \frac{2t}{t_3}) \\ (g^2 \frac{-2(t_3-t)}{(t_3)^2} \frac{2}{(t_3)^2} + gk \frac{-2(t_3-t)}{(t_3)^2} \frac{2}{(t_3)^2} + \\ gk \frac{2}{(t_3)^2} \frac{2t}{t_3} + k^2 \frac{2t}{t_3} \frac{2}{t_3} + m^2 \frac{2t}{t_3} \frac{2}{t_3}) \end{array} \right)}{\left( g^2 \left( \frac{-2(t_3-t)}{(t_3)^2} \right)^2 + m^2 \left( \frac{2t}{t_3} \right)^2 \right)^{\frac{5}{2}}} \quad (5.2.3)$$

şeklinde yazabiliriz. Burada,

$$\begin{aligned}
\left( gm \frac{-2(t_3 - t)}{(t_3)^2} \frac{2}{t_3} \right) &> 0, \quad \left( gm \frac{2}{(t_3)^2} \frac{2t}{t_3} \right) < 0 \\
\left( g^2 \frac{-2(t_3 - t)}{(t_3)^2} \frac{2}{(t_3)^2} \right) &< 0, \quad \left( gk \frac{-2(t_3 - t)}{(t_3)^2} \frac{2}{(t_3)^2} \right) > 0 \\
\left( gk \frac{2}{(t_3)^2} \frac{2t}{t_3} \right) &< 0, \quad \left( k^2 \frac{2t}{t_3} \frac{2}{t_3} \right) > 0, \quad \left( m^2 \frac{2t}{t_3} \frac{2}{t_3} \right) > 0
\end{aligned} \tag{5.2.4}$$

dir.  $|g|(1-t_3)^2 = |k|(t_3)^2$  ve  $\frac{s}{m} > \frac{1}{t_3} - \frac{1}{(t_3)^2} - 1$  ifadeleri geçerli olduğundan

$$gk \frac{2}{(t_3)^2} \frac{2t}{t_3} + g^2 \frac{-2(t_3 - t)}{(t_3)^2} \frac{2}{(t_3)^2} > 0 \tag{5.2.5}$$

$$k^2 \frac{2t}{t_3} \frac{2}{t_3} + gk \frac{-2(t_3 - t)}{(t_3)^2} \frac{2}{t_3} > 0$$

olur. Bu ise  $\forall t \in [0, 1]$  için  $\kappa'_1(t) < 0$  elde edilir. Öte yandan (5.1.5) ve (5.1.7) ifadelerini kullanarak  $B_2(t)$  eğrisinin eğrilik fonksiyonunun türevi,

$$\begin{aligned}
\kappa'_2(t) = & \frac{\left( \begin{aligned} &-3 \left[ ks \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) \frac{2}{(1-t_3)^2} + km \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \right. \\ &- ks \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} - km \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) \frac{2}{(1-t_3)^2} \\ &\quad \left. \left[ \left( k^2 \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \right. \right. \right. \\ &\quad + k^2 \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) \frac{2}{(1-t_3)^2} + k^2 \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \\ &\quad + k^2 \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \frac{2}{(1-t_3)^2} + m^2 \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \\ &\quad \left. \left. \left. + ms \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) \frac{2}{(1-t_3)^2} \right. \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \left. + ms \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) + s^2 \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \frac{2}{(1-t_3)^2} \right] \right) \right)}{\left( \begin{aligned} &k^2 \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right)^2 \\ &+ \left( m \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) + s \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \right)^2 \end{aligned} \right)^{\frac{5}{2}}} \tag{5.2.6}
\end{aligned}$$

olur. Burada,

$$\begin{aligned}
& \left( km \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \right) < 0 & (5.2.7) \\
& \left( ks \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \right) < 0 \\
& \left( k^2 \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \right) > 0 \\
& \left( k^2 \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) \frac{2}{(1-t_3)^2} \right) < 0 \\
& \left( k^2 \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \right) < 0 \\
& \left( k^2 \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \frac{2}{(1-t_3)^2} \right) > 0 \\
& \left( m^2 \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \right) > 0 \\
& \left( ms \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) \frac{2}{(1-t_3)^2} \right) < 0 \\
& \left( ms \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \right) < 0 \\
& \left( s^2 \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \frac{2}{(1-t_3)^2} \right) > 0
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri yazılabilir. Burada  $|g|(1-t_3)^2 = |k|(t_3)^2$  ve  $\frac{s}{m} > \frac{1}{t_3} - \frac{1}{(t_3)^2} - 1$  olduğundan

$$\left( \begin{array}{c} ks \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) \frac{2}{(1-t_3)^2} \\ -km \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) \frac{2}{(1-t_3)^2} \end{array} \right) < 0 \quad (5.2.8)$$

$$\left( \begin{array}{c} km \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \\ -ks \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \end{array} \right) < 0$$

olur. Buradan,

$$\left( \begin{array}{c} k^2 \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \\ + ms \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) \frac{2}{(1-t_3)^2} \end{array} \right) < 0 \quad (5.2.9)$$

$$\left( \begin{array}{c} m^2 \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \\ + k^2 \left( \frac{1-2t}{1-t_3} + \frac{1-2t+t_3}{(1-t_3)^2} \right) \frac{2}{(1-t_3)^2} \end{array} \right) < 0$$

$$\left( \begin{array}{c} k^2 \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \frac{2}{(1-t_3)^2} \\ + ms \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \end{array} \right) < 0$$

$$\left( \begin{array}{c} s^2 \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \frac{2}{(1-t_3)^2} \\ + k^2 \left( \frac{-2}{1-t_3} + \frac{-2}{(1-t_3)^2} \right) \frac{2(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \end{array} \right) < 0$$

olur ki  $\forall t \in [0, 1]$  için  $\kappa_1'(t) < 0$  elde ederiz ve bu ifade ile ispat tamamlanmış olur.  $\square$

**Örnek 5.2.1.** Kontrol noktaları  $P_0 = (-1, 0), P_1 = (0, 0), P_2 = (9, 2)$  ve  $P_3 = (9, 4)$  olsun. (5.1.1), (5.1.2) ve (5.1.3) eşitlikleri yardımı ile,

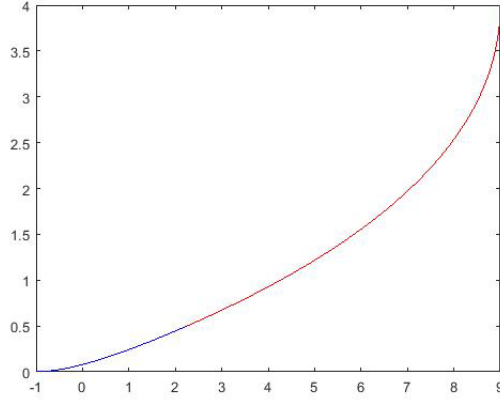
$$B_1(t) = (-1, 0) \frac{(t_3 - t)^2}{(t_3)^2} + (0, 0) \left( \frac{(t)(t_3 - t)}{(t_3)^2} + \frac{(1-t)(t)}{(t_3)} \right) + (9, 2) \frac{(t)^2}{(t_3)}$$

ve

$$B_2(t) = (0, 0) \frac{(1-t)^2}{(1-t_3)} + (9, 2) \left( \frac{(t)(1-t)}{(1-t_3)} + \frac{(1-t)(t-t_3)}{(1-t_3)^2} \right) + (9, 4) \frac{(t-t_3)^2}{(1-t_3)^2}$$

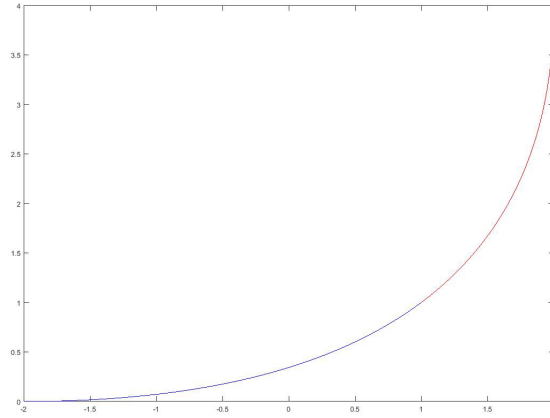
eşitlikleri yazılır. Bu ifadeler ile Şekil-5.2 de görülen kuadratik B-spline spiral eğriyi elde edebiliriz. Burada mavi ile gösterilen eğri parçası kuadratik B-spline eğrinin  $B_1(t)$  ile belirtilen eğri parçası olurken, kırmızı ile gösterilen kısım  $B_2(t)$  eğri parçasını ifade etmektedir.





Şekil 5.2: Kuadratik B-spline Spiral Eğri

**Örnek 5.2.2.** Kontrol noktaları  $P_0 = (-1, 0)$ ,  $P_1 = (0, 0)$ ,  $P_2 = (2, 2)$  ve  $P_3 = (2, 4)$  şeklinde verilirse bu durumda kuadratik B-spline spiral eğrisi şekildeki gibi gösterilir. Burada Şekil-5.3 de mavi ile gösterilen eğri parçası kuadratik B-spline eğrisinin  $B_1(t)$  ile gösterilen kısmını gösterirken kırmızı ile gösterilen kısım ise  $B_2(t)$  eğri parçasını ifade eder.



Şekil 5.3: Kuadratik B-spline Spiral Eğri

## KAYNAKLAR

- [1] H. H. Hacısalihođlu, *Diferansiyel Geometri*, Ankara Üniversitesi Yayinevi, 1993.
- [2] A. Saxena and B. Sahay, *Computer Aided Engineering Design*, Springer, 2005.
- [3] Z. Habib and M. Sakai, *Spiral transition curves their applications*, **Sci. Math. Jpn.**, (2005) 195-206.
- [4] Z. Habib and M. Sakai,  *$G^2$  Pythagorean hodograph quintic transition between two circles with shape control*, **Comput. Aided Geom. Design**, (2007) 252-266.
- [5] Z. Habib and M. Sakai, *Fairing arc spline and designing by using cubic Bézier spiral segments*, **Math. Model. Anal.**, (2012) 141-160.
- [6] D. J. Walton and D. S. Meek, *A planar cubic Bézier*, **Comput. Appl. Math.**, (1996) 85-100.
- [7] D. J. Walton and D. S. Meek, *A Pythagorean hodograph quintic spiral*, **Comput. Aided Design**, (1996) 943-950.
- [8] D. J. Walton and D. S. Meek, *Planar  $G^2$  transition between two circles with a fair cubic Bézier curve*, **Comput. Aided Design**, (1999) 857-866.
- [9] D. J. Walton and D. S. Meek, *A further generalisation of the planar cubic Bézier spiral*, **Comput. Appl. Math.**, (2012) 2869-2882.
- [10] D. J. Walton and D. S. Meek, *Curvature extrema of planar parametric polynomial cubic curves*, **J. Comput. Appl. Math.**, (2001) 69-83.
- [11] D. Marsh, *Applied Geometry for Computer Graphics and CAD*, Second Edition, Springer, 2005.
- [12] X. Han, *Quadratic Trigonometric Polynomial Curves with a Shape Parameter*, **Comput. Aided Geom. Design**, (2002) 479-502.
- [13] X. Han, *Piecewise Quadratic Trigonometric Polynomial Curves*, **Math. Comp.**, (2003) 1369-1377.
- [14] X. Han, *Cubic Trigonometric Polynomial Curves with a Shape Parameter*, **Comput. Aided Geom. Design**, (2004) 535-548.
- [15] X.A. Han, Y. C. Ma, X and L. Huang, *The Cubic Trigonometric Bezier Curve with Two Shape Parameters*, **Appl. Math. Lett.**, (2009) 226-231.

- [16] R. Sharma, *Cubic Trigonometric Bezier Curve with Shape Parameter*, **IJIRCCE**, (2016) 7718-7723.
- [17] J. Chang, Z. Wang and A. Yang, *Construction of Transition Curve between Nonadjacent Cubic T-B Spline Curves*, **ICICA 2010**, (2010) 454-461.
- [18] A. Levent, B. Sahin and Z. Habib, *Spiral transitions*, **Appl. Math. J. Chinese Univ. Ser. B**, (2018) 468-490.
- [19] A. Levent and B. Sahin, *Cubic Bézier-like transition curves with new basis functions*, **Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.**, (2018) 222-228.
- [20] A. Levent and B. Sahin, *Beta Bézier curves*, **Appl. Comput. Math.**, (2019) 79-94.
- [21] N. Sapidis and W. Frey, *Controlling the curvature of a quadratic Bezier curve*, **Comput. Aided Geom. Design**, (1992) 85-91.
- [22] L. Chu, X and M. Zeng, *Constructing curves and triangular patches by Beta functions*, **J. Comput. Appl. Math.**, (2014) 191-200.
- [23] R. T. Farouki, *Pythagorean-Hodograph Curves*, Springer, 2007.
- [24] P. A. Blaga, *Lectures on the Differential Geometry of Curves and Surfaces*, 2005.
- [25] H. W. Guggenheimer, *Differential Geometry*, Dover Publications, 1977.
- [26] R. Kaya, *Analitik Geometri*, Anadolu Üniversitesi Yayınları, 1985.
- [27] B. Karlığa, *Düzlem Analitik Geometri*, 2002.
- [28] G. Farin, A Practical Guide, *Curves and Surfaces for CAGD*, Morgan Kaufmann, (2004), 5th edition.

# ÖZGEÇMİŞ

**Ad Soyad:** Akın LEVENT

**Doğum Yeri ve Tarihi:** Malatya/13.08.1984

**Adres:** İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,  
Matematik Bölümü

**E-Posta:** akhlev44@gmail.com

**Lisans:** İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi,  
Matematik Bölümü (2008-2011)

**Yüksek Lisans:** İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü,  
Matematik A.B.D. (2011-2013)

**Mesleki Deneyim:** TÜBİTAK-2228/B Bursiyerliği (2014-2018)

**Yayın Listesi:**

## Makaleler:

1) Levent, A. Sahin, B and Habib, Z., *Spiral Transition*, **Appl. Math.J. Chinese Univ. Ser. B**, Vol 33, No 4, (2018) 468-490. (SCI-Expanded)

2) Levent, A. and Sahin, B., *Cubic Bézier-like Transition Curves with New Basis Functions*, **Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.** , Vol. 44, No. 2 (2018) 222-228. (Bu çalışma tezden üretilmiştir.) (ESCI)

3) Levent, A. and Sahin, B., *Beta Bezier Curves*, **Appl. Comput. Math.**, Vol. 10, Issue 1 (2019), pages 143-164.(Bu çalışma tezden üretilmiştir.) (SCI)

4) Levent, A. and Sahin, B., *Trigonometric Cubic Bézier Transition Curves*, **Hacet. J. Math. Stat.**, 2018. (İncelemede.) (SCI-Expanded)

5) **Levent, A.** and Sahin, B., *A Quadratic B-spline Spiral*, **Appl. Math.J. Chinese Univ. Ser. B.**, 2019. (Incelemede.) (**SCI-Expanded**)

### **Bildiriler**

1) **Levent, A.** and Sahin, B., *The Cubic Trigonometric Bézier Transition Curves with Two Shape Prameters*, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education 2017*, 11-13 May 2017, Harran University, Şanlıurfa, Turkey.

2) **Levent, A.** and Sahin, B., *TC-Bézier Transition Curves*, *International Conference on Mathematics and Mathematics Education 2016*, 12-14 May 2016, Fırat University, Elazığ, Turkey.

3) **Levent, A.** and Sahin, B., *Shape Analysis of Bezier-Like Curves Defined by Beta Functions*, *XIII. Geometri Sempozyumu*, 27-30 Temmuz 2015, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul, Türkiye.