T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KENMOTSU MANİFOLDLARIN SEMİ-SLANT ALTMANİFOLDLARI

DOKTORA TEZİ

Semra ZEREN

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

EYLÜL 2020

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KENMOTSU MANİFOLDLARIN SEMİ-SLANT ALTMANİFOLDLARI

DOKTORA TEZİ

Semra ZEREN
(3615140002)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

EYLÜL 2020

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Doktora çalışmamın danışmanlığını kabul ederek bana bu tezi hazırlama olanağı sunan, çalışmalarım esnasında bilgi, öneri ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam, tez danışmanım Prof. Dr. Ahmet YILDIZ' a en içten saygılarımı sunar ve teşekkür ederim. Ayrıca, çalışmalarım esnasında manevi desteklerini esirgemeyen aileme çok teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Doktora tezi olarak sunduğum "Kenmotsu Manifoldların Semi-slant Altmanifoldları" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Semra ZEREN

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

g	: Metrik Tensör,
ϕ	: (1,1)- tensör alanı,
η	: 1-form,
ξ	: Vektör alanı,
R	: M nin Riemann Eğrilik Tensörü,
$\tilde{R}$	: $\bar{M}$ nin Riemann Eğrilik Tensörü,
∇	: M üzerindeki Riemann Konneksiyonu,
$\tilde{\nabla}$	: $\bar{M}$ üzerindeki Riemann Konneksiyonu,
C	: Weyl Konformal eğrilik tensörü,
$\grave{Q}$	: Ricci Operatörü,
S	: Ricci Tensörü,
(ϕ,ξ,η)	: Hemen hemen değme yapı,
(M,ϕ,ξ,η)	: Hemen hemen değme manifold,
(ϕ,ξ,η,g)	: Hemen hemen değme metrik yapı,
(M,ϕ,ξ,η,g)	: Hemen hemen değme metrik manifold,
A_V	: Şekil operatörü,
Λ	: Değme manifoldlarda vektörel çarpım,
$[,]$	: Lie bracket(parantez) operatörü,
Φ	: İkinci temel form,
$\otimes$	: Tensörel çarpım,
L_X	: Lie operatörü,
N_ϕ	: ϕ nin Nijenhuis tensör alanı,
$T_p(M)$	: p noktasındaki tanjant vektörlerinin cümlesi,
$\chi(M)$	: Vektör alanlarının cümlesi.

ÖZET

Doktora Tezi

KENMOTSU MANİFOLDLARIN SEMİ-SLANT
ALTMANİFOLDLARI

SEMRA ZEREN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

70+vi sayfa

2020

Danışman: Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, literatür özeti ve tez konusu ile ilgili yapılmış olan çalışmalar hakkında bilgiler verilmiştir.

İkinci bölüm, bazı topolojik kavramlar, Riemann manifoldlar ve bunların altmanifoldları ile ilgili bazı temel tanım ve teoremlere ayrılmıştır.

Üçüncü bölümde, hemen hemen değme metrik manifoldlar ve değme metrik manifoldları, Kenmotsu manifoldlar, bir Kenmotsu manifoldun altmanifoldu ve özel olarak bir Kenmotsu manifoldun slant ve semi-slant altmanifoldu tanımı verilerek ve slant ve semi-slant altmanifoldlar ile ilgili teorem ve örnekler incelenmiştir.

Dördüncü bölümde, Schouten-van Kampen konneksiyonu ile ilgili bilgi verilerek bu konneksiyona sahip bir Kenmotsu manifoldun altmanifoldlarına ve semi-slant altmanifoldlarına ilişkin orjinal çalışmamız sunulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Hemen Hemen Değme Metrik Manifold, Değme Metrik Manifold, Kenmotsu Manifold, Slant Açı, Slant Altmanifold, Semi-slant Altmanifold, Schouten-van Kampen Konneksiyon.

ABSTRACT

Phd. Thesis

SEMI-SLANT SUBMANIFOLDS OF KENMOTSU MANIFOLDS

Semra ZEREN

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

70+vi pages

2020

Supervisor: Prof. Dr. Ahmet YILDIZ

This study prepared as a doctoral thesis consists of four parts.

In the first chapter, the literature summary and the studies about the subject of thesis are given.

In the second chapter, some topological concepts and some necessary definitions and theorems Riemannian manifolds and their submanifolds are given.

In the third chapter, almost contact metric manifolds and contact metric manifolds, Kenmotsu manifolds, the submanifold of a Kenmotsu manifold and the slant and semi-slant submanifold of a Kenmotsu manifold are explained.

In the forth chapter, we give information about the Schouten-van Kampen connection and, as being the original part of the thesis, submanifolds and semi-slant submanifolds of a Kenmotsu manifold with the Schouten-van Kampen connection.

Keywords: Almost Contact Mertic Manifold, Contact Metric Manifold, Kenmotsu Manifold, Slant Angle, Slant Submanifold, Semi-slant Submanifold, Schouten-van Kampen Connection.

1. GİRİŞ

Değme geometri ilk olarak C. Huygens, I. Barrow ve I. Newton'un çalışmaları ile ortaya çıkmıştır. Değme dönüşümler teorisi ise sonradan S. Lie tarafından bazı diferensiyel denklemlerin çözümünü elde etmek için çalışılmıştır. Yirminci yüzyılın ilk yarısında E. Cartan ve G. Darboux değme geometrinin gelişimine büyük katkı sağlamışlardır. Değme manifoldlarda önemli bir yer tutan Sasakian manifoldları 1960 lı yıllarda Japon matematikçi S. Sasaki tarafından tanımlanmıştır [1]. Aynı yıllarda yaşayan M. Gray, K. Ogiue ve W. M. Bootby gibi matematikçilerin çalışmaları da oldukça dikkat çekmiştir [2–4]. Günümüzde de bu konu ile ilgili bir çok matematikçi çalışmalarına devam etmektedir. Özellikle D. E. Blair' in makale ve kitapları bu konuyu anlamak için çalışılması gereken temel kaynaklardan biridir [5]. Değme geometrinin bir çok uygulama alanı vardır. H. Geiges makalesinde değme geometrinin fizik, mekanik, optik, termodinamik ve kontrol teorisi alanlarında uygulanabilirliğini açıklamıştır [6]. Değme geometri fizik ve matematiğin farklı alanlarında karşımıza çıkan bir konudur. Değme geometride integral altmanifoldları da önemli bir rol oynamaktadır. Son zamanlarda ise diferensiyel geometride, değme yapı kavramı oldukça önemli bir yer tutmaktadır.

Slant altmanifold kavramı ise ilk olarak B. Y. Chen tarafından 1990 yılında ortaya konulmuştur ve B. Y. Chen, hemen hemen Hermityan manifoldların slant altmanifoldları ile alakalı çalışmalar yapmıştır. Ayrıca, yine aynı yıllarda B. Y. Chen ve Y. Tazawa, C^2 ve C^4 ün slant altmanifoldlarına dair örnekler vermişlerdir [7]. 1993 yılında, S. Maeda, Y. Ohnita ve S. Udagawa bir Kaehlerian manifoldun slant altmanifoldlarını tanımlamışlardır [8]. Daha sonra, A. Lotta 1996 yılında bir hemen hemen değme metrik manifoldun slant altmanifoldlarını tanımlamış ve bununla ilgili ilk çalışmayı yapmıştır [9]. A. Lotta, ayrıca K-değme manifoldların 3-boyutlu anti-invaryant olmayan slant altmanifoldlarının geometrisi ile alakalı çalışmalara da öncülük etmiştir [10]. Diğer taraftan, J. Cabrerizo ve arkadaşları bir Sasakian manifold ile bir K-değme manifoldun slant altmanifoldlarıyla ilgilenmişler ve yaptıkları çalışmalarla birçok önemli sonuç elde etmişlerdir [11].

Bir Kenmotsu manifoldun slant altmanifoldları ile ilgili çalışmalar son yıllarda yapılmaya başlanmıştır. Bununla ilgili ilk adımı 2004 yılında R. S. Gupta ve arkadaşları atmış ve daha sonra bu çalışmalarını yeni çalışmalar ile ilerletmişlerdir [12].

CR-altmanifoldların bir genel versiyonu olan semi-slant altmanifoldlar ile ilgili çalışmalar 1994 yılında N. Papaghiuc tarafından başlatılmıştır [13]. Daha sonra, J. Cabrerizo ve arkadaşları 1999 yılında Sasakian manifoldların semi-slant altmanifoldlarını ortaya koymak için Kaehlerian manifoldların semi-slant altmanifoldları çalışmasını ilerletmişlerdir [14]. 2007 yılında V. A. Khan, M. A. Khan, K.A. Khan araştırmalarında Kenmotsu manifoldların semi-slant altmanifoldlarını oluşturmanın, Sasakian manifoldların semi-slant altmanifoldlarını oluşturmaktan tamamen farklı olduğunu görmüşlerdir [15]. İşte bu durum üzerinde çalışılmaya değer bulunmuştur. Ayrıca, J. Cabrerizo ve arkadaşları 1999 yılında hemen hemen değme metrik manifoldun bi-slant altmanifoldlarını tanıtmışlar ve bazı önemli sonuçlar bulmuşlardır.

Bu çalışmalar doğrultusunda bu tezde Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir Kenmotsu manifoldun slant ve semi-slant altmanifoldları araştırılarak literatüre yeni çalışmalar eklenmiştir.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

2.1 Topolojik Kavramlar ve Manifoldlar

Bu bölümde tezde ihtiyaç duyulan topolojik kavramlara ve diferensiyel geometrinin bazı temel tanım ve teoremlerine yer verilecektir.

Tanım 2.1.1. *X bir cümle olsun. X' in alt cümlelerinin bir koleksiyonu $\acute{\tau}$ olsun. I indis cümlesi olmak üzere, $\acute{\tau}$ koleksiyonu aşağıdakileri önermeleri doğrularsa X üzerinde bir* ***topoloji*** *adını alır [16].*

i) $X, \varnothing \in \acute{\tau}$,

ii) $\forall\, A_1, A_2 \in \acute{\tau} \Longrightarrow A_1 \cap A_2 \in \acute{\tau}$,

iii) $A_i \in \acute{\tau}$, $i \in I$, $\underset{i \in I}{\cup} A_i \in \acute{\tau}$.

Tanım 2.1.2. *Bir X cümlesi ve üzerindeki bir $\acute{\tau}$ topolojisinden oluşan $(X, \acute{\tau})$ ikilisine bir* ***topolojik uzay*** *denir [16].*

Tanım 2.1.3. *X bir topolojik uzay ve farklı iki $p, q \in X$ noktalarının X deki açık komşulukları sırasıyla U ve V olsun. $U \cap V = \varnothing$ olacak şekilde U ile V yi seçersek X topolojik uzayına bir* ***Hausdorff uzaydır*** *denir [17].*

Tanım 2.1.4. *M bir topolojik uzay olsun. M için aşağıdaki önermeler doğru ise M ye* ***n-boyutlu topolojik manifold (veya kısaca topolojik n-manifold)*** *denir [17].*

i) *M bir Hausdorff uzaydır,*

ii) *M nin her bir açık alt cümlesi E^n Öklid uzayının bir açık cümlesine veya E^n e homeomorfdur,*

iii) *M sayılabilir çoklukta açık cümlelerle örtülebilir.*

Tanım 2.1.5. *n-boyutlu bir M topolojik manifoldunun C^r-sınıfından bir atlası var ise M ye* ***C^r-sınıfından diferensiyellenebilir manifold*** *denir. Ayrıca $\forall r \in \mathbb{N}$ için S diferensiyellenebilir ise, o zaman M ye* ***C^∞ sınıfından diferensiyellenebilir manifold*** *denir [17].*

Tanım 2.1.6. $\mathbb{E}^n$ *nin iki altcümlesi* U *ve* V *olsun. Bir* $\Psi : U \longrightarrow V$ *fonksiyonu için*

i) $\Psi \in C^k(U,V)$,

ii) $\Psi^{-1} : V \longrightarrow U$, $\Psi^{-1} \in C^k(V,U)$

önermeleri sağlanıyorsa Ψ *ye* C^k *sınıfından* ***diffeomorfizm*** *denir* [17].

Tanım 2.1.7. *M bir diferensiyellenebilir manifold ve M üzerindeki vektör alanlarının uzayı* $\chi(M)$ *olsun.* $\forall X,Y \in \chi(M)$ *için*

$$[,] : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X,Y) \longrightarrow [X,Y]$$

dönüşümü $\forall f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ *için*

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \tag{2.1.1}$$

şeklinde tanımlanan $[,]$ *operatörü* $\chi(M)$ *üzerinde bir Lie operatörüdür. Burada* Xf*,* f *fonksiyonunun* X *vektör alanına göre* ***yöne göre türevi****dir [18].*

Teorem 2.1.1. *M bir diferensiyellenebilir manifold,* $\forall\ X,Y,Z \in \chi(M)$ *olmak üzere* $f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ *fonksiyonları ve* $\lambda \in \mathbb{R}$ *için Lie operatörü*

i) $[X,Y](f+g) = [X,Y](f) + [X,Y](g)$,

ii) $[X,Y](\lambda f) = \lambda [X,Y](f)$,

iii) $[X,Y](fg) = g[X,Y](f) + f[X,Y](g)$,

iv) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

özelliklerini sağlar [18].

Teorem 2.1.2. *M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda* $\forall\ X,Y,Z \in \chi(M)$ *ve* $f,g \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ *için*

$$[fX,gY] = (fg)[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X \tag{2.1.2}$$

dir [18].

Tanım 2.1.8. *(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde verilen her bir diferensiyel r-forma bir diferensiyel $(r+1)$-form karşılık getiren diferensiyel operatöre* ***dış türev operatörü*** *denir ve d ile gösterilir. Eğer w bir $r-$form ise $X_0, X_1, ..., X_r \in \chi(M)$ için*

$$dw(X_0, X_1, ..., X_r) = \frac{1}{r+1}\{\sum_{i=1}^{r}(-1)^i X_i(w(X_0, ..., X_{i-1}, X_i, ..., X_r))$$
$$+\frac{1}{r+1}\sum_{i,j=1}^{r}(-1)^{i+j} w(\left[X_i, X_j\right], X_0, ..., X_{i-1}, X_i, ..., X_r)\}$$

şeklinde tanımlanır. Özel olarak 2-form ve r-form için d operatörü $X, Y, Z \in \chi(M)$ olmak üzere

$$2dw(X,Y) = X(w(Y)) - Y(w(X)) - w([X,Y]) \tag{2.1.3}$$

ve

$$3d\Phi(X,Y,Z) = X(\Phi(Y,Z)) + Y(\Phi(Z,X)) + Z(\Phi(X,Y)) \tag{2.1.4}$$
$$-\Phi([X,Y],Z) - \Phi([Y,Z],X) - \Phi([Z,X],Y)$$

şeklinde tanımlanır [18].

Tanım 2.1.9. *M üzerinde bir vektör alanı X ve X ile gerilmiş bir lokal dönüşümlü 1-parametreli grup φ_t olsun. X tensör alanına göre bir K tensör alanının X yönünde $L_X K$ ile gösterilen* ***Lie türevi***

$$L_X K = [X, K]$$

olarak tanımlanır [19].

Teorem 2.1.3. *(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için*

i) $L_X(f) = X(f)$,

ii) $L_X Y = [X,Y]$,

iii) $L_X g(Y,Z) = X(g(Y,Z)) - g([X,Y],Z) - g([X,Z],Y)$

dir [18, 20].

Tanım 2.1.10. *(M,g) bir Riemann manifoldu ve X manifold üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer $L_X g = 0$ ise X vektör alanına* ***Killing vektör alanı*** *adı verilir. Kolayca görülür ki X vektör alanının Killing olması için gerek ve yeter şart $\forall Y,Z \in \chi(M)$ için*

$$g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0$$

olmasıdır [21].

Tanım 2.1.11. *Diferensiyellenebilir bir manifold M olsun. M üzerindeki C^{∞} vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ ve M den $\mathbb{R}$ ye C^{∞} fonksiyonlarının uzayı $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ olmak üzere*

$$g : \chi(M) \times \chi(M) \to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

*dönüşümü bilineer, simetrik ve pozitif tanımlı ise g ye M üzerinde bir **Riemann metriği** ya da **metrik tensör** ve (M,g) ikilisine de bir **Riemann manifoldu** denir [22].*

Tanım 2.1.12. *M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının uzayı $\chi(M)$ olmak üzere $\forall f,g \in C^{\infty}(M,\mathbb{R}), \forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için*

$$\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X,Y) \to \nabla(X,Y) = \nabla_X Y$$

dönüşümü

i) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z,$

ii) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z,$

iii) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z,$

iv) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X[f]Y$

*özelliklerini sağlıyorsa ∇ ya M manifoldu üzerinde bir **afin veya lineer konneksiyon** ve $\nabla_X Y$ vektör alanına Y vektör alanının X e göre **kovaryant türev operatörü** denir* [22].

Tanım 2.1.13. *(M,g) bir Riemann manifoldu ve ∇, M üzerinde tanımlı bir afin konneksiyon olsun. Bu durumda $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için*

$$T : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$$

$$(X,Y) \longrightarrow T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

*olarak tanımlanan vektör değerli tensöre M üzerinde tanımlı ∇ konneksiyonunun **torsiyon tensörü** denir. Kolayca görülebilir ki torsiyon tensörü anti-simetriktir [18].*

Tanım 2.1.14. (M,g) *bir Riemann manifoldu ve* ∇ *da* M *üzerinde tanımlı bir afin konneksiyon olsun.* $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ *için* ∇ *dönüşümü*

i) $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y]$ *(Sıfır torsiyon özelliği)*

ii) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z)$ *(konneksiyonun metrikle bağdaşması özelliği)*

şartlarını sağlıyorsa, ∇ *ya* M *üzerinde sıfır torsiyonlu* ***Riemann konneksiyon veya Levi-Civita konneksiyon*** *denir* [22].

Tanım 2.1.15. (M,g) *bir Riemann manifoldu ve* ∇ *da* M *üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun.* $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ *için Riemann konneksiyonu*

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y,Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned} \tag{2.1.5}$$

Kozsul formülü *ile tek türlü belirtilir [18].*

Tanım 2.1.16. (M,g) *bir Riemann manifoldu ve* ∇ *da* M *üzerinde bir Riemann konneksiyon olsun.* $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ *için*

$$\begin{aligned} R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) &\to \chi(M) \\ (X,Y,Z) &\longrightarrow R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

biçiminde tanımlanan $(1,3)$ *tipinde tensör alanı* R *ye* M *üzerinde* ***Riemann eğrilik tensör alanı,***

$$R(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)W,Z)$$

tensörüne de M *nin* ***Riemann-Christofel eğrilik tensörü*** *veya* ***Riemann eğriliği*** *denir [23].*

Teorem 2.1.4. *M bir Riemann manifoldu ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. Bu durumda* $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ *için*

i) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(Y,X)Z,W)$,

ii) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$,

iii) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

dir [23].

Tanım 2.1.17. *(M,g) bir Riemann manifolduve R, (M,g) nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için*

$$R(X,Y)Z+R(Y,Z)X+R(Z,X)Y=0$$

*eşitliği **I. Bianchi Özdeşliği** olarak adlandırılır [18].*

Tanım 2.1.18. *(M,g) bir Riemann manifoldu, M nin Riemann eğrilik tensörü R ve ∇ Levi-Civita konneksiyon olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için*

$$(\nabla_X R)(Y,Z)+(\nabla_Y R)(Z,X)+(\nabla_Z R)(X,Y)=0$$

*eşitliği **II. Bianchi Özdeşliği** olarak adlandırılır [18].*

Tanım 2.1.19. *Bir $n-$boyutlu Riemann manifoldu (M,g) ve M manifoldunun bir p noktasındaki tanjant uzayı T_PM ve T_PM uzayının 2-boyutlu bir altuzayı P olsun. P düzlemini geren birim vektörler X ve Y olmak üzere*

$$K(P)=K(X,Y)=\frac{g(R(X,Y)Y,X)}{g(X,X)g(Y,Y)-g(X,Y)^2} \qquad (2.1.7)$$

*değerine M manifoldunun P düzlemine göre **kesit eğriliği** denir [21].*

Tanım 2.1.20. *Bir $n-$boyutlu Riemann manifoldu (M,g), M üzerinde eğrilik tensörü R ve $\chi(M)$ nin bir ortonormal bazı $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ olsun.*

$$\begin{aligned} \grave{Q} &: \chi(M) \to \chi(M) \\ X &\longrightarrow \grave{Q}X = \sum_{i=1}^{n} R(X,e_i)e_i \end{aligned}$$

*şeklinde tanımlanan $\grave{Q}$ operatörüne M nin **Ricci Operatörü** denir [23].*

Bir $n-$boyutlu Riemann manifoldu (M,g) ve R, M Riemann manifoldunun üzerinde eğrilik tensörü olsun. $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ cümlesi $\chi(M)$ nin ortonormal vektör alanları olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$S:\chi(M)\times\chi(M)\to C^\infty(M,\mathbb{R})$$

$$(X,Y)\to S(X,Y)=izR(.,X)Y$$

dönüşümü ile tanımlı (0,2)- mertebeli

$$S(X,Y)=\sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i) \qquad (2.1.8)$$

tensör alanına (M,g) manifoldunun ***Ricci tensörü*** *adı verilir. M manifoldunun Ricci Operatörü Ric ise,*

$$g(RicX,Y) = S(X,Y) \tag{2.1.9}$$

ile tanımlanır [23].

Tanım 2.1.21. *Bir $n-boyutlu$ Riemann manifoldu (M,g) ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı T_PM olsun. T_PM uzayının 2-boyutlu altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına M manifoldunun* ***skaler eğriliği*** *denir ve τ ile gösterilir. Buna göre T_PM uzayının ortonormal bazı $\{e_1,...,e_n\}$ olmak üzere*

$$\tau = \sum_{i=1}^{n} S(e_i,e_i) \tag{2.1.10}$$

dir. Diğer taraftan manifoldun X doğrultusundaki ***Ricci eğriliği*** *$k(X)$*

$$k(X) = \frac{S(X,X)}{g(X,X)} \tag{2.1.11}$$

ile tanımlanır [21].

Tanım 2.1.22. *Bir $n-boyutlu$ Riemann manifoldu (M,g) olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ için*

$$S(X,Y) = \lambda g(X,Y)$$

olacak biçimde M üzerinde bir λ fonksiyonu varsa, yani M nin Ricci Tensörü S, metrik tensör g nin bir katı ise M ye ***Einstein manifoldu*** *adı verilir. $S(X,Y) = \lambda g(X,Y)$ eşitliğinde $X = Y = e_i$, $1 \leq e_i \leq n$, ortonormal bazı seçilirse $\lambda = \frac{\rho}{n}$ olduğu görülür [24].*

Tanım 2.1.23. *Bir $n-boyutlu$ Riemann manifoldu (M,g) olsun. Eğer S Ricci Tensörü olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ için*

$$S(X,Y) = ag(X,Y) + b\eta(X)\eta(Y) \tag{2.1.12}$$

*eşitliği sağlanıyor ise M ye $\eta-$**Einstein manifoldu** adı verilir. Burada a ve b, M üzerinde fonksiyonlar ve $\eta-$da 1-formdur [24].*

Tanım 2.1.24. *Bir $n-boyutlu$ Riemann manifoldu (M,g) olsun. ρ, M üzerinde pozitif bir fonksiyon olsun. Bu durumda $g^* = \rho^2 g$ bir noktada iki vektör arasındaki açıyı değiştirmeyen M üzerindeki bir metrik değişikliğini tanımlar. Bu yüzden bu değişim konformal bir değişimdir. Eğer g Riemann metriği lokal olarak flat olan g^* Riemann metriği ile konformal olarak ilişkili ise bu Riemann metriği konformal olarak flattır ve konformal olarak Euclideandir.*

*M nin **Weyl Konformal eğrilik tensör alanı** C ile gösterilen* $(1,3)$ *tipinde bir tensör alanıdır ve* $\forall X,Y \in \chi(M)$ *için*

$$C(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}[S(Y,Z)X - S(X,Z)Y + g(Y,Z)\grave{Q}X - g(X,Z)\grave{Q}Y] + \frac{\tau}{(n-1)(n-2)}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \quad (2.1.13)$$

şeklinde tanımlanır [18].

Tanım 2.1.25. $C = 0$ *ise M manifoldu **konformal flat** olarak adlandırılır. [18].*

Tanım 2.1.26. (M,g) $n-$*boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. M nin **Weyl Projektif eğrilik tensör alanı** P ile gösterilir ve* $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ *için*

$$P(X,Y)Z = R(X,Y)Z - \frac{1}{n-1}\left[g(Y,Z)\grave{Q}X - g(X,Z)\grave{Q}Y\right] \quad (2.1.14)$$

biçiminde ifade edilir [18].

2.2 Altmanifoldlar

Tanım 2.2.1. *M ve* $\overline{M}$ *sırasıyla m ve n boyutlu* C^∞ *Riemann manifoldlar ve* $f: M \to \overline{M}$ *bir dönüşüm olsun. Eğer* $\forall p \in M$ *için* $(f_*)_p$ *birebir ise f ye **immersiyon (daldırma)** denir. Bu durumda M ye de* $\overline{M}$ *nin **immersed altmanifoldu** denir [18].*

Tanım 2.2.2. $f: M \to \overline{M}$ *bir immersiyon olsun. Eğer f, 1-1 ise f ye **imbeding (gömme)**, M ye de* $\overline{M}$ *nin **gömülen altmanifoldu** ya da sadece **altmanifoldu** denir [18].*

Tanım 2.2.3. $(\overline{M}, g)$ *bir Riemann manifoldu ve M,* $\overline{M}$ *nin bir altmanifoldu olsun. Herhangi bir* $p \in M$ *noktası için*

$$T_p^{\perp}M = \left\{N_p \in T_p\overline{M} : \overline{g}(X_p, N_p) = 0, \forall X_p \in T_pM\right\}$$

cümlesi tanımlansın. $p \in M$ *noktasında* $\forall X_p \in T_pM$ *için* $\overline{g}(X_p,N_p) = 0$ *koşulunu sağlayan* N_p *vektörüne M nin **normal vektörü**,* N_p *nin birim vektörü olması halinde de M nin **birim normal vektörü** denir.*

$$\chi(M)^{\perp} = \left\{N \in \chi\left(\overline{M}\right) : \bar{g}(X, N = 0), \forall X \in \chi(M)\right\}$$

*ifadesine M nin **normal vektör alanları uzayı**, N ye de M nin **normal vektör alanı**,* $T^{\perp}M = \bigcup_{p \in M} T_p^{\perp}M$ *ifadesine de M nin **normal demeti** adı verilir [18].*

Tanım 2.2.4. $\left(\overline{M},g\right)$ *bir Riemann manifoldu ve M, $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. ∇ ve $\bar{\nabla}$ de sırasıyla M ve $\overline{M}$ üzerindeki Riemann konneksiyonlar olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ için*

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)^{\perp}$$

$$(X,Y) \longrightarrow h(X,Y) = \bar{\nabla}_X Y - \nabla_X Y$$

ile tanımlı h simetrik bilineer formuna M nin ***ikinci temel formu*** *denir. Eğer $h=0$ ise M ye* ***total geodezik altmanifold*** *adı verilir [25].*

Tanım 2.2.5. $\left(\overline{M},g\right)$ *bir Riemann manifoldu ve M, $\overline{M}$ Riemann manifoldunun bir altmanifoldu ve $\overline{M}$ üzerindeki lineer konneksiyon $\overline{\nabla}$ olsun. $\forall X,Y \in \chi(M)$için*

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{2.2.1}$$

şeklinde tanımlanan denkleme ***Gauss formülü*** *denir. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X,Y)$ sırasıyla $\overline{\nabla}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenleridir.*
M altmanifoldunun ikinci temel formu h nin kovaryant türevi ∇h de $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$için

$$(\nabla_X h)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z) \tag{2.2.2}$$

şeklinde tanımlanır. h nin kovaryant türevi ∇h ye M nin ***üçüncü temel formu*** *adı verilir [25].*
$(\overline{M},g)$ bir Riemann manifoldunun $n-$boyutlu bir altmanifoldu M olsun. M üzerindeki bir $p \in M$ için T_pM nin lokal ortonormal bazı $\{e_1,e_2,...,e_n\}$ olmak üzere M nin ikinci temel formu h nin ***normu***

$$\|h\|^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g(h(e_i,e_j),h(e_i,e_j)) \tag{2.2.3}$$

ile tanımlıdır [18].

Tanım 2.2.6. *$\overline{M}$ bir Riemann manifoldu ve M, $\overline{M}$ manifoldunun altmanifoldu ve $\{e_1,...,e_n\}$ altmanifoldun ortonormal çatısı olsun. Bu durumda*

$$H = \frac{1}{n} izh = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} h(e_i,e_i) \tag{2.2.4}$$

ile tanımlı H vektör alanına ***ortalama eğrilik vektör alanı*** *denir. Ayrıca $H=0$ ise M ye* ***minimal altmanifold*** *denir [26].*

Tanım 2.2.7. *$(\overline{M},g)$ bir Riemann manifoldu ve M de $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. M nin normal demetindeki konneksiyon $\nabla^{\perp}$ olmak üzere $\forall X \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için*

$$A : \chi^{\perp}(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$$

$$(V,X) \to A(V,X) = A_V X = \nabla^{\perp}_X V - \overline{\nabla}_X V$$

*ile tanımlı bilineer dönüşümüne M nin **şekil operaörü** denir [25].*

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^{\perp}_X V \tag{2.2.5}$$

*şeklinde tanımlanan bağıntıya **Weingarten formülü** denir. $-A_V X$ ve $\nabla^{\perp}_X V$ sırasıyla $\overline{\nabla}_X V$ nin teğet ve normal bileşenleridir. Burada A_V ye M nin şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ ye M nin $T^{\perp}M$ normal demetindeki konneksiyonu adı verilir. M nin şekil operatörü ile ikinci temel formu arasında $\forall X,Y \in \chi(M), \forall V \in \chi^{\perp}(M)$ için*

$$g(A_V X, Y) = \overline{g}(h(X,Y),V) \tag{2.2.6}$$

bağıntısı vardır. Burada g, M üzerine indirgenmiş Riemann metriğidir [25]. Ayrıca M manifoldunun şekil operatörü A_V nin kovaryant türevi de

$$(\nabla_X A)_V Y = \nabla_X A_V Y - A_{\nabla^{\perp}_X V} Y - A_V \nabla_X Y \tag{2.2.7}$$

biçiminde tanımlanır [25, 27].

Tanım 2.2.8. *$n-$boyutlu bir Riemann manifoldu M olsun. M nin her p noktasına T_pM teğet uzayında $r-$boyutlu bir D_p alt uzayı bağlayan*

$$D : M \longrightarrow T_pM$$

$$p \longrightarrow D_p \subset T_pM$$

*dönüşümüne M üzerinde rankı r olan bir **distribüsyon** denir.*
*$X \in \chi(M)$ olsun. $\forall p \in M$ için $X_p \in D_p$ ise X vektör alanına D distribüsyonuna aittir denir. D distribüsyonuna ait olan vektör alanlarının uzayı $\Gamma(D)$ ile gosterilir. $\Gamma(D)$ nin baz vektör alanları diferensiyellenebilir ise D ye **diferensiyellenebilir distribüsyon** denir [20].*

Uyarı 2.2.1. *Bu çalışmada bütün distribüsyonlar diferensiyellenebilir kabul edilecektir.*

Tanım 2.2.9. *M nin her bir p noktasında $T_pM^{\perp}$ normal uzayına $(n-r)$ boyutlu bir $D_p^{\perp}$ alt uzayı bağlayan $D^{\perp}$dönüşümüne D distribüsyonunun **tümleyen distribüsyonu** denir [20].*

Tanım 2.2.10. *$\overline{M}$ bir diferensiyellenebilir manifold, D de $\overline{M}$ üzerinde r−boyutlu bir distribüsyon ve M de $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Eğer M nin her x−noktasında, M nin tanjant uzayı ile D_x aynı ise M ye D nin* ***integral altmanifoldu*** *denir. Yani*

$$f : M \longrightarrow \overline{M}$$

bir imbedding olmak üzere $\forall x \in M$ için

$$f_* (T_x M) = D_x$$

dir. Eğer D nin M altmanifoldunu kapsayan bir başka integral altmanifoldu yoksa M ye D nin ***maksimal integral altmanifoldu*** *denir [20].*

Tanım 2.2.11. *$\overline{M}$ bir diferensiyellenebilir manifold, M de $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Eğer $\forall x \in M$ için D nin x-noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa D ye* ***integrallenebilirdir*** *denir [20].*

Tanım 2.2.12. *n−boyutlu M Riemann manifoldu üzerinde bir distribüsyon D olsun. $\forall X,Y \in \Gamma(D)$ için $[X,Y] \in \Gamma(D)$ oluyorsa D distribüsyonuna* ***involutive distribüsyon*** *denir [20].*

Teorem 2.2.1. *n−boyutlu bir Riemann manifold M olsun. M üzerinde bir D distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart D distribüsyonunun involutive distribüsyon olmasıdır [20].*

Tanım 2.2.13. *(M,g) Riemann manifoldunun n−boyutlu bir altmanifoldu M olsun. $\overline{M}$ nin eğrilik tensörü $\bar{R}$ olmak üzere her $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için*

$$\bar{R}(X,Y)Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z$$

şeklinde tanımlanan $\overline{M}$ Riemann eğrilik tensörünü göz önüne alalım. Gauss ve Weingarten formülleri yardımı ile

$$\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)Z &= \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z \\
&= \bar{\nabla}_X (\nabla_Y Z + h(Y,Z)) - \bar{\nabla}_Y (\nabla_X Z + h(X,Z)) - (\nabla_{[X,Y]} + h([X,Y],Z) \\
&= \bar{\nabla}_X \nabla_Y Z + \bar{\nabla}_X h(Y,Z) - \bar{\nabla}_Y \nabla_X Z - \bar{\nabla}_Y h(X,Z) - \nabla_{[X,Y]} - h([X,Y],Z \\
&= \nabla_X \nabla_Y Z + h(X,\nabla_Y Z) - A_{h(Y,Z)} X + \nabla_X^{\perp} h(Y,Z) - \nabla_Y \nabla_X Z - h(Y,\nabla_X Z) \\
&\quad + A_{h(X,Z)} Y - \nabla_Y^{\perp} h(X,Z) - \nabla_{\nabla_X Y} Z + \nabla_{\nabla_Y X} Z - h(\nabla_X Y,Z) + h(\nabla_Y X,Z)
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)Z = {} & \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{\nabla_X Y}Z + \nabla_{\nabla_Y X}Z + \nabla_X^{\perp}h(Y,Z) \\
& - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z) - \nabla_Y^{\perp}h(X,Z) + h(X,\nabla_Y Z) \\
& + h(\nabla_Y X,Z) + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X
\end{aligned}
$$

dir. Yukarıdaki denklemler tekrar düzenlenirse

$$
\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)Z = {} & \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_X^{\perp}h(,Z) - h(\nabla_X Y,Z) \\
& - h(Y,\nabla_X Z) - \nabla_Y^{\perp}h(X,Z) + h(X,\nabla_Y Z) + h(\nabla_Y X,Z) \\
& + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X
\end{aligned}
$$

yazılabilir. Buradan da (2.2.2) denklemi kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$
\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y)Z = {} & R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X + (\nabla_X h)(Y,Z) \\
& - (\nabla_Y h)(X,Z)
\end{aligned} \tag{2.2.8}
$$

olduğu görülür. Bu eşitliğin her iki tarafı $W \in \chi(M)$ ile çarpılırsa

$$
\begin{aligned}
\bar{R}(X,Y,Z,W) = {} & R(X,Y,Z,W) - g(h(Y,Z),h(X,W)) \\
& + g(h(X,Z),h(Y,W))
\end{aligned} \tag{2.2.9}
$$

*eşitliği elde edilir. Bu eşitliğe **Gauss denklemi** adı verilir [28]. Ayrıca (2.2.8) denkleminin teğet ve normal bileşenleri sırasıyla*

$$
(\bar{R}(X,Y)Z)^{T} = R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X \tag{2.2.10}
$$

ve

$$
(\bar{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) \tag{2.2.11}
$$

*dir. (2.2.11) eşitliğine **Codazzi denklemi** adı verilir. Eğer Codazzi denkleminde $(\bar{R}(X,Y)Z)^{\perp} = 0$ ise altmanifolda **eğrilik-invaryant altmanifold** denir. Burada $\bar{\nabla}$, M üzerinde Riemann konneksiyonudur. Ayrıca M nin normal demetinin eğrilik tensörü her $X,Y \in \chi^{\perp}(M)$ olmak üzere*

$$
R^{\perp}(X,Y)V = \nabla_X^{\perp}\nabla_Y^{\perp}Z - \nabla_Y^{\perp}\nabla_X^{\perp}Z - \nabla_{[X,Y]}^{\perp}Z \tag{2.2.12}
$$

ile verilir. Böylece yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)V &= \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y V - \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X V - \bar{\nabla}_{[X,Y]}V \\ &= \bar{\nabla}_X\left(\nabla^{\perp}_Y Z - A_V Y\right) - \bar{\nabla}_Y\left(\nabla^{\perp}_X V - A_V X\right) \\ &- (\nabla^{\perp}_{[X,Y]}V - A_V[X,Y]) \\ &= \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y V - A_{\nabla^{\perp}_X V}X - \nabla_X A_V Y - h(X,A_V Y) - \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X V \\ &+ A_{\nabla^{\perp}_X V}Y + \nabla_Y A_V X + h(Y,A_V X) - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}V + A_V[X,Y]\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)V = \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y V - \nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X V - \nabla^{\perp}_{[X,Y]}V - h(X,A_V Y) \\ + h(Y,A_V X) - \nabla_X A_V Y + A_{\nabla^{\perp}_X V}Y + A_V\nabla_X Y \\ + \nabla_Y A_V X - A_{\nabla^{\perp}_Y V}X - A_V\nabla_Y X\end{aligned}$$

olduğu görülür. Burada (2.2.7) ve (2.2.12) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{R}(X,Y)V = R^{\perp}(X,Y)V - h(X,A_V Y) + h(Y,A_V X) \\ - (\nabla_X A)_V Y + (\nabla_Y A)_V X\end{aligned} \tag{2.2.13}$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafi $U \in \chi^{\perp}(M)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned}g(\bar{R}(X,Y)V,U) &= g(R^{\perp}(X,Y)V,U) - g(h(X,A_V Y),U) + g(h(Y,A_V X),U) \\ &- g((\nabla_X A)_V Y,U) + g((\nabla_Y A)_V X,U) \\ &= g(R^{\perp}(X,Y)V,U) + g(A_U X,A_V Y) - g(A_U Y,A_V X)\end{aligned}$$

dir. Buradan da $[A_U,A_V] = A_U A_V - A_V A_U$ olduğundan

$$g(\bar{R}(X,Y)V,U) = g(R^{\perp}(X,Y)V,U) + g([A_U,A_V]X,Y) \tag{2.2.14}$$

*eşitliği elde edilir. Bu eşitliğe **Ricci Denklemi** adı verilir. Eğer $R^{\perp} = 0$ ise altmanifolda **normal flat konneksiyona sahiptir** denir [27, 28].*

3. KENMOTSU MANİFOLDLARI VE ALTMANİFOLDLARI

Bu bölümde, tezin diğer bölümlerinde kullanacağımız Kenmotsu manifoldların bazı önemli özelliklerini sunacağız. Bu doğrultuda öncelikle hemen hemen değme metrik manifoldlar, değme metrik manifoldlar ve hemen hemen değme metrik manifoldların torsiyon tensörünü alt bölümler halinde vererek bu kavramları örneklendireceğiz. Daha sonra Kenmotsu manifoldlar, Kenmotsu manifoldların altmanifoldları ve slant altmanifoldlar ile ilgili temel kavramlara yer verilecektir. Ayrıca Kenmotsu manifoldların semi-slant altmanifoldları ve 3- boyutlu slant alt manifoldlar ile ilgili önemli tanım ve teoremler verilecektir.

3.1 Hemen Hemen Değme Metrik Manifoldları

Tanım 3.1.1. $(2n+1)$*-boyutlu bir manifold M,* ϕ,ξ,η *da M üzerinde sırası ile* $(1,1)-$ *tipinde bir tensör alanı, bir vektör alanı ve bir* $1-form$ *olsun. Eğer* ϕ,ξ,η *için M üzerinde herhangi bir vektör alanı X olmak üzere;*

$$\eta(\xi)=1 \tag{3.1.1}$$

ve

$$\phi^2X=-X+\eta(X)\xi \tag{3.1.2}$$

özellikleri sağlanıyor ise o zaman (ϕ,ξ,η) *üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen değme yapısı ve bu yapı ile birlikte M ye de* ***hemen hemen değme manifold*** *denir [18].*

Teorem 3.1.1. (ϕ,ξ,η) *hemen hemen değme manifold olsun. Bu durumda*

i) $\phi\xi=0,$

ii) $\eta(\phi X)=0,$

iii) *rank* $\phi=2n$

dir [18].

Teorem 3.1.2. *Her bir hemen hemen değme M manifoldu üzerinde bir Riemann metrik tensör alanı* $\acute{h}$ *olmak üzere* $\forall X\in\chi(M)$ *için*

$$\acute{h}(X,\xi)=\eta(X)$$

olacak şekilde vardır [18].

Teorem 3.1.3. *Her bir hemen hemen değme M manifoldu üzerinde bir g Riemann metrik tensör alanı*

$$\eta(X) = g(X,\xi)$$

ve

$$g(\phi X,\phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{3.1.3}$$

olacak şekilde vardır [18].

Sonuç 3.1.1. *M hemen hemen değme manifoldu üzerinde*

$$\eta(X) = g(X,\xi)$$

$$g(\phi X,\phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde g Riemann metriği için

$$g(\phi X,Y) + g(X,\phi Y) = 0 \tag{3.1.4}$$

dır, yani ϕ anti-simetrik olacak şekilde M üzerinde bir g Riemann metriği vardır [18].

Tanım 3.1.2. *Hemen hemen değme manifoldu M verilsin. M üzerinde bir g Riemann metriği*

$$\eta(X) = g(X,\xi)$$
$$g(\phi X,\phi Y) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)$$

şartlarını sağlıyor ise g metriğine M üzerinde hemen hemen değme metrik, (ϕ,ξ,η,g) yapısına da hemen hemen değme metrik yapısı, (ϕ,ξ,η,g) yapısı ile M ye de ***hemen hemen değme metrik manifold*** *denir [18].*

Tanım 3.1.3. *M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapısı (ϕ,ξ,η,g) için*

$$\Phi(X,Y) = g(X,\phi Y)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne (ϕ,ξ,η,g) nın ***temel 2- formu*** *denir [18].*

3.2 Değme Metrik Manifoldları

Tanım 3.2.1. *Eğer bir* $(2n+1)-$*boyutlu hemen hemen değme* M *manifoldu üzerinde* $\eta\Lambda(d\eta)^n \neq 0$ *olacak şekilde global bir* η $1-formu$ *mevcut ise* M *bir değme yapıya sahiptir denir ve bir* ***değme manifold*** *olarak adlandırılır. Burada* η *ya* M *nin bir* ***değme formu*** *denir. Ayrıca* $(d\eta)^n$ *ile* n *inci mertebeden dış çarpım gösterilmiştir, yani*

$$(d\eta)^n = (d\eta)\Lambda...\Lambda(d\eta)$$

dir [18].

Teorem 3.2.1. *Değme yapısı* η *olan* $(2n+1)-$*boyutlu bir manifold* M *olsun.* M *üzerinde*

$$g(X,\phi Y) = d\eta(X,Y)$$

olacak şekilde bir (ϕ,ξ,η,g) *hemen hemen değme metrik yapısı vardır [18].*

Sonuç 3.2.1. $(2n+1)-$*boyutlu* M *manifoldu üzerinde* (ϕ,ξ,η,g) *hemen hemen değme metrik yapısı verilsin. Eğer* $g(X,\phi Y) = d\eta(X,Y)$ *oluyorsa* (M,ϕ,ξ,η,g) *ye* ***değme metrik manifold,*** (ϕ,ξ,η,g) *yapısına da* ***değme metrik manifold*** *denir [18].*

Sonuç 3.2.2. *Her değme metrik manifold değme manifolddur.*

Teorem 3.2.2. M, *n- boyutlu bir manifold olsun.* M *üzerinde tanımlı* $1-form$ w *olsun.* M *üzerinde*

$$\eta\Lambda(dw)^p \neq 0$$

ve

$$(dw)^{p+1} = 0$$

olduğunu kabul edelim. O zaman her bir noktanın bir komşuluğunda

$$w = dy^{p+1} - \sum_{i=1}^{p} y^i dx^i$$

olacak şekilde bir $\left(x^1,x^2,...,x^p,y^1,...,y^{n-p}\right)$ *koordinat sistemi vardır. Bu durumda* $(2n+1)$-*boyutlu* M *değme manifoldunun her bir noktasının bir komşuluğu üzerinde*

$$\eta = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$$

olacak şekilde $\left(x^i, y^i, z\right), (i = 1, 2, .., n)$ *koordinatları vardır.* $(2n+1)$*- boyutlu Öklid uzayı* $\mathbb{R}^{2n+1}$ *de*

$$\left(x^1, x^2, ..., x^n, y^1, y^2 ..., y^n, z\right)$$

kartezyen koordinatlarını alalım. $\mathbb{R}^{2n+1}$ *de bir* $1-form$ η_0 *olmak üzere*

$$\eta_0 = dz - \sum_{i=1}^{n} y^i dx^i$$

ile tanımlansın. O zaman

$$\eta_0 \Lambda (d\eta_0)^n \neq 0$$

dır. Burada η_0, $\mathbb{R}^{2n+1}$ *üzerinde bir değme formdur denir [18].*

3.3 Hemen Hemen Değme Manifoldların Torsiyon Tensörü

Tanım 3.3.1. $(2n+1)$*- boyutlu bir hemen hemen değme manifold* (M, ϕ, ξ, η) *olsun.* $\mathbb{R}$, *bir reel doğruyu göstermek üzere* $M \times \mathbb{R}$ *çarpım manifoldunu göz önüne alalım. Bu durumda* $M \times \mathbb{R}$ *üzerinde bir vektör alanı*

$$\left(X, f\frac{d}{dt}\right)$$

biçimindedir. Burada X *ile* M *ye teğet bir vektör alanı,* t *ile* $\mathbb{R}$ *nin bir noktasının koordinatı ve* f *ile de* $M \times \mathbb{R}$ *de üzerinde bir fonksiyon gösterilmektedir.* $M \times \mathbb{R}$ *nin tanjant uzayı üzerinde bir* J *lineer dönüşümünü*

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\phi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde tanımlayalım. O zaman

$$J^2 = -I$$

dir. Bu durumda J *lineer dönüşümü* $M \times \mathbb{R}$ *üzerinde bir hemen hemen kompleks yapı olur. Gerçekten de*

$$\begin{aligned} J^2\left(X, f\frac{d}{dt}\right) &= J\left(\phi X - f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right) \\ &= \left(\phi(\phi X - f\xi) - \eta(X)\xi, \eta(\phi X - f\xi)\frac{d}{dt}\right) \\ &= \left(\phi^2 X - \phi(f\xi) - \eta(X)\xi, (\eta(\phi X) - \eta(f\xi))\frac{d}{dt}\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
J^2\left(X,f\frac{d}{dt}\right) &= \left(-X+\eta(X)\xi - f\phi\xi - \eta(X)\xi, (0-f\eta(\xi))\frac{d}{dt}\right)\\
&= \left(-X - f0, -f1\frac{d}{dt}\right)\\
&= \left(-X, -f\frac{d}{dt}\right)\\
&= -\left(X, f\frac{d}{dt}\right)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$J^2 = -I$$

dir. Dolayısıyla J dönüşümü $M\times\mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır.

Tanım 3.3.2. *M bir diferensiyellenebilir manifold ve ϕ, M üzerinde bir $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı olmak üzere, $\forall X,Y\in\chi(M)$ için*

$$N_\phi : \chi(M)\times\chi(M)\to\chi(M)$$

olmak üzere

$$N_\phi(X,Y) = \phi^2[X,Y] + [\phi X,\phi Y] - \phi[\phi X, Y] - \phi[X,\phi Y]$$

*şeklinde tanımlanan $(1,2)$ tipindeki tensör alanına ϕ nin **Nijenhuis tensör alanı** denir [3].*

$\phi = J$ hemen hemen kompleks yapı olması halinde

$$
\begin{aligned}
N_J(X,Y) &= J^2[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]\\
&= -[X,Y] + [JX,JY] - J[JX,Y] - J[X,JY]
\end{aligned}
$$

şeklinde olup N_J tensör alanına *J hemen hemen kompleks yapısının* **Nijenhuis torsiyon tensörü** denir [18].

Tanım 3.3.3. *M bir hemen hemen kompleks metrik manifold, M üzerindeki hemen hemen kompleks yapı J olsun. J nin Nijenhuis tensör alanı N_J olmak üzere $N_J = 0$ ise J dönüşümüne **integrallenebilirdir** denir [18].*

Tanım 3.3.4. *Bir $(2n+1)$ - boyutlu hemen hemen değme manifold M ve (ϕ,ξ,η) de M üzerinde hemen hemen değme manifold yapı olsun. Reel doğru $\mathbb{R}$ olmak üzere $M\times\mathbb{R}$ çarpım manifoldu göz önüne alınsın. Eğer $M\times\mathbb{R}$ üzerindeki J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilir ise (ϕ,ξ,η) hemen hemen değme yapısı **normaldir** denir [18].*

3.4 Kenmotsu Manifoldları

Tanım 3.4.1. $(2n+1)$ *boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold* $\left(\overline{M},\phi,\xi,\eta,g\right)$ *olsun. Eğer* $\overline{M}$, *hemen hemen değme manifoldu üzerinde*

$$d\eta = 0 \quad , \quad d\Phi = 2\eta \Lambda \Phi$$

eşitlikleri sağlanıyorsa, $\overline{M}$ *ye bir* ***Kenmotsu Manifold*** *denir [29].*

Teorem 3.4.1. $(2n+1)$ *boyutlu bir hemen hemen değme metrik manifold* $\left(\overline{M},\phi,\xi,\eta,g\right)$ *olsun.* $\overline{M}$ *nin Kenmotsu manifold olması için gerek ve yeter şart*

$$\left(\bar{\nabla}_X \phi\right) Y = g\left(\phi X, Y\right)\xi - \eta\left(Y\right)\phi X \tag{3.4.1}$$

olmasıdır. Burada $\bar{\nabla}$, $\overline{M}$ *üzerinde Levi-Civita konneksiyondur [29].*

Teorem 3.4.2. $(2n+1)$ *boyutlu bir Kenmotsu manifold* $\left(\overline{M},\phi,\xi,\eta,g\right)$ *olsun. Bu durumda*

$$\bar{\nabla}_X \xi = X - \eta(X)\xi, \tag{3.4.2}$$

ve

$$\left(\bar{\nabla}_X \eta\right) Y = g\left(X,Y\right) - \eta\left(X\right)\eta\left(Y\right) \tag{3.4.3}$$

eşitlikleri sağlanmaktadır [29].

Teorem 3.4.3. $(2n+1)$ *boyutlu bir Kenmotsu manifold* $\left(\overline{M},\phi,\xi,\eta,g\right)$ *ve eğrilik tensörü R olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} R\left(X,Y\right)\xi &= \eta(X)Y - \eta(Y)X, \\ R\left(X,\xi\right)Y &= g\left(X,Y\right)\xi - \eta(Y)X, \\ R\left(X,\xi\right)\xi &= \eta(X)\xi - X \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

dir [29].

Teorem 3.4.4. $(2n+1)$ *boyutlu bir Kenmotsu manifold* $\left(\overline{M},\phi,\xi,\eta,g\right)$ *ve Ricci tensörü S olsun. Bu durumda*

$$S\left(X,\xi\right) = -2n\eta\left(X\right) \tag{3.4.5}$$

dir [29].

3.4.1 Kenmotsu Manifoldların Altmanifoldları

Tanım 3.4.2. $(\overline{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *hemen hemen değme metrik manifold ve M de* ξ *ye teğet* $\overline{M}$ *nin bir altmanifoldu olsun. Bu halde* $\overline{M}$ *de g Riemann metriği M üzerine indirgenir ve M de bir Riemann manifoldu olur. Her* $X \in \chi(M)$ *ve* $V \in \chi^{\perp}(M)$ *için*

$$\phi X = TX + NX \tag{3.4.6}$$

ve

$$\phi V = tV + nV \tag{3.4.7}$$

şeklinde yazabiliriz. Burada TX *ve* NX *sırası ile* ϕX *in teğet ve normal bileşenlerini* tV *ve* nV *de sırası ile* ϕV *nin teğet ve normal bileşenlerini göstermektedir. Böylece altmanifold üzerine indirgenen bu tensörler*

$$T : \chi(M) \to \chi(M), \qquad N : \chi(M) \to \chi^{\perp}(M)$$
$$t : \chi^{\perp}(M) \to \chi(M), \qquad n : \chi^{\perp}(M) \to \chi^{\perp}(M)$$

şeklinde tanımlanan lineer dönüşümlerdir. Burada her $X \in \chi(M)$ *için* $\phi X = TX + NX$ *denkleminde* $N = 0$ *yani* $\phi X = TX \in \chi(M)$ *ise M ye* $(\overline{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *nin bir* ***invaryant altmanifoldu****,* $T = 0$ *yani* $\phi X = NX \in \chi^{\perp}(M)$ *ise M ye* $(\overline{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ *nin bir* ***anti-invaryant altmanifoldu*** *denir [26].*

Teorem 3.4.5. *Bir hemen hemen değme metrik manifoldu* $\overline{M}$ *nin bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda herhangi bir* $X, Y \in \chi(M)$ *için*

$$g(TX, Y) + g(X, TY) = 0 \tag{3.4.8}$$

dır [26].

İspat: (3.1.4) eşitliğinde (3.4.6) yerine yazılırsa

$$g(TX + NX, Y) + g(X, TY + NY) = 0$$

elde edilir. Buradan, g metriği lineer olduğundan

$$g(TX, Y) + g(NX, Y) + g(X, TY) + g(X, NY) = 0$$

yazılabilir. $X \in \chi(M)$ ve $NY \in \chi^{\perp}(M)$ olduğundan $g(NX, Y) = 0$ ve aynı şekilde $g(X, NY) = 0$ dır. Buradan

$$g(TX, Y) + g(X, TY) = 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

(3.4.6) eşitliği endomorfizm doğurur. Bu T endomorfizminin karesi olan T^2 yi Q ile gösterelim. M üzerinde tanımlanan T ve Q endomorfizmleri $(1,1)$-tipinde birer tensör alanıdır. Böylece; T^2 yani Q self-adjointtir.

Diğer yandan T,Q ve N tensör alanlarının kovaryant türevleri, $\forall X \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X T)Y = \nabla_X TY - T\nabla_X Y \tag{3.4.9}$$

$$(\nabla_X Q)Y = \nabla_X QY - Q\nabla_X Y \tag{3.4.10}$$

$$(\nabla_X N)Y = \nabla_X^{\perp} NY - N\nabla_X Y \tag{3.4.11}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.4.6. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Herhangi $X,Y \in \chi(M)$ için*

$$(\nabla_X T)Y = -\eta(Y)TX + g(Y,TX)\xi \tag{3.4.12}$$

ise

$$(\nabla_X Q)Y = -\eta(Y)QX - g(QX,Y)\xi \tag{3.4.13}$$

dir [12].

İspat: (3.4.12) de Y yerine TY yazılır ve (3.4.9) eşitliği kullanılırsa

$$(\nabla_X T)TY = -\eta(TY)TX + g(TY,TX)\xi$$

elde edilir. Böylece

$$\nabla_X T(TY) - T(\nabla_X TY) = -\eta(TY)TX + g(TY,TX)\xi$$

denkleminden

$$\nabla_X T(TY) = -\eta(TY)TX + g(TY,TX)\xi + T(\nabla_X TY)$$

elde edilir. Diğer taraftan $Q = T^2$ olduğundan (3.4.9) dan

$$\begin{aligned}(\nabla_X Q)Y = \left(\nabla_X T^2 Y\right) &= \nabla_X T^2(Y) - T^2(\nabla_X Y)\\ &= \nabla_X T(TY) - T(T(\nabla_X TY))\end{aligned}$$

bulunur. Burada yukarıda elde edilen $\nabla_X T(TY)$ nin eşiti yerine yazılır ve (3.4.9) ile (3.4.12) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla_X Q)Y &= -\eta(TY)TX + g(TY,TX)\xi + T(\nabla_X TY) - T(-(\nabla_X T)Y + \nabla_X TY) \\
&= -\eta(TY)TX + g(TY,TX)\xi + T(\nabla_X TY) + T(\nabla_X T)Y - T(\nabla_X TY) \\
&= -\eta(TY)TX + g(TY,TX)\xi + T(\nabla_X T)Y \\
&= -\eta(TY)TX + g(TY,TX)\xi + T(-\eta(Y)TX + g(Y,TX)\xi) \\
&= -\eta(TY)TX + g(TY,TX)\xi - \eta(Y)T^2X + g(Y,TX)T\xi
\end{aligned}$$

olur. Teorem 3.1.3 den $\phi\xi = 0$ ve $\eta \circ \phi = 0$ dır. $\phi\xi = 0$ olduğundan (3.4.6) den

$$T\xi + N\xi = 0$$

yazılabilir.Buradan teğet ve normal bileşenlerin her ikisi de sıfır olacağından $T\xi = 0$ ve $N\xi = 0$ elde edilir. Diğer taraftan her $X \in \chi(M)$ için, $\eta(\phi X) = 0$ olduğundan

$$\eta(TX + NX) = 0$$

dir. Böylece

$$\eta(TX) + \eta(NX) = 0$$

bulunur. Buna göre, eşitliğin sol yanındaki teğet ve normal bileşenlerin sıfır olması gerektiğinden, $\eta(TX) = 0$ yani $\eta \circ T = 0$ olur. Öte yandan

$$\begin{aligned}
(\nabla_X Q)Y &= -\eta(TY)TX + g(TY,TX)\xi - \eta(Y)T^2X + g(Y,TX)T\xi \\
&= -\eta(TY)TX - g\left(Y,T^2X\right)\xi - \eta(Y)T^2X + g(Y,TX)T\xi
\end{aligned}$$

eşitliğinde $T\xi = 0$ ve $\eta \circ T = 0$ yerine yazılırsa,

$$(\nabla_X Q)Y = -\eta(Y)QX - g(QX,Y)\xi$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.4.1. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Herhangi $X \in \chi(M)$ için*

$$\nabla_X \xi = X - \eta(X)\xi, \tag{3.4.14}$$

ve

$$h(X,\xi) = 0$$

dır [30].

Sonuç 3.4.2. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Herhangi $V \in \chi^{\perp}(M)$ için*

$$A_V \xi = 0 \qquad ve \qquad \eta(A_V X) = 0 \tag{3.4.15}$$

dır [30].

Sonuç 3.4.3. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Herhangi $X, Y \in \chi(M)$ için*

$$(\nabla_X T) Y = A_{NY} X + th(X,Y) + g(TX,Y)\xi - \eta(Y) TX \tag{3.4.16}$$

$$(\nabla_X N) Y = -h(X,TY) + nh(X,Y) - \eta(Y) NX \tag{3.4.17}$$

elde edilir [26].

Sonuç 3.4.4. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Herhangi $V \in \chi^{\perp}(M)$ için*

$$(\nabla_X t) V = A_{nV} X - TA_V X + g(NX,V)\xi \tag{3.4.18}$$

$$(\nabla_X n) V = -h(tV,X) - NA_V X \tag{3.4.19}$$

elde edilir [26].

Sonuç 3.4.5. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Herhangi $X, Y \in \chi(M)$ için*

$$(\nabla_X T) Y = -\eta(Y) TX + g(Y,TX)\xi \iff A_{NY} X = A_{NX} Y \tag{3.4.20}$$

dir [12].

Sonuç 3.4.6. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Herhangi $X, Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için*

$$(\nabla_X N) Y = -\eta(Y) NX \Longleftrightarrow A_V TY = -A_{nV} Y \tag{3.4.21}$$

dir [12].

3.4.2 Kenmotsu Manifoldların Slant Altmanifoldları

Tanım 3.4.3. *Bir hemen hemen değme metrik manifold* $\left(\overline{M},\phi,\xi,\eta,g\right)$ *nin bir altmanifoldu M olmak üzere, M nin her bir p noktasına* T_pM *de* $r-$*boyutlu bir* D_p *alt vektör uzayını karşılık getiren dönüşüm D olsun.* $\xi\in\chi(M)$ *olmak üzere her* $p\in M$ *ve her* $X_p\in\Gamma(D_p)$ *vektörü için,* ϕX_p *ve* D_p *vektör altuzayı arasındaki* $\theta_D(X_p)$ *açısı sabit yani* $p\in M$ *ve* $X_p\in\Gamma(D_p)$ *nin seçiminden bağımsız ise M üzerinde diferensiyellenebilir D distribüsyonuna bir* ***slant distribüsyon*** *denir.* θ_D *sabit açısına da D distribüsyonun* ***slant açısı*** *denir [14].*

Teorem 3.4.7. *D, M üzerinde* ξ *ye ortogonal bir distribüsyon olsun. Bu durumda D nin slant olması için gerek ve yeter şart herhangi* $X\in\Gamma(D)$ *için*

$$(PT)^2X=-\lambda X$$

eşitliğini sağlayan bir $\lambda\in[0,1]$ *sabitinin var olmasıdır. Burada P, D üzerindeki dik izdüşüm fonksiyonunu gösterir. Bu durumda* $\lambda=\cos^2\theta_D$ *dir [14].*

Tanım 3.4.4. *Bir hemen hemen değme metrik manifoldu* $\overline{M}$ *nin bir altmanifoldu M olsun. Her bir* $p\in M$ *ve* $X_p\in T_pM$ *için* $\{X_p,\xi_p\}$ *vektörleri lineer bağımsız olmak üzere* ϕX_p *ve* T_pM *arasındaki* $\theta(X_p)$ ***Writinger açısı****, p ve* X_p *nin seçilişinden bağımsız ise M ye,* $\overline{M}$ *de* ***slant altmanifold*** *denir.* $\theta=\theta(X_p)$ *sabit açısına, M nin* $\overline{M}$ *üzerindeki* ***slant açısı*** *denir, sla(M) ile gösterilir ve* $\theta(X_p)\in[0,\pi/2]$ *dir.*

Bir hemen hemen değme metrik manifoldunun ;

- anti-invaryant altmanifoldları $pi/2$ slant açılı slant altmanifoldlardır,
- invaryant altmanifoldları slant açısı sıfır olan slant altmanifoldlardır.

Bir slant altmanifold invaryant ya da anti-invaryant değil ise **proper slant altmanifold** olarak adlandırılır [25].

Teorem 3.4.8. *Bir hemen hemen değme metrik manifoldu* $\overline{M}$ *nin bir altmanifoldu M olsun. Eğer* ξ *vektör alanı M ye ortogonal ise M anti-invaryanttır [9].*

Teorem 3.4.9. *Bir hemen hemen değme metrik manifoldu $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Bu durumda M nin slant olması için gerek ve yeter şart*

$$T^2 = -\lambda \left(I - \eta \otimes \xi\right) \tag{3.4.22}$$

eşitliğini sağlayan $\lambda \in [0,1]$ sabitinin mevcut olmasıdır. Ayrıca bu durumda M nin slant açısı θ ise

$$\lambda = \cos^2 \theta$$

dır [11].

Sonuç 3.4.7. *Bir hemen hemen değme metrik manifoldu $\overline{M}$ nin θ açısına sahip bir slant altmanifoldu M olsun. Bu takdirde herhangi bir $X,Y \in \chi(M)$ için*

$$g(TX,TY) = \cos^2 \theta \left(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\right), \tag{3.4.23}$$

$$g(NX,NY) = \sin^2 \theta \left(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)\right) \tag{3.4.24}$$

dir [11].

Teorem 3.4.10. *$\overline{M}$ bir hemen hemen değme metrik manifold M de $\overline{M}$ nin θ slant açılı bir slant altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin her x noktasında $Q\mid_D$ sadece bir eigen (öz değer) değerine $\lambda_1 = -\cos^2 \theta$ sahiptir [12].*

Teorem 3.4.11. *Bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldunun bir slant altmanifoldu M olsun. O zaman Q nun paralel $(\nabla Q = 0)$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir anti- invaryant altmanifold olmasıdır [12].*

İspat: M nin slant açısını θ ile gösterelim. $\forall X \in \chi(M)$ için

$$T^2X = -\cos^2 \theta \left(X - \eta(X)\xi\right)$$

dir. Burada X yerine $\nabla_X Y$ yazılırsa

$$Q\nabla_X Y = -\cos^2 \theta \nabla_X Y + \cos^2 \theta \eta(\nabla_X Y)\xi \tag{3.4.25}$$

elde edilir. Şimdi (3.4.25) in kovaryant türevi alınırsa

$$
\begin{aligned}
\nabla_Y QX &= -\cos^2\theta\nabla_X Y + \cos^2\theta\nabla_X \eta(Y)\xi, \\
&= -\cos^2\theta\nabla_X Y + \cos^2\theta(X\eta(Y)\xi + \eta(Y)\nabla_X Y) \\
&= -\cos^2\theta\nabla_X Y + \cos^2\theta(Xg(Y,\xi)\xi) + g(Y,\xi)\nabla_X Y \\
&= -\cos^2\theta\nabla_X Y + \cos^2\theta(g(\nabla_X Y,\xi) + g(Y,\nabla_X\xi)\xi + g(Y,\xi)\nabla_X Y) \\
&= -\cos^2\theta\nabla_X Y + \cos^2\theta\eta(\nabla_X Y)\xi + \cos^2\theta g(Y,\nabla_X\xi)\xi \qquad (3.4.26) \\
&+ \cos^2\theta\eta(Y)\nabla_X\xi)
\end{aligned}
$$

bulunur. M, $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldunun bir altmanifoldu olduğundan herhangi $X \in \chi(M)$ için $\nabla_X\xi = X - \eta(X)\xi$ yazılabilir. O halde $\nabla_X\xi$ nin değeri (3.4.26) da yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X Q)Y = -\cos^2\theta\nabla_X Y + \cos^2\theta\eta(\nabla_X Y)\xi + \cos^2\theta g(Y,X)\xi \qquad (3.4.27) \\
-\eta(X)\eta(Y)\xi + \cos^2\theta(\eta(Y)X - \eta(X)\eta(Y)\nabla_X\xi)
\end{aligned}
$$

eşitliği bulunur. Buradan (3.4.25) ve (3.4.27) ifadeleri (3.4.10) de yerine yazılırsa

$$
(\nabla_X Q)Y = -\cos^2\theta\,(g(Y,X)\xi - 2\eta(X)\eta(Y)\xi + \eta(Y)X) \qquad (3.4.28)
$$

elde edilir. Böylece $\nabla Q = 0$ olması için gerek ve yeter şart $\theta = \frac{\pi}{2}$ ya da $\chi(M) = Sp\{\xi\}$ olmasıdır. Bu son durumda *boy* $M = 1$ olup, M anti-invaryant altmanifolddur. Böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.4.1. *M, bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldunun altmanifoldu ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Bu durumda M nin slant olması için gerek ve yeter şart*

1. *$Q\,|_D$ endomorfizmi, M nin her noktasında tek bir karakteristik değere sahiptir,*

2. *$\forall X,Y \in \chi(M)$ için*

$$
(\nabla_X Q)Y = \lambda(g(Y,X)\xi - 2\eta(X)\eta(Y)\xi + \eta(Y)X), \qquad (3.4.29)
$$

olacak şekilde bir $\lambda : M \to [0,1]$ fonksiyonu vardır. Ayrıca bu durumda eğer M nin slant açısı θ ise $\lambda = \cos^2\theta$ dır [12].

İspat: M slant altmanifold olsun. Bu durumda Teorem (3.4.10) ve (3.4.28) den direkt olarak 1. ve 2. ifadeleri elde edilir.

Tersine $D = Sp\{\xi\}^{\perp}$ olsun ve 1., 2. ifadeleri sağlansın. Buna ek olarak, her $x \in M$ noktasında $Q\mid_D$ nin tek eigen değeri $\lambda_1(x)$ olsun. λ_1 e karşılık gelen öz vektör $Y \in \Gamma(D)$ olsun. Yani $QY = \lambda_1 Y$ dir. Bu durumda 1. den her $X \in \chi(M)$ için $Y \in \Gamma(D)$ olduğundan

$$X[QY] = X[\lambda_1 Y]$$
$$X(\lambda_1 Y) + \lambda_1 \nabla_X Y = \nabla_X(QY)$$

dir. Ayrıca

$$\nabla_X(QY) = Q(\nabla_X Y) + (\nabla_X Q)Y$$

olduğundan (3.4.29) kullanılırsa

$$\nabla_X(QY) = Q(\nabla_X Y) + \lambda g(X,Y)\xi$$

olur. Dolayısıyla

$$X(\lambda_1 Y) + \lambda_1 \nabla_X Y = Q(\nabla_X Y) + \lambda g(X,Y)\xi$$

dır. Hem $\nabla_X Y$ hem de $Q(\nabla_X Y)$, Y ye dik olduğundan λ_1 in M üzerinde sabit olduğu sonucu çıkar. M nin slant olduğunu ispatlamak için Teorem 4.3.3 den

$$Q = -\mu I + \mu \eta \otimes \xi$$

olacak şekilde bir μ sabiti olsun. Şimdi $\forall X \in \chi(M)$ için

$$X = \overline{X} + \eta(X)\xi$$

olur. Burada $\overline{X} \in \Gamma(D)$ dir. Böylece

$$\overline{X} = X - \eta(X)\xi$$

dir. Buradan

$$QX = Q\overline{X}$$

olur. $Q\mid_D = \lambda_1 I$ olduğu için

$$Q\overline{X} = \lambda_1 \overline{X}$$

ve böylece

$$QX = \lambda_1 \overline{X} = \lambda_1 X - \lambda_1 \eta(X)\xi$$

olur. $\mu = -\lambda_1$ alırsak

$$QX = \mu X + \mu \eta(X)\xi$$

elde ederiz. $\lambda_1\,(=-\mu)$ bir sabit olduğundan, Teorem 4.3.3 ile M, $\overline{M}$ de slanttır. M slant ise (3.4.22) ve (3.4.29) dan

$$\lambda = -\lambda_1 = \mu = \cos^2\theta$$

elde edilir. Burada θ, M nin slant açısıdır. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.12. *M, bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldunun altmanifoldu ve D, M üzerinde ξ ye ortogonal bir distribüsyon olsun. M nin slant olması için gerek ve yeter şart D nin aynı açılı bir slant distribüsyon olmasıdır [30].*

3.4.3 Kenmotsu Manifoldların Slant İmmersiyonlarının Asli Karakterizasyonu

Lemma 3.4.2. *$\overline{M}$, bir Kenmotsu manifold olsun. M, $\overline{M}$ nin bir immersed altmanifoldu ve ξ, M ye teğet olsun. Bu durumda $\forall X,Y \in \chi(M)$ için*

$$R(X,Y)\xi = \eta\,(X)\,Y - \eta\,(Y)\,X \tag{3.4.30}$$

dir. Burada ∇, Levi-Civita konneksiyonu ve R, M üzerinde $\overline{M}$ tarafından indirgenen metrik bağlantılı eğrilik tensör alanıdır. Ayrıca

$$R(\xi,X)\xi = X - \eta\,(X)\,\xi \tag{3.4.31}$$

ve

$$R(X,\xi,\xi,X) = \eta\,(X)\,\eta\,(X) - g\,(X,X) \tag{3.4.32}$$

dir [31].

İspat: (3.4.7) den herhangi bir $X \in \chi\,(M)$ için

$$\nabla_X\xi = X - \eta\,(X)\,\xi$$

ve

$$(\nabla_X T)\,Y = -\nabla_X\nabla_Y\xi + \nabla_{\nabla_X Y}\xi + 2\eta\,(X)\,\eta\,(Y)\,\xi - g\,(X,Y)\,\xi - \eta\,(Y)\,X \tag{3.4.33}$$

eşitlikleri, $R(X,Y)\xi$ nin tanımında yerine yazlırsa (3.4.30) elde edilir. Bu eşitlikte $X=\xi$ ve $Y=X$ yazılır ve (3.4.33) uygulanırsa

$$R(\xi,X)\xi = X - \eta\,(X)\,\xi$$

olur. Buradan (3.4.32) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 3.4.13. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir immersed altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) *M, θ slant açısı ile $\overline{M}$ de slanttır,*

ii) *Herhangi $p \in M$ için, ξ_p i içeren T_pM nin herhangi iki boyutlu düzleminin kesitsel eğriliği -1' e eşittir* [31].

Lemma 3.4.3. *Bir hemen hemen değme metrik manifoldu $\overline{M}$ nin bir anti-invaryant olmayan slant altmanifoldu M olsun. Bu takdirde M, indirgenmiş metriğe göre ξ vektör alanı yapısı ve $\overline{\phi} = (\sec\theta)T$ ile verilen hemen hemen değme yapı ile bir hemen hemen değme metrik manifolddur. Burada θ, M nin slant açısıdır [32].*

İspat: $\forall X \in \chi(M)$ için (3.4.9) den

$$T^2X = \cos^2\theta(-X + \eta(X)\xi)$$

yazılabilir. Buradan

$$\frac{T^2X}{\cos^2\theta} = -X + \eta(X)\xi$$

bulunur. Ayrıca,

$$\overline{\phi} = (\sec\theta)T$$

eşitliğinden

$$\overline{\phi}^2X = -X + \eta(X)\xi \tag{3.4.34}$$

olur. Diğer taraftan (3.4.23) den herhangi X ve Y vektör alanları için

$$g(TX,TY) = -g\left(T^2X,Y\right)$$

yazılabilir. Burada (3.4.30) eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g(TX,TY) &= -g\left(-\cos^2\theta(X - \eta(X)\xi),Y\right) \\ &= \cos^2\theta g(X,Y) - \cos^2\theta\eta(X)g(\xi,Y) \\ &= \cos^2\theta(g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y)) \end{aligned}$$

bulunur. $\overline{\phi} = (\sec\theta)T$ olduğundan son eşitlik

$$g\left(\overline{\phi}X,\overline{\phi}Y\right) = g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{3.4.35}$$

şeklini alır. (3.4.30) ve (3.4.31) eşitliklerinden $\left(\overline{\phi},\xi,\eta,g\right)$, M üzerinde bir hemen hemen değme metrik yapıdır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Şimdi, M üzerine bir Kenmotsu yapı indirgemek için ∇T ye uygun bir koşul bulunmalıdır. Herhangi bir X,Y tanjant vektör alanları için

$$(\nabla_X T)Y = -\eta(Y)TX + g(Y,TX)\xi \tag{3.4.36}$$

dır. O halde $\overline{\phi}$ ile verilen hemen hemen değme metrik yapı (3.4.36) ten bir Kenmotsu yapıdır. Yani, herhangi bir $X,Y \in \chi(M)$ için

$$\left(\nabla_X \overline{\phi}\right)Y = -\eta(Y)\bar{\phi}X + g(Y,\phi X)\xi$$

olduğunu görmek kolaydır. (3.4.16) ve (3.4.17) den bir Kenmotsu manifoldun invaryant ve anti-invaryant altmanifoldları için

$$(\nabla_X T)Y = -\eta(Y)TX + g(Y,TX)\xi \tag{3.4.37}$$

$$(\nabla_X N)Y = -\eta(Y)NX$$

eşitlikleri elde edilir.

M, bir Kenmotsu manifoldun invaryant ve anti-invaryant altmanifoldları ise $\overline{M}$ nin yapısının (doğal olarak) M üzerinde bir Kenmotsu yapı oluşturduğunu göstermek kolaydır. İşte bu durumda altmanifold genellikle bir Kenmotsu manifold olarak adlandırılır.

Teorem 3.4.14. *Bir Kenmotsu manifoldun bir slant altmanifoldu da bir Kenmotsu manifolddur [31].*

Lemma 3.4.4. *Bir $\overline{M}$ hemen hemen değme metrik manifoldunun 3-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. ξ vektör alanı M ye teğet olmak üzere, M ye teğet e_1,e_2 vektör alanları için, $\{e_1,e_2,\xi\}$ ortonormal bazı*

$$Te_1 = \lambda e_2 \qquad , \qquad Te_2 = -\lambda e_1, \tag{3.4.38}$$

eşitliklerini sağlar. Burada λ, M üzerinde lokal olarak tanımlı bir fonksiyondur. Eğer M, θ slant açısı ile slant ise $\lambda = \cos\theta$ dır [27].

Teorem 3.4.15. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin, 3-boyutlu bir altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. Bu durumda M nin slant olması için gerek ve yeter şart her $X,Y \in \chi(M)$ için*

$$(\nabla_X T)Y = -\eta(Y)TX + g(Y,TX)\xi, \tag{3.4.39}$$

olmasıdır [12].

İspat: Lemma 3.4.4 den, Q$|_D$ yalnızca bir $-\lambda_1^2$ aygen değerine sahiptir. Ayrıca,

$$QX = -\lambda_1^2 \left(X - \eta\left(X\right)\xi\right),$$

eşitliği vardır. (3.4.9) ve (3.4.10) dan $\lambda = -\lambda_1^2$ ile Q (3.4.29) eşitliğini sağlar. Böylece T (3.4.39) u sağlarsa Lemma 4.1.1 den M slant olur.

Tersine M slant olsun. $p \in M$ ve Lemma 3.4.4 deki gibi p nin bir U komşuluğundaki ortonormal çatı$\{e_1, e_2, \xi\}$ olsun. w_i^j, M ye teğet her bir X vektör alanı için

$$\nabla_X e_i = \sum_{j=1} w_i^j\left(X\right) e_j,$$

ile tanımlı yapı 1-form olsun. Buna göre (3.4.1) ve (3.4.2) den

$$\left(\nabla_X T\right) e_3 = \nabla_X T e_3 - T\left(\nabla_X e_3\right) = -TX,$$

elde edilir. Benzer olarak,

$$\left(\nabla_X T\right) e_1 = \cos\theta w_2^3\left(X\right) e_3,$$

ve

$$\left(\nabla_X T\right) e_2 = -\cos\theta w_1^3\left(X\right) e_3,$$

dir. Diğer taraftan $\forall Y \in \chi\left(M\right)$ için,

$$Y = \eta\left(Y\right) e_3 + g\left(Y, e_1\right) e_1 + g\left(Y, e_2\right) e_2,$$

olarak gözönüne alırsak

$$\left(\nabla_X T\right) Y = -\eta\left(Y\right) TX + g\left(Y, TX\right)\xi,$$

elde edilir. Buradan (3.4.39) elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.4.8. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin, 3-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda M nin slant olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \chi\left(M\right)$ için*

$$A_{NY}X = A_{NX}Y, \tag{3.4.40}$$

olmasıdır [12].

Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir invaryant altmanifoldu M ise o zaman (3.4.39) elde edilir ve $\nabla N = 0$ sağlanır. Diğer taraftan M bir anti-invaryant altmanifold ise, $\nabla T = 0$ dır. Yani (3.4.39) bulunur. Ayrıca her $X, Y \in \chi\left(M\right)$ için

$$\left(\nabla_X N\right) Y = nh\left(X, Y\right) - \eta\left(Y\right) NX, \tag{3.4.41}$$

dir.

Teorem 3.4.16. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir anti-invaryant altmanifoldu M ve $\xi \in \chi(M)$ olsun. boy $M = 3$, boy $\overline{M}$=5 ve $TM = D \oplus Sp\{\xi\}$ ise o zaman $\forall X \in \chi(M)$ için*

$$\nabla_X N \mid_D = 0,$$

dır [12].

Şimdi, 5-boyutlu bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin, 3-boyutlu bir altmanifoldu M için ∇N nin değeri hesaplanacaktır:

M, θ slant açısı ile proper slant altmanifold olsun. O zaman M nin ξ ye dik bir birim teğet vektör alanı e_1 için

$$e_2 = (\sec\theta)\,Te_1, \qquad e_3 = \xi, \qquad e_4 = (\csc\theta)\,Ne_1,$$
$$e_5 = (\csc\theta)\,Ne_2,$$

yazılır.

O zaman, $e_1 = -(\sec\theta)\,Te_2$ olmak üzere (3.4.23) ve (3.4.24) den dolayı $\{e_1, e_2, e_3\}$ M ye teğet ve $\{e_4, e_5\}$ M ye normal olan bir ortonormal çatı $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ dir. Bu ortonormal çatıya **uyarlanmış slant çatı** denir.

Ayrıca,

$$te_4 = -\sin\theta e_1, \qquad te_5 = -\sin\theta e_5, \qquad ne_4 = -\cos\theta e_5, \qquad ne_5 = -\cos\theta e_4 \text{ dir.}$$

Eğer $h^r_{ij} = g(h(e_i, e_j), e_r)$, $i, j = 1, 2, 3$, $r = 4, 5$ yazılırsa, o zaman aşağıdaki lemma ifade edilir.

Lemma 3.4.5. *Yukarıdaki koşullar altında,*

$$h^4_{12} = h^5_{11}, \qquad h^4_{22} = h^5_{12}, \tag{3.4.42}$$
$$h^4_{13} = h^4_{32} = h^4_{33} = h^5_{13} = h^5_{23} = h^5_{33} = 0,$$

dir [12].

Örnek 3.4.1. $\mathbb{R}^{2n+1}$ *deki Kenmotsu yapıyı aşağıdaki şekilde tanımlayalım.* $\mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ *üzerindeki kartezyen koordinatlar* $\left(x^i, y^i, t\right)$ *olmak üzere,*

$$\eta = dt, \quad \xi = \frac{\partial}{\partial t},$$

$$g = \eta \otimes \eta + e^{2t}\left(\sum_{i=1}^{n} dx^i \otimes dx^i + dy^i \otimes dy^i\right),$$

$$\phi_0\left(\sum_{i=1}^{n}\left(X_i \frac{\partial}{\partial x^i} + Y_i \frac{\partial}{\partial y^i}\right) + Z\frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(-Y_i \frac{\partial}{\partial x^i} + X_i \frac{\partial}{\partial y^i}\right), \tag{3.4.43}$$

olsun.

$\mathbb{R}^{2n+1}$ *in 3-boyutlu bir M altmanifoldunu k pozitif bir sabit olmak üzere*

$$x(u,v,t) = 2(u, k\cos v, v, k\sin v, t),$$

ile tanımlayalım. Bu durumda $\{e_1, e_2, \xi\}$ *ortonormal bazı için,*

$e_1 = 2(1,0,0,0,0)$

$e_2 = 2(0, -k\sin v, 1, k\cos v, 0)$

$\xi = 2(0,0,0,0,1)$

(3.4.43) den

$\phi e_1 = 2(0,0,1,0,0),$

$\phi e_2 = 2(-1, -k\cos v, 0, -k\sin v, 0),$

$\phi e_3 = 0$

olarak hesaplanır. Burada $\phi\xi = 0$ *olduğundan dolayı bileşeni yoktur. Böylece*

$$\frac{g(\phi e_1, e_2)}{\|\phi e_1\|\,\|e_2\|} = \frac{4}{4\sqrt{1+k^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}} = \cos\theta,$$

dır. Benzer şekilde

$$\frac{g(\phi e_2, e_1)}{\|\phi e_2\|\,\|e_1\|} = -\frac{4}{4\sqrt{1+k^2}} = -\frac{1}{\sqrt{1+k^2}} = -\cos\theta,$$

dir. Bu durumda

$$\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{1+k^2}}$$

dir. Buradan da

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{\sqrt{1+k^2}}\right)$$

olarak hesaplanır. Böylece M slant açısı θ *olan bir slant altmanifolddur*

3.4.4 Kenmotsu Manifoldların Semi-slant Altmanifoldları

Tanım 3.4.5. *Bir hemen hemen değme metrik manifold $\overline{M}$ nin bir altmanifoldu M olsun.*

1. $TM = D_1 \bigoplus D_2 \bigoplus Sp\{\xi\}$,

2. *D_1 distribüsyonu ϕ altında invaryanttır yani $\phi(D_1) = D_1$ dir,*

3. *D_2 distribüsyonu $\theta \neq 0$ açısı ile slant distribüsyondur*

özellikleri sağlanacak şekilde, M üzerinde D_1 ve D_2 gibi iki ortogonal tümler distribüsyon varsa, M ye $\overline{M}$ nin bir ***semi-slant altmanifoldu*** *denir. Bu durumda, θ açısına M altmanifoldunun slant açısı denir.*

Bir semi-slant altmanifold için;

- invaryant distribüsyon sıfır açısıyla bir slant distribüsyondur,

- $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise semi-slant altmanifold **semi-invaryant altmanifold** olarak adlandırılır.

boy$D_i = d_i$, $i = 1,2$ olsun. Bu durumda,

i) $d_2 = 0$ ise M bir invaryant altmanifolddur,

ii) $d_1 = 0$ ve $\theta = \frac{\pi}{2}$ ise M bir anti-invaryant altmanifolddur,

iii) $d_1 = 0$ ve $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ise M, θ slant açısı ile bir proper slant altmanifolddur.

Eğer, $d_1 d_2 \neq 0$ ve $\theta \neq \frac{\pi}{2}$ ise M ye bir **proper semi-slant altmanifold** denir.

(3.4.6) ve (3.4.7) den $\forall X \in \chi(M)$ için $\phi X = TX + NX$ ve $\forall V \in \chi^{\perp} M$ için, $\phi V = tV + nV$ olduğu bilinmektedir. M nin tanjant demeti $TM = D_1 \bigoplus D_2 \bigoplus Sp\{\xi\}$ dir. D_2 slant distribüsyonunun, $T^{\perp}M$ normal demeti içinde ND_2 distribüsyonu mevcuttur. Bu distribüsyonun ortogonal tümleyeni, $T^{\perp}M$ nin bir invaryant altdemeti olup, μ ile gösterilecektir. Bu durumda

$$T^{\perp}M = ND_2 \bigoplus \mu$$

olarak yazılır. M bir semi-slant altmanifold olsun. O zaman herhangi bir X vektör alanı

$$X = P_1 X + P_2 X + \eta(X)\xi, \tag{3.4.44}$$

şeklinde yazılır. Burada P_1 ve P_2 sırasıyla, D_1 ve D_2 distribüsyonları üzerindeki izdüşüm fonksiyonlarıdır. Bu durumda, $P_1X \in \Gamma(D_1)$ ve $P_2X \in \Gamma(D_2)$ dir. (3.4.44)
eşitliğinin her iki tarafına ϕ dönüşümünün uygulanmasıyla

$$\phi X = \phi P_1X + TP_2X + NP_2X,$$

elde edilir. Burada

$$\phi P_1X = TP_1X \quad , \quad NP_1X = 0 \quad , \quad TP_2X \in \chi(D_2),$$

olduğu görülür. Böylece

$$TX = \phi P_1X + TP_2X,$$

ve

$$NX = NP_2X,$$

olur [15].

Sonuç 3.4.9. *Bir hemen hemen değme metrik manifold $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu M olsun. Herhangi $X,Y \in \chi(M)$ için*

$$g(TX,TP_2Y) = \cos^2\theta g(X,P_2Y),$$
$$g(NX,NP_2Y) = \sin^2\theta g(X,P_2Y),$$

dir [14].

Sonuç 3.4.10. *Bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldu üzerinde tanımlı Levi-Civita koneksiyonu $\bar{\nabla}$, D_1 ve D_2 M üzerinde iki ortogonal tümler distribüsyon olsun. Bu durumda $\forall Y \in \Gamma(D_1 \oplus D_2)$ için*

$$\bar{\nabla}_\xi \phi Y = \phi \bar{\nabla}_\xi Y, \tag{3.4.45}$$

dir [15].

İspat: $\forall Y \in \Gamma(D_1 \oplus D_2)$ için (3.4.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_\xi \phi Y &= \left(\bar{\nabla}_\xi \phi\right) Y + \phi \bar{\nabla}_\xi Y,\\ &= g(\phi\xi, Y)\xi - \eta(Y)\phi\xi + \phi\bar{\nabla}_\xi Y,\end{aligned}$$

bulunur. $Y \in \Gamma(D_1 \oplus D_2)$ olduğundan $\eta(Y) = 0$ dır. Buradan

$$\bar{\nabla}_\xi \phi Y = \phi \bar{\nabla}_\xi Y,$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Sonuç 3.4.11. *Bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifoldu M olsun. M üzerine idirgenmiş koneksiyon ∇ olsun. Her $Y \in \Gamma(D_1)$ için*

$$\nabla_\xi \phi Y = \phi \nabla_\xi Y, \tag{3.4.46}$$

dir [15].

İspat: $Y \in \Gamma(D_1)$ için (2.2.1) eşitliği kullanılırsa

$$\bar{\nabla}_\xi \phi Y = \nabla_\xi \phi Y + h(\xi, \phi Y),$$

olur. $Y \in \Gamma(D_1)$ ve $\phi D_1 = D_1$ olduğundan bu eşitlik

$$\bar{\nabla}_\xi \phi Y = \nabla_\xi \phi Y + h(\xi, Y),$$

dir. Buradan (3.4.14) dan

$$\bar{\nabla}_\xi \phi Y = \nabla_\xi \phi Y, \tag{3.4.47}$$

dir. Diğer taraftan (2.2.1) dan

$$\bar{\nabla}_\xi Y = \nabla_\xi Y + h(\xi, Y),$$

dir. (3.4.14) dan

$$\bar{\nabla}_\xi Y = \nabla_\xi Y, \tag{3.4.48}$$

dir. (3.4.47) ve (3.4.48) eşitlikleri (3.4.45) de yerine yazlırsa

$$\nabla_\xi \phi Y = \phi \nabla_\xi Y$$

dir. Bu eşitlik $Y \in \Gamma(D_1)$ için $\nabla_\xi Y \in \Gamma(D_1)$ anlamına gelir. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.4.1. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir semi- slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\forall X \in \Gamma(D_1)$ ve $Z \in \Gamma(D_2)$ için*

$$[X, \xi] \in \Gamma(D_1) \ \ ve \ \ [Z, \xi] \in \Gamma(D_2), \tag{3.4.49}$$

dir [15].

Önerme 3.4.2. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu üzerindeki $D_1 \oplus D_2$ distribüsyonu integrallenebilirdir [15].*

Önerme 3.4.3. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir semi-slant altmanifoldu M olsun.Bu durumda D_1 invaryant distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(D_1)$ için*

$$h(X, \phi Y) = h(\phi X, Y),$$

olmasıdır [15].

Önerme 3.4.4. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir semi- slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $D_1 \oplus Sp\{\xi\}$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall X,Y \in \Gamma(D_1)$ için*

$$h(X,\phi Y) = h(\phi X,Y),$$

olmasıdır [15].

Önerme 3.4.5. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir semi- slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda D_2 distribüsyonu integrallenebilirdir gerek ve yeter şart $\forall\ Z,W \in \Gamma(D_2)$ için*

$$\nabla_Z TW - \nabla_W TZ + A_{NZ}W - A_{NW}Z,$$

olmasıdır [15].

Sonuç 3.4.12. *Bir Kenmotsu manifold $\overline{M}$ nin bir semi- slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $D_2 \oplus Sp\{\xi\}$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall Z,W \in \Gamma(D_2)$ için*

$$P_1(\nabla_Z TW - \nabla_W TZ + A_{NZ}W - A_{NW}Z) = 0,$$

olmasıdır [15].

T tensörünün Nijenhuis tensör alanı S olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ için

$$S(X,Y) = [TX,TY] + T^2[X,Y] - T[TX,Y] - T[X,TY],$$

ile verilir. Eğer $X \in \Gamma(D_1)$ ve $Z \in \Gamma(D_1)$ ise yukarıdaki eşitlik

$$S(X,Z) = (\nabla_{TX}T)Z - (\nabla_{TZ}T)X - T(\nabla_Z T)X - T(\nabla_X T)Z,$$

olur. (3.4.16) uygulanırsa

$$S(X,Z) = A_{NZ}TX + th(TX,Z) - th(TZ,X) + th(X,X) - T(A_{NZ}X + th(X,Z)),$$

veya denk olarak

$$S(X,Z) = A_{NZ}TX + th(TX,Z) - th(TZ,X) - TA_{NZ}X,$$

elde edilir [15].

4. SCHOUTEN-VAN KAMPEN KONNEKSİVONLU KENMOTSU MANİFOLDLARIN SEMİ-SLANT ALTMANİFOLDLARI

Bu bölümde Schouten-van Kampen konneksiyonu ve bu konneksiyon ile donatılmış Kenmotsu manifoldların altmanifoldlarına, slant ve semi-slant altmanifoldlarına yer verilecektir.

4.1 Schouten-van Kampen Konneksiyonu

M keyfi bir $(p,n-p)$, $0 \leq p \leq n$, $n = boy\ M \geq 2$ noktası üzerinde bağlantılı bir pseudo-Riemann manifold olsun. M üzerinde pseudo-Riemann metrik g, $\mathscr{H}$ ve $\mathscr{V}$ ise M üzerinde $boy\ \mathscr{H} = n-1$, $boy\ \mathscr{V} = 1$ olmak üzere iki ortogonal ve tümleyen distribüsyon ve $\mathscr{V}$ distribüsyonu da non-null olsun. Böylece $TM = \mathscr{H} \oplus \mathscr{V}$, $\mathscr{H} \cap \mathscr{V} = \{0\}$ ve $\mathscr{H} \perp \mathscr{V}$ dir. ξ bir birim vektör alanı ve η bir lineer form olmak üzere

$$\begin{aligned} \eta(\xi) = 1 \quad &, \quad g(\xi,\xi) = \pm 1, \\ \mathscr{H} = \ker \eta \quad &, \quad \mathscr{V} = span\{\xi\}, \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

olsun. Bu durumda

$$\eta(X) = \varepsilon g(X,\xi),$$

dir. Ayrıca $\nabla_X \xi \in \mathscr{H}$ dir.

$\forall X \in TM$ için X in $\mathscr{H}$ ve $\mathscr{V}$ distribüsyonları üzerine projeksiyonları sırası ile X^h ve X^v olsun. Böylece $X = X^h + X^v$ dir. Burada

$$X^h = X - \eta(X)\xi, \qquad X^v = \eta(X)\xi, \tag{4.1.2}$$

dir. Schouten-van Kampen konneksiyon $\tilde{\nabla}$, Levi-Civita konneksiyon ile bağlantılıdır, $(\mathscr{H},\mathscr{V})$ distribüsyonuna uyarlıdır ve

$$\tilde{\nabla}_X Y = \left(\nabla_X Y^h\right)^h + \left(\nabla_X Y^v\right)^v, \tag{4.1.3}$$

dir [33]

$B = \nabla - \tilde{\nabla}$ ifadesi ikinci temel form olarak adlandırılır. (4.1.2) yi kullanarak

$$\begin{aligned} \left(\nabla_X Y^h\right)^h &= \nabla_X Y - \eta(\nabla_X Y)\xi - \eta(Y)\nabla_X \xi, \\ \left(\nabla_X Y^v\right)^v &= \left((\nabla_X \eta)(Y) + \eta(\nabla_X Y)\right)\xi, \end{aligned}$$

yazılabilir [34]. Böylece Levi-Civita konneksiyonu kullanarak Schouten-van Kampen konneksiyonu

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y - \eta(Y)\nabla_X \xi + (\nabla_X \eta)(Y)\xi, \tag{4.1.4}$$

şeklinde tanımlanabilir. Diğer taraftan B ikinci temel formu ve $\tilde{T}$ torsiyonu

$$B(X,Y) = \eta(Y)\nabla_X \xi - (\nabla_X \eta)(Y)\xi, \tag{4.1.5}$$

$$\tilde{T}(X,Y) = \eta(X)\nabla_Y \xi - \eta(Y)\nabla_X \xi + 2d\eta(X,Y)\xi, \tag{4.1.6}$$

dir [34, 35].

L bir lineer operatör olmak üzere

$$LX = -\nabla_X \xi,$$

ile tanımlanır. Böylece L nin antisimetrik bir operatör olması için gerek ve yeter şartın ξ nin bir Killing vektör alanı olması gerektiği görülür. (4.1.5) den L lineer operatörü yardımı ile B ikinci temel formu

$$B(X,Y) = -\eta(Y)LX + \varepsilon g(LX,Y)\xi,$$

şeklinde ifade edilebilir. Ayrıca (4.1.5) ve (4.1.6) dan $\mathscr{A}$ bir antisimetrik operatör olmak üzere

$$\tilde{T} = -2\mathscr{A}(B),$$

dir. (4.1.4) ile tanımlanan $\tilde{\nabla}$ Schouten-van Kampen konneksiyonu sırası ile g, ξ ve η ya göre paraleldir, yani $\tilde{\nabla}\xi = 0, \tilde{\nabla}g = 0, \tilde{\nabla}\eta = 0$ dir [34, 36].

4.2 Schouten-van Kampen Konneksiyonlu Kenmotsu Manifoldların Altmanifoldları

Önerme 4.2.1. *$(\overline{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir Kenmotsu manifold olsun. $\overline{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyon $\overline{\nabla}$ olmak üzere $\forall\, X, Y \in \chi(\overline{M})$ için*

$$\bar{\tilde{\tilde{\nabla}}}_X Y = \bar{\nabla}_X Y + g(X,Y)\xi - \eta(Y)X, \tag{4.2.1}$$

biçiminde tanımlı $\bar{\tilde{\tilde{\nabla}}}$, $\overline{M}$ üzerinde bir lineer konneksiyondur.

Önerme 4.2.2. *$(\overline{M}, \phi, \xi, \eta, g)$ bir Kenmotsu manifold ve $\overline{\nabla}$, $\overline{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyon olsun. $\forall\, X, Y \in \chi(\overline{M})$ için*

$$\bar{\tilde{\tilde{\nabla}}}_X Y = \bar{\nabla}_X Y + g(X,Y)\xi - \eta(Y)X,$$

biçiminde tanımlı $\bar{\tilde{\tilde{\nabla}}}$ Schouten-van Kampen konneksiyonu $\overline{M}$ üzerinde bir semi-simetrik metrik konneksiyondur.

İspat: $\overline{\nabla}$, Levi-Civita konneksiyonu olduğundan metrik bir konneksiyondur ve bu durumda $\overline{\nabla}g = 0$ dır.

$$(\overline{\nabla}_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(\overline{\nabla}_X Y,Z) - g(Y,\overline{\nabla}_X Z) = 0$$

olduğundan

$$Xg(Y,Z) = g(\overline{\nabla}_X Y,Z) + g(Y,\overline{\nabla}_X Z)$$

dır. (4.2.1) den

$$\begin{aligned} Xg(Y,Z) &= g(\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X Y - g(X,Y)\xi + \eta(Y)X,Z) + g(Y,\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X Z \\ &\quad - g(X,Z)\xi + \eta(Z)X) \\ &= g(\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X Y,Z) - g(X,Y)g(\xi,Z) + \eta(Y)g(X,Z) + g(Y,\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X Z) \\ &\quad - g(X,Z)g(Y,\xi) + \eta(Z)g(Y,X) \end{aligned}$$

olduğundan

$$Xg(Y,Z) - g(\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X Y,Z) - g(Y,\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X Z) = 0$$

dır. Dolayısıyla $(\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X g)(Y,Z) = 0$ elde edilir. O halde $\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}$ metrik konneksiyondur.

Ayrıca $\overline{\nabla}$, Levi-Civita konneksiyonu olduğundan simetrik bir konneksiyondur ve $\overline{T}(X,Y) = 0$ dır. Torsiyon tensörünün tanımından

$$\overline{T}(X,Y) = \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X - [X,Y] = 0$$

olduğunu biliyoruz. Bu eşitlikte (4.2.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \overline{T}(X,Y) &= \overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X - [X,Y] \\ 0 &= \overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X Y - g(X,Y)\xi + \eta(Y)X - \overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_Y X + g(Y,X)\xi \\ &\quad - \eta(X)Y - [X,Y] \\ 0 &= \overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X Y - \overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_Y X - [X,Y] + \eta(Y)X - \eta(X)Y \end{aligned}$$

olduğundan

$$\overline{\overline{\widetilde{T}}} = \eta(X)Y - \eta(Y)X$$

bulunur. O halde $\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}$, semi-simetrik metrik bir konneksiyondur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.2.3. *$(\overline{M},\phi,\xi,\eta,g)$ bir Kenmotsu manifold ve $\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}$, $\overline{M}$ üzerinde Schouten-van Kampen konneksiyon olsun. Bu durumda $\forall\, X,Y \in \chi(\overline{M})$ için*

$$(\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X \phi)Y = 0, \tag{4.2.2}$$

dir.

İspat: (3.4.1) ve (4.2.1) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
(\overline{\nabla}_X\phi)Y &= \overline{\nabla}_X\phi Y-\phi\overline{\nabla}_X Y\\
&= \widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X\phi Y-g(X,\phi Y)\xi+\eta(\phi Y)X-\phi(\widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X Y\\
&\quad -g(X,Y)\xi+\eta(Y)X)\\
&= \widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X\phi Y-\widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}\phi_X Y-g(X,\phi Y)\xi\\
&\quad +g(X,Y)\phi\xi-\eta(Y)\phi X\\
g(\phi X,Y)\xi-\eta(Y)\phi X &= (\widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X\phi)Y-g(X,\phi Y)\xi-\eta(Y)\phi X\\
(\widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X\phi)Y &= 0
\end{aligned}
$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 4.2.4. *$(\overline{M},\phi,\xi,\eta,g)$ bir Kenmotsu manifold ve $\widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}$, $\overline{M}$ üzerinde tanımlı Schouten-van Kampen konneksiyon olsun. Bu durumda $\forall\ X\in\chi(\overline{M})$ için*

$$
\widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X\xi=0,
$$

dır.

İspat: (4.2.1) de $Y=\xi$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X\xi &= \bar{\nabla}_X\xi+g(X,\xi)\xi-\eta(\xi)X\\
&= X-\eta(X)\xi+\eta(X)\xi-X\\
&= 0
\end{aligned}
$$

dır. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.2.5. *$(\overline{M},\phi,\xi,\eta,g)$ bir Kenmotsu manifold ve $\widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}$, $\overline{M}$ üzerinde tanımlı Schouten-van Kampen konneksiyon olsun. Bu durumda $\forall\ X\in\chi(\overline{M})$ için*

$$
(\widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X\eta)(Y)=0,
$$

dır.

İspat: (4.2.1) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X\eta)(Y) &= \widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X\eta(Y)-\eta(\widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X Y)\\
&= \widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X g(Y,\xi)-g(\widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X Y,\xi)\\
&= (\widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X g)(Y,\xi)+g(\widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X Y,\xi)+g(Y,\widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X\xi)-g(\widetilde{\overline{\overline{\nabla}}}_X Y,\xi)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 4.2.6. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun altmanifoldu M olsun. M üzerinde tanımlı ∇ Levi-Civita konneksiyona göre eğrilik tensörü R ve $\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}$ Schouten-van Kampen konneksiyona göre eğrilik tensörü $\overline{\overline{\widetilde{R}}}$ olmak üzere R ile $\overline{\overline{\widetilde{R}}}$ arasında*

$$\left(\overline{\overline{\widetilde{R}}}(X,Y)Z\right)^{T} = R(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y - g(X,Z)Y + g(Y,Z)X, \tag{4.2.3}$$

ve

$$\left(\overline{\overline{\widetilde{R}}}(X,Y)Z\right)^{\perp} = (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z), \tag{4.2.4}$$

dır.

İspat: (2.1.6) ve (4.2.1) eşitliklerini kullanarak

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\widetilde{R}}}(X,Y)Z &= \overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_Y Z - \overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_Y\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X Z - \overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_{[X,Y]}Z \\
&= \overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X(\bar{\nabla}_Y Z + g(Y,Z)\xi - \eta(Z)Y) - \overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_Y\left(\bar{\nabla}_X Z + g(X,Z)\xi - \eta(Z)X\right) \\
&- \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z - g([X,Y],Z)\xi + \eta(Z)[X,Y] \\
&= \overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X\bar{\nabla}_Y Z + \overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X g(Y,Z)\xi - \overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X\eta(Z)Y - \overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_Y\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X Z - \overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_Y g(X,Z)\xi \\
&+ \bar{\nabla}_Y\eta(Z)X - \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z - g\left(\bar{\nabla}_X Y,Z\right)\xi + g\left(\bar{\nabla}_Y X,Z\right)\xi + \eta(Z)(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X) \\
&= \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z + g\left(X,\bar{\nabla}_Y Z\right)\xi - \eta\left(\bar{\nabla}_Y Z\right)X + g(\bar{\nabla}_X Y,Z)\xi + g(Y,\bar{\nabla}_X Z)\xi \\
&- \eta\left(\bar{\nabla}_X Z\right)Y - g(X,Z)Y + \eta(Z)\eta(X)Y - \eta(Z)\bar{\nabla}_X Y - \eta(Z)g(X,Y)\xi \\
&+ \eta(Z)\eta(Y)X - \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X Z - g\left(Y,\bar{\nabla}_X Z\right)\xi + \eta\left(\bar{\nabla}_X Z\right)Y - g(\bar{\nabla}_Y X,Z)\xi \\
&- g(X,\bar{\nabla}_Y Z)\xi + \eta\left(\bar{\nabla}_Y Z\right)X + g(Y,Z)X - \eta(Z)\eta(Y)X + \eta(Z)\bar{\nabla}_Y X \\
&+ \eta(Z)g(X,Y)\xi - \eta(Z)\eta(X)Y - \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z - g\left(\bar{\nabla}_X Y,Z\right)\xi \\
&+ g\left(\bar{\nabla}_Y X,Z\right)\xi + \eta(Z)(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X)
\end{aligned}$$

dir. Ayrıca (2.2.1), (2.2.5) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\overline{\overline{\widetilde{R}}}(X,Y)Z &= \bar{\nabla}_X\bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y\bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z - g(X,Z)Y + g(Y,Z)X \\
&= \bar{\nabla}_X(\nabla_Y Z + h(Y,Z)) - \bar{\nabla}_Y(\nabla_X Z + h(X,Z)) - \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z \\
&- h([X,Y],Z) - g(X,Z)Y + g(Y,Z)X \\
&= \bar{\nabla}_X\nabla_Y Z + \bar{\nabla}_X h(Y,Z) - \bar{\nabla}_Y\nabla_X Z - \bar{\nabla}_Y h(X,Z) - \bar{\nabla}_{[X,Y]}Z \\
&- h([X,Y],Z) - g(X,Z)Y + g(Y,Z)X
\end{aligned}$$

$$\widetilde{\overline{R}}(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z + h(X,\nabla_Y Z) + \left(-A_{h(Y,Z)}X + aX\right) + \nabla_X^{\perp} h(Y,Z) - \nabla_Y \nabla_X Z$$
$$- h(Y,\nabla_X Z) - \left(-A_{h(X,Z)}Y + aY\right) - \nabla_Y^{\perp} h(X,Z) - \nabla_{[X,Y]}Z$$
$$- h([X,Y],Z) - g(X,Z)Y + g(Y,Z)X$$
$$= R(X,Y)Z + (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z)$$
$$- A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y - g(X,Z)Y + g(Y,Z)X$$

olarak bulunur. Teğet ve normal kısımlar eşitlenirse

$$\left(\widetilde{\overline{R}}(X,Y)Z\right)^T = R(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y - g(X,Z)Y + g(Y,Z)X$$

ve

$$\left(\widetilde{\overline{R}}(X,Y)Z\right)^{\perp} = (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z)$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.2.7. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun altmanifoldu M olsun. M üzerinde tanımlı ∇ Levi-Civita konneksiyona göre eğrilik tensörü R ve $\widetilde{\overline{\nabla}}$ Schouten-van Kampen konneksiyona göre eğrilik tensörü $\widetilde{\overline{R}}$ olmak üzere $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için*

i) $\widetilde{\overline{R}}(X,Y)Z = -\widetilde{\overline{R}}(Y,X)Z,$

ii) $\widetilde{\overline{R}}(X,Y)Z + \widetilde{\overline{R}}(Y,Z)X + \widetilde{\overline{R}}(Z,X)Y = 0$

dır.

İspat: i) (4.2.3) den

$$\widetilde{\overline{R}}(X,Y)Z = R(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y - g(X,Z)Y + g(Y,Z)X$$
$$= -R(Y,X)Z - A_{h(X,Z)}Y + A_{h(Y,Z)}X - g(Y,Z)X + g(X,Z)Y$$
$$= -\left(R(Y,X)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X + g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\right)$$
$$= -\widetilde{\overline{R}}(Y,X)Z$$

dır.

ii) Benzer şekilde (4.2.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\tilde{\overline{R}}(X,Y)Z+\tilde{\overline{R}}(Y,Z)X+\tilde{\overline{R}}(Z,X)Y &= R(X,Y)Z-A_{h(Y,Z)}X \\ &+A_{h(X,Z)}Y-g(X,Z)Y+g(Y,Z)X+R(Y,Z)X \\ &-A_{h(Z,X)}Y+A_{h(Y,X)}Z-g(Y,X)Z+g(Z,X)Y \\ &+R(Z,X)Y-A_{h(X,Y)}Z+A_{h(Z,Y)}X \\ &-g(Z,Y)X+g(X,Y)Z \\ &=0\end{aligned}$$

dır. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 4.2.8. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun altmanifoldu M olsun. M üzerinde tanımlı ∇ Levi-Civita konneksiyona göre eğrilik tensörü R ve $\tilde{\overline{\nabla}}$ Schouten-van Kampen konneksiyona göre eğrilik tensörü $\tilde{\overline{R}}$ olmak üzere $\forall X,Y\in\chi(M)$ için*

i) $\tilde{\overline{R}}(X,\xi)Y=0,$

ii) $\tilde{\overline{R}}(X,Y)\xi=0,$

iii) $\tilde{\overline{R}}(\xi,X)\xi=0$

dır.

İspat: (4.2.3) denkleminde sırası ile $Y=\xi$ ve $Z=Y$ olarak alındığında

$$\begin{aligned}\tilde{\overline{R}}(X,\xi)Y &= R(X,\xi)Y-A_{h(\xi,Y)}X+A_{h(X,Y)}\xi-g(X,Y)\xi+g(\xi,Y)X \\ &= g(X,Y)\xi-\eta(Y)X-g(X,Y)\xi+g(\xi,Y)X \\ &=0\end{aligned}$$

dır. Böylece i) denklemi elde edilir.

Benzer şekilde (4.2.3) denkleminde $Z=\xi$ için

$$\begin{aligned}\tilde{\overline{R}}(X,Y)\xi &= R(X,Y)\xi-A_{h(Y,\xi)}X+A_{h(X,\xi)}Y-g(X,\xi)Y+g(Y,\xi)X \\ &= \eta(X)Y-\eta(Y)X-\eta(X)Y+\eta(Y)X \\ &=0\end{aligned}$$

dır. Böylece ii) denklemi elde edilir.

Son olarak (4.2.3) denkleminde sırası ile $X = Z = \xi$ ve $Y = X$ olarak alınırsa

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\overline{R}}(\xi,X)\xi &= R(\xi,Z)\xi - A_{h(X,\xi)}\xi + A_{h(\xi,X)}\xi - g(\xi,\xi)X + g(X,\xi)\xi \\
&= X - \eta(X)\xi - X + \eta(X)\xi \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

Bu ise iii) denklemini verir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.2.9. *Bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldu üzerinde $\tilde{\nabla}$ Schouten-van Kampen konneksiyonuna göre $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için*

i) $\widetilde{\overline{R}}(X,Y,Z,W) + \widetilde{\overline{R}}(X,Y,W,Z) = 0,$

ii) $\widetilde{\overline{R}}(X,Y,Z,W) + \widetilde{\overline{R}}(Y,X,Z,W) = 0$

dır.

İspat: (4.2.3) denkleminin her iki yanının $W \in \chi(M)$ ile iç çarpımı alındığında

$$
\begin{aligned}
g\left(\widetilde{\overline{R}}(X,Y)Z,W\right) &= g(R(X,Y)Z,W) - g(A_{h(Y,Z)}X,W) + g(A_{h(X,Z)}Y,W) \\
&\quad - g(X,Z)g(Y,W) + g(Y,Z)g(X,W) \\
&= g(R(X,Y)Z,W) - g(h(Y,Z),h(X,W)) \\
&\quad + g(h(X,Z),h(Y,W)) - g(X,Z)g(Y,W) + g(Y,Z)g(X,W) \qquad (4.2.5)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu denklemde W ile Z vektör alanlarının yerleri değiştirildiğinde

$$
\begin{aligned}
g\left(\widetilde{\overline{R}}(X,Y)W,Z\right) &= g(R(X,Y)W,Z) - g(A_{h(Y,W)}X,Z) + g(A_{h(X,W)}Y,Z) \\
&\quad - g(X,W)g(Y,Z) + g(Y,W)g(X,Z) \\
&= g(R(X,Y)W,Z) - g(h(Y,W),h(X,Z)) \\
&\quad + g(h(X,W),h(Y,Z)) - g(X,W)g(Y,Z) + g(Y,W)g(X,Z) \qquad (4.2.6)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.2.5) ve (4.2.6) eşitlikleri taraf tarafa toplandığında

$$\widetilde{\overline{R}}(X,Y,Z,W) + \widetilde{\overline{R}}(X,Y,W,Z) = R(X,Y,Z,W) + R(X,Y,W,Z)$$

bulunur. Buradan da ∇ Levi-civita koneksiyonuna göre R eğrilik tensörünün özellikleri kullanıldığında

$$\widetilde{\overline{R}}(X,Y,Z,W) + \widetilde{\overline{R}}(X,Y,W,Z) = 0$$

sonucuna ulaşılır. Benzer şekilde Y ile X vektör alanlarının yerleri değiştirildiğinde

$$\begin{aligned} g\left(\tilde{\tilde{R}}(Y,X)Z,W\right) &= g(R(Y,X)Z,W) - g(h(X,Z),h(Y,W)) \\ &+ g(h(Y,Z),h(X,W)) - g(Y,Z)g(X,W) \\ &+ g(X,Z)g(Y,W) \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

dir. (4.2.5) ve (4.2.7) eşitlikleri taraf tarafa toplandığında

$$\tilde{\tilde{R}}(X,Y,Z,W) + \tilde{\tilde{R}}(Y,X,Z,W) = R(X,Y,Z,W) + R(Y,X,Z,W)$$

bulunur. Buradan da ∇ Levi-civita koneksiyonuna göre R eğrilik tensörünün özellikleri kullanıldığında

$$\tilde{\tilde{R}}(X,Y,Z,W) + \tilde{\tilde{R}}(Y,X,Z,W) = 0$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.2.10. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun altmanifoldu M olsun. M üzerinde tanımlı ∇ Levi-Civita koneksiyona göre Ricci tensörü S ve skaler eğriliği τ, $\tilde{\tilde{\nabla}}$ Schouten-van Kampen konneksiyona göre Ricci tensörü $\tilde{\tilde{S}}$ ve skaler eğriliği $\tilde{\tilde{\tau}}$ olmak üzere $\forall Y,Z \in \chi(M)$ için*

$$\tilde{\tilde{S}}(Y,Z) = S(Y,Z) + (n-1)g(Y,Z),$$

ve

$$\tilde{\tilde{\tau}} = \tau + n(n-1),$$

dir.

İspat: (4.2.5) denkleminde $X = W = e_i$ alınırsa

$$\begin{aligned} g\left(\tilde{\tilde{R}}(e_i,Y)Z,e_i\right) &= g(R(e_i,Y)Z,e_i) - g(h(e_i,e_i),h(Y,Z)) \\ &+ g(h(e_i,Y),h(e_i,Z)) - g(g(e_i,Z)Y,e_i) + g(g(Y,Z)e_i,e_i) \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \tilde{\tilde{S}}(Y,Z) &= S(Y,Z) - g(h(e_i,e_i),h(Y,Z)) \\ &+ g(h(e_i,Y),h(e_i,Z)) - g(e_i,Z)g(Y,e_i) + g(Y,Z)g(e_i,e_i) \\ &= S(Y,Z) + (n-1)g(Y,Z) \end{aligned}$$

dir. (2.1.8) ve (2.1.10) eşitlikleri kullanılırsa

$$\tilde{\tilde{\tau}} = \sum_{i=1}^{n} \tilde{\tilde{S}}(e_i, e_i)$$
$$\tilde{\tilde{\tau}} = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i) + (n-1)\, g(e_i, e_i)$$
$$\tilde{\tilde{\tau}} = \tau + n\,(n-1)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.2.11. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun altmanifoldu M olsun. M üzerinde tanımlı ∇ Levi-Civita konneksiyona göre Ricci operatörü Q, $\tilde{\tilde{\nabla}}$ Schouten-van Kampen konneksiyona göre Ricci operatörü $\tilde{\tilde{S}}$ olmak üzere $\forall X, Z \in \chi(M)$ için*

$$\tilde{\tilde{Q}}X = QX + (n-1)\, X,$$

dir.

Önerme 4.2.12. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifoldu M olsun. M üzerinde tanımlı ∇ Levi-Civita konneksiyona göre Weyl Konformal eğrilik tensörü C, $\tilde{\tilde{\nabla}}$ Schouten-van Kampen konneksiyona göre Weyl Konformal eğrilik tensörü $\tilde{\tilde{C}}$ olmak üzere $\forall X, Z \in \chi(M)$ için*

$$\tilde{\tilde{C}}(X,Y)Z = C(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y,$$

dir.

İspat: (2.1.13) ve (4.2.3) den

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{C}}(X,Y)Z &= \tilde{\tilde{R}}(X,Y)Z - \frac{1}{n-2}\left[\tilde{\tilde{S}}(Y,Z)X - \tilde{\tilde{S}}(X,Z)Y + g(Y,Z)\tilde{\tilde{Q}}X - g(X,Z)\,\tilde{\tilde{Q}}Y\right] \\
&+ \frac{\tilde{\tau}}{(n-1)(n-2)}\left[g(Y,Z)X - g(X,Z)\,Y\right] \\
&= R(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y - g(X,Z)\,Y + g(Y,Z)\,X \\
&- \frac{1}{n-2}[S(Y,Z)X + (n-1)\,g(Y,Z)\,X - S(X,Z)Y - (n-1)\,g(X,Z)\,Y \\
&+ g(Y,Z)QX + g(Y,Z)\,(n-1)\,X - g(X,Z)\,QY - g(X,Z)\,(n-1)\,X] \\
&+ \frac{\tau + n\,(n-1)}{(n-1)(n-2)}\left[g(Y,Z)\,X - g(X,Z)\,Y\right] \\
&= C(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y - g(X,Z)\,Y \\
&+ g(Y,Z)\,X - \frac{n-1}{n-2}g(Y,Z)\,X + \frac{n-1}{n-2}g(X,Z)\,Y \\
&- \frac{n-1}{n-2}g(Y,Z)\,X + \frac{n-1}{n-2}g(X,Z)\,Y + \frac{n\,(n-1)}{(n-1)(n-2)}\left[g(Y,Z)\,X - g(X,Z)\,Y\right]
\end{aligned}$$

ise

$$
\begin{aligned}
\overset{\approx}{C}(X,Y)Z &= C(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y - g(X,Z)Y \\
&\quad + g(Y,Z)X - \frac{n-1}{n-2}g(Y,Z)X + \frac{n-1}{n-2}g(X,Z)Y \\
&\quad - \frac{n-1}{n-2}g(Y,Z)X + \frac{n-1}{n-2}g(X,Z)Y + \frac{n(n-1)}{(n-1)(n-2)}[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y] \quad (4.2.8)
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$\overset{\approx}{C}(X,Y)Z = C(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.2.13. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun altmanifoldu M olsun. M üzerinde tanımlı ∇ Levi-Civita konneksiyona göre Weyl Konformal eğrilik tensörü C, $\overset{\approx}{\nabla}$ Schouten-van Kampen konneksiyona göre Weyl Konformal eğrilik tensörü $\overset{\approx}{C}$ olmak üzere $\forall X,Y \in \chi(M)$ için*

i) $\overset{\approx}{C}(X,Y)\xi = C(X,Y)\xi$,

ii) $\overset{\approx}{C}(\xi,Y)\xi = C(\xi,Y)\xi$

dır.

İspat: (4.2.8) de $Z = \xi$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
\overset{\approx}{C}(X,Y)\xi &= C(X,Y)\xi - A_{h(Y,\xi)}X + A_{h(X,\xi)}Y - g(X,\xi)Y \\
&\quad + g(Y,\xi)X - \frac{n-1}{n-2}g(Y,\xi)X + \frac{n-1}{n-2}g(X,\xi)Y \\
&\quad - \frac{n-1}{n-2}g(Y,\xi)X + \frac{n-1}{n-2}g(X,\xi)Y + \frac{n(n-1)}{(n-1)(n-2)}[g(Y,\xi)X - g(X,\xi)Y]
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$\overset{\approx}{C}(X,Y)\xi = C(X,Y)\xi$$

bulunur. Benzer şekilde (4.2.8) de $X = Z = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{C}}(\xi,Y)\xi &= C(\xi,Y)\xi - A_{h(Y,\xi)}\xi + A_{h(\xi,\xi)}Y - g(\xi,\xi)Y \\
&\quad + g(Y,\xi)\xi - \frac{n-1}{n-2}g(Y,\xi)\xi + \frac{n-1}{n-2}g(\xi,\xi)Y \\
&\quad - \frac{n-1}{n-2}g(Y,\xi)\xi + \frac{n-1}{n-2}g(\xi,\xi)Y \\
&\quad + \frac{n(n-1)}{(n-1)(n-2)}\left[g(Y,\xi)\xi - g(\xi,\xi)Y\right] \\
\tilde{\tilde{C}}(\xi,Y)\xi &= C(\xi,Y)\xi - Y + \eta(Y)\xi - \frac{n-1}{n-2}\eta(Y)\xi + \frac{n-1}{n-2}Y \\
&\quad - \frac{n-1}{n-2}\eta(Y)\xi + \frac{n-1}{n-2}Y + \frac{n}{n-2}\eta(Y)\xi - \frac{n}{n-2}Y
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\tilde{\tilde{C}}(\xi,Y)\xi = C(\xi,Y)\xi$$

olarak bulnur. Böylece ispat tamamlanmış olur [37].

Önerme 4.2.14. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun altmanifoldu M olsun. M üzerinde tanımlı ∇ Levi-Civita konneksiyona göre Weyl Projektif eğrilik tensörü P, $\tilde{\tilde{\nabla}}$ Schouten-van Kampen konneksiyona göre Weyl Konformal eğrilik tensörü $\tilde{\tilde{P}}$ olmak üzere $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için*

$$\tilde{\tilde{P}}(X,Y)Z = P(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y,$$

dir.

İspat: (2.1.14) ve (4.2.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\tilde{\tilde{P}}(X,Y)Z &= \tilde{\tilde{R}}(X,Y)Z - \frac{1}{n-1}\left[g(Y,Z)\tilde{\tilde{Q}}X - g(X,Z)\tilde{\tilde{Q}}Y\right] \\
&= R(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y - g(X,Z)Y + g(Y,Z)X \\
&\quad - \frac{1}{n-1}\left[g(Y,Z)(QX + (n-1)X) - g(X,Z)(QY + (n-1)Y)\right] \\
&= P(X,Y)Z - A_{h(Y,Z)}X + A_{h(X,Z)}Y
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

4.3 Schouten-van Kampen Konneksiyonlu Kenmotsu Manifoldların Semi-slant Altmanifoldları

$\overline{M}$, Kenmotsu manifoldunun bir semi-slant altmanifoldu M ve $\overline{M}$ üzerinde tanımlı Schouten-van Kampen konneksiyon $\overline{\widetilde{\nabla}}$ olsun. Her $X,Y \in \chi(M)$ için

$$\overline{\widetilde{\nabla}}_X Y = \overset{*}{\nabla}_X Y + m(X,Y),$$

olsun. Burada $\overset{*}{\nabla}$, M üzerinde indirgenmiş konneksiyon ve m de M altmanifoldu üzerinde (0,2) tipinde tensör alanıdır. (2.2.1)ve (4.2.1) den

$$\overset{*}{\nabla}_X Y + m(X,Y) = \nabla_X Y + h(X,Y) + g(X,Y)\xi - \eta(Y)X,$$

bulunur. Burada teğet ve normal kısımlar eşitlenirse

$$\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + g(X,Y)\xi - \eta(Y)X, \\ m(X,Y) &= h(X,Y), \end{aligned} \tag{4.3.1}$$

olur. Ayrıca $V \in \chi^{\perp}(M)$ için (4.3.1) dan

$$\begin{aligned} \overset{*}{\nabla}_X V &= \nabla_X V + g(X,V)\xi - \eta(V)X \\ &= -A_V X - \eta(V)X \end{aligned}$$

elde edilir. O halde Schouten-van Kampen konneksiyon ile tanımlı Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifoldu için Gauss ve Weingarten formülleri sırasıyla

$$\overline{\widetilde{\nabla}}_X Y = \overset{*}{\nabla}_X Y + h(X,Y), \tag{4.3.2}$$

$$\overline{\widetilde{\nabla}}_X V = -A_V X - \eta(V)X + \overset{*}{\nabla}{}^{\perp}_X V, \tag{4.3.3}$$

olur. Burada h; M nin Levi-Civita konneksiyonuna göre ikinci temel formu, $A_V; M$ nin şekil operatörüdür.

İkinci temel form ile şekil operatörü arasında

$$g(h(X,Y),V) = g(-A_V X - \eta(V)X, Y),$$

bağıntısı vardır.

Önerme 4.3.1. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ ve $V \in \chi^{\perp}(M)$ için*

i) $h(X,\phi Y) = h(\phi X,Y) = \phi h(X,Y)$,

ii) $\phi A_V X = -A_V \phi X = A_{nV} X$

dır.

İspat: i) (4.2.1) ve (2.2.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{\tilde{\tilde{\nabla}}}_X \phi Y &= \bar{\nabla}_X \phi Y + g(X,\phi Y)\,\xi - \eta(\phi Y)X \\ &= \nabla_X \phi Y + h(X,\phi Y) + g(X,\phi Y)\,\xi,\end{aligned}$$

bulunur. Ayrıca

$$\bar{\tilde{\tilde{\nabla}}}_X \phi Y = (\bar{\tilde{\tilde{\nabla}}}_X \phi)Y + \phi\left(\bar{\tilde{\tilde{\nabla}}}_X Y\right),$$

olduğundan

$$\phi\left(\bar{\tilde{\tilde{\nabla}}}_X Y\right) = \nabla_X \phi Y + h(X,\phi Y) + g(X,\phi Y)\,\xi,$$

bulunur. (3.4.1) kullanılrsa

$$\begin{aligned}\phi\left(\bar{\nabla}_X Y + g(X,Y)\,\xi - \eta(Y)X\right) &= \nabla_X \phi Y + h(X,\phi Y) + g(X,\phi Y)\,\xi, \\ \phi\nabla_X Y + \phi h(X,Y) + g(X,Y)\,\phi\xi - \eta(Y)\,\phi X &= \nabla_X \phi Y + h(X,\phi Y) + g(X,\phi Y)\,\xi, \\ \phi h(X,Y) - \eta(Y)\,\phi X &= (\nabla_X \phi)Y + h(X,\phi Y) + g(X,\phi Y)\,\xi, \\ \phi h(X,Y) - \eta(Y)\,\phi X &= g(\phi X,Y)\,\xi - \eta(Y)\,\phi X + h(X,\phi Y) + g(X,\phi Y)\,\xi\end{aligned}$$

dir. Bu eşitliklerden

$$\phi h(X,Y) = h(X,\phi Y),$$

elde edilir. $X = Y$ ve $Y = \phi X$ alınırsa benzer şekilde

$$\phi h(X,Y) = h(\phi X,Y),$$

elde edilir. Böylece

$$h(X,\phi Y) = h(\phi X,Y) = \phi h(X,Y),$$

bulunur.

ii) (2.2.6) eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
g\left(A_V\phi X,Y\right) &= g\left(h\left(\phi X,Y\right),V\right),\\
&= g\left(\phi h\left(X,Y\right),V\right),\\
&= -g\left(h\left(X,Y\right),\phi V\right),\\
&= -g\left(h\left(X,Y\right),tV+nV\right),\\
&= -g\left(A_{nV}X,Y\right),
\end{aligned}
$$

olduğundan

$$g\left(A_V\phi X,Y\right) = -g\left(A_{nV}X,Y\right),$$

dir. Diğer taraftan A_V simetrik olduğundan

$$\phi A_V X = -A_V\phi X,$$

yazılabilir. Böylece

$$\phi A_V X = -A_V\phi X = A_{nV}X,$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.1. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun 3-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. $\xi\in\chi(M)$ olmak üzere M nin slant olması için gerek ve yeter şart*

$$(\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X T)Y = 0,$$

olmasıdır.

İspat: (3.4.9) ve (4.2.1) den

$$
\begin{aligned}
(\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X T)Y &= \overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X TY - T\overline{\overline{\widetilde{\nabla}}}_X Y,\\
&= \overline{\nabla}_X TY + g(X,TY)\xi - \eta(TY)X - T(\nabla_X Y\\
&\quad + g(X,Y)\xi - \eta(Y)X),\\
&= \overline{\nabla}_X TY + g(X,TY)\xi - T\nabla_X Y + g(X,Y)T\xi + \eta(Y)TX,\\
&= (\overline{\nabla}_X T)Y + g(X,TY)\xi + \eta(Y)TX,\\
&= -\eta(Y)TX + g(Y,TX)\xi + g(X,TY)\xi + \eta(Y)TX,\\
&= 0
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.2. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun 3-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için M nin slant olması için gerek ve yeter şart*

$$A_{NY}X = A_{NX}Y,$$

olmasıdır.

İspat: M slant ise 4.3.1 den $(\overline{\overline{\tilde{\nabla}}}_X T)Y = 0$ ve $(\overline{\overline{\tilde{\nabla}}}_Y T)X = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu durumda

$$0 = A_{NY}X - th(X,Y),$$
$$0 = A_{NX}Y - th(X,Y),$$

yazılabilir. Son iki eşitlikten

$$0 = A_{NY}X - A_{NX}Y,$$

yani

$$A_{NY}X = A_{NX}Y$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Önerme 4.3.2. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için*

$$(\overset{*}{\nabla}_X T)Y = A_{NY}X - th(X,Y),$$
$$(\overset{*}{\nabla}_X N)Y = nh(X,Y) - h(X,TY),$$

dir.

İspat: $\forall\, X,Y \in \chi(M)$ için (3.4.6), (3.4.7) ve (4.2.2) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X\phi)Y &= \overline{\nabla}_X\phi Y - \phi\overline{\nabla}_X Y,\\ &= \overline{\nabla}_X TY + \overline{\nabla}_X NY - \phi\overline{\nabla}_X Y,\\ &= \overline{\overline{\tilde{\nabla}}}_X TY - g(X,TY)\xi + \eta(TY)X + \overline{\overline{\tilde{\nabla}}}_X NY - g(X,NY)\xi\\ &+ \eta(NY)X - \phi(\overline{\overline{\tilde{\nabla}}}_X Y - g(X,Y)\xi + \eta(TY)X),\end{aligned}$$

bulunur. (4.3.2) ve (4.3.3) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X\phi)Y &= \overset{*}{\nabla}_X TY - h(X,TY) - g(X,TY)\xi + (-A_{NY}X + \eta(N)X)\\ &+ \overset{*}{\nabla}{}^{\perp}_X N - \phi(\overset{*}{\nabla}_X Y - h(X,Y) - g(X,Y)\xi + \eta(Y)X),\\ &= \overset{*}{\nabla}_X TY - h(X,TY) - g(X,TY)\xi + (-A_{NY}X + \eta(N)X)\\ &+ \overset{*}{\nabla}{}^{\perp}_X N - T\overset{*}{\nabla}_X Y - N\overset{*}{\nabla}_X Y + th(X,Y) + nh(X,Y)\\ &+ g(X,Y)\phi\xi - \eta(Y)NX - \eta(Y)TX,\end{aligned}$$

olur. Ayrıca (3.4.1) eşitliğinden

$$g(\phi X,Y)\xi-\eta(Y)\phi X=g(TX,Y)\xi+g(NX,Y)\xi-\eta(Y)TX-\eta(Y)NX,$$

bulunur. (3.4.6) ve (3.4.7) eşitliklerinin kullanılması ile

$$\begin{aligned}g(TX,Y)\xi-\eta(Y)TX-\eta(Y)NX=&(\overset{*}{\nabla}_XT)Y+(\overset{*}{\nabla}_XN)Y-h(X,TY)+g(TX,Y)\xi\\&-A_{NY}X+\eta(N)X+th(X,Y)+nh(X,Y)\\&-\eta(Y)NX-\eta(Y)TX,\end{aligned}$$

bulunur. Burada son ifadedeki teğet ve normal bileşenler karşılıklı olarak eşitlenirse ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.1. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $\forall X\in TM$ ve $V\in T^{\perp}M$ için*

$$\begin{aligned}(\overset{*}{\nabla}_Xt)V&=g(NX,V)\xi+g(X,tV)\xi+A_{nV}X-TA_VX,\\(\overset{*}{\nabla}_Xn)V&=-h(X,tV)-NA_VX,\end{aligned}$$

dir.

İspat: (3.4.7) ve (4.2.1) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X\phi)V&=\overline{\nabla}_X\phi V-\phi\overline{\nabla}_XV,\\&=\overline{\nabla}_XtV+\overline{\nabla}_XnV-\phi\overline{\nabla}_XV,\\&=\widetilde{\nabla}_XtV-g(X,tV)\xi+\eta(tV)X+\widetilde{\nabla}_XnV-g(X,nV)\xi+\eta(NV)X\\&-\phi(\widetilde{\nabla}_XV-g(X,V)\xi+\eta(V)X),\end{aligned}$$

bulunur. (4.3.2) ve (4.3.3) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}(\overline{\nabla}_X\phi)V=&\overset{*}{\nabla}_XtV-h(X,tV)-g(X,tV)\xi+(-A_{nV}X+\eta(N)X)+\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}_XnV\\&-\phi(-A_VX+\eta(N)X)+\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}_XV,\\=&\overset{*}{\nabla}_XtV-h(X,tV)-g(X,tV)\xi-A_{nV}X+\eta(nV)X+\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}_XnV+TA_VX\\&+NA_VX+\eta(V)TX+\eta(V)NX-t\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}_XV-n\overset{*}{\nabla}{}^{\perp}_XV,\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.3. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifoldu M olsun. O zaman $X \in \Gamma(D_1)$ ve $Z \in \Gamma(D_2)$ için $[X,\xi] \in \Gamma(D_1 \oplus \langle\xi\rangle)$ ve $[Z,\xi] \in \Gamma(D_2 \oplus \langle\xi\rangle)$ dir.*

İspat: (4.3.1), (4.3.2), (4.3.3) eşitlikleri kullanılırsa $X \in \Gamma(D_1)$ ve $Z \in \Gamma(D_2)$ için

$$\begin{aligned}
g([X,\xi],Y) &= g(\overline{\nabla}_X\xi - \overline{\nabla}_\xi X, Y)\\
&= g(\overline{\nabla}_X\xi, Y) - g(\overline{\nabla}_\xi X, Y)\\
&= g(\overline{\widetilde{\nabla}}_X\xi - g(X,\xi)\xi + \eta(\xi)X, Y) - g(\overline{\widetilde{\nabla}}_\xi X - g(\xi,X)\xi + \eta(X)\xi, Y)\\
&= g(\overline{\widetilde{\nabla}}_X\xi, Y) - g(X,\xi)g(\xi,Y) + g(X,Y) - g(\overline{\widetilde{\nabla}}_\xi X, Y)\\
&\quad + g(\xi,X)g(\xi,Y) - \eta(X)g(\xi,Y)\\
&= g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) - g(\widetilde{\nabla}_\xi X, Y)\\
&= -g(\overline{\widetilde{\nabla}}_\xi X, Y)\\
&= -g(\overset{*}{\nabla}_\xi X - h(\xi,X), Y)\\
&= -g(\nabla_\xi X + g(\xi,X)\xi - \eta(X)\xi, Y)\\
&= -g(\nabla_\xi X, Y) - g(\xi,X)g(\xi,Y) + \eta(X)g(\xi,Y)\\
&= -g(\nabla_\xi X, Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
g([X,\xi],Y) &= g((\nabla_X\xi - \nabla_\xi X), Y)\\
&= g(\nabla_X\xi, Y) - g(\nabla_\xi X, Y)\\
&= g(X - \eta(X)\xi, Y) - g(\nabla_\xi X, Y)\\
&= g(X,Y) - \eta(X)\eta(Y) - g(\nabla_\xi X, Y)\\
&= -g(\nabla_\xi X, Y)
\end{aligned}$$

olduğundan $g([X,\xi],Y = g(\nabla_\xi Y, X)$ dir. $X \in \Gamma(D_1)$ olduğundan $X = \phi Z$ olacak şekilde bir $Z \in \Gamma(D_1)$ vardır. Bu durumda; $(g([X,\xi],Y) = g(X,\nabla_\xi Y) = g(\phi Z, \nabla_\xi Y) = g(h(\xi,Z),\phi Y) = 0$ elde edilir $(((g(h(X,Y),\phi Z) = g(\nabla_X Z,\phi Y)$ olduğundan). O halde $Y \in \Gamma(D_2)$ olduğundan $[X,\xi] \in \Gamma(D_1 \oplus \langle\xi\rangle)$ dir. $Z \in \Gamma(D_2)$ ve $Y \in \Gamma(D_1)$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
g([Z,\xi],Y) &= g(\overline{\nabla}_Z\xi - \overline{\nabla}_\xi Z, Y)\\
&= g(\overline{\nabla}_Z\xi, Y) - g(\overline{\nabla}_\xi Z, Y)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
g([Z,\xi],Y) &= g(\widetilde{\widetilde{\nabla}}_Z\xi - g(Z,\xi)\xi + \eta(\xi)Z, Y) - g(\widetilde{\widetilde{\nabla}}_\xi Z - g(\xi,Z)\xi + \eta(Z)\xi, Y) \\
&= g(\widetilde{\widetilde{\nabla}}_Z\xi, Y) - g(Z,\xi)g(\xi,Y) + g(Z,Y) \\
&\quad - g(\widetilde{\widetilde{\nabla}}_\xi Z, Y) + g(\xi,Z)g(\xi,Y) + \eta(Z)g(\xi,Y)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= g(Z,Y) - \eta(Z)\eta(Y) - g(\widetilde{\widetilde{\nabla}}_\xi Z, Y) \\
&= -g(\widetilde{\widetilde{\nabla}}_\xi Z, Y) \\
&= -g(\overset{*}{\nabla}_\xi Z - h(\xi,Z), Y) \\
&= -g(\nabla_\xi Z + g(\xi,Z)\xi - \eta(Z)\xi, Y) \\
&= g(\nabla_\xi Z, Y) - g(\xi,Z)g(\xi,Y) + \eta(Z)g(\xi,Y) \\
&= -g(\nabla_\xi Z, Y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece

$$
\begin{aligned}
g([Z,\xi],Y) &= g((\nabla_Z\xi - \nabla_\xi Z), Y) \\
&= g(\nabla_Z\xi, Y) - g(\nabla_\xi Z, Y) \\
&= g(Z - \eta(Z)\xi, Y) - g(\nabla_\xi Z, Y) \\
&= g(Z,Y) - \eta(Z)g(\xi,Y) - g(\nabla_\xi Z, Y) \\
&= -g(\nabla_\xi Z, Y)
\end{aligned}
$$

dir. $Y \in \Gamma(D_1)$ olduğundan $Y = \phi X$ olacak şekilde bir $X \in \Gamma(D_1)$ vardır. Bu durumda; $(g([Z,\xi],Y) = g(Z,\nabla_\xi Y) = g(Z,\phi\nabla_\xi Y) = 0$ bulunur. O halde $Y \in \Gamma(D_1)$ ve $g([Z,\xi],Y) = 0$ olduğundan

$$
[Z,\xi] \in \Gamma(D_2 \oplus \langle\xi\rangle)
$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.4. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifoldu M olsun. Bu durumda $D_1 \oplus D_2$ distribüsyonu integrallenebilirdir.*

İspat: $\forall\, X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$
\begin{aligned}
g([X,Y],\xi) &= g(\overline{\nabla}_X Y, \xi - \overline{\nabla}_Y X, \xi) \\
&= g(\overline{\nabla}_X Y, \xi) - g(\overline{\nabla}_Y X, \xi) \\
&= g(\overline{\widetilde{\nabla}}_X Y - g(X,Y)\xi + \eta(X)Y, \xi) - g(\overline{\widetilde{\nabla}}_Y X - g(Y,X)\xi + \eta(Y)X, \xi) \\
&= g(\overline{\widetilde{\nabla}}_X Y, \xi) - g(X,Y)g(\xi,\xi) + \eta(X)g(Y,\xi) - g(\overline{\widetilde{\nabla}}_Y X, \xi) \\
&+ g(Y,X)g(\xi,\xi) - \eta(Y)g(X,\xi) \\
&= g(\overline{\widetilde{\nabla}}_X Y, \xi) - g(\overline{\widetilde{\nabla}}_Y X, \xi) \\
&= -g(Y, \overline{\widetilde{\nabla}}_X \xi) + g(X, \overline{\widetilde{\nabla}}_Y \xi) = 0
\end{aligned}
$$

Böylece $\eta([X,Y]) = 0$ dır. O halde $[X,Y] \in \Gamma(D)$ dir. Yani $D_1 \oplus D_2$ distribüsyonu integrallenebilirdir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.5. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifoldu M olsun. $D_1 \oplus \langle \xi \rangle$ nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart*

$$h(X, \phi Y) = h(\phi X, Y) \tag{4.3.4}$$

olmasıdır.

İspat: (2.2.1) ve (4.2.1) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\phi([X,Y]) &= \phi(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= \phi(\overline{\nabla}_X Y + h(X,Y) - \overline{\nabla}_Y X - h(X,Y)) \\
&= \phi(\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X) \\
&= \phi(\overline{\widetilde{\nabla}}_X Y - g(X,Y)\xi + \eta(Y)X) - \overline{\widetilde{\nabla}}_Y X + g(Y,X)\xi - \eta(X)Y) \\
&= \phi\overline{\widetilde{\nabla}}_X Y - g(X,Y)\phi\xi + \eta(Y)\phi X - \phi\overline{\widetilde{\nabla}}_Y X + g(Y,X)\phi\xi - \eta(X)\phi Y
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\phi([X,Y]) &= \overline{\widetilde{\nabla}}_X \phi Y - (\overline{\widetilde{\nabla}}_X \phi)Y + \eta(Y)\phi X + (\overline{\widetilde{\nabla}}_Y \phi)X - \overline{\widetilde{\nabla}}_Y \phi X - \eta(X)\phi Y \\
&= \overset{*}{\nabla}_X \phi Y - h(X,\phi Y) + \eta(Y)\phi X - \overset{*}{\nabla}_Y \phi X + h(Y,\phi X) - \eta(X)\phi Y \\
&= \overset{*}{\nabla}_X \phi Y - \overset{*}{\nabla}_Y \phi X + \eta(Y)\phi X - \eta(X)\phi Y - h(X,\phi Y) + h(Y,\phi X)
\end{aligned}
$$

bulunur. Son eşitlikte $\phi([X,Y])$ nin normal kısmı $h(X,\phi Y) - h(Y,\phi X)$ dir.

Ayrıca; $[X,Y] \in \Gamma(D_1 \oplus \langle \xi \rangle)$ ise $\phi([X,Y]) = 0$ dır. O halde $h(X,\phi Y) - h(Y,\phi X) = 0$ olmalıdır. Buradan

$$h(X,\phi Y) = h(Y,\phi X)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.3.6. *Schouten-van Kampen konneksiyonlu bir $\overline{M}$ Kenmotsu manifoldun semi-slant altmanifoldu M olsun. $D_2 \oplus \langle \xi \rangle$ nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\forall X,Y \in \Gamma(D_2 \oplus \langle \xi \rangle)$ için*

$$A_{\phi X} Y = A_{\phi Y} X \tag{4.3.5}$$

olmasıdır.

İspat: $\forall\, X,Y \in \Gamma(D_2)$ için

$$\begin{aligned}
g([X,Y],\xi) &= g(\overline{\nabla}_X Y, \xi - \overline{\nabla}_Y X, \xi) \\
&= g(\overline{\nabla}_X Y, \xi) - g(\overline{\nabla}_Y X, \xi) \\
&= g(\overline{\widetilde{\nabla}}_X Y - g(X,Y)\xi + \eta(Y)X, \xi) - g(\overline{\widetilde{\nabla}}_Y X - g(Y,X)\xi + \eta(X)Y, \xi) \\
&= g(\overline{\widetilde{\nabla}}_X Y, \xi) - g(X,Y)g(\xi,\xi) + \eta(Y)g(X,\xi) \\
&- g(\overline{\widetilde{\nabla}}_Y X, \xi) + g(Y,X) - \eta(X)g(Y,\xi) \\
&= g(\overline{\widetilde{\nabla}}_X Y, \xi) - g(\overline{\widetilde{\nabla}}_Y X, \xi) \\
&= -g(\overline{\widetilde{\nabla}}_X \xi, Y) + g(\overline{\widetilde{\nabla}}_Y \xi, X) = 0
\end{aligned}$$

Ayrıca

$$\begin{aligned}
\phi([X,Y]) &= \phi(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\
&= \phi(\overline{\nabla}_X Y + h(X,Y) - \overline{\nabla}_Y X - h(Y,X)) \\
&= \phi(\overline{\nabla}_X Y - \overline{\nabla}_Y X) \\
&= \phi(\overline{\widetilde{\nabla}}_X Y - g(X,Y)\xi + \eta(Y)X) - \overline{\widetilde{\nabla}}_Y X + g(Y,X)\xi - \eta(X)Y)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi([X,Y]) &= \phi\overline{\widetilde{\nabla}}_X Y + \eta(Y)\phi X - \phi\overline{\widetilde{\nabla}}_Y X - \eta(X)\phi Y \\
&= \overline{\widetilde{\nabla}}_X \phi Y - (\overline{\widetilde{\nabla}}_X \phi)Y + \eta(Y)\phi X + (\overline{\widetilde{\nabla}}_Y \phi)X - \overline{\widetilde{\nabla}}_Y \phi X - \eta(X)\phi Y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\phi([X,Y]) &= (-A_{\phi Y} + a)X + \overset{*\,\perp}{\nabla}_X \phi Y + \eta(Y)\phi X - (-A_{\phi X} + a)Y - \overset{*\,\perp}{\nabla}_Y \phi X - \eta(X)\phi Y \\
&= -A_{\phi Y} + A_{\phi X} + \overset{*\,\perp}{\nabla}_X \phi Y + \eta(Y)\phi X - \overset{*\,\perp}{\nabla}_Y \phi X - \eta(X)\phi Y
\end{aligned}$$

dir. Son eşitlikte $\phi([X,Y])$ nin teğet kısmı $A_{\phi X}Y - A_{\phi Y}X$ dir. Bu durumda $[X,Y] \in \Gamma(D_2 \oplus \langle \xi \rangle)$ ise $\phi([X,Y]) = 0$ dır. O halde $A_{\phi X}Y - A_{\phi Y}X = 0$ dır. Buradan

$$A_{\phi X}Y = A_{\phi Y}X$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Örnek 4.3.1. $\bar{M} = R^7$ *Reel uzayını göz önüne alalım.* R^7 *deki Kenmotsu yapıyı örnek 3.4.1 deki gibi tanımlayalım. Ayrıca* $\chi\left(\overline{M}\right)$ *nin standart bazı* $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}, \frac{\partial}{\partial y_3}, \frac{\partial}{\partial t}\right)$ *olsun.*

$$X(k,s,u,v,w) = (k,0,u,s,v\sin\theta, v\cos\theta, w)$$

dönüşümü ile verilen M *altmanifoldu göz önüne alınsın. Bu durumda*

$$\begin{aligned}
e_1 &= \frac{1}{e^t}\frac{\partial}{\partial x_1}, & e_2 &= \frac{1}{e^t}\frac{\partial}{\partial y_1}, \\
e_3 &= \frac{1}{e^t}\frac{\partial}{\partial x_3}, & e_4 &= \frac{1}{e^t}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial y_2} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial y_3}\right), \\
e_5 &= \xi,
\end{aligned}$$

olmak üzere $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ *kümesi* $\chi(M)$ *nin bir bazıdır. Diğer taraftan*

$$\phi\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = -\frac{\partial}{\partial y_i}, \phi\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right) = \frac{\partial}{\partial x_j}, 1 \leq i,j \leq 3$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\phi e_1 &= -\frac{1}{e^t}\frac{\partial}{\partial y_1} = -e_2, \\
\phi e_2 &= \frac{1}{e^t}\frac{\partial}{\partial x_1} = e_1, \\
\phi e_3 &= -\frac{1}{e^t}\frac{\partial}{\partial y_3} = -e_3, \\
\phi e_4 &= \frac{1}{e^t}\left(\sin\theta\frac{\partial}{\partial x_2} + \cos\theta\frac{\partial}{\partial x_3}\right) = e_4, \\
\phi e_5 &= 0,
\end{aligned}$$

dir. Böylece $D_1 = Sp\{e_1, e_2\}$ *olarak alınırsa* D_1 *distribüsyonu bir invaryant distribüsyon olur. Şimdi* $D_2 = Sp\{e_3, e_4\}$ *olarak alalım.*

$$\frac{g(\phi e_4, e_3)}{\|\phi e_4\|\,\|e_3\|} = \frac{\frac{1}{e^{2t}}\cos\theta}{\frac{1}{e^{2t}}} = \cos\theta,$$

dır. Böylece D_2 *distribüsyonu* θ *slant açısına sahip bir slant distribüsyondur. Bu durumda* $\chi(M) = D_1 \oplus D_2 \oplus Sp\{\xi\}$ *şeklinde yazılabilir. Böylece* M *altmanifoldu* $\overline{M}$ *Kenmotsu manifoldunun bir semi-slant altmanifoldudur. Doğrudan hesaplamalar ile*

$$\begin{aligned}
&[e_1,e_2] = 0, [e_1,e_3] = 0, [e_1,e_4] = 0, [e_1,e_5] = e_1, \\
&[e_2,e_3] = 0, [e_2,e_4] = 0, [e_2,e_5] = e_2, \\
&[e_3,e_4] = 0, [e_3,e_5] = e_3, [e_4,e_5] = e_4,
\end{aligned}$$

elde ederiz. Diğer taraftan $\overline{M}$ üzerindeki ortonormal $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ bazına göre

$$\bar{\nabla}_{e_1} e_1 = k e_1 + l e_2 + m e_3 + n e_4 + p e_5,$$

olarak yazılır. Burada

$$\begin{aligned} & k = g\left(\bar{\nabla}_{e_1} e_1, e_1\right), l = g\left(\bar{\nabla}_{e_1} e_1, e_2\right), m = g\left(\bar{\nabla}_{e_1} e_1, e_3\right) \\ & n = g\left(\bar{\nabla}_{e_1} e_1, e_4\right), p = g\left(\bar{\nabla}_{e_1} e_1, e_5\right), \end{aligned}$$

dir. Kozsul formülü yardımıyla

$$g\left(\bar{\nabla}_{e_1} e_1, e_1\right) = 0,$$

olduğundan $k = 0$ dır. Aynı şekilde $l = 0$, $m = 0, n = 0, p = -1$ bulunur. Böylece $\bar{\nabla}_{e_1} e_1 = -\xi$ dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned} & \bar{\nabla}_{e_1} e_1 = -\xi, \bar{\nabla}_{e_1} e_2 = 0, \bar{\nabla}_{e_1} e_3 = 0, \bar{\nabla}_{e_1} e_4 = 0, \bar{\nabla}_{e_1} e_5 = e_1, \\ & \bar{\nabla}_{e_2} e_1 = 0, \bar{\nabla}_{e_2} e_2 = -\xi, \bar{\nabla}_{e_2} e_3 = 0, \bar{\nabla}_{e_2} e_4 = 0, \bar{\nabla}_{e_2} e_5 = e_2, \\ & \bar{\nabla}_{e_3} e_1 = 0, \bar{\nabla}_{e_3} e_2 = 0, \bar{\nabla}_{e_3} e_3 = -\xi, \bar{\nabla}_{e_3} e_4 = 0, \bar{\nabla}_{e_3} e_5 = e_3, \\ & \bar{\nabla}_{e_4} e_1 = -\xi, \bar{\nabla}_{e_4} e_2 = 0, \bar{\nabla}_{e_4} e_3 = 0, \bar{\nabla}_{e_4} e_4 = -\xi, \bar{\nabla}_{e_4} e_5 = e_4, \\ & \bar{\nabla}_{e_5} e_1 = 0, \bar{\nabla}_{e_5} e_2 = 0, \bar{\nabla}_{e_5} e_3 = 0, \bar{\nabla}_{e_5} e_4 = 0, \bar{\nabla}_{e_5} e_5 = 0, \end{aligned}$$

dir. Şimdi $\overline{M}$ nin ikinci temel formunun bileşenlerini hesaplayalım. Burada

$$g(h\left(e_i, e_j\right), V) = g\left(A_V\left(e_i\right), e_j\right) = -g\left(\bar{\nabla} e_i V, e_j\right) = g\left(V, \bar{\nabla} e_i e_j\right),$$

olduğundan

$$
\begin{aligned}
h(e_1,e_1) &= g\left(V,\bar{\nabla}e_1e_1\right) = -g(V,\xi) = 0,\\
h(e_1,e_2) &= g\left(V,\bar{\nabla}e_1e_2\right) = -g(V,0) = 0,\\
h(e_1,e_3) &= g\left(V,\bar{\nabla}e_1e_3\right) = -g(V,0) = 0,\\
h(e_1,e_4) &= g\left(V,\bar{\nabla}e_1e_4\right) = -g(V,0) = 0,\\
h(e_1,e_5) &= g\left(V,\bar{\nabla}e_1e_5\right) = -g(V,e_1) = 0,\\
h(e_2,e_2) &= g\left(V,\bar{\nabla}e_2e_2\right) = -g(V,\xi) = 0,\\
h(e_2,e_3) &= g\left(V,\bar{\nabla}e_2e_3\right) = -g(V,0) = 0,\\
h(e_2,e_4) &= g\left(V,\bar{\nabla}e_2e_4\right) = -g(V,0) = 0,\\
h(e_2,e_5) &= g\left(V,\bar{\nabla}e_2e_5\right) = -g(V,e_2) = 0,\\
h(e_3,e_3) &= g\left(V,\bar{\nabla}e_3e_3\right) = -g(V,\xi) = 0,\\
h(e_3,e_4) &= g\left(V,\bar{\nabla}e_3e_4\right) = -g(V,0) = 0,\\
h(e_3,e_5) &= g\left(V,\bar{\nabla}e_3e_5\right) = -g(V,e_3) = 0,\\
h(e_4,e_4) &= g\left(V,\bar{\nabla}e_4e_4\right) = -g(V,\xi) = 0,\\
h(e_4,e_5) &= g\left(V,\bar{\nabla}e_4e_4\right) = -g(V,e_5) = 0,\\
h(e_5,e_5) &= g\left(V,\bar{\nabla}e_5e_5\right) = g(V,0) = 0,
\end{aligned}
$$

dır. Böylece $1 \leq i,j \leq 5$, $h\left(e_i,e_j\right) = 0$ *dır. Ayrıca*

$$H = \frac{1}{boyM} iz(h) = \frac{1}{5}\left(h(e_1,e_1) + h(e_2,e_2) + h(e_3,e_3) + h(e_4,e_4) + h(\xi,\xi)\right) = 0$$

dır. Böylece M semi-slant altmanifoldu total geodezik ve minimaldir. Şimdi $\overline{M}$ üzerindeki Schouten-van Kampen koneksiyonuna göre

$$\tilde{\bar{\nabla}}e_1e_1 = \bar{\nabla}_{e_1}e_1 + g(e_1,e_1)\xi - \eta(e_1)e_1 = 0,$$

dır. Diğer taraftan

$$\tilde{\bar{\nabla}}e_1e_5 = \bar{\nabla}_{e_1}e_5 + g(e_1,e_5)\xi - \eta(e_5)e_1 = 0,$$

dir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
&\widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_1} e_1 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_1} e_2 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_1} e_3 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_1} e_4 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_1} e_5 = 0, \\
&\widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_2} e_1 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_2} e_2 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_2} e_3 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_2} e_4 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_2} e_5 = 0, \\
&\widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_3} e_1 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_3} e_2 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_3} e_3 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_3} e_4 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_3} e_5 = 0, \\
&\widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_4} e_1 = 0, \bar{\nabla}_{e_4} e_2 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_4} e_3 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_4} e_4 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_4} e_5 = 0, \\
&\widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_5} e_1 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_5} e_2 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_5} e_3 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_5} e_4 = 0, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}}_{e_5} e_5 = 0,
\end{aligned}
$$

dir. Böylece ikinci temel form bileşenleri

$$
h\left(e_i, e_j\right) = g\left(A_V\left(e_i\right), e_j\right) = -g\left(\widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_i V, e_j\right) = g\left(V, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_i e_j\right),
$$

dir. Buna göre

$$
\begin{aligned}
h(e_1, e_1) &= g\left(V, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_1 e_1\right) = -g(V, 0) = 0, \\
h(e_1, e_2) &= g\left(V, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_1 e_2\right) = -g(V, 0) = 0, \\
h(e_1, e_3) &= g\left(V, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_1 e_3\right) = -g(V, 0) = 0, \\
h(e_1, e_4) &= g\left(V, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_1 e_4\right) = -g(V, 0) = 0, \\
h(e_1, e_5) &= g\left(V, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_1 e_5\right) = -g(V, 0) = 0, \\
h(e_2, e_2) &= g\left(V, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_2 e_2\right) = -g(V, 0) = 0, \\
h(e_2, e_3) &= g\left(V, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_2 e_3\right) = -g(V, 0) = 0, \\
h(e_2, e_4) &= g\left(V, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_2 e_4\right) = -g(V, 0) = 0, \\
h(e_2, e_5) &= g\left(V, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_2 e_5\right) = -g(V, 0) = 0, \\
h(e_3, e_3) &= g\left(V, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_3 e_3\right) = -g(V, 0) = 0, \\
h(e_3, e_4) &= g\left(V, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_3 e_4\right) = -g(V, 0) = 0, \\
h(e_3, e_5) &= g\left(V, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_3 e_5\right) = -g(V, 0) = 0, \\
h(e_4, e_4) &= g\left(V, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_4 e_4\right) = -g(V, \xi) = 0, \\
h(e_4, e_5) &= g\left(V, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_4 e_4\right) = -g(V, e_5) = 0, \\
h(e_5, e_5) &= g\left(V, \widetilde{\bar{\bar{\nabla}}} e_5 e_5\right) = g(V, 0) = 0,
\end{aligned}
$$

bulunur. Böylece $1 \leq i, j \leq 5$ *için* $h\left(e_i, e_j\right) = 0$ *dir. Ayrıca;*

$$
H = \frac{1}{boyM} iz(h) = \frac{1}{5}\left(h(e_1, e_1) + h(e_2, e_2) + h(e_3, e_3) + h(e_4, e_4) + h(\xi, \xi)\right) = 0
$$

dır. Sonuç olarak M semi-slant altmanifoldu Schouten-van Kampen konneksiyonuna göre total geodezik ve minimaldir. Diğer yandan

$$h(e_1,\phi e_2) = h(e_1,e_1) = 0,$$
$$h(\phi e_1,e_2) = h(-e_2,e_2) = -h(e_2,e_2) = 0,$$

dır. Dolayısıyla

$$h(e_1,\phi e_2) = h(\phi e_1,e_2),$$

dır. Böylece (4.3.4) eşitliğinin sağlandığı görülür. Bu ise $D_1 \oplus \langle \xi \rangle$ nin integrallenebilir olduğunu gösterir. Şimdi $D_2 \oplus \langle \xi \rangle$ distribüsyonunun integrallenebilir olduğunu gösterelim. Yani

$$A_{\phi X}Y = A_{\phi Y}X,$$

olduğunu göstermeliyiz. Bunun için

$$g\left(A_{\phi e_3}e_4,e_3\right) = g\left(h(e_4,e_3),\phi e_3\right) = 0,$$
$$g\left(A_{\phi e_4}e_3,e_3\right) = g\left(h(e_3,e_3),\phi e_4\right) = 0,$$
$$g\left(A_{\phi e_3}e_4,e_4\right) = g\left(h(e_4,e_4),\phi e_3\right) = 0,$$
$$g\left(A_{\phi e_4}e_3,e_4\right) = g\left(h(e_3,e_4),\phi e_4\right) = 0,$$

olduğundan dolayı

$$A_{\phi e_3}e_4 = A_{\phi e_4}e_3,$$

dır. Dolayısıyla eşitlik (4.3.5) sağlanır. $D_2 \oplus \langle \xi \rangle$ integrallenebilirdir.

KAYNAKLAR

[1] **Sasaki, S.** (1960). On differentiable manifolds with certain structures which are closely related to almost contact structure. I, *The Tohoku Mathematical Journal. Second Series*, *12*, 459–476.

[2] **Boothby, W.** (2003). *An introduction to differentiable manifolds and Riemannian geometry*, Academic Press, Amsterdam New York.

[3] **Gray, J.W.** (1959). Some global properties of contact structures, *Annals of Mathematics. Second Series*, *69*, 421–450.

[4] **Ogiue, K.** (1964). On almost contact manifolds admitting axiom of planes or axiom of free mobility, *Kodai Mathematical Seminar Reports*, *16*, 223–232.

[5] **Blair, D.** (1976). *Contact manifolds in Riemannian geometry*, Springer-Verlag, Berlin New York.

[6] **Geiges, H.** (2001). A brief history of contact geometry and topology, *Expositiones Mathematicae*, *19*(1), 25–53.

[7] **Chen, B.Y. ve Tazawa, Y.** (1990). Slant Surfaces With Codimensions, *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, *11*(3), 29–43.

[8] **Maeda, S.**, **Ohnita, Y. ve Udagawa, S.** (1993). On slant immersions into Kähler manifolds, *Kodai Mathematical Journal*, *16*(2), 205–219.

[9] **Lotta, A.** (1996). Slant submanifolds in contact geometry, *Bulletin mathématique de la Société des Sciences Mathématiques de Roumanie*, *39 (87)*(1/4), 183–198, `http://www.jstor.org/stable/43678612`.

[10] **Lotta, A.** (1998). Three-dimensional slant submanifolds of K-contact manifolds, *Balkan Journal of Geometry and its Applications*, *3*(1), 37–51.

[11] **Cabrerizo, J.L.**, **Carriazo, A.**, **Fernández, L.M. ve Fernández, M.** (2000). Slant submanifolds in Sasakian manifolds, *Glasgow Mathematical Journal*, *42*(1), 125–138.

[12] **Gupta, R.S.**, **Khursheed Haider, S.M. ve Shahid, M.H.** (2004). Slant submanifolds of a Kenmotsu manifold, *Radovi Matematički*, *12*(2), 205–214.

[13] **Papaghuic, N.** (1994). Semi-SlantSubmanifolds of a Kaehlarian manifold, *An. Ştiinţ. Univ. Al. I. Cuza Iaşi. Mat. (N.S.)*, *40*, 55–61.

[14] **Cabrerizo, J.L.**, **Carriazo, A.**, **Fernández, L.M. ve Fernández, M.** (1999). Semi-slant submanifolds of a Sasakian manifold, *Geometriae Dedicata*, *78*(2), 183–199.

[15] **Khan, V.**, **Khan, M. ve Khan, K.** (2007). Slant and semi-slant submanifolds of a kenmotsu manifold, *Mathematica Slovaca*, *57*(5), 483–494.

[16] **Hacısalihoğlu, H.** (2002). *Diferansiyel geometri*, Cilt 1.

[17] **Hacısalihoğlu, H.** (1980). *Yüksek diferansiyel geometriye giriş*, Fırat Üniversitesi Fen Fakültesi Yayınları Mat No:, Fırat Üniversitesi, https://books.google.com.tr/books?id=c-eztAEACAAJ.

[18] **Yano, K. ve Kon, M.** (1984). *Structures on manifolds*, cilt 3 of *Series in Pure Mathematics*, World Scientific Publishing Co., Singapore.

[19] **Kobayashi, S. ve Nomizu, K.** (1969). *Foundations of differential geometry. Vol. II*, Interscience Tracts in Pure and Applied Mathematics, No. 15 Vol. II, Interscience Publishers John Wiley & Sons, Inc., New York-London-Sydney.

[20] **Duggal, K.L. ve Bejancu, A.** (1996). *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications*, cilt364 of *Mathematics and its Applications*, Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht.

[21] **Şahin, B.** (2012). *Manifoldların diferensiyel geometrisi*, Nobel, Ankara.

[22] **Hacısalihoğlu, H.** (1982). *Diferensiyel geometri*, İnönü Üniversitesi.

[23] **O'Neill, B.** (1983). *Semi-Riemannian geometry*, cilt103 of *Pure and Applied Mathematics*, Academic Press, Inc. [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], New York, with applications to relativity.

[24] **Ishihara, I.** (1979). Anti-invariant submanifolds of a Sasakian space form, *Kodai Mathematical Journal*, *2*(2), 171–186.

[25] **Chen, B.y.** (1973). *Geometry of submanifolds*, Marcel Dekker, Inc., New York, pure and Applied Mathematics, No. 22.

[26] **Pandey, P.K. ve Gupta, R.S.** (2008). Characterization of a slant submanifold of a Kenmotsu manifold, *Novi Sad Journal of Mathematics*, *38*(1), 97–102.

[27] **Chen, B.Y.** (1990). *Geometry of slant submanifolds*, Katholieke Universiteit Leuven, Louvain.

[28] **Chen, B.Y.** (1990). Slant immersions, *Bulletin of the Australian Mathematical Society*, *41*(1), 135–147.

[29] **Kenmotsu, K.** (1972). A class of almost contact Riemannian manifolds, *The Tohoku Mathematical Journal. Second Series*, *24*, 93–103.

[30] **Öğünlü N. N** (2010). *Slant ve Semi-slant Altmanifoldlar* (Yüksek Lisans Tezi). Gazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Ankara.

[31] **Gupta, R.S. ve Pandey, P.K.** (2008). Structure on a slant submanifold of a Kenmotsu manifold, *Differential Geometry—Dynamical Systems*, *10*, 139–147.

[32] **Cabrerizo, J.L.**, **Carriazo, A.**, **Fernández, L.M. ve Fernández, M.** (2000). Structure on a slant submanifold of a contact manifold, *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, *31*(7), 857–864.

[33] **Aurel Bejancu, H.F.** (2006). *Foliations and Geometric Structures*, Springer-Verlag GmbH, https://www.ebook.de/de/product/8897157/aurel_bejancu_hani_reda_farran_foliations_and_geometric_structures.html.

[34] **Solov'ev, A.F.** (1978). On the curvature of the connection induced on a hyperdistribution in a Riemannian space, *Geom. Sb.*, *19*, 12–23 (in Russian).

[35] **Solov'ev, A.F.** (1979). The bending of hyper distributions, *Geom. Sb.*, *19*, 12–23 (in Russian).

[36] **Solov'ev, A.F.** (1982). The second fundamental form of a distribution, *Akademiya Nauk SSSR. Matematicheskie Zametki*, *31*(1), 139–146, (in Russian); translated in Math.Notes 31 (1982), 71–75.

[37] **Yıldız, A.** (2017). f-Kenmotsu manifolds with the Schouten–van Kampen connection, *Institut Mathématique. Publications. Nouvelle Série*, *102(116)*, 93–105.

ÖZGEÇMİŞ

Ad–Soyad : Semra ZEREN

Doğum Tarihi ve Yeri : 22.09.1982, Malatya

E-Posta : zerensemra@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü
- **Y. Lisans:** Fırat Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

ÇALIŞMALAR (Makaleler, Bildiriler, Patentler v.b.)

- **Zeren, S., Yıldız, A., 2020.** On Trans-Sasakian Manifolds with the Schouten-van KampenConnection , *Konuralp Journal of Mathematics, 8(2), 152-157*