

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ZAMANA GÖRE KESİRLİ MERTEBEDEN
SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN CHEBYSHEV KOLLOKASYON
YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**



DOKTORA TEZİ

Güllü Esra KÖSE

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alaattin ESEN

AĞUSTOS 2020

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ZAMANA GÖRE KESİRLİ MERTEBEDEN
SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN CHEBYSHEV KOLLOKASYON
YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**



DOKTORA TEZİ

**Güllü Esra KÖSE
(36091403011)**

Matematik Anabilim Dalı

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Alaattin ESEN
Eş Danışman: Dr. Ömer Oruç**

AĞUSTOS 2020

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Tez çalıőmam süresince hayatımda karőıma çıkan bütün sıkıntılı süreçlerde manevi desteğini, gülyüzünü, sabrını her zaman yanımda hissettiğim, deneyimini ve emeğini hiçbir zaman benden esirgemedi beni her konuda yönlendiren, hayatta rol model aldığım danışman hocam Sayın Prof. Dr. Alaattin ESEN 'e ve eő danıőmanım Dr. Ömer ORUÇ' a, araőtırmalarımda görüşleriyle yol gösteren, ilgi ve desteğini esirgemeyen ve her zaman bana yardımcı olan değerli hocalarımda Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a, Prof. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e, Doç. Dr. Yusuf UÇAR'a, Doç. Dr. Nuri Murat YAğMURLU'ya teőekkürü bir borç bilirim.

Çalıőmalarımda ayrıca tüm hayatım boyunca olduğu gibi maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda bulunarak bu günlere gelmemde en büyük pay sahibi olan aileme ve eőime minnettarlığımı ve teőekkürlerimi sunarım.



ONUR SÖZÜ

Doktora tezi olarak sunduğum “Zamana Göre Kesirli Mertebeden Schrödinger Denkleminin Chebyshev Kollokasyon Yöntemi ile Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Güllü Esra KÖSE



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	5
2.1 Özel Fonksiyonlar.....	5
2.1.1 Gama fonksiyonu.....	5
2.1.2 Beta fonksiyonu.....	7
2.2 Kesirli Mertebeden Türev ve İntegral Yaklaşımları.....	7
2.2.1 Grünwald-Letnikov türevi.....	7
2.2.2 Riemann-Liouville türevi.....	7
2.2.3 Caputo kesirli türevi.....	8
2.2.4 Kesirli türevlere nümerik yaklaşımlar.....	10
2.3 Chebyshev Polinomları.....	18
2.3.1 Trigonometrik tanımlar.....	18
2.3.2 Birinci çeşit $T_n(x)$ polinomu.....	18
2.3.3 İkinci çeşit $U_n(x)$ polinomu.....	20
2.3.4 Üçüncü ve dördüncü tip $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ polinomları.....	23
2.3.5 Dört tür polinom arasındaki bağıntılar.....	25
2.3.6 $T_n^*(x)$, $U_n^*(x)$, $V_n^*(x)$ ve $W_n^*(x)$ kaydırılmış Chebyshev polinomları.....	27
2.3.7 Genel $[a, b]$ kapalı aralığında Chebyshev polinomlar.....	28
2.4 Ortogonal Polinomlar.....	29
2.4.1 Ortogonal polinomlar ve ağırlık fonksiyonları.....	29
2.4.2 Ortogonal polinomlar olarak Chebyshev polinomları.....	31
3. MATERYAL VE YÖNTEM.....	35
3.1 Kesirli Mertebeden Schrödinger Denklemi.....	35
3.2 Dalgacıklar.....	36
3.3 Chebyshev Dalgacık Yöntemi.....	40
3.3.1 Chebyshev dalgacıklarıyla fonksiyonlara yaklaşım.....	42
3.3.2 Yakınsaklık analizi.....	42
3.3.3 Chebyshev dalgacıklarının integralleri.....	45
4. BULGULAR VE TARTIŞMA.....	47
4.1 Kesirli Mertebeden Schrödinger Denkleminin Chebyshev Dalgacıkları Yöntemi ile Çözümleri.....	47
4.1.1 Zamana göre ayrıklaştırma.....	47
4.1.2 Konuma göre Chebyshev dalgacıklarıyla ayrıklaştırma.....	49
4.1.3 Nümerik sonuçlar.....	51
4.1.3.1 Problem 1.....	51

4.1.3.2 Problem 2.....	56
4.2 Kesirli Mertebeden İkili (<i>Coupled</i>) Schrödinger Denkleminin Chebyshev Dalgacıkları Yöntemi ile Çözümü	59
4.2.1 Zamana göre ayırıştırma.....	59
4.2.2 Konuma göre Chebyshev dalgacıklarıyla ayırıştırma.....	64
4.2.3 Nümerik sonuçlar	69
4.2.3.1 Problem 1.....	70
4.2.3.2 Problem 2.....	71
5. SONUÇ.....	80
KAYNAKLAR.....	81
ÖZGEÇMİŞ	85



ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1 : Gama fonksiyon grafiği	6
Şekil 2.2 : $[-1, 1]$ aralığında $T_5(x)$ ve $[0, \pi]$ aralığında $\cos 5\theta$ grafikleri	20
Şekil 2.3 : $T_n(x)$ polinomları grafiği	21
Şekil 2.4 : $[-1, 1]$ aralığında $U_5(x)$	22
Şekil 2.5 : $U_n(x)$ polinomları grafiği	23
Şekil 4.1 : $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.005$ için $t = 1$ zamanındaki reel kısmın nümerik çözümleri, tam çözümleri ve hatanın grafikleri	54
Şekil 4.2 : $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.005$ için $t = 1$ zamanındaki sanal kısmın nümerik çözümleri, tam çözümleri ve hatanın grafikleri	55
Şekil 4.3 : Problem 1'de $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.005$ ve $t = 1$ zamanında m' kollokasyon noktalarının sayısına göre reel ve sanal kısımların hataları	56
Şekil 4.4 : Problem 2'nin $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 1$ zamanında farklı m' kollokasyon sayısına göre hataların değişimi	58
Şekil 4.5 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 1'in $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki $u(x, t)$ 'nin reel kısmının nümerik ve tam çözümleri grafiği	72
Şekil 4.6 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 1'in $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki $u(x, t)$ 'nin sanal kısmının nümerik ve tam çözümleri grafiği	73
Şekil 4.7 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 1'in $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki $u(x, t)$ 'nin reel kısmının nümerik ve tam çözümleri grafiği	74
Şekil 4.8 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 1'in $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki $v(x, t)$ 'nin sanal kısmının nümerik ve tam çözümleri grafiği	75
Şekil 4.9 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 2'nin $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ 'nin reel kısmının nümerik ve tam çözümleri grafiği	78
Şekil 4.10 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 2'nin $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ 'nin sanal kısmının nümerik ve tam çözümleri grafiği	79

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 2.1 : C, x ve x^2 fonksiyonları için diferintegral algoritmaların bağıl hatalarının karşılaştırılması.....	16
Çizelge 4.1 : Problem 1'in $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5$, $m' = 32$ ve $t = 1$ 'de sunulan yöntem ile Ref. [11] 'de verilen hataların karşılaştırılmaları.....	52
Çizelge 4.2 : Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $m' = 32$ ve $t = 1$ zamanında azalan Δt değerleri için hatalar.....	53
Çizelge 4.3 : Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $m' = 128$ ve $t = 1$ de Δt 'nin azalan değerlerinde hatalar.....	53
Çizelge 4.4 : Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0,001$ ve $t = 1$ zamanında artan m' kollokasyon sayıları için hatalar.....	53
Çizelge 4.5 : Problem 2'nin $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 1$ 'de artan m' kollokasyon sayıları için hatalar.....	57
Çizelge 4.6 : Problem 2'nin $\alpha = 0.3$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 1$ zamanında m' artan kollokasyon sayıları için reel ve Sanal kısımların hataları.....	57
Çizelge 4.7 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $m' = 32$ ve $t = 1$ zamanında azalan Δt değerleri için $u(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısım hataları...	71
Çizelge 4.8 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $m' = 32$ ve $t = 1$ zamanında azalan Δt değerleri için $v(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısım hataları...	71
Çizelge 4.9 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 1$ zamanında artan m' değerleri için $u(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısım hatalarının karşılaştırılmaları.....	71
Çizelge 4.10 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 1$ zamanında artan m' değerleri için $v(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısım hatalarının karşılaştırılmaları.....	72
Çizelge 4.11 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 2'nin $\alpha = 0.5$, $m' = 32$ ve $t = 1$ zamanında artan m' değerleri için $u(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısım hataları.....	76
Çizelge 4.12 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 2'nin $\alpha = 0.5$, $m' = 32$ ve $t = 1$ zamanında artan m' değerleri için $v(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısım hataları.....	77
Çizelge 4.13 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 2'nin $\alpha = 0.5$, $m' = 32$ ve $t = 1$ zamanında azalan Δt değerleri için $u(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısım hataları...	77
Çizelge 4.14 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 2'nin $\alpha = 0.5$, $m' = 32$ ve $t = 1$ zamanında azalan Δt değerleri için $v(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısım hataları...	77

ÖZET

Doktora Tezi

ZAMANA GÖRE KESİRLİ MERTEBEDEN SCHRÖDINGER DENKLEMİNİN CHEBYSHEV KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

GÜLLÜ ESRA KÖSE

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

85+viii sayfa

2020

Danışman: Prof. Dr. Alaattin ESEN

Beş bölümden oluşan bu tez çalışmasının birinci bölümü Giriş bölümü olarak düzenlenmiş olup kesirli mertebeden türev ve integral kavramlarının gelişimi ve kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin literatür özeti bu kısımda verildi.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve kavramlara yer verilmiştir. Bu bölümde, Gama ve Beta fonksiyonları, kesirli mertebeden türev ve integral hesaplamalarında kullanılan Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville ve Caputo yaklaşımları ve kesirli türevlere nümerik yaklaşımlar ile ilgili genel bilgiler verildi.

Üçüncü bölümde, çalışmada baz fonksiyonu olarak seçilecek olan Chebyshev polinomları ayrıntılı olarak incelenip, Chebyshev polinomlarının trigonometrik tanımları, ortogonal polinomlar ve Chebyshev polinomlarının ortogonallığı ile ilgili genel bilgiler verildi. Ayrıca bu bölümde, zamana göre kesirli mertebeden Schrödinger denklemi ele alınıp dalgacıklar, Chebyshev dalgacıkları, Chebyshev dalgacıklarıyla fonksiyonlara yaklaşım, Chebyshev dalgacıklarının integralleri ve yakınsaklık analizi ile ilgili bilgiler verildi.

Dördüncü bölüm, çalışmanın orjinal kısımlarını içermekte olup zamana göre kesirli mertebeden Schrödinger ve ikili Schrödinger denklemleri Chebyshev dalgacık yöntemiyle ile çözüldü. Her bir kesirli model için farklı ikişer probleme uygulandı. Elde edilen nümerik çözümler literatürdeki mevcut bazı sonuçlarla karşılaştırıldı, L_2 ve L_∞ hata normları çizelgeler halinde sunuldu. Ayrıca nümerik sonuçların grafikleri de bu bölümde verilmiştir. Beşinci bölüm, sonuç bölümü olarak düzenlenmiş olup çalışmada elde edilen sonuçlar bu bölümde değerlendirilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Schrödinger Denklemi, Kesirli Türev, Chebyshev Dalgacık Yöntemi, Kollokasyon Yöntemi.

ABSTRACT

Phd. Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS OF TIME FRACTIONAL ORDER SCHRODINGER EQUATION USING CHEBYSHEV COLLOCATION METHOD

Güllü Esra KÖSE

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

85+viii pages

2020

Supervisor: Prof. Dr. Alaattin ESEN

The first chapter of this thesis, which consists of five chapters, has been organized as an introduction, and the development of fractional order derivative and integral concepts and the literature survey of fractional order Schrödinger equation is given in this chapter.

In the second chapter, fundamental definitions and concepts that will be used in the following chapters are given. In this chapter, general information about Gamma and Beta functions, Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville and Caputo approximations used in fractional order derivatives and integral calculations, and numerical approximations to fractional derivatives are given.

In the third chapter, Chebyshev polynomials to be selected as basis functions in the study are examined in detail, and general information about the trigonometric definitions of Chebyshev polynomials, orthogonal polynomials and orthogonality of Chebyshev polynomials are given. In addition, in this chapter, information about the fractional order Schrödinger equation with respect to time is given and information on wavelets, Chebyshev wavelets, approach to functions with Chebyshev wavelets, integrals of Chebyshev wavelets and convergence analysis are given.

The fourth chapter contains the original parts of the study, and the fractional order Schrödinger and coupled Schrödinger equations with respect to time were investigated by Chebyshev wavelet method. Two different problems are applied for each fractional model. The numerical methods obtained are compared with some of the results available in the literature, and the error norms L_2 and L_∞ are presented in tables. Also, graphs of numerical results are given in this chapter.

The fifth chapter has been arranged as a conclusion section and the results obtained in the study have been evaluated in this chapter.

Keywords: Schrödinger Equation, Fractional Derivation, Chebyshev Wavelet Method, Collocation Method.

1. GİRİŞ

Kesirli hesaplama kavramı ilk olarak 1695 yılında Leibnitz tarafından L' Hospital'a yöneltilen soru ile ortaya çıkmıştır. Leibnitz "Tamsayı mertebeli $\frac{d^m y}{dx^n}$ türevi tamsayı mertebeli olmayan türev için genellenebilir mi?" sorusunu yöneltilmiştir. Daha sonra bu soruyu "n herhangi bir sayı olabilir mi?" şeklinde sormuştur. L' Hospital bu soruya "n, $\frac{1}{2}$ olduğu zaman ne olacak?" sorusuyla karşılık vermiştir. Leibnitz "O bir paradoksa yol açar" demiş ve "bu görünür paradokstan bir gün faydalı sonuçlar çıkarılacaktır" diye de eklemiştir. 1697'de Leibnitz, Wallis'in $\pi/2$ için sonsuz çarpımına atıfta bulunarak, $d^{1/2}y$ notasyonunu $\frac{1}{2}$. mertebeden türevi göstermek için kullandı. Kesirli hesaplamalar konusu Eulerin dikkatinden kaçmadı. 1730 yılında "n pozitif tam sayı olduğunda, p x'in fonksiyonu ise $d^n p$ nin dx 'e oranı her zaman cebirsel olarak ifade edilebilir. Dolayısıyla $n = 2$ ve $p = x^3$ ise $d^2 x^3$ ün dx^2 'ye oranı $6x$ e 1 dir. Şimdi eğer n kesirli ise ne tür bir oranın yapılacağı sorulur. Bu durumdaki zorluk kolaylıkla anlaşılabilir. Eğer n pozitif bir tamsayı ise d^n art arda türevle bulunabilir. Fakat n kesirli ise bu yol aşikar değildir" olarak ifade etmiş ve bir interpolasyon yolu önermiştir. Lagrange kesirli hesaplamalara dolaylı yoldan katkıda bulundu. 1772 yılında tam sayı mertebeden diferansiyel operatörlerin üsleri kanununu

$$\frac{d^m}{dx^m} \cdot \frac{d^n}{dx^n} y = \frac{d^{m+n}}{dx^{m+n}} y$$

şeklinde geliştirdi [1]. 1812 de P. S. Laplace, integral vasıtası ile kesirli türevi tanımladı ve 1819'da keyfi mertebeden türevin ilk açıklaması bir metinde görüldü. Fransız matematikçi S.F. Lacroix diferansiyel ve integral hesaplama üzerine yayınladığı 700 sayfalık eserinde konu üzerine 2 sayfadan daha az yer ayırdığı bir sonuca da yer verdi. Bu eserinde, n'nin pozitif tamsayı olduğu $y = x^m$ fonksiyonunun n. türevinin

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{m!}{(m-n)!} x^{m-n}, m \geq n$$

olduğunu gösterdi. Genelleştirilmiş faktöriyeli gösteren Legendre'nin Γ sembolünü kullanarak, Lacroix

$$\frac{d^n y}{dx^n} = \frac{\Gamma(m+1)}{\Gamma(m-n+1)} x^{m-n}$$

formülünü elde etti. Lacroix, $y = x$ fonksiyonunu göz önüne aldı ve $\frac{1}{2}$. mertebeden türevini

$$\frac{d^{1/2}}{dx^{1/2}}(x) = \frac{\Gamma(2)}{\Gamma(3/2)} = \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}}$$

şeklinde elde etti. Bu sonuç günümüz Reimann-Liouville kesirli mertebeye türev tanımının ürettiği sonuç ile aynıdır. L'Hospital'in bu soruyu ortaya attığı o günden bu yana sadece bu konuya adanmış bir makalenin ortaya çıkması için 279 yıl geçmişti [1]. Joseph B.J. Fourier'in kesirli hesaplama tanımı $f(x)$ in

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\alpha) d\alpha \int_{-\infty}^{\infty} \cos p(x-a) dp$$

integral gösteriminden elde edildi. Euler ve Fourier keyfi mertebeden türevden bahsetmişler fakat uygulama veya örnek vermemişlerdir. Kesirli mertebeden hesaplamaların ilk uygulaması 1823 yılında Niels Henrik Abel'e aittir. Abel kesirli hesaplamayı Tautochrone probleminin formülasyonunda ortaya çıkan bir integral denkleminin çözümünde uyguladı [1]. Riemann 1847'de bir öğrenci iken yaptığı ve ölümünden sonra yayınlanan bir makalede kesirli operasyonların tanımını yazdı. Riemann integral tanımını Taylor serisinin genelleştirmesinde aradı ve

$$D_x^{-\nu} f(x) = \frac{1}{\Gamma(\nu)} \int_c^x (x-t)^{\nu-1} f(t) dt + \psi(x)$$

integrasyon formülünü verdi. Riemann alt limit sınırı c deki belirsizlik yüzünden tanımına $\psi(x)$ tamamlayıcı fonksiyonunu eklemenin doğru olacağını gördü. Cayley Riemann'ın teoremindeki en büyük zorluğun tamamlayıcı fonksiyonun belirsiz bir doğaya sahip olduğunu işaret etti [1]. Cayley kesirli hesaplamaların tatmin edici tanımında bu belirsiz tamamlayıcı fonksiyonun bulunmaması gerektiğine işaret etti. Aslında şu an kesirli integral gösteriminde de bu tamamlayıcı fonksiyon kullanılmamaktadır.

Bu tez çalışmasında, $0 < \alpha \leq 1$ ve $i^2 = -1$ olmak üzere

$$iD_t^\alpha w + w_{xx} + \mu |w|^2 w = F(x, t) \quad (1.0.1)$$

kesirli mertebeden Schrödinger denklemi ve

$$\begin{aligned} iD_t^\alpha u + iu_x + u_{xx} + \varepsilon_1 u + \beta_1 v + \mu_1 (|u|^2 + |v|^2) u &= F_1(x, t) \\ iD_t^\alpha v - iv_x + v_{xx} + \varepsilon_2 u - \beta_2 v + \mu_2 (|u|^2 + |v|^2) v &= F_2(x, t) \end{aligned} \quad (1.0.2)$$

kesirli mertebeden coupled (ikili) Schrödinger denklemleri

$$D_t^\alpha w(x,t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} w(x,t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{w'(x,\tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, 0 < \alpha \leq 1$$

kesirli mertebeden türev için Caputo anlamında türev [2] kullanılarak ele alındı. Schrödinger denklemi lineer olmayan optiklerde, hidromanyetik ve plazma dalgalarında, katı bir cisimdeki ısı iletiminde, sıvı ile dolu elastik bir tüpteki lineer olmayan dalgalarda, lineer olmayan kararsızlık problemlerinde, piezoelektrik yarı iletkenlerdeki soliter dalga yayılımında görülmektedir [3–5]. Kuantum mekaniğinde önemli bir yere sahip bu denklemin yüksek nonlinearliğe sahip kesirli mertebeden versiyonları da son zamanlarda araştırmacıların ilgisini çekmektedir. Naber [6] ilk olarak kesirli mertebeden Schrödinger denklemini Mittag-Leffler fonksiyonlarına göre araştırmıştır. Denklemin yarı analitik çözümleri Odibat vd. [7] tarafından geliştirilmiş 2 boyutlu diferansiyel transform metodu kullanılarak bulunmuştur. Bir Hilbert uzayında zaman kesirli Schrödinger denklemi ve onun türevinin analitik çözümleri ve kararlılığı Hicdurmaz ve Ashralyev [8] tarafından çalışılmıştır. Wei vd. [9] model problemin lineer ve lineer olmayan formlarının nümerik çözümlerinin bulunmasında yerel süreksiz Galerkin yöntemi ile araştırdılar. Esen ve Taşbozan zamana göre kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin nümerik çözümlerini kuadratik ve kübik B-spline sonlu eleman yöntemleri yardımıyla elde etmişlerdir [10, 11]. Zamana ve konuma göre kesirli mertebeden Schrödinger denklemlerinin nümerik çözümleri Bhrawy vd. [12] tarafından operasyonel matrisler kullanarak Jacobi spektral yöntemi ile bulundu. Aminikhah vd. [13], kesirli mertebeden ikili Schrödinger denkleminin çözümlerini Laplace dönüşüm ve homotopi pertürbasyon yöntemlerini birlikte kullanarak bulmuşlardır. Karaman ve Dereli [14], ikili Schrödinger denklemlerinin nümerik çözümlerini ağsız *meshless* bir yöntem olan radyal baz fonksiyonları ile kollokasyon yöntemi yardımıyla elde ettiler.

Genel olarak bu tür kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin bulunması bazı durumlarda çok zor olduğu için bu tür problemlerin çözümlerinde nümerik yöntemler sıklıkla kullanılmaktadır. Bilgisayar alanındaki yazılım ve donanımdaki gelişmeler nümerik yöntemler için kullanılan eski algoritmaların hem daha hızlı hem de daha etkin çalıştırılmasına izin vermekle kalmayıp aynı zamanda yeni algoritmaların gelişmesine de yardımcı olmuştur. Spektral yöntemler kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde kullanılan güçlü yöntemlerdir. Bazı diğer nümerik yöntemlerin aksine, spektral yöntemler herhangi bir noktada hesaplamının sadece komşu noktalarındaki bilgilerine değil, tüm alanın bilgisine

dayandığı genel yöntemlerdir. Ayrıca spektral yöntemlerin üstel yakınsaması ile diğer yöntemlere göre daha etkin ve doğru sonuçlar verir. Spektral metotlar denilince ilk olarak Fourier fonksiyonları akla gelir. Ancak bu yöntemler, Fourier fonksiyonlarından başka ortogonal polinomlarla da oluşturulabilirler. Eğer göz önüne alınan problem ile verilen sınır şartları periyodik ise genellikle Fourier fonksiyonları, problem sınırlanmış alanda tanımlanmış ve sınır şartları periyodik değilse baz fonksiyonlarının seçimi $x \in [-1, 1]$ aralığında tanımlanan Chebyshev veya Legendre polinomları olabilir.

Bu çalışmada, lineer ve lineer olmayan kesirli mertebeden Schrödinger ve kesirli mertebeden İkili (coupled) Schrödinger denklemlerine Chebyshev dalgacık kollokasyon yöntemi uygulandı. Denklemlerdeki kesirli mertebeden Caputo anlamındaki türevler yerine $0 < \gamma \leq 1$ için $b_k^\alpha = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$ olmak üzere

$$L1 : \frac{\partial^\alpha f(t)}{\partial t^\alpha} = \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{m-1} b_k^\alpha [f(t_{m-k}) - f(t_{m-1-k})]$$

ile verilen L1 yaklaşımı kullanıldı [15] .

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde, bazı özel fonksiyonlar ve kesirli mertebeden türevler için bazı yaklaşımlar verildi.

2.1 Özel Fonksiyonlar

Bu kısımda, tezin ilerleyen kısımlarında kullanılacak olan bazı özel fonksiyonların tanımları verildi.

2.1.1 Gama fonksiyonu

$\Gamma(x)$ ile gösterilen Gama fonksiyonu kesirli hesaplama teorisinde önemli bir rol oynar [15]. $\Gamma(x)$ ' in kapsamlı bir tanımı, Euler limiti

$$\Gamma(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{N! N^x}{x(x+1)(x+2) \cdots (x+N)},$$

ile gösterilmekle birlikte, genellikle

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy, \quad x > 0 \quad (2.1.1)$$

biçimindeki integral dönüşüm tanımı daha yaygın kullanılır. (2.1.1) integrali kısmi integrasyon uygulandığında Gama fonksiyonunun özelliklerinden biri olan

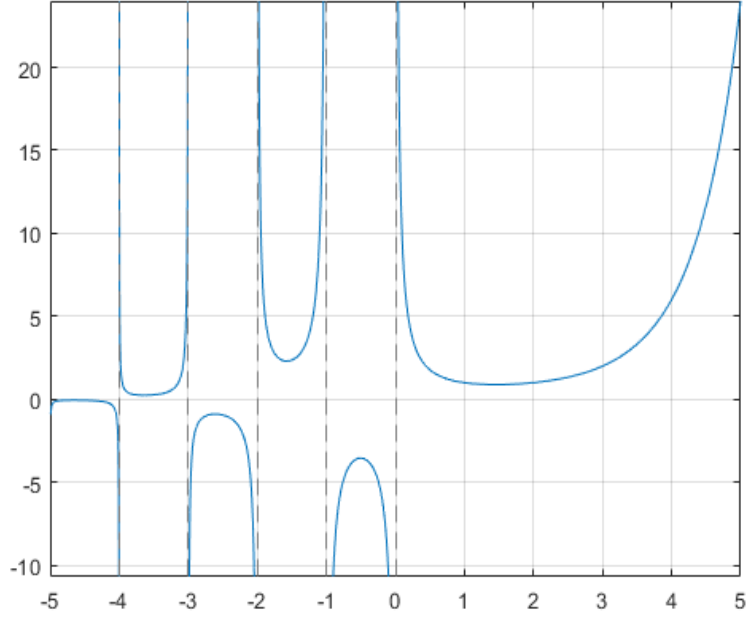
$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

rekürans bağıntısı bulunur. Aynı sonuca Euler limit tanımı kullanılarak da ulaşılabilir. Gama fonksiyonu, pozitif x sayıları için rekürans bağıntısında $\Gamma(1) = 1$ özelliği kullanılarak

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = x(x-1)\Gamma(x-1) = \cdots = x(x-1) \cdots 2.1\Gamma(1) = x!$$

özelliğini sağladığından genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyonu olarak da bilinir. Son bulunan eşitlik yardımı ile negatif sayılar için de kullanılabilir

$$\Gamma(x-1) = \frac{\Gamma(x)}{(x-1)}$$



Şekil 2.1 : Gama fonksiyon grafiği

özelliği elde edilir. Bu genişletme, tüm negatif tam sayılarda olduğu gibi $\Gamma(-1)$ de de olmak üzere $\Gamma(0)$ 'ın sonsuz olduğunu gösterir. Fakat Gama fonksiyonunun negatif tam sayılardaki oranı sonludur, dolayısıyla N ve n pozitif tamsayılar,sa,

$$\frac{\Gamma(-n)}{\Gamma(-N)} = (-N)(-N+1)\cdots(-n-2)(-n-1) = (-1)^{N-n} \frac{N!}{n!}$$

olur [15, 16].

Pozitif n tam sayısının Γ fonksiyonu da pozitif bir tam sayı iken $\Gamma(-n)$ fonksiyonu n 'nin tam sayı değeri için her zaman sonsuzdur. $\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right)$ ve $\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right)$ Gama fonksiyonlarının sonucu $\sqrt{\pi}$ nin katları olur. Böylece

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+n\right) = \frac{(2n)!\sqrt{\pi}}{4^n n!}$$

ve

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}-n\right) = \frac{(-4)^n n! \sqrt{\pi}}{(2n)!}$$

elde edilir.

2.1.2 Beta fonksiyonu

Gama fonksiyonu ile yakından ilgili olan bir başka fonksiyonda Beta fonksiyonudur. w ve z parametrelerinin pozitif değerleri için Beta fonksiyonu

$$B(w, z) = \int_0^1 \tau^{w-1} (1 - \tau)^{z-1} d\tau, \quad (2.1.2)$$

integrali ile tanımlanır. Bu integral aynı zamanda Eulerin ikinci tip integrali olarak da bilinir. Eğer w ve z den herhangi biri pozitif değilse bu integral ıraksar ve bu durumda Beta fonksiyonu

$$B(w, z) = \frac{\Gamma(w)\Gamma(z)}{\Gamma(w+z)} = B(z, w) \quad (2.1.3)$$

bağıntısı ile tanımlanır. Beta fonksiyonunun bir başka önemli özelliği de $0 < \text{Re}(z) < 1$ için

$$B(z, z-1) = \Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin \pi z}, \quad z \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.1.4)$$

yazılabilmektedir [2, 16].

2.2 Kesirli Mertebeden Türev ve İntegral Yaklaşımları

Bu kısımda kesirli türev ve integral hesaplamaları için sıkça kullanılan yaklaşımlar ve bunlar arasındaki ilişkiler verildi. Bu yaklaşımlar Grünwald-Letnikov, Riemann-Liouville, Caputo kesirli mertebeden türev ve integral yaklaşımlarıdır.

2.2.1 Grünwald-Letnikov türevi

Anton Karl Grünwald (1830-1920) ve Alesey Vasilievich Letnikov (1837-1888), kesirli mertebeden türev ve integrali tanımlayabilmek için türevin genel tanımından ve ayrıca Gama fonksiyonundan faydalanmışlardır. p -inci mertebeden Grünwald-Letnikov kesirli mertebeden türevi

$${}_a D_t^p f(t) = \sum_{k=0}^m \frac{f^{(k)}(a) (t-a)^{-p+k}}{\Gamma(-p+k+1)} + \frac{1}{\Gamma(-p+m+1)} \int_a^t (t-\tau)^{-p+m} f^{(m+1)}(\tau) d\tau$$

şeklinde tanımlanır [2].

2.2.2 Riemann-Liouville türevi

$f(t)$ fonksiyonu her (a, t) aralığında sürekli ve integrallenebilir olmak üzere $p > 0$ için Riemann-Liouville kesirli mertebeden integrali

$${}_a D_t^{-p} f(t) = \frac{1}{\Gamma(p)} \int_a^t (t-\tau)^{p-1} f(\tau) d\tau$$

olarak tanımlanır [2]. $k > \alpha$ ve $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere Riemann-Liouville kesirli $(k - \alpha)$. mertebeden türevi

$${}_a D_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{\alpha-1} f(\tau) d\tau \quad (2.2.1)$$

şeklinde tanımlanır [2]. Burada $p = k - \alpha$ alınırsa

$${}_a D_t^{k-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(k-p)} \frac{d^k}{dt^k} \int_a^t (t-\tau)^{k-p-1} f(\tau) d\tau$$

olur.

2.2.3 Caputo kesirli türevi

Riemann-Liouville tipi kesirli diferansiyel alma tanımı kesirli türev ve integralin gelişmesinde önemli rol oynamıştır. Uygulamalı problemlerde, $f(a)$, $f'(a)$ vb. fiziksel olarak yorumlanabilen başlangıç koşullarını içeren kesirli türev tanımlarına gereksinim duyulur. Ne yazık ki, Riemann-Liouville yaklaşımında $t = a$ alt sınırında kesirli türevin limit değerini içeren, Örneğin b_k ($k = 1, 2, \dots, n$) ler sabitler olmak üzere

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow a} [{}_a D_t^{\alpha-1} f(t)] &= b_1 \\ \lim_{t \rightarrow a} [{}_a D_t^{\alpha-2} f(t)] &= b_2 \\ \dots \\ \lim_{t \rightarrow a} [{}_a D_t^{\alpha-n} f(t)] &= b_n \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

başlangıç koşulları ile karşılaştırılır. Bu tür başlangıç koşullarının fiziksel bir yorumu yapılamamaktadır. Fiziksel olarak yorumlanabilen $f(a)$, $f'(a)$ vb. şekildeki başlangıç koşullarının kullanımına en uygun kesirli türev tanımı Caputo tarafından verilmiştir. Caputo kesirli türevi

$${}_a^C D_t^\alpha f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha-n)} \int_a^t \frac{f^{(n)}(\tau)}{(t-\tau)^{\alpha+1-n}} d\tau, \quad n-1 < \alpha < n \quad (2.2.3)$$

ile verilir [2]. Riemann-Liouville ve Caputo kesirli türevlerine göre diferansiyel denklemler ile birlikte verilmesi gereken başlangıç koşulları arasındaki farkların altını çizmek için $a = 0$ durumunda, Riemann-Liouville kesirli türevi için Laplace dönüşümü

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \{ {}_0D_t^\alpha f(t) \} dt = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^k {}_0D_t^{\alpha-k-1} f(t)|_{t=0}, \quad n-1 \leq \alpha < n$$

ve Caputo kesirli türevi için

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} \{ {}_0^C D_t^\alpha f(t) \} dt = p^\alpha F(p) - \sum_{k=0}^{n-1} p^{\alpha-k-1} f^{(k)}(0), \quad n-1 < \alpha \leq n$$

olarak bulunur. Görüldüğü gibi Riemann-Liouville kesirli türevinin Laplace dönüşümü (2.2.2) tipi fiziksel yorumlar ile ilgili problemlere sebep olan başlangıç koşullarının kullanımına izin verirken, Caputo türevin Laplace dönüşümü bilinen fiziksel yorumlarla klasik tam sayı mertebeli türevlerin başlangıç değerlerinin kullanımına izin verir.

Riemann-Liouville kesirli türev ve Caputo kesirli türevi arasında diğer bir fark, sabitin Caputo türevinin sıfır buna karşın C sabitinin Riemann-Liouville kesirli türevinde a alt sınırının sonlu değer olması durumunda sıfır olmayıp

$${}_0D_t^\alpha C = \frac{Ct^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$$

biçiminde olmasıdır.

Riemann Liouville ve Caputo arasında uygulamalar için önemli olan bir başka fark da Caputo türevi için

$${}_a^C D_t^\alpha ({}_a^C D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^{\alpha+m} f(t), \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n)$$

iken Riemann-Liouville türevi için

$${}_a D_t^m ({}_a D_t^\alpha f(t)) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t), \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n)$$

dır. Bu formüllerde diferansiyel operatörlerinin yer değişimine farklı şartlarda izin verilir. Bunu

$${}_a^C D_t^\alpha ({}_a^C D_t^m f(t)) = {}_a^C D_t^m ({}_a^C D_t^\alpha f(t)) = {}_a^C D_t^{\alpha+m} f(t),$$

$$f^s(0) = 0, \quad s = n, n+1, \dots, m \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n)$$

$${}_a D_t^m ({}_a D_t^\alpha f(t)) = {}_a D_t^\alpha ({}_a D_t^m f(t)) = {}_a D_t^{\alpha+m} f(t),$$

$$f^s(0) = 0, \quad s = 0, 1, \dots, m \quad (m = 0, 1, 2, \dots; n-1 < \alpha < n)$$

şeklinde ifade ederiz. Riemann-Liouville yaklaşımının aksine, Caputo türevinde $f^s(0) = 0$, $s = 0, 1, \dots, n-1$ değerlerinde herhangi bir kısıtlama yoktur.

Örneğin, $f(z) = z$ fonksiyonunun $m = 1$ olmak üzere $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo türevini alalım.

$$\begin{aligned} D_z^{\frac{1}{2}} \{z\} &= \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_0^z (z-t)^{1-\frac{1}{2}-1} \frac{d}{dt} \{t\} dt \\ &= \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^z (z-t)^{-\frac{1}{2}} dt \quad \{t = uz, dt = zdu\} \\ &= \frac{z^{\frac{1}{2}}}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} du \\ &= \frac{B(\frac{1}{2}, 1)}{\Gamma(\frac{1}{2})} z^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} z^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi elde edilen fonksiyonun tekrar $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo türevini alırsak

$$\begin{aligned} D_z^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} z^{\frac{1}{2}} \right\} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(1-\frac{1}{2})} \int_0^z (z-t)^{1-\frac{1}{2}-1} \frac{d}{dt} \left\{ t^{\frac{1}{2}} \right\} dt \\ D_z^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} z^{\frac{1}{2}} \right\} &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^z (z-t)^{-\frac{1}{2}} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} dt \\ D_z^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} z^{\frac{1}{2}} \right\} &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2})} \int_0^1 (1-u)^{-\frac{1}{2}} u^{-\frac{1}{2}} du \\ D_z^{\frac{1}{2}} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} z^{\frac{1}{2}} \right\} &= \frac{B(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}{\sqrt{\pi} \Gamma(\frac{1}{2})} = 1 \end{aligned}$$

elde ederiz. $f(z) = z$ fonksiyonunun iki defa $\frac{1}{2}$. mertebeden Caputo kesirli türevi, bu fonksiyonun birinci mertebeden klasik türevini verir.

2.2.4 Kesirli türevlere nümerik yaklaşımlar

Bu bölümde, türevler için çeşitli nümerik yaklaşımlar verilecektir. Geri fark formülü yardımıyla, birinci mertebeden türevin bilinen tanımı

$$\frac{df}{dx} \equiv \frac{d}{dx} f(x) \equiv \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left\{ (\delta x)^{-1} [f(x) - f(x - \delta x)] \right\}$$

ile başlayalım. Benzer şekilde ikinci ve üçüncü mertebeden türevler sırasıyla

$$\frac{d^2 f}{dx^2} \equiv \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left\{ (\delta x)^{-2} [f(x) - 2f(x - \delta x) + f(x - 2\delta x)] \right\}$$

ve

$$\frac{d^3 f}{dx^3} \equiv \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left\{ (\delta x)^{-3} [f(x) - 3f(x - \delta x) + 3f(x - 2\delta x) - f(x - 3\delta x)] \right\}$$

limitlerinin var olduğu varsayılarak elde edilir.

Dikkat edilirse her bir türev, türevin mertebesinde daha fazla fonksiyonelin hesaplanmasını içermektedir. Bunun da ötesinde katsayılar binom katsayıları olarak artmakta ve işaret alterne olarak değişmektedir. Bu durum pozitif m tamsayısı için genel formülün

$$\frac{d^n f}{dx^n} \equiv \lim_{\delta x \rightarrow 0} \left\{ (\delta x)^{-n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\delta x) \right\}$$

olduğunu gösterir. Eğer f nin n . türevi mevcutsa bu son denklem aslında kısıtsız bir limit olarak $\frac{d^n f}{dx^n}$ i tanımlar. Yani δx tamamen sınırsız değerlerle limit olarak sıfıra gider. Bu formülü, integrali bir toplamın limiti olarak tanımlayan formülle birleştirmek için türevleri sınırlı limit yani δx in sıfıra yalnızca ayrık değerler üzerinden gittiği limit açısından tanımlamak istenir. Bunu yapmak için $\delta_N x = \frac{x-a}{N}$, $N = 1, 2, 3, \dots$ seçilir. Burada a , alt limite benzer bir rol oynayan x den küçük bir sayıdır. Bu durumda, n . türev

$$\frac{d^n f}{dx^n} \equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ (\delta_N x)^{-n} \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\delta_N x) \right\}$$

şeklinde tanımlanabilir [15]. Şimdi n tamsayı iken eğer $j > n$ ise $\binom{n}{j} = 0$ olacağından yukarıdaki denklem

$$\begin{aligned} \frac{d^n f}{dx^n} &\equiv \lim_{\delta_N x \rightarrow 0} \left\{ (\delta_N x)^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{n}{j} f(x - j\delta_N x) \right\} & (2.2.4) \\ &\equiv \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \left(\frac{x-a}{N} \right)^{-n} \sum_{j=0}^{N-1} (-1)^j \binom{n}{j} f\left(x - j \left(\frac{x-a}{N} \right)\right) \right\} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada

$$(-1)^j \binom{n}{j} = \frac{\Gamma(j-n)}{\Gamma(-n)\Gamma(j+1)}$$

özellliği kullanılırsa (2.2.4) Grünwald tanımı herhangi bir q için üretilen olası en basit algoritma

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\left[\frac{x-a}{N} \right]^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} f\left(x - j \left[\frac{x-a}{N} \right]\right) \right\}, \quad (2.2.5)$$

$N \rightarrow \infty$ işlemi gözardı edilir ve $a = 0$ alınırsa G1-algoritması diye adlandırdığımız bir yaklaşım formülü

$$\frac{d^q f}{dx^q} \approx \left(\frac{d^q f}{dx^q} \right)_{G1} = \frac{x^{-q} N^q}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} f \left(x - \frac{jx}{N} \right) \quad (2.2.6)$$

$$\frac{d^q f}{dx^q} \approx \left(\frac{d^q f}{dx^q} \right)_{G1} = \frac{x^{-q} N^q}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} f_j$$

olarak elde edilir [15]. Bu yaklaşımda

$$\frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} = \frac{j-1-q}{j} \frac{\Gamma(j-1-q)}{\Gamma(j)}$$

özelliğinden dolayı G1-algoritması uygun çarpma-toplama-çarpma... çarpma-toplama şemaları

$$\left(\frac{d^q f}{dx^q} \right)_{G1} = \frac{N^q}{x^q} \left[\left[\left[\dots \left[\left[f_{N-1} \left\{ \frac{N-q-2}{N-1} \right\} + f_{N-2} \left\{ \frac{N-q-3}{N-2} \right\} \right] \right] \right] \right] \right] \left[f_{N-3} \right] \dots \left[\left\{ \frac{1-q}{2} \right\} + f_1 \right] \left[\left\{ \frac{-q}{1} \right\} + f_0 \right]$$

biçiminde uygulanarak Gama fonksiyonu kullanmadan ve kolay programlamaya müsait hale getirilebilir. Burada fonksiyon değerleri için

$$f_N \equiv f(0), f_{N-1} \equiv f \left(\frac{x}{N} \right), \dots, f_j \equiv f \left(x - \frac{jx}{N} \right), \dots, f_0 \equiv f(x)$$

ile verilen gösterimler kullanılmıştır.

(2.2.5) Grünwald tanımının bir modifikasyonu

$$\frac{d^q f}{[d(x-a)]^q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{\left[\frac{x-a}{N} \right]^{-q}}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} f \left(x - \left(j - \frac{1}{2}q \right) \left[\frac{x-a}{N} \right] \right) \right\}, \quad (2.2.7)$$

şeklinde önerilmiştir. Bu tanım yakınsaklık özellikleri açısından daha uygundur. (2.2.7) denkleminin $a = 0$ durumu için yeniden yazılması ile

$$\frac{d^q f}{dx^q} = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \frac{x^{-q} N^q}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} f \left(x + \frac{qx}{2N} - \frac{jx}{N} \right) \right\} \quad (2.2.8)$$

elde edilir [15]. Ne yazık ki ($q = 0, \pm 2, \pm 4, \dots$) olmadıkça bu formül f' 'nin bilinen f_j değerlerinden başka noktalarda da hesaplanmasını gerektirir. Bu yüzden Lagrange üç nokta interpolasyonuna dayalı

$$f\left(x + \frac{qx}{2N} - \frac{jx}{N}\right) \approx \left[\frac{q}{4} + \frac{q^2}{8}\right] f\left(x + \frac{x}{N} - \frac{jx}{N}\right) + \left[1 - \frac{q^2}{4}\right] f\left(x - \frac{jx}{N}\right) \\ + \left[\frac{q^2}{8} - \frac{q}{4}\right] f\left(x - \frac{x}{N} - \frac{jx}{N}\right)$$

yaklaşımını (2.2.8) formülünde kullanınız ve $N \rightarrow \infty$ şartını gevşeterek bunu

$$\left(\frac{d^q f}{dx^q}\right)_{G2} = \frac{x^{-q} N^q}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} \left\{ f_j + \frac{1}{4} q [f_{j-1} - f_{j+1}] + \frac{1}{8} q^2 [f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}] \right\}$$

G2- algoritmasını geliştirmek için kullanınız [15].

Benzer düşünce ile Riemann-Liouville tanımından q' nun negatif değerleri için

$$\frac{d^q f}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^x \frac{f(y) dy}{[x-y]^{q+1}} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \int_0^x \frac{f(x-y) dy}{y^{q+1}}$$

şeklindedir. Bunu

$$\frac{d^q f}{dx^q} = \frac{1}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\frac{jx}{N}}^{\frac{[jx+x]}{N}} \frac{f(x-y) dy}{y^{q+1}}$$

gibi yazarsak, her biri integral için farklı bir yaklaşımdan ortaya çıkan R-algoritması diye adlandırılan birtakım algoritmayı üretmenin nasıl mümkün olduğunu görebiliriz. Dolayısıyla

$$\int_{\frac{jx}{N}}^{\frac{[jx+x]}{N}} \frac{f(x-y) dy}{y^{q+1}} \approx \frac{f\left(x - \frac{jx}{N}\right) + f\left(x - \frac{x}{N} - \frac{jx}{N}\right)}{2} \int_{\frac{jx}{N}}^{\frac{[jx+x]}{N}} \frac{dy}{y^{q+1}} \\ = \frac{f_j + f_{j+1}}{-2q} \left\{ \left[\frac{[jx+x]}{N}\right]^{-q} - \left[\frac{jx}{N}\right]^{-q} \right\}$$

yaklaşımı ile $q < 0$ için geçerli olan R1-algoritması olarak isimlendirilen

$$\left(\frac{d^q f}{dx^q}\right)_{R1} = \frac{x^{-q} N^q}{\Gamma(1-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{f_j + f_{j+1}}{2} \{ [j+1]^{-q} - j^{-q} \} \quad (2.2.9)$$

yaklaşımına ulaşırız [15]. Bunun yanısıra

$$\int_{\frac{jx}{N}}^{\frac{[jx+x]}{N}} \frac{f(x-y) dy}{y^{q+1}} \approx \int_{\frac{jx}{N}}^{\frac{[jx+x]}{N}} \frac{\left\{ \left[1 + j - \frac{Ny}{x}\right] f\left(x - \frac{jx}{N}\right) + \left[\frac{Ny}{x} - j\right] f\left(x - \frac{x}{N} - \frac{jx}{N}\right) \right\} dy}{y^{q+1}}$$

ile verilen f_{j+1} ve f_j arasındaki lineer interpolasyona dayalı yaklaşım R1-algoritmasından daha kompleks fakat daha doğru olan

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^q f}{dx^q} \right)_{R2} = & \frac{x^{-q} N^q}{\Gamma(-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{[j+1] f_j - j f_{j+1}}{-q} \{ [j+1]^{-q} - j^{-q} \} \\ & + \frac{f_{j+1} - f_j}{1-q} \{ [j+1]^{1-q} - j^{1-q} \} \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

R2- algoritması olarak adlandırılan yaklaşımı verir [15].

Her iki R-algoritması da negatif q değeriyle sınırlıdır. $0 \leq q < 1$ aralığında diferintegrasyon mertebesi için geçerli olan bir algoritma,

$$\begin{aligned} \frac{d^q f}{dx^q} = & \frac{x^{-q} f(0)}{\Gamma(1-q)} + \frac{1}{\Gamma(1-q)} \int_0^x \left[\frac{df}{dy}(y) \right] \frac{dy}{[x-y]^q} \\ = & \frac{1}{\Gamma(1-q)} \left\{ \frac{f(0)}{x^q} + \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\frac{jx}{N}}^{\frac{[jx+x]}{N}} \left[\frac{df}{dy}(x-y) \right] \frac{dy}{y^q} \right\} \end{aligned}$$

yardımı ile verilir. Daha karmaşık alternatifler mevcut olmasına karşın, bu formüle dayalı

$$\begin{aligned} \int_{\frac{jx}{N}}^{\frac{[jx+x]}{N}} \left[\frac{df}{dy}(x-y) \right] \frac{dy}{y^q} \approx & \frac{f\left(x - \frac{jx}{N}\right) - f\left(x - \frac{x}{N} - \frac{jx}{N}\right)}{\frac{x}{N}} \int_{\frac{jx}{N}}^{\frac{[jx+x]}{N}} \frac{dy}{y^q} \\ = & \frac{x^{-q} N^q}{1-q} [f_j - f_{j+1}] \left[(j+1)^{1-q} - j^{1-q} \right] \end{aligned}$$

yaklaşımını kullanırsa sadece $0 \leq q < 1$ için geçerli L1- algoritması

$$\left(\frac{d^q f}{dx^q} \right)_{L1} = \frac{x^{-q} N^q}{\Gamma(2-q)} \left[\frac{[1-q] f_N}{N^q} + \sum_{j=0}^{N-1} [f_j - f_{j+1}] \left[(j+1)^{1-q} - j^{1-q} \right] \right] \quad (2.2.11)$$

biçiminde elde edilir [15].

Şimdi $1 \leq q < 2$ aralığına dönersek,

$$\begin{aligned} \frac{d^q f}{dx^q} = & \frac{x^{-q} f(0)}{\Gamma(1-q)} + \frac{x^{1-q} f^{(1)}(0)}{\Gamma(2-q)} + \frac{1}{\Gamma(2-q)} \int_0^x \frac{f^{(2)}(y) dy}{[x-y]^{q-1}} \\ = & \frac{1}{\Gamma(2-q)} \left[\frac{[1-q] f(0)}{x^q} + \frac{f^{(1)}(0)}{x^{q-1}} + \sum_{j=0}^{N-1} \int_{\frac{jx}{N}}^{\frac{[jx+x]}{N}} \frac{f^{(2)}(x-y)}{y^{q-1}} \right] \end{aligned}$$

formülü,

$$f^{(1)}(0) \approx \frac{f\left(\frac{x}{N}\right) - f(0)}{\frac{x}{N}} = \frac{N}{x} [f_{N-1} - f_N]$$

ve

$$\begin{aligned}
& \int_{\frac{jx}{N}}^{\frac{[jx+x]}{N}} \frac{f^{(2)}(x-y)}{y^{q-1}} \\
& \approx \frac{f\left(x + \frac{x}{N} - \frac{jx}{N}\right) - 2f\left(x - \frac{jx}{N}\right) + f\left(x - \frac{x}{N} - \frac{jx}{N}\right)}{\left[\frac{x}{N}\right]^2} \int_{\frac{jx}{N}}^{\frac{[jx+x]}{N}} \frac{dy}{y^{q-1}} \\
& = \frac{x^{-q}N^q}{2-q} [f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}] \left[(j+1)^{2-q} - j^{2-q} \right]
\end{aligned}$$

yaklaşımlarını yaparak, $1 \leq q < 2$ için geçerli olan

$$\left(\frac{d^q f}{dx^q} \right)_{L2} = \frac{x^{-q}N^q}{\Gamma(3-q)} \left[\frac{[1-q][2-q]f_N}{N^q} + \frac{[2-q][f_{N-1} - f_N]}{N^{q-1}} \right] \quad (2.2.12)$$

$$+ \sum_{j=0}^{N-1} [f_{j-1} - 2f_j + f_{j+1}] \left[(j+1)^{2-q} - j^{2-q} \right]$$

L2-algoritması olarak isimlendirilen yaklaşım elde edilir [15].

$2 \leq q < 3$ aralığında yakınsak olan L3-algoritmasının ve $3 \leq q < 4$ aralığında yakınsak olan L4-algoritmasında benzer bir tarzda tasarlanabileceği aşikardır. Fakat biz bu algoritmalardan hiçbirinin daha öte incelenmesini ele almayacağız.

Bu algoritmaların tümü tam olarak f nin $N+1$ değerlerini kullanmazlar. G1-algoritması yalnızca N adet veriyi kullanır, f_N kullanılmaz. G2 ve L2 algoritmaları $(N+2)$ noktayı kullanırlar ve standart $(N+1)$ 'e ek olarak $f_{-1} \left[= f^{\frac{[N+1]x}{N}} \right]$ verisine de ihtiyaç duyarlar.

Genelde algoritmalar mükemmel değildir. Tipik bir Al -algoritmasının eksiklik ölçümü bazı f deneme fonksiyonu için

$$(\varepsilon(f))_{Al} \equiv \frac{\left(\frac{d^q f}{dx^q} \right)_{Al} - \left(\frac{d^q f}{dx^q} \right)}{\frac{d^q f}{dx^q}}$$

ile verilen bağıl hata terimi ile hesaplanır. Bu hata terimi genelde q ve N ' ye bağlıdır ve N sonsuz iken 0 ' a yaklaşır. Çizelge 2.1'de altı farklı algoritma için C, x ve x^2 fonksiyonlarının yaklaşık hesabında elde edilen bağıl hatalar sunularak karşılaştırılmıştır.

Bazı basit f fonksiyonları ve N değerleri için mükemmel asimptotik yaklaşımlar olan $(\varepsilon(f))_{Al}$ analitik ifade üretilebilir.

G1-algoritmasını tanımlayan (2.2.6) denkleminde $f = C$ için

Çizelge 2.1 : C, x ve x^2 fonksiyonları için diferintegral algoritmaların bağıl hatalarının karşılaştırılması

Al	$(\varepsilon(C))_{Al}$	$(\varepsilon(x))_{Al}$	$(\varepsilon(x^2))_{Al}$
G1 (bütünq)	$\frac{q[q+1]}{2N}$	$\frac{q[q-1]}{2N}$	$\frac{q[q-2]}{2N}$
G2 (bütünq)	$\frac{q[q+1]}{2N}$	$\frac{q^2}{2N}$	$\frac{q[q-1][q-2]}{24N^2}$
R1 ($q < 0$)	0	$\frac{1-q}{N} \left[\frac{\zeta(q)}{N^{-q}} - \frac{q}{12N} \right]$	$\frac{[2-q][1-q]}{N^2} \left[\frac{\zeta(q)}{N^{-q-1}} - \frac{\zeta(q-1)}{N^{-q}} + \frac{1}{6} \right]$
R2 ($q < 0$)	0	0	$\frac{2-q}{N^2} \left[\frac{\zeta(1-q)}{N^{-q}} + \frac{1-q}{12} \right]$
L1 $0 \leq q < 1$	0	0	$\frac{2-q}{N^2} \left[\frac{\zeta(1-q)}{N^{-q}} + \frac{1-q}{12} \right]$
L2 $1 \leq q < 2$	0	0	$\frac{2-q}{N}$

$$\frac{d^q C}{dx^q} = \frac{x^{-q} N^q}{\Gamma(-q)} C \sum_{j=0}^{N-1} \frac{\Gamma(j-q)}{\Gamma(j+1)} = \frac{C x^{-q} N^q}{\Gamma(-q)} \frac{\Gamma(N-q)}{\Gamma(1-q)\Gamma(N)}$$

elde ederiz. Burada tam diferintegral

$$\frac{d^q C}{dx^q} = \frac{C x^{-q}}{\Gamma(1-q)}$$

olmasına karşın

$$\left(\frac{d^q C}{dx^q} \right)_{G1} = \frac{C x^{-q} N^q}{\Gamma(1-q)} \frac{\Gamma(N-q)}{\Gamma(N)}$$

olduğundan hata terimi

$$(\varepsilon(C))_{G1} = \frac{N^q \Gamma(N-q)}{\Gamma(N)} - 1 \sim \frac{q[q+1]}{2N} + O(N^{-2})$$

olur.

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^q x}{dx^q} \right)_{R1} &= \frac{x^{-q} N^q}{\Gamma(1-q)} \sum_{j=0}^{N-1} \frac{[N-j]x + [N-j-1]x - jf_{j+1}}{2N} \{ [j+1]^{-q} - j^{-q} \} \\ &= \frac{x^{1-q} N^{q-1}}{2\Gamma(1-q)} \left[\sum_{j=1}^N [2N-2j+1] j^{-q} - \sum_{j=0}^{N-1} [2N-2j-1] j^{-q} \right] \\ &= \frac{x^{1-q} N^{q-1}}{2\Gamma(1-q)} \left[N^{-q} + 2 \sum_{j=1}^{N-1} j^{-q} \right] \end{aligned}$$

denklemini ile başlayarak daha fazla ilerlemek için

$$\sum_{j=1}^{N-1} j^{-q} \sim \zeta(q) + \frac{N^{1-q}}{1-q} + \frac{N^{-q}}{2} - \frac{qN^{-q-1}}{12} + O(N^{-q-3})$$

ile verilen asimptotik açılım kullanılır. Daha sonra $\frac{x^{1-q}}{\Gamma(2-q)}$ ifadesinin x ' in tam diferintegrالی olduğu hatırlanırsa, $N \rightarrow \infty$ için uygun bağıl hata terimi olarak

$$(\varepsilon(x))_{R1} \sim \frac{[1-q]\zeta(q)}{N^{1-q}} - \frac{q[1-q]}{12N^2} + O(N^{-4})$$

ifadesi elde edilir [15].

L2-algoritmasını tanımlayan (2.2.12)' de $f_j = \frac{[N-j]^2 x^2}{N^2}$ olarak,

$$\left(\frac{d^q x^2}{dx^q} \right)_{L2} = \frac{x^{-q} N^q}{\Gamma(3-q)} \left[\frac{2-q}{N^{q-1}} \left\{ \frac{x}{N} \right\}^2 + \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \frac{2x^2}{N^2} \right\} \left\{ [j+1]^{2-q} - j^{2-q} \right\} \right]$$

$$\left(\frac{d^q x^2}{dx^q} \right)_{L2} = \frac{2x^{2-q}}{\Gamma(3-q)} \left[\frac{2-q}{2N} + 1 \right] = \frac{d^q x^2}{dx^q} \left[\frac{2-q}{2N} + 1 \right]$$

bulunur [15].

Tasarlanan kesirli türev algoritmalarının tümü

$$\left(\frac{d^q f}{dx^q} \right)_{Al} = \frac{N^q}{x^q} \sum_{j=-1}^N w_j(q) \quad (2.2.13)$$

şeklinde ifade edilebilir türdendir. Burada $w_j(q)$ değeri j , q ve ek adımcı algoritmaya bağlı olan ve fakat N veya f 'e bağlı olmayan ağırlık faktörüdür. Çoğu algoritma için $-1 \leq j \leq N$ aralığının iki uçları yakınında ağırlık faktörlerinin değerleri atıptır ve j aralığının ortasında uygulanabilen $w_j(q)$ formülünden hesaplanamaz [15].

Aslında, (2.2.10) ve (2.2.11) tanımlarının farklılıklarına karşın, bu iki algoritma aynıdır. Dolayısıyla bu bağlantıya atıfta bulunmak için “RL-algoritması” terimini kullanacağız.

Bu noktada, muhtelif algoritmaların avantaj ve dezavantajlarını gözden geçirmek uygundur. G-algoritmaları değerlidir. Çünkü tüm q değerlerini kapsarlar, uygun bir çarpma-toplama şeması ile uygulanabilirler ve gama fonksiyonlarına ihtiyaç duymazlar. Bununda ötesinde G1-algoritması f_N verisini kullanmadığı için tektir ve bu algoritmanın $x = 0$ da sonsuz olan $\ln x$ ve $\frac{1}{\sqrt{x}}$ e benzer fonksiyonların difintegrasyonlarının alımında kullanılmasına izin verir. R1-algoritması negatif q için sınırlı olan bir formülden tasarlanmıştır, doğruluk açısından RL-algoritmalarından geridir, fakat önemli ölçüde basittir. RL- algoritması etkin ve oldukça basit bir algoritmadır, aslında bu algoritma rutin çalışmalarımızda benimsediğimiz algoritmadır [15, 17]. $1 \leq q < 2$ aralığı için tasarlanan L2- algoritmasının uygulanması karmaşıktır ve

(G2- algoritmasıyla uyumlu olarak) bir f_{-1} verisini gerektirir. Bu durum ise bazı fiziksel uygulamalarda yerine getirilemeyen bir gereksinimdir [15].

R2- ve L1-algoritmalarının kimliği bir algoritmanın sınırlı bir q aralığı için difintegrasyon amacı ile tasarlanmış olmasına karşın daha geniş bir aralık üzerinde etkili bir şekilde performans sergileyebileceğini göstermektedir.

2.3 Chebyshev Polinomları

“Chebyshev polinomları nümerik analizin her yerinde yoğun bir şekilde vardılar”

Bu cümle birçok önde gelen matematikçi ve nümerik analiziye atfedilir. Chebyshev polinomların beklenmeyen misafir gibi ortaya çıkmadığı nümerik analizin herhangi bir alanı yok gibidir. Her ne kadar modern gelişmelerde tüm polinomlar önemli bir konuma sahip olsalar da Chebyshev polinomların ele alınması kişiyi nümerik analizin tüm alanlarına götüren bir yolculuğa çıkarır. Yani Chebyshev polinomları dar bir konu olmaktan ziyade öğrencilere nümerik analiz ve matematiğin bir çok alanına geniş çaplı ve birleştirici bir giriş fırsatı sunar.

2.3.1 Trigonometrik tanımlar

Chebyshev polinomlarının bir çok çeşidi vardır. Özellikle $T_n(x)$ ve $U_n(x)$ birinci ve ikinci tip polinomlar $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ Jacobi polinom çifti veya üçüncü ve dördüncü tip Chebyshev polinomlar ile kaydırılmış $T_n^*(x)$, $U_n^*(x)$, $V_n^*(x)$ ve $W_n^*(x)$ polinomları ele alınacaktır. Bazı kaynaklarda Chebyshev polinomu denildiğinde birinci tür $T_n(x)$ polinomu kastedilir. Biz de bu çalışma da aksi söylenmedikçe “Chebyshev polinom” ifadesi ile birinci çeşit Chebyshev polinomunu kastedeceğiz.

Chebyshev polinomlarının tanımı ile ilgili birçok seçenek mevcuttur, bu tanımlara gücünü ve ilgisini veren şey bunların cos ve sin fonksiyonları ile yakın ilişkileridir. Sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının doğal olayların tümünde ortaya çıktıklarını ve güçlü yönlerini biliyoruz, işte bu özellik Chebyshev polinomlarını çok yönlü kılan ana unsurdur.

2.3.2 Birinci çeşit $T_n(x)$ polinomu

Birinci çeşit $T_n(x)$ Chebyshev polinomu,

$$T_n(x) = \cos n\theta, \quad x = \cos \theta \quad (2.3.1)$$

bağıntısı ile tanımlanan n -inci dereceden x cinsinden bir polinomdur. Eğer x değişkeninin aralığı $[-1, 1]$ ise o zaman karşılık gelen θ değişkeninin aralığı $[0, \pi]$ kapalı aralığı olarak alınabilir. $x = -1$ için $\theta = \pi$ ve $x = 1$ için ise $\theta = 0$ karşılık geldiğinden bu aralıklar zıt yönde değiştirilir.

De Moivre teoremi sonucu olarak $\cos n\theta$, $\cos \theta$ cinsinden n -inci dereceden bir polinomdur ve

$$\cos 0\theta = 1, \cos 1\theta = \cos \theta, \cos 2\theta = 2\cos^2 \theta - 1,$$

$$\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta, \cos 4\theta = 8\cos^4 \theta - 8\cos^2 \theta + 1, \dots$$

elementer formüllerini biliyoruz.

(2.3.1) kullanılarak ilk bir kaç Chebyshev polinomunun

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, T_2(x) = 2x^2 - 1$$

$$T_3(x) = 4x^3 - 3x, T_4(x) = 8x^4 - 8x^2 + 1, \dots$$

olduğu sonucunu çıkarırız.

Uygulamada her bir $T_n(x)$ Chebyshev polinomu (2.3.1) bağıntısı ne yazık ki kolay ve etkili bir bağıntı değildir. Bunun ötesinde

$$\cos n\theta + \cos(n-2)\theta = 2\cos \theta (\cos(n-1)\theta) \quad (2.3.2)$$

trigonometrik özdeşliği ve (2.3.1) tanımı ile birleştirildiğinde

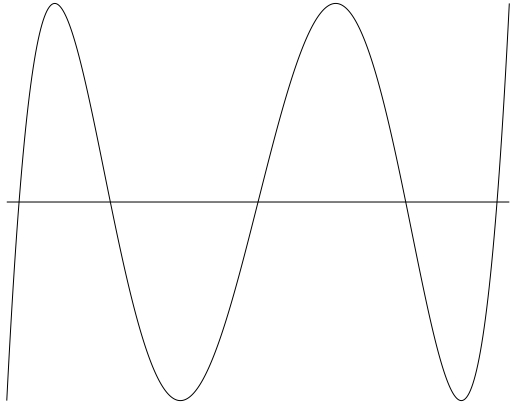
$$T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.3.3)$$

temel rekürans bağıntısı elde edilir. Bu bağıntı

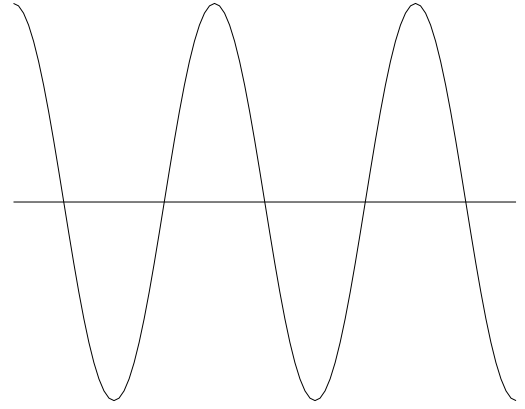
$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

başlangıç şartları ile birlikte ele alındığında tüm $\{T_n(x)\}$ polinomları çok etkin bir şekilde özyinelemeli olarak elde edilir [18].

$T_n(x)$ polinomunun grafiği nasıl görünür ve x değişkeni cinsinden verilen bir grafik θ değişkeni cinsinden verilen $\cos n\theta$ nin grafiği ile nasıl karşılaştırılır. Şekil 2.2'de $T_5(x)$ $\cos 5\theta$ 'nin grafikleri verilmiştir. $T_5(x)$ in $[-1, 1]$ kapalı aralığında verilen grafiği $[0, \pi]$ aralığında $\cos 5\theta$ 'nin grafiğine çok benzer olduğu görülmektedir. Özellikle her iki grafikte 6 ekstremum nokta



(a) $[-1, 1]$ aralığında $T_5(x)$



(b) $[0, \pi]$ aralığında $\cos 5\theta$

Şekil 2.2 : $[-1, 1]$ aralığında $T_5(x)$ ve $[0, \pi]$ aralığında $\cos 5\theta$ grafikleri

arasında eşit genlikte salınmakta ve işaret değiştirmektedirler. Fakat 3 önemli fark mevcuttur. $T_5(x)$ polinomu $\cos 5\theta$ nın tersine karşılık gelir (yani -1 ile başlamış 1 ile bitmiştir.); ikinci olarak $T_5(x)$ in $x = \pm 1$ uç noktalarındaki ekstremum değerleri 0 gradyana karşılık gelmez (fakat $\cos 5\theta$ da 0 gradyana karşılık gelir) ve üçüncü olarak $T_5(x)$ in sıfırları ve ekstremum noktaları ± 1 uç noktalarına doğru yığılmışken $\cos 5\theta$ nın sıfır ve ekstremum noktaları eşit aralıktır [18]. Tek ve çift fonksiyon tanımı göz önüne alındığında, x 'in tüm çift kuvvetlerinin çift fonksiyon tek kuvvetlerinin de tek fonksiyon olduğu açıktır. Buradan hareketle n 'nin çift veya tek olmasına göre $T_n(x)$ de ya tek fonksiyon yada çift fonksiyondur [18]. Şekil 2.3'de ilk bir kaç $T_n(x)$ polinomu grafiği verilmiştir.

2.3.3 İkinci çeşit $U_n(x)$ polinomu

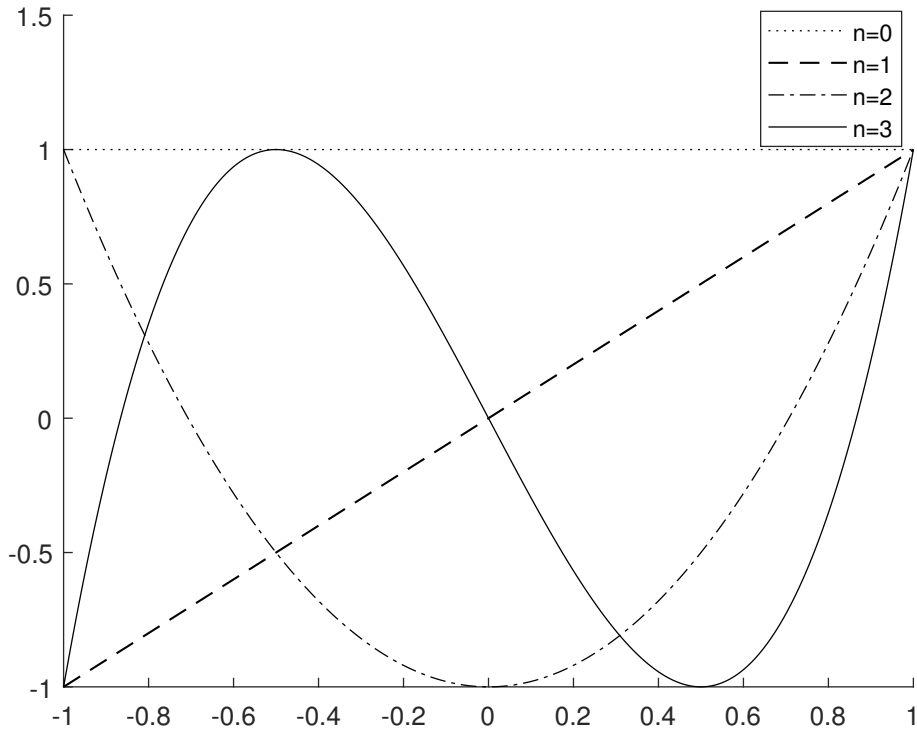
İkinci tür $U_n(x)$ Chebyshev polinomu

$$U_n(x) = \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}, \quad x = \cos\theta \quad (2.3.4)$$

bağıntısı ile tanımlanan x cinsinden n -inci dereceden bir polinomdur. x ve θ 'nin aralıkları $T_n(x)$ ile aynıdır. Elementer formüller

$$\sin 1\theta = \sin\theta, \quad \sin 2\theta = 2\sin\theta \cos\theta,$$

$$\sin 3\theta = \sin\theta (4\cos^2\theta - 1), \quad \sin 4\theta = \sin\theta (8\cos^3\theta - 4\cos\theta), \dots$$



Şekil 2.3 : $T_n(x)$ polinomları grafiği

bağıntılarını verir. Böylece (2.3.4) sinüs fonksiyonlarının oranının aslında $\cos \theta$ cinsinden bir polinom olduğu ve

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x, U_2(x) = 4x^2 - 1,$$

$$U_3(x) = 8x^3 - 4x, \dots$$

sonucu elde edilir. Trigonometrik özdeşlikler yardımıyla

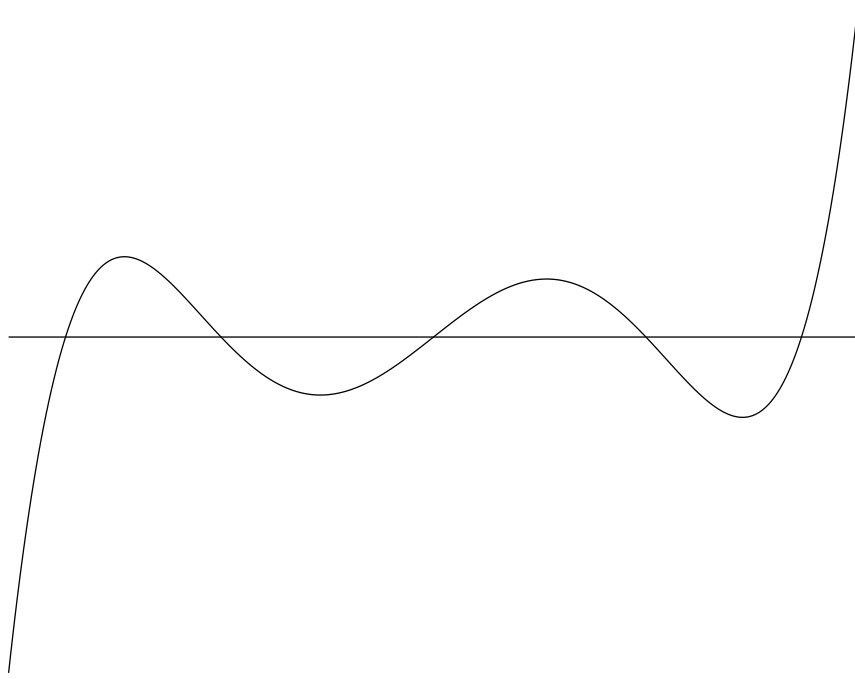
$$\sin(n+1)\theta + \sin(n-1)\theta = 2\cos\theta \sin n\theta$$

olduğundan

$$U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.3.5)$$

rekürans bağıntısı

$$U_0(x) = 1, U_1(x) = 2x,$$



Şekil 2.4 : $[-1, 1]$ aralığında $U_5(x)$

başlangıç şartları ile birlikte elde edilir. Benzer bir trigonometrik bir özdeşlik

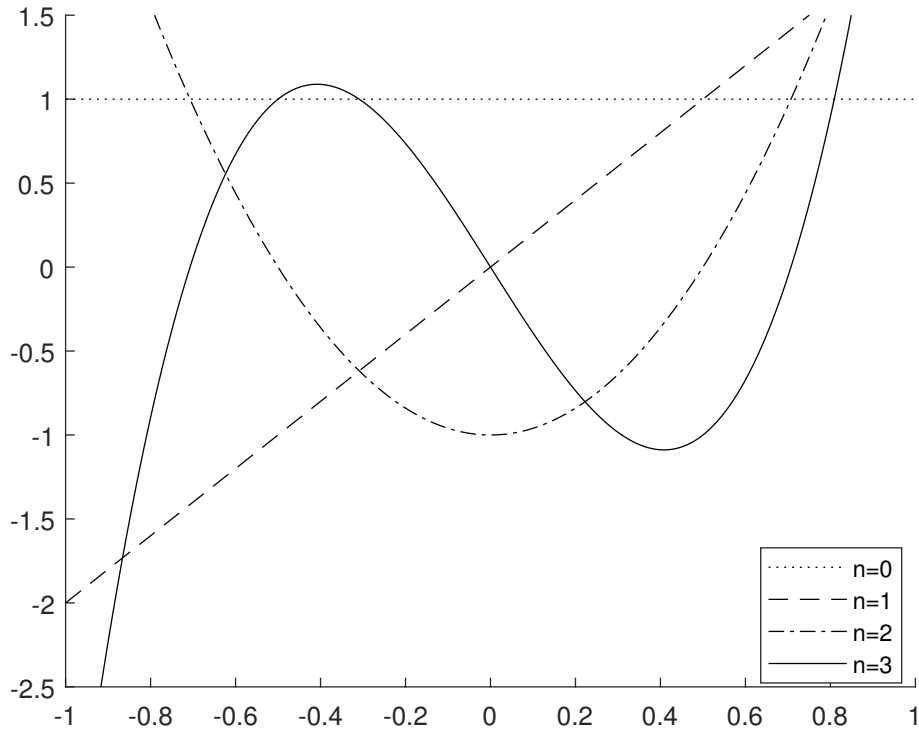
$$\sin(n+1)\theta - \sin(n-1)\theta = 2\sin\theta \cos n\theta$$

olarak yazılabileceğinden, birinci ve ikinci tip Chebyshev polinomları arasındaki rekürans bağıntısı,

$$U_n(x) - U_{n-2}(x) = 2T_n(x), \quad n = 2, 3, \dots \quad (2.3.6)$$

olarak bulunur. (2.3.5) bağıntısından $U_n(x)$ in içinde x^n in katsayısının 2^n olduğu kolayca çıkarılır. (2.3.5) ile $\{U_n(x)\}$ için verilen rekürans bağıntısı $\{T_n(x)\}$ için verilen (2.3.3) bağıntısı ile benzerdir. Farklı başlangıç şartları farklı polinom sistemlerini üretir [18].

Şekil 2.4'den $U_5(x)$ 'in grafiğinin Şekil 2.2'deki $T_5(x)$ 'in grafiğinde olduğu gibi 6 ekstremum nokta arasında salınım yaptığı ve monoton olarak merkezden kenarlara doğru artan genişliklerde sıfır ve ekstremum noktalara sahip olduğu görülmektedir. İkinci çeşit $U_n(x)$ polinomlarında birinci çeşit gibi n nin çift veya tek olmasına göre çift yada tek olduğu açıktır. Şekil 2.5 'de ilk bir kaç $U_n(x)$ polinomu grafiği verilmiştir.



Şekil 2.5 : $U_n(x)$ polinomları grafiği

2.3.4 Üçüncü ve dördüncü tip $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ polinomları

$T_n(x)$ ve $U_n(x)$ ile bağlantılı $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ polinom aileleri de benzer şekilde oluşturulabilir. Fakat bu polinomlar $\frac{\theta}{2}$ yarı açısını içeren trigonometrik tanımlara sahiptir. Bu polinomlara bazen “air foil (hava folyo)” polinomlar denilir [18].

Üçüncü ve dördüncü tür $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ Chebyshev polinomları sırasıyla,

$$V_n(x) = \cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta / \cos\frac{1}{2}\theta, \quad x = \cos\theta \quad (2.3.7)$$

ve

$$W_n(x) = \sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta / \sin\frac{1}{2}\theta, \quad x = \cos\theta \quad (2.3.8)$$

bağıntıları ile tanımlanan x cinsinden n . dereceden polinomlardır. Bu tanımlamaları doğrulamak için $\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta$ nın $\cos\frac{\theta}{2}$ cinsinden $(2n + 1)$ -inci dereceden tek polinom olduğunu göz önüne

alalım. Dolayısıyla (2.3.7) 'nin sağ tarafı $\cos \frac{\theta}{2}$ cinsinden $2n$ -inci dereceden çift polinomdur ve $\cos^2 \frac{\theta}{2}$ cinsinden n -inci dereceden bir polinoma ve dolayısıyla da $\cos \theta$ cinsinden n -inci dereceden bir polinoma denktir. Aslında $V_n(x)$ x cinsinden n -inci dereceden bir polinomdur [18].

Örneğin

$$V_1(x) = \frac{\cos\left(1 + \frac{1}{2}\right)\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} = \frac{4\cos^3 \frac{1}{2}\theta - 3\cos \frac{1}{2}\theta}{\cos \frac{1}{2}\theta} = 4\cos^2 \frac{1}{2}\theta - 3 = 2\cos \theta - 1 = 2x - 1$$

biçiminde kolayca yazılabilir ve (2.3.7) bağıntısı yardımı ile üçüncü tip Chebyshev polinomlarından bazıları

$$V_0(x) = 1, \quad V_1(x) = 2x - 1, \quad V_2(x) = 4x^2 - 2x - 1,$$

$$V_3(x) = 8x^3 - 4x^2 - 4x + 1, \dots$$

şeklinde elde edilir.

Benzer bir şekilde $\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta$, $\sin \frac{\theta}{2}$ cinsinden $(2n + 1)$ -inci dereceden tek bir polinomdur. Dolayısıyla (2.3.8) bağıntısının sağ tarafı $\sin \frac{\theta}{2}$ cinsinden $2n$ -inci dereceden bir çift polinomdur. Bu da $\sin^2 \frac{\theta}{2}$ cinsinden n -inci dereceden polinoma eşittir ve böylece yine $\cos \theta$ cinsinden n -inci dereceden bir polinoma denk olur. Örneğin

$$W_1(x) = \frac{\sin\left(1 + \frac{1}{2}\right)\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} = \frac{3\sin \frac{1}{2}\theta - 4\sin^3 \frac{1}{2}\theta}{\sin \frac{1}{2}\theta} = -4\sin^2 \frac{1}{2}\theta + 3 = 2\cos \theta + 1 = 2x + 1$$

elde edilir. (2.3.8) yardımı ile

$$W_0(x) = 1, \quad W_1(x) = 2x + 1, \quad W_2(x) = 4x^2 + 2x - 1,$$

$$W_3(x) = 8x^3 + 4x^2 - 4x - 1, \dots$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Aslında $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ polinomları $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ Jacobi polinomlarının $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ ve yerlerinin değişmesi ile elde edilen polinomların yeniden ölçeklenmesi ile elde edilen polinomlardır. Daha açık olarak

$$\binom{2n}{n} V_n(x) = 2^{2n} P_n^{(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})}(x), \quad \binom{2n}{n} W_n(x) = 2^{2n} P_n^{(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})}(x)$$

şeklinde dir. Bu polinomlar da rekürans bağıntısının kullanımı ile etkin bir şekilde üretilebilir.

Şimdi,

$$\cos\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \cos\left(n - 2 + \frac{1}{2}\right)\theta = 2\cos\theta \cos\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)\theta$$

ve

$$\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\theta + \sin\left(n - 2 + \frac{1}{2}\right)\theta = 2\cos\theta \sin\left(n - 1 + \frac{1}{2}\right)\theta$$

trigonometrik bağıntılar arasındaki ilişkiden yararlanarak

$$V_n(x) = 2xV_{n-1}(x) - V_{n-2}(x), \quad n = 2, 3, \dots, \quad (2.3.9)$$

rekürans bağıntısı

$$V_0(x) = 1, \quad V_1(x) = 2x - 1 \quad (2.3.10)$$

başlangıç şartları ile ve

$$W_n(x) = 2xW_{n-1}(x) - W_{n-2}(x) \quad n = 2, 3, \dots, \quad (2.3.11)$$

rekürans bağıntısı

$$W_0(x) = 1, \quad W_1(x) = 2x + 1 \quad (2.3.12)$$

başlangıç şartları ile elde edilir.

Dolayısı ile $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ polinomları $T_n(x)$ ve $U_n(x)$ polinomlarındaki aynı rekürans bağıntısını paylaşırlar ve oluşturulmalarında sadece $n = 1$ için başlangıç şartının tanımı açısından farklılık gösterirler. (2.3.9)-(2.3.12) bağıntılarından hem $V_n(x)$ hem de $W_n(x)$ in x cinsinden n -inci dereceden polinom oldukları x 'in bütün kuvvetlerini içerdikleri ve x^n 'in katsayısının 2^n 'e eşit olduğu açıktır [18].

2.3.5 Dört tür polinom arasındaki bağıntılar

(2.3.6) ile $T_n(x)$ ve $U_n(x)$ polinomları arasında verilen bağıntı zaten verildi. Şimdi $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ polinomlarını $T_n(x)$ ve $U_n(x)$ polinomları ile ilişkilendirmek gerekir. Bunun için

$$u = \left[\frac{1}{2}(1+x)\right]^{\frac{1}{2}} = \cos\frac{1}{2}\theta, \quad t = \left[\frac{1}{2}(1-x)\right]^{\frac{1}{2}} = \sin\frac{1}{2}\theta \quad (2.3.13)$$

şeklinde iki yardımcı değişken tanımlanır. (2.3.7) ve (2.3.8) bağıntılarından ve $T_n(x)$ ve $U_n(x)$ polinomlarının tanımından

$$T_n(x) = T_{2n}(u), \quad U_n(x) = \frac{1}{2}u^{-1}U_{2n+1}(u) \quad (2.3.14)$$

$$V_n(x) = u^{-1}T_{2n+1}(u), \quad W_n(x) = U_{2n}(u) \quad (2.3.15)$$

elde edilir.

Dolayısı ile $T_n(x)$, $U_n(x)$, $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ polinomları birlikte u cinsinden birinci ve ikinci tür polinomları, tek derece durumunda da u^{-1} ile ağırlıklı olan polinomları oluştururlar. Aynı zamanda (2.3.15) bağıntısı $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ polinomlarının doğrudan sırası ile birinci ve ikinci çeşit Chebyshev polinomları ile bağlantılı olduğunu ve dolayısı ile de “üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomları” terminolojisinin haklı olduğunu gösterir [18].

Yukarıdaki tartışmalardan $V_n(x)$ ve $W_n(x)$ in özelliklerini oluşturmak istediğimizde iki seçeneğe sahip olduğumuzu görürüz. Trigonometrik bağıntılardan başlayabileceğimiz gibi $T_n(x)$, $U_n(x)$ 'in (2.3.14)-(2.3.15) bağlantıları kullanılarak da bu işe başlanılabilir.

$V_n(x)$ ve $W_n(x)$ polinomları $T_n(x)$ ve $U_n(x)$ polinomlarının aksine ne çift ne de tektirler. Hem $V_n(x)$ hem de $W_n(x)$ in polinomlarında $U_n(x)$ polinomunda olduğu gibi x^n in katsayısının 2^n olduğu görülür, bu durum $U_n(x)$ ile yakın bir bağlantı sunar. Aslında V_1 ve W_1 'in başlangıç şartlarının ortalaması alınırsa U_1 için başlangıç şartı elde edilir.

n 'nin tek/çift olma durumuna göre $U_n(x)$ 'in teklik/çiftlik durumunda

$$\begin{aligned} W_n(x) &= V_n(-x), & n \text{ çift ise} \\ W_n(x) &= -V_n(-x), & n \text{ tek ise} \end{aligned} \quad (2.3.16)$$

elde edilir. Bu denklem aslında $[-1, 1]$ kapalı aralığı tersine çevrildiğinde üçüncü ve dördüncü tür polinomların birbirine dönüştüğü anlamına gelir. Bu bize bu polinomlardan sadece birini çalışmanın yeterli olduğunu gösterir.

Bu tanımlamalardan türetilebilecek iki daha öte bağıntı

$$V_n(x) + V_{n-1}(x) = W_n(x) - W_{n-1}(x) = 2T_n(x) \quad (2.3.17)$$

ile türetilbilir.

2.3.6 $T_n^*(x), U_n^*(x), V_n^*(x)$ ve $W_n^*(x)$ kaydırılmış Chebyshev polinomları

$[0, 1]$ kapalı aralığı $[-1, 1]$ aralığına göre kullanım açısından daha uygun olduğu için bazen $[0, 1]$ aralığındaki n bağımsız x değişkenini $[-1, 1]$ aralığındaki s değişkenine

$$s = 2x - 1 \text{ veya } x = \frac{1}{2}(1 + s)$$

dönüşümü ile eşleştiririz ve bu $[0, 1]$ kapalı aralığında x cinsinden n -inci dereceden birinci tür $T_n^*(x)$ kaydırılmış

$$T_n^*(x) = T_n(s) = T_n(2x - 1) \quad (2.3.18)$$

ile Chebyshev polinomunu verir. Dolayısıyla

$$T_0^*(x) = 1, \quad T_1^*(x) = 2x - 1, \quad T_2^*(x) = 8x^2 - 8x + 1, \quad T_3^*(x) = 32x^3 - 48x^2 + 18x - 1, \quad \dots \quad (2.3.19)$$

kaydırılmış Chebyshev polinomlarını elde ederiz [18].

(2.3.3) ve (2.3.18) bağıntılarından $T_n^*(x)$ için

$$T_0^*(x) = 1, \quad T_1^*(x) = 2x - 1 \quad (2.3.20)$$

başlangıç şartına sahip

$$T_n^*(x) = 2(2x - 1)T_{n-1}^*(x) - T_{n-2}^*(x) \quad (2.3.21)$$

rekürans bağıntısı elde edilir.

$T_n^*(x)$ polinomları bunun da ötesinde (2.3.1) ve (2.3.18) bağıntılarından türetilen $T_{2n}(x) = \cos 2n\theta = \cos n(2\theta) = T_n(\cos 2\theta) = T_n(2x^2 - 1) = T_n^*(x^2)$ ve böylece

$$T_{2n}(x) = T_n^*(x^2) \quad (2.3.22)$$

özelliğine sahiptir. Bu bağıntı $\{T_n(x)\}$ ve $\{T_n^*(x)\}$ arasında önemli bir bağlantı verir ve kaydırma ilişkisini tamamlar.

$T_n^*(x)$ 'ı $T_n(x)$ ve $U_n(x)$ gibi doğrudan trigonometrik bağıntılarla da tanımlamak mümkündür. Kaydırılmış Chebyshev $T_n^*(x)$ inde ne çift ne de tek olmadığına aslında x 'in 0 dan n 'e kadar

tüm kuvvetlerinin $T_n^*(x)$ de gözüktüğüne dikkat ediniz. $n > 0$ için $T_n^*(x)$ de x^n 'in katsayısının 2^{2n-1} olduğu çıkarılabilir.

İkinci, üçüncü ve dördüncü tür $U_n^*(x), V_n^*(x)$ ve $W_n^*(x)$ kaydırılmış polinomlarında tamamen benzer yollarla tanımlanabilir.

$$U_n^*(x) = U_n(2x-1), \quad V_n^*(x) = V_n(2x-1), \quad W_n^*(x) = W_n(2x-1) \quad (2.3.23)$$

$U_n^*(x), V_n^*(x)$ ve $W_n^*(x)$ ve yıldızsız polinomlar arasındaki bağıntı kolaylıkla oluşturulabilir. Örneğin (2.3.4) ve (2.3.23) kullanılarak

$$\begin{aligned} \sin \theta U_{2n-1}(x) &= \sin 2n\theta = \sin n(2\theta) = \sin 2\theta U_{n-1}(\cos 2\theta) \\ &= 2 \sin \theta \cos \theta U_{n-1}(2x^2-1) = \sin \theta \{2x U_{n-1}^*(x^2)\} \end{aligned}$$

ve böylece

$$U_{2n-1}(x) = 2x U_{n-1}^*(x^2) \quad (2.3.24)$$

elde edilir.

$V_n^*(x)$ ve $W_n^*(x)$ için karşılık gelen bağıntılar T_{2n-1} ve U_{2n} 'i içeren (2.3.22) ve (2.3.24)'ü tamamladıkları için biraz farklıdır. (2.3.13), (2.3.15) ve (2.3.23) kullanılarak u yerine x yazarak

$$T_{2n-1}(x) = x V_{n-1}^*(x^2) \quad (2.3.25)$$

ve benzer şekilde

$$U_{2n}(x) = W_n^*(x^2) \quad (2.3.26)$$

elde edilir [18].

2.3.7 Genel $[a, b]$ kapalı aralığında Chebyshev polinomlar

Son kısımda $[-1, 1]$ kapalı aralığı kullanım kolaylığı için $[0, 1]$ kapalı aralığına dönüştürüldü ve bu durum $T_n(x), U_n(x), V_n(x)$ ve $W_n(x)$ polinomları yerine sırası ile $T_n^*(x), U_n^*(x), V_n^*(x)$ ve $W_n^*(x)$ kaydırılmış Chebyshev polinomlarının kullanımına karşılık geldi. Daha genel olarak

Chebyshev polinomları x 'in verilen herhangi bir sonlu $[a, b]$ kapalı aralığına uygun tanımı verilebilir. Bu aralık $[-1, 1]$ kapalı aralığına

$$s = \frac{2x - (a + b)}{b - a} \quad (2.3.27)$$

lineer dönüşümü altında yeni bir s değişkeni tanımlanarak yapılır. Dolayısı ile $[a, b]$ aralığında birinci tür Chebyshev polinomları $T_n(s)$, burada s (2.3.27) ile verilmiştir ve benzer şekilde $[a, b]$ aralığında ikinci, üçüncü ve dördüncü tür polinomlar $U_n(s)$, $V_n(s)$ ve $W_n(s)$ olarak verilir.

Örneğin, $[1, 4]$ kapalı aralığında üçüncü dereceden birinci tür Chebyshev polinomu x cinsinden

$$T_3\left(\frac{2x-5}{3}\right) = 4\left(\frac{2x-5}{3}\right)^3 - 3\left(\frac{2x-5}{3}\right) = \frac{1}{27}(32x^3 - 240x^2 + 546x - 365)$$

dir. $[a, b] \equiv [0, 1]$ durumunda (2.3.27) dönüşümünde $s = 2x - 1$ olur ve kaydırılmış Chebyshev polinomlarını elde ederiz.

Geniş tanım aralığı, türevlenebilme ve integrallenebilmenin kolay olması özellikleri nedeniyle polinomlar ve polinom yaklaşımları sıkça kullanılır. Chebyshev polinomları Rus matematikçi Chebyshev (1821-1894) tarafından ortaya atılmış ve C. Lanczos tarafından da 1930'lu yıllarda uygulanmaya başlanmıştır.

2.4 Ortogonal Polinomlar

2.4.1 Ortogonal polinomlar ve ağırlık fonksiyonları

Tanım 2.4.1. $f(x)$ ve $g(x)$ gibi iki fonksiyon $L_2[a, b]$ 'de $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde verilen bir sürekli ve negatif olmayan $w(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre eğer

$$\int_a^b w(x) f(x) g(x) dx = 0 \quad (2.4.1)$$

şartı sağlanıyorsa ortogondirler denir.

Eğer kolaylık olsun diye

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b w(x) f(x) g(x) dx \quad (2.4.2)$$

'iç çarpım' gösterimi kullanılırsa, burada w , f ve g $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde x ' e bağlı fonksiyonlardır, o zaman (2.4.1) ile verilen ortogonallik şartı aşağıdaki eşitlik

$$\langle f, g \rangle = 0$$

sağlanıyorsa f 'nin g 'ye ortogonal olduğunu söylemeye denk olur.

Tanım 2.4.2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ile gösterilen bir iç çarpım, bir vektör uzayının f, g, h, \dots elementlerinin aşağıdaki aksiyomları sağlayan bir bilineer fonksiyonudur

1. $\langle f, f \rangle \geq 0$ eşitlik sade ve sadece $f \equiv 0$ olduğunda söz konusudur;
2. $\langle f, g \rangle = \langle g, f \rangle$
3. $\langle f + g, h \rangle = \langle f, h \rangle + \langle g, h \rangle$;
4. $\langle \alpha f, g \rangle = \alpha \langle f, g \rangle$ herhangi bir skalar α sayısı için.

Bir iç çarpım

$$\|f\| = \|f\|_2 := \sqrt{\langle f, f \rangle} \quad (2.4.3)$$

şeklinde bir L_2 -tipi norm tanımlar.

Burada biz özel olarak $\{\phi_i(x), i = 0, 1, 2, \dots\}$ ortogonal polinomların ailesi ile ilgileneceğiz. Bu tanımda ϕ_i tam olarak i . dereceden ve

$$\langle \phi_i, \phi_j \rangle = 0 \quad (i \neq j) \quad (2.4.4)$$

olacak şekilde tanımlıdır.

Açık olarak $w(x)$ negatif olmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\langle \phi_i, \phi_i \rangle = \|\phi_i\|^2 > 0$$

şartı sağlanır.

ϕ_i 'lerin tam olarak i . dereceden olmaları gerekliliğinin yanında (2.4.4) ile verilen ortogonallik şartının da olması her bir ϕ_i polinomunu sabit bir katsayı ile çarpımdan elde

edilmekten öte tek olarak elde edilmesi tanımlar. Bu tanım $\langle \phi_i, \phi_i \rangle$ değerinin veya onun karakökü olan $\|\phi_i\|$ ifadesinin sabit kılınması ile tek/istisnasız hale getirilebilir. Özel olarak, biz (2.4.4)'e ek olarak $\{\phi_i(x)\}$ fonksiyonları

$$\|\phi_i\| = 1, \quad \forall i$$

şartını da sağlıyorsa bu ailenin ortonormal olduğunu söyleriz.

2.4.2 Ortogonal polinomlar olarak Chebyshev polinomları

Eğer (2.4.2) ile verilen iç çarpımı $[a, b] = [-1, 1]$ aralığı ve $w(x) = (1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$, ağırlık fonksiyonunu kullanarak tanımlarsak o zaman birinci tür Chebyshev polinomlarının

$$\begin{aligned} \langle T_i, T_j \rangle &= \int_{-1}^1 \frac{T_i(x) T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_0^\pi \cos i\theta \cos j\theta d\theta \end{aligned}$$

şartını sağladığını bulmuş oluruz ($x = \cos \theta$ eşitliğini alarak ve $T_i(x) = \cos i\theta$ ve $dx = -\sin \theta d\theta = -\sqrt{1-x^2} d\theta$ eşitliklerini kullanarak).

Şimdi $i \neq j$ için

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \cos i\theta \cos j\theta d\theta &= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(i+j)\theta + \cos(i-j)\theta] d\theta \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{\sin(i+j)\theta}{i+j} + \frac{\sin(i-j)\theta}{i-j} \right]_0^\pi \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur.

Dolayısıyla

$$\langle T_i, T_j \rangle = 0 \quad (i \neq j)$$

olur ve $\{T_i(x), i = 0, 1, \dots\}$ fonksiyonları $[-1, 1]$ kapalı aralığı üzerinde $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre bir ortogonal polinom sistemi oluştururlar.

T_i 'nin normu

$$\begin{aligned}
\| T_i \|^2 &= \langle T_i, T_i \rangle \\
&= \int_0^\pi (\cos i\theta)^2 d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi (1 + \cos 2i\theta) d\theta \\
&= \frac{1}{2} \left[\theta + \frac{\sin 2i\theta}{2i} \right]_0^\pi \quad (i \neq 0) \\
&= \frac{1}{2} \pi
\end{aligned}$$

ile verilirken

$$\| T_0 \|^2 = \langle T_0, T_0 \rangle = \langle 1, 1 \rangle = \pi \quad (2.4.5)$$

olur. Dolayısıyla $\{T_i\}$ sistemi ortonormal değildir. Fakat istersek biz ortonormal sistem üretmek için polinomları

$$\sqrt{\frac{1}{\pi}} T_0(x), \left\{ \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_i(x), i = 1, 2, \dots \right\}$$

şeklinde ölçeklendirebiliriz, fakat sonuçta elde edilen irrasyonel katsayılar bunu uygun kılmaz. Başlangıçta tanımladığımız $\{T_i\}$ leri benimsemek ve onların (2.4.5) norm değerlerini hesaba katmak uygulamada daha basittir.

İkinci, üçüncü ve dördüncü çeşit Chebyshev polinomları da $[-1, 1]$ kapalı aralığı üzerinde

- $U_i(x)$ ler $w(x) = (1 - x^2)^{\frac{1}{2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre
- $V_i(x)$ ler $w(x) = (1 + x)^{\frac{1}{2}} (1 - x)^{-\frac{1}{2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre
- $W_i(x)$ ler $w(x) = (1 + x)^{-\frac{1}{2}} (1 - x)^{\frac{1}{2}}$ ağırlık fonksiyonuna göre

ortogonaldirler [18]. Bu sonuçlar aşağıdaki şekilde trigonometrik bağıntılardan elde edilmişlerdir (her bir durumda $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 'nin uygun tanımı kullanılarak)

$$\begin{aligned}
\langle U_i, U_j \rangle &= \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} U_i(x) U_j(x) dx \\
&= \int_{-1}^1 (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} U_i(x) (1 - x^2)^{\frac{1}{2}} U_j(x) dx
\end{aligned}$$

$\sin \theta U_i(x) = \sin(i + 1) \theta$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\langle U_i, U_j \rangle &= \int_0^\pi \sin(i+1)\theta \sin(j+1)\theta d\theta \\
&= \frac{1}{2} \int_0^\pi [\cos(i-j)\theta - \cos(i+j+2)\theta] d\theta \\
&= 0 \quad (i \neq j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle V_i, V_j \rangle &= \int_{-1}^1 (1-x)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} V_i(x) V_j(x) dx \\
&= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1+x)^{\frac{1}{2}} V_i(x) (1+x)^{\frac{1}{2}} V_j(x) dx \\
&= 2 \int_0^\pi \cos\left(i + \frac{1}{2}\right)\theta \cos\left(j + \frac{1}{2}\right)\theta d\theta \\
&\quad \left(\begin{array}{l} (1+x)^{\frac{1}{2}} = (1+\cos\theta)^{\frac{1}{2}} = (2\cos^2\frac{1}{2}\theta)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\cos\frac{1}{2}\theta \\ \text{ve } (1+x)^{\frac{1}{2}} V_i(x) = \sqrt{2}\cos\left(i + \frac{1}{2}\right)\theta \text{ olduğundan} \end{array} \right) \\
&= \int_0^\pi [\cos(i+j+1)\theta + \cos(i-j)\theta] d\theta \\
&= 0 \quad (i \neq j)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\langle W_i, W_j \rangle &= \int_{-1}^1 (1+x)^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} W_i(x) W_j(x) dx \\
&= \int_{-1}^1 (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} (1-x)^{\frac{1}{2}} W_i(x) (1-x)^{\frac{1}{2}} W_j(x) dx \\
&= 2 \int_0^\pi \sin\left(i + \frac{1}{2}\right)\theta \sin\left(j + \frac{1}{2}\right)\theta d\theta \\
&\quad \left(\begin{array}{l} (1-x)^{\frac{1}{2}} = (1-\cos\theta)^{\frac{1}{2}} = (2\sin^2\frac{1}{2}\theta)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}\sin\frac{1}{2}\theta \\ (1-x)^{\frac{1}{2}} W_i(x) = \sqrt{2}\sin\left(i + \frac{1}{2}\right)\theta \end{array} \right) \\
&= \int_0^\pi [\cos(i-j)\theta - \cos(i+j+1)\theta] d\theta \\
&= 0 \quad (i \neq j).
\end{aligned}$$

Bu polinomlara karşılık gelen normalizasyonlar aşağıdaki gibidir (tüm $i \geq 0$ için):

$$\langle U_i, U_i \rangle = \|U_i\|^2 = \int_0^\pi \sin^2(i+1)\theta d\theta = \frac{1}{2}\pi$$

$$\langle V_i, V_i \rangle = \|V_i\|^2 = 2 \int_0^\pi \cos^2\left(i + \frac{1}{2}\right)\theta d\theta = \pi$$

$$\langle W_i, W_i \rangle = \| W_i \|^2 = 2 \int_0^\pi \sin^2 \left(i + \frac{1}{2} \right) \theta d\theta = \pi$$

(Bu üç özdeşliklerden her birinin iç çarpım $\langle \cdot, \cdot \rangle$ ' in farklı tanımlarını kullandığını çünkü $w(x)$ ağırlıklarının değişiklik gösterdiğini hatırlayınız).



3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Kesirli Mertebeden Schrödinger Denklemi

Lineer olmayan Schrödinger denklemlerin fiziksel ve biyolojik bilimler gibi birçok bilimsel alanda çeşitli uygulamaları vardır. Özellikle, akışkan dinamikler, genellikle lineer olmayan optikler, nükleer fizik, kuantum mekaniği, sismoloji ve plazma fiziği bilimsel çalışmalar mevcuttur [3, 4]. Son zamanlarda, çeşitli bilimsel alanlarda ki yaygın uygulamaları sayesinde kesirli hesaplamalar öne çıkmıştır. Kesirli türevleri içeren problemlerin analitik çözümlerinin bulunması çok kısıtlı olduğundan, çözümleri ile ilgili nümerik çözüm teknikleri ve yöntemleri ortaya çıkmıştır. Bu sayısal yöntemler hakkındaki çalışmalar [19–25] ile verilen referanslarda bulunabilir.

Bu tez çalışmasında, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$iD_t^\alpha w + w_{xx} + \mu |w|^2 w = F(x, t) \quad (3.1.1)$$

kesirli mertebeden Schrödinger denklemi ve

$$\begin{aligned} iD_t^\alpha u + iu_x + u_{xx} + \varepsilon_1 u + \beta_1 v + \mu_1 (|u|^2 + |v|^2) u &= F_1(x, t) \\ iD_t^\alpha v - iv_x + v_{xx} + \varepsilon_2 u - \beta_2 v + \mu_2 (|u|^2 + |v|^2) v &= F_2(x, t) \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

kesirli mertebeden coupled (ikili) Schrödinger denklemleri uygun başlangıç ve sınır koşulları için $0 < \alpha < 1$ olmak üzere

$$D_t^\alpha w(x, t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} w(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t \frac{w'(x, \tau)}{(t - \tau)^\alpha} d\tau,$$

kesirli mertebeden türev için Caputo anlamında türev [2] kullanılarak ele alındı. Burada spektral kollokasyon yöntemlerinden biri olan Chebyshev dalgacık yöntemi kullanılarak nümerik çözümler elde edilmiştir. Denklemlerdeki kesirli mertebeden türevler Caputo anlamında göz önüne alındı. Bu türevlerin yerine $0 < \gamma \leq 1$ için $b_k^\gamma = (k + 1)^{1-\gamma} - k^{1-\gamma}$ olmak üzere

$$L1 : \frac{\partial^\alpha f(t)}{\partial t^\alpha} = \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2 - \alpha)} \sum_{k=0}^{m-1} b_k^\alpha [f(t_{m-k}) - f(t_{m-1-k})]$$

ile verilen L1 yaklaşımı [15] kullanıldı.

Kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin çözümleri üzerine birçok çalışmalar bulunmaktadır. Örneğin Khan vd. [26] homotopi analiz yöntemini kullanarak kesirli mertebeden

Schrödinger denkleminin yaklaşık çözümlerini bulmuştur. Ford vd. [27] $n + 1$ -boyutlu time-dependent kesirli mertebeden Schrödinger tipi denklemlerin çözümlerini kuantum mekaniksel olasılık yoğunluğu ve dalga fonksiyonları için ifade ederek araştırmalar yapmıştır. Yıldırım [28] homotopi perturbation yöntemini kullanarak problemimizin analitik çözümlerini elde etmek için bir program önermiştir. Rida vd. [29] kesirli mertebeden Schrödinger denklemlerini kolayca hesaplanan bileşenleri ile kuvvet serileri oluşturarak Adomian ayrışım yöntemini kullanarak çözmüştür. Bu çalışmaların yanı sıra Garrappa vd. [30] ise problemi çözmek için Mittag-Leffler fonksiyonları ve tartışmalı yakınsama özelliklerini dikkate alarak çalışmalar yürütmüştür. Wei vd. [9] Caputo anlamında kesirli mertebeden türev ile verilen Schrödinger denklemini çözmek için tam ayrık yerel süreksiz Galerkin sonlu eleman yöntemini kullanmıştır. Mohebbi vd. [31] problemi çözmek için kollokasyon ve Kansa yaklaşımı ile radyal baz fonksiyonlarını kullanarak ağsız tekniği ile çözmüştür. Herzallah and Gepreel [32] Caputo anlamında kesirli mertebeden türev ifade edilerek daha sonra hem zaman hem de konum kesirli türevlerini içeren kübik nonlinear kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin yaklaşık çözümlerini elde etmek için Adomian ayrışım yöntemini kullanmıştır. Aruna and Kanth [33] lineer olmayan kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin yaklaşık çözümleri diferansiyel transform yöntemi, modifiye edilmiş diferansiyel dönüşüm yöntemlerini uygulayıp ve etkilerini inceleyip onların sonuçlarını doğrulamışlardır. Wang and Huang [34] doğrusal olmayan şemalar için gerekli olan zaman alıcı tekrarlamalı prosedürden kaçınarak problemimiz için doğrusallaştırılmış fark şeması öne sürdüler ve sonuçları teorik olanlarla kontrol etmek için nümerik testler kullandılar. Kesirli mertebeden Schrödinger denkleminin çözümleri kuadratik B-spline Galerkin ve kübik B-spline kollakasyon yöntemleri yardımıyla Esen and Tasbozan [35] tarafından elde edildi. Esen vd. [36] konum ve zamana göre kesirli lineer olmayan ikili Schrödinger denklemini sinh-Gordon denklemi açılım yöntemi kullanarak çeşitli optimal tam çözümler elde etmişlerdir.

3.2 Dalgacıklar

Bir asır önceye dayanan dalgacıkların kökeni ilk olarak 1910 yılında Macar asıllı matematikçi Alfred Haar tarafından ortaya atılmıştır [37]. Dalgacıklar belirli gereksinimleri sağlayan fonksiyonlardır [38]. Dalgacık (*wavelet*) kelimesi x ekseninin altında ve üstünde "dalgalanarak" integrallerinin sifıra eşit olması gereksiniminden gelmektedir. Dalgacık kelimesindeki küçük çağrışımı bu fonksiyonun lokalize olması gerektiğini önerir. Diğer

gereksinimler ise tekniktir ve çoğunlukla düz veya ters dalgacık dönüşümünün kolay ve çabuk hesaplanması için gereklidir.

Birçok çeşit dalgacık vardır: düzgün dalgacık, kompakt destekli dalgacık, basit matematiksel ifadeli dalgacık, basit ilişkili filtreler sahip dalgacıklar vb. En basit olanı Haar dalgacıdır. Fourier analizinde sinüs ve kosinüsler gibi, dalgacıklarda diğer fonksiyonların temsilinde baz fonksiyonları olarak kullanılırlar. Dalgacıkların çoğu hoş olan birçok uygulaması mevcuttur. Coifman ve onun Yale ekibi dalgacıkları gürültülü ses kayıtlarını temizlemek için kullandılar. Bunlar içerisinde Brahm'sın piyanodaki İlk Macar Dansı çalışmasının kayıtları da vardı. Bu durum istatistikçilerin dalgacıklardan nasıl faydalanabileceklerine zaten işaret etmektedir. Büyük ve gürültülü veri kümeleri kolay ve çabukça ayrık dalgacık dönüşümü (ayrık Fourier dönüşümünün muadili) ile dönüştürülebilir. Veriler dalgacık katsayıları ile kodlanırlar. Buna ek olarak, Fourier dönüşümde kullanılan "hızlı" sıfatı çoğu durumda dalgacıklar için "daha hızlı" sıfatı ile yer değiştirir. Hızlı Fourier dönüşümün kompleksliğinin $O(n \cdot \log_2(n))$ olduğu iyi bilinen bir gerçektir. Hızlı dalgacık dönüşümü için hesapsal komplekslik $O(n)$ ' e düşer. Şimdi birçok veri işlemi karşılık gelen dalgacık katsayılarının işlenmesi ile yapılabilir [38].

Son yıllarda kesirli mertebeden türev hesaplamaları mühendislik, fizik, kimya, kontrol teorisi, kesirli dinamik gibi birçok alanda ortaya çıkan problemlerin çözümlerini elde etmek için kullanılmıştır. Kesirli mertebeli sistemlerin çözümleri için literatürde sıklıkla karşılaşılan kesirli türev yaklaşımları vardır. Bunlardan en yaygın kullanılanları Riemann Liouville ve Caputo kesirli türev tanımlarıdır. Bu tanımlar gama fonksiyonu, limit, türev ve integral gibi karmaşık işlemlerin bilgisayar ortamında işlenmesi ve analiz edilmesi zordur. Bu yöntemlere alternatif Laplace dönüşüm yöntemi, Kuvvet serisi yöntemi, Adomian ayrışım yöntemi, Homotopi pertübasyon yöntemi ve Homotopi analiz yöntemi gibi yöntemleri kullanılarak kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin analitik ve nümerik çözümleri araştırılmıştır. Son yıllarda bu yöntemlere ek olarak dalgacık yöntemi kullanılmaktadır. Bu yöntemde, türev ve integraller bir işlem matrisi yardımıyla çözülür. Her hangi bir fiziksel sistemden elde edilen verilerin analizi için birçok dönüşüm metodu tanımlanmıştır. Bunlardan en bilindik olanı Fourier dönüşümünü ele alalım. Fourier dönüşümü matematiksel olarak

$$\hat{f}(w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-iwt} dt$$

biçiminde olup t zaman değişkeni, w ise frekansı ifade eder. Fourier dönüşümü ile zamana bağlı $f(t)$ fonksiyonu frekansa bağlı $\hat{f}(w)$ fonksiyonuna dönüştürülür. Bu dönüşüm terstende yapılabilir yani frekansa bağlı bir fonksiyon zamana bağlı bir fonksiyona dönüştürülebilir. Ters Fourier dönüşümü

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{iwt} dw$$

dür. Fourier dönüşümü ile herhangi bir anda meydana gelen fiziksel olayları gözlemlemek mümkün değildir. Yani durağan olmayan veriler için Fourier dönüşümleri uygun değildir. Bu durum Fourier dönüşümünün bir eksikliğidir. $\psi(x)$ dalgacığı (bazen ana dalgacık olarak adlandırılır) sabitlendi mi, ana dalgacığın dönüşüm ve dilatasyonlarını oluşturulabilir $\{\psi(\frac{x-b}{a}), (a, b) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}\}$. Dalgacık bazlarını tanımlamada a ve b için özel değerleri almak uygundur: $a = 2^{-j}$ ve $b = k2^{-j}$, burada k ve j tamsayılardır. a ve b 'nin bu seçimi kritik örnekleme diye adlandırılır ve seyrek bir baz verir. Ek olarak, bu seçim doğal olarak dalgacık dünyasıyla sinyal işlemede çoklu çözüm analizini birbirine bağlar. Dalgacıklara yabancı olanlar sıklıkla neden geleneksel Fourier metotlarının kullanılmadığını sorarlar. Fourier analizi ile dalgacıklar arasında bazı önemli farklılıklar vardır. Fourier baz fonksiyonları frekansça yereldir fakat zamanca yerel değildirler. Fourier dönüşümündeki küçük frekans değişiklikleri zaman bölgesinde her yerde değişiklikler üretecektir. Dalgacıklar hem frekans/ölçek hem de zaman (dönüşüm ile) açısından yereldirler. Bu yerelleşme birçok durumda bir avantajdır. İkinci olarak, birçok fonksiyon sınıfları dalgacıklar tarafından daha kompakt yolla temsil edilebilirler. Mesela, süreksizliğe sahip fonksiyonlar ve keskin çıkıntılı olan fonksiyonlar genellikle makul bir yaklaşımı başarabilmek için sinüs-kosinüs fonksiyonlarına göre oldukça daha az dalgacık baz fonksiyonlarını gerektirirler. Bu seyrek kodlama dalgacıkları veri sıkıştırma harika araçlar haline getirir. Mesela, FBI dijital parmak izi görüntü sıkıştırma dalgacıkların kullanımını standart hale getirmiştir. Sıkıştırma oranları 20 : 1 mertebededir ve orijinal resim ile sıkıştırılan arasındaki fark ancak bir uzman tarafından ayırt edilebilir [38].

Fourier dönüşümünün bir başka dezavantajı ise bir sinyalde küçük bir aralıkta meydana gelen ani değişiklikleri etkili bir şekilde analiz edememesidir. Bu eksiklikler Fourier dönüşümünde kullanılan $(e^{-iwt} = \cos(wt) - i \sin(wt))$ fonksiyonunun $(-\infty, \infty)$ aralığında tanımlı oldukları için incelenen fonksiyonlardaki ani değişiklikleri tespit etmekte uygun değildirler. Dalgacıklar ise bu dezavantajı ortadan kaldırır. Süreksizlik ve ani yükseliş yapan, periyodik olmayan durağan sinyalleri yeniden oluşturmak için geleneksel Fourier dönüşümüne göre daha

fazla avantajlara sahiptir dalgacık dönüşümü. Dalgacıklar konum değişkenine göre iyi lokalize olduklarından yapısında ani değişimler barındıran fonksiyonları daha iyi analiz edebilirler. Fourier dönüşümünün aksine farklı alanlarda kullanılan farklı dalgacık tipleri vardır. Dalgacıkların seçimi uygulanacak olan problemin tipine bağlıdır. Dalgacık dönüşümü temelde sinyal ile dalgacığı yerel eşleştiren ölçeklendirmedir. Dalgacıkların öteleme (x eksenini boyunca dalgacığın merkezi konumu değiştirilmesi) ve ölçekleme gibi iki çeşitli durumu vardır. Dalgacıklar özel bir ölçek ve konumda sinyalle eşleştirilirse, oldukça önemli olan dönüşüm değeri elde edilir. Elde edilen bu değer iki boyutlu dönüşüm düzleminde çizdirilir. Dönüşüm, dalgacığın çeşitli ölçekleri için sinyallerin çeşitli konumlarında hesaplanır. Eğer, bu durum sürekli ve düzgün olarak ilerlediyse, dönüşüm sürekli dalgacık dönüşümü, eğer ölçek ve konum ayrık adımlarda değişiyorsa, dönüşüm ayrık dalgacık dönüşümüdür.

Dalgacıklar kısa süreliğine salınım gösterip sonra yok olan fonksiyonlardır. Dalgacık aileleri baba dalgacık ve ana dalgacık olarak isimlendirilen dalgacıklardan oluşmaktadır. Sırasıyla ana dalgacık ve baba dalgacık ψ ve ϕ sembolleriyle gösterilmektedir. b konum parametresi ve a ölçekleme (*scaling*) parametresi olmak üzere,

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{|a|}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$$

şeklinde verilen, konumsal olarak iyi lokalize olmuş ana dalgacığın ölçeklenip yer değiştirmesiyle elde edilebilirler. Fonksiyonun dalgacık olması için zaman sınırlı olmalıdır.

Dalgacık analizi uygulamalı matematik alanında yeni bir gelişmedir [39]. İlk olarak, deprem analizine Fourier analizinin eksik olduğu bir zaman boyutu sağlamak için sismolojide tanıtıldı. Dalgacıklar jeofizikte sismik araştırmalardan elde edilen verileri analiz etmek için uygulandı [40]. Aslında, jeofizikçiler onları yeniden keşfettiler; matematikçiler onları yaklaşık 20 yıl önce soyut problemleri çözmek için geliştirmişlerdi ama sinyal işlemede uygulamalarını bekliyordu. Sismik araştırmalar birçok iki boyutlu resim veya dilimlerden oluşur. Her dilim jeofon-sismik yerleştirilerek elde edilir. Jeofonlar tarafından kaydedilen ilk dalga, yüzey boyunca hareket eden doğrudan dalgadır. Bu genellikle önemli değildir. Müteakip dalgalar yerin altındaki kaya katmanlarından yansıtılır. Dalganın bir jeofona çarptığı sürenin bilinmesi, onu yansıtan katmanın bulunduğu yer, dalganın ürettiği "kıvrımlar", katmanın ince ayrıntıları hakkında bilgi verir. Bir hat üzerindeki tüm jeofonlardan gelen izler, çizginin hemen altındaki zemin için dilim vermek üzere birleştirilebilir. Doğru bir sismik araştırmanın anahtarı, her izin doğru analizidir.

Fourier dönüşümü burada iyi bir araç değildir. Sadece frekans bilgisi sağlayabilir (sinyali içeren salınımlar). Bir salınımın ne zaman gerçekleştiği hakkında doğrudan bilgi vermez. Başka bir araç, kısa süreli Fourier dönüşümü daha iyidir. Tam zaman aralığı bir dizi küçük, eşit zaman aralığına bölünmüştür; bunlar Fourier dönüşümü kullanılarak ayrı ayrı analiz edilir. Sonuçta zaman ve frekans bilgileri bulunur. Ancak, bu yaklaşımla ilgili bir sorun vardır. Eşit zaman aralıkları ayarlanamaz; çok kısa süreli, yüksek frekanslı patlamaların meydana geldiği zamanları tespit etmek zordur. Dalgacıklar zaman ve frekans bilgilerini takip edebilir [40].

Fourier analizi, durağan verileri incelemek için idealdir (istatistiksel özellikleri zaman içinde değişmez olan veriler), ancak verilerin geçmişinden istatistiksel olarak tahmin edilemeyen geçici olaylara sahip verileri incelemek için çok uygun değildir. Dalgacıklar bu tür sabit olmayan veriler düşünülerek tasarlandı ve genellikle ve güçlü sonuçları bir dizi disiplinde hızla faydalı oldu.

3.3 Chebyshev Dalgacık Yöntemi

Dalgacıklar, verilen bir denklemin cebirsel denklem sistemine dönüştürerek daha kullanışlı ve daha iyi sonuç veren sistem oluşturduğundan dalgacık metodları günümüzde çok tercih edilen yöntemlerdir. Dalgacıkların birçok farklı ailesi vardır. Bunlardan en bilinenlerden ve basitliklerinden dolayı birçok araştırmacı tarafından kullanılan Haar dalgacıklarıdır. Fakat Haar dalgacık ailesi süreksiz fonksiyonlardan oluşur yani bu fonksiyonların süreksiz olduğu noktalarda türevleri mevcut değildir. Bu durum Haar dalgacıklarını diferansiyel denklemlerin çözümünde doğrudan kullanmaya imkan vermediğinden Chen ve Hsiao yeni bir fikir ortaya atmışlardır. Bu ana fikir ise diferansiyel denklemde görülen en yüksek mertebeden türevli bilinmeyen fonksiyonu Haar dalgacıkları serisine açıp ardışık integral alma yöntemiyle bilinmeyen fonksiyona ulaşmaktır. Ancak Haar yaklaşımının kullanmanın dezavantajı, nümerik yaklaşımının doğruluğunun çok düşük olmasıdır. Bu çalışmada, dalgacık ailelerinden biri olan Chebyshev dalgacık ailesi ele alınmıştır. Chebyshev dalgacıklarının Haar dalgacıklarından daha doğru bir yaklaşım olduğu düşünülmektedir.

Günümüzde Chebyshev polinomları nümerik hesaplamalarda önemli bir rol oynamaktadır [41]. Dört tip Chebyshev polinomları arasında birinci ve ikinci tip Chebyshev polinomları simetrik Jacobi polinomlarının bir çeşididir. Buna karşılık üçüncü ve dördüncü tip Chebyshev polinomları ise simetrik olmayan Jacobi polinomlarının örnekleridir. $T_n(x)$ ve $U_n(x)$ sırasıyla birinci ve ikinci tip Chebyshev polinomları olmak üzere nümerik uygulamalarda çeşitli

uygulamaları çok dikkat çekmiştir. Bununla birlikte kesirli kısmi diferansiyel denklemleri nümerik uygulamalarını Chebyshev polinomlarının bu iki tip ile çözen dalgacıklarla çalışan çok az makale vardır. Bu nedenle dalgacıklar konusu dikkatimizi çekmiştir. Burada kesirli mertebeden diferansiyel denklemlerin çözümlerini Chebyshev dalgacık yöntemiyle bulmaya çalışacağız.

Kollokasyon spektral yöntemine dayanan Chebyshev dalgacık yaklaşımını kullanmanın birkaç avantajı vardır. İlk olarak, çoğu nümerik yöntemlerin aksine bunlar geleneksel hale gelen hataların üstel azalmaları ile karakterize olmuşlardır. İkincisi, çeşitli nümerik yöntemler tekilliklerin yakınında iyi performans göstermezken, dalgacıklar aracılığıyla yapılan yaklaşımlar problemdeki tekillikleri etkin bir şekilde ele alır. Ayrıca Chebyshev yöntemi hızlı yakınsama sayesinde diğer nümerik yöntemlerde karşılaşılan kararsızlık problemiyle karşılaşmaz [41]. Chebyshev dalgacıkları dört bağımsız değişkenli $\psi_{nm} = \psi(k, n, m, x)$ şeklinde yazılırlar. Burada k herhangi pozitif tamsayı, $n = 1, 2, \dots, 2^{k-1}$, $m = 0, 1, \dots, M - 1$ birinci mertebe Chebyshev polinomlarının derecesini ve x ise normalleştirilmiş zamanı göstermektedir. Diğer taraftan Chebyshev dalgacıkları $[0, 1]$ aralığında

$$\gamma_m = \begin{cases} \sqrt{2}, & m = 0 \\ 2, & m = 1, 2, \dots \end{cases}$$

olmak üzere

$$\psi_{nm}(x) = \begin{cases} \gamma_m \frac{2^{(k-1)/2}}{\sqrt{\pi}} T_m(2^k x - 2n + 1), & \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}} \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases} \quad (3.3.1)$$

biçiminde ifade edilir. $T_m(x)$, ağırlık fonksiyonu $\omega(x) = 1/\sqrt{1-x^2}$ 'e göre ortogonal olan ve

$$T_0(x) = 1, T_1(x) = x, \quad T_{m+1}(x) = 2xT_m(x) - T_{m-1}(x)$$

biçimindeki tekrar etme formüllerini sağlayan, m . mertebeden polinomlarıdır. Chebyshev dalgacıkları $\omega_n(x) = \omega(2^k x - 2n + 1)$ ağırlık fonksiyonlarına göre ortogonal polinomlardır.

3.3.1 Chebyshev dalgacıklarıyla fonksiyonlara yaklaşım

Herhangi bir $w(x) \in L^2_\omega[0, 1)$ fonksiyonu Chebyshev dalgacıkları cinsinden

$$c_{lm} = \langle w(x), \psi_{lm}(x) \rangle \quad (3.3.2)$$

olmak üzere

$$w(x) = \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{lm} \psi_{lm}(x). \quad (3.3.3)$$

şeklinde yazılabilirler. (3.3.3) denklemindeki $\langle \cdot, \cdot \rangle$ operatörü, $\omega_l(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre iç çarpımı tanımlar. Ayrıca denklemindeki toplam sonlu olarak ifade edilmek istenirse

$$\begin{aligned} C &= [c_{10}, c_{11}, \dots, c_{1(M-1)} | c_{20}, c_{21}, \dots, c_{2(M-1)} | \dots, \\ & \quad | c_{2^{k-1}0}, c_{2^{k-1}1}, \dots, c_{2^{k-1}(M-1)} |]^T, \\ \Psi(x) &= [\psi_{10}(x), \psi_{11}(x), \dots, \psi_{1(M-1)}(x) | \psi_{20}(x), \psi_{21}(x), \dots, \\ & \quad \psi_{2(M-1)}(x) | \dots, | \psi_{2^{k-1}0}(x), \psi_{2^{k-1}1}(x), \dots, \psi_{2^{k-1}(M-1)}(x) |]^T \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

C ve $\Psi(x)$, $2^{k-1}M \times 1$ matris olmak üzere

$$w(x) \simeq \sum_{l=1}^{2^{k-1}M-1} \sum_{m=0}^{2^{k-1}M-1} c_{lm} \psi_{lm}(x) = C^T \Psi(x), \quad (3.3.5)$$

olarak yazılır.

3.3.2 Yakınsaklık analizi

Bu kısımda, sınırlı ikinci türevi ile birlikte bir $f(x)$ fonksiyonunun Chebyshev dalgacık açılımının [42] tarafından ispatı verilen $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaklık teoremini vereceğiz.

Lemma 3.3.1. *Eğer bir sürekli $f(x)$ fonksiyonunun Chebyshev dalgacık açılımı düzgün olarak yakınsıyorsa, o zaman Chebyshev dalgacık açılımı $f(x)$ fonksiyonunun kendisine yakınsar.*

İspat: Varsayalım ki

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \Psi_{nm}(x) \quad (3.3.6)$$

eşitliği geçerli olsun. Burada $c_{nm} = \langle f(x), \Psi_{nm}(x) \rangle_{w_k}$ dir. (3.3.6) eşitliğinin her iki tarafını $\Psi_{pq}(x)w_k(x)$, burada p ve q sabitleri ile çarpıp ve $[0, 1]$ kapalı aralığı üzerinde düzgün yakınsaklığı ile teyit edildiği için terim terim integralini alırsak

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(x) \Psi_{pq}(x) w_k(x) dx &= \int_0^1 \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \Psi_{nm}(x) \Psi_{pq}(x) w_k(x) dx \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \int_0^1 \Psi_{nm}(x) \Psi_{pq}(x) w_k(x) dx \\ &= c_{pq} \end{aligned}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $n = 1, 2, \dots$ ve $m = 0, 1, \dots$ için $c_{nm} = \langle g(x), \Psi_{nm}(x) \rangle_{w_k}$ elde edilir. Bunun sonucu olarak f ve g fonksiyonları Chebyshev dalgacık bazları ile aynı Fourier açılımına sahip olurlar ve dolayısıyla da $(0 \leq x \leq 1)$ için $f(x) = g(x)$ olur [43].

Teorem 3.3.1. *Sınırlı ikinci türe ve sahip bir $f(x) \in L_w^2([0, 1])$, $|f''(x, t)| \leq N$, fonksiyonuna yakınsar, yani*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \Psi_{nm}(x)$$

olur.

İspat: (3.3.2)' den

$$c_{nm} = \int_0^1 f(x) \Psi_{nm}(x) w_k(x) dx = \int_{\frac{n-1}{2^{k-1}}}^{\frac{n}{2^{k-1}}} 2^{\frac{k}{2}} f(x) \tilde{T}_m(2^k x - 2n + 1) w(2^k x - 2n + 1) dx \quad (3.3.7)$$

eşitliği takip eder.

Eğer $m > 1$ için (3.3.7) denkleminde $2^k x - 2n + 1 = \cos \theta$ eşitliğini yerine yazarsak,

$$\begin{aligned}
c_{nm} &= \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}} \int_0^\pi f\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos m\theta d\theta \\
&= \frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{k}{2}} \sqrt{\pi}} f\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) \left(\frac{\sin m\theta}{m}\right) \Big|_0^\pi \\
&+ \frac{\sqrt{2}}{2^{\frac{k}{2}} m \sqrt{\pi}} \int_0^\pi f'\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) \sin m\theta \sin \theta d\theta \\
&= \frac{1}{2^{\frac{3k}{2}} m \sqrt{2\pi}} f'\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) \left(\frac{\sin(m-1)\theta}{m-1} - \frac{\sin(m+1)\theta}{m+1}\right) \Big|_0^\pi \\
&+ \frac{1}{2^{\frac{5k}{2}} m \sqrt{2\pi}} \int_0^\pi f''\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) h_m(\theta) d\theta
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

eşitlikleri elde edilir. Burada

$$h_m(\theta) = \sin \theta \left(\frac{\sin(m-1)\theta}{m-1} - \frac{\sin(m+1)\theta}{m+1} \right)$$

dır. Dolayısıyla biz

$$\begin{aligned}
|c_{nm}| &= \left| \frac{1}{2^{\frac{5k}{2}} m \sqrt{2\pi}} \int_0^\pi f''\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) h_m(\theta) d\theta \right| \\
&\leq \left(\frac{1}{2^{\frac{5k}{2}} m \sqrt{2\pi}} \right) \int_0^\pi \left| f''\left(\frac{\cos \theta + 2n - 1}{2^k}\right) h_m(\theta) \right| d\theta \\
&\leq \left(\frac{N}{2^{\frac{5k}{2}} m \sqrt{2\pi}} \right) \int_0^\pi |h_m(\theta)| d\theta
\end{aligned}$$

eşitsizliğini elde etmiş oluruz.

Fakat

$$\begin{aligned}
\int_0^\pi |h_m(\theta)| d\theta &= \int_0^\pi \left| \sin \theta \left(\frac{\sin(m-1)\theta}{m-1} - \frac{\sin(m+1)\theta}{m+1} \right) \right| d\theta \\
&\leq \int_0^\pi \left| \frac{\sin \theta \sin(m-1)\theta}{m-1} \right| + \left| \frac{\sin \theta \sin(m+1)\theta}{m+1} \right| d\theta \\
&\leq \frac{2m\pi}{(m^2-1)}
\end{aligned}$$

eşitsizliği mevcuttur.

$n \leq 2^{k-1}$ olduğundan dolayı

$$|c_{nm}| < \frac{\sqrt{2\pi}N}{(2n)^{\frac{5}{2}}(m^2-1)}$$

elde ederiz.

Şimdi eğer $m = 1$ ise o zaman (3.3.8)' yı kullanarak biz

$$|c_{n1}| < \frac{\sqrt{2\pi}}{(2n)^{\frac{3}{2}}} \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$$

ye sahip oluruz. Dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm}$ serileri mutlak yakınsaktır. $m = 0$ için $\{\psi_{n0}\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $w(t)$ ağırlık fonksiyonuna göre Haar ölçeklendirme fonksiyonu ile oluşturulan bir ortogonal sistem meydana getirir ve dolayısıyla $\sum_{n=1}^{\infty} c_{n0} \psi_{n0}(x)$ yakınsaktır [44]. Diğer taraftan,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x) \right| &\leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_{n0} \psi_{n0}(x) \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |c_{nm}| |\psi_{nm}(x)| \\ &\leq \left| \sum_{n=1}^{\infty} c_{n0} \psi_{n0}(x) \right| + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} |c_{nm}| < \infty \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir.

Dolayısıyla Lemma 4.3.1' i kullanarak, $\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} c_{nm} \psi_{nm}(x)$ serisi $f(x)$ fonksiyonuna düzgün yakınsar [42].

3.3.3 Chebyshev dalgacıklarının integralleri

(3.3.1) denkleminin $p_{nm}(x) = \int_0^x \psi_{nm}(s) ds$ olarak gösterilen ilk integrali ve $q_{nm}(x) = \int_0^x p_{nm}(s) ds$ olarak gösterilen ikinci integralini tanımlayalım. Birinci integral $t = 2^k x - 2n + 1$ olmak üzere $m = 0$, $m = 1$, $m > 1$ için

$$p_{n0}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{n-1}{2^{k-1}} \\ \gamma_0 \frac{2^{-(k-1)/2-1}}{\sqrt{\pi}} [T_1(t) + T_0(t)], & \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}} \\ \gamma_0 \frac{2^{-(k-1)/2}}{\sqrt{\pi}} T_0(t), & \frac{n}{2^{k-1}} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$p_{n1}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{n-1}{2^{k-1}} \\ \gamma_1 \frac{2^{-(k-1)/2-3}}{\sqrt{\pi}} [T_2(t) - T_0(t)], & \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}} \\ 0, & \frac{n}{2^{k-1}} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$p_{nm}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{n-1}{2^{k-1}} \\ \gamma_m \frac{2^{-(k-1)/2-2}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{T_{m+1}(t) - (-1)^{m+1}}{m+1} - \frac{T_{m-1}(t) - (-1)^{m-1}}{m-1} \right], & \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}} \\ \gamma_m \frac{2^{-(k-1)/2-2}}{\sqrt{\pi}}, & \frac{n}{2^{k-1}} \leq x < 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanır [45]. $q_{nm}(x)$ ikinci integrali $m = 0$, $m = 1$, $m = 2$ ve $m > 2$ için

$$q_{n0}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{n-1}{2^{k-1}} \\ \gamma_0 \frac{2^{-3(k-1)/2-4}}{\sqrt{\pi}} [T_2(t) + 4T_1(t) + 3T_0(t)], & \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}} \\ \gamma_0 \frac{2^{-(k-1)/2}}{\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2^k} + x - \frac{n}{2^{k-1}} \right), & \frac{n}{2^{k-1}} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$q_{n1}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{n-1}{2^{k-1}} \\ \gamma_1 \frac{2^{-3(k-1)/2-4}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{T_3(t)}{6} - \frac{3T_1(t)}{2} - \frac{4T_0(t)}{3} \right], & \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}} \\ \gamma_1 \frac{2^{-3(k-1)/2-1}}{-3\sqrt{\pi}}, & \frac{n}{2^{k-1}} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$q_{n2}(x) = \begin{cases} 0 & 0 \leq x < \frac{n-1}{2^{k-1}} \\ \gamma_2 \frac{2^{-3(k-1)/2-3}}{\sqrt{\pi}} \left[\frac{T_4(t)-1}{24} - \frac{T_2(t)-1}{3} - \frac{2T_1(t)}{3} - \frac{2T_0(t)}{3} \right], & \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}} \\ \gamma_2 \frac{2^{-(k-1)/2}}{-3\sqrt{\pi}} \left(\frac{1}{2^k} + x - \frac{n}{2^{k-1}} \right), & \frac{n}{2^{k-1}} \leq x < 1 \end{cases}$$

$$q_{nm}(x) = \begin{cases} 0 & , \quad 0 \leq x < \frac{n-1}{2^{k-1}} \\ \gamma_m \frac{2^{-3(k-1)/2-3}}{\sqrt{\pi}} \left[\begin{array}{l} \frac{T_{m+2}(t)-(-1)^{m+2}}{2(m+1)(m+2)} - \frac{T_m(t)-(-1)^m}{2(m+1)m} \\ - \frac{T_m(t)-(-1)^m}{2m(m-1)} \\ + \frac{T_{m-2}(t)-(-1)^{m-2}}{2(m-1)(m-2)} + \\ (1+T_1(t)) \left[\frac{(-1)^{m-1}}{m-1} - \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} \right] \end{array} \right] & , \quad \frac{n-1}{2^{k-1}} \leq x < \frac{n}{2^{k-1}} \\ \gamma_m \frac{2^{-3(k-1)/2-3}}{\sqrt{\pi}} \left[\begin{array}{l} \frac{1-(-1)^{m+2}}{2(m+1)(m+2)} - \frac{1-(-1)^m}{2(m+1)m} - \frac{1-(-1)^m}{2m(m-1)} \\ + \frac{1-(-1)^{m-2}}{2(m-1)(m-2)} + 2 \left[\frac{(-1)^{m-1}}{m-1} - \frac{(-1)^{m+1}}{m+1} \right] \\ + 2^k \left(x - \frac{n}{2^{k-1}} \right) \left[\frac{1-(-1)^{m+1}}{m+1} - \frac{1-(-1)^{m-1}}{m-1} \right] \end{array} \right] & , \quad \frac{n}{2^{k-1}} \leq x < 1 \end{cases}$$

biçimindedir [45]. Daha sonraki işlemlerde problemlerimizi çözmek için bu integraller kullanılacaktır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1 Kesirli Mertebeden Schrödinger Denkleminin Chebyshev Dalgacıkları Yöntemi ile Çözümleri

4.1.1 Zamana göre ayrıklaştırma

Bu bölümde, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$iD_t^\alpha w + w_{xx} + \mu |w|^2 w = F(x, t) \quad (4.1.1)$$

kesirli mertebeden Schrödinger denklemi

$$w(a, t) = g_1(t), w(b, t) = g_2(t) \quad (4.1.2)$$

sınır şartları ve

$$w(x, 0) = h(x), \quad a \leq x \leq b, \quad (4.1.3)$$

başlangıç şartı ile birlikte

$$D_t^\alpha w(x, t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} w(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{w'(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau,$$

Caputo türevi [2] kullanılarak ele alındı.

w , kompleks değerli fonksiyonunu hesaplamak için $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ reel fonksiyonlar olmak üzere :

$$w(x, t) = u(x, t) + iv(x, t) \quad (4.1.4)$$

alınarak (4.1.1) denkleminde (4.1.4) denklemi yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \mu (u^2 v + v^3) &= F_I(x, t) \\ \frac{\partial^\alpha v}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \mu (v^2 u + u^3) &= -F_R(x, t) \end{aligned} \quad (4.1.5)$$

$F(x, t) = F_R(x, t) + iF_I(x, t)$ kısmi türevli denklem sistemi biçiminde yazılabilir. (4.1.5) denklemindeki kesirli mertebeden türevleri Caputo anlamında ayrıştırmak için kullanılan ve L1 formülü olarak bilinen formül

$$\left. \frac{\partial^\alpha f(t)}{\partial t^\alpha} \right|_{t_n} = \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{j-1} b_k^\alpha [f(t_{j-k}) - f(t_{j-1-k})] + O(\Delta t) \quad (4.1.6)$$

olarak verilmektedir. Burada Δt , t değişkeninin adım uzunluğu, $0 < \alpha \leq 1$ ve $b_k^\alpha = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$ 'dır. Burada u , v ve u_{xx} terimlerinin zaman adımına göre ortalamaları alınırsa

$$\begin{aligned} & \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (u_{j+1} - u_j) + \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha (u_{j-k+1} - u_{j-k}) + \frac{(v_{xx})_{j+1} + (v_{xx})_j}{2} \\ & + \mu \frac{(u^2 v)_{j+1} + (u^2 v)_j}{2} + \mu \frac{(v^3)_{j+1} + (v^3)_j}{2} = \frac{(F_I)_{j+1} + (F_I)_j}{2} \\ & \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} (v_{j+1} - v_j) + \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha (v_{j-k+1} - v_{j-k}) - \frac{(u_{xx})_{j+1} + (u_{xx})_j}{2} \\ & - \mu \frac{(v^2 u)_{j+1} + (v^2 u)_j}{2} - \mu \frac{(u^3)_{j+1} + (u^3)_j}{2} = -\frac{(F_R)_{j+1} + (F_R)_j}{2} \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

elde edilir. $(u^2 v)_{j+1}$, $(v^3)_{j+1}$, $(u^3)_{j+1}$ ve $(v^2 u)_{j+1}$ lineer olmayan terimleri için quasi-lineerleştirme tekniği [46]

$$(u^2 v)_{j+1} = 2u_{j+1}u_jv_j + (u^2)_j(v)_{j+1} - 2(u^2v)_j$$

$$(v^3)_{j+1} = 3v_{j+1}(v^2)_j - 2(v^3)_j$$

$$(u^3)_{j+1} = 3u_{j+1}(u^2)_j - 2(u^3)_j$$

$$(v^2 u)_{j+1} = 2v_{j+1}v_ju_j + (v^2)_j(u)_{j+1} - 2(v^2u)_j$$

uygulanıp gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & 2u_{j+1} + S(v_{xx})_{j+1} + 3S\mu v_{j+1}(v^2)_j + 2S\mu u_{j+1}u_jv_j + S\mu v_{j+1}(u^2)_j - S(F_I)_{j+1} \\ & = 2u_j - S(v_{xx})_j + S\mu(v^3)_j + S\mu(u^2v)_j + S(F_I)_j - 2\sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha (u_{j-k+1} - u_{j-k}), \\ & 2v_{j+1} - S(u_{xx})_{j+1} - 3S\mu u_{j+1}(u^2)_j - 2S\mu v_{j+1}u_jv_j - S\mu u_{j+1}(v^2)_j + S(F_R)_{j+1} \\ & = 2v_j + S(u_{xx})_j - S\mu(u^3)_j - S\mu(v^2u)_j - S(F_R)_j - 2\sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha (v_{j-k+1} - v_{j-k}) \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

denklemleri bulunur. Başlangıç şartları

$$u_0 = h_R(x), v_0 = h_I(x)$$

ve sınır şartları

$$u_{j+1}(0) = Re(g_1(t_{j+1})), u_{j+1}(1) = Re(g_2(t_{j+1})), \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.1.9)$$

$$v_{j+1}(0) = Im(g_1(t_{j+1})), v_{j+1}(1) = Im(g_2(t_{j+1})), \quad j = 0, 1, \dots, N-1 \quad (4.1.10)$$

biçimindedir. Burada $S = \Gamma(2 - \alpha)(\Delta t)^\alpha$ olmak üzere u_{j+1} ve v_{j+1} (4.1.8) denkleminin $(j+1)$. zaman adımıdaki reel ve sanal çözümleridir.

4.1.2 Konuma göre Chebyshev dalgacıklarıyla ayrıklaştırma

Chebyshev dalgacıklarıyla bu denklemi çözmek için denklemde görülen en yüksek mertebeden türev terimi

$$(u_{xx})_{j+1}(x) = \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \Psi_{nm}(x) \quad (4.1.11)$$

biçiminde Chebyshev dalgacık serisine açılır. (4.1.11) denkleminin x 'e göre 0'dan x 'e integrali alınır

$$(u_x)_{j+1}(x) = (u_x)_{j+1}(0) + \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} p_{nm}(x). \quad (4.1.12)$$

elde edilir. (4.1.12) denklemindeki $(u_x)_{j+1}(0)$ terimi bilinmiyor. Bu terim, (4.1.12) denkleminin 0' dan 1' e integrali alınıp (4.1.9) sınır koşulları kullanılarak

$$(u_x)_{j+1}(0) = u_{j+1}(1) - u_{j+1}(0) - \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} q_{nm}(1). \quad (4.1.13)$$

şeklinde bulunabilir. Bu son eşitlik (4.1.13), (4.1.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$(u_x)_{j+1}(x) = \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} p_{nm}(x) + u_{j+1}(1) - u_{j+1}(0) - \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} q_{nm}(1). \quad (4.1.14)$$

elde edilir. (4.1.14) denkleminin 0'dan x 'e integrali alınarak

$$\begin{aligned}
u_{j+1}(x) &= \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} q_{nm}(x) + u_{j+1}(0) \\
&+ x (u_{j+1}(1) - u_{j+1}(0)) - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} q_{nm}(1)
\end{aligned} \tag{4.1.15}$$

bulunur. Benzer olarak model problemin $(v_{xx})_{j+1}$ terimi içinde

$$(v_{xx})_{j+1}(x) = \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} \psi_{nm}(x), \tag{4.1.16}$$

$$\begin{aligned}
(v_x)_{j+1}(x) &= \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} p_{nm}(x) + v_{j+1}(1) - v_{j+1}(0) \\
&- \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} q_{nm}(1),
\end{aligned} \tag{4.1.17}$$

$$\begin{aligned}
v_{j+1}(x) &= \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} q_{nm}(x) + v_{j+1}(0) \\
&+ x (v_{j+1}(1) - v_{j+1}(0)) - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} q_{nm}(1)
\end{aligned} \tag{4.1.18}$$

elde ederiz. Kesirli Schrödinger denklemi için (4.1.11)-(4.2.22) denklemleri (4.1.8) denkleminde yerine yazılıp sonuçlar $x_l = \frac{l-0.5}{m'}$, $l = 1, 2, \dots, m'$, $m' = 2^{s-1}M$ noktalarında ayrıklaştırılırsa

$$\begin{aligned}
&2(1 + S\mu u_j v_j) \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} q_{nm}(x) + u_{j+1}(0) + x(u_{j+1}(1) - u_{j+1}(0)) \right. \\
&- x \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} q_{nm}(1) \left. \right) + S \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} \psi_{nm}(x) + S\mu(3v^2 + u^2)_j \\
&\times \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} q_{nm}(x) + v_{j+1}(0) + x(v_{j+1}(1) - v_{j+1}(0)) \right) \\
&- x \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} q_{nm}(1) \left. \right) = 2u_j - S\mu(v_{xx})_j + S\mu(v^3)_j + S\mu(u^2v)_j \\
&+ S \left((F_I)_j + (F_I)_{j+1} \right) - 2 \sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha (u_{j-k+1} - u_{j-k}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&2(1 - S\mu u_j v_j) \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} q_{nm}(x) + u_{j+1}(0) + x(u_{j+1}(1) - u_{j+1}(0)) \right. \\
&- x \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} q_{nm}(1) \left. \right) - S \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(x) - S\mu(3u^2 + v^2)_j \\
&\times \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} q_{nm}(x) + v_{j+1}(0) + x(v_{j+1}(1) - v_{j+1}(0)) \right) \\
&- x \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} q_{nm}(1) \left. \right) = 2v_j + S\mu(u_{xx})_j - S\mu(u^3)_j - S\mu(v^2u)_j \\
&- S \left((F_R)_j + (F_R)_{j+1} \right) - 2 \sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha (v_{j-k+1} - v_{j-k})
\end{aligned}$$

biçimindeki cebirsel denklem sistemi elde edilir. Burada c_{nm} and d_{nm} Chebyshev dalgacık seri açılımındaki katsayılardan oluşan kolon vektörü, eşitliğin sağ tarafı, u ile çeşitli türevlerinin

x_l kollokasyon noktalarında ardışık j zaman adımlarında hesaplanmış kolon vektörüdür. Bu sistemin çözülmesiyle ile bulunan c_{nm} and d_{nm} katsayıları (4.1.11)-(4.2.22) denklemlerinde yerlerine yazılarak nümerik çözümler ardışık olarak bulunabilir. Hesaplamalarımızı kolaylaştırması bakımından $\sum_{n=1}^{2^s-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \psi_{nm}(x)$ denkleminin yerine $\sum_{i=1}^{m'} c_i \psi_i(x)$ eşitliği kullanılacaktır. Burada i indeksi $i = M(n-1) + m + 1$ ve $m' = 2^{k-1}M$ olarak verilmiştir.

4.1.3 Nümerik sonuçlar

Bu bölümde kesirli mertebeden türevli Schrödinger denklemleri için elde edilen nümerik sonuçlar verilmiştir. Chebyshev dalgacık yöntemiyle elde edilen sonuçların tam çözüme ne kadar iyi yaklaştığını ölçmek için

$$L_2 = \sqrt{\Delta x \sum_{i=1}^{m'} |u_i^{\text{tam}} - u_i^{\text{num}}|^2} \quad (4.1.19)$$

$$L_\infty = \max_i |u_i^{\text{tam}} - u_i^{\text{num}}| \quad (4.1.20)$$

L_2 ve L_∞ olarak tanımlanan hata normları kullanılmıştır. Burada Δx , x değişkeninin adım uzunluğunu, u_i^{tam} tam çözümü ve u_i^{num} nümerik çözümü göstermektedir. $m' = 2^{k-1}M$ ise yöntemimizin kollokasyon noktalarının sayısını göstermektedir.

4.1.3.1 Problem 1

Chebyshev dalgacık yönteminin kesirli mertebeden türevli Schrödinger denklemi için ilk uygulaması olarak (4.1.1) denklemi $\mu = 1$ için $F(x, t)$ fonksiyonu

$$F(x, t) = -\frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \cos(2\pi x) + (t^6 - 4\pi^2 t^2) \sin(2\pi x) \\ + i \left(\frac{2t^{2-\alpha}}{\Gamma(3-\alpha)} \sin(2\pi x) + (t^6 - 4\pi^2 t^2) \cos(2\pi x) \right)$$

olmak üzere

$$w(x, 0) = 0, \quad 0 \leq x \leq 1,$$

başlangıç koşulu ve

$$w(0, t) = it^2, \quad w(1, t) = it^2, \quad t \geq 0$$

Çizelge 4.1 : Problem 1'in $\alpha = 0.1, 0.3, 0.5$, $m' = 32$ ve $t = 1$ 'de sunulan yöntem ile Ref. [11] 'de verilen hataların karşılaştırılmaları

		Reel Kısım		Sanal Kısım	
		CWM	[11]	CWM	[11]
$\alpha = 0.1$	L_2	2.570845e-04	0.244241e-03	9.192861e-05	0.299659e-03
$\Delta t = 0.002$	L_∞	3.930269e-04	0.421466e-03	1.455422e-04	0.485920e-03
$\alpha = 0.3$	L_2	2.886956e-04	0.282432e-03	1.031929e-04	0.276193e-03
$\Delta t = 0.002$	L_∞	4.553513e-04	0.476307e-03	1.609046e-04	0.451507e-03
		CWM	[10]	CWM	[10]
$\alpha = 0.5$	L_2	4.025287e-04	0.966275e-03	1.553380e-04	1.583606e-03
$\Delta t = 0.005$	L_∞	5.430743e-04	1.331924e-03	2.653796e-04	2.133489e-03

sınır koşulları ile gözönüne alınmıştır. Problemin tam çözümü

$$w(x,t) = t^2 (\sin(2\pi x) + i \cos(2\pi x))$$

dir [9, 11, 31].

Çizelge 4.1' de $m' = 32$ için $t = 1$ zamanında α ve Δt ' nin değişik değerleri için reel ve sanal kısımların L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Tablodan görüldüğü gibi, sunulan yöntemle elde edilen sonuçlar kuadratik ve kübik B- spline sonlu eleman yöntemleri [10, 11] ile bulunanlardan daha iyidir. Yöntemin yakınsamasını görmek için $m' = 32, 128$, $\alpha = 0.5$ ve Δt ' nin azalan değerleri için elde edilen sonuçlar Çizelge 4.2 ve 4.3' de verildi. Yine bu çizelgede de Δt değerlerinin azalmasıyla, beklenildiği gibi hatalarda da azalmalar görülmektedir. Konumsal değişkene göre, sunulan metodun yakınsaklığını görmek için $\Delta t = 0.001$, $\alpha = 0.5$ için kollokasyon noktalarının sayısını ikiye katlayarak elde edilen sonuçlar Çizelge 4.4' de gösterildi. Kollokasyon noktalarının sayılarının artışı ile tam çözüme daha yakın sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlarla sunulan yöntemin yakınsak olduğu görülür. Şekil 4.1 ve 4.2' de sırasıyla reel ve sanal kısımların nümerik çözüm, tam çözüm ve hataları $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.005$ ve $t = 1$ zamanında elde edilen sonuçlar sunuldu. $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.005$ ve $t = 1$ zamanında farklı m' kollokasyon sayıları için elde edilen hataların karşılaştırılması Şekil 4.3'de gösterildi.

Çizelge 4.2 : Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $m' = 32$ ve $t = 1$ zamanında azalan Δt değerleri için hatalar

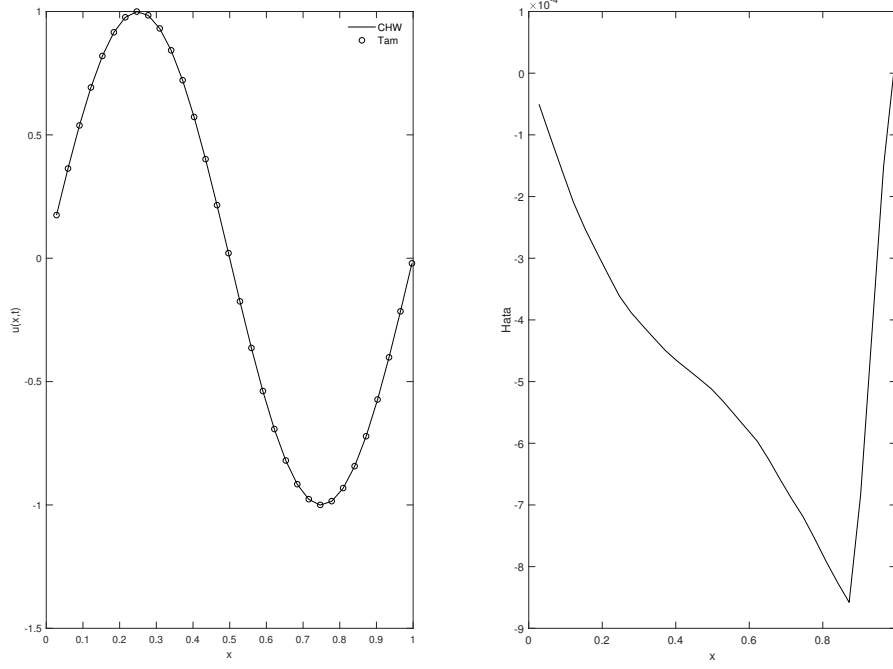
Δt	Reel Kısım		Sanal Kısım	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.05	1.891397e-03	3.018027e-03	1.282105e-03	2.220554e-03
0.025	1.090821e-03	1.687188e-03	5.937112e-04	5.937112e-04
0.01	5.732738e-04	8.293918e-04	2.524136e-04	4.426272e-04
0.005	4.025287e-04	5.430743e-04	1.553380e-04	2.653796e-04
0.0025	3.236417e-04	4.997963e-04	1.174396e-04	1.859367e-04

Çizelge 4.3 : Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $m' = 128$ ve $t = 1$ de Δt 'nin azalan değerlerinde hatalar

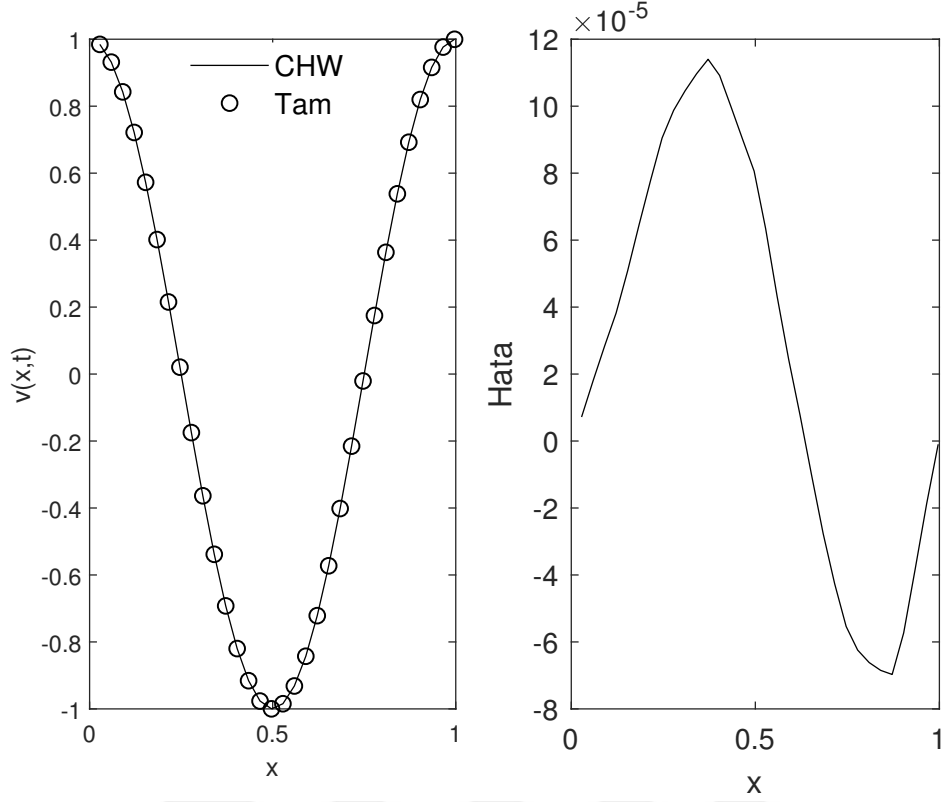
Δt	Reel Kısım		Sanal Kısım	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.05	1.763246e-03	2.864241e-03	1.236117e-03	2.142192e-03
0.025	9.460562e-04	1.516428e-03	5.556138e-04	9.540618e-04
0.01	4.034394e-04	6.410130e-04	2.139965e-04	3.604709e-04
0.005	2.114606e-04	3.334128e-04	1.067433e-04	1.785878e-04
0.0025	1.130008e-04	1.756993e-04	5.371211e-05	9.007124e-05
0.001	5.330672e-05	7.967572e-05	2.199430e-05	3.756267e-05
0.0005	3.364724e-05	4.758335e-05	1.153271e-05	2.014193e-05
0.00025	2.417638e-05	3.265722e-05	6.514875e-06	1.147148e-05
0.0001	1.886132e-05	3.286977e-05	3.929088e-06	6.390206e-06

Çizelge 4.4 : Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0,001$ ve $t = 1$ zamanında artan m' kollokasyon sayıları için hatalar

m'	Reel Kısım		Sanal Kısım	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
8	2.860139e-03	5.744217e-03	9.505434e-03	1.391470e-02
16	1.111638e-03	2.053833e-03	9.111621e-04	1.351729e-03
32	2.823761e-04	5.093121e-04	1.030183e-04	1.490155e-04
64	9.541596e-05	1.278714e-04	2.767292e-05	4.835578e-05
128	5.330672e-05	7.967572e-05	2.199430e-05	3.756267e-05
256	4.393941e-05	6.896118e-05	2.144747e-05	3.557572e-05
512	4.173732e-05	6.631688e-05	2.134807e-05	3.512891e-05
1024	4.119733e-05	6.565741e-05	2.132487e-05	3.502163e-05

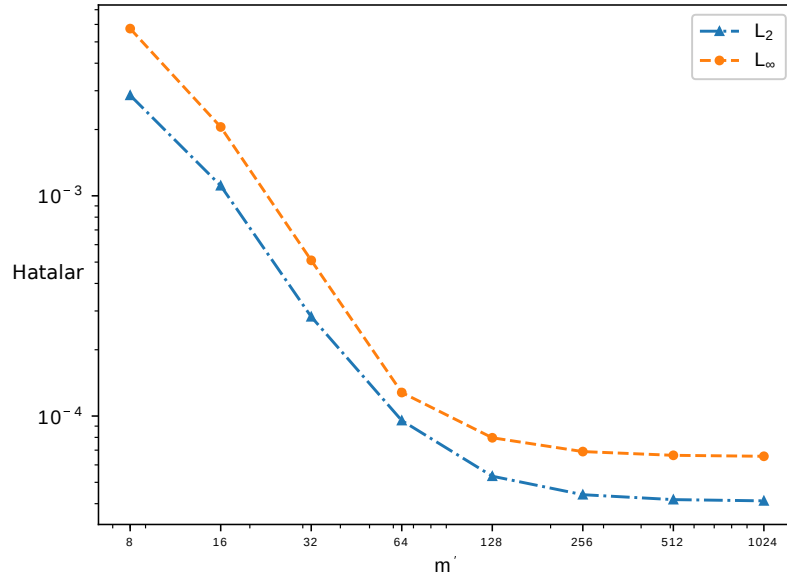


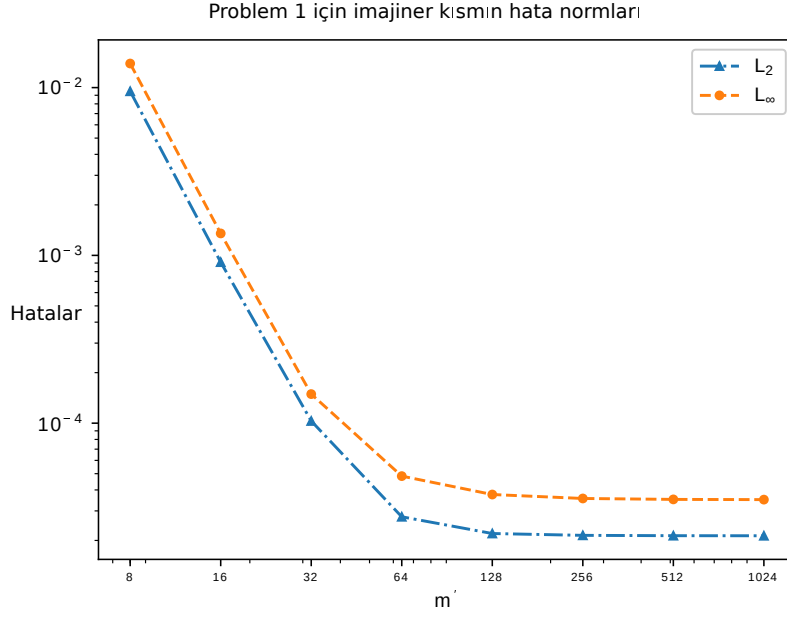
Şekil 4.1 : $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.005$ için $t = 1$ zamanındaki reel kısmın nümerik çözümleri, tam çözümleri ve hatanın grafikleri



Şekil 4.2 : $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.005$ için $t = 1$ zamanındaki sanal kısmın nümerik çözümleri, tam çözümleri ve hatanın grafikleri

Problem 1 için reel kısmın hata normları





Şekil 4.3 : Problem 1’de $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.005$ ve $t = 1$ zamanında m' kollokasyon noktalarının sayısına göre reel ve sanal kısımların hataları

4.1.3.2 Problem 2

İkinci uygulama olarak, (4.1.1) denklemi $\mu = 0$ için $F(x, t)$ fonksiyonu

$$F(x, t) = -\frac{\sqrt{\pi t}^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)} \sin(2\pi x) - 4\sqrt{t}\pi^2 \cos(2\pi x) + i \left(\frac{\sqrt{\pi t}^{\frac{1}{2}-\alpha}}{2\Gamma(\frac{3}{2}-\alpha)} \cos(2\pi x) - 4\sqrt{t}\pi^2 \sin(2\pi x) \right)$$

olmak üzere

$$w(x, 0) = 0, \quad x \in (0, 1)$$

başlangıç koşulu ve

$$w(0, t) = t^{\frac{1}{2}}, \quad w(1, t) = t^{\frac{1}{2}}, \quad t \in (0, 1)$$

sınır koşulları ile ele alındı. Problemin tam çözümü

$$w(x, t) = t^{\frac{1}{2}} (\cos(2\pi x) + i \sin(2\pi x))$$

dir [47].

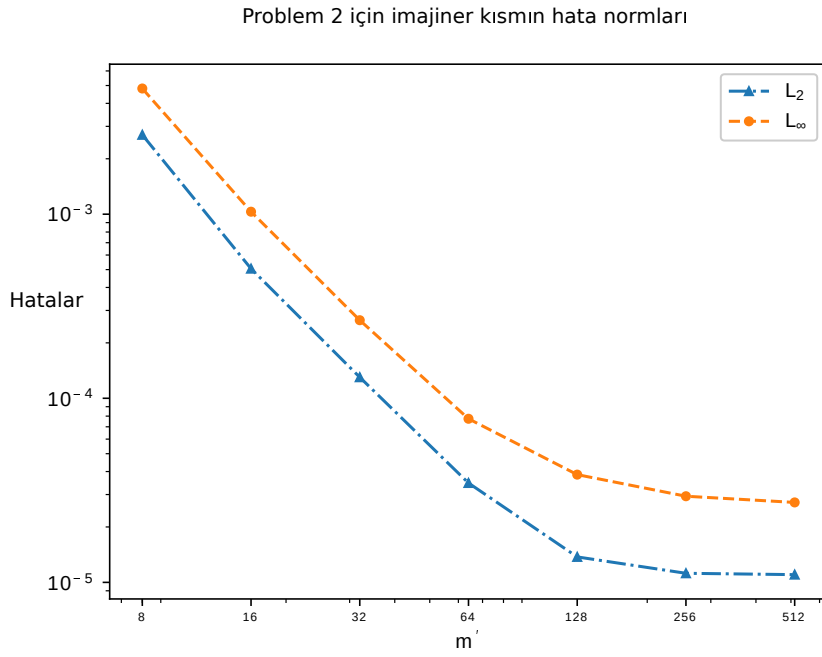
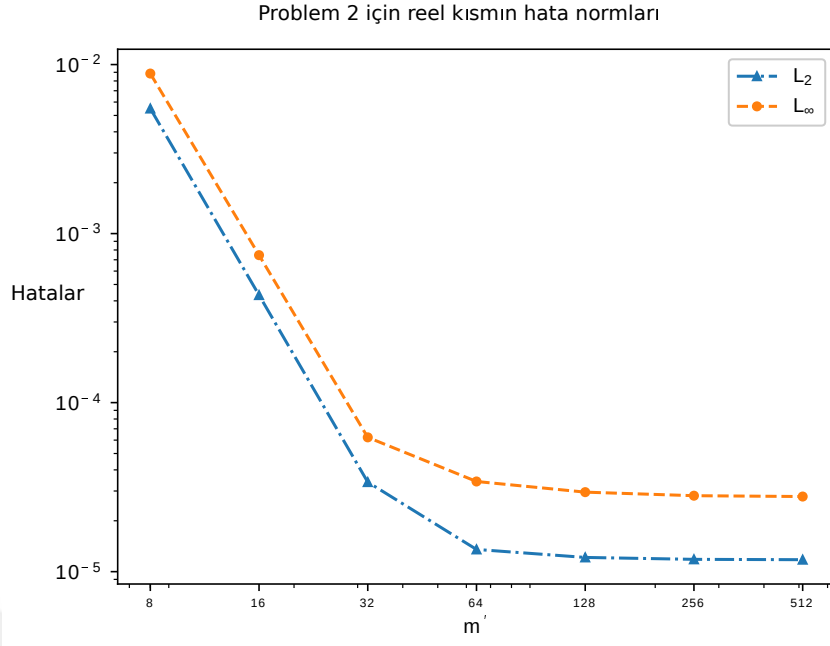
Çizelge 4.5 : Problem 2'nin $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 1$ 'de artan m' kollokasyon sayıları için hatalar

m	Reel Kısım		Sanal Kısım	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
8	5.4933e-03	8.84735e-03	2.69804e-03	4.81705e-03
16	4.3260e-04	7.45513e-04	5.05816e-04	1.03150e-03
32	3.3867e-05	6.23030e-05	1.30068e-04	2.65514e-04
64	1.3533e-05	3.41557e-05	3.46545e-05	7.73991e-05
128	1.2138e-05	2.95361e-05	1.37488e-05	3.84888e-05
256	1.1825e-05	2.81408e-05	1.12030e-05	2.93729e-05
512	1.1768e-05	2.78216e-05	1.10154e-05	2.71828e-05

Çizelge 4.6 : Problem 2'nin $\alpha = 0.3$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 1$ zamanında m' artan kollokasyon sayıları için reel ve Sanal kısımların hataları

m	Reel Kısım		Sanal Kısım	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
8	5.4754e-03	8.89842e-03	2.92689e-03	5.26056e-03
16	4.3705e-04	7.62852e-04	5.84278e-04	1.21795e-03
32	5.2358e-05	9.77306e-05	1.48032e-04	2.64784e-04
64	3.2871e-05	7.01741e-05	6.01963e-05	1.44179e-04
128	3.1897e-05	7.01609e-05	5.02008e-05	1.08249e-04

İlk uygulamamıza benzer olarak, Problem 2 için $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ parametreleriyle reel ve sanal kısımların hata normları artan kollokasyon sayıları için hesaplanarak sonuçlar Çizelge 4.5'de verildi. m' kollokasyon sayılarının artışına paralel olarak elde edilen sonuçların da tam çözüme daha yaklaştığı görülmektedir. Çizelge 4.6'da $\alpha = 0.3$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 1$ zamanında sunulan yöntem ile elde edilen sonuçlar verildi. Çizelge dikkatli incelendiğinde artan kollokasyon sayıları ile birlikte hatalarında buna bağlı olarak azaldığı görülmektedir. $\Delta t = 0.001$ için m' kollokasyon sayısına göre $t = 1$ zamanında reel ve sanal kısımların hatalarının değişimi Şekil 4.4 'de grafikler ile sunulmuştur.



Şekil 4.4 : Problem 2'nin $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 1$ zamanında farklı m' kollokasyon sayısına göre hataların değişimi

4.2 Kesirli Mertebeden İkili (*Coupled*) Schrödinger Denkleminin Chebyshev Dalgacıkları Yöntemi ile Çözümü

Bu bölümde,

$$\begin{aligned} iD_t^\alpha u + iu_x + u_{xx} + \varepsilon_1 u + \beta_1 v + \mu_1 (|u|^2 + |v|^2) u &= F_1(x, t) \\ iD_t^\alpha v - iv_x + v_{xx} + \varepsilon_2 u - \beta_2 v + \mu_2 (|u|^2 + |v|^2) v &= F_2(x, t) \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

olarak verilen ve

$$u(x, 0) = h_1(x), v(x, 0) = h_2(x) \quad a \leq x \leq b, \quad (4.2.2)$$

başlangıç koşulu ile

$$u(a, t) = f_1(t), u(b, t) = f_2(t) \quad (4.2.3)$$

$$v(a, t) = g_1(t), v(b, t) = g_2(t) \quad (4.2.4)$$

sınır koşullarına sahip kesirli mertebeden türevli ikili Schrödinger denklemi ele alınmıştır. Burada, $\varepsilon_{1,2}$, $\beta_{1,2}$ ve $\mu_{1,2}$ sabitlerdir ve $F_1(x, t)$, $F_2(x, t)$ bilinen fonksiyonlar ve $i^2 = -1$ 'dir. Caputo anlamında kesirli mertebeden türev, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere

$$D_t^\alpha w(x, t) = \frac{\partial^\alpha}{\partial t^\alpha} w(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \frac{w'(x, \tau)}{(t-\tau)^\alpha} d\tau, \quad (4.2.5)$$

olarak verilmektedir [2].

4.2.1 Zamana göre ayrıklaştırma

u , kompleks değerli fonksiyonunu hesaplamak için $u_1(x, t)$ ve $v_1(x, t)$ reel fonksiyonlar; v , kompleks değerli fonksiyonunu hesaplamak için $u_2(x, t)$ ve $v_2(x, t)$ reel fonksiyonlar olmak üzere :

$$u(x, t) = u_1(x, t) + iv_1(x, t) \quad (4.2.6)$$

$$v(x,t) = u_2(x,t) + iv_2(x,t) \quad (4.2.7)$$

alınarak (4.2.1) denklemlerinde (4.2.7) ve (4.2.6) denklemleri yerine konulursa

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u_1}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial u_1}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_1}{\partial x^2} + \varepsilon_1 v_1 + \beta_1 v_2 + \mu_1 (u_1^2 v_1 + v_1^3 + u_2^2 v_1 + v_2^2 v_1) &= s_1(x,t) \\ \frac{\partial^\alpha v_1}{\partial t^\alpha} + \frac{\partial v_1}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} - \varepsilon_1 u_1 - \beta_1 u_2 - \mu_1 (v_1^2 u_1 + u_1^3 + u_2^2 u_1 + v_2^2 u_1) &= -r_1(x,t) \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

ve

$$\begin{aligned} \frac{\partial^\alpha u_2}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial u_2}{\partial x} + \frac{\partial^2 v_2}{\partial x^2} + \varepsilon_2 v_1 - \beta_2 v_2 + \mu_2 (u_1^2 v_2 + v_2^3 + v_1^2 v_2 + u_2^2 v_2) &= s_2(x,t) \\ \frac{\partial^\alpha v_2}{\partial t^\alpha} - \frac{\partial v_2}{\partial x} - \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} - \varepsilon_2 u_1 + \beta_2 u_2 - \mu_2 (u_1^2 u_2 + u_2^3 + v_1^2 u_2 + v_2^2 u_2) &= -r_2(x,t) \end{aligned} \quad (4.2.9)$$

$F_1(x,t) = r_1(x,t) + is_1(x,t)$ ve $F_2(x,t) = r_2(x,t) + is_2(x,t)$ kısmi türevli denklem sistemleri biçiminde yazılabilir. (4.2.8) ve (4.2.9) denklemlerindeki kesirli mertebeden türevleri Caputo anlamında ayırıştırmak için kullanılan ve L1 formülü olarak bilinen

$$\left. \frac{\partial^\alpha f(t)}{\partial t^\alpha} \right|_{t_j} = \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=0}^{j-1} b_k^\alpha [f(t_{j-k}) - f(t_{j-1-k})] + O(\Delta t) \quad (4.2.10)$$

yaklaşımı göz önüne alınacaktır. Burada Δt , t değişkeninin adım uzunluğu, $0 < \alpha < 1$ ve $b_k^\alpha = (k+1)^{1-\alpha} - k^{1-\alpha}$ dir. (4.2.8) ve (4.2.9) denklemlerinde $u_1, u_2, v_1, v_2, (u_1)_x, (u_2)_x, (v_1)_x, (v_2)_x, (u_1)_{xx}, (u_2)_{xx}, (v_1)_{xx}$ ve $(v_2)_{xx}$ terimlerinin zaman adımına göre ortalamaları alınırsa

$$\begin{aligned} &\frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left((u_1)_{j+1} - (u_1)_j \right) + \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha \left((u_1)_{j-k+1} - (u_1)_{j-k} \right) \\ &+ \frac{((u_1)_x)_{j+1} + ((u_1)_x)_j}{2} + \frac{((v_1)_{xx})_{j+1} + ((v_1)_{xx})_j}{2} + \varepsilon_1 \frac{(v_1)_{j+1} + (v_1)_j}{2} \\ &+ \beta_1 \frac{(v_2)_{j+1} + (v_2)_j}{2} + \mu_1 \frac{(u_1^2 v_1)_{j+1} + (u_1^2 v_1)_j}{2} + \mu_1 \frac{(v_1^3)_{j+1} + (v_1^3)_j}{2}, \\ &+ \mu_1 \frac{(u_2^2 v_1)_{j+1} + (u_2^2 v_1)_j}{2} + \frac{(v_2^2 v_1)_{j+1} + (v_2^2 v_1)_j}{2} = \frac{(s_1)_{j+1} + (s_1)_j}{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left((v_1)_{j+1} - (v_1)_j \right) + \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha \left((v_1)_{j-k+1} - (v_1)_{j-k} \right) \\ & + \frac{((v_1)_x)_{j+1} + ((v_1)_x)_j}{2} - \frac{((u_1)_{xx})_{j+1} + ((u_1)_{xx})_j}{2} - \varepsilon_1 \frac{(u_1)_{j+1} + (u_1)_j}{2} \\ & - \beta_1 \frac{(u_2)_{j+1} + (u_2)_j}{2} - \mu_1 \frac{(v_1^2 u_1)_{j+1} + (v_1^2 u_1)_j}{2} - \mu_1 \frac{(u_1^3)_{j+1} + (u_1^3)_j}{2} \\ & - \mu_1 \frac{(u_2^2 u_1)_{j+1} + (u_2^2 u_1)_j}{2} - \mu_1 \frac{(v_2^2 u_1)_{j+1} + (v_2^2 u_1)_j}{2} = -\frac{(r_1)_{j+1} + (r_1)_j}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left((u_2)_{j+1} - (u_2)_j \right) + \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha \left((u_2)_{j-k+1} - (u_2)_{j-k} \right) \\ & - \frac{((u_2)_x)_{j+1} + ((u_2)_x)_j}{2} + \frac{((v_2)_{xx})_{j+1} + ((v_2)_{xx})_j}{2} + \varepsilon_2 \frac{(v_1)_{j+1} + (v_1)_j}{2} \\ & - \beta_2 \frac{(v_2)_{j+1} + (v_2)_j}{2} + \mu_2 \frac{(u_1^2 v_2)_{j+1} + (u_1^2 v_2)_j}{2} + \mu_2 \frac{(v_2^3)_{j+1} + (v_2^3)_j}{2} \\ & + \mu_2 \frac{(u_2^2 v_2)_{j+1} + (u_2^2 v_2)_j}{2} + \mu_2 \frac{(v_1^2 v_2)_{j+1} + (v_1^2 v_2)_j}{2} = \frac{(s_2)_{j+1} + (s_2)_j}{2}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \left((v_2)_{j+1} - (v_2)_j \right) + \frac{(\Delta t)^{-\alpha}}{\Gamma(2-\alpha)} \sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha \left((v_2)_{j-k+1} - (v_2)_{j-k} \right) \\ & - \frac{((v_2)_x)_{j+1} + ((v_2)_x)_j}{2} - \frac{((u_2)_{xx})_{j+1} + ((u_2)_{xx})_j}{2} - \varepsilon_2 \frac{(u_1)_{j+1} + (u_1)_j}{2} \\ & + \beta_2 \frac{(u_2)_{j+1} + (u_2)_j}{2} - \mu_2 \frac{(v_1^2 u_2)_{j+1} + (v_1^2 u_2)_j}{2} - \mu_2 \frac{(u_2^3)_{j+1} + (u_2^3)_j}{2} \\ & - \mu_2 \frac{(u_1^2 u_2)_{j+1} + (u_1^2 u_2)_j}{2} - \mu_2 \frac{(v_2^2 u_2)_{j+1} + (v_2^2 u_2)_j}{2} = -\frac{(r_2)_{j+1} + (r_2)_j}{2}, \end{aligned}$$

elde edilir. $(u_1^2 v_1)_{j+1}$, $(v_1^3)_{j+1}$, $(u_2^2 v_1)_{j+1}$, $(v_2^2 v_1)_{j+1}$, $(v_1^2 u_1)_{j+1}$, $(u_2^2 u_1)_{j+1}$, $(u_1^3)_{j+1}$, $(v_2^2 u_1)_{j+1}$ ve $(u_1^2 v_2)_{j+1}$, $(v_2^3)_{j+1}$, $(u_2^2 v_2)_{j+1}$, $(v_1^2 v_2)_{j+1}$, $(v_1^2 u_2)_{j+1}$, $(u_1^2 u_2)_{j+1}$, $(u_2^3)_{j+1}$, $(v_2^2 u_2)_{j+1}$ lineer olmayan terimleri için yarı lineerleştirme tekniği [46] kullanılarak

$$(u_1^2 v_1)_{j+1} = 2(u_1)_{j+1}(u_1)_j(v_1)_j + (u_1^2)_j(v_1)_{j+1} - 2(u_1^2 v_1)_j$$

$$(v_1^3)_{j+1} = 3(v_1)_{j+1}(v_1^2)_j - 2(v_1^3)_j$$

$$(u_2^2 v_1)_{j+1} = 2(u_2)_{j+1}(u_2)_j(v_1)_j + (u_2^2)_j(v_1)_{j+1} - 2(u_2^2 v_1)_j$$

$$(v_2^2 v_1)_{j+1} = 2(v_2)_{j+1}(v_2)_j(v_1)_j + (v_2^2)_j(v_1)_{j+1} - 2(v_2^2 v_1)_j$$

$$(u_1^3)_{j+1} = 3(u_1)_{j+1}(u_1^2)_j - 2(u_1^3)_j$$

$$(v_1^2 u_1)_{j+1} = 2(v_1)_{j+1}(v_1)_j(u_1)_j + (v_1^2)_j(u_1)_{j+1} - 2(v_1^2 u_1)_j$$

$$(v_2^2 u_1)_{j+1} = 2(v_2)_{j+1}(v_2)_j(u_1)_j + (v_2^2)_j(u_1)_{j+1} - 2(v_2^2 u_1)_j$$

$$(u_2^2 u_1)_{j+1} = 2(u_2)_{j+1}(u_2)_j(u_1)_j + (u_2^2)_j(u_1)_{j+1} - 2(u_2^2 u_1)_j$$

ve

$$(u_1^2 v_2)_{j+1} = 2(u_1)_{j+1}(u_1)_j(v_2)_j + (u_1^2)_j(v_2)_{j+1} - 2(u_1^2 v_2)_j$$

$$(v_2^3)_{j+1} = 3(v_2)_{j+1}(v_2)_j - 2(v_2^3)_j$$

$$(u_2^2 v_2)_{j+1} = 2(u_2)_{j+1}(u_2)_j(v_2)_j + (u_2^2)_j(v_2)_{j+1} - 2(u_2^2 v_2)_j$$

$$(v_1^2 v_2)_{j+1} = 2(v_1)_{j+1}(v_1)_j(v_2)_j + (v_1^2)_j(v_2)_{j+1} - 2(v_1^2 v_2)_j$$

$$(u_2^3)_{j+1} = 3(u_2)_{j+1}(u_2)_j - 2(u_2^3)_j$$

$$(v_1^2 u_2)_{j+1} = 2(v_1)_{j+1}(v_1)_j(u_2)_j + (v_1^2)_j(u_2)_{j+1} - 2(v_1^2 u_2)_j$$

$$(v_2^2 u_2)_{j+1} = 2(v_2)_{j+1}(v_2)_j(u_2)_j + (v_2^2)_j(u_2)_{j+1} - 2(v_2^2 u_2)_j$$

$$(u_1^2 u_2)_{j+1} = 2(u_1)_{j+1}(u_1)_j(u_2)_j + (u_1^2)_j(u_2)_{j+1} - 2(u_1^2 u_2)_j$$

bulunur. Gerekli sadeleştirmeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& 2(u_1)_{j+1} + S((u_1)_x)_{j+1} + S((v_1)_{xx})_{j+1} + S\varepsilon_1(v_1)_{j+1} + S\beta_1(v_2)_{j+1} \\
& + 2S\mu_1(u_1)_{j+1}(u_1)_j(v_1)_j + S\mu_1(v_1)_{j+1}(u_1^2)_j + 3S\mu_1(v_1)_{j+1}(v_1^2)_j \\
& - 2S\mu_1(u_2)_{j+1}(u_2)_j(v_1)_j + S\mu_1(v_1)_{j+1}(u_2^2)_j + 2S\mu_1(v_2)_{j+1}(v_2)_j(v_1)_j \\
& + S\mu_1(v_1)_{j+1}(v_2^2)_j = 2(u_1)_j - S((u_1)_x)_j - S((v_1)_{xx})_j - S\varepsilon_1(v_1)_j \\
& + S\beta_1(v_2)_j + S\mu_1(v_1^3)_j + S\mu_1(u_2^2 v_1)_j + S\mu_1(v_2^2 v_1)_j \\
& + S((s_1)_{j+1} + (s_1)_j) - 2 \sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha \left((u_1)_{j-k+1} - (u_1)_{j-k} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.11}$$

$$\begin{aligned}
& 2(v_1)_{j+1} + S((v_1)_x)_{j+1} - S((u_1)_{xx})_{j+1} - S\mathcal{E}_1(u_1)_{j+1} - S\mathcal{B}_1(u_2)_{j+1} \\
& - 3S\mu_1(u_1)_{j+1}(u_1^2)_j - S\mu_1(u_1)_{j+1}(v_1^2)_j - 2S\mu_1(v_1)_{j+1}(v_1)_j(u_1)_j \\
& - S\mu_1(u_1)_{j+1}(v_2^2)_j - 2S\mu_1(u_2)_{j+1}(u_2)_j(u_1)_j - 2S\mu_1(v_2)_{j+1}(v_2)_j(u_1)_j \\
& - S\mu_1(u_1)_{j+1}(u_2^2)_j + S(r_1)_{j+1} = 2(v_1)_j - S((v_1)_x)_j + S((u_1)_{xx})_j \\
& + S\mathcal{E}_1(u_1)_j + S\mathcal{B}_1(u_2)_j - S\mu_1(u_1^3)_j - S\mu_1(v_1^2u_1)_j - S\mu_1(u_2^2u_1)_j \\
& - S\mu_1(v_2^2u_1)_j - S(r_1)_j - 2\sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha \left((v_1)_{j-k+1} - (v_1)_{j-k} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.12}$$

$$\begin{aligned}
& 2(u_2)_{j+1} - S((u_2)_x)_{j+1} + S((v_2)_{xx})_{j+1} + S\mathcal{E}_2(v_1)_{j+1} - S\mathcal{B}_2(v_2)_{j+1} \\
& + 2S\mu_2(u_1)_{j+1}(u_1)_j(v_2)_j + S\mu_2(v_2)_{j+1}(u_1^2)_j + 2S\mu_2(v_1)_{j+1}(v_1)_j(v_2)_j \\
& + S\mu_2(v_2)_{j+1}(v_1^2)_j + 3S\mu_2(v_2)_{j+1}(v_2^2)_j + 2S\mu_2(u_2)_{j+1}(u_2)_j(v_2)_j \\
& + S\mu_2(v_2)_{j+1}(u_2^2)_j - S(s_2)_{j+1} = 2(u_2)_j + S((u_2)_x)_j - S((v_2)_{xx})_j - S\mathcal{E}_2(v_1)_j \\
& + S\mathcal{B}_2(v_2)_j + S\mu_2(v_2^3)_j + S\mu_2(u_1^2v_2)_j + S\mu_2(u_2^2v_2)_j \\
& + S\mu_2(v_1^2v_2)_j + S(s_2)_j - 2\sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha \left((u_2)_{j-k+1} - (u_2)_{j-k} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.13}$$

$$\begin{aligned}
& 2(v_2)_{j+1} - S((v_2)_x)_{j+1} - S((u_2)_{xx})_{j+1} - S\mathcal{E}_2(u_1)_{j+1} + S\mathcal{B}_2(u_2)_{j+1} \\
& - 2S\mu_2(u_1)_{j+1}(u_1)_j(u_2)_j - 2S\mu_2(u_2)_{j+1}(u_1^2)_j - 2S\mu_2(v_1)_{j+1}(v_1)_j(u_2)_j \\
& - S\mu_2(u_2)_{j+1}(v_1^2)_j - 3S\mu_2(u_2)_{j+1}(u_2^2)_j - 2S\mu_2(v_2)_{j+1}(v_2)_j(u_2)_j \\
& - S\mu_2(u_2)_{j+1}(v_2^2)_j + S(r_2)_{j+1} = 2(v_2)_j + S((v_2)_x)_j + S((u_2)_{xx})_j \\
& + S\mathcal{E}_2(u_1)_j - S\mathcal{B}_2(u_2)_j - S\mu_2(u_2^3)_j - S\mu_2(u_1^2u_2)_j - S\mu_2(u_2^2v_2)_j \\
& - S\mu_2(v_1^2u_2)_j - S(r_2)_j - 2\sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha \left((v_2)_{j-k+1} - (v_2)_{j-k} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.14}$$

denklemler bulunur. Başlangıç şartları

$$(u_1)_0 = \operatorname{Re}(h_1(x)), (v_1)_0 = \operatorname{Im}(h_1(x))$$

$$(u_2)_0 = \operatorname{Re}(h_2(x)), (v_2)_0 = \operatorname{Im}(h_2(x))$$

ve sınır şartları

$$(u_1)_{j+1}(a) = \operatorname{Re}(f_1(t_{j+1})), (u_1)_{j+1}(b) = \operatorname{Re}(f_2(t_{j+1})), \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

$$(v_1)_{j+1}(a) = \text{Im}(f_1(t_{j+1})), (v_1)_{j+1}(b) = \text{Im}(f_2(t_{j+1})), \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

$$(u_2)_{j+1}(a) = \text{Re}(g_1(t_{j+1})), (u_2)_{j+1}(b) = \text{Re}(g_2(t_{j+1})), \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

$$(v_2)_{j+1}(a) = \text{Im}(g_1(t_{j+1})), (v_2)_{j+1}(b) = \text{Im}(g_2(t_{j+1})), \quad j = 0, 1, \dots, N-1$$

olarak yeni değişkenler cinsinden biçiminde yazılabilir. Burada $S = \Gamma(2 - \alpha)(\Delta t)^\alpha$ olmak üzere $(u_i)_{j+1}$ ve $(v_i)_{j+1}$, $i = 1, 2$ yukarıda verilen cebirsel denklem sisteminin $(j + 1)$. zaman adımıdaki sırasıyla reel ve sanal çözümleridir.

4.2.2 Konuma göre Chebyshev dalgacıklarıyla ayrıklaştırma

Chebyshev dalgacıkları yardımı ile bu denklemi çözmek için denklemde görülen en yüksek mertebeden türev terimi

$$((u_1)_{xx})_{j+1}(x) = \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} \Psi_{nm}(x) \quad (4.2.15)$$

biçiminde Chebyshev dalgacık serisine açılır. (4.2.15) denkleminin x 'e göre 0'dan x 'e integrali alınır ve sınır şartları kullanılarak

$$\begin{aligned} ((u_1)_x)_{j+1}(x) &= \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} p_{nm}(x) + (u_1)_{j+1}(1) \\ &\quad - (u_1)_{j+1}(0) - \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} q_{nm}(1) \end{aligned} \quad (4.2.16)$$

şeklinde bulunabilir. Son olarak, (4.2.16) denkleminin 0' dan x 'e integrali alınarak

$$\begin{aligned} (u_1)_{j+1}(x) &= \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} q_{nm}(x) + (u_1)_{j+1}(0) \\ &\quad + x \left((u_1)_{j+1}(1) - (u_1)_{j+1}(0) \right) - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} q_{nm}(1) \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

bulunur. Benzer olarak model problemin $((u_2)_{xx})_{j+1}$ terimi

$$((u_2)_{xx})_{j+1}(x) = \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} \Psi_{nm}(x), \quad (4.2.18)$$

$$\begin{aligned} ((u_2)_x)_{j+1}(x) &= \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} p_{nm}(x) + (u_2)_{j+1}(1) - (u_2)_{j+1}(0) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} q_{nm}(1), \end{aligned} \quad (4.2.19)$$

$$\begin{aligned} (u_2)_{j+1}(x) &= \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} q_{nm}(x) + (u_2)_{j+1}(0) \\ &\quad + x \left((u_2)_{j+1}(1) - (u_2)_{j+1}(0) \right) - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} q_{nm}(1) \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

ve $((v_1)_{xx})_{j+1}$, $((v_2)_{xx})_{j+1}$ terimleri içinde

$$((v_1)_{xx})_{j+1}(x) = \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} e_{nm} \Psi_{nm}(x), \quad (4.2.21)$$

$$\begin{aligned} ((v_1)_x)_{j+1}(x) &= \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} e_{nm} p_{nm}(x) + (v_1)_{j+1}(1) - (v_1)_{j+1}(0) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} e_{nm} q_{nm}(1), \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

$$\begin{aligned} (v_1)_{j+1}(x) &= \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} e_{nm} q_{nm}(x) + (v_1)_{j+1}(0) \\ &\quad + x \left((v_1)_{j+1}(1) - (v_1)_{j+1}(0) \right) - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} e_{nm} q_{nm}(1) \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

$$((v_2)_{xx})_{j+1}(x) = \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm} \Psi_{nm}(x), \quad (4.2.24)$$

$$\begin{aligned} ((v_2)_x)_{j+1}(x) &= \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm} p_{nm}(x) + (v_2)_{j+1}(1) - (v_2)_{j+1}(0) \\ &\quad - \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm} q_{nm}(1), \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

$$\begin{aligned} (v_2)_{j+1}(x) &= \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm} q_{nm}(x) + (v_2)_{j+1}(0) \\ &\quad + x \left((v_2)_{j+1}(1) - (v_2)_{j+1}(0) \right) - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm} q_{nm}(1) \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

elde ederiz. Kesirli mertebeden ikili Schrödinger denklemi için (4.2.15)-(4.2.26) denklemleri (4.2.11)-(4.2.14) denklemlerinde yerine yazılıp sonuçlar $x_l = \frac{l-0.5}{m'}$, $l = 1, 2, \dots, m'$, $m' = 2^{s-1}M$ noktalarında ayrıklaştırılırsa

$$\begin{aligned}
& 2 \left(1 + S\mu_1 (u_1)_j (v_1)_j \right) \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} q_{nm}(x) + (u_1)_{j+1}(0) + x \left((u_1)_{j+1}(1) - (u_1)_{j+1}(0) \right) \right. \\
& - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} q_{nm}(1) \left. \right) - 2S\mu_1 (u_2)_j (v_1)_j \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} q_{nm}(x) + (u_2)_{j+1}(0) \right. \\
& + x \left((u_2)_{j+1}(1) - (u_2)_{j+1}(0) \right) - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm} q_{nm}(1) \left. \right) + S \left(\varepsilon_1 + \mu_1 (u_1^2)_j + 3\mu_1 (v_1^2)_j \right. \\
& + \mu_1 (u_2^2)_j + \mu_1 (v_2^2)_j \left. \right) \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} e_{nm} q_{nm}(x) + (v_1)_{j+1}(0) + x \left((v_1)_{j+1}(1) - (v_1)_{j+1}(0) \right) \right. \\
& - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} e_{nm} q_{nm}(1) \left. \right) + S \left(\beta_1 + 2\mu_1 (v_2)_j (v_1)_j \right) \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm} q_{nm}(x) + (v_2)_{j+1}(0) \right. \\
& + x \left((v_2)_{j+1}(1) - (v_2)_{j+1}(0) \right) - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm} q_{nm}(1) \left. \right) + S \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} p_{nm}(x) \right. \\
& + (u_1)_{j+1}(1) - (u_1)_{j+1}(0) - \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm} q_{nm}(1) \left. \right) + S \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} e_{nm} \psi_{nm}(x) \right) \\
& = 2(u_1)_j - S((u_1)_x)_j - S((v_1)_{xx})_j - S\varepsilon_1 (v_1)_j + S\beta_1 (v_2)_j + S\mu_1 (v_1^3)_j + S\mu_1 \\
& \times (u_2^2 v_1)_j + S\mu_1 (v_2^2 v_1)_j + S \left((s_1)_{j+1} + (s_1)_j \right) - 2 \sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha \left((u_1)_{j-k+1} - (u_1)_{j-k} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.27}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(1 - S\mu_1(u_1)_j(v_1)_j \right) \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} e_{nm}q_{nm}(x) + (v_1)_{j+1}(0) + x \left((v_1)_{j+1}(1) - (v_1)_{j+1}(0) \right) \right) \\
& - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} e_{nm}q_{nm}(1) \Big) - 2S\mu_1(u_1)_j(v_2)_j \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm}q_{nm}(x) + (v_2)_{j+1}(0) \right. \\
& \left. + x \left((v_2)_{j+1}(1) - (v_2)_{j+1}(0) \right) - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm}q_{nm}(1) \right) - S \left(\varepsilon_1 + 3\mu_1(u_1^2)_j + \mu_1(v_1^2)_j \right. \\
& \left. + \mu_1(u_2^2)_j + \mu_1(v_2^2)_j \right) \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}q_{nm}(x) + (u_1)_{j+1}(0) + x \left((u_1)_{j+1}(1) - (u_1)_{j+1}(0) \right) \right) \\
& - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}q_{nm}(1) \Big) - S \left(\beta_1 - 2\mu_1(u_2)_j(u_1)_j \right) \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm}q_{nm}(x) + (u_2)_{j+1}(0) \right. \\
& \left. + x \left((u_2)_{j+1}(1) - (u_2)_{j+1}(0) \right) - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm}q_{nm}(1) \right) + S \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} e_{nm}p_{nm}(x) + \right. \\
& \left. (v_1)_{j+1}(1) - (v_1)_{j+1}(0) - \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} e_{nm}q_{nm}(1) \right) - S \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}\psi_{nm}(x) \right) \\
& = 2(v_1)_j - S((v_1)_x)_j + S((u_1)_{xx})_j + S\varepsilon_1(u_1)_j + S\beta_1(u_2)_j - S\mu_1(u_1^3)_j - S\mu_1(v_1^2u_1)_j \\
& - S\mu_1(u_2^2u_1)_j - S\mu_1(v_2^2u_1)_j - S((r_1)_{j+1} + (r_1)_j) - 2 \sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha \left((v_1)_{j-k+1} - (v_1)_{j-k} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(1 + S\mu_2(u_2)_j(v_2)_j \right) \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{2^{s-1}M-1} d_{nm}q_{nm}(x) + (u_2)_{j+1}(0) + x \left((u_2)_{j+1}(1) - (u_2)_{j+1}(0) \right) \right. \\
& \left. - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{2^{s-1}M-1} d_{nm}q_{nm}(1) \right) + 2S\mu_2(u_1)_j(v_2)_j \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{2^{s-1}M-1} c_{nm}q_{nm}(x) + (u_1)_{j+1}(0) \right. \\
& \left. + x \left((u_1)_{j+1}(1) - (u_1)_{j+1}(0) \right) - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{2^{s-1}M-1} c_{nm}q_{nm}(1) \right) - S \left(\beta_2 - \mu_2(u_1^2)_j - \mu_2(v_1^2)_j \right. \\
& \left. - \mu_2(u_2^2)_j - 3\mu_2(v_2^2)_j \right) \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{2^{s-1}M-1} f_{nm}q_{nm}(x) + (v_2)_{j+1}(0) + x \left((v_2)_{j+1}(1) - (v_2)_{j+1}(0) \right) \right. \\
& \left. - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{2^{s-1}M-1} f_{nm}q_{nm}(1) \right) + S \left(\varepsilon_2 + 2\mu_2(v_2)_j(v_1)_j \right) \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{2^{s-1}M-1} e_{nm}q_{nm}(x) + (v_1)_{j+1}(0) \right. \\
& \left. + x \left((v_1)_{j+1}(1) - (v_1)_{j+1}(0) \right) - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{2^{s-1}M-1} e_{nm}q_{nm}(1) \right) - S \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{2^{s-1}M-1} d_{nm}p_{nm}(x) \right. \\
& \left. + (u_2)_{j+1}(1) - (u_2)_{j+1}(0) - \sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{2^{s-1}M-1} d_{nm}q_{nm}(1) \right) + S \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}M-1} \sum_{m=0}^{2^{s-1}M-1} f_{nm}\psi_{nm}(x) \right) \\
& = 2(u_2)_j + S((u_2)_x)_j - S((v_2)_{xx})_j - S\varepsilon_2(v_1)_j + S\beta_2(v_2)_j + S\mu_2(v_2^3)_j + S\mu_2(u_1^2v_2) \\
& + S\mu_2(u_2^2v_2)_j + S\mu_2(v_1^2v_2)_j + S((s_2)_{j+1} + (s_2)_j) - 2 \sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha \left((u_2)_{j-k+1} - (u_2)_{j-k} \right)
\end{aligned} \tag{4.2.29}$$

$$\begin{aligned}
& 2 \left(1 - S\mu_2(u_2)_j(v_2)_j \right) \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm}q_{nm}(x) + (v_2)_{j+1}(0) + x \left((v_2)_{j+1}(1) - (v_2)_{j+1}(0) \right) \right. \\
& - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm}q_{nm}(1) \left. \right) - 2S\mu_2(v_2)_j(v_1)_j \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} e_{nm}q_{nm}(x) \right. \\
& + (v_1)_{j+1}(0) + x \left((v_1)_{j+1}(1) - (v_1)_{j+1}(0) \right) - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} e_{nm}q_{nm}(1) \left. \right) \\
& + S \left(\beta_2 - 2\mu_2(u_1^2)_j - \mu_2(v_1^2)_j - 3\mu_2(u_2^2)_j - \mu_2(v_2^2)_j \right) \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm}q_{nm}(x) \right. \\
& + (u_2)_{j+1}(0) + x \left((u_2)_{j+1}(1) - (u_2)_{j+1}(0) \right) - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm}q_{nm}(1) \left. \right) \quad (4.2.30) \\
& - S \left(\varepsilon_2 + 2\mu_2(u_2)_j(u_1)_j \right) \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}q_{nm}(x) + (u_1)_{j+1}(0) \right. \\
& + x \left((u_1)_{j+1}(1) - (u_1)_{j+1}(0) \right) - x \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} c_{nm}q_{nm}(1) \left. \right) - S \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm}p_{nm}(x) \right. \\
& + (v_2)_{j+1}(1) - (v_2)_{j+1}(0) - \sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} f_{nm}q_{nm}(1) \left. \right) - S \left(\sum_{n=1}^{2^{s-1}} \sum_{m=0}^{M-1} d_{nm}\psi_{nm}(x) \right) \\
& = 2(v_2)_j + S((v_2)_x)_j + S((u_2)_{xx})_j + S\varepsilon_2(u_1)_j - S\beta_2(u_2)_j - S\mu_2(u_2^3)_j - S\mu_2(u_1^2u_2)_j \\
& - S\mu_2(u_2^2v_2)_j - S\mu_2(v_1^2u_2)_j - S \left((r_2)_j + (r_2)_j \right) - 2 \sum_{k=1}^{j-1} b_k^\alpha \left((v_2)_{j-k+1} - (v_2)_{j-k} \right)
\end{aligned}$$

biçimindeki cebirsel denklem sistemi elde edilir. Bu cebirsel denklem sistemleri çözülerek c_{nm} , d_{nm} , e_{nm} ve f_{nm} Chebyshev katsayıları bulunur. Bulunan bu Chebyshev katsayıları (4.2.11)-(4.2.14) denklemlerinde yerlerine yazılarak $(j+1)$. zaman adımındaki bilinmeyen değerlerin nümerik çözümleri ardışık olarak bulunur.

4.2.3 Nümerik sonuçlar

Bu kısımda kesirli mertebeden türevli İkili Schrödinger denklemleri için elde edilen nümerik sonuçlar verilmiştir. Chebyshev dalgacık yöntemiyle elde edilen sonuçların tam çözüme ne kadar iyi yaklaştığını görmek için önceki kısımda (4.1.19) ve (4.1.20) ile verilen L_2 ve L_∞ hata normları kullanıldı. Δx , x değişkeninin adım uzunluğunu, u_i^{tam} tam çözümü ve u_i^{num} nümerik çözümü ve $m' = 2^{k-1}M$ ise yöntemimizin kollokasyon noktalarının sayısını göstermektedir.

4.2.3.1 Problem 1

Chebyshev dalgacık yönteminin kesirli mertebeden türevli İkili Schrödinger denkleminin ilk uygulaması olarak (4.2.1) denklemi $\mu_{1,2} = 0$ ve $\varepsilon_{1,2} = 1$, $\beta_{1,2} = 1$ için $F_1(x,t)$ ve $F_2(x,t)$ fonksiyonları

$$F_1(x,t) = \frac{i2^{2\alpha+1}t^\alpha e^{2i\pi x}\Gamma\left(\frac{3}{2} + \alpha\right)}{\sqrt{\pi}(2\alpha+1)} + t^{2\alpha}e^{2i\pi x}(-2\pi - 4\pi^2 + 3),$$

$$F_2(x,t) = \frac{i2^{2\alpha+1}t^\alpha e^{2i\pi x}\Gamma\left(\frac{3}{2} + \alpha\right)}{\sqrt{\pi}(2\alpha+1)} + t^{2\alpha}e^{2i\pi x}(2\pi - 4\pi^2 - 2),$$

olmak üzere

$$u(x,0) = 0, \quad v(x,0) = 0, \quad 0 < x \leq 1,$$

başlangıç koşulu ve

$$\begin{aligned} u(0,t) &= t^2, & u(1,t) &= t^2 \\ v(0,t) &= t^2, & v(1,t) &= t^2 \end{aligned} \quad 0 < t \leq 1.$$

sınır koşulları ile göz önüne alınmıştır. Problemin tam çözümü

$$u(x,t) = t^2 (\sin(2\pi x) + i \cos(2\pi x)) \quad v(x,t) = t^2 (\sin(2\pi x) + i \cos(2\pi x)).$$

dir [12].

Çizelge 4.7 ve 4.8'de $\alpha = 0.5$, $m' = 32$ ve Δt 'nin farklı değerleri için $t = 1$ zamanındaki Chebyshev dalgacık yöntemiyle elde edilen sırasıyla $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısımlarının L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Çizelgelerden, artan zaman adım sayıları ile birlikte hatalarında giderek azaldığı kolayca görülebilir.

Çizelge 4.9 ve 4.10'da $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ ve m' artan kollokasyon sayıları için $t = 1$ zamanındaki Chebyshev dalgacık yöntemiyle elde edilen sırasıyla $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısımlarının L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Seçilen sabit Δt değeri için kollokasyon sayılarındaki değişimle birlikte çözümlerinde hatalarında iyileşmeler görüldü.

Çizelge 4.7 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $m' = 32$ ve $t = 1$ zamanında azalan Δt değerleri için $u(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısım hataları

Δt	Reel Kısım		Sanal Kısım	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.05	4.5812e-04	6.5750e-04	1.0727e-03	1.6943e-03
0.025	2.2955e-04	3.4881e-04	5.3594e-04	8.4685e-04
0.01	9.7614e-05	1.6170e-04	2.1741e-04	3.4353e-04
0.005	5.8626e-05	1.0150e-04	1.1228e-04	1.7797e-04
0.0025	4.3875e-05	7.5106e-05	6.0553e-05	9.7618e-05

Çizelge 4.8 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $m' = 32$ ve $t = 1$ zamanında azalan Δt değerleri için $v(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısım hataları

Δt	Reel Kısım		Sanal Kısım	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.05	5.6653e-04	8.1178e-04	8.9552e-04	1.4829e-03
0.025	2.8297e-04	4.1999e-04	4.4672e-04	7.4032e-04
0.01	1.1669e-04	1.8521e-04	1.8079e-04	2.9941e-04
0.005	6.4556e-05	1.0871e-04	9.3407e-05	1.5526e-04
0.0025	4.2371e-05	7.3549e-05	5.1098e-05	8.6695e-05

Şekil 4.5 ve 4.8'de $m' = 32$ $\alpha = 0.5$ ve $\Delta t = 0.001$ için $u(x,t)$ 'nin sırasıyla reel ve sanal kısımlarının nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri verildi. Şekillerden de görüldüğü gibi nümerik ve tam çözümler ayırt edilemeyecek kadar birbirine yakındır.

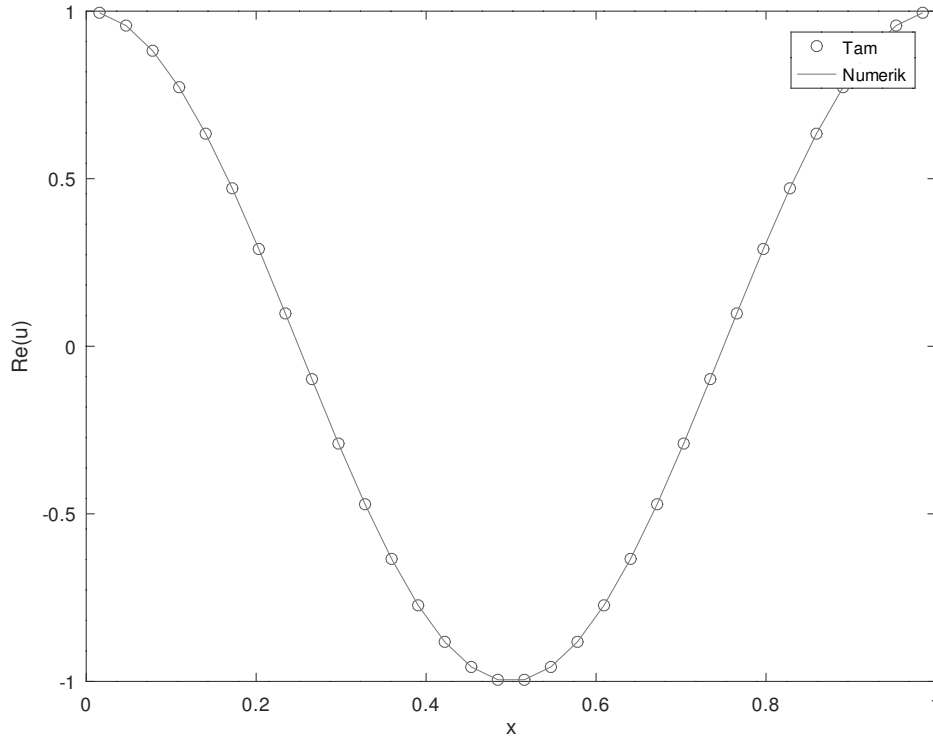
4.2.3.2 Problem 2

Çizelge 4.9 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 1$ zamanında artan m' değerleri için $u(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısım hatalarının karşılaştırılmaları

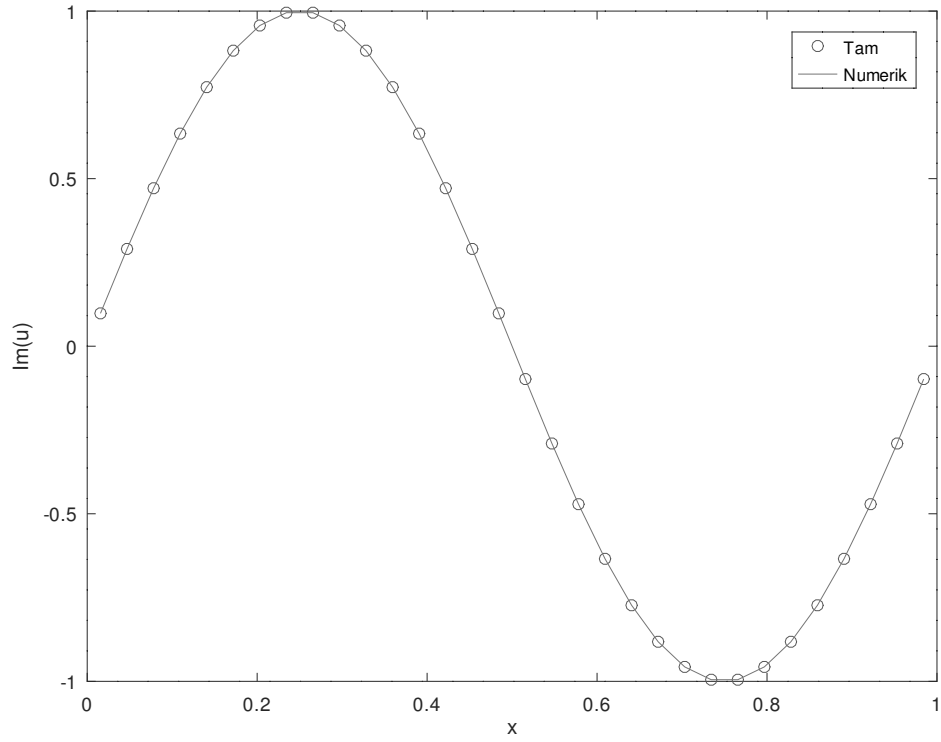
m'	Reel Kısım		Sanal Kısım	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
8	9.8747e-03	1.5001e-02	2.3742e-03	4.1854e-03
16	5.9305e-04	9.3971e-04	2.4120e-04	4.6138e-04
32	3.8791e-05	6.1964e-05	3.1198e-045	5.3174e-05
64	9.3427e-06	1.4941e-05	2.1442e-05	3.3883e-05
128	9.0442e-06	1.2880e-05	2.1078e-05	3.3339e-05
256	9.0434e-06	1.2846e-05	2.1056e-05	3.3310e-05
512	9.0434e-06	1.2853e-05	2.1055e-05	3.3309e-05
1024	9.0434e-06	1.2854e-05	2.1055e-05	3.3309e-05

Çizelge 4.10 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 1'in $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 1$ zamanında artan m' değerleri için $v(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısım hatalarının karşılaştırılmaları

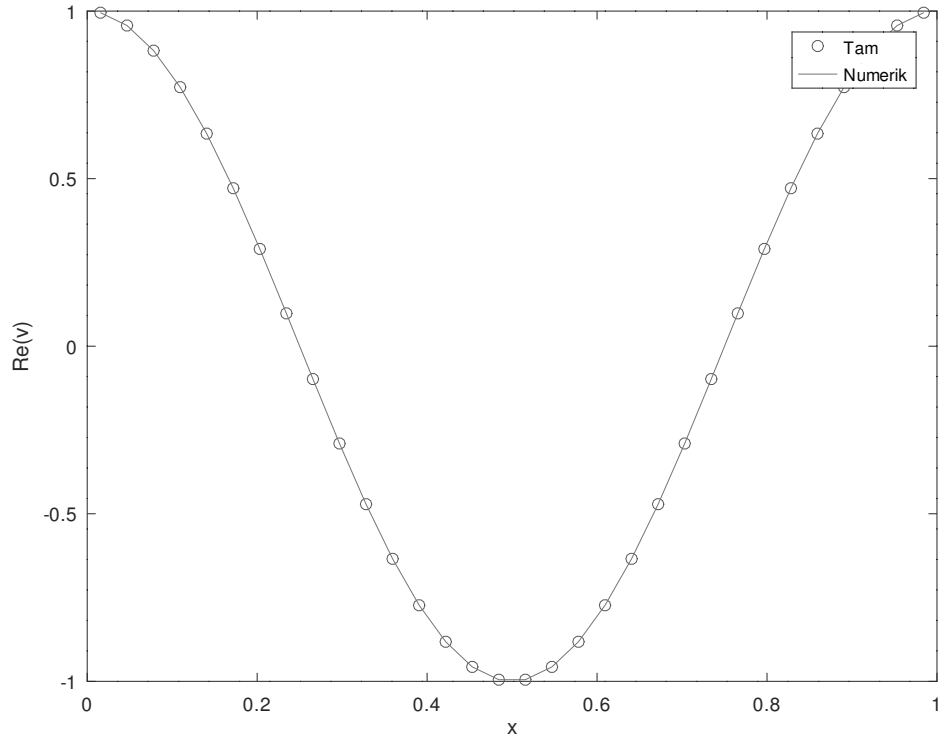
m'	Reel Kısım		Sanal Kısım	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
8	4.5313e-03	7.0056e-03	7.7053e-04	1.3966e-03
16	4.5618e-04	7.6422e-04	2.5931e-04	4.5671e-04
32	3.3476e-05	5.6491e-05	2.8468e-05	4.9413e-05
64	1.1389e-05	1.7501e-05	1.7863e-05	2.9613e-05
128	1.1172e-05	1.5873e-05	1.7625e-05	2.9229e-05
256	1.1169e-05	1.5822e-05	1.7612e-05	2.9212e-05
512	1.1168e-05	1.5829e-05	1.7612e-05	2.9212e-05
1024	1.1168e-05	1.5829e-05	1.7612e-05	2.9212e-05



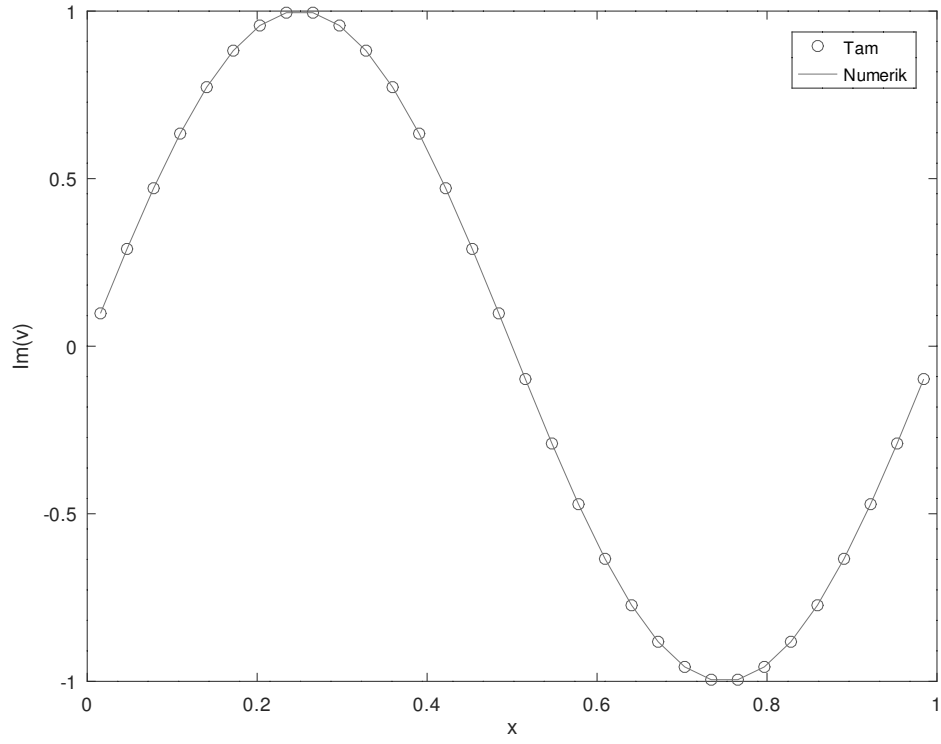
Şekil 4.5 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 1'in $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki $u(x,t)$ 'nin reel kısmının nümerik ve tam çözümleri grafiği



Şekil 4.6 : İkili Schrödinger denklemleri için Problem 1'in $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki $u(x,t)$ 'nin sanal kısmının nümerik ve tam çözümleri grafiği



Şekil 4.7 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 1'in $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki $u(x, t)$ 'nin reel kısmının nümerik ve tam çözümleri grafiği



Şekil 4.8 : İkili Schrödinger denklemleri için Problem 1'in $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki $v(x,t)$ 'nin sanal kısmının nümerik ve tam çözümleri grafiği

Çizelge 4.11 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 2'nin $\alpha = 0.5$, $m' = 32$ ve $t = 1$ zamanında artan m' değerleri için $u(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısım hataları

m'	Reel Kısım		Sanal Kısım	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
8	7.9568e-04	1.3159e-03	9.2211e-04	1.4223e-03
16	6.3099e-04	1.1659e-03	7.6766e-04	1.6928e-03
32	6.4098e-04	1.2038e-03	7.4985e-04	1.6688e-03
64	6.4114e-04	1.2101e-03	7.4789e-04	1.6649e-03
128	6.4114e-04	1.2111e-03	7.4776e-04	1.6655e-03
256	6.4114e-04	1.2110e-03	7.4775e-04	1.6653e-03
512	6.4114e-04	1.2111e-03	7.4775e-04	1.6655e-03

İkili Schrödinger denklemi için bir başka uygulama olarak, (4.2.1) denklemi $\mu_1 = 2$, $\mu_2 = 4$, $\varepsilon_{1,2} = 1$ ve $\beta_{1,2} = 1$ için $F_1(x,t)$ ve $F_2(x,t)$ fonksiyonları

$$F_1(x,t) = \left(\frac{i2^{2\alpha+1}t^\alpha\Gamma\left(\frac{3}{2} + \alpha\right)}{\sqrt{\pi}(2\alpha+1)} + 4t^{6\alpha} \right) e^{ix},$$

$$F_2(x,t) = \left(\frac{i2^{2\alpha+1}t^\alpha\Gamma\left(\frac{3}{2} + \alpha\right)}{\sqrt{\pi}(2\alpha+1)} + 8t^{6\alpha} \right) e^{ix},$$

olmak üzere

$$u(x,0) = v(x,0) = 0, \quad x \in (0,1)$$

başlangıç koşulu ile ele alınmıştır. Problemin tam çözümü

$$u(x,t) = v(x,t) = t^{2\alpha} e^{ix} \quad 0 < \alpha \leq 1$$

dir [13].

Çizelge 4.11 ve 4.12'de $\alpha = 0.5$, $m' = 32$ ve m' 'nin farklı değerleri için $t = 1$ zamanındaki Chebyshev dalgacık yöntemiyle elde edilen sırasıyla $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısımlarının L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Çizelgeler dikkatli incelendiğinde konum adımının küçülmesi ile birlikte çözümlerden elde edilen hataların da düştüğü görülmektedir.

Çizelge 4.13 ve 4.14'da azalan Δt değerleri için $\alpha = 0.5$, $m = 32$ ve $t = 1$ zamanında hatalar gösterildi. Δt 'nin azalan değerleri için hatalarında azaldığı görüldü. Şekil 4.9'da $m' = 32$ $\alpha = 0.5$ ve $\Delta t = 0.001$ için sırasıyla $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ 'nin reel kısımlarının nümerik ve tam çözümlerinin grafikleri verildi. Şekillerden de görüldüğü gibi nümerik ve tam çözümler oldukça iyi uyumaktadır. $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ 'nin sanal kısımlarının grafikleri Şekil 4.10'da gösterildi. Sanal kısımlar için de çözümlerin birbirine yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.12 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 2'nin $\alpha = 0.5$, $m' = 32$ ve $t = 1$ zamanında artan m' değerleri için $v(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısım hataları

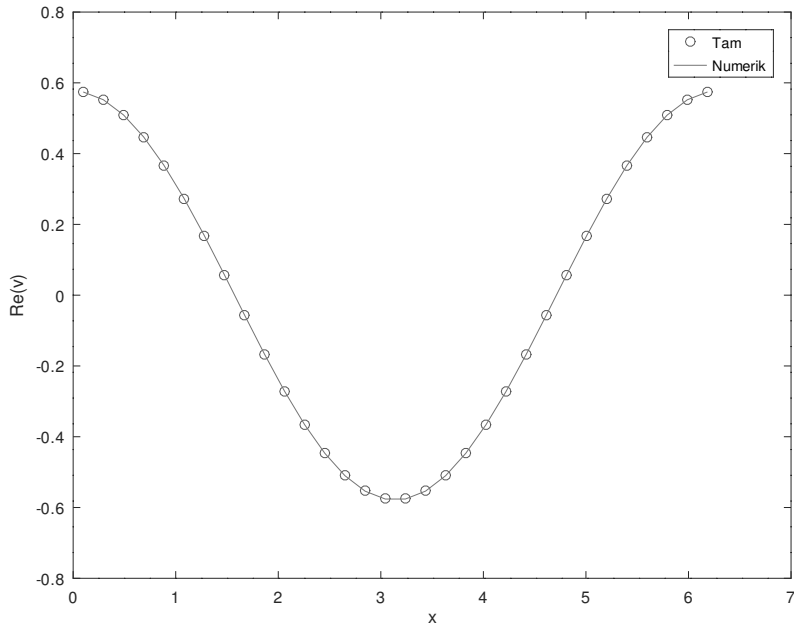
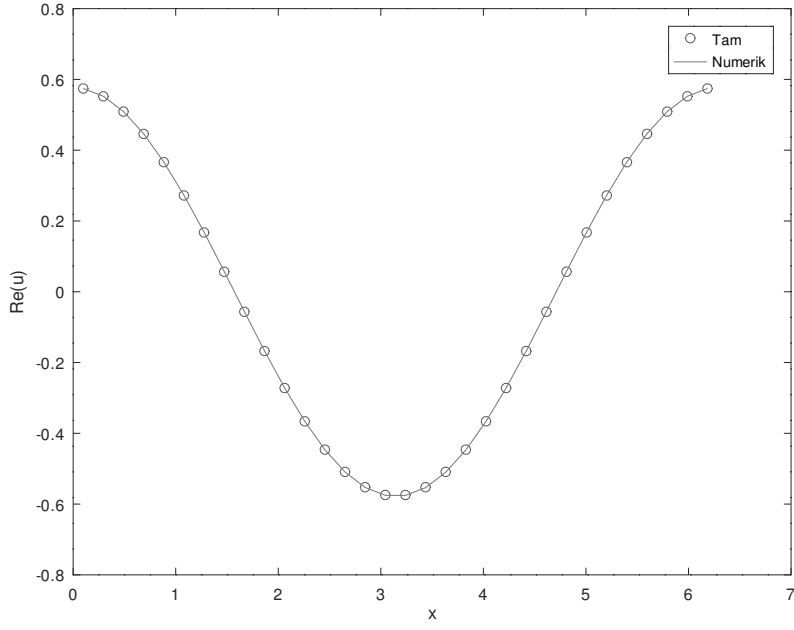
m'	Reel Kısım		Sanal Kısım	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
8	7.9705e-04	1.3427e-03	7.9622e-04	1.5289e-03
16	7.0084e-04	1.2260e-03	7.9061e-04	1.3222e-03
32	6.8699e-04	1.2201e-03	7.7223e-04	1.3019e-03
64	6.8543e-04	1.2248e-03	7.7045e-04	1.2962e-03
128	6.8533e-04	1.2257e-03	7.7033e-04	1.2978e-03
256	6.8532e-04	1.2256e-03	7.7032e-04	1.2982e-03
512	6.8532e-04	1.2257e-03	7.7032e-04	1.2983e-03

Çizelge 4.13 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 2'nin $\alpha = 0.5$, $m' = 32$ ve $t = 1$ zamanında azalan Δt değerleri için $u(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısım hataları

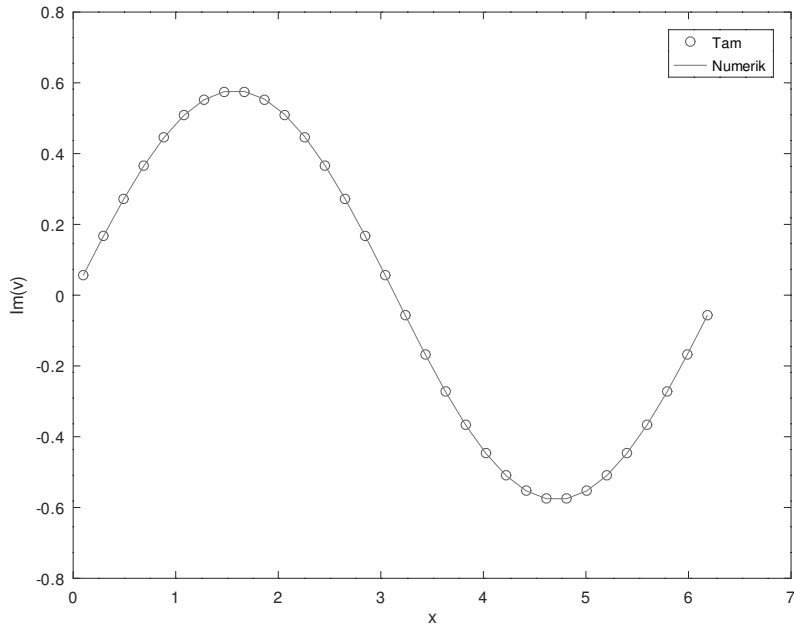
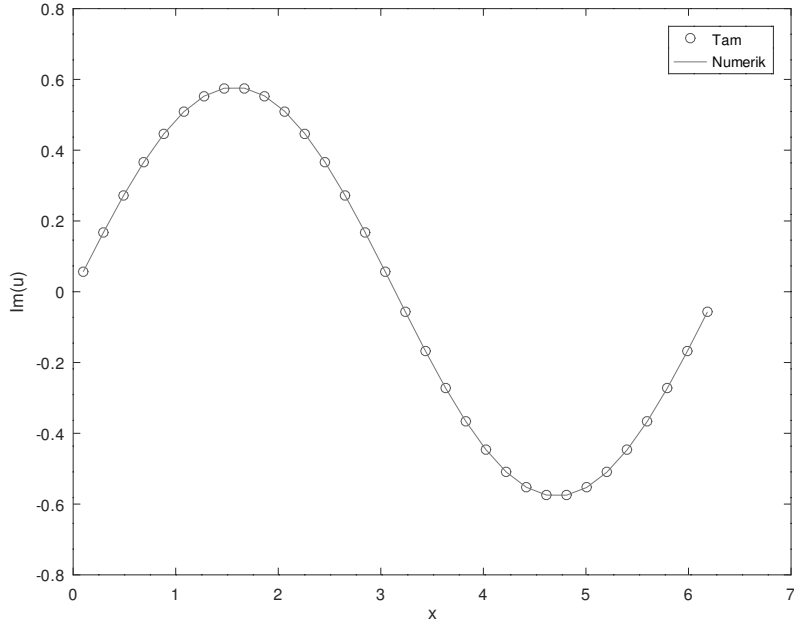
Δt	Reel Kısım		Sanal Kısım	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.05	2.6627e-02	5.2841e-02	3.5602e-02	7.7659e-02
0.025	1.4391e-02	2.8057e-02	1.8202e-02	4.0044e-02
0.01	6.0486e-03	1.1532e-02	7.3228e-03	1.6191e-02
0.005	3.0987e-03	5.8676e-03	3.6910e-03	8.1834e-03
0.0025	1.5770e-03	2.9724e-03	1.8592e-03	4.1303e-03
0.001	6.4098e-04	1.2038e-03	7.4985e-04	1.6688e-03
0.0005	3.2304e-04	6.0607e-04	3.7722e-04	8.4022e-04
0.00025	1.6233e-04	3.0480e-04	1.9006e-04	4.2355e-04
0.0001	6.5097e-05	1.2289e-04	7.7375e-05	1.7242e-04

Çizelge 4.14 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 2'nin $\alpha = 0.5$, $m' = 32$ ve $t = 1$ zamanında azalan Δt değerleri için $v(x,t)$ 'nin reel ve sanal kısım hataları

Δt	Reel Kısım		Sanal Kısım	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
0.05	3.1755e-02	5.2170e-02	3.5101e-02	5.7491e-02
0.025	1.6406e-02	2.8328e-02	1.8413e-02	3.0707e-02
0.01	6.6798e-03	1.1697e-02	7.5138e-03	1.2566e-03
0.005	3.3752e-03	5.9328e-03	3.7968e-03	6.3663e-03
0.0025	1.7020e-03	3.0076e-03	1.9141e-03	3.2178e-03
0.001	6.8699e-04	1.2201e-03	7.7223e-04	1.3019e-03
0.0005	3.4566e-04	6.1494e-04	3.8845e-04	6.5597e-04
0.00025	1.7410e-04	3.0975e-04	1.9563e-04	3.3086e-04
0.0001	7.0747e-05	1.2543e-04	7.9514e-05	1.3475e-04



Şekil 4.9 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 2'nin $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ 'nin reel kısmının nümerik ve tam çözümleri grafiği



Şekil 4.10 : İkili Schrödinger denklemi için Problem 2'nin $m' = 32$, $\alpha = 0.5$, $\Delta t = 0.001$ için $t = 1$ zamanındaki $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ 'nin sanal kısmının nümerik ve tam çözümleri grafiği

5. SONUÇ

Bu tezde, lineer ve lineer olmayan kesirli mertebeden Schrödinger ve ikili Schrödinger denklemleri Chebyshev dalgacık kollokasyon yöntemiyle nümerik olarak çözüldü. Kesirli türevler $L1$ ayrıklaştırma formülü ile konuma göre Chebyshev dalgacıklarıyla ayrıklaştırma yapılmıştır. Bu yaklaşımla, dikkate alınan problemlerin nümerik çözümünü bulmak, lineer bir cebirsel denklem sisteminin çözümlerine dönüşür. Chebyshev dalgacıklarına dayalı nümerik yöntem ile elde edilen sonuçların, tam çözümler ve sonlu elemanlar yöntemi ile karşılaştırıp performansını değerlendirmek için L_∞ ve L_2 hataları hesaplandı. Elde edilen sonuçlar, kesirli mertebeden ele alınan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri için Chebyshev dalgacık yönteminin uygun bir yöntem olduğunu, farklı tiplerde göz önüne alınan kesirli mertebeden benzer problemlerin çözümü için de kullanılabileceğini göstermiştir.

KAYNAKLAR

- [1] **Esen, A. ve Tasbozan, O.** (2015). Numerical solution of time fractional nonlinear Schrödinger equation arising in quantum mechanics by cubic B-spline finite elements, *Malaya J. Mat.*, 3(4), 387–397.
- [2] **Miller, K.S. ve Ross, B.** (1993). *An introduction to the fractional calculus and fractional differential equations*, A Wiley-Interscience Publication, John Wiley & Sons, Inc., New York.
- [3] **Podlubny, I.** (1999). *Fractional differential equations*, cilt198 of *Mathematics in Science and Engineering*, Academic Press, Inc., San Diego, CA, an introduction to fractional derivatives, fractional differential equations, to methods of their solution and some of their applications.
- [4] **Whitham, G.B.** (1974). *Linear and nonlinear waves*, Wiley-Interscience [John Wiley & Sons], New York-London-Sydney, pure and Applied Mathematics.
- [5] **Agrawal, G.** (2013). *Nonlinear Fiber Optics*, Elsevier.
- [6] **Mokhtari, R., Isvand, D., Chegini, N.G. ve Salaripناه, A.** (2013). Numerical solution of the Schrödinger equations by using Delta-shaped basis functions, *Nonlinear Dynamics*, 74(1-2), 77–93.
- [7] **Naber, M.** (2004). Time fractional Schrödinger equation, *Journal of Mathematical Physics*, 45(8), 3339–3352.
- [8] **Odibat, Z., Momani, S., ve Alawneh, A.** (2008). Analytic study on time-fractional Schrödinger equations: exact solutions by GDTM, *Journal of Physics: Conference Series*, 96, 012066, <https://doi.org/10.1088%2F1742-6596%2F96%2F1%2F012066>.
- [9] **Hicdurmaz, B. ve Ashyralyev, A.** (2017). On the Stability of Time-Fractional Schrödinger Differential Equations, *Numerical Functional Analysis and Optimization*, 38(10), 1215–1225.
- [10] **Wei, L., He, Y., Zhang, X. ve Wang, S.** (2012). Analysis of an implicit fully discrete local discontinuous Galerkin method for the time-fractional Schrödinger equation, *Finite Elements in Analysis and Design*, 59, 28–34.
- [11] **Esen, A. ve Tasbozan, O.** (2017). Numerical Solution of Time Fractional Schrödinger Equation by Using Quadratic B-Spline Finite Elements, *Annales Mathematicae Silesianae*, 31(1), 83–98.
- [12] **Bhrawy, A.H., Doha, E.H., Ezz-Eldien, S.S. ve Gorder, R.A.V.** (2014). A new Jacobi spectral collocation method for solving 1+1 fractional Schrödinger equations and fractional coupled Schrödinger systems, *The European Physical Journal Plus*, 129(12).
- [13] **Aminikhah, H., Sheikhani, A.R. ve Rezazadeh, H.** (2014). An Efficient Method for Time-Fractional Coupled Schrödinger System, *International Journal of Partial Differential Equations*, 2014, 1–12.

- [14] **KARAMAN, B. ve DERELİ, Y.** (2019). Lineer Olmayan İkili Schrödinger Denklemi için Ağsız Bir Yöntem, *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Fen Dergisi*, 418–435.
- [15] **Oldham, K.B. ve Spanier, J.** (1974). *The fractional calculus*, Academic Press [A subsidiary of Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York-London, theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order, With an annotated chronological bibliography by Bertram Ross, Mathematics in Science and Engineering, Vol. 111.
- [16] **Andrews, G.E., Askey, R. ve Roy, R.** (1999). *Special Functions*, Cambridge University Press.
- [17] **Grenness, M. ve Oldham, K.B.** (1972). Semiintegral electroanalysis. Theory and verification, *Analytical Chemistry*, 44(7), 1121–1129.
- [18] **Mason, J.C. ve Handscomb, D.C.** (2003). *Chebyshev polynomials*, Chapman & Hall/CRC, Boca Raton, FL.
- [19] **Singh, J., Kumar, D., Hammouch, Z. ve Atangana, A.** (2018). A fractional epidemiological model for computer viruses pertaining to a new fractional derivative, *Applied Mathematics and Computation*, 316, 504–515.
- [20] **Owolabi, K.M., Gómez-Aguilar, J.F. ve Karaagac, B.** (2019). Modelling, analysis and simulations of some chaotic systems using derivative with Mittag-Leffler kernel, *Chaos, Solitons & Fractals*, 125, 54–63.
- [21] **Oruç, O., Esen, A. ve Bulut, F.** (2019). A unified finite difference Chebyshev wavelet method for numerically solving time fractional Burgers' equation, *Discrete and Continuous Dynamical Systems. Series S*, 12(3), 533–542.
- [22] **Esen, A. ve Tasbozan, O.** (2016). Numerical solution of time fractional Burgers equation by cubic B-spline finite elements, *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(3), 1325–1337.
- [23] **Owolabi, K.M.** (2017). Robust and adaptive techniques for numerical simulation of nonlinear partial differential equations of fractional order, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 44, 304–317.
- [24] **Karaagac, B.** (2019). Two step Adams Bashforth method for time fractional Tricomi equation with non-local and non-singular kernel, *Chaos, Solitons & Fractals*, 128, 234–241.
- [25] **Karaagac, B., Ucar, Y., Yagmurlu, N.M. ve Esen, A.** (2018). A New Perspective on The Numerical Solution for Fractional Klein Gordon Equation, *Journal of Polytechnic*.
- [26] **Khan, N.A., Jamil, M. ve Ara, A.** (2012). Approximate Solutions to Time-Fractional Schrödinger Equation via Homotopy Analysis Method, *ISRN Mathematical Physics*, 2012, 1–11.
- [27] **Ford, N., Rodrigues, M.M. ve Vieira, N.** (2013). A numerical method for the fractional Schrödinger type equation of spatial dimension two, *Fractional Calculus and Applied Analysis*, 16(2).

- [28] **Yildirim, A.** (2009). An Algorithm for Solving the Fractional Nonlinear Schrödinger Equation by Means of the Homotopy Perturbation Method, *International Journal of Nonlinear Sciences and Numerical Simulation*, 10(4).
- [29] **Rida, S., El-Sherbiny, H. ve Arafa, A.** (2008). On the solution of the fractional nonlinear Schrödinger equation, *Physics Letters A*, 372(5), 553–558.
- [30] **Garrappa, R., Moret, I. ve Popolizio, M.** (2015). Solving the time-fractional Schrödinger equation by Krylov projection methods, *Journal of Computational Physics*, 293, 115–134.
- [31] **Mohebbi, A., Abbaszadeh, M. ve Dehghan, M.** (2013). The use of a meshless technique based on collocation and radial basis functions for solving the time fractional nonlinear Schrödinger equation arising in quantum mechanics, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 37(2), 475–485.
- [32] **Herzallah, M.A. ve Gepreel, K.A.** (2012). Approximate solution to the time–space fractional cubic nonlinear Schrodinger equation, *Applied Mathematical Modelling*, 36(11), 5678–5685.
- [33] **Aruna, K. ve Kanth, A.S.V.R.** (2013). Approximate Solutions of Non-linear Fractional Schrodinger Equation Via Differential Transform Method and Modified Differential Transform Method, *National Academy Science Letters*, 36(2), 201–213.
- [34] **Wang, P. ve Huang, C.** (2014). A conservative linearized difference scheme for the nonlinear fractional Schrödinger equation, *Numerical Algorithms*, 69(3), 625–641.
- [35] **Esen, A. ve Tasbozan, O.** (2017). Numerical Solution of Time Fractional Schrödinger Equation by Using Quadratic B-Spline Finite Elements, *Annales Mathematicae Silesianae*, 31(1), 83–98.
- [36] **Esen, A., Sulaiman, T.A., Bulut, H. ve Baskonus, H.M.** (2018). Optical solitons to the space-time fractional (1+1)-dimensional coupled nonlinear Schrödinger equation, *Optik*, 167, 150–156.
- [37] **Haar, A.** (1910). Zur Theorie der orthogonalen Funktionensysteme, *Mathematische Annalen*, 69(3), 331–371.
- [38] **Vidakovic, B. ve Mueller, P.** (1991). *Wavelets for kids: A tutorial introduction*, Duke University.
- [39] **Soman, K., Resmi, N. ve Ramachandran, K.** (2010). *Insight into Wavelets: from Theory to Practice Paperback*, PHI Learning.
- [40] **Boggess, N.** (2009). *Wavelets with Fourier Analysis*, John Wiley & Sons, https://www.ebook.de/de/product/9338730/boggess_narcowich_wavelets_with_fourier_analysis.html.
- [41] **Ray, S.S. ve Gupta, A.K.** (2018). *Wavelet methods for solving partial differential equations and fractional differential equations*, CRC Press, Boca Raton, FL.
- [42] **Adibi, H. ve Assari, P.** (2010). Chebyshev Wavelet Method for Numerical Solution of Fredholm Integral Equations of the First Kind, *Mathematical Problems in Engineering*, 2010, 1–17.

- [43] **Folland** (1999). *Real Analysis 2e*, John Wiley & Sons, https://www.ebook.de/de/product/3599843/folland_real_analysis_2e.html.
- [44] **Daubechies, I.** (1992). *Ten lectures on wavelets*, cilt 61 of *CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA.
- [45] **Çelik, I.** (2016). Chebyshev wavelet collocation method for solving generalized Burgers-Huxley equation, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 39(3), 366–377.
- [46] **Rubin, S.G. ve Graves, R.A.** (1975). A Cubic Spline Approximation for Problems in Fluid Mechanics, *Teknik Rapor*, Nasa TR R-436, Washington, DC.
- [47] **Liu, N. ve Jiang, W.** (2018). A numerical method for solving the time fractional Schrödinger equation, *Advances in Computational Mathematics*, 44(4), 1235–1248.



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Güllü Esra KÖSE

Doğum Tarihi ve Yeri : 13.08.1984, İstanbul

E-Posta : esra_bubek@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2006, İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Y. Lisans:** 2009, İnönü Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı,

ÇALIŞMALAR (Makaleler, Bildiriler, Patentler v.b.)

- **Uçar, Y, Yağmurlu, N.M., Gülbahar, S., Köse, G.E. 2016.** Numerical solution of the modified Burgers equation using linearized finite difference methods, *Proceedings of IAM*, V.5, N.2, 184-195