

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

1-BOYUTLU KORTEWEG-de VRIES (KdV) DENKLEMİNİN
MULTİKUADRİK RADYAL BAZ FONKSİYONU İLE NÜMERİK
ÇÖZÜMLERİ

Melike KÖYLÜ

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Haziran 2019

Tezin Başlığı : 1-BOYUTLU KORTEWEG-de VRIES (KdV)
DENKLEMİNİN MULTİKUADRİK RADYAL BAZ
FONKSİYONU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan : Melike KÖYLÜ

Sınav Tarihi : 18.06.2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında
Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: Prof.Dr. Selçuk KUTLUAY _____

İnönü Üniversitesi

Eş Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU _____

Muş Alparslan Üniversitesi

Prof.Dr. Mustafa İNÇ _____

Fırat Üniversitesi

Doç.Dr. Yusuf UÇAR _____

İnönü Üniversitesi

Prof.Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “1-Boyutlu Korteweg-de Vries (KdV) Denkleminin Multikuadrik Radyal Baz Fonksiyonu ile Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Melike KÖYLÜ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

1-BOYUTLU KORTEWEG-de VRIES (KdV) DENKLEMİNİN MULTİKUADRIK RADYAL BAZ FONKSİYONU İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Melike KÖYLÜ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

47+vi sayfa

2019

Danışman : Prof.Dr. Selçuk KUTLUAY

Eş Danışman : Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU

Dört bölümden oluşan bu çalışmanın birinci bölümünde, tezin temel amacından kısaca bahsedildi.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan Klasik Sonlu Fark Yöntemleri, Radyal Baz Fonksiyonu, Korteweg-de Vries denkleminin tarihsel gelişimi ile birlikte Soliter Dalgalar ve Solitonlar hakkında bazı önemli bilgiler verildi.

Tezin esas kısmını oluşturan üçüncü bölümde başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen 1-boyutlu Korteweg-de Vries denkleminin zaman yönünde uygun sonlu fark yaklaşımı ve konum yönünde multikuadrik radyal baz fonksiyonu kullanılarak nümerik şeması elde edildi.

Dördüncü bölümde, KdV denklemi için üç test problem göz önüne alındı. Her bir problemin üçüncü bölümde verilen şema kullanılarak nümerik çözümleri bulundu. Elde edilen sonuçlar analitik çözüm ve literatürdeki bazı sonuçlarla karşılaştırıldı. Elde edilen sonuçlar L_2 ve L_∞ hata normları ve korunum sabitleriyle birlikte tablolar halinde sunuldu. Ayrıca bulunan nümerik çözümlerin sürekliliğini ve problemin doğru fiziksel davranışlarını sergilediğini göstermek için bazı grafikler verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Korteweg-de Vries Denklemi, Sonlu Fark Yöntemleri, Multikuadrik Radyal Baz Fonksiyonu, Soliter Dalgalar, Soliton

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS OF 1-DIMENSIONAL KORTEWEG-de VRIES
(KdV) EQUATION BY MULTIQUADRIC RADIAL BASIS FUNCTION

Melike KÖYLÜ

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

47+vi pages

2019

Supervisor : Prof.Dr. Selçuk KUTLUAY

Co-Supervisor : Asst. Prof. Muaz SEYDAOĞLU

In the first chapter of this master thesis consisting of four chapters, the main purpose of the thesis is briefly explained.

In the second chapter, some prominent information about Classical Finite Difference Methods, Radial Basis Function, the historical development of the KdV equation which are going to be used in the next chapters as well as solitary waves and solitons have been presented.

In the third chapter which is constituting the main part of the thesis, a numerical scheme using appropriate finite difference formulation for time integration and the multiquadric radial basis function for space integration of the 1-dimensional KdV equation given by the initial and boundary conditions has been obtained.

In the fourth chapter, three test problems are taken into consideration for KdV equation. Numerical solutions of each problem have been found by using the scheme given in the third chapter. The obtained solutions are compared with analytical solution and some results available in the literature. The obtained results together with the error norms L_2 and L_∞ and the conservation constants have been given in tables. Additionally, some graphs have been given to show the continuity of the obtained numerical solutions and the fact that the correct physical behavior of the problem has been displayed.

KEYWORDS: Korteweg-de Vries Equation, Finite Difference Methods, Multiquadric Radial Basis Function, Solitary Waves, Soliton

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenen ve tezin hazırlanması sürecinde yardımlarını ve desteğini esirgemeyen çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a ve ikinci tez danışmanım Muş Alparslan Üniversitesi Dr. Öğretim üyesi Muaz SEYDAOĐLU'na ayrıca tezin yazımı sürecinde yardımlarını esirgemeyen, çalışmalarım sırasında karşılaştığım her türlü güçlüğüň üstesinden gelmem için bana yol gösteren bilgi ve görüşlerinden istifade ettiğim çok değerli hocalarım Sayın Doç. Dr. Yusuf UÇAR, Doç. Dr. N. Murat YAĐMURLU, Doç. Dr. Kemal ÖZDEMİR ve Dr. Berat KARAAĐAÇ ile birlikte diğer bölüm hocalarıma ve eğitim hayatım boyunca sabır ve sevgiyle büyük fedâkarlıklar yapan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
TABLolar DİZİNİ	vi
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	3
2.1. Klasik Sonlu Fark Yöntemleri	3
2.2. Radyal Baz Fonksiyonu.....	4
2.3. Korteweg de Vries(KdV) Denklemi	7
2.3.1. Soliter Dalgalar ve Solitonlar	9
2.3.2. Dağılma ve Yayılma	13
3. KORTEWEG-de VRIES (KdV) DENKLEMİNİN MULTİKUADRİK RADYAL BAZ FONKSİYONU İLE ÇÖZÜMÜ	16
3.1. Yöntemin Uygulanması.....	16
4. TEST PROBLEMLER VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ.....	24
4.1. Test Problemler	25
4.1.1. Problem 1: Tek Soliton Dalga Hareketi.....	25
4.1.2. Problem 2: İki Soliton Dalga Hareketi.....	26
4.1.3. Problem 3: İki Soliton Dalga Hareketi.....	27
4.2. Nümerik Sonuçlar	27
KAYNAKLAR	43
ÖZGEÇMİŞ.....	47

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 2.1	Bir dalga profili.....	10
Şekil 4.1	Problem 1'in $h = 0.01$, $k = 0.005$, şekil parametresi $c = 0.021$ ve $x \in [0, 2]$ için $t = 0, 1, 2, 3$ zamanlarındaki nümerik çözümleri	30
Şekil 4.2	Problem 2'nin $h = 0.01$, $k = 0.005$, şekil parametresi $c = 0.021$ ve $x \in [0, 2]$ için farklı t zamanlarında nümerik çözümleri	36
Şekil 4.3	Problem 3'ün $h = 0.0125$, $k = 0.001$, şekil parametresi $c = 0.034$ ve $x \in [0, 2]$ için $t = 0.01$ zamanında nümerik çözümü	36

TABLolar DİZİNİ

Tablo 4.1	Tek Dalga Hareketi: $h = 0.01$, $k = 0.005$, şekil parametresi $c = 0.021$ ve $x \in [0, 1]$ için farklı t zamanlarında Problem 1'in invaryantlarının nümerik ve analitik değerleri	28
Tablo 4.2	Tek Dalga Hareketi: $h = 0.01$, $k = 0.005$, şekil parametresi $c = 0.021$ ve $x \in [0, 2]$ için farklı t zamanlarında Problem 1'in invaryant değerleri	29
Tablo 4.3	Tek Dalga Hareketi: $h = 0.01$, $k = 0.0005, 0.001, 0.005$ ve $x \in [0, 2]$ için farklı t zamanlarında Problem 1'in L_2 hata normu	31
Tablo 4.4	Tek Dalga Hareketi: $h = 0.0125$, $k = 0.001$, şekil parametresi $c = 0.036$ ve $x \in [0, 2]$ için $t = 0.01$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümleri	32
Tablo 4.5	Tek Dalga Hareketi: $h = 0.1$, $k = 0.0001$, şekil parametresi $c = 0.033$ ve $x \in [0, 2]$ için $t = 0.005$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümleri	33
Tablo 4.6	Tek Dalga Hareketi: $h = 0.0125$, $k = 0.001$, şekil parametresi $c = 0.076$ ve $x \in [0, 2]$ için $t = 0.005$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümleri	34
Tablo 4.7	Tek Dalga Hareketi: $h = 0.1$, $k = 0.0001$, şekil parametresi $c = 0.035$ ve $x \in [0, 2]$ için $t = 0.01$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümleri	35
Tablo 4.8	Tek Dalga Hareketi: $h = 0.0125$, $k = 0.0025, 0.000625$ ve $x \in [0, 2]$ için $t = 0.005$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümleri	37
Tablo 4.9	$h = 0.01$, $k = 0.005$ ve $x \in [0, 2]$ için farklı t zamanlarında Problem 2'nin invaryant değerleri	38
Tablo 4.10	$h = 0.0125$, $k = 0.001$, şekil parametresi $c = 0.034$ ve $x \in [0, 4]$ için $t = 0.01$ zamanında Problem 3'ün nümerik ve analitik çözümleri	39

1. GİRİŞ

Doğada karşılaşılan birçok fiziksel olay matematiksel olarak modellendikten sonra anlaşılmaya çalışılır. Bu olayları tanımlayan problemler genellikle cebirsel, integral veya diferansiyel denklemlerle ifade edilirler. Uygulamalı bilimlerde karşılaşılan problemlerin birçoğu lineer olmayan adi veya kısmi türevli denklemlerle formüle edilir. Özellikle fiziksel ve doğal olayları anlamak için lineer olmayan kısmi türevli denklemler önemli bir araçtır. Fakat bu tip denklemlerin tam çözümlerini bulmak çoğunlukla oldukça güç olabilir. Uygun başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen bu tür denklemlerin tam çözümü yerine bilim insanları genellikle nümerik yöntemler kullanarak kabul edilebilir seviyede yaklaşık çözümlerinin bulunmasıyla ilgilenirler. Bu nedenle yaklaşık çözümlerin elde edilmesinde kullanılan nümerik yöntem ve tekniklere olan ilgi her geçen gün artarak devam etmektedir. Nümerik yöntemler Fizik, Mühendislik ve Temel Bilimlerin diğer alanlarında büyük öneme sahip birçok kısmi türevli denklemlere uygulanmaktadır. Bu denklemlere örnek olarak bu tezde göz önüne alınacak olan Kortevge-de Vries (KdV) denklemi gösterilebilir. KdV denklemi sıç su dalgaları, yoğun tabakalı okyanuslardaki büyük iç dalgaları, plazmadaki iyon ses dalgaları, kristal kafesteki ses dalgaları gibi önemli fiziksel sistemlerde ortaya çıkan önemli bir lineer olmayan kısmi türevli denklemdir [1]. KdV denklemi

$$U_t + \epsilon UU_x + \mu U_{xxx} = 0$$

olarak verilen üçüncü mertebeden lineer olmayan bir kısmi türevli denklemdir. Burada ϵ ve μ bir pozitif parametrelerdir. KdV denklemi, U_{xxx} den gelen dağılım (dispersion) ve lineer olmayan UU_x den gelen şok oluşum eğilimi arasında bir dengeyi ifade eder [2]. Denklemin en önemli özelliği soliton çözümlere sahip olmasıdır. Solitonlar hız ve şekillerini değiştirmeden ilerleyen lokalize olmuş dalgalar olup kinetikteki tam elastik çarpışma fenomeni gibi karşılıklı

etkileşimlerde kararlıdırlar. KdV denklemi, açık formda çözülebilecek tamamen integrallenebilir bir Hamiltonyon sistemidir. Dolayısıyla, denklemin bazı analitik çözümleri bulunmuş ve uygun başlangıç şartları için çözümlerin varlık ve teklikleri verilmiştir [3].

Bu tezde lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem sınıfından

$$U_t + \epsilon U U_x + \mu U_{xxx} = 0$$

olarak verilen 1-boyutlu KdV denkleminin farklı başlangıç ve sınır şartları altında zaman integrasyonu için uygun sonlu fark yaklaşımları ve konum integrasyonu için multikuadrik radyal baz fonksiyonu kullanılarak elde edilen nümerik şemasının çözümleri verildi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve yöntemler hakkında kısaca bilgi verildi.

2.1 Klasik Sonlu Fark Yöntemleri

Sonlu Fark Yöntemleri, Fizik ve Mühendislik uygulamalarında karşılaşılan başlangıç-sınır şartları ile verilen lineer veya lineer olmayan kısmi türevli denklemlerden oluşan problemlerin çözümünde sıklıkla kullanılmaktadır. Bu tip problemlerin sonlu fark yöntemi ile çözümünün bulunmasında kullanılan temel fikir şudur: Önce problemin çözüm bölgesi düzgün geometrik şekiller içeren kafeslere bölünür ve problemin yaklaşık çözümü her bir kafesin düğüm (grid) noktaları üzerinde hesaplanır. Sonra diferansiyel denklemlerde ve sınır şartlarında görülen türevler yerine Taylor seri açılımı yardımıyla elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece başlangıç ve sınır değer problemi lineer veya non-lineer bir cebirsel denklem sistemine indirgenir. Daha sonra elde edilen sonlu fark şemasının kararlılığı incelenir. Son olarak cebirsel denklem sistemi direkt veya iteratif yöntemlerden biri yardımıyla çözülür ve böylece göz önüne alınan problemin arzu edilen grid noktalarındaki yaklaşık çözümü bulunur.

Verilen bir kısmi diferansiyel denklemi sonlu fark formunda ifade etmek için en çok kullanılan yöntemler şunlardır:

- Açık (Explicit) Sonlu Fark Yöntemi
- Kapalı (Implicit) Sonlu Fark Yöntemi
- Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi

Bu yöntemlere klasik veya standart sonlu fark yöntemleri denir [4]. $(x, t) \in [0, l] \times [0, T]$ olmak üzere $U(x, t)$ bir kısmi türevli denklemi sağlayan

x -konum ve t -zaman değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olsun.

$$x_m = m\Delta x = mh; m = 0, 1, \dots, M; l = Mh$$

ve

$$t_n = n\Delta t = tk; n = 0, 1, \dots, N$$

olmak üzere (x_m, t_n) düğüm noktalarındaki $U(x, t)$ 'ye bir yaklaşım U_m^n ile gösterilir. Burada $h = \Delta x$ konum uzunluğu ve $k = \Delta t$ zaman adım uzunluğudur [5].

2.2 Radyal Baz Fonksiyonu

Radyal Baz Fonksiyonu (RBF) çok boyutlu uzayda sadece iki noktaya olan uzaklığına bağlı olan reel değerli bir fonksiyondur. Bu noktalardan bir tanesi merkez diye adlandırılır ve bu nokta orijin olabileceği gibi uzayda alternatif olarak bir başka nokta da olabilir. RBF interpolasyonu çok boyutlu uzayda dağıtık verileri analiz etmek için kullanılan temel yöntemlerden biridir. Bu fonksiyonlar keyfi uzay boyutlarını genelleştirebildiğinden ve spektral hassasiyeti sağlayabildiğinden farklı uygulamalarda özellikle popüler hale gelmiştir. Bu uygulamalardan bazıları fonksiyon yaklaşımı, kısmi türevli denklemlerin sayısal çözümü, bilgisayar görüntüsü ve sinir ağları gibi uygulamaları içerir.

RBF formal olarak $\phi(r) = \phi(\|r\|)$ özelliğini sağlayan reel değerli herhangi bir fonksiyonudur. $\phi(\|\cdot\|)$ normu yerine genellikle öklid normu tanımlanır fakat bazı uygulamalarda normu tanımlamak için nadiren diğer mesafe fonksiyonları da kullanılabilir. $r = \|x - x_i\|$ (x_i : merkez) ve c şekil parametresi veya bazı kaynaklarda serbest parametre diye adlandırılan bir sabit olmak üzere yaygın

olarak kullanılan en önemli radyal baz fonksiyon tipleri şunlardır:

$$\text{Multikuadrik: } \phi(r) = \sqrt{r^2 + c^2}$$

$$\text{Ters Multikuadrik: } \phi(r) = \frac{1}{\sqrt{r^2 + c^2}}$$

$$\text{Gaussian: } \phi(r) = \exp(-r^2)$$

$$\text{Ters Kuadrik: } \phi(r) = \frac{1}{r^2 + c^2}$$

Yukarıda verilen baz fonksiyonlarındaki c şekil parametresi hassasiyet için önemli bir rol oynar fakat değerinin nasıl seçileceği halen açık bir araştırma konusudur. Birçok araştırmacı bu değeri deneme yanılma yoluyla ve bazıları da tesadüfen seçerler. Multikuadrik (MQ) radyal baz fonksiyonu r 'nin monoton artan fonksiyonlarının bir sınıfını teşkil eder. Multikuadrik radyal baz fonksiyonu (MQ-RBF) birçok uygulamada kullanılan en popüler radyal baz fonksiyonlarından biridir [6]. Daha ayrıntılı bilgi için referans verilen çalışma ile birlikte içindeki referanslara bakılabilir.

Şimdi multikuadrik radyal baz fonksiyonun tarihsel gelişiminden kısaca bahsedelim. Radyal baz fonksiyonu yöntemi ilk olarak yerölçümcü Roland Hardy tarafından Iowa Eyaletinde 1968'de dağıtık (scattered) veriler interpolasyonu için ilk yöntemlerden birini geliştirdiğinde incelenmiştir [7]. Metod topoğrafyayı temsil etmek ve kontür üretmek için ihtiyaç duyulan iki değişkenli seyrek ve dağıtık verilerin interpolasyonunun bir haritacılık probleminden ortaya çıkmıştır. Daha önce kullanılmış olan yöntemler iki boyutlu ve daha yüksek boyutlu dağıtık veriler için çözülme özelliğine sahip değildi [8]. Çok fazla araştırmadan sonra Hardy [9] daha sonra multikuadrik olarak bilinen radyal baz fonksiyonunu geliştirdi. Daha sonra 1979'da Richard Franke [10] bilinen tüm dağıtık veri interpolasyonları üzerine bir çalışma yayımladı ve MQ-RBF metodunun en iyi yöntem olduğu sonucuna vardı. Franke, ayrıca multikuadrik baz fonksiyonu ile ilişkili enterpolasyon matrisinin koşulsuz tekil olmadığını tahmin etti. Franke, MQ ile

kapsamlı sayısal deneyimleri nedeniyle matematik bilim alanına MQ'yu sunan bilim insanı olarak sık sık atıf alır. RBF tarihindeki bir sonraki önemli olay 1986'da matematikçi Charles Micchelli [11]'nin MQ yönteminin arkasındaki teoriyi geliştirmesidir. Micchelli, MQ yöntemi için sistem matrisinin tersinin alınacağını kanıtladı. Daha sonra fizikçi Edward Kansa [12] ilk olarak kısmi türevli denklemleri çözmek için MQ yöntemini kullandı. Kansa'nın keşfinden bu yana RBF yöntemlerinde araştırmalar hızla büyüdü ve son yıllarda RBF'ler kısmi türevli denklemlerin çözümünde sıklıkla kullanılmaktadır [13]. RBF yöntemleri, diğer karmaşık üç boyutlu şekillerin yanı sıra topoğrafik yüzeyleri temsil etmek, iklim modellemesi gibi çeşitli alanlarda başarıyla uygulanmış olma, yüz tanıma, topoğrafik harita üretimi, otomobil ve uçak tasarımı, okyanus tabanı haritalama ve tıbbi görüntüleme için sıkça kullanılırlar [14]. Son yıllarda radyal baz fonksiyon ağsız (meshless) yöntem çeşitli tipte kısmi türevli denklemlerin nümerik çözümlerinde göz önüne alındı [15]. Bu yöntemler yapısal bir ızgarayı gerekli kılmazlar yani bunlar gerçekten ağsız yöntemlerdir.

Bu tez çalışmasında farklı başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen Korteweg-de Vries denklemi için gözönüne alınan üç test problemin MQ-RBF ile nümerik çözümlerinin bulunmasıyla ilgilenileceğinden bu alanda yapılan bazı çalışmalardan bahsedelim. Dehghan ve Shokri [1], üçüncü mertebeden lineer olmayan KdV denklemini multikvadrik radyal baz fonksiyonuna dayalı bir yaklaşımı kullanarak nümerik olarak çözdüler. Khattak ve Islam [16], KdV denkleminin iki farklı modelinin nümerik çözümünü bulmak için ağsız yöntem, modifiye edilmiş Bernstein polinomları ve B-Spline sonlu eleman yöntemiyle multikvadrik ve Gaussian radyal baz fonksiyonlarını kullandılar. Dağ ve Dereci [17], KdV denkleminin nümerik çözümünü beş standart radyal baz fonksiyonları yardımıyla kollokasyona dayalı bir ağsız yöntem kullanarak elde ettiler. Islam vd. [18], KdV denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için bir ağsız radyal baz fonksiyon

kollokasyon yöntemini uyguladılar. Sarboland ve Aminataei [2], lineer olmayan üçüncü mertebeden KdV denkleminin çözümü için multikvadrik kuazi interpolasyon operatörü ve integre edilmiş radyal baz fonksiyon ağ şemasını kullandılar. Zhang ve Zhang [19], KdV denkleminin nümerik çözümü için multikvadrik kuazi interpolasyonlar üzerine temellenen bir ağsız simplektik prosedür önerdiler.

2.3 Korteweg de Vries(KdV) Denklemi

Bu bölümün bu kısmında ve diğer kısımlarında verilecek olan kavramların birçoğu [20] referanslı kitabın 11. ve 12. bölümleri temel alınarak hazırlandı.

1834 yılında İskoçyalı genç mühendis John Scott Russell, soliton dalgaları gözlemleyen ilk kişi oldu. Russell Edinburgh-Glasgow kanalı üzerinde Riccarton Heriot-Watt Üniversitesi yakınlarındaki Union kanalında büyük bir su kütlelerinin şekil değişikliği olmadan ilerlediğini gözlemledi ve “büyük translasyon dalgası” (great wave of translation) diye adlandırdı [21]. Russell bu gözlemini İngiliz Bilim İlerleme Derneğinin on dördüncü toplantısında kendi sözleriyle şöyle ifade etmiştir [22]:

“ Dar bir kanalda bir çift at ile ilerleyen bir teknenin hareketini gözlemliyordum. Hareket ettiği suyun hacmi fazla değildi. Bot aniden durduğunda su kütlesi durmadı. Bu su kütlesi şiddetli çalkantı ile teknenin sivri kısmında birikti, sonra da arka tarafa yayılmaya başladı. Bu yuvarlak, düzgün ve oldukça belirgin su kütlelerinin şeklinde bir değişiklik hızında en ufak bir azalma olmaksızın yaklaşık 3 kilometrelik bir kanalda ilerleyişine devam ettiğini fark ettim. Bunu at sırtında takip ettim ve ona yetiştiğimde saatte yaklaşık sekiz veya dokuz mil hızla ilerleyişine devam ettiğini gördüm. Otuz fit mesafede ve bir buçuk ayak uzunluğundaki orijinal şeklini korudu. Dalganın yüksekliği yavaş yavaş azalıp tükendi ve bir ya da iki mil takibin ardından kanalın dönemecinde kaybettim.

1834 yılının Ağustos ayında “translasyon dalgası” adını verdiğim, bu tekil ve güzel fenomenle ilk şans eseri görüşmemdi”.

Bu tek kabarık su dalgasına artık soliter dalgalar veya solitonlar denir. Lokalize olan etkileşim üzerine kimliğini yani şekil ve hızını koruyan son derece kararlı bu dalgalar yani solitonlar Russell tarafından deneysel olarak keşfedildi.

Russell’dan sonra 1847’de Stokes [23] ve 1872 yılında Boussinesq gibi birçok matematikçi bu dalgalardan bahsetse de Russell’dan sonraki ilk teorik çalışmalar 1895 yılında Hollandalı matematikçi Diederik Johannes Korteweg (1848-1941) ve doktora öğrencisi Gustav de Vries (1866-1934)’e aittir. Korteweg ve de Vries [24], kendi adlarını verdikleri Korteweg ve de Vries (KdV) denklemi olarak bilinen lineer olmayan bir kısmi türevli denklemi analitik olarak türettiler. Lineer olmayan ve dispersif terimleri içeren KdV denklemi, dağıtıcı ortamlarda uzun ve küçük fakat sonlu genlikli dalgaların yayılımını tanımlar. KdV denklemi, öncelikli düzlemsel olmayan doğrusallığı ve dispersiyonu içeren zayıf lineer olmayan uzun dalgaların incelenmesi için ortak bir modeldir. En basit haliyle KdV denklemi

$$U_t + aUU_x + U_{xxx} = 0 \quad (2.1)$$

şeklinde verilir. Bu denklemde U_t terimi dalga yayılımının zamandaki evrimini bir yönde tanımlar. Bunun ötesinde, bu denklem iki rakip etkiyi içermektedir: Bunlar dalganın dikleşmesini sağlayan UU_x tarafından temsil edilen nonlineer terimi ve dalganın yayılımını tanımlayan U_{xxx} ile temsil edilen lineer dağılım terimidir. Nonlineerlik dalgayı lokalize etme eğiliminde iken dağılım onu yayar. (2.1) denkleminin basit formu dispersiyon ve non-lineer durumlarının olabileceğini gösterir. Soliter dalga çözümlerinin

$$U(x, t) = f(x - ct)$$

formunda olduğu varsayılır. KdV denkleminin bir başka gösterimi

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} + c \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} + \epsilon \frac{\partial^3 U(x, t)}{\partial x^3} + \gamma U(x, t) \frac{\partial U(x, t)}{\partial x} = 0$$

formunda su dalgalarının hareketini modelleyen denklemdir. Burada

$U(x, t)$: dalganın genliği

$c = \sqrt{gd}$: küçük genlikli dalganın hızı

$\epsilon = c(d^2/6 - T/2\rho g)$: dağılma parametresi

γ : lineer olmayan parametre,

T : yüzey gerilimi

ρ : sıvının yoğunluğu

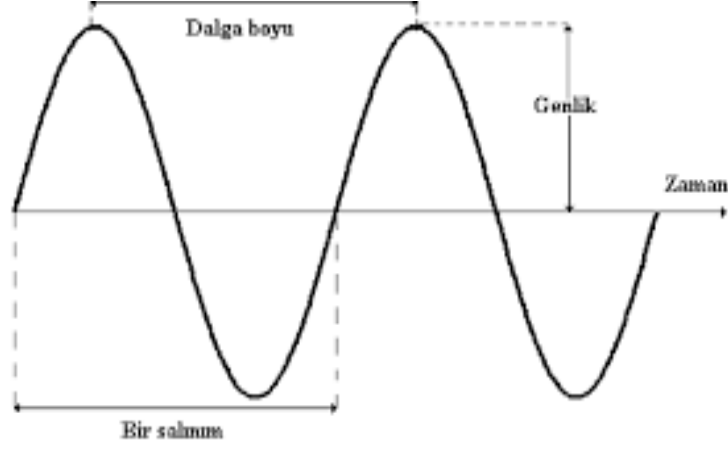
dir.

1965'te Norman J. Zabusky ve Martin D. Kruskal büyük bir soliter dalganın daha küçük olanı bastırmasının doğrusal olmayan etkileşimini ve başlangıç durumların tekrarlanışını sayısal olarak araştırdılar ve soliter dalgaların KdV denklemini takip eden lineer olmayan etkileşime girdiklerini keşfettiler [25]. Daha da ötesi dalgalar orijinal şeklini, genliğini hızını ve dolayısıyla da enerji ve kütlelerini koruyarak bu etkileşimden çıkmışlardır. Bu etkileşimin tek etkisi bir faz kaymasıydı. Zabusky ve Kruskal, parçacık benzeri miktarları vurgulamak eğiliminde olan "soliton" isminin oluşumuna işaret ettiler. İki solitonun etkileşimi hızların ve şeklin korunması gerçeğinin ve solitonların pulse benzeri karakterinin önemini belirttiler. Solitonlar soliter dalgaların özel türüdür.

2.3.1 Soliter Dalgalar ve Solitonlar

Dalga, fiziksel olarak yukarı ve aşağı veya ileri ve geri hareketlerdir. Ayrıca dalga enerjisi bir yerden diğerine aktaran bir devinim (distürbance) dir. Sinüzoidal dalgalar gibi doğrusal dalgalar da solitonlardan farklıdır. Bir dalganın en önemli karakteristikleri o dalganın boyu, genliği ve frekansı olup Şekil 2.1 de gösterilmiştir.

Dalga Boyu: Dalganın, kendini sürekli olarak tekrar eden en küçük uzunluğu olarak da tanımlanabilen dalga boyu, ardışık iki tepe noktası ya da ardışık iki çukur noktası arasındaki uzaklıktır.



Şekil 2.1: Bir dalga profili

Genlik : Maksimum uzanım miktarıdır. Dalganın yüzey seviyesinden yükseldiği ve alçaldığı mesafedir.

Frekans : Birim zamandaki salınım sayısıdır.

En basit dalga yayılım denklemi

$$U_{tt} = c^2 U_{xx}$$

ile verilir. Burada $U(x, t)$ dalganın genliğini gösterir ve c dalganın hızıdır. Bu denklem

$$U(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

olarak verilen genel d'Alembert'in çözümüne sahip olup f ve g dalganın sırasıyla sağa ve sola yayılımını temsil eden keyfi fonksiyonlardır. İki farklı dalga f ve g kimliğini değiştirmeden yayılırlar. f ve g fonksiyonları genellikle başlangıçta verilen $U(x, 0)$ ve $U_t(x, 0)$ başlangıç değerleri kullanılarak belirlenir. Dalga denklemi lineer olduğundan iki çözüm süperpozisyon ilkesini sağlar. $g = 0$ alınırsa bu durumda dalga $U_t + U_x = 0$ denkleminin $U(x, t) = f(x - t)$ çözümü ve $c = 1$ hızına sahip olması durumuna benzer bir şekilde sadece sağa doğru yayılır. Diğer taraftan hareketli yani ilerleyen dalgalar, dalganın ilerleyişi yönünde hareket eden ortamdaki dalgalardır. İlerleyen dalgalar, dalgaların $U(x, t) = f(x - ct)$ formunda temsil edilmesiyle $U(x, t)$ 'nin $c < 0$ veya $c > 0$ ' a göre sırasıyla negatif veya

pozitif x yönünde hareket eden bir devinimi temsil ettiği lineer olmayan türevli denklemler konusunda ortaya çıkmıştır. Eğer çözüm $U(x, t)$ yalnızca kısmi türevli denklemlerin iki koordinatı arasındaki farka dayanıyorsa, çözüm kesin şeklini korur ve bu nedenle soliter dalgalar diye adlandırılırlar. Bir soliter dalga $\xi = -\infty$ konumunda asimptotik durumdan $\xi = \infty$ konumundaki diğer asimptotik duruma geçişi lokalize olan ilerleyen bir dalgadır, burada $\xi = x - ct$ ve c dalganın hızıdır. Hereman [26] soliter dalgayı tutarlılığını koruyan sonlu bir genliğe sahip sabit hızla ve sabit şekilde yayılan lokalize bir yerçekimi dalgası olarak tanımladı.

Solitonlar birçok fiziksel olguda bulunur. Solitonlar birbirleriyle çarpıştıktan sonra şekillerini ve hızlarını korurlar. KdV denklemi solitonlara yol açan öncü modeldir. Bu soliton ismi Zabusky ve Kruskal tarafından keşfedilmiştir. Solitonlar ortamdaki doğrusal olmayan ve dispersif etkiler arasında hassas bir dengeden kaynaklanırlar. Solitonlar ya $sech^2$ çan biçiminde veya kink şeklinde görünür. Solitonlar parçacık benzeri karaktere sahiptirler ve kimliklerini çarpışmada korurlar. Drazzin ve diğerleri [27] bir solitonu lineer olmayan bir denklemin aşağıdaki özelliklere sahip herhangi bir çözümü olarak tanımlamışlardır:

- (i) Kalıcı bir formda tek dalgadır;
- (ii) Lokalizedir böylece sonsuzlukta bir sabite yaklaşır veya bozulur;
- (iii) Diğer soliterlerle güçlü bir şekilde etkileşime girebilir ve kendi özelliklerini koruyabilir;
- (iv) Nonlineer ve dispersif etkiler arasındaki hassas dengeden kaynaklanır.

Fizik literatüründe, soliter dalgalar ve solitonlar arasında farklılıklar vardır. Soliter dalgalar, dağıtıcı (dispersive) ve yayıcı (dissipative) ortamlarda dalga işlemlerini tanımlayan doğrusal olmayan oluşum denklemlerinin soliton benzeri çözümleri olarak tanımlanabilir. Genellikle tek bir soliton çözümüne soliter bir dalga olarak atıfta bulunulur ancak ne zaman birden fazla soliton bir çözümde ortaya çıkarsa bunlara solitonlar denir. KdV denklemi dışındaki denklemler için

tek dalga çözümü bir $sech^2$ fonksiyonu olmayabilir ancak bir $sech$ veya $arctan(e^{ax})$ olabilir. Solitonlar temel parçacıklar fiziği, akışkanlar mekaniği, laser fiziği, biyofizik, kuantum alan teorisi gibi matematiksel fiziğin çeşitli alanlarında ortaya çıkar. Russell'ın 1834 yılındaki kayda değer keşfi Russell'ı gözlemini vurgulamak ve bu soliter dalgaları çalışmak için fiziksel laboratuvar deneyleri yapmaya motive etti. Russell dalga özellikleri arasındaki ilişkiyi deneysel olarak

$$c^2 = g(h + a),$$

olarak ifade etti. Burada c dalganın hızını, a su yüzeyinin üzerinde maksimum genliğini, h yüksekliğini ve g yerçekiminin ivmesini belirtir. Bu nedenle soliter dalgalara yerçekimi dalgaları da denir. Soliter dalgaların keşfi bilim insanlarını bu kavramı incelemek için çok büyük bir araştırma yapmaları yönünde teşvik etti. İki Hollandalı matematikçi Korteweg ve öğrencisi Vries, soliter dalgaların varlığında sıg su yüzeyinin yüksekliğini modellemek için KdV denklemi olarak bilinen lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemi türetmişlerdir [28].

Son yıllarda soliton kavramını incelemek için çok sayıda araştırma çalışması yapılmıştır. Hirota [29, 30], oluşum denklemini bilinear forma indirgeyerek N-soliton çözümlerini oluşturdu. Hirota [29, 30] tarafından oluşturulan ve [26, 31, 32]' de olduğu gibi birçok araştırmacı tarafından kullanılan bilinear form lineer olmayan denklemlerin incelenmesinde çok faydalı bir araç oldu. Nimmo ve Freeman [21], N fonksiyonlarının Wronskian determinantının bazı fonksiyonlar cinsinden N-soliton çözümlerinin formülasyonu için bir alternatif sundular.

Soliton kavramını incelemek için dünya çapında çeşitli bilimsel dallarda aktif araştırma çalışmaları ortaya çıkmıştır. Şimdi solitonların zayıf nonlineerlik ve dağılım arasındaki dengenin bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Soliton kavramı akışkan dinamiği, astrofizik, plazma fiziği ve manyeto-akustik dalgalar ve birçok diğeri gibi çeşitli bilimsel alanlardaki önemli rolü nedeniyle çok sayıda araştırmaya konu olmuştur. Soliter dalgalar solitonlar, cuspons ve diğer formlar gibi çeşitli

tiplerde ortaya çıkarlar. Bu çeşitlerin her biri kendine has özelliklere sahiptir.

Son zamanlarda, 1993'te Rosenau ve Hyman [33], kompakt desteğe sahip olan kompakttonlar olarak adlandırılan bir soliter dalga sınıfını keşfettiler. Kompakttonlar diğer kompakttonlarla çarpışma sonrası kayda değer soliton özelliğine sahip soliter dalgalar tarafından tanımlanırlar ve onlar aynı yani tutarlı biçimde yeniden ortaya çıkarlar. Bu partikül benzeri dalgalar sonsuz sayıda korunum kanununu destekleyen tamamen integrallenebilir kısmi türevli denklemlerle ilişkili soliton etkileşimine benzer elastik çarpışma gösterirler.

2.3.2 Dağılıma ve Yayılma

Şimdi de dalga olaylarının bazı özelliklerinden bahsedelim. İlk önce

$$U_t + U_x = 0 \quad (2.2)$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin çözümünün

$$U(x, t) = f(x - t) \quad (2.3)$$

formda olduğu kolayca görülebilir. Bu çözümün örnekleri $\sin(x - t)$, $\cos(x - t)$, e^{x-t} ve birçok diğerleridir. Denklem lineer olduğundan bu çözümler birleştirilebilir yani süperpozisyon ilkesi uygulanabilir. (2.3) ile verilen bu dalgaların şekli dalga yayılırken değişmez.

Bununla birlikte (2.2) denklemine dağılım terimi olan üçüncü mertebeden bir konum türevinin eklenmesi

$$U_t + U_x + U_{xxx} = 0 \quad (2.4)$$

olarak tanımlanan en basit dağılım denklemini verir. Dalga çözümünün

$$U(x, t) = e^{i(kx - \omega t)} \quad (2.5)$$

formunda olduğunu varsayalım. Burada k dalga sayısı ve ω frekanstır. (2.5) denklemini (2.4) dağılım denkleminde yerine yazarsak ve elde ettiğimiz reel ve imajiner kısmı kullanırsak

$$\omega = k - k^2$$

dağılım ilişkisini elde ederiz ve bu nedenle dalga

$$c = \frac{\omega}{k} = 1 - k \quad (2.6)$$

hızında yayılır. Bu dağılım (2.6) denklemi ile gösterildiği gibi dalgaların c hızının k dalga sayısı ile değiştiğini gösterir. Dağıtıcı (dispersive) etkiler genellikle frekans ve dalga hızı arasında bir ilişki verir.

Öte yandan, dağıtıcı terimi olan çift mertebeden konumsal türevinin (2.2) denkleminde kullanılması aşağıdaki yayıcı (dissipative) denklemini verir.

$$U_t + U_x - U_{xx} \quad (2.7)$$

(2.5) varsayımının (2.7) de kullanımı

$$\omega = k(1 - ik)$$

denklemini verir ve bu da sırayla

$$U(x, t) = e^{-k^2 t + ik(x-t)} \quad (2.8)$$

çözümünü verir. Çözüm (2.8)'nin dalganın birim hızda yayıldığını gösterdiği aşıkardır. (2.8)'nin üssel bozulumu olan dissipasyonu da $t \rightarrow \infty$, $k \neq 0$ için aşıkardır. Zamanla enerji kaybına bağlı olarak genliğini yitiren bir dalga yayıcı (dissipative) dalga olarak adlandırılırlar. Şimdiye kadar lineer denklemler üzerinde durduk, eğer (2.4) ve (2.7) denklemlerinde U_x yerine lineer olmayan UU_x terimi yazılırsa sırasıyla lineer olmayan

$$U_t + UU_x + U_{xxx} = 0$$

ve

$$U_t + UU_x - U_{xx} = 0$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemler sırasıyla iyi bilinen KdV ve Burger denklemleridir. UU_x teriminin lineer olmayan etkisi ile U_{xxx} teriminin dağılma etkisi arasındaki hassas dengenin solitonlara yol açması gerçekten ilginçtir. KdV denklemi üssel olarak azalan kanatlara sahip fonksiyonlar olan analitik $sech^2$ ile karakterize olan soliter dalga çözümlere sahiptirler.

Lineer denklemler için çalışan süperpozisyon ilkesinin lineer olmayan dalga denklemleri için geçerli olmadığını dikkate alınması önemlidir. Eğer KdV denkleminin iki solitonu çarpışırsa solitonlar birbirlerinin içinden geçerler ve değişmeden ortaya çıkarlar.

3. KORTEWEG-de VRIES (KdV)

DENKLEMİNİN MULTİKUADRİK RADYAL BAZ FONKSİYONU İLE ÇÖZÜMÜ

Tezin esas kısmını oluşturacak olan bu bölümde $[a, b]$ aralığında tanımlanan

$$U_t + \epsilon U U_x + \mu U_{xxx} = 0, \quad a < x < b, \quad t > 0 \quad (3.1)$$

KdV denklemini

$$U(a, t) = \alpha_1 \quad (3.2)$$

$$U(b, t) = \alpha_2$$

sınır şartları

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b \quad (3.3)$$

ve başlangıç şartı ile göz önüne alındı. Burada ϵ ve μ pozitif parametreler x ve t sırasıyla konum ve zaman değişkenleri olup α_1 , α_2 ve f nümerik hesaplamalar sırasında verilecek fonksiyonlardır.

Bu bölümde (3.1)-(3.3) başlangıç sınır değer probleminin zaman yönünde uygun sonlu fark yaklaşımları ve konum yönünde multikuadrik radyal baz fonksiyonu kullanılarak ayrıklaştırılmış nümerik şeması verildi.

3.1 Yöntemin Uygulanması

Önce (3.1) denklemini zaman yönünde uygun sonlu fark yaklaşımları kullanılarak ayrıklaştıralım. Bunun için (3.1) denkleminde görülen U_t türevi yerine, $k \equiv \Delta t$ zaman adım uzunluğu olmak üzere, Taylor seri açılımı yardımıyla elde edilen

$$U_t \cong \frac{U^{n+1} - U^n}{k}$$

ileri fark yaklaşımı, UU_x ve U_{xxx} türevli terimler yerine de sırasıyla

$$UU_x \cong \frac{(UU_x)^{n+1} + (UU_x)^n}{2}$$

ve

$$U_{xxx} \cong \frac{(U_{xxx})^{n+1} + (U_{xxx})^n}{2}$$

Crank-Nicolson tipi fark yaklaşımları yazılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{k} + \epsilon \frac{(UU_x)^{n+1} + (UU_x)^n}{2} + \mu \frac{(U_{xxx})^{n+1} + (U_{xxx})^n}{2} = 0$$

zamana göre ayrıklaştırılmış lineer olmayan fark denklemi elde edilir. Bu denklemde görülen UU_x lineer olmayan terimi $UU_x = Z_m U_x$ alınarak lineerleştirilir ve denklemde yerine yazılırsa

$$U^{n+1} + \epsilon Z_m \frac{k}{2} (U_x)^{n+1} + \mu \frac{k}{2} (U_{xxx})^{n+1} = U^n - \epsilon Z_m \frac{k}{2} (U_x)^n - \mu \frac{k}{2} (U_{xxx})^n \quad (3.4)$$

elde edilir. U tam çözümüne bir yaklaşım U^n ile gösterilirse U^n çözümü bir radyal baz fonksiyonu cinsinden

$$U(x) \simeq U^n(x) = \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \phi(r_j) \quad (3.5)$$

formundadır. Burada, $r_j = \|x - x_j\|$, x ve x_j kollokasyon noktaları arasında öklid normu ve c seçilecek olan şekil parametresi olmak üzere $\phi(r_j)$ fonksiyonu

$$\phi(r_j) = \sqrt{r_j^2 + c^2}$$

olarak verilen multikvadrik radyal baz fonksiyonudur. (3.4) denkleminde görülen U_x^n , U_{xx}^n ve U_{xxx}^n türevleri (3.5)'den sırasıyla

$$U_x \simeq U_x^n(x) = \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \phi'(r_j) = \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \frac{x - x_j}{((x - x_j)^2 + c^2)^{1/2}} \quad (3.6)$$

$$U_{xx} \simeq U_{xx}^n(x) = \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \phi''(r_j) = \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \frac{c^2}{((x - x_j)^2 + c^2)^{3/2}} \quad (3.7)$$

$$U_{xxx} \simeq U_{xxx}^n(x) = \sum_{j=0}^N \lambda_j \phi'''(r_j) = \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \left(-\frac{3c^2(x-x_j)}{((x-x_j)^2 + c^2)^{5/2}} \right) \quad (3.8)$$

dir.

Nümerik hesaplamalar için önce problemin çözüm aralığı $[a, b]$, $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{N-1} < x_N = b$, $h = (b-a)/N$ olacak şekilde N eşit parçaya bölünür ve her bir x_i noktası için $r_{ij} = \|x_i - x_j\|$ ve $\phi(r_{ij}) = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2}$ olmak üzere (3.5) yaklaşımı x_i kollokasyon noktalarında

$$U^n(x_i) = \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \phi(r_{ij}), \quad i = 0(1)N \quad (3.9)$$

olur. Bu yaklaşım(3.4) de yerine yazılırsa sistem

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^N \lambda_j^{n+1} \phi(r_{ij}) + \epsilon Z_m \frac{k}{2} \sum_{j=0}^N \lambda_j^{n+1} \phi'(r_{ij}) + \mu \frac{k}{2} \sum_{j=0}^N \lambda_j^{n+1} \phi'''(r_{ij}) \\ = \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \phi(r_{ij}) - \epsilon Z_m \frac{k}{2} \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \phi'(r_{ij}) - \mu \frac{k}{2} \sum_{j=0}^N \lambda_j^n \phi'''(r_{ij}) \end{aligned} \quad (3.10)$$

formunda bir cebirsel denklem sistemine dönüşür. Bu denklem sisteminin çözülebilmesi için

$$\lambda^n = [\lambda_0^n, \lambda_1^n, \lambda_2^n, \dots, \lambda_N^n]^T$$

başlangıç vektörünün bulunması gerekir. Bu vektör (3.3) ile verilen başlangıç şartının kullanılmasıyla (3.9)'dan elde edilir. Yani $U(x_i, 0) = U^n(x_i) = f(x_i)$ 'den

$$i = 0 \text{ için } U^n(x_0) = U(x_0) = \lambda_0^n \phi(r_{00}) + \lambda_1^n \phi(r_{01}) + \dots + \lambda_N^n \phi(r_{0N})$$

$$i = 1 \text{ için } U^n(x_1) = U(x_1) = \lambda_0^n \phi(r_{10}) + \lambda_1^n \phi(r_{11}) + \dots + \lambda_N^n \phi(r_{1N})$$

$$i = 2 \text{ için } U^n(x_2) = U(x_2) = \lambda_0^n \phi(r_{20}) + \lambda_1^n \phi(r_{21}) + \dots + \lambda_N^n \phi(r_{2N})$$

⋮

$$i = N \text{ için } U^n(x_N) = U(x_N) = \lambda_0^n \phi(r_{N0}) + \lambda_1^n \phi(r_{N1}) + \dots + \lambda_N^n \phi(r_{NN})$$

sistemi bulunur. Bu sistem, $\phi(r_{ij}) = \phi_{ij}$ ile gösterilirse $\Phi = [\phi_{ij}]$ olmak üzere matris formunda

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi_{00} & \phi_{01} & \cdots & \phi_{0N-1} & \phi_{0N} \\ \phi_{10} & \phi_{11} & \cdots & \phi_{1N-1} & \phi_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi_{N-10} & \phi_{N-11} & \cdots & \phi_{N-1N-1} & \phi_{N-1N} \\ \phi_{N0} & \phi_{N1} & \cdots & \phi_{NN-1} & \phi_{NN} \end{bmatrix}}_{\Phi} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_0^n \\ \lambda_1^n \\ \vdots \\ \lambda_{N-1}^n \\ \lambda_N^n \end{bmatrix}}_{\underline{\lambda}^n} = \underbrace{\begin{bmatrix} U(x_0) \\ U(x_1) \\ \vdots \\ U(x_{N-1}) \\ U(x_N) \end{bmatrix}}_{\underline{U}}$$

veya

$$\Phi \underline{\lambda}^n = \underline{U} \quad (3.11)$$

olarak yazılabilir. Kolayca gösterilebilir ki Φ , $(N + 1) \times (N + 1)$ karesel matrisi simetrik ve pozitif tanımlı olup tersi mevcuttur ve dolayısıyla (3.11) homojen olmayan cebirsel denklem sisteminin çözümü vardır ve tektir. Böylece (3.11) cebirsel denklem sistemi herhangi bir direkt yöntemlerden biri yardımıyla çözümlenerek

$$\lambda^0 = [\lambda_0^0, \lambda_1^0, \lambda_2^0, \dots, \lambda_N^0]^T$$

başlangıç vektörü bulunur.

Şimdi $U_x^n(x)$, $U_{xx}^n(x)$ ve $U_{xxx}^n(x)$ türevlerinin x_i , ($i = 0(1)N$) noktalarındaki değerleri bulalım. (3.6)'dan $\phi'(r_{ij}) = \frac{x_i - x_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2}}$ olmak üzere,

$$i = 0 \text{ için } U_x^n(x_0) = U_x(x_0) = \lambda_0^n \phi'(r_{00}) + \lambda_1^n \phi'(r_{01}) + \dots + \lambda_N^n \phi'(r_{0N})$$

$$i = 1 \text{ için } U_x^n(x_1) = U_x(x_1) = \lambda_0^n \phi'(r_{10}) + \lambda_1^n \phi'(r_{11}) + \dots + \lambda_N^n \phi'(r_{1N})$$

$$i = 2 \text{ için } U_x^n(x_2) = U_x(x_2) = \lambda_0^n \phi'(r_{20}) + \lambda_1^n \phi'(r_{21}) + \dots + \lambda_N^n \phi'(r_{2N})$$

⋮

$$i = N \text{ için } U_x^n(x_N) = U_x(x_N) = \lambda_0^n \phi'(r_{N0}) + \lambda_1^n \phi'(r_{N1}) + \dots + \lambda_N^n \phi'(r_{NN})$$

dir. Bu sistem, $\phi'(r_{ij}) = \phi'_{ij}$ ile gösterilirse $\Phi' = [\phi'_{ij}]$ olmak üzere

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi'_{00} & \phi'_{01} & \cdots & \phi'_{0N-1} & \phi'_{0N} \\ \phi'_{10} & \phi'_{11} & \cdots & \phi'_{1N-1} & \phi'_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi'_{(N-1)0} & \phi'_{(N-1)1} & \cdots & \phi'_{(N-1)N-1} & \phi'_{(N-1)N} \\ \phi'_{N0} & \phi'_{N1} & \cdots & \phi'_{NN-1} & \phi'_{NN} \end{bmatrix}}_{\Phi'} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_0^n \\ \lambda_1^n \\ \vdots \\ \lambda_{N-1}^n \\ \lambda_N^n \end{bmatrix}}_{\underline{\lambda}^n} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_x(x_0) \\ U_x(x_1) \\ \vdots \\ U_x(x_{N-1}) \\ U_x(x_N) \end{bmatrix}}_{\underline{U}_x}$$

veya

$$\Phi' \underline{\lambda}^n = \underline{U}_x$$

olarak yazılabilir. Böylece daha önce hesaplanan λ^n başlangıç vektörü yardımıyla $U_x^n(x_i)$ değerleri bulunur.

Benzer şekilde $U_{xx}^n(x)$ ikinci mertebeden türevinin x_i , ($i = 0(1)N$) kollokasyon noktalarındaki değerleri bulunur. Şöyle ki (3.7)'den $\phi''(r_{ij}) = \frac{c^2}{((x_i - x_j)^2 + c^2)^{3/2}}$ olmak üzere

$$i = 0 \text{ için } U_{xx}^n(x_0) = U_{xx}(x_0) = \lambda_0^n \phi''(r_{00}) + \lambda_1^n \phi''(r_{01}) + \dots + \lambda_N^n \phi''(r_{0N})$$

$$i = 1 \text{ için } U_{xx}^n(x_1) = U_{xx}(x_1) = \lambda_0^n \phi''(r_{10}) + \lambda_1^n \phi''(r_{11}) + \dots + \lambda_N^n \phi''(r_{1N})$$

$$i = 2 \text{ için } U_{xx}^n(x_2) = U_{xx}(x_2) = \lambda_0^n \phi''(r_{20}) + \lambda_1^n \phi''(r_{21}) + \dots + \lambda_N^n \phi''(r_{2N})$$

⋮

$$i = N \text{ için } U_{xx}^n(x_N) = U_{xx}(x_N) = \lambda_0^n \phi''(r_{N0}) + \lambda_1^n \phi''(r_{N1}) + \dots + \lambda_N^n \phi''(r_{NN})$$

dir. Bu cebirsel denklem sistemi $\phi''(r_{ij}) = \phi''_{ij}$ ile gösterilirse $\Phi'' = [\phi''_{ij}]$ olmak üzere

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi''_{00} & \phi''_{01} & \cdots & \phi''_{0N-1} & \phi''_{0N} \\ \phi''_{10} & \phi''_{11} & \cdots & \phi''_{1N-1} & \phi''_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi''_{(N-1)0} & \phi''_{(N-1)1} & \cdots & \phi''_{(N-1)N-1} & \phi''_{(N-1)N} \\ \phi''_{N0} & \phi''_{N1} & \cdots & \phi''_{NN-1} & \phi''_{NN} \end{bmatrix}}_{\Phi''} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_0^n \\ \lambda_1^n \\ \vdots \\ \lambda_{N-1}^n \\ \lambda_N^n \end{bmatrix}}_{\underline{\lambda}^n} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_{xx}(x_0) \\ U_{xx}(x_1) \\ \vdots \\ U_{xx}(x_{N-1}) \\ U_{xx}(x_N) \end{bmatrix}}_{\underline{U}_{xx}}$$

veya

$$\Phi'' \underline{\lambda}^n = \underline{U_{xx}}$$

olarak yazılabilir. Buradan λ^n başlangıç vektörünün kullanılmasıyla U_{xx}^n türevinin x_i , $i = 0(1)N$ kollokasyon noktalarındaki $U_{xx}^n(x_i)$ değerleri elde edilir.

Yukarıdakine benzer şekilde $U_{xxx}^n(x)$ üçüncü mertebeden türevinin x_i , $(i = 0(1)N)$ kollokasyon noktalarındaki değerleri bulunabilir. Şöyle ki (3.8)'den $\phi'''(r_{ij}) = -\frac{3c^2(x_i - x_j)}{((x_i - x_j)^2 + c^2)^{5/2}}$ olmak üzere

$$i = 0 \text{ için } U_{xxx}^n(x_0) = U_{xxx}(x_0) = \lambda_0^n \phi'''(r_{00}) + \lambda_1^n \phi'''(r_{01}) + \dots + \lambda_N^n \phi'''(r_{0N})$$

$$i = 1 \text{ için } U_{xxx}^n(x_1) = U_{xxx}(x_1) = \lambda_0^n \phi'''(r_{10}) + \lambda_1^n \phi'''(r_{11}) + \dots + \lambda_N^n \phi'''(r_{1N})$$

$$i = 2 \text{ için } U_{xxx}^n(x_2) = U_{xxx}(x_2) = \lambda_0^n \phi'''(r_{20}) + \lambda_1^n \phi'''(r_{21}) + \dots + \lambda_N^n \phi'''(r_{2N})$$

⋮

$$i = N \text{ için } U_{xxx}^n(x_N) = U_{xxx}(x_N) = \lambda_0^n \phi'''(r_{N0}) + \lambda_1^n \phi'''(r_{N1}) + \dots + \lambda_N^n \phi'''(r_{NN})$$

dir. Bu cebirsel denklem sistemi $\phi'''(r_{ij}) = \phi'''_{ij}$ ile gösterilirse $\Phi''' = [\phi'''_{ij}]$ olmak üzere

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \phi'''_{00} & \phi'''_{01} & \cdots & \phi'''_{0N-1} & \phi'''_{0N} \\ \phi'''_{10} & \phi'''_{11} & \cdots & \phi'''_{1N-1} & \phi'''_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \phi'''_{(N-1)0} & \phi'''_{(N-1)1} & \cdots & \phi'''_{(N-1)N-1} & \phi'''_{(N-1)N} \\ \phi'''_{N0} & \phi'''_{N1} & \cdots & \phi'''_{NN-1} & \phi'''_{NN} \end{bmatrix}}_{\Phi'''} \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_0^n \\ \lambda_1^n \\ \vdots \\ \lambda_{N-1}^n \\ \lambda_N^n \end{bmatrix}}_{\underline{\lambda}^n} = \underbrace{\begin{bmatrix} U_{xxx}(x_0) \\ U_{xxx}(x_1) \\ \vdots \\ U_{xxx}(x_{N-1}) \\ U_{xxx}(x_N) \end{bmatrix}}_{\underline{U_{xxx}}}$$

veya

$$\Phi''' \underline{\lambda}^n = \underline{U_{xxx}}$$

olarak yazılabilir. Buradan λ^n başlangıç vektörünün kullanılmasıyla U_{xxx}^n türevinin x_i , $i = 0(1)N$ kollokasyon noktalarındaki $U_{xxx}^n(x_i)$ değerleri elde edilir.

Böylece (3.4) veya (3.10) sistemi

$$\begin{aligned}
& \underbrace{\begin{bmatrix} a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1N-1} & a_{1N} \\ a_{20} & a_{21} & \cdots & a_{2N-1} & a_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-2)0} & a_{(N-2)1} & \cdots & a_{(N-2)N-1} & a_{(N-2)N} \\ a_{(N-1)0} & a_{(N-1)1} & \cdots & a_{(N-1)N-1} & a_{(N-1)N} \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_0^{n+1} \\ \lambda_1^{n+1} \\ \vdots \\ \lambda_{N-1}^{n+1} \\ \lambda_N^{n+1} \end{bmatrix}}_{\underline{\lambda}^{n+1}} \\
& = \underbrace{\begin{bmatrix} b_{10} & b_{11} & \cdots & b_{1N-1} & b_{1N} \\ b_{20} & b_{21} & \cdots & b_{2N-1} & b_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ b_{(N-2)0} & b_{(N-2)1} & \cdots & b_{(N-2)N-1} & b_{(N-2)N} \\ b_{(N-1)0} & b_{(N-1)1} & \cdots & b_{(N-1)N-1} & b_{(N-1)N} \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} \lambda_0^n \\ \lambda_1^n \\ \vdots \\ \lambda_{N-1}^n \\ \lambda_N^n \end{bmatrix}}_{\underline{\lambda}^n}
\end{aligned}$$

$A = [a_{ij}]$ ve $B = [b_{ij}]$ olmak üzere

$$A\underline{\lambda}^{n+1} = B\underline{\lambda}^n \quad (3.12)$$

şeklinde yazılabilir. (3.2) ile verilen sınır şartları kullanılırsa $U(a, t) = \alpha_1$ 'den $\sum_{j=0}^N \lambda_j^{n+1} \sqrt{(x_0 - x_j)^2 + c^2} = \alpha_1$ olup

$$a_{0j} = \sqrt{(x_0 - x_j)^2 + c^2}; \quad j = 0(1)N$$

ve $U(b, t) = \alpha_2$ 'den $\sum_{j=0}^N \lambda_j^{n+1} \sqrt{(x_N - x_j)^2 + c^2} = \alpha_2$ olup

$$a_{Nj} = \sqrt{(x_N - x_j)^2 + c^2}$$

dir. (3.10)'dan $i = 1(1)N - 1$, $j = 0(1)N$ için

$$\begin{aligned}
a_{ij} &= \sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2} + \frac{\epsilon Z_m k}{2} \frac{(x_i - x_j)}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2}} \\
&\quad - \frac{\mu k}{2} \frac{3c^2(x_i - x_j)}{[(x_i - x_j)^2 + c^2]^{5/2}}
\end{aligned}$$

ve

$$b_{ij} = \sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2} - \frac{\epsilon Z_m k}{2} \frac{x_i - x_j}{\sqrt{(x_i - x_j)^2 + c^2}} + \frac{\mu k}{2} \frac{3c^2(x_i - x_j)}{[(x_i - x_j)^2 + c^2]^{5/2}}$$

dir. (3.12)'nin sağ tarafı

$$B\lambda^n = \left[\sum_{j=0}^N b_{ij}\lambda_j^n \right] = [d_i], \quad i = 1(1)N - 1, \quad j = 0(1)N$$

şeklinde yazılırsa (3.2) ile verilen sınır şartlarıyla birlikte (3.4) veya (3.10) denklem sistemi $(N + 1)$ -bilinmeyenli $(N + 1)$ -lineer denklemden oluşan

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & \cdots & a_{0N-1} & a_{0N} \\ a_{10} & a_{11} & \cdots & a_{1N-1} & a_{1N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{(N-1)0} & a_{(N-1)1} & \cdots & a_{(N-1)N-1} & a_{(N-1)N} \\ a_{N0} & a_{N1} & \cdots & a_{NN-1} & a_{NN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_0^{n+1} \\ \lambda_1^{n+1} \\ \vdots \\ \lambda_{N-1}^{n+1} \\ \lambda_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ d_1 \\ \vdots \\ d_{N-1} \\ \alpha_2 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

formunda çözülebilir karesel cebirsel denklem sistemine dönüşür. (3.13) denklem sistemi direkt yöntemlerden biri yardımıyla çözümlenerek λ^{n+1} bulunur ve iterasyona devam edilir. Böylece (3.5)'den $t = t_{n+1}$ zamanında ve x_i , $i = 0(1)N$ kollokasyon noktalarında α_1 , α_2 ve f fonksiyonlarının verilmesi halinde (3.1)-(3.3) başlangıç ve sınır değer probleminin nümerik çözümleri elde edilir.

(3.4) veya (3.10) denklem sistemindeki lineer olmayan terime, her bir zaman adımında

$$\lambda_j^* = \lambda_j^n + \frac{1}{2} (\lambda_j^{n+1} - \lambda_j^n)$$

olarak tanımlanan iterasyon formülü 3-5 defa uygulanarak U^n yaklaşık çözümü iyileştirildi.

4. TEST PROBLEMLER VE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde 1-boyutlu KdV denklemi için üç test problem gözönüne alındı ve her bir test problemin Bölüm 3’de verilen multiküadrik radyal baz fonksiyonu yardımıyla nümerik çözümleri elde edildi.

$$\frac{\partial U}{\partial t} + \epsilon U \frac{\partial U}{\partial x} + \mu \frac{\partial^3 U}{\partial x^3} = 0, \quad a < x < b, \quad t > 0 \quad (4.1)$$

olarak verilen KdV denkleminin ilk 4 korunum sabiti

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{-\infty}^{\infty} U dx, \\ I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} U^2 dx, \\ I_3 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(U^3 - \frac{3}{\epsilon} \mu (U_x)^2 \right) dx, \\ I_4 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(U^4 - \frac{12}{\epsilon} \mu U (U_x)^2 + \frac{36}{5\epsilon^2} \mu^2 (U_{xx})^2 \right) dx \end{aligned}$$

dir [34]. Yöntemin doğruluğunu göstermek için bu korunum sabitlerinin nümerik çözümlerle elde edilen değerleri yaklaşık integral alma yöntemlerinden dikdörtgen kuralı kullanılarak

$$\begin{aligned} I_1 &\cong h \sum_{j=1}^N U_j^n, \\ I_2 &\cong h \sum_{j=1}^N (U_j^n)^2, \\ I_3 &\cong h \sum_{j=1}^N \left[(U_j^n)^3 - \frac{3\mu}{\epsilon} ((U_x)_j^n)^2 \right], \\ I_4 &\cong h \sum_{j=1}^N \left[((U)_j^n)^4 - \frac{12\mu}{\epsilon} (U(U_x)_j^n)^2 + \frac{36\mu^2}{5\epsilon^2} ((U_{xx})_j^n)^2 \right] \end{aligned}$$

ile hesaplandı. Ayrıca, her bir test problemin elde edilen çözümlerinin eğer varsa tam çözümüne ne kadar yakın olduğunu göstermek için

$$L_2 = \sqrt{h \sum_{j=0}^N |U_j - (U^n)_j|^2}$$

ve

$$L_\infty = \max_j |U_j - (U^n)_j|$$

olarak tanımlanan L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı.

4.1 Test Problemler

4.1.1 Problem 1: Tek Soliton Dalga Hareketi

Bu problemde, (4.1) denklemi

$$U(0, t) = U(2, t) = 0, \quad t > 0$$

sınır şartları ve

$$U(x, 0) = 3C \sec h^2(Ax + D), \quad 0 \leq x \leq 2$$

başlangıç şartı ile göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$U(x, t) = 3C \sec h^2(Ax - Bt + D),$$

dir [35]. Burada C ve D sabitler, $A = \frac{1}{2}(\epsilon C/\mu)^{1/2}$ ve $B = \epsilon C A$ dir. Bu problem ϵC sabit hızlı sağa doğru ilerleyen $3C$ genlikli tek solitonun hareketini gösterir. Bu problem için korunum sabitlerinin analitik değerleri Mapple programı yardımıyla

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{6C}{A}, \\ I_2 &= \frac{12C^2}{A}, \\ I_3 &= \frac{144C^2(\mu A^2 - C\epsilon)}{5A\epsilon} \end{aligned} \tag{4.2}$$

olarak bulundu.

4.1.2 Problem 2: İki Soliton Dalga Hareketi

Bu problem için (4.1) denklemi

$$U(0, t) = U(2, t) = 0, \quad t > 0$$

sınır ve

$$U(x, 0) = 3C_1 \sec h^2(A_1 x + D_1) + 3C_2 \sec h^2(A_2 x + D_2), \quad 0 \leq x \leq 2$$

başlangıç şartlarıyla göz önüne alındı. Burada

$$A_1 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon C_1}{\mu_1} \quad \text{ve} \quad A_2 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon C_2}{\mu_2}}$$

olup C_1 ve C_2 başlangıç anında iki soliton dalganın genliklerini, $x_1 = -D_1/A_1$ ve $x_2 = -D_2/A_2$ iki soliton dalganın tepe noktalarını gösterir. Bu problem $3C_1$ genlikli $x_1 = -D_1/A_1$ başlangıç noktasındaki dalga ve $3C_2$ genlikli $x_2 = -D_2/A_2$ başlangıç noktasındaki dalganın birbirleri ile etkileşimlerini temsil eder. Genliği büyük olan dalga daha hızlıdır bu nedenle iki soliton dalganın çarpıştıktan sonra birbirinin içinden geçmesi için $C_1 > C_2$ olup $x_1 < x_2$ olması gerekmektedir. Büyük genliğe sahip soliton küçük genliğe sahip solitonun solunda konumlanır. Solitonların hızı bu büyüklüklere bağlı olduğundan zaman ilerledikçe büyük soliton küçük olanın arasından geçer.

Bu problemin korunum değişmezlerinin tam değerleri Maple programı kullanılarak

$$I_1 = \frac{6C_1}{A_1} + \frac{6C_2}{A_2},$$
$$I_2 = \frac{12C_1^2}{A_1} + \frac{12C_2^2}{A_2},$$
$$I_3 = \frac{144C_1^2(\mu A_1^2 - C_1\epsilon)}{5A_1\epsilon} + \frac{144C_2^2(\mu A_2^2 - C_2\epsilon)}{5A_2\epsilon}$$

olarak bulundu.

4.1.3 Problem 3: İki Soliton Dalga Hareketi

Son problem olarak (4.1) ile verilen KdV denklemi

$$U(0,t) = U(4,t) = 0, \quad t > 0$$

sınır ve

$$U(x, 0) = U_0(x)$$

başlangıç şartlarıyla göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$U(x, t) = 12\mu(\log f)_{xx}, \quad (4.3)$$

dir [36]. Burada,

$$f = 1 + \exp(\eta_1) + \exp(\eta_2) + \left(\frac{\alpha_1 - \alpha_2}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2 \exp(\eta_1 + \eta_2),$$

$$\eta_i = \alpha_i x - \alpha_i^3 \mu t + b_i, \quad (i = 1, 2),$$

$$\alpha_1 = \sqrt{\frac{0.3}{\mu}}, \quad \alpha_2 = \sqrt{\frac{0.1}{\mu}}, \quad b_1 = -0.48\alpha_1 \text{ ve } b_2 = -1.07\alpha_2$$

dir. $U(x, 0) = U_0(x)$ başlangıç şartı (4.3) ile verilen analitik çözümden alınacaktır.

4.2 Nümerik Sonuçlar

Bu tez çalışmasında tüm hesaplamalar Intel(R) Core(TM) i5-4210U 1.7 GHz 4 GB bilgisayarda MATLAB R 2011a programı kullanılarak yapıldı.

Bu kısımda Bölüm 3’de verilen şemanın Problem 1, Problem 2 ve Problem 3’e uygulanması ile elde edilen nümerik sonuçlar daha önceki araştırmacıların verdikleri sonuçlarla karşılaştırıldı ve tablolar halinde sunuldu. Daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için bütün hesaplamalarda $\epsilon = 1$, $\mu = 4.84 \times 10^{-4}$, $C = 0.3$ ve $D = -6$ olarak alındı.

Tablo 4.1’de Problem 1’in $3C$ genliğine sahip soliter dalganın hareketi boyunca konum adım uzunluğu $h = 0.01$, zaman adım uzunluğu $k = 0.005$, şekil

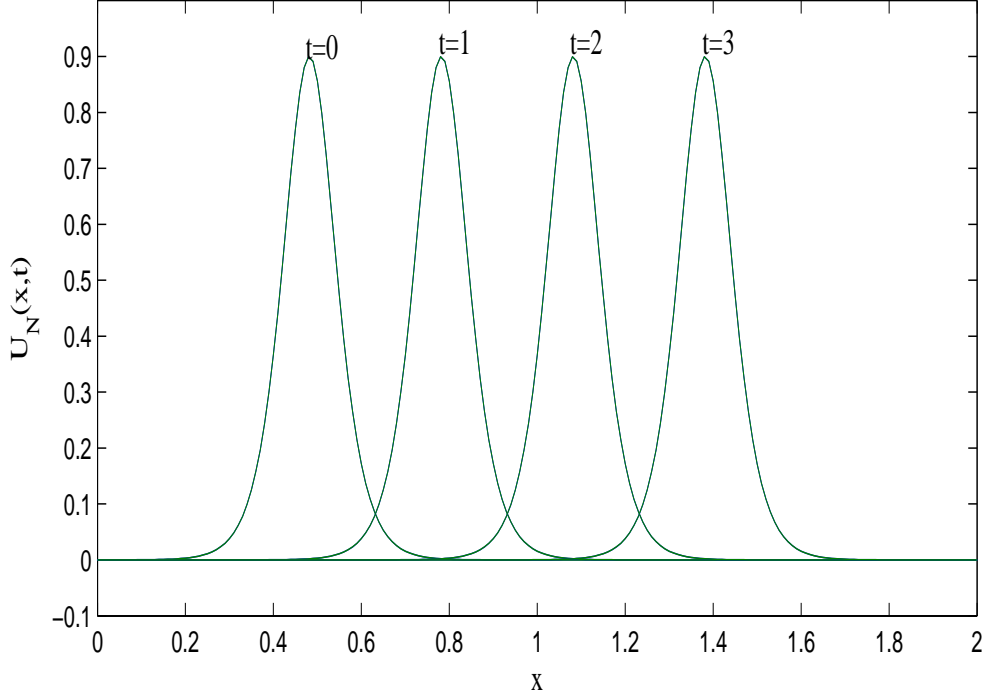
Tablo 4.1: Tek Dalga Hareketi: $h = 0.01$, $k = 0.005$, şekil parametresi $c = 0.021$ ve $x \in [0, 1]$ için farklı t zamanlarında Problem 1'in invaryantlarının nümerik ve analitik değerleri

t	Nümerik			
	I_1	I_2	I_3	I_4
0.0	0.1445979728	0.0867592531	0.0468500093	0.0240947574
0.5	0.1445958343	0.0867592526	0.0468500074	0.0240947574
1.0	0.1445937689	0.0867592522	0.0468500068	0.0240947580
1.5	0.1445951531	0.0867592517	0.0468500059	0.0240947573
2.0	0.1445967312	0.0867592512	0.0468500057	0.0240947565
2.5	0.1445986856	0.0867592506	0.0468500046	0.0240947561
3.0	0.1446013766	0.0867592501	0.0468500054	0.0240947557
t	Analitik			
	I_1	I_2	I_3	I_4
0.0	0.1445978667	0.0867592531	0.0468499967	0.0240942840
0.5	0.1445987340	0.0867592532	0.0468499967	0.0240942840
1.0	0.1445987547	0.0867592531	0.0468499967	0.0240942840
1.5	0.1445987552	0.0867592531	0.0468499967	0.0240942840
2.0	0.1445987552	0.0867592531	0.0468499967	0.0240942840
2.5	0.1445987545	0.0867592531	0.0468499967	0.0240942840
3.0	0.1445987251	0.0867592531	0.0468499967	0.0240942840

parametresi $c = 0.021$ ve $x \in [0, 2]$ için farklı t zamanlarında korunum sabitlerinin nümerik ve analitik değerleri verildi. Tablodan hesaplanan korunum sabitlerinin zaman ilerledikçe korunduğu ve (4.2)'den elde edilen analitik değerleri ile iyi uyum içerisinde olduğu açıkça görülmektedir. Konum adım uzunluğu $h = 0.01$ ve zaman adım uzunluğu $k = 0.005$ için dalganın grafiği Şekil 4.1'de verildi. Bu grafiğe göre sağa doğru hareket eden tek dalganın genliğini koruyarak zaman içerisinde ilerlediği görülmektedir.

Tablo 4.2: Tek Dalga Hareketi: $h = 0.01$, $k = 0.005$, şekil parametresi $c = 0.021$ ve $x \in [0, 2]$ için farklı t zamanlarında Problem 1'in invaryant değerleri

t	Sumulan Yöntem				[37]			[38]		
	I_1	I_2	I_3	I_4	I_1	I_2	I_3	I_1	I_2	I_3
0.0	0.144597	0.086759	0.046850	0.024095	0.14459	0.086759	0.046850	0.144590	0.086759	0.046870
0.5	0.144596	0.086759	0.046850	0.024095	0.14459	0.086759	0.046872	0.144590	0.086759	0.046871
1.0	0.144594	0.086759	0.046850	0.024095	0.14459	0.086759	0.046877	0.144590	0.086759	0.046873
1.5	0.144595	0.086759	0.046850	0.024095	0.14460	0.086760	0.046876	0.144590	0.086759	0.046874
2.0	0.144597	0.086759	0.046850	0.024095	0.14460	0.086760	0.046870	0.144591	0.086759	0.046870
2.5	0.144599	0.086759	0.046850	0.024095	0.14460	0.086761	0.046876	0.144591	0.086760	0.046874
3.0	0.144601	0.086759	0.046850	0.024095	0.14460	0.086761	0.046876	0.144591	0.086761	0.046874
$t = 3$										
[17]	0.144606	0.086759	0.046850	0.024094						



Şekil 4.1: Problem 1'in $h = 0.01$, $k = 0.005$, şekil parametresi $c = 0.021$ ve $x \in [0, 2]$ için $t = 0, 1, 2, 3$ zamanlarındaki nümerik çözümleri

Tablo 4.2'de Problem 1'in $3C$ genliğine sahip soliter dalganın hareketi boyunca konum adım uzunluğu $h = 0.01$ ve zaman adım uzunluğu $k = 0.005$ için farklı t zamanlarında korunum sabitlerinin elde edilen nümerik değerleri [17, 37, 38] referanslarında verilenlerle karşılaştırıldı. Tabloya bakıldığında hesaplanan invariyantların zaman arttıkça hemen hemen değişmeden sabit kaldığı ve referanslarda verilen sonuçlarla uyum içerisinde olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 4.3'de Problem 1'in konum adım uzunluğu $h = 0.01$ ve üç farklı zaman adım uzunluğu $k = 0.0005, 0.001, 0.005$ için farklı t zamanlarında hesaplanan L_2 normu önceki araştırmacıların [17, 25, 37, 39, 40, 41] referanslı çalışmalarda verdikleri sonuçlarla karşılaştırıldı. Tablodan sunulan yöntemle elde edilen L_2 hata normunun yeterince küçük olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 4.3: Tek Dalga Hareketi: $h = 0.01$, $k = 0.0005, 0.001, 0.005$ ve $x \in [0, 2]$ için farklı t zamanlarında Problem 1'in L_2 hata normu

k	t	c	Sunulan Yöntem	$L_2 \times 10^3$						
				[25]	[39]	[17]	[40] (P-Galerkin)	[40] (M P-Galerkin)	[41]	[37]
0.0005	0.25	0.026	0.0135	5.94	3.79					
	0.50	0.026	0.0168	13.17	9.28					
	0.75	0.030	0.0213	21.08	14.14					
	1.0	0.026	0.0192	28.66	18.72					
0.001	0.25	0.0255	0.01337							0.05220
	0.50	0.0256	0.01648							0.01200
	0.75	0.0258	0.01780							0.01220
	1.0	0.0260	0.01850							0.02220
0.005	0.25	0.0228	0.0195			0.0137	4.46	0.21		0.02
	0.50	0.0221	0.0257			0.0192	7.01	0.38		0.04
	0.75	0.0220	0.0304			0.0229	10.08	0.57		0.05
	1.0	0.0210	0.0440			0.0260	13.26	0.74		0.06

Tablo 4.4: Tek Dalga Hareketi: $h = 0.0125$, $k = 0.001$, şekil parametresi $c = 0.036$ ve $x \in [0, 2]$ için $t = 0.01$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümleri

x	Nümerik Çözüm	[42]	[43]	[44]	Analitik Çözüm
0.0	0.00002053	0.0	0.0	0.0	0.00002053
0.1	0.00024760	0.00026665	0.00024750	0.00024746	0.00024746
0.2	0.00297926	0.00320979	0.00297987	0.00297741	0.00297915
0.3	0.03527090	0.03794800	0.03527915	0.03522687	0.03527076
0.4	0.34551679	0.36618040	0.34553080	0.34632607	0.34551632
0.5	0.86931999	0.85627126	0.86920580	0.86833708	0.86931951
0.6	0.18391229	0.17201208	0.18394800	0.18396796	0.18391225
0.7	0.01688464	0.01568009	0.01688850	0.01687704	0.01688449
0.8	0.00141272	0.00131099	0.00141291	0.00141118	0.00141257
0.9	0.00011738	0.00010881	0.00011727	0.00011712	0.00011724
1.0	0.00000983	0.00000902	0.00000972	0.00000971	0.00000972
1.1	0.00000090	0.00000075	0.00000080	0.00000081	0.00000081
1.2	0.00000017	0.00000006	0.00000007	0.00000007	0.00000007
1.3	0.00000013	0.00000001	0.00000001	0.00000001	0.00000001
1.4	0.00000015	0.0	0.0	0.0	0.0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<hr/>					
$L_2 = 0.0003 \times 10^{-3}$					
$L_\infty = 0.0011 \times 10^{-3}$					

Tablo 4.4'de Problem 1'in $h = 0.0125$, $k = 0.001$ ve şekil parametresi $c = 0.036$ için $t = 0.01$ zamanında elde edilen nümerik çözümleri problemin tam çözümü ve [42, 43, 44] çalışmalarda verilen sonuçlar ile karşılaştırıldı. Tabloya bakıldığında L_2 ve L_∞ hata normlarının yeterince küçük olduğu ve elde edilen nümerik sonuçların tam çözüme yakın olduğu görülmektedir.

Tablo 4.5'de Problem 1'in $h = 0.1$, $k = 0.0001$ ve c şekil parametresinin $c = 0.033$ seçimi için $t = 0.005$ zamanında elde edilen nümerik çözümler problemin tam çözümü ve [42, 45] referanslı çalışmalarda verilen sonuçlar ile karşılaştırıldı. Tabloya bakıldığında hesaplanan L_2 ve L_∞ normlarının küçük olduğu, elde edilen nümerik çözümlerin problemin tam çözümüne yeterince yakın ve [42, 45] referanslarında verilen sonuçlarla uyum içerisinde olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 4.5: Tek Dalga Hareketi: $h = 0.1$ $k = 0.0001$, şekil parametresi $c = 0.033$ ve $x \in [0, 2]$ için $t = 0.005$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümleri

x	Nümerik Çözüm	[45](Exp)	[45](EFD)	[42]	Analitik Çözüm
0.0	0.00002131	0.0	0.0	0.0	0.00002131
0.1	0.00026335	0.00224711	0.00026665	0.00026665	0.00025688
0.2	0.00310381	0.0035567	0.00320906	0.00320978	0.00309232
0.3	0.03753345	0.03777912	0.03794673	0.03794787	0.03658529
0.4	0.35740079	0.35698115	0.36617631	0.36617907	0.35574607
0.5	0.86129702	0.86070242	0.85627247	0.85626815	0.86305608
0.6	0.17594153	0.17729622	0.17201488	0.17201146	0.17787428
0.7	0.01598629	0.01512775	0.01568136	0.01568004	0.01627120
0.8	0.00133892	0.00113721	0.00131132	0.00131099	0.00136083
0.9	0.00011368	0.00009312	0.00010884	0.00010880	0.00011294
1.0	0.00000965	0.00000779	0.00000903	0.00000902	0.00000937
1.1	0.00000095	0.00000065	0.00000075	0.00000075	0.00000078
1.2	0.00000013	0.00000005	0.00000006	0.00000006	0.00000006
1.3	0.00000003	0.0	0.00000001	0.00000001	0.00000001
1.4	0.00000001	0.0	0.0	0.0	0.0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<hr/>					
$L_2 = 1.0270 \times 10^{-3}$					
$L_\infty = 1.9327 \times 10^{-3}$					

Tablo 4.6'da Problem 1'in $h = 0.0125$, $k = 0.001$ ve c şekil parametresinin $c = 0.076$ seçimi için $t = 0.005$ zamanında elde edilen nümerik çözümleri tam çözümü ve önceki araştırmacıların [42, 43, 44] referanslı çalışmalarında verdikleri nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Tabloya bakıldığında hesaplanan L_2 ve L_∞ normlarının yeterince küçük olduğu, elde edilen nümerik sonuçların tam çözüme yakın ve [42, 43, 44] referanslarında verilen sonuçlarla uyum içerisinde olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 4.7'de Problem 1'in $h = 0.1$, $k = 0.0001$ ve c şekil parametresinin $c = 0.035$ seçimi için $t = 0.01$ zamanında bulunan nümerik çözümleri tam çözümü ve [42, 45] referanslarında verilen sonuçlar ile karşılaştırıldı. Tabloya bakıldığında hesaplanan L_2 ve L_∞ normlarının küçük olduğu, elde edilen nümerik

Tablo 4.6: Tek Dalga Hareketi: $h = 0.0125$, $k = 0.001$, şekil parametresi $c = 0.076$ ve $x \in [0, 2]$ için $t = 0.005$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümleri

x	Nümerik Çözüm				Analitik Çözüm
	[42]	[43]	[44]	[44]	
0.0	0.00002131	0.0	0.0	0.0	0.00002131
0.1	0.00025688	0.00026665	0.00025692	0.00025686	0.00025688
0.2	0.00309232	0.00320978	0.00309265	0.00309148	0.00309232
0.3	0.03658529	0.03794787	0.03658902	0.03656208	0.03658529
0.4	0.35574616	0.36617907	0.35578320	0.35613919	0.35574607
0.5	0.86305614	0.85626815	0.86299040	0.86253589	0.86305608
0.6	0.17787426	0.17201146	0.17789270	0.17792331	0.17787428
0.7	0.01627120	0.01568004	0.01627284	0.01626755	0.01627120
0.8	0.00136083	0.00131099	0.00136096	0.00136019	0.00136083
0.9	0.00011295	0.00010880	0.00011295	0.00011289	0.00011294
1.0	0.00000937	0.00000902	0.00000937	0.00000936	0.00000937
1.1	0.00000078	0.00000075	0.00000078	0.00000078	0.00000078
1.2	0.00000007	0.00000006	0.00000006	0.00000006	0.00000006
1.3	0.00000001	0.00000001	0.00000001	0.00000001	0.00000001
1.4	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<hr/>					
$L_2 = 0.0001 \times 10^{-3}$					
$L_\infty = 0.0007 \times 10^{-3}$					

çözümlerin tam çözüme yakın ve [42, 45] referanslarında verilen sonuçlarla uyum içerisinde olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 4.8'de Problem 1'in $h = 0.0125$ ve farklı $k = 0.0025, 0.000625$ için $t = 0.005$ zamanında elde edilen nümerik çözümleri tam çözüme ve [46] referanslı çalışmada verilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Tabloya bakıldığında elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme yakın ve [46] da verilen sonuçlarla oldukça iyi uyum içerisinde olduğu açıkça görülmektedir.

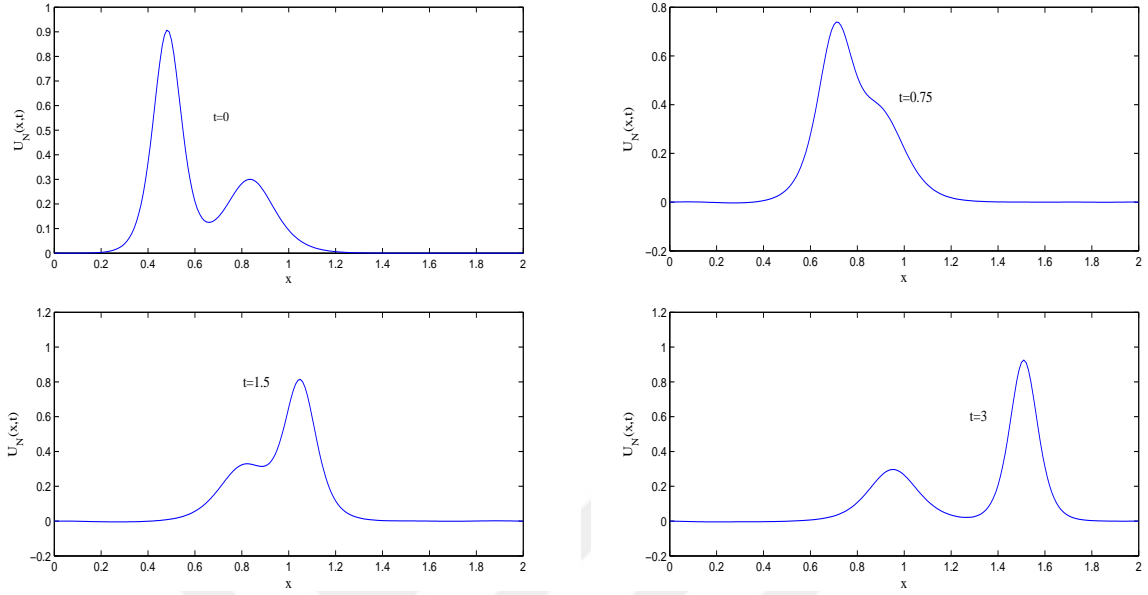
Daha önce yapılan çalışmalarla karşılaştırma yapabilmek için Problem 2'nin bütün hesaplamalarında $\epsilon = 1$ ve $\mu = 4.84 \times 10^{-4}$ alındı. Tablo 4.9'da Problem 2'nin $h = 0.01$, $k = 0.005$, $C_1 = 0.1$, $C_2 = 0.3$ ve $x \in [0, 2]$ için iki dalga hareketinin farklı t zamanlarındaki hesaplanan korunum sabitleri [17, 47] referanslı

Tablo 4.7: Tek Dalga Hareketi: $h = 0.1$, $k = 0.0001$, şekil parametresi $c = 0.035$ ve $x \in [0, 2]$ için $t = 0.01$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümleri

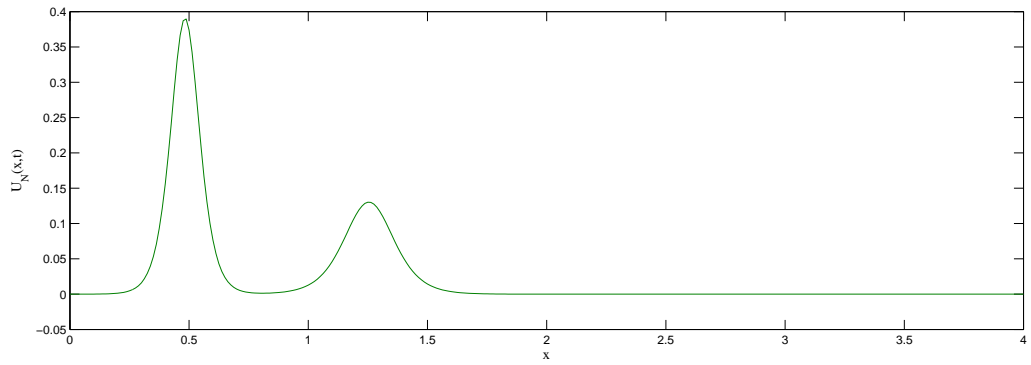
x	Nümerik Çözüm	[45](Exp)	[45](EFD)	[42]	Analitik Çözüm
0.0	0.00002053	0.0	0.0	0.0	0.00002053
0.1	0.00026042	0.00405629	0.00026665	0.00026665	0.00024746
0.2	0.00298232	0.00389535	0.00320906	0.00320978	0.00297915
0.3	0.03709017	0.03764657	0.03794673	0.03794787	0.03527076
0.4	0.34875082	0.34792815	0.36617631	0.36617907	0.34551632
0.5	0.86609566	0.86481172	0.85627247	0.85626815	0.86931951
0.6	0.17994801	0.18273885	0.17201488	0.17201146	0.18391225
0.7	0.01636537	0.01458343	0.01568136	0.01568004	0.01688449
0.8	0.00136782	0.00095558	0.00131132	0.00131099	0.00141257
0.9	0.00011988	0.00007766	0.00010884	0.00010880	0.00011724
1.0	0.00001025	0.00000672	0.00000903	0.00000902	0.00000972
1.1	0.00000119	0.00000056	0.00000075	0.00000075	0.00000081
1.2	0.00000019	0.00000005	0.00000006	0.00000006	0.00000007
1.3	0.00000007	0.0	0.00000001	0.00000001	0.00000001
1.4	0.00000003	0.0	0.0	0.0	0.0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<hr/>					
$L_2 = 2.0038 \times 10^{-3}$					
$L_\infty = 3.9642 \times 10^{-3}$					

çalışmalarda verilenlerle karşılaştırıldı. Tablodan invaryantların zaman arttıkça hemen hemen korunduğu ve [17, 47] referanslarında verilenlerle uyum içerisinde olduğu açıkça görülmektedir. Şekil 4.2, iki dalganın etkileşimini göstermektedir. Şekilden zaman ilerledikçe büyük dalga küçük dalgayı geçiş zamanında yakalamakta ve geçiş sürecinin sonunda ise genliğinde ve hızında değişiklik olmadan hareketine devam etmektedir.

Tablo 4.10'da Problem 3'ün $h = 0.0125$, $k = 0.001$, $x \in [0, 4]$ ve c şekil parametresinin $c = 0.034$ seçimi için $t = 0.01$ zamanında elde edilen nümerik çözümlerin tam çözümü ve önceki araştırmacıların [42, 44] referanslı çalışmalarda verdikleri sonuçlarla karşılaştırıldı. Tabloya bakıldığında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının küçük olduğu, elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme yakın



Şekil 4.2: Problem 2'nin $h = 0.01$, $k = 0.005$, şekil parametresi $c = 0.021$ ve $x \in [0, 2]$ için farklı t zamanlarında nümerik çözümleri



Şekil 4.3: Problem 3'ün $h = 0.0125$, $k = 0.001$, şekil parametresi $c = 0.034$ ve $x \in [0, 2]$ için $t = 0.01$ zamanında nümerik çözümü

Tablo 4.8: Tek Dalga Hareketi: $h = 0.0125$, $k = 0.0025$, 0.000625 ve $x \in [0, 2]$ için $t = 0.005$ zamanında Problem 1'in nümerik ve analitik çözümleri

x	$k = 0.0025$		$k = 0.000625$		Analitik Çözüm
	Nümerik Çözüm ($c = 0.066$)	[46]	Nümerik Çözüm ($c = 0.073$)	[46]	
	0.0	0.00002131	0.00002131	0.00002131	
0.1	0.00025688	0.00025688	0.00025688	0.00025688	0.00025688
0.2	0.00309232	0.00309227	0.00309232	0.00309233	0.00309232
0.3	0.03658527	0.03657642	0.03658527	0.03658499	0.03658529
0.4	0.35574663	0.35543150	0.35574663	0.35572566	0.35574607
0.5	0.86305643	0.86288615	0.86305643	0.86304812	0.86305608
0.6	0.17787414	0.17794397	0.17787414	0.17787816	0.17787428
0.7	0.01627122	0.01627201	0.01627122	0.01627113	0.01627120
0.8	0.00136084	0.00136082	0.00136084	0.00136082	0.00136083
0.9	0.00011295	0.00011294	0.00011295	0.00011294	0.00011294
1.0	0.00000937	0.00000937	0.00000937	0.00000937	0.00000937
1.1	0.00000078	0.00000078	0.00000078	0.00000078	0.00000078
1.2	0.00000007	0.00000006	0.00000007	0.00000006	0.00000006
1.3	0.00000001	0.00000001	0.00000001	0.00000001	0.00000001
1.4	0.00000001	0.0	0.00000001	0.0	0.0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
2.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

ve [42, 44] referanslarında verilenlerle uyum içerisinde olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 4.11'de Problem 3'ün $h = 0.1$, $k = 0.0001$, $x \in [0, 4]$ ve c şekil parametresinin $c = 0.034$ seçimi için $t = 0.01$ zamanında elde edilen nümerik çözümleri tam çözümü ve [42, 45] referanslı çalışmalarda verilen nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Tabloya bakıldığında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının küçük olduğu, elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme yakın ve [42, 45] referanslarında verilenlerle uyum içerisinde olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 4.12'de Problem 3'ün $h = 0.1$, $k = 0.0001$, $x \in [0, 4]$ ve c şekil parametresinin $c = 0.033$ seçimi için $t = 0.005$ zamanında elde edilen nümerik çözümleri tam çözümü ve önceki araştırmacıların [42, 45] referanslı çalışmalarında verdikleri nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Tabloya bakıldığında hesaplanan L_2

Tablo 4.9: $h = 0.01$, $k = 0.005$ ve $x \in [0, 2]$ için farklı t zamanlarında Problem 2'nin invariant değerleri

Sunulan Yöntem				
t	I_1	I_2	I_3	I_4
0.0	0.228082	0.107062	0.053316	0.027181
0.75	0.228099	0.107062	0.053315	0.027180
1.50	0.228070	0.107062	0.053316	0.027180
3.0	0.227799	0.107062	0.053317	0.027181
[17]				
0.0	0.228080	0.107061	0.053318	0.027018
0.75	0.228016	0.107055	0.053524	0.027358
1.50	0.228032	0.107057	0.053453	0.027231
3.0	0.227968	0.107061	0.053265	0.026953
[47]				
0.0	0.228081	0.107062	0.053316	
0.75	0.228111	0.107059	0.053309	
1.5	0.227893	0.107059	0.053312	
3	0.227758	0.107062	0.053318	

ve L_∞ normlarının küçük olduğu, elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme yeterince yakın ve [42, 45] referanslarında verilenlerle uyum içerisinde olduğu açıkça görülmektedir.

Tablo 4.13'de Problem 3'ün $h = 0.0125$, $k = 0.001$, $x \in [0, 4]$ ve c şekil parametresinin $c = 0.032$ seçimi için $t = 0.005$ zamanında elde edilen nümerik çözümleri tam çözümü ve [42, 43, 44] referanslı çalışmalarında verilen nümerik sonuçlarla karşılaştırıldı. Tabloya bakıldığında hesaplanan L_2 ve L_∞ hata normlarının küçük olduğu, elde edilen nümerik çözümlerin tam çözüme yeterince yakın ve [42, 43, 44] referanslarında verilen sonuçlarla uyum içerisinde olduğu açıkça görülmektedir.

Sonuç olarak, yukarıda elde edilen nümerik sonuçlardan c şekil parametresinin seçiminin oldukça önemli olduğu ve dolayısıyla optimal değerinin bulunması durumunda multikvadrik radyal baz fonksiyonu ile elde edilecek nümerik çözümlerin problemin analitik çözümüne daha yakın olacağı düşünülmektedir.

Tablo 4.10: $h = 0.0125$, $k = 0.001$, şekil parametresi $c = 0.034$ ve $x \in [0, 4]$ için $t = 0.01$ zamanında Problem 3'ün nümerik ve analitik çözümleri

x	Nümerik Çözüm	[42]	[44]	Analitik Çözüm
0.0	0.0000094764	0.0	0.0	0.0000094764
0.2	0.0013623242	0.00146231	0.00136702	0.0013615210
0.4	0.1685357641	0.16469794	0.16495009	0.1559986449
0.6	0.0733705886	0.07126324	0.07467392	0.0764502810
0.8	0.0013443288	0.00130927	0.00134190	0.0013444220
1.0	0.0128678673	0.01295362	0.01284207	0.0128175505
1.2	0.1138903623	0.11258571	0.11320585	0.1123342599
1.4	0.0501887569	0.05012472	0.05045165	0.0508465892
1.6	0.0035647470	0.00350801	0.00356687	0.0035689822
1.8	0.0002040823	0.00020051	0.00020401	0.0002040354
2.0	0.0000115586	0.00001132	0.00001152	0.0000115217
2.2	0.0000006691	0.00000064	0.00000065	0.0000006502
2.4	0.0000000453	0.00000004	0.00000004	0.0000000367
2.6	0.0000000057	0.00000001	0.0	0.0000000021
2.8	0.0000000015	0.0	0.0	0.0000000001
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
4.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<hr/>				
$L_2 = 7.8954 \times 10^{-3}$				
$L_\infty = 26.8114 \times 10^{-3}$				
<hr/>				

Dolayısıyla bu tez çalışmasında kullanılan yöntem, c şekil parametresinin uygun seçilmesi durumunda, uygulamalı matematikte ve mühendislikte karşılaşılan birçok lineer olmayan kısmi türevli denklemin nümerik çözümlerinin elde edilmesinde kullanılabilir.

Tablo 4.11: $h = 0.1$, $k = 0.0001$, şekil parametresi $c = 0.034$ ve $x \in [0, 4]$ için $t = 0.01$ zamanında Problem 3'ün nümerik ve analitik çözümleri

x	Nümerik Çözüm	[45](Exp)	[45](EFD)	[42]	Analitik Çözüm
0.0	0.0000094764	0.0	0.0	0.0	0.0000094764
0.2	0.0013619298	0.00177650	0.00114718	0.00146231	0.0013615210
0.4	0.1658018361	0.16032857	0.16335221	0.16469794	0.1559986449
0.6	0.0709668971	0.07393146	0.07119635	0.07126324	0.0764502810
0.8	0.0013290495	0.00118044	0.00143272	0.00130927	0.0013444220
1.0	0.0129658101	0.01298586	0.01286635	0.01295362	0.0128175505
1.2	0.1130247152	0.11194221	0.11244069	0.11258571	0.1123342599
1.4	0.0501979252	0.05061504	0.05015009	0.05012472	0.0508465892
1.6	0.0035359175	0.00345329	0.00356666	0.00350801	0.0035689822
1.8	0.0002025456	0.00019593	0.00020517	0.00020051	0.0002040354
2.0	0.0000114680	0.00001106	0.00001159	0.00001132	0.0000115217
2.2	0.0000006535	0.00000062	0.00000065	0.00000064	0.0000006502
2.4	0.0000000388	0.00000004	0.00000004	0.00000004	0.0000000367
2.6	0.0000000029	0.0	0.0	0.0	0.0000000021
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
4.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<hr/>					
$L_2 = 4.1305 \times 10^{-3}$					
$L_\infty = 9.8031 \times 10^{-3}$					
<hr/>					

Tablo 4.12: $h = 0.1$, $k = 0.0001$, şekil parametresi $c = 0.033$ ve $x \in [0, 4]$ için $t = 0.005$ zamanında Problem 3'ün nümerik ve analitik çözümleri

x	Nümerik Çözüm	[45](Exp)	[45](EFD)	[42]	Analitik Çözüm
0.0	0.00000983	0.0	0.0	0.0	0.00000983
0.2	0.00141701	0.00161957	0.00130445	0.00146231	0.00141318
0.4	0.16548494	0.16250630	0.16402277	0.16469787	0.16055729
0.6	0.07123805	0.07258729	0.07123047	0.07126321	0.07392890
0.8	0.00132151	0.00124599	0.00137135	0.00130927	0.00132844
1.0	0.01298041	0.01296958	0.01290987	0.01295362	0.01290512
1.2	0.11297491	0.11226482	0.11251313	0.11258566	0.11263310
1.4	0.05024000	0.05036881	0.05013744	0.05012470	0.05056178
1.6	0.00352696	0.00348081	0.00353736	0.00350801	0.00354377
1.8	0.00020181	0.00019821	0.00020283	0.00020051	0.00020258
2.0	0.00001141	0.00001119	0.00001146	0.00001132	0.00001144
2.2	0.00000065	0.00000063	0.00000065	0.00000064	0.00000065
2.4	0.00000004	0.00000004	0.00000004	0.00000004	0.00000004
2.6	0.0	0.00000001	0.00000001	0.00000001	0.0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
4.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 = 2.0815 \times 10^{-3}$					
$L_\infty = 4.9276 \times 10^{-3}$					

Tablo 4.13: $h = 0.0125$, $k = 0.001$, şekil parametresi $c = 0.032$ ve $x \in [0, 4]$ için $t = 0.005$ zamanında Problem 3'ün nümerik ve analitik çözümleri

x	Nümerik Çözüm	[42]	[43]	[44]	Analitik Çözüm
0.0	0.00000983	0.0	0.0	0.0	0.00000983
0.2	0.00141375	0.00146231	0.00141361	0.00141571	0.00141318
0.4	0.16653431	0.16469787	0.16388340	0.16502401	0.16055729
0.6	0.07249177	0.07126321	0.07309954	0.07308242	0.07392889
0.8	0.00132844	0.00130927	0.00132846	0.00132717	0.00132844
1.0	0.01293096	0.01295362	0.01291965	0.01291787	0.01290512
1.2	0.11340775	0.11258566	0.11307170	0.11306786	0.11263310
1.4	0.05023338	0.05012470	0.05037538	0.05036473	0.05056178
1.6	0.00354169	0.00350801	0.00354259	0.00354275	0.00354377
1.8	0.00020257	0.00020051	0.00020257	0.00020256	0.00020258
2.0	0.00001144	0.00001132	0.00001144	0.00001144	0.00001144
2.2	0.00000065	0.00000064	0.00000065	0.00000065	0.00000065
2.4	0.00000004	0.00000004	0.00000004	0.00000004	0.00000004
2.6	0.0	0.00000001	0.0	0.0	0.0
2.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots
4.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
<hr/>					
$L_2 = 3.9633 \times 10^{-3}$					
$L_\infty = 13.0860 \times 10^{-3}$					
<hr/>					

KAYNAKLAR

- [1] M. Dehghan and A.Shokri, *A numerical method for KdV equation using collocation*, **Nonlinear Dyn.**, 50 (2007),111-120.
- [2] M. Sarboland and A. Aminataei, *On the numerical solution of the nonlinear Korteweg-de Vries equation*, **Sys. Sci. Cont. Eng.**, 3 (2015) 69-80.
- [3] C. S. Gardner, J. M. Grrne, M.D Kruskal, *Method for solving Korteweg-de Vries equation*, **Phys. Rev. Lett.**, 19 (1967) 1095–1097.
- [4] G.D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Methods*, 3rd Edn., Clarendon Pres, Oxford,1987.
- [5] S. Kutluay yayımlanmamış ders notları.
- [6] K. Liu, *Radial Basis Functions: Biomedical Applications and Parallelization*, Theses and Dissertations, University of Wisconsin-Milwaukee, December 2016.
- [7] R. L. Hardy, *Multiquadric equations of topography and other irregular surfaces*, **J. Geophys Res.**, 76 (1971) 1905–1915.
- [8] J.Y. McLeod and M.L. Baart, *Geometry and interpolation of curves and surfaces*, Cambridge University Press, Cambridge, 1998.
- [9] —, *Theory and applications of the multiquadric-biharmonic method: 20 years of discovery*, **Comp. Math. Appl.**,19 , no. 8/9, 163–208.
- [10] R. Franke, *A critical comparison of some methods for interpolation of scattered data*, Technical Report NPS, (1979) 53–79.
- [11] C. Micchelli, *Interpolation of scattered data: Distance matrices and conditionally positive definite functions*, *Constructive Approximation.*, 2, 1122, 1986.
- [12] E.J. Kansa, *Multiquadrics – A scattered data approximation scheme with applications to computational fluid dynamics I: Surface approximations and partial derivative estimates*, **Comp. Math. Appl.**, 19, no. 8/9, (1990)127–145.
- [13] J.R. Xaio and M. A. McCarthy, *A local heaviside weighted meshless method for two dimensional solids using radial basis functions*, **Comput. Mech.**, 31(2003) 301–315.
- [14] T. Sauer, *Numerical analysis*, Pearson Education, Inc., Boston, 2006.

- [15] T. Geyikli and D. Kaya, *An application for a modified KdV equation by the decomposition method and finite element method*, **Comp. Math. Appl.**, 169 (2005) 971-981.
- [16] A.J. Khattak and Siraj-ul-Islam, *A comparative study of numerical solutions of a class of KdV equation*, **Appl.Math.Comput.**, 199 (2008) 425-434.
- [17] İ. Dağ and Y. Dereli, *Numerical solutions of KdV equation using radial basis functions*, **Appl.Math.Comput.**, 32 (2008) 535-546.
- [18] Siraj-ul-Islam, A.J.Khattak and Ikram A.Tirmizi, *A meshfree method for numerical solution of KdV equation*, **Eng. Anal. Bound. Elem.**, 32 (2008) 849-855.
- [19] S. Zhang, L. Zhang, *Symplectic Multiquadric Quasi-interpolation Approximations of KdV equation*, **Filomat.**, 32:15 (2018) 5161-5171.
- [20] A.M. Wazwaz, *Partial Differential Equations and Solitary Waves Theory*, Springer, New York, (2009) 457-484.
- [21] W. Van Saarloos and P.C Hohenberg, *Fronts,pulses,sources and sinks in generalized complex Ginzburg-Landau equation*, **Physica D.**, 56 (1992) 303-311.
- [22] J.S. Russel, *Report on Waves: 14th Meeting of the British Association for the Advancement of Science*. John Murray, London, (1844) 311-390.
- [23] G.G. Stokes, *On the Theory of Oscillatory Waves*, **Camb. Trans.**, 8 (1847) 441-473.
- [24] D.J. Korteweg and G. de Vries, *On the Change of Form of Long Waves Advancing in a Rectangular Canal and a new type of Long Stationary Waves*, **Phil.Mag.**, 39 (1895) 422-443.
- [25] N.J. Zabusky and M.D.Kruskal, *Interaction of Solitons in a collisionless plasma and the recurrence of initial states*, **Phys.Rev.Lett.**, 15 (1965) 240-243.
- [26] V. Eguiluz, E. Hernandez-Garcia and O. Piro, *Boundary effects in the complex Ginzburg Landau equation*, **Internat.J.Bifur.Chaos.**, 9(11), (1999) 2209-2214.
- [27] R. Camassa and D. Holm, *An integrable shallow water equation with peaked solitons*, **Phys.Rev.Lett.**, 71(11), (1993) 1661-1664.
- [28] A.M. Wazwaz, *Exact solutions for the fourth order nonlinear Schrodinger equations with a cubic and a power law nonlinearities*. **Math. Comput. Modelling.**, 43 (2006) 802-808.

- [29] B. Fuchssteiner and A.Fokas, *Symplectic structures, their Backlund transformations and hereditary symmetries*, **Physica D.**, 4(1),(1981) 47-66.
- [30] W. Malfliet , *Solitary wave solutions of nonlinear wave equations*, **Am.J.Phys.**, 60(7), (1992) 650-654.
- [31] B. Fuchssteiner, *Some tricks from the symmetrt-toolbox for nonlinear equations: Generalization of the Camassa-Holm equation*, **Physica D.**, 95(3/4), (1996) 229-243.
- [32] P. Marcq, H. Chate and R.Conte, *Exact solutions of the one-dimensional quintic complex Ginzburg-Landau equation*, **Physica D.**, 73 (1994) 305-317.
- [33] A.M. Wazwaz, *Reliable analysis for the nonlinear Schrodinger wquations with a cubic and a power law nonlinearities*, **Math. Comput. Modelling.**, 43,(2006) 178-184.
- [34] R.M. Miura, C.S. Gardner, M.D. Kruskal. Korteweg-de Vries equation and generalizations, 2. *Existence of conservation laws and constants of motion*, **J. Maths. Phys.**, 6 (1968) 1204-1209.
- [35] I.S. Greig and J.L Morris, *A Hopscotch method for the Korteweg-de Vries equation*, **J. Comp Physics.**, 20 (1976) 64-80.
- [36] T.R. Taha, M.J. Ablowitz, *Analytic and numerical aspects of certain non-linear evolution equations III. Numerical KdV Equation*, **J.Comp. Phys.**, 55 (1984) 231-253.
- [37] A.A. Soliman, A.H.A. Ali and K.R. Raslan, *Numerical solution for the KdV equation based on similarity reductions*, **Appl.Math.Comput.**, 33 (2009) 1107-1115.
- [38] A.A. Soliman, *Collocation solution of the Korteweg-de Vries equation using septic splines*, **Int. J. Comp. Math.**, 81 (2004) 325-331.
- [39] M.E.Alexander ve J.L. Morris, *Galerkin Methods for some Model Equations for Nonlinear Dispersive Waves*, **J.Comp. Phys.**, 39 (1981) 94-102.
- [40] J.M.Sanz, I.Christie, *Petrov-Galerkin Methods for Nonlinear Dispersive Waves*, **J.Comp. Phys.**, 39 (1981) 94-102.
- [41] G.A Gardner , AHA Ali and LRT Gardner, *Simulations of solitons using quadratic spline shape functions*. **UCNW Maths.**, 89.03, 1989
- [42] S. Kutluay, A.R. Bahadır and A. Özdeş, *A small time solutions for the Korteweg-de Vries equation*, **Appl.Math.Comput.**, 107 (2000) 203-210.
- [43] E.N. Aksan and A. Özdeş, *Numerical solution of Korteweg-de Vries equation by Galerkin B-spline finite element method*, **Appl.Math.Comput.**, 175 (2006) 1256-1265.

- [44] S. Özer and S. Kutluay, *An analytical-numerical method for solving the Korteweg-de Vries equation*, **Appl.Math.Comput.**, 164 (2005) 789-79.
- [45] A. Refik Bahadır, *Exponential finite-difference method applied to Korteweg-de Vries equation for small times*, **Appl.Math.Comput.**, 160 (2005) 675-682.
- [46] D.Irk, İ. Dağ and B. Saka, *A small time solutions for the Korteweg-de Vries equation using spline approximation*, **Appl.Math.Comput.**, 173 (2006) 834-846.
- [47] Ö. Oruç, F. Bulut and A. Esen, *Numerical solution of the KdV equation by Haar wavelet method*, **Pramana-J.Phys.**, (2016) 87:947.



ÖZGEÇMİŞ

Melike KÖYLÜ, 09/12/1992 tarihinde Malatya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Malatya'da tamamladı. 2010 yılında Fırat Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümüne kayıt yaptırmaya hak kazanmıştır. 2011 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliğine yatay geçiş yapmış olup 2014 yılında mezun olmuştur. 2015 yılında Milli Eğitim Bakanlığı'na İlköğretim Matematik öğretmeni olarak atandı. 2016 Yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Uygulamalı Matematik Ana Bilim Dalı'nda yüksek lisans yapmaya hak kazandı. Halen Şanlıurfa ili Haliliye ilçesinde İlköğretim Matematik öğretmeni olarak görev yapmaktadır.

