T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

KOMPLEKS GEOMETRİDE KONFORM RİEMANN DÖNÜŞÜMLERİ

Şener YANAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

TEMMUZ 2019

Tezin Başlığı : Kompleks Geometride Konform Riemann Dönüşümleri

Tezi Hazırlayan : Şener YANAN

Sınav Tarihi : 04.07.2019

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Bayram ŞAHİN** ....
Ege Üniversitesi

Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ ....
İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. Mustafa Habil GÜRSOY ....
İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. Mehmet Akif AKYOL ....
Bingöl Üniversitesi

Doç. Dr. Muhittin Evren AYDIN ....
Fırat Üniversitesi

Prof. Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum ”Kompleks Geometride Konform Riemann Dönüşümleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Şener YANAN

ÖZET

Doktora Tezi

KOMPLEKS GEOMETRİDE KONFORM RİEMANN DÖNÜŞÜMLERİ

Şener YANAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

113+v sayfa

2019

Danışman: Prof. Dr. Bayram ŞAHİN

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.Birinci bölümde, tez konusunun tarihsel gelişimi ve tezde yer alan problemlerin tanıtımı yapılmaktadır. İkinci bölümde, sonraki bölümlerde kullanılacak olan temel tanım ve kavramlar ele alınmaktadır.

Üçüncü bölümde, Riemann manifoldları arasındaki konform Riemann dönüşümleri ile hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına holomorfik konform Riemann dönüşümleri, konform invaryant Riemann dönüşümleri ve konform anti-invaryant Riemann dönüşümleri çalışılmaktadır ve örnekler verilmektedir. Bir konform invaryant Riemann dönüşümü ile bir holomorfik konform Riemann dönüşümü arasındaki ilişki incelenmektedir. Konform anti-invaryant Riemann dönüşümlerinin pluriharmonik dönüşüm tanımı aracılığıyla geometrisi incelenmekte ve yatay homotetik dönüşüm olması için bazı şartlar verilmektedir.

Dördüncü bölümde, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlara konform yarı-invaryant Riemann dönüşümleri çalışılmaktadır. Bu dönüşümler için örnekler verilmekte, distribüsyonların geometrisi incelenmektedir. Konform yarı-invaryant Riemann dönüşümlerinin yatay homotetik ve jeodezik olma şartları verilmektedir.

Beşinci bölümde, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlara konform slant Riemann dönüşümleri çalışılmakta ve bu dönüşümler için örnekler verilmektedir. Distribüsyonların integrallenebilir olma şartları sunulmakta, pluriharmonik konform slant Riemann dönüşümlerinin belirlediği geometri araştırılmakta ve konform slant Riemann dönüşümlerinin jeodezik olma şartları verilmektedir.

ANAHTAR KELİMELER: Hemen hemen Hermityen manifoldlar, konform Riemann dönüşümü, konform anti-invaryant Riemann dönüşümü, konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü, konform slant Riemann dönüşümü.

ABSTRACT

Doctorate Thesis

CONFORMAL RIEMANNIAN MAPS ON COMPLEX GEOMETRY

Şener YANAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

113+v pages

2019

Supervisor: Prof. Dr. Bayram ŞAHİN

Being prepared as a doctoral thesis, this study consists of five chapters. In the first chapter, historical development of the thesis subject is explained, and the problems that takes part in the thesis are introduced. In the second chapter, basic definitions and terms which will be used in the next sections, are discussed.

In the third chapter, conformal Riemannian maps between Riemannian manifolds, and holomorphic conformal Riemannian maps from almost Hermitian manifolds to Riemannian manifolds, conformal invariant Riemannian maps and conformal anti-invariant Riemannian maps are studied. Examples about these maps are given. A relation between a conformal invariant Riemannian map and a holomorphic conformal Riemannian map is analysed. The geometry of conformal anti-invariant Riemannian maps is analysed by means of pluriharmonic map notion, and some conditions are given to make it horizontally homothetic map.

In the fourth chapter, conformal semi-invariant Riemannian maps from almost Hermitian manifolds to Riemannian manifolds are studied. Examples about these maps are given and the geometry of the distributions is analysed. Conditions are given for conformal semi-invariant Riemannian maps to be horizontally homothetic and geodesic.

In the fifth chapter, conformal slant Riemannian maps from almost Hermitian manifolds to Riemannian manifolds are studied. Examples about these maps are given. Conditions for distributions to be integrable are presented, the geometry that conformal slant Riemannian maps with pluriharmonic property is being researched and the conditions for conformal slant Riemannian maps to be geodesic are given.

KEYWORDS: Almost Hermitian manifolds, conformal Riemannian map, conformal anti-invariant Riemannian map, conformal semi-invariant Riemannian map, conformal slant Riemannian map.

TEŞEKKÜR

Doktora tezi olarak sunduğum bu çalışma İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde yapılmıştır.

Tez konumu veren ve bu çalışmanın her aşamasında yardım, öneri ve desteklerini esirgemeden beni yönlendiren danışman hocam sayın Prof. Dr. Bayram ŞAHİN'e, ayrıca doktora eğitimim boyunca beni yönlendiren, değerli görüş ve önerileriyle bana rehberlik eden Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Sadık KELEŞ, öğretim üyeleri Prof. Dr. Erol KILIÇ ve Doç. Dr. Cumali YILDIRIM'a, çalışma hayatımda gösterdiği kolaylıklardan dolayı Adıyaman Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Manaf MANAFLI'ya ve her zaman desteklerini gördüğüm Matematik Bölümü öğretim üyelerine ve öğretim elemanlarına teşekkür ederim.

Eğitim-öğretim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Şener YANAN

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜR iii

İÇİNDEKİLER iv

SİMGELER VE KISALTMALAR v

1 GİRİŞ 1

2 TEMEL KAVRAMLAR 5
- 2.1 Riemann Manifoldları 5
- 2.2 Bir Dönüşüm Boyunca Tanımlı Geometrik Kavramlar 14
- 2.3 Kompleks Manifoldlar 17
- 2.4 Riemann Manifoldları Arasında Konform Dönüşümler 21

3 HEMEN HEMEN HERMİTYEN MANİFOLDLAR ÜZERİNDE TANIMLI HOLOMORFİK KONFORM VE KONFORM ANTİ-İNVARYANT RİEMANN DÖNÜŞÜMLERİ 26
- 3.1 Riemann Manifoldları Arasında Konform Riemann Dönüşümleri 26
- 3.2 Holomorfik Konform Riemann Dönüşümleri 37
- 3.3 Konform Anti-İnvaryant Riemann Dönüşümleri 42

4 KONFORM YARI-İNVARYANT RİEMANN DÖNÜŞÜMLERİ 60
- 4.1 Konform Yarı-İnvaryant Riemann Dönüşümleri 60
- 4.2 Yatay Homotetik Konform Yarı-İnvaryant Riemann Dönüşümleri 68
- 4.3 Jeodezik Konform Yarı-İnvaryant Riemann Dönüşümleri 76

5 KONFORM SLANT RİEMANN DÖNÜŞÜMLERİ 83
- 5.1 Konform Slant Riemann Dönüşümleri 83
- 5.2 Pluriharmonik Konform Slant Riemann Dönüşümleri 95
- 5.3 Jeodezik Konform Slant Riemann Dönüşümleri 107

KAYNAKLAR 109

ÖZGEÇMİŞ 113

SİMGELER VE KISALTMALAR

M	Manifold
g	Metrik Tensör
T_pM	Tanjant Uzay
TM	Tanjant Demet
$\chi(M)$ veya $\Gamma(TM)$	M manifoldunun Vektör Alanlarınının Uzayı
F_*	Türev Dönüşümü
${}^*F_*$	Adjoint Dönüşümü
$\mathcal{D}$	Distribüsyon
∇	Lineer Konneksiyon
∇F_*	Dönüşümün İkinci Temel Formu
∇^F	F-Dönüşümü Boyunca Geri Çekme Konneksiyonu
$[,]$	Lie Braket (Parantez) Operatörü
Ω	Temel 2-form
A	Yatay Tensör Alanı
T	Dikey Tensör Alanı
$\mathcal{B}$	Temel Vektör Alanı
J	Hemen Hemen Kompleks Yapı
λ	Konform Faktörü
$\text{çek}F_*$ veya $\mathcal{V}$	Dikey Distribüsyon
$(\text{çek}F_*)^\perp$ veya $\mathcal{H}$	Yatay Distribüsyon
$\text{gör}F_*$	Görüntü Uzayı
$(\text{gör}F_*)^\perp$	Görüntü Uzayının Tümleyeni
h_f	f-Dönüşümünün Hessiyan Tensörü
H_f	f-Dönüşümünün Hessiyan Formu

1. GİRİŞ

Riemann manifoldları arasındaki diferensiyellenebilir dönüşümler, geometrik yapıları karşılaştırmak için kullanılan yöntemlerden biridir. İzometrik immersiyonlar (Riemann altmanifoldları) ve Riemann submersiyonları Riemann geometrinin temelini oluşturan dönüşüm türleridir. Bu dönüşümler, üzerlerinde tanımlı olan Riemann metrikleri ve Jakobiyen matrisleriyle karakterize edilir. Öyleki, (M, g_M) ve (N, g_N) Riemann manifoldları arasındaki bir diferensiyellenebilir dönüşüm $F : (M, g_M) \longrightarrow (N, g_N)$ olsun. Eğer F_* dönüşümü bire-bir ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ vektör alanları için

$$g_N(F_*(X), F_*(Y)) = g_M(X, Y)$$

denklemi sağlanıyorsa F ye bir **izometrik immersiyon** denir. Eğer F_* türev dönüşümü örten ve $(\text{ç}ekF_*)^\perp$ yatay vektör alanları için yukarıdaki denklemi sağlayan diferensiyellenebilir F dönüşümü varsa F ye bir **Riemann submersiyonu** denir. Riemann manifoldları arasındaki Riemann submersiyonları ilk olarak O'Neill [28] ve Gray [16] tarafından çalışılmıştır. İzometrik immersiyonların diferensiyel geometrisi bir çok çalışmada kendine yer bulmuştur. Lakin, Riemann submersiyonları izometrik immersiyonların tersine çok fazla çalışılmamış olup yakın zamanlarda çalışılmaya başlanılmıştır [13, 43].

Altmanifoldların diferensiyel geometrisinde en aktif çalışılan dallardan biri Kaehler manifoldların altmanifoldları teorisidir. Bu bağlamda, Riemann geometri ve kompleks değişkenler teorisi Kaehler tarafından birleştirilerek [21], ileriki yıllarda kompleks manifold teorisinin içerisine yerleştirilmiştir [12, 25]. Bir Riemann yüzeyi, kompleks Öklidyen uzay ve kompleks projektif uzay, kompleks manifoldlara örnek olarak verilebilir. Bu manifoldların sentezinden ise Kaehler geometri geliştirilmiştir. Kaehler geometri ise genel görecelilik teorisi ve uzay-zaman geometrisini anlamada kullanışlı tekniklere sahiptir.

İzometrik immersiyonlar ve Riemann submersiyonlarının daha genel bir durumu olan Riemann manifoldları arasındaki Riemann dönüşümleri Fischer tarafından şöyle tanımlanmıştır [14]. $F : (M, g_M) \longrightarrow (N, g_N)$ Riemann manifoldları arasındaki bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $p \in M$ noktasında F_* lineer dönüşümünün çekirdek uzayı $\text{ç}ekF_{*p}$ ve ortogonal tümleyen uzayının $\mathcal{H}_p = (\text{ç}ekF_{*p})^\perp$ olduğunu kabul edelim.

M nin $p \in M$ noktasındaki tanjant uzayı

$$T_pM = \text{ç}ekF_{*p} \oplus \mathcal{H}_p$$

ayrışımına sahiptir. $p \in M$ noktasında F_* lineer dönüşümünün görüntüsü $görF_{*p}$ ve ortogonal tümleyen uzayının $(görF_{*p})^{\perp}$ olduğunu kabul edelim. Böylece, N nin $T_{F(p)}N$ tanjant uzayı $p \in M$ noktasında

$$T_{F(p)}N = görF_{*p} \oplus (görF_{*p})^{\perp}$$

ayrışımına sahiptir. $p_1 \in M$ noktasında $p_2 = F(p_1)$ olmak üzere

$$((\text{ç}ekF_{*p_1})^{\perp}, g_M(p_1)|_{(\text{ç}ekF_{*p_1})^{\perp}})$$

ve

$$(görF_{*p_1}, g_N(p_2)|_{görF_{*p_1}})$$

iç çarpım uzayları arasındaki $F^h_{*p_1} : (\text{ç}ekF_{*p_1})^{\perp} \longrightarrow (görF_{*p_1})$ yatay kısıtlaması bir lineer izometri ise $F : (M, g_M) \longrightarrow (N, g_N)$ diferensiyellenebilir dönüşümüne **Riemann dönüşümü** denir. Böylece, bir Riemann dönüşümünün kısmi izometrik bir dönüşüm olduğu Fischer tarafından gösterilmiştir [14]. Başka bir deyişle, $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ için F_* türev dönüşümü

$$g_N(F_*(X), F_*(Y)) = g_M(X, Y)$$

denklemini sağlar. Buradan, izometrik immersiyonlar ve Riemann submersiyonları sırasıyla $\text{ç}ekF_{*p} = 0$ ve $(görF_{*p})^{\perp} = 0$ olan özel Riemann dönüşümleridir. Riemann dönüşümlerinin bir diğer özelliği ise $\|F_*\|^2 = rankF$ genelleştirilmiş eikonal denklemini sağlamasıdır ki bu denklem geometrik optik ile fiziksel optik arasında bir köprü görevi görür.

Riemann dönüşümleri son zamanlarda yoğun bir şekilde çalışılmıştır. Özellikle, hemen hemen Hermityen manifoldlar arasında tanımlanan Riemann dönüşümleri, Riemann manifoldları arasında tanımlanan Riemann dönüşümleri ile Riemann manifoldlardan kompleks manifoldlara tanımlanan Riemann dönüşümlerinin invaryant, anti-invaryant, yarı-invaryant ve slant dönüşüm olma durumları incelenmiştir [31, 34, 36, 44].

Sonrasında, Akyol ve Şahin tarafından özelde kompleks geometride konform Riemann submersiyonları, konform anti-invaryant Riemann submersiyon, konform yarı-invaryant Riemann submersiyon ve konform slant Riemann submersiyon başlıkları altında incelenmiştir. Ayrıca, bazı özel Riemann dönüşüm türleri [1, 17, 18, 38, 45, 46] de çalışılmıştır. Yakın geçmişte ise, Riemann manifoldlardan kompleks manifoldlara tanımlanan slant Riemann dönüşümleri, konform anti-invaryant Riemann dönüşümleri, konform slant Riemann dönüşümleri çalışılmıştır [3, 6, 37].

Bu tezde, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlarına konform Riemann dönüşümleri çalışılmaktadır. İkinci bölümde, ileriki bölümlerde kullanılacak olan Riemann manifoldları, bir dönüşüm boyunca tanımlı geometrik kavramlar, kompleks manifoldlar ve Riemann manifoldları arasındaki konform dönüşümler sunulmaktadır.

Tezin orjinal bölümleri üç, dört ve beşinci bölümlerdir. Üçüncü bölümde, hemen hemen Hermityen manifoldlar üzerinde tanımlı holomorfik konform ve konform anti-invaryant Riemann dönüşümleri çalışılmaktadır. Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. İlkinde, Riemann manifoldları arasında konform Riemann dönüşümleri tanımlanıp örnekler verilmektedir. Distribüsyonların integrallenebilir ve tamamen jeodezik olma durumları incelenmiştir. İkinci alt bölümde, holomorfik konform Riemann dönüşümleri ile konform invaryant Riemann dönüşümleri incelenerek örnek verilmiştir. Üçüncü alt bölümde, konform anti-invaryant Riemann dönüşümleri tanımlanarak örnekler verilmiştir. Bu dönüşüm türünün yatay homotetik olma şartları pluriharmonik dönüşüm yardımıyla irdelenmiştir.

Dördüncü bölümde, konform yarı-invaryant Riemann dönüşümleri çalışılmıştır. Birinci alt bölümde, konform yarı-invaryant Riemann dönüşümleri çalışılarak yatay ile dikey distribüsyonların integral manifoldlarının geometrisi incelenmektedir. İkinci alt bölümde, konform yarı invaryant Riemann dönüşümlerinin yatay homotetik dönüşüm olma şartları bulunmaktadır. Üçüncü alt bölümde ise konform yarı-invaryant Riemann dönüşümlerinin jeodezik olma şartları sunulmaktadır.

Beşinci bölüm, üç alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde konform slant

Riemann dönüşümü tanımlanmakta ve örnekler verilmektedir. Distribüsyonların integrallenebilirliği sunulmaktadır. İkinci alt bölümde pluriharmonik konform slant Riemann dönüşümlerinin belirlediği geometri araştırılmaktadır. Üçüncü alt bölümde ise bir konform slant Riemann dönüşümünün tamamen jeodezik olması incelenmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde manifoldlar için bazı temel kavramlar ve bunların özellikleri ile örnek verilecektir. Bu bölüm, dört alt bölümden oluşmaktadır. Birinci alt bölümde Riemann manifoldları, Riemann manifoldları arasındaki izometrik immersiyonlar ve Riemann submersiyonları verilmektedir. İkinci alt bölümde iki Riemann manifoldu arasında tanımlanan bir dönüşümün tanımladığı geometrik kavramlar verilecektir. Üçüncü alt bölümde kompleks manifoldlar ile kompleks manifoldlar üzerinde tanımlanan çeşitli submersiyon ve Riemann dönüşümleri tanıtılacaktır. Son olarak, dördüncü alt bölümde ise Riemann manifoldları arasındaki konform dönüşümler verilecektir.

2.1 Riemann Manifoldları

Tanım 2.1.1. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M üzerinde simetrik, pozitif tanımlı, bilineer g formu varsa, yani

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \longrightarrow C^{\infty}(M,R)$$

bilineer formu

$$g(X,Y) = g(Y,X)$$

ve

$$g(X,X) \geq 0 (\Leftrightarrow X = 0 \ \ ise)$$

şartlarını sağlıyorsa (M,g) ikilisine **Riemann manifoldu** ve g metriğine de **Riemann metriği** denir [10].

Bir X vektör alanının uzunluğu $|X| = \sqrt{g(X,X)}$ olup X ve Y vektör alanları arasındaki açı $\cos\theta = \frac{g(X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y)}$ dir.

Tanım 2.1.2. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$F : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir C^{∞} dönüşüm olsun. Her $x \in M$ ve $U_x, V_x \in T_xM$ için

$$g(U_x,V_x) = h(F_*(U_x),F_*(V_x))$$

oluyorsa F dönüşümüne M den N ye bir **izometri** denir [8, 17].

Tanım 2.1.3. M bir manifold, ∇ afin konneksiyon ve $[,]$ Lie braketi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} T:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM) &\rightarrow \Gamma(TM) \\ (X,Y) &\rightarrow T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y] \end{aligned}$$

tensörüne **torsiyon tensörü** denir [23].

Teorem 2.1.1. *Bir Riemann manifoldu üzerinde*
(1) $T(X,Y)=0$ *yani* $[X,Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X,$
(2) $(\nabla_X g)(Y,Z)=0$ *yani* $Xg(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)$
olacak şekilde bir tek ∇ *afin konneksiyonu vardır [23].*

Tanım 2.1.4. M bir manifold ve $\forall X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için $T(X,Y)=0$ ise ∇ konneksiyonuna **torsiyonsuz** denir. Böylece her Riemann manifoldu torsiyonsuz konneksiyona sahiptir [23].

Tanım 2.1.5. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $\gamma:I\longrightarrow M$ bir eğri olsun. $X\in\Gamma(TM)$ vektör alanı için $\dot{\gamma}=\gamma_*(\frac{\partial}{\partial t})$ olmak üzere $\nabla_{\dot{\gamma}}X=0$ ise X vektör alanına γ **boyunca paraleldir** denir [9].

Tanım 2.1.6. $\gamma:I\longrightarrow M$ bir eğri olsun. Eğer $\nabla_{\frac{d}{dt}}\dot{\gamma}=0$ ise γ ya **jeodezik** denir [9].

Teorem 2.1.2. (M,g) *bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda her* $v\in T_pM$ *için* $\dot{\gamma}(t_0)=v$ *olacak şekilde* $\gamma:I\longrightarrow M$ *jeodeziği vardır ve tektir [9].*

Tanım 2.1.7. M^m, $\overline{M}^n$ Riemann manifoldları olsunlar. $f:M\longrightarrow\overline{M}$ C^∞ dönüşümü için $boy(f_*(T_pM))=m$ ise f nin $p\in M$ noktasındaki rankı m olup $rank(f)=m$ ile gösterilir. Eğer $boy(M)=rank(f)$ ise f ye **immersiyon (daldırma)** denir. Bu durumda, M ye de $\overline{M}$ nin **immersed alt manifoldu** denir. Eğer, f immersiyonu 1-1 ise f ye **imbedding (gömme)**, M ye de $\overline{M}$ nin **(gömülen) altmanifoldu** denir [19, 20].

Tanım 2.1.8. (M,g) ve $(\overline{M},\overline{g})$ Riemann manifoldları olsun. $i:M\longrightarrow\overline{M}$ inclusion dönüşümünü gözönüne alalım. Her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için $g(X,Y)=\overline{g}(i_*X,i_*Y)$ ise M ye $\overline{M}$ nın **Riemann altmanifoldu** ve i dönüşümüne de **izometrik immersiyon** denir [17].

i inclusion dönüşümü olduğundan $i(M) = M$ ve $i_*(X) = X$ alınacaktır. $p \in M$ için (T_pM, g) ve $(T_{i(p)}\overline{M}, \overline{g})$ de iç çarpım uzayları oluşturur. $X \in \Gamma(TM)$ için $i_*(X) = X$ olacağından X vektör alanına M boyunca bir vektör alanı denir. $i_* : T_pM \longrightarrow T_{i(p)}\overline{M}$ dönüşümü ve $X \in \Gamma(TM)$ için $X_p \in T_{i(p)}\overline{M}$ ise

$$T_pM^{\perp} = \{X \in T_p\overline{M} | \overline{g}(X,Y) = 0, \forall Y \in T_pM\}$$

olup

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp}$$

olarak yazılabilir. Burada $T_pM^{\perp}$ altuzayına altmanifoldun normal uzayı denir.

Tanım 2.1.9. $\overline{M}^m$ bir manifold olsun. $\overline{M}$ üzerinde

$$\mathcal{D} : \overline{M} \longrightarrow T_x\overline{M}$$

$$x \longrightarrow \mathcal{D}_x \subset T_x\overline{M}$$

ile tanımlanan $\mathcal{D}$ dönüşümüne bir **distribüsyon** denir [11].

$X \in \Gamma(T\overline{M})$ için $X_p \in \mathcal{D}_p$ ise X vektör alanına $\mathcal{D}$ distribüsyonuna aittir denir. Eğer her p noktası için $\mathcal{D}$ distribüsyonuna ait r-tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı varsa $\mathcal{D}$ distribüsyonuna diferensiyellenebilirdir denir ve $\mathcal{D}$ distribüsyonunun boyutu r- dir [30].

Tanım 2.1.10. $\overline{M}$ bir C^{∞} manifold ve $\overline{M}$ manifoldu üzerinde $\mathcal{D}$ q-boyutlu bir C^{∞} distribüsyon ve $\overline{M}$ nin altmanifoldu M olsun. Eğer her $x \in M$ noktasında M altmanifoldunun tanjant uzayı ile $\mathcal{D}_x$ aynı ise M manifolduna $\mathcal{D}$ nin **integral altmanifoldu** denir [11]. Yani

$$\pi : M \longrightarrow \overline{M}$$

bir imbedding olmak üzere $\forall x \in M$ için

$$\pi_x(T_xM) = \mathcal{D}_x$$

dir. Eğer $\mathcal{D}$ distribüsyonunun M altmanifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa M altmanifolduna $\mathcal{D}$ nin bir **maksimal integral manifoldu(leaf)** denir [11].

Tanım 2.1.11. $\overline{M}$ bir C^∞ manifold ve $\overline{M}$ nin altmanifoldu M olsun. Eğer $\forall x \in M$ için $\mathcal{D}$ distribüsyonunun x noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa $\mathcal{D}$ distribüsyonuna **integrallenebilirdir** denir [17].

Tanım 2.1.12. $\overline{M}$ bir C^∞ manifold ve $\mathcal{D}$, $\overline{M}$ üzerinde bir distribüsyon olsun. Eğer $X,Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ için $[X,Y] \in \Gamma(\mathcal{D})$ ise $\mathcal{D}$ distribüsyonuna **involütivedir** denir [30].

Teorem 2.1.3. *M manifoldu üzerindeki bir $\mathcal{D}$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\mathcal{D}$ distribüsyonunun involutive olmasıdır. Diğer taraftan, her $x \in M$ noktasından $\mathcal{D}$ nin bir tek maksimal integral manifoldu geçer ve x noktasını içeren diğer tüm integral manifoldları maksimal integral manifoldlarından birinin bir açık altmanifoldudur [43].*

Tanım 2.1.13. (M,g) bir Riemann manifoldu ve (M,g) üzerindeki lineer konneksiyon da ∇ olsun. Eğer $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(\mathcal{D})$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma(\mathcal{D})$$

ise $\mathcal{D}$ distribüsyonuna **paraleldir** denir [17].

Bu kısımda submersiyon, Riemann submersiyon tanımları verilecektir. Bu tanımlar ve bazı geometrik kavramlar kullanılarak eğrilikler incelenecektir.

Tanım 2.1.14. (M^m,g) ve (N^n,h) Riemann manifoldları olmak üzere bir

$$F : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

örten C^∞ dönüşümü için

$$rank dF_x = boy N$$

oluyorsa F ye $x \in M$ noktasında bir **submersiyon** denir [13, 17].

Herhangi bir $x \in N$ için $F^{-1}(x)$ üzerindeki lif, (M,g) manifoldunun $r = (m-n)$-boyutlu bir altmanifoldudur. $F^{-1}(x)$ altmanifoldlarına **submersiyonun lifleri** denir [17].

Tanım 2.1.15. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$F:(M,g)\longrightarrow(N,h)$$

bir C^{∞} dönüşüm olsun. $x\in M$ için

$$\mathcal{V}_x = \text{çek}dF_x = \{X\in T_xM | dF_x(X)=0\}\subset T_xM$$

ve

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{V}_x^{\perp}\subset T_xM$$

olarak tanımlayalım. $\mathcal{V}_x$ uzayına F dönüşümünün x noktasındaki **dikey uzayı** denir. $\mathcal{V}_x$ dikey uzayının dik tümleyen uzayı olan $\mathcal{H}_x$ e F dönüşümünün x noktasındaki **yatay uzayı** denir [8, 17].

Böylece, M Riemann manifoldu $x\in M$ de

$$T_xM = \mathcal{V}_x\oplus\mathcal{H}_x = \mathcal{V}_x\oplus\mathcal{V}_x^{\perp}$$

ortogonal ayrışımına sahiptir.

Tanım 2.1.16. M üzerindeki herhangi bir X vektör alanı yatay distribüsyona aitse X vektör alanına **yatay vektör alanı** denir ve yatay vektör alanlarının kümesi $\Gamma(\mathcal{H})$ ile gösterilir [17].

Tanım 2.1.17. M üzerindeki herhangi bir X vektör alanı dikey distribüsyona aitse X vektör alanına **dikey vektör alanı** denir ve dikey vektör alanlarının kümesi $\Gamma(\mathcal{V})$ ile gösterilir [17].

Herhangi bir $E\in\Gamma(TM)$ vektör alanının dikey ve yatay bileşenleri sırasıyla vE ve hE ile gösterilir [17].

Tanım 2.1.18. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde **izdüşürülebilir vektör alanlarının uzayı** $\Gamma(\mathcal{C})$ ile gösterilir. Yani $\Gamma(\mathcal{C})$ uzayının her elemanı M üzerinde bir vektör alanıdır öyleki N üzerindeki bir vektör alanına F-bağlıdır [47].

Tanım 2.1.19. M ve N Riemann manifoldları olsunlar. Eğer X yatay ve N üzerindeki bir X' vektör alanına F-bağlı ise M üzerindeki X vektör alanına **temel (basic) vektör alanı** denir [17].

Temel vektör alanlarının uzayı

$$\Gamma(\mathcal{B}) = \Gamma(\mathcal{C}) \cap \Gamma(\mathcal{H})$$

dır.

Tanım 2.1.20. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları arasındaki bir

$$F : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

C^∞ submersiyonu için her $p \in M$ noktasında F_{*p} türev dönüşümü yatay vektörlerin uzunluğunu koruyorsa yani

$$g_p(u,v) = h_{F(p)}(F_{*p}u, F_{*p}v), \quad u,v \in \mathcal{H}_p, p \in M$$

ise F dönüşümüne bir **Riemann submersiyonu** denir [13, 17].

Önerme 2.1.1. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları,*

$$F : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu, M ve N nin Levi-Civita konneksiyonları ∇ ve ∇' olsun. M üzerindeki X,Y temel vektör alanları N üzerindeki X',Y' vektör alanlarına F-bağlı olsun. Burada

(1) $g(X,Y) = h(X',Y') \circ F$

(2) *$h[X,Y]$ temel vektör alanı $[X',Y']$ vektör alanına F-bağlıdır.*

(3) *$h(\nabla_X Y)$ temel vektör alanı $\nabla'_{X'} Y'$ vektör alanına F-bağlıdır.*

(4) *Herhangi bir $V \in \Gamma(\mathcal{V})$ için $[X,V]$ dikey vektör alanıdır [17].*

Riemann submersiyonları için B. O'Neill tarafından tanımlanan temel tensörler tanıtılacaktır.

Tanım 2.1.21. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

dönüşümü Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $(1,2)$ mertebeli T **temel tensör alanı** $E,F \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$T(E,F) = T_E F = h\nabla_{vE} vF + v\nabla_{vE} hF \tag{2.1.1}$$

ile tanımlanır [17, 28].

T temel tensör alanının özelliklerini verelim.

i) $E,F \in \Gamma(TM)$ için T_E anti-simetrik ve lineer operatördür. Yani $g(T_E F,G) = -g(T_E G,F)$ dir.

ii) $E \in \Gamma(TM)$ için T_E yatay ve dikey altuzayların rollerini değiştirir.

iii) T dikey tensör alanıdır. Yani $E \in \Gamma(TM)$ için $T_E = T_{vE}$ dir.

iv) T dikey tensör alanı simetriktir. Yani $V,W \in \Gamma(\mathcal{V})$ için $T_V W = T_W V$ dir [17, 28].

Tanım 2.1.22. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $(1,2)$ mertebeli A **temel tensör alanı** $E,F \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$A(E,F) = A_E F = v\nabla_{hE} hF + h\nabla_{hE} vF \tag{2.1.2}$$

ile tanımlanır [17, 28].

A temel tensör alanının özelliklerini verelim.

i) $E,F \in \Gamma(TM)$ için A_E anti-simetrik ve lineer operatördür. Yani $g(A_E F,G) = -g(A_E G,F)$ dir.

ii) $E \in \Gamma(TM)$ için A_E yatay ve dikey altuzayların rollerini değiştirir.

iii) A yatay tensör alanıdır. Yani $E \in \Gamma(TM)$ için $A_E = A_{hE}$ dir.

iv) A yatay tensör alanı alterneleyendir. Yani $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ için $A_X Y = -A_Y X$ dir [17, 28].

Aksi belirtilmedikçe liflerin geometrik özelliklerini ˆ sembolü ile göstereceğiz.

Lemma 2.1.1. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve*

$$F : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

dönüşümü Riemann submersiyonu olmak üzere $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H})$ ve $V, W \in \Gamma(\mathcal{V})$ için

$$\begin{aligned} \nabla_V W &= T_V W + \hat{\nabla}_V W, & (2.1.3)\\ \nabla_V X &= h\nabla_V X + T_V X, & (2.1.4)\\ \nabla_X V &= A_X V + v\nabla_X V, & (2.1.5)\\ \nabla_X Y &= h\nabla_X Y + A_X Y & (2.1.6) \end{aligned}$$

dir [17].

Teorem 2.1.4. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve*

$$F : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $\mathcal{H}$ yatay distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $A = 0$ olmasıdır [13].

T dikey tensör alanının $\Gamma(\mathcal{V}) \times \Gamma(\mathcal{V})$ ye kısıtlanması herhangi bir $F^{-1}(x)$ lifinin ikinci temel formuna karşılık gelir.

Tanım 2.1.23. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$F : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

dönüşümü bir Riemann submersiyonu olsun. Eğer T tensör alanı sıfır ise F dönüşümünün herhangi bir $F^{-1}(x)$ lifine M manifoldunun **tamamen jeodezik altmanifoldu** denir [13, 17].

Tanım 2.1.24. $f : (M,g) \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. (M,g) üzerinde f **dönüşümünün gradyenti**

$$\nabla f = g^{\sharp}(df)$$

olarak tanımlanır [15]. Burada, $g^{\sharp} : \Gamma(TM^{*}) \to \Gamma(TM)$ dönüşümü $g^{\flat} : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM^{*})$, $g^{\flat}(X) = g(X,\cdot)$ şeklinde tanımlanan müzikal izomorfizmin tersidir.

∇f, M üzerinde bir vektör alanıdır ve $X \in \Gamma(TM)$ için

$$g(\nabla f, X) = df(X) = X(f)$$

olarak tanımlanır [15].

Tanım 2.1.25. $f : (M,g) \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun.

$$h_f : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

$$h_f(X) = \nabla_X \nabla f$$

lineer dönüşümüne (M,g) üzerinde f fonksiyonunun **Hessian tensörü** denir [15].

Önerme 2.1.2. *$f : (M,g) \to \mathbb{R}$ dönüşümünün Hessian tensörü h_f olsun. Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için h_f self-adjointtir. Yani*

$$g(h_f(X),Y) = g(X,h_f(Y))$$

dir [15].

Tanım 2.1.26. $f : (M,g) \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun.

$$H_f : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^{\infty}M$$

$$H_f(X,Y) = g(h_f(X),Y)$$

lineer dönüşümüne (M,g) üzerinde f nin **Hessian formu** denir [15].

f fonksiyonunun Hessian tensörü self-adjoint olduğundan, Hessian formu (M,g) üzerinde simetrik, $(0,2)$ tipli tensör alanıdır.

2.2 Bir Dönüşüm Boyunca Tanımlı Geometrik Kavramlar

Bu bölümde M_1 ve M_2 Riemann manifoldları arasında tanımlı f dönüşümünün belirlediği geometrik kavramlar tanıtılacaktır.

Tanım 2.2.1. $f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm olsun. $\forall p_1 \in M_1$ için $X(p_1) \in T_{f(p_1)}M_2$ ise $X : M_1 \to TM_2$ dönüşümüne f **boyunca bir vektör alanı** denir [15].

$f : M_1 \to M_2$ dönüşümü boyunca vektör alanlarının kümesini $\Gamma_f(TM_2)$ ile göstereceğiz. $\Gamma_f(TM_2)$ kümesi $C^\infty(M_1)$ halkası üzerinde bir modüldür. Özel olarak $M_1 = M_2 = M$ ve f birim ise $\Gamma_{f=birim}(TM) = \Gamma(TM)$, M üzerindeki vektör alanlarının kümesidir.

$f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm olsun. $X \in \Gamma(TM_1)$ ve f dönüşümünün tanjant dönüşümü $f_* : TM_1 \to TM_2$ olmak üzere $f_*X : M_1 \to TM_2$ dönüşümü $(f_*X)(p_1) = f_{*p_1}X(p_1)$ şeklinde tanımlanan f boyunca bir vektör alanıdır. $Y \in \Gamma(TM_2)$ ise $Y \circ f$ de f boyunca bir vektör alanıdır. Bütün $Y \circ f \in \Gamma_f(TM_2)$ vektör alanlarının kümesi $C^\infty(M_1)$ üzerinde $\Gamma_f(TM_2)$ için lokal baz alanlarını içerir. Eğer $f_*X = Y \circ f$ ise $X \in \Gamma(TM_1)$ ve $Y \in \Gamma(TM_2)$ vektör alanlarına f bağlı denir [15].

Tanım 2.2.2. $f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm olsun. $X,Y \in \Gamma(TM_1)$ ve $U,V \in \Gamma_f(TM_2)$ için bir $\nabla : \Gamma(TM_1) \times \Gamma_f(TM_2) \to \Gamma_f(TM_2)$ dönüşümü

i) $\nabla_{X+Y}U = \nabla_X U + \nabla_Y U$

ii) $\nabla_{hX}U = h\nabla_X U,\, h \in C^\infty(M_1)$

iii) $\nabla_X(U+V) = \nabla_X U + \nabla_X V$

iv) $\nabla_X(hU) = X(h)U + h\nabla_X U,\, h \in C^\infty(M_1)$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya f **boyunca konneksiyon** denir [15].

Özel olarak $M_1 = M_2 = M$ ve f birim ise ∇, M üzerindeki konneksiyondur.

$f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm ve M_2 üzerinde f boyunca bir konneksiyon ∇ olsun. Yukarıdaki tanımın **(1)** ve **(2)** özelliğinden $C^\infty(M_1)$ üzerindeki ∇ dönüşümünün lineerliğini gösterebiliriz. $p_1 \in M_1$ olmak üzere $(\nabla_X U)(p_1)$ değeri yalnız X vektör alanının p_1 deki değerine bağlıdır. Dolayısıyla $\nabla_x U$, $X \in \Gamma(TM_1)$ ve $X(p_1) = x$ olmak üzere

$$\nabla_x U = (\nabla_X U)(p_1)$$

şeklinde tanımlanır [15].

Tanım 2.2.3. $f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm ve M_2 üzerinde f boyunca bir konneksiyon ∇ olsun. $\forall U \in \Gamma_f(TM_2)$ için

$$\begin{aligned} \nabla U : \Gamma(TM_1) &\to \Gamma_f(TM_2) \\ X &\to (\nabla U)(X) = \nabla_X U \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme U **vektör alanının kovaryant türevi** denir. $U \in \Gamma_f(TM_2)$ için $\nabla U = 0$ ise U ya **paraleldir** denir [15].

Teorem 2.2.1. *$f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm ve M_2 üzerinde bir konneksiyon $\overset{2}{\nabla}$ olsun. $Y \in \Gamma(TM_2)$ için f boyunca*

$$\overset{2}{\nabla}{}^f{}_X (Y \circ f) = \overset{2}{\nabla}_{f_* X} Y$$

olacak şekilde M_2 üzerinde bir tek $\overset{2}{\nabla}{}^f$ konneksiyonu vardır [15].

Tanım 2.2.4. $f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm ve M_2 üzerinde bir konneksiyon $\overset{2}{\nabla}$ olsun. f boyunca M_2 üzerindeki $\overset{2}{\nabla}{}^f$ konneksiyonuna f boyunca $\overset{2}{\nabla}$ konneksiyonunun **geri çekme konneksiyonu (pullback)** denir [15].

Teorem 2.2.2. *M_1 bir manifold, (M_2, g_2) Riemann manifoldu için $\overset{2}{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu olsun. $f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm ve f boyunca $\overset{2}{\nabla}$ nin pullbackini de $\overset{2}{\nabla}{}^f$ ile gösterelim. Bu durumda*

i) $X g_2(U,W) = g_2(\overset{2}{\nabla}_X U, W) + g_2(U, \overset{2}{\nabla}_X W), X \in \Gamma(TM_1), U, W \in \Gamma_f(TM_2)$

ii) $\overset{2}{\nabla}_X f_* Y - \overset{2}{\nabla}_Y f_* X = f_*[X,Y], X, Y \in \Gamma(TM_1)$

özelliklerini sağlar [15].

Not edelim ki,

$$T : \Gamma(TM_1) \times \Gamma(TM_1) \to \Gamma_f(TM_1)$$

$$T(X,Y) = \overset{2}{\nabla}_X f_* Y - \overset{2}{\nabla}_Y f_* X - f_*[X,Y]$$

dönüşümü lineerdir. $Z \in \Gamma(TM_2)$ için bütün $Z \circ f \in \Gamma_f(TM_2)$, $C^\infty(M_1)$ üzerinde $\Gamma_f(TM_2)$ için lokal baz alanlarını içerir. Dolayısıyla bütün $X,Y \in \Gamma(TM_1)$ için T lineer olduğundan $T(X,Y) = 0$ dır [15].

Tanım 2.2.5. $f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ bir dönüşüm olsun. f boyunca $\overset{2}{\nabla}$ konneksiyonunun geri çekme konneksiyonu $\overset{2}{\nabla}{}^f$ olmak üzere

$$\nabla f_* : \Gamma(TM_1) \times \Gamma(TM_1) \to \Gamma_f(TM_2)$$

$$(\nabla f_*)(X,Y) = \overset{2}{\nabla}{}^f{}_X f_* Y - f_*(\overset{1}{\nabla}_X Y) \tag{2.2.1}$$

şeklinde tanımlanan ∇f_* dönüşümüne f **dönüşümünün ikinci temel formu** denir [15].

İkinci temel form ∇f_* lineer ve simetriktir. $p_1 \in M_1$ noktasında $(\nabla f_*)(X,Y)$ ikinci temel formun değeri yalnızca X ve Y vektör alanlarının $p_1 \in M_1$ deki değerine bağlıdır. Dolayısıyla $X,Y \in \Gamma(TM_1)$,$X(p_1) = x$ ve $Y(p_1) = y$ olmak üzere

$$(\nabla f_*)(x,y) = (\nabla f_*)(X,Y)(p_1)$$

olarak yazılabilir.

Tanım 2.2.6. $f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ bir dönüşüm olsun. Belirli $\forall X \in \Gamma(TM_1)$ için **ikinci temel form**

$$\nabla_X f_* : \Gamma(TM_1) \to \Gamma_f(TM_2)$$

$$(\nabla_X f_*)(Y) = (\nabla f_*)(X,Y)$$

lineer dönüşümüyle tanımlanır [15].

$\nabla_X f_*$ dönüşümünün lineerliği ∇f_* dönüşümünün lineerliğinden kolayca görülebilir. $(\nabla f_*)(X,Y)$ dönüşümünün $p_1 \in M_1$ noktasındaki değeri X,Y vektör alanlarının $p_1 \in M_1$ noktasındaki değerine bağlı olduğundan $\forall x \in T_{p_1}M_1$ için $X,Y \in \Gamma TM_1$ ve $X(p_1) = x$, $Y(p_1) = y$ olmak üzere

$$\nabla_x f_* : T_{p_1}M_1 \to T_{f(p_1)}M_2$$

$$(\nabla_x f_*)(y) = ((\nabla_X f_*)(Y))(p_1) = (\nabla f_*)(X,Y)(p_1)$$

bir lineer dönüşüm tanımlanabilir. Diğer taraftan $f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ bir dönüşümü $\forall p_1 \in M_1$ için

$$f_{*p_1} : (T_{p_1}M_1, g_{1_{p_1}}) \to (T_{f(p_1)}M_2, g_{2_{f(p_1)}})$$

ile tanımlanan dönüşüm $(T_{p_1}M_1, g_{1_{p_1}})$ ve $(T_{f(p_1)}M_2, g_{2_{f(p_1)}})$ iç çarpım uzayları arasında bir lineer dönüşümdür [15].

2.3 Kompleks Manifoldlar

Bu alt bölümde kompleks manifoldlar ve kompleks manifoldlar üzerinde tanımlanan çeşitli submersiyon ve Riemann dönüşümü türleri tanıtılacaktır.

Tanım 2.3.1. M, bir Hausdorff uzayı ve M de bir açık $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ olsun. Eğer $\forall p \in M$ için

$$\psi_\alpha : U_\alpha \subset M \to W_\alpha \subset C^n$$

homeomorfizması var ve $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
\phi_{\alpha\beta} &= \psi_\alpha \circ \psi_\beta^{-1} : \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \\
\phi_{\beta\alpha} &= \psi_\beta \circ \psi_\alpha^{-1} : \psi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \psi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)
\end{aligned}$$

dönüşümleri holomorfik ise M ye **kompleks manifold** denir. C^n ile R^{2n} özdeş olduğundan M, $2n$- boyutlu reel analitik manifolddur. Burada $\{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha \in I}$ ya M nin holomorfik koordinat komşuluğu sistemi denir [24].

Tanım 2.3.2. M reel $2n$- boyutlu manifold ve M üzerinde $(1,1)$ mertebeli tensör alanı J olsun. Bu durumda $p \in M$ için

$$J_p : T_pM \to T_pM$$

lineer dönüşümü T_pM üzerinde bir kompleks yapı ise yani $J^2 = -I$ sağlanıyorsa J ye M üzerinde **hemen hemen kompleks yapı** denir. M manifolduna ise J kompleks yapısıyla beraber bir **hemen hemen kompleks manifold** denir [23, 30].

Tanım 2.3.3. M hemen hemen kompleks manifold ve M nin hemen hemen kompleks yapısı J olsun. $[,]$ Lie parantez operatörü ve $X,Y \in \Gamma(TM)$ için bir vektör değerli

$$N_J(X,Y) = [JX,JY] - [X,Y] - J[JX,Y] - J[X,JY]$$

bilineer fonksiyonuna J nin **Nijenhuis tensör alanı** denir. Eğer, M hemen hemen kompleks manifoldu üzerinde $N_J(X,Y) = 0$ ise M ye bir **kompleks manifold** denir [30].

Sonuç 2.3.1. M hemen hemen kompleks manifold ise $n = 2m$ dir. Burada n, M nin kompleks boyutu, $2m$ ise M nin reel boyutudur [22].

Tanım 2.3.4. M hemen hemen kompleks manifold ve M nin hemen hemen kompleks yapısı J olsun. M üzerinde bir Riemann metriği g olmak üzere $X,Y \in \chi(M)$ için

$$g(JX,JY) = g(X,Y) \tag{2.3.1}$$

ise g bilineer dönüşümüne **Hermityen metrik** denir [23].

Tanım 2.3.5. M hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer M üzerinde g Hermityen metriği tanımlı ise M ye **hemen hemen Hermityen manifold** denir. M bir kompleks manifold ve M üzerinde g Hermityen metriği tanımlı ise M ye **Hermityen manifold** denir [23].

Tanım 2.3.6. M hemen hemen Hermityen manifold, g ve J, M üzerinde sırasıyla Hermityen metrik ve hemen hemen kompleks yapı olsun. $X,Y \in \chi(M)$ için

$$\Omega(X,Y) = g(X,JY) \tag{2.3.2}$$

ile tanımlı tensöre **temel 2-form** denir [23].

Tanım 2.3.7. *M bir hemen hemen kompleks manifold ve g, M üzerinde bir Hermityen metrik olsun. Eğer M üzerinde tanımlanan Ω temel 2- formu kapalı ise yani $d\Omega = 0$ ise g Hermityen metriğine* **Kaehler metrik** *denir [23].*

Tanım 2.3.8. *M hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer M üzerinde g Kaehler metriği tanımlı ise M ye* **hemen hemen Kaehler manifold** *denir. Eğer M bir kompleks manifold ve M üzerinde g Kaehler metriği tanımlı ise M ye* **Kaehler manifold** *denir [23].*

Teorem 2.3.1. *M bir Hermityen manifold olsun. Bu durumda M nin bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla J = 0$ olmasıdır [23].*

Burada, bir kompleks manifold üzerinde tanımlanan submersiyonlardan ve dönüşümlerden bahsedeceğiz.

Tanım 2.3.9. (M_1^m, g_1, J_1) ve (M_2^n, g_2, J_2) $(m > n)$ olacak şekilde hemen hemen Hermityen manifoldlar olsun. $F : (M_1^m, g_1, J_1) \to (M_2^n, g_2, J_2)$ bir C^∞ submersiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa F dönüşümüne bir **hemen hemen Hermityen submersiyon** veya **holomorfik submersiyon** denir [23]:

i) F bir Riemann submersiyon,

ii) F bir hemen hemen kompleks dönüşümdür. Yani, $F_* J_1 = J_2 F_*$ dır.

Tanım 2.3.10. $F : (M_1, g_1, J_1) \to (M_2, g_2, J_2)$ dönüşümü (M_1, g_1, J_1) ve (M_2, g_2, J_2) hemen hemen Hermityen manifoldları arasında tanımlanan bir Riemann dönüşümü olsun. Eğer

$$J_2 F_* = F_* J_1$$

ise $p \in M_1$ noktasında F dönüşümüne bir holomorfik Riemann dönüşümü denir. Eğer F her $p \in M_1$ noktasında bir holomorfik Riemann dönüşümü ise F ye (M_1, g_1, J_1) ve (M_2, g_2, J_2) arasında bir **holomorfik Riemann dönüşümü** denir [38].

Tanım 2.3.11. $F : (M_1^m, g_1, J_1) \to (M_2^n, g_2)$ bir (M_1, g_1, J_1) hemen hemen Hermityen manifoldu ile bir (M_2, g_2) Riemann manifoldu arasındaki $(m > n)$ olmak üzere bir Riemann submersiyon olsun. Eğer dikey distribüsyon J_1 e göre invaryant ise F dönüşümüne bir **invaryant submersiyon** denir. Yani,

$$J_1(\text{ç}ekF_*) = \text{ç}ekF_*$$

dır [40].

Tanım 2.3.12. $F : (M_1^m, g_1, J_1) \to (M_2^n, g_2)$ bir (M_1^m, g_1, J_1) hemen hemen Hermityen manifoldu ile bir (M_2^n, g_2) Riemann manifoldu arasındaki $(m > n)$ olmak üzere bir Riemann submersiyonu olsun. Eğer çekF_*, J_1 ye göre anti-invaryant yani,

$$J_1(\text{ç}ekF_*) \subseteq (\text{ç}ekF_*)^\perp$$

ise F dönüşümüne bir **anti-invaryant Riemann submersiyon** denir [33].

Tanım 2.3.13. $F : (M_1, g_1, J_1) \to (M_2, g_2)$ dönüşümü bir (M_1, g_1, J_1) hemen hemen Hermityen manifoldu ile bir (M_2, g_2) Riemann manifoldu arasında tanımlanan bir Riemann dönüşümü olsun. Eğer

$$J_1(\text{ç}ekF_*) \subset (\text{ç}ekF_*)^\perp$$

şartı sağlanıyorsa F dönüşümüne bir **anti-invaryant Riemann dönüşümü** denir [34]. Burada μ, (ç$ekF_*)^\perp$ de J_1(çekF_*) distribüsyonunun ortogonal tamamlayıcısıdır ve J_1 e göre invaryanttır.

Tanım 2.3.14. $F : (M_1^m, g_1, J_1) \to (M_2^n, g_2)$ bir (M_1^m, g_1, J_1) hemen hemen Hermityen manifoldu ile bir (M_2^n, g_2) Riemann manifoldu arasındaki $(m > n)$ olmak üzere bir Riemann submersiyonu olsun. $D_1 \subseteq$ çekF_* distribüsyonu var,

$$\text{ç}ekF_* = D_1 \oplus D_2$$

ve

$$J_1(D_1) = D_1,\ J_1(D_2) \subseteq (\text{ç}ekF_*)^\perp$$

ise F dönüşümüne bir **yarı-invaryant Riemann submersiyon** denir [41]. Burada D_2, çekF_* da D_1 distribüsyonunun ortogonal tamamlayıcısıdır.

Tanım 2.3.15. $F:(M_1,g_1,J_1)\to(M_2,g_2)$ dönüşümü bir (M_1,g_1,J_1) hemen hemen Hermityen manifoldu ile bir (M_2,g_2) Riemann manifoldu arasında tanımlanan bir Riemann dönüşümü olsun. Eğer $D_1\subseteq$ çekF_* distribüsyonu var,

$$J_1(D_1)=D_1$$

ve D_2, çekF_* da D_1 distribüsyonunun ortogonal tamamlayıcısı olup

$$J_1(D_2)\subseteq(\text{ç}ekF_*)^\perp$$

ise F dönüşümüne bir **yarı-invaryant Riemann dönüşümü** denir [42]. Tanımdan hareketle, ç$ekF_*=D_1\oplus D_2$ dir. Burada μ, (ç$ekF_*)^\perp$ de $J_1(D_2)$ distribüsyonunun ortogonal tamamlayıcısıdır ve J_1 e göre invaryanttır.

Tanım 2.3.16. (M_1,g_1,J_1) ve (M_2,g_2) sırasıyla m ve n $(m>n)$ boyutlu hemen hemen Hermityen manifold ve Riemann manifold olsun. $F:(M_1,g_1,J_1)\to(M_2,g_2)$ bir Riemann submersiyon olsun. Eğer $p\in M_1$ noktasında sıfırdan farklı $X\in$ (ç$ekF_*)_p$ vektörü için çekF_{*p} ve J_1X arasındaki $\theta(X)$ açısı sabit yani, $p\in M_1$ ve çekF_{*p}'deki X tanjant vektörünün seçiminden bağımsız ise F dönüşümüne bir **slant submersiyon** denir [35]. θ açısına da slant submersiyonun **slant açısı** denir.

Tanım 2.3.17. $F:(M_1,g_1,J_1)\to(M_2,g_2)$ dönüşümü bir (M_1,g_1,J_1) hemen hemen Hermityen manifoldu ile bir (M_2,g_2) Riemann manifoldu arasında tanımlanan bir Riemann dönüşümü olsun. Eğer sıfırdan farklı herhangi bir $X\in$ çekF_* vektörü için çekF_* ve J_1X arasındaki açı sabit ise, yani; $p\in M_1$ ve çekF_*'daki X tanjant vektörünün seçiminden bağımsız ise F dönüşümüne bir **slant Riemann dönüşümü** denir [36]. Böylece, θ açısına da slant Riemann dönüşümünün **slant açısı** denir.

2.4 Riemann Manifoldları Arasında Konform Dönüşümler

Riemann submersiyonlar yatay distribüsyon ile hedef manifoldun tanjant uzayı arasında bir izometrinin var olduğunu belirlemektedir. Benzer şekilde, Riemann dönüşümleri ise baz manifoldun tanjant uzayı ile hedef manifoldun görüntü uzayı arasındaki ilişkileri belirler. Bu alt bölümde ise Riemann submersiyonları ile Riemann dönüşümlerinin de daha geneli olan konformluk şartı konulmaktadır.

Tanım 2.4.1. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$F:(M,g)\to(N,h)$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu taktirde $x\in M$ ve $X,Y\in\Gamma(T_xM)$ için

$$h(dF_x(X),dF_x(Y))=\Lambda(x)g(X,Y)$$

olacak şekilde bir $\Lambda(x)$ fonksiyonu varsa F dönüşümüne $x\in M$ noktasında **zayıf konform dönüşüm** denir [8].

Tanım 2.4.2. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$F:(M,g)\to(N,h)$$

$x\in M$ noktasında bir zayıf konform dönüşüm olsun. Bir

$$\lambda:M\to[0,\infty)$$

fonksiyonu için $\Lambda(x)=\lambda(x)^2$ olmak üzere $\lambda(x)$ sayısına F dönüşümünün **konform faktörü**, $\Lambda(x)$ sayısına da F nin **kare konform faktörü** denir [8].

Önerme 2.4.1. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve*

$$F:(M,g)\to(N,h)$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $x\in M$ olsun. Bu taktirde $x\in M$ noktasında F dönüşümünün zayıf konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart

i) $dF_x=0$ *veya*

ii) $dF_x:T_xM\to T_{F(x)}N$ *dönüşümünün bire-bir konform olmasıdır [8].*

Tanım 2.4.3. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$F:(M,g)\to(N,h)$$

bir zayıf konform dönüşüm olsun. $dF_x=0$ şartını sağlayan $x\in M$ noktasına F nin bir **branch noktası** denir [8].

Tanım 2.4.4. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$F:(M,g)\to(N,h)$$

bir zayıf konform dönüşüm olsun. F nin türev dönüşümünün birebir ve konform olduğu $x\in M$ noktasına F nin bir **regüler noktası** denir [8].

Tanım 2.4.5. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları olmak üzere konform faktörü sıfırdan farklı bir sabit olan

$$F:(M,g)\to(N,h)$$

zayıf konform dönüşümüne bir **homotetik immersiyon** denir. Bir diffeomorfizm olan homotetik immersiyona da **homoteti** denir [8].

Tanım 2.4.6. (M^m,g) ve (N^n,h) Riemann manifoldları ve

$$F:(M^m,g)\to(N^n,h)$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $x\in M^m$ için aşağıdaki şartlardan herhangi biri sağlanıyorsa F dönüşümüne x noktasında **yatay zayıf konform dönüşüm** denir:

i) $dF_x=0$ veya

ii) dF_x türev dönüşümü $\mathcal{H}_x=\{çek(dF_x)\}^{\perp}$ yatay uzayını $T_{F(x)}N$ üzerine konform olarak resmeder. Yani dF_x örtendir ve $\forall X,Y\in\Gamma(\mathcal{H}_x)$ için

$$h(dF_x(X),dF_x(Y))=\Lambda(x)g(X,Y)$$

olacak şekilde bir $\Lambda(x)\neq 0$ sayısı vardır [8].

Önerme 2.4.2. *(M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve*

$$F : (M^m, g) \to (N^n, h)$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $x \in M^m$ noktasının F dönüşümünün kritik noktası olması için gerek ve yeter şart $dF_x = 0$ olmasıdır [8].

Tanım 2.4.7. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$F : (M^m, g) \to (N^n, h)$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $X, Y \in \Gamma(\mathcal{H}_x)$ için

$$h(dF_x(X), dF_x(Y)) = \Lambda(x) g(X, Y)$$

şartını sağlayan $x \in M^m$ noktasına F nin bir regüler noktası denir [8].

Tanım 2.4.8. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$F : (M^m, g) \to (N^n, h)$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $x \in M^m$ için

$$rank dF_x = boy N$$

ise F dönüşümüne x noktasında **submersiyon** denir [8]. Eğer F dönüşümünün hiç kritik noktası yoksa F dönüşümüne **konform submersiyon** denir.

Tanım 2.4.9. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları ve

$$F : (M, g) \to (N, h)$$

zayıf konform dönüşümü için regüler noktalarda λ konform faktörünün gradiyenti dikey ise yani

$$\mathcal{H}(grad\lambda) = 0$$

ise bu dönüşüme **yatay homotetik dönüşüm** denir. Burada $\mathcal{H}(grad\lambda) = 0$ şartı λ konform faktörünün yatay eğriler boyunca sabit olduğunu gösterir [8].

Tanım 2.4.10. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve $F : (M, g) \to (N, h)$ bir diferensiyellenebilir submersiyon olsun. Her $X, Y \in \Gamma((\text{çek} dF_*)^{\perp})$ için

$$\lambda^2 g(X,Y) = h(dF_*(X), dF_*(Y))$$

olmak üzere bir pozitif λ fonksiyonu varsa F ye **yatay konform submersiyon** denir [32, 47].

Lemma 2.4.1. *$F : M \to N$ bir yatay konform submersiyon olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma((\text{çek} F_*^{\perp}))$ ve $V, W \in \Gamma(\text{çek} F_*)$ için aşağıdaki eşitlikler sağlanır [8, 26];*

$$(\nabla F_*)(X,Y) = X(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(X) - g(X,Y)F_*(\operatorname{grad}\ln\lambda), \tag{2.4.1}$$

$$(\nabla F_*)(V,W) = -F_*(T_V W), \tag{2.4.2}$$

$$(\nabla F_*)(X,V) = -F_*(\nabla_X V) = -F_*(A_X V). \tag{2.4.3}$$

Yukarıda verilen dönüşümler [47] nolu kaynakta detaylı olarak araştırıldı.

3. HEMEN HEMEN HERMİTYEN MANİFOLDLAR ÜZERİNDE TANIMLI HOLOMORFİK KONFORM VE KONFORM ANTİ-İNVARYANT RİEMANN DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. İlk alt bölümde, konform Riemann dönüşümü türleri tanıtılacak, örnekler verilip bazı geometrik özellikleri incelenecektir. İkinci alt bölümde, holomorfik konform Riemann dönüşümü, konform invaryant Riemann dönüşümleri tanıtılacaktır. Üçüncü alt bölümde ise konform anti-invaryant Riemann dönüşümleri tanıtılıp liflerin geometrik özellikleri incelenecektir.

3.1 Riemann Manifoldları Arasında Konform Riemann Dönüşümleri

Bu alt bölümde Riemann manifoldları arasındaki konform Riemann dönüşümleri tanıtılacak, bu tür dönüşümler için Gauss-Weingarten formülleri ve Gauss, Codazzi ile Ricci denklemleri elde edilecektir.

Tanım 3.1.1. (M^m, g_M) ile (N^n, g_N) birer Riemann manifoldları, $F : (M^m, g_M) \longrightarrow (N^n, g_N)$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Eğer $p \in M$ noktasında $0 < rankF_{*p} \leq min\{m,n\}$ ve F_{*p} türev dönüşümü $\mathcal{H}(p) = (çekF_{*p})^{\perp}$ yatay uzayını $görF_{*p}$ görüntü uzayı üzerine konform olarak resmederse, yani; bir $\lambda^2(p) \neq 0$ sayısı var ve her $X,Y \in \mathcal{H}(p)$ için

$$g_N(F_{*p}(X), F_{*p}(Y)) = \lambda^2(p) g_M(X,Y)$$

ise F dönüşümüne her $p \in M$ noktasında bir **konform Riemann dönüşümü** denir [44].

Örnek 3.1.1. $I : (M^m, g_M) \longrightarrow (N^n, g_N)$ Riemann manifoldları arasındaki bir izometrik immersiyon olsun. I dönüşümü konform faktörü $\lambda = 1$ ve $çekF_* = \{0\}$ olan bir konform Riemann dönüşümüdür [44].

Örnek 3.1.2. $F : (M^m, g_M) \longrightarrow (N^n, g_N)$ Riemann manifoldları arasındaki bir Riemann submersiyonu olsun. F dönüşümü konform faktörü $\lambda = 1$ ve $(görF_*)^{\perp} = \{0\}$ olan bir konform Riemann dönüşümüdür [44].

Örnek 3.1.3. Bir Riemann dönüşümü konform faktörü $\lambda = 1$ olan bir konform Riemann dönüşümüdür [44].

Örnek 3.1.4. Bir konform immersiyon $çekF_* = \{0\}$ olan bir konform Riemann dönüşümüdür [44].

Örnek 3.1.5. Bir yatay konform submersiyon $(görF_*)^\perp = \{0\}$ olan bir konform Riemann dönüşümüdür [44].

Tanım 3.1.2. Bir $F : (M^m, g_M) \longrightarrow (N^n, g_N)$ konform Riemann dönüşümü için $0 < rankF < min\{m,n\}$ ve $\lambda \neq 1$ ise F ye **özgün konform Riemann dönüşümü** denir [44].

Örnek 3.1.6. Bir $F : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^5$ dönüşümü $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (e^{x_3}\sin x_4, 0, 0, e^{x_3}\cos x_4, 0)$ şeklinde tanımlansın. Bu dönüşümün dikey uzayı

$$çekF_* = span\{Z_1 = \partial x_1, Z_2 = \partial x_2\}$$

ve yatay uzayı

$$(çekF_*)^\perp = span\{Z_3 = \partial x_3, Z_4 = \partial x_4\}$$

olarak elde edilir. Buradan, dönüşümün rankı $rankF = 2$ dir. Bazı hesaplamalar ile

$$\begin{aligned} F_*(Z_3) &= e^{x_3}\sin x_4 \partial y_1 + e^{x_3}\cos x_4 \partial y_4, \\ F_*(Z_4) &= e^{x_3}\cos x_4 \partial y_1 - e^{x_3}\sin x_4 \partial y_4 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} g_N(F_*(Z_3), F_*(Z_3)) &= (e^{x_3})^2 g_M(Z_3, Z_3), \\ g_N(F_*(Z_4), F_*(Z_4)) &= (e^{x_3})^2 g_M(Z_4, Z_4) \end{aligned}$$

olup F dönüşümü konform faktörü $\lambda = e^{x_3}$ olan bir konform Riemann dönüşümüdür [44].

Teorem 3.1.1. *$F : (M^m, g_M) \longrightarrow (N^n, g_N)$ bir konform Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, dikey distribüsyon $çekF_*$ integrallenebilirdir.*

İspat. F bir konform Riemann dönüşümü olduğundan ve $X \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^{\perp})$, $U,V \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için

$$\begin{aligned}
g_M([U,V],X) &= \frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*([U,V]),F_*(X)) \\
&= \frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(\overset{M}{\nabla}_U V),F_*(X)) - \frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(\overset{M}{\nabla}_V U),F_*(X)) \\
&= -\frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(U,V),F_*(X)) + \frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(V,U),F_*(X))
\end{aligned}$$

elde edilir. F boyunca ikinci temel formun simetrikliğinden $(\nabla F_*)(U,V) = (\nabla F_*)(V,U)$ olup

$$g_M([U,V],X) = 0$$

dır. □

Şimdi yatay distribüsyonun integrallenebilirliği incelenecektir.

Teorem 3.1.2. *$F : (M^m, g_M) \longrightarrow (N^n, g_N)$ bir konform Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, yatay distribüsyon $(\text{ç}ekF_*)^{\perp}$ in integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X,Y \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^{\perp})$ ve $V \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için*

$$g_N((\nabla F_*)(X,V),F_*(Y)) = g_N((\nabla F_*)(Y,V),F_*(X))$$

dir.

İspat. $X,Y \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^{\perp})$ ve $V \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için

$$\begin{aligned}
g_M([X,Y],V) &= g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y - \overset{M}{\nabla}_Y X, V) \\
&= g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y, V) - g_M(\overset{M}{\nabla}_Y X, V) \\
&= -g_M(Y, \overset{M}{\nabla}_X V) + g_M(X, \overset{M}{\nabla}_Y V) \\
&= -g_M(Y, h\overset{M}{\nabla}_X V) + g_M(X, h\overset{M}{\nabla}_Y V)
\end{aligned}$$

dir. F bir konform Riemann dönüşümü olduğundan

$$\begin{aligned}
g_M([X,Y],V) &= -\frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(Y),F_*(h\overset{M}{\nabla}_X V)) + \frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(X),F_*(h\overset{M}{\nabla}_Y V)) \\
&= -\frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(Y),F_*(\overset{M}{\nabla}_X V)) + \frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(X),F_*(\overset{M}{\nabla}_Y V))
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.4.3) eşitliğinden

$$g_M([X,Y],V) = \frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(Y),(\nabla F_*)(X,V)) - \frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(X),(\nabla F_*)(Y,V))$$

olur. Buradan,

$$g_N(F_*(Y),(\nabla F_*)(X,V)) = g_N(F_*(X),(\nabla F_*)(Y,V))$$

elde edilir. □

Teorem 3.1.3. *$F : (M^m, g_M) \longrightarrow (N^n, g_N)$ bir konform Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, yatay distribüsyon $(çekF_*)^\perp$ in M üzerinde tamamen jeodezik dönüşüm tanımlaması için gerek ve yeter şart $X,Y \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(çekF_*)$ olmak üzere*

$$g_N(F_*(Y),(\nabla F_*)(X,V)) = 0$$

dır.

İspat. $X,Y \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(çekF_*)$ için

$$g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y, V) = -g_M(Y, \overset{M}{\nabla}_X V)$$

olup F bir konform Riemann dönüşümü olduğundan ve (2.4.3) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y, V) &= -\frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(Y), F_*(\overset{M}{\nabla}_X V)) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(Y),(\nabla F_*)(X,V)) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\overset{M}{\nabla}_X Y \in \Gamma((çekF_*)^\perp) \Leftrightarrow g_N(F_*(Y),(\nabla F_*)(X,V)) = 0$$

elde edilir. □

Teorem 3.1.4. *(M^m, g_M) ve (N^n, g_N) Riemann manifoldları arasındaki $F : (M^m, g_M) \longrightarrow (N^n, g_N)$ dönüşümü bir konform Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, $Y,Z \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ için F boyunca ikinci temel formun görüntü uzayına kısıtlaması*

$$(\nabla F_*)(Y,Z)\mid_{görF_*} = Y(\ln\lambda)F_*(Z) + Z(\ln\lambda)F_*(Y) - g_M(Y,Z)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) \quad (3.1.1)$$

dır [44].

Notasyon 3.1.1. (M_1,g_1) ve (M_2,g_2) Riemann manifoldları arasındaki $F:(M_1,g_1)\longrightarrow(M_2,g_2)$ bir konform Riemann dönüşümü olsun. Bundan sonra, kolaylık sağlaması amacıyla ∇^2 konneksiyonu ile hem (M_2,g_2) nin Levi-Civita konneksiyonu hem de (M_2,g_2) nin F dönüşümü boyunca geri çekme konneksiyonu olduğunu kabul edeceğiz. M_1 üzerindeki herhangi bir X vektör alanı ve $(görF_*)^\perp$ in herhangi bir V kesiti için $(görF_*)^\perp$, $F_*(T_pM)$ nin ortogonal tümleyeni $(F_*(T_pM))^\perp$ olan $F^{-1}(TM_2)$ nin alt demetidir [26]. Burada, $(F_*(TM))^\perp$ üzerinde $\nabla^2_X V$ nin ortogonal projeksiyonu $\nabla^{F\perp}_X V$ dir. Hatta, $\nabla^{F\perp}$, $(F_*(TM))^\perp$ üzerinde bir lineer konneksiyondur öyleki $\nabla^{F\perp}g_2=0$ dir. Şimdi, $\mathcal{S}_V$ operatörünü tanımlayalım.

$$\nabla^2_{F_*(X)}V=-\mathcal{S}_V F_*(X)+\nabla^{F\perp}_X V \tag{3.1.2}$$

olup $\mathcal{S}_V F_*(X)$, $\nabla^2_{F_*(X)}V$ nin teğet bileşenidir. $\mathcal{S}_V F_*(X)$, V ve $F_*(X)$ e göre bilineer olup $\mathcal{S}_V F_*(X)$ nin p noktasındaki değeri yalnız V_p ve $F_{*p}X_p$ nin p noktasındaki değerlerine bağlıdır. Burada, $X,Y\in\Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $V\in\Gamma((görF_*)^\perp)$ için

$$g_2(\mathcal{S}_V F_*(X),F_*(Y))=g_2(V,(\nabla F_*)(X,Y)) \tag{3.1.3}$$

elde edilir. Dönüşümün ikinci temel formu (∇F_*) simetrik olduğundan $\mathcal{S}_V$, $görF_*$ üzerinde bir simetrik lineer dönüşümdür [31].

Şimdi, konform Riemann dönüşümleri için Gauss-Weingarten formülleri ve Gauss, Codazzi ile Ricci denklemleri elde edilecektir.

$Y,Z\in\Gamma((çekF_*)^\perp)$ için F dönüşümünün ikinci temel formunun tanımından ve (3.1.1) denkleminden hareketle $\overset{N}{\nabla^F}_Y F_*(Z)$ nin eşiti

$$\begin{aligned}\overset{N}{\nabla^F}_Y F_*(Z) &= F_*(h\overset{M}{\nabla}_Y Z)+Y(\ln\lambda)F_*(Z)+Z(\ln\lambda)F_*(Y)-g_M(Y,Z)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda))\\ &+ (\nabla F_*)^\perp(Y,Z)\end{aligned} \tag{3.1.4}$$

dir.

$$R^N(F_*(X),F_*(Y))F_*(Z)=\overset{N}{\nabla^F}_X\overset{N}{\nabla^F}_Y F_*(Z)-\overset{N}{\nabla^F}_Y\overset{N}{\nabla^F}_X F_*(Z)-\overset{N}{\nabla^F}_{[X,Y]}F_*(Z) \tag{3.1.5}$$

eğriliğini hesaplamak için ilk olarak terimlerini hesaplayalım. (3.1.4) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned}
\overset{N}{\nabla^F}_X \overset{N}{\nabla^F}_Y F_*(Z) &= \overset{N}{\nabla^F}_X (F_*(h\overset{M}{\nabla}_Y Z) + Y(\ln\lambda)F_*(Z) + Z(\ln\lambda)F_*(Y) \\
&- g_M(Y,Z)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)^{\perp}(Y,Z))
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde devam edilerek

$$\begin{aligned}
\overset{N}{\nabla^F}_X \overset{N}{\nabla^F}_Y F_*(Z) &= F_*(\overset{M}{\nabla}_X \overset{M}{\nabla}_Y Z) + X(\ln\lambda)F_*(\overset{M}{\nabla}_Y Z) + \overset{M}{\nabla}_Y Z(\ln\lambda)F_*(X) \\
&- g_M(X, \overset{M}{\nabla}_Y Z)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)^{\perp}(X, \overset{M}{\nabla}_Y Z) \\
&+ X(Y(\ln\lambda))F_*(Z) + Y(\ln\lambda)\overset{N}{\nabla^F}_X F_*(Z) + X(Z(\ln\lambda))F_*(Y) \\
&+ Z(\ln\lambda)\overset{N}{\nabla^F}_X F_*(Y) - \{g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y, Z) + g_M(Y, \overset{M}{\nabla}_X Z)\}F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) \\
&- g_M(Y,Z)\overset{N}{\nabla^F}_X F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) + \overset{N}{\nabla^F}_X (\nabla F_*)^{\perp}(Y,Z)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.2) ve (3.1.4) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
\overset{N}{\nabla^F}_X \overset{N}{\nabla^F}_Y F_*(Z) &= F_*(\overset{M}{\nabla}_X \overset{M}{\nabla}_Y Z) + X(\ln\lambda)F_*(\overset{M}{\nabla}_Y Z) + \overset{M}{\nabla}_Y Z(\ln\lambda)F_*(X) \\
&- g_M(X, \overset{M}{\nabla}_Y Z)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)^{\perp}(X, \overset{M}{\nabla}_Y Z) \\
&+ X(Y(\ln\lambda))F_*(Z) + Y(\ln\lambda)\{F_*(h\overset{M}{\nabla}_X Z) + X(\ln\lambda)F_*(Z) \\
&+ Z(\ln\lambda)F_*(X) - g_M(X,Z)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)^{\perp}(X,Z)\} \\
&+ X(Z(\ln\lambda))F_*(Y) + Z(\ln\lambda)\{F_*(h\overset{M}{\nabla}_X Y) + X(\ln\lambda)F_*(Y) \\
&+ Y(\ln\lambda)F_*(X) - g_M(X,Y)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)^{\perp}(X,Y)\} \\
&- g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y, Z)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) - g_M(Y, \overset{M}{\nabla}_X Z)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) \\
&- g_M(Y,Z)\{F_*(h\overset{M}{\nabla}_X \mathrm{grad}(\ln\lambda)) + (\mathrm{grad}(\ln\lambda))(\ln\lambda)F_*(X) \\
&+ (\nabla F_*)^{\perp}(X, \mathrm{grad}(\ln\lambda))\} - S_{(\nabla F_*)^{\perp}(Y,Z)}F_*(X) \\
&+ \nabla_X^{F\perp}(\nabla F_*)^{\perp}(Y,Z) \qquad (3.1.6)
\end{aligned}$$

denklemi elde edilir. Benzer hesaplamalarla $\overset{N}{\nabla}{}^F{}_Y\overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(Z)$ denklemi

$$\begin{aligned}
\overset{N}{\nabla}{}^F{}_Y\overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(Z) &= F_*(\overset{M}{\nabla}_Y\overset{M}{\nabla}_X Z) + Y(\ln\lambda)F_*(\overset{M}{\nabla}_X Z) + \overset{M}{\nabla}_X Z(\ln\lambda)F_*(Y) \\
&- g_M(Y,\overset{M}{\nabla}_X Z)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)^\perp(Y,\overset{M}{\nabla}_X Z) + \nabla_Y^{F\perp}(\nabla F_*)^\perp(X,Z) \\
&+ Y(X(\ln\lambda))F_*(Z) + X(\ln\lambda)\{F_*(h\overset{M}{\nabla}_Y Z) + Y(\ln\lambda)F_*(Z) \\
&+ Z(\ln\lambda)F_*(Y) - g_M(Y,Z)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)^\perp(Y,Z)\} \\
&+ Y(Z(\ln\lambda))F_*(X) + Z(\ln\lambda)\{F_*(h\overset{M}{\nabla}_Y X) + Y(\ln\lambda)F_*(X) \\
&+ X(\ln\lambda)F_*(Y) - g_M(Y,X)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)^\perp(Y,X)\} \\
&- g_M(\overset{M}{\nabla}_Y X,Z)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) - g_M(X,\overset{M}{\nabla}_Y Z)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) \\
&- g_M(X,Z)\{F_*(h\overset{M}{\nabla}_Y \,\mathrm{grad}(\ln\lambda)) + (\mathrm{grad}(\ln\lambda))(\ln\lambda)F_*(Y) \\
&+ (\nabla F_*)^\perp(Y,\mathrm{grad}(\ln\lambda))\} - S_{(\nabla F_*)^\perp(X,Z)}F_*(Y) \qquad (3.1.7)
\end{aligned}$$

bulunur. Son olarak,

$$\begin{aligned}
\overset{N}{\nabla}{}^F{}_{[X,Y]} F_*(Z) &= F_*(\overset{M}{\nabla}_{h[X,Y]} Z) + [X,Y](\ln\lambda)F_*(Z) + Z(\ln\lambda)F_*([X,Y]) \\
&- g_M([X,Y],Z)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)^\perp([X,Y],Z) \\
&= F_*(\overset{M}{\nabla}_{[X,Y]} Z) + \overset{M}{\nabla}_X Y(\ln\lambda)F_*(Z) - \overset{M}{\nabla}_Y X(\ln\lambda)F_*(Z) \\
&+ Z(\ln\lambda)F_*(\overset{M}{\nabla}_X Y) - Z(\ln\lambda)F_*(\overset{M}{\nabla}_Y X) - g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y,Z)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) \\
&+ g_M(\overset{M}{\nabla}_Y X,Z)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)^\perp(\overset{M}{\nabla}_X Y,Z) \\
&- (\nabla F_*)^\perp(\overset{M}{\nabla}_Y X,Z) \qquad (3.1.8)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$(\overset{M}{\nabla}_X(\nabla F_*))^\perp(Y,Z) = \nabla_X^{F\perp}(\nabla F_*)^\perp(Y,Z) - (\nabla F_*)^\perp(\overset{M}{\nabla}_X Y,Z) - (\nabla F_*)^\perp(Y,\overset{M}{\nabla}_X Z),$$

$$H_{(\ln\lambda)}(X,Y) = Y(X(\ln\lambda)) - \overset{M}{\nabla}_Y X(\ln\lambda),$$

ve

$$h_{(\ln\lambda)}(X) = \overset{M}{\nabla}_X \,\mathrm{grad}(\ln\lambda)$$

olmak üzere (3.1.6), (3.1.7) ve (3.1.8) denklemleri, (3.1.5) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
R^N(F_*(X),F_*(Y))F_*(Z) &= F_*(R^M(X,Y)Z)+(\overset{M}{\nabla}_X(\nabla F_*))^{\perp}(Y,Z)-(\overset{M}{\nabla}_Y(\nabla F_*))^{\perp}(X,Z)\\
&- H_{(\ln\lambda)}(Y,Z)F_*(X)+H_{(\ln\lambda)}(X,Z)F_*(Y)\\
&- g_M(X,Z)\{Y(\ln\lambda)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda))-F_*(h_{(\ln\lambda)}(Y))\\
&- |\,\mathrm{grad}(\ln\lambda)|^2F_*(Y)-(\nabla F_*)^{\perp}(Y,\mathrm{grad}(\ln\lambda))\}\\
&+ g_M(Y,Z)\{X(\ln\lambda)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda))-F_*(h_{(\ln\lambda)}(X))\\
&- |\,\mathrm{grad}(\ln\lambda)|^2F_*(X)-(\nabla F_*)^{\perp}(X,\mathrm{grad}(\ln\lambda))\}\\
&+ Y(\ln\lambda)\{Z(\ln\lambda)F_*(X)+(\nabla F_*)^{\perp}(X,Z)\}\\
&- X(\ln\lambda)\{Z(\ln\lambda)F_*(Y)+(\nabla F_*)^{\perp}(Y,Z)\}\\
&- S_{(\nabla F_*)^{\perp}(Y,Z)}F_*(X)+S_{(\nabla F_*)^{\perp}(X,Z)}F_*(Y)
\end{aligned}\tag{3.1.9}$$

denklemi elde edilir. Şimdi, $E\in\Gamma((\varsigma ekF_*)^{\perp})$ için (3.1.3) denklemi ve dönüşüm konform olduğundan

$$\begin{aligned}
g_N(R^N(F_*(X),F_*(Y))F_*(Z),F_*(E)) &= \lambda^2g_M(R^M(X,Y)Z,E)\\
&+ \lambda^2\{H_{(\ln\lambda)}(X,Z)g_M(Y,E)-H_{(\ln\lambda)}(Y,Z)g_M(X,E)\}\\
&+ \lambda^2\{Y(\ln\lambda)Z(\ln\lambda)g_M(X,E)-X(\ln\lambda)Z(\ln\lambda)g_M(Y,E)\}\\
&- \lambda^2g_M(X,Z)\{Y(\ln\lambda)E(\ln\lambda)-g_M(h_{(\ln\lambda)}(Y),E)\\
&- |\,\mathrm{grad}(\ln\lambda)|^2g_M(Y,E)\}\\
&+ \lambda^2g_M(Y,Z)\{X(\ln\lambda)E(\ln\lambda)-g_M(h_{(\ln\lambda)}(X),E)\\
&- |\,\mathrm{grad}(\ln\lambda)|^2g_M(X,E)\}\\
&- g_N((\nabla F_*)^{\perp}(Y,Z),(\nabla F_*)^{\perp}(X,E))\\
&+ g_N((\nabla F_*)^{\perp}(X,Z),(\nabla F_*)^{\perp}(Y,E))
\end{aligned}$$

olur. Hessian formunun tanımından

$$
\begin{aligned}
g_N(R^N(F_*(X),F_*(Y))F_*(Z),F_*(E)) &= \lambda^2 g_M(R^M(X,Y)Z,E) \\
&+ \lambda^2\{H_{(\ln\lambda)}(X,Z)g_M(Y,E)-H_{(\ln\lambda)}(Y,Z)g_M(X,E)\} \\
&+ \lambda^2 Z(\ln\lambda)\{Y(\ln\lambda)g_M(X,E)-X(\ln\lambda)g_M(Y,E)\} \\
&- \lambda^2 g_M(X,Z)\{Y(\ln\lambda)E(\ln\lambda)-H_{(\ln\lambda)}(Y,E) \\
&- |\mathrm{grad}(\ln\lambda)|^2 g_M(Y,E)\} \\
&+ \lambda^2 g_M(Y,Z)\{X(\ln\lambda)E(\ln\lambda)-H_{(\ln\lambda)}(X,E) \\
&- |\mathrm{grad}(\ln\lambda)|^2 g_M(X,E)\} \\
&- g_N((\nabla F_*)^\perp(Y,Z),(\nabla F_*)^\perp(X,E)) \\
&+ g_N((\nabla F_*)^\perp(X,Z),(\nabla F_*)^\perp(Y,E)) \qquad (3.1.10)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.1.10) denklemi konform Riemann dönüşümleri için Gauss denklemidir. (3.1.9) denkleminin ortogonal bileşenleri alınarak

$$
\begin{aligned}
(R^N(F_*(X),F_*(Y))F_*(Z))^\perp &= (\overset{M}{\nabla}_X(\nabla F_*))^\perp(Y,Z)-(\overset{M}{\nabla}_Y(\nabla F_*))^\perp(X,Z) \\
&+ g_M(X,Z)(\nabla F_*)^\perp(Y,\mathrm{grad}(\ln\lambda)) \\
&- g_M(Y,Z)(\nabla F_*)^\perp(X,\mathrm{grad}(\ln\lambda)) \\
&+ Y(\ln\lambda)(\nabla F_*)^\perp(X,Z) \\
&- X(\ln\lambda)(\nabla F_*)^\perp(Y,Z) \qquad (3.1.11)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.1.11) denklemi de konform Riemann dönüşümleri için Codazzi denklemidir. $V\in\Gamma((g\ddot{o}rF_*)^\perp)$ için

$$
R^N(F_*(X),F_*(Y))V=\overset{N}{\nabla^F}_X\overset{N}{\nabla^F}_Y V-\overset{N}{\nabla^F}_Y\overset{N}{\nabla^F}_X V-\overset{N}{\nabla^F}_{[X,Y]}V \qquad (3.1.12)
$$

eğriliğinin ilk olarak terimlerini hesaplayalım. (3.1.2), (3.1.4) denklemleri ve ${}^*F_*$ adjoint dönüşümü kullanılarak

$$
\begin{aligned}
\overset{N}{\nabla^F}_X\overset{N}{\nabla^F}_Y V &= \overset{N}{\nabla^F}_X\overset{N}{\nabla}_{F_*(Y)}V \\
&= \overset{N}{\nabla^F}_X(-S_V F_*(Y)+\nabla_Y^{F\perp}V) \\
&= -\overset{N}{\nabla^F}_X(S_V F_*(Y))+\overset{N}{\nabla^F}_X(\nabla_Y^{F\perp}V)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= -F_*(\overset{M}{\nabla}_X({}^*F_*(S_V F_*(Y)))) - X(\ln\lambda)S_V F_*(Y) - {}^*F_*(S_V F_*(Y))(\ln\lambda)F_*(X)\\
&+ g_M(X,{}^*F_*(S_V F_*(Y)))F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) - (\nabla F_*)^{\perp}(X,{}^*F_*(S_V F_*(Y)))\\
&- S_{\nabla^{F\perp}_Y V}F_*(X) + \nabla^{F\perp}_X \nabla^{F\perp}_Y V
\end{aligned}
\tag{3.1.13}
$$

elde edilir. Benzer hesaplamalarla

$$
\begin{aligned}
\overset{N}{\nabla}{}^F{}_Y \overset{N}{\nabla}{}^F{}_X V &= \overset{N}{\nabla}{}^F{}_Y \overset{N}{\nabla}_{F_*(X)} V\\
&= \overset{N}{\nabla}{}^F{}_Y(-S_V F_*(X) + \nabla^{F\perp}_X V)\\
&= -\overset{N}{\nabla}{}^F{}_Y(S_V F_*(X)) + \overset{N}{\nabla}{}^F{}_Y(\nabla^{F\perp}_X V)\\
&= -F_*(\overset{M}{\nabla}_Y({}^*F_*(S_V F_*(X)))) - Y(\ln\lambda)S_V F_*(X) - {}^*F_*(S_V F_*(X))(\ln\lambda)F_*(Y)\\
&+ g_M(Y,{}^*F_*(S_V F_*(X)))F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) - (\nabla F_*)^{\perp}(Y,{}^*F_*(S_V F_*(X)))\\
&- S_{\nabla^{F\perp}_X V}F_*(Y) + \nabla^{F\perp}_Y \nabla^{F\perp}_X V
\end{aligned}
\tag{3.1.14}
$$

bulunur. Son olarak

$$
\begin{aligned}
\overset{N}{\nabla}{}^F{}_{[X,Y]} V &= -S_V F_*([X,Y]) + \nabla^{F\perp}_{[X,Y]} V\\
&= -S_V P \overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(Y) + S_V P \overset{N}{\nabla}{}^F{}_Y F_*(X) + \nabla^{F\perp}_{[X,Y]} V
\end{aligned}
\tag{3.1.15}
$$

elde edilir. Burada P, $g\ddot{o}rF_*$ üzerine bir projeksiyon ve

$$
(\tilde{\nabla}_X S)_V F_*(Y) = F_*(\overset{M}{\nabla}_X({}^*F_*(S_V F_*(Y)))) - S_{\nabla^{F\perp}_X V}F_*(Y) - S_V P \overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(Y)
$$

olmak üzere (3.1.13), (3.1.14) ve (3.1.15) denklemleri, (3.1.12) de yerine yazılırsa

$$
\begin{aligned}
R^N(F_*(X),F_*(Y))V &= R^{F\perp}(F_*(X),F_*(Y))V - (\tilde{\nabla}_X S)_V F_*(Y) + (\tilde{\nabla}_Y S)_V F_*(X)\\
&- X(\ln\lambda)S_V F_*(Y) - {}^*F_*(S_V F_*(Y))(\ln\lambda)F_*(X)\\
&+ g_M(X,{}^*F_*(S_V F_*(Y)))F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda))\\
&+ Y(\ln\lambda)S_V F_*(X) + {}^*F_*(S_V F_*(X))(\ln\lambda)F_*(Y)\\
&- g_M(Y,{}^*F_*(S_V F_*(X)))F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda))\\
&- (\nabla F_*)^{\perp}(X,{}^*F_*(S_V F_*(Y)))\\
&+ (\nabla F_*)^{\perp}(Y,{}^*F_*(S_V F_*(X))),
\end{aligned}
\tag{3.1.16}
$$

elde edilir. Şimdi, $W \in \Gamma((g\ddot{o}rF_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned} g_N(R^N(F_*(X),F_*(Y))V,W) &= g_N(R^{F\perp}(F_*(X),F_*(Y))V,W) \\ &- g_N((\nabla F_*)^\perp(X,{}^*F_*(S_VF_*(Y))),W) \\ &+ g_N((\nabla F_*)^\perp(Y,{}^*F_*(S_VF_*(X))),W) \quad (3.1.17) \end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.3) denklemi kullanılarak

$$g_N((\nabla F_*)^\perp(X,{}^*F_*(S_VF_*(Y))),W) = g_N(S_WF_*(X),S_VF_*(Y))$$

elde edilir. S_V operatörü self-adjoint olduğundan

$$g_N((\nabla F_*)^\perp(X,{}^*F_*(S_VF_*(Y))),W) = g_N(S_VS_WF_*(X),F_*(Y)) \quad (3.1.18)$$

olur. Benzer şekilde diğer terimde düzenlenir, (3.1.18) denklemi ile (3.1.17) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} g_N(R^N(F_*(X),F_*(Y))V,W) &= g_N(R^{F\perp}(F_*(X),F_*(Y))V,W) \\ &+ g_N([S_W,S_V]F_*(X),F_*(Y)) \quad (3.1.19) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada,

$$[S_W,S_V] = S_WS_V - S_VS_W$$

dır. (3.1.19) denklemi konform Riemann dönüşümleri için Ricci denklemi olarak adlandırılır. Son olarak (3.1.16) denklemi $E \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ ile çarpılırsa

$$\begin{aligned} g_N(R^N(F_*(X),F_*(Y))V,F_*(E)) &= g_N((\tilde{\nabla}_YS)_VF_*(X),F_*(E)) \\ &- g_N((\tilde{\nabla}_XS)_VF_*(Y),F_*(E)) \\ &- X(\ln\lambda)g_N(S_VF_*(Y),F_*(E)) \\ &- {}^*F_*(S_VF_*(Y))(\ln\lambda)g_N(F_*(X),F_*(E)) \\ &+ g_M(X,{}^*F_*(S_VF_*(Y)))g_N(F_*(\text{grad}(\ln\lambda)),F_*(E)) \\ &+ Y(\ln\lambda)g_N(S_VF_*(X),F_*(E)) \\ &+ {}^*F_*(S_VF_*(X))(\ln\lambda)g_N(F_*(Y),F_*(E)) \quad (3.1.20) \\ &- g_M(Y,{}^*F_*(S_VF_*(X)))g_N(F_*(\text{grad}(\ln\lambda)),F_*(E)) \end{aligned}$$

olur. Burada dönüşümün konformluğu ve (3.1.3) denklemi kullanılırsa

$$X(\ln\lambda)g_N(S_V F_*(Y), F_*(E)) = X(\ln\lambda)g_N(V, (\nabla F_*)^{\perp}(Y,E)), \qquad (3.1.21)$$

$$\begin{aligned}
&{}^*F_*(S_V F_*(Y))(\ln\lambda)g_N(F_*(X), F_*(E)) \\
&= \lambda^2 g_M({}^*F_*(S_V F_*(Y)), \mathrm{grad}(\ln\lambda))g_M(X,E) \\
&= g_N(S_V F_*(Y), F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)))g_M(X,E) \\
&= g_N(V, (\nabla F_*)^{\perp}(Y, \mathrm{grad}(\ln\lambda)))g_M(X,E) \qquad (3.1.22)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
g_M(X, {}^*F_*(S_V F_*(Y)))g_N(F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)), F_*(E)) &= \lambda^2 g_M(X, {}^*F_*(S_V F_*(Y)))g_M(\mathrm{grad}(\ln\lambda), E) \\
&= g_N(F_*(X), S_V F_*(Y))E(\ln\lambda) \\
&= g_N(V, (\nabla F_*)^{\perp}(X,Y))E(\ln\lambda) \qquad (3.1.23)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde diğer terimler de düzenlenir, (3.1.21), (3.1.22) ve (3.1.23) denklemleri ile (3.1.20) denkleminde yerine yazılırsa ve ikinci temel form simetrik olduğundan

$$\begin{aligned}
g_N(R^N(F_*(X), F_*(Y))V, F_*(E)) &= g_N((\tilde{\nabla}_Y S)_V F_*(X), F_*(E)) \\
&- g_N((\tilde{\nabla}_X S)_V F_*(Y), F_*(E)) \\
&- X(\ln\lambda)g_N(V, (\nabla F_*)(Y,E)) \\
&- g_N(V, (\nabla F_*)^{\perp}(Y, \mathrm{grad}(\ln\lambda)))g_M(X,E) \\
&+ Y(\ln\lambda)g_N(V, (\nabla F_*)(X,E)) \qquad (3.1.24) \\
&+ g_N(V, (\nabla F_*)^{\perp}(X, \mathrm{grad}(\ln\lambda)))g_M(Y,E)
\end{aligned}$$

elde edilir.

3.2 Holomorfik Konform Riemann Dönüşümleri

Bu bölümde, holomorfik konform Riemann dönüşümleri ve konform invaryant Riemann dönüşümleri tanıtılacak, örnekler verilip bir konform invaryant

Riemann dönüşümünün bir holomorfik konform Riemann dönüşümü olmayabileceği gösterilecektir.

Tanım 3.2.1. $F:(M,g_M,J_M)\longrightarrow(N,g_N,J_N)$ dönüşümü bir (M,g_M,J_M) Kaehler manifoldu ile bir (N,g_N,J_N) hemen hemen Hermityen manifoldu arasındaki bir dönüşüm olsun. Eğer,

i) $F:(M,g_M,J_M)\longrightarrow(N,g_N,J_N)$ dönüşümü bir konform Riemann dönüşümüdür.

ii) Yatay distribüsyon için $J_N F_* = F_* J_M$ dir.

şartları sağlanıyorsa F ye bir **holomorfik konform Riemann dönüşümü** denir.

Örnek 3.2.1. Her holomorfik submersiyon [13] konform faktörü $\lambda=1$ ve $(görF_*)^{\perp}=\{0\}$ olan bir holomorfik konform Riemann dönüşümüdür.

Örnek 3.2.2. Her holomorfik Riemann dönüşümü [38] konform faktörü $\lambda=1$ olan bir holomorfik konform Riemann dönüşümüdür.

Tanım 3.2.2. $F:(M,g_M,J_M)\longrightarrow(N,g_N,J_N)$ dönüşümü bir (M,g_M,J_M) Kaehler manifoldu ile bir (N,g_N,J_N) hemen hemen Hermityen manifoldu arasındaki bir holomorfik konform Riemann dönüşümü olsun. Eğer $\lambda\neq 1$ ve $(görF_*)^{\perp}\neq\{0\}$ ise F ye bir **özgün holomorfik konform Riemann dönüşümü** denir.

Örnek 3.2.3. $F:(\mathbb{R}^4,g_1,J_1)\longrightarrow(\mathbb{R}^4,g_2,J_2)$ dönüşümü $x\in\mathbb{R}^4$ noktasında

$$(x_1,x_2,x_3,x_4)\longrightarrow(e^{x_1}\cos x_2, e^{x_1}\sin x_2, -e^{x_1}\cos x_2, -e^{x_1}\sin x_2)$$

ile tanımlansın. Yatay distribüsyon

$$\begin{aligned}\mathcal{H}=(çekF_*)^{\perp}=\{X_1 &= \left(e^{x_1}\cos x_2\frac{\partial}{\partial x_1}-e^{x_1}\sin x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right),\\ X_2 &= \left(e^{x_1}\sin x_2\frac{\partial}{\partial x_1}+e^{x_1}\cos x_2\frac{\partial}{\partial x_2}\right)\}\end{aligned}$$

ve dikey distribüsyon

$$\mathcal{V}=(çekF_*)=\{U_1=\frac{\partial}{\partial x_3},U_2=\frac{\partial}{\partial x_4}\}$$

elde edilir. Görülür ki, $rankF = 2$ ve $p \in \mathbb{R}^4$ noktasında F dönüşümü konform faktörü $\lambda = e^{x_1}\sqrt{2}$ olan bir konform Riemann dönüşümüdür. Diğer taraftan, $\mathbb{R}^4$ üzerinde tanımlanan kompleks yapı

$$J(a_1, a_2, a_3, a_4) = (-a_2, a_1, -a_4, a_3)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} J_2[F_*(X_1)] &= F_*[J_1(X_1)], \\ J_2[F_*(X_2)] &= F_*[J_1(X_2)] \end{aligned}$$

dir. Böylece, F dönüşümü bir özgün holomorfik konform Riemann dönüşümüdür.

Tanım 3.2.3. $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N, J_N)$ dönüşümü bir (M, g_M, J_M) Kaehler manifoldu ile bir (N, g_N, J_N) hemen hemen Hermityen manifoldu arasındaki bir dönüşüm olsun. Eğer,

i) $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N, J_N)$ dönüşümü bir konform Riemann dönüşümüdür.

ii) Her $p \in M$ noktası için $J(çekF_*) \subset çekF_*$ dir.

şartları sağlanıyorsa F ye bir **invaryant konform Riemann dönüşümü** denir.

Aşağıdaki örnek bir konform invaryant Riemann dönüşümünün, holomorfik konform Riemann dönüşümü olmadığını göstermektedir.

Örnek 3.2.4. $F : (\mathbb{R}^4, g_1, J_1) \longrightarrow (\mathbb{R}^4, g_2, J_2)$ dönüşümü bir $p \in \mathbb{R}^4$ noktası için

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) \longrightarrow (e^{x_2}\cos x_1, -e^{x_2}\sin x_1, e^{x_2}\sin x_1, -e^{x_2}\cos x_1)$$

ile tanımlansın. Yatay distribüsyon

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = (çekF_*)^{\perp} = \{X_1 &= \left(-e^{x_2}\sin x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + e^{x_2}\cos x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right), \\ X_2 &= \left(-e^{x_2}\cos x_1 \frac{\partial}{\partial x_1} - e^{x_2}\sin x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}\right)\} \end{aligned}$$

ve dikey distribüsyon

$$\mathcal{V} = (çekF_*) = \{U_1 = \frac{\partial}{\partial x_3}, U_2 = \frac{\partial}{\partial x_4}\}$$

elde edilir. Görülür ki, $rankF = 2$ ve $p \in \mathbb{R}^4$ noktasında F dönüşümü konform faktörü $\lambda = e^{x_2}\sqrt{2}$ olan bir konform Riemann dönüşümüdür. Diğer taraftan, $\mathbb{R}^4$ üzerinde tanımlanan kompleks yapı

$$J(a_1, a_2, a_3, a_4) = (-a_2, a_1, -a_4, a_3)$$

olmak üzere

$$J(U_1) = U_2, \quad J(U_2) = -U_1$$

olduğundan F dönüşümü bir konform invaryant Riemann dönüşümüdür. Fakat,

$$\begin{aligned} J_2[F_*(X_1)] &\neq F_*[J_1(X_1)], \\ J_2[F_*(X_2)] &\neq F_*[J_1(X_2)] \end{aligned}$$

olduğu için F bir holomorfik konform Riemann dönüşümü değildir.

Teorem 3.2.1. *$F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N, J_N)$ dönüşümü (M, g_M, J_M) hemen hemen Hermityen manifoldu ile (N, g_N, J_N) Kaehler manifoldu arasındaki holomorfik konform Riemann dönüşümü olsun. $X, Y \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma((görF_*)^\perp)$ olmak üzere*

$$g_N(J_N(\nabla F_*)^\perp(X,Y), V) = g_N((\nabla F_*)^\perp(X, J_M Y), V) = g_N((\nabla F_*)^\perp(J_M X, Y), V)$$

dir.

İspat. Bir dönüşümün ikinci temel formu olan (2.2.1) denkleminden ve F dönüşümü holomorfik konform Riemann dönüşümü olduğundan $X, Y \in \Gamma(çekF_*)^\perp$ için

$$J_N(\nabla F_*)(X,Y) = J_N \overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(Y) - F_*(J_M \overset{M}{\nabla}_X Y), \tag{3.2.1}$$

$$(\nabla F_*)(X, J_M Y) = J_N \overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(Y) - F_*(\overset{M}{\nabla}_X J_M Y) \tag{3.2.2}$$

elde edilir. (3.2.1), (3.2.2) denklemlerinde $J_N \overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(Y)$ terimlerinin eşitliğini ve bir konform Riemann dönüşümünün ikinci temel formu olan (3.1.4) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned} J_N(\nabla F_*)^\perp(X,Y) + F_*(J_M \overset{M}{\nabla}_X Y) + X(\ln\lambda) J_N F_*(Y) + Y(\ln\lambda) J_N F_*(X) \\ - g_M(X,Y) J_N F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) = (\nabla F_*)^\perp(X, J_M Y) + F_*(\overset{M}{\nabla}_X J_M Y) \\ + X(\ln\lambda) F_*(J_M Y) + J_M Y(\ln\lambda) F_*(X) - g_M(X, J_M Y) F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

olur. Böylece (3.2.3) denkleminde $V \in \Gamma((görF_*)^\perp)$ için

$$g_N(J_N(\nabla F_*)^\perp(X,Y),V) = g_N((\nabla F_*)^\perp(X,J_MY),V) \tag{3.2.4}$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$(\nabla F_*)(J_MX,Y) = J_N\overset{N}{\nabla^F}{}_Y F_*(X) - F_*(\overset{M}{\nabla}_Y J_MX), \tag{3.2.5}$$

$$J_N(\nabla F_*)(Y,X) = J_N\overset{N}{\nabla^F}{}_Y F_*(X) - F_*(J_M\overset{M}{\nabla}_Y X) \tag{3.2.6}$$

elde edilir. (3.2.5), (3.2.6) denklemlerinde $J_N\overset{N}{\nabla^F}{}_Y F_*(X)$ terimlerinin eşitliğini ve (3.1.4) denklemini kullanarak

$$\begin{aligned}(\nabla F_*)^\perp(Y,J_MX) + F_*(\overset{M}{\nabla}_Y J_MX) + J_MX(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(J_MX)\\ -g_M(Y,J_MX)F_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda)) = J_N(\nabla F_*)^\perp(Y,X) + J_NF_*(\overset{M}{\nabla}_Y X)\\ +Y(\ln\lambda)J_NF_*(X) + X(\ln\lambda)J_NF_*(Y) - g_M(X,Y)J_NF_*(\mathrm{grad}(\ln\lambda))\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

olur. Böylece (3.2.7) denkleminde $V \in \Gamma((görF_*)^\perp)$ için

$$g_N((\nabla F_*)^\perp(Y,J_MX),V) = g_N(J_N(\nabla F_*)^\perp(Y,X),V) \tag{3.2.8}$$

elde edilir. İkinci temel form simetrik olduğundan (3.2.4) ve (3.2.8) denklemlerinden ispat tamamlanır. □

$F : (M,g_M,J_M) \longrightarrow (N,g_N,J_N)$ dönüşümü (M,g_M,J_M) hemen hemen Hermityen manifoldu ile (N,g_N,J_N) Kaehler manifoldu arasındaki holomorfik konform Riemann dönüşümü olsun. Konform Riemann dönüşümleri için elde edilen (3.1.10) Gauss denkleminde $E = X$ ve $Y = Z = J_MX$ alırsak

$$\begin{aligned} g_N(R^N(F_*(X),F_*(J_MX))F_*(J_MX),F_*(X)) &= \lambda^2 g_M(R(X,J_MX)J_MX,X)\\ &+ \lambda^2|X|^2\{|J_MX(\ln\lambda)| + |X(\ln\lambda)|\}\\ &- \lambda^2|X|^2\{H_{(\ln\lambda)}(X,X) + H_{(\ln\lambda)}(J_MX,J_MX)\}\\ &- g_N((\nabla F_*)^\perp(J_MX,J_MX),(\nabla F_*)^\perp(X,X))\\ &+ g_N((\nabla F_*)^\perp(X,J_MX),(\nabla F_*)^\perp(J_MX,X))\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

elde edilir. Önceki teorem yardımıyla (3.2.9) denklemi,

$$\begin{aligned} g_N(R^N(F_*(X),F_*(J_MX))F_*(J_MX),F_*(X)) &= \lambda^2 g_M(R(X,J_MX)J_MX,X) \\ &+ \lambda^2|X|^2\{|J_MX(\ln\lambda)|+|X(\ln\lambda)| \\ &- H_{(\ln\lambda)}(X,X)+H_{(\ln\lambda)}(J_MX,J_MX)\} \\ &+ 2|(\nabla F_*)^{\perp}(X,X)|^2 \qquad (3.2.10) \end{aligned}$$

elde edilir.

Böylece aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.2.1. $F:(M,g_M,J_M)\longrightarrow(N,g_N,J_N)$ dönüşümü integrallenebilir yatay distribüsyonu $(\text{ç}ekF_*)^{\perp}$ olan bir (M,g_M,J_M) hemen hemen Hermityen manifoldu ile sabit holomorfik kesit eğriliği c olan bir $(N(c),g_N,J_N)$ kompleks uzay formu arasındaki bir holomorfik konform Riemann dönüşümü olsun. Yatay distribüsyonun liflerinin $\frac{c}{\lambda^2}$ holomorfik kesit eğriliğine sahip olması için gerek ve yeter şart $X\in\Gamma((\text{ç}ekF_*)^{\perp})$ için

$$\begin{aligned} 2|(\nabla F_*)^{\perp}(X,X)|^2 &= \lambda^2|X|^2\{\{H_{(\ln\lambda)}(X,X)+H_{(\ln\lambda)}(J_MX,J_MX)\} \\ &- \{|J_MX(\ln\lambda)|+|X(\ln\lambda)|\}\} \end{aligned}$$

dır.

3.3 Konform Anti-İnvaryant Riemann Dönüşümleri

Bu bölümde, konform anti-invaryant Riemann dönüşümleri tanıtılacaktır. Bu dönüşüme örnekler verilip liflerin geometrik özellikleri incelenecektir. Konform Riemann dönüşümlerinde pluriharmonik dönüşüm tanımı kullanılarak bu tür dönüşümlerin homotetik Riemann dönüşümleri olması için bazı şartlar verilecektir.

Tanım 3.3.1. $F:(M,g_M,J_M)\longrightarrow(N,g_N)$ dönüşümü bir (M,g_M,J_M) Kaehler manifoldu ile bir (N,g_N) Riemann manifoldu arasındaki bir konform Riemann dönüşümü olsun. Eğer F dönüşümü

$$J_M(\text{ç}ekF_*)\subset(\text{ç}ekF_*)^{\perp}$$

şartını sağlıyorsa F dönüşümüne bir **konform anti-invaryant Riemann dönüşümü** denir. Eğer F dönüşümü için

$$J_M(\text{çek}F_*) = (\text{çek}F_*)^{\perp}$$

şartı sağlanıyorsa F dönüşümüne bir **Lagrange konform Riemann dönüşümü** denir.

$(\text{çek}F_*)^{\perp}$ de $J(\text{çek}F_*)$ uzayına tamamlayan uzay olan uzayı μ ile gösterelim. F bir konform Riemann dönüşümü olsun. $X \in \Gamma((\text{çek}F_*)^{\perp})$ için

$$JX = BX + CX \tag{3.3.1}$$

olup $BX \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ ve $CX \in \Gamma(\mu)$ dür.

Lemma 3.3.1. *$F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J_M) Kaehler manifoldu ile (N, g_N) Riemann manifoldu arasındaki konform anti-invariant Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, $J(\text{çek}F_*)$ uzayına tamamlayan ve dik olan μ distribüsyonu invaryanttır.*

İspat. $X \in \Gamma((\text{çek}F_*)^{\perp})$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için $g_M(X,V) = 0$ olduğundan hareketle

$$\begin{aligned} 0 = g_M(X,V) &= g_M(J_M X, J_M V) \\ 0 &= g_M(BX + CX, J_M V) \\ 0 &= g_M(CX, J_M V) \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

bulunur. Böylece,

$$(\text{çek}F_*)^{\perp} = \mu \oplus J_M(\text{çek}F_*) \tag{3.3.3}$$

elde edilir. Burada, (3.3.2) denkleminden hareketle

$$\begin{aligned} 0 &= g_M(CX, J_M V) \\ &= g_M(J_M(CX), J_M^2 V) \\ &= -g_M(J_M(CX), V) \end{aligned}$$

elde edilir. $V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için $J_M(\mu) \in \Gamma(\text{çek}F_*)^{\perp}$ olmalıdır. Eğer $CX \in \Gamma(J_M(\text{çek}F_*))$ olsaydı $J_M(\mu) \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ olurdu ki $g_M(J_M(CX), V) = 0$ olmasıyla çelişirdi. Dolayısıyla, μ distribüsyonu dönüşümün kompleks yapısına göre invaryanttır. □

Şimdi, konform anti-invaryant Riemann dönüşümüne örnekler verelim.

Örnek 3.3.1. Her anti-invaryant Riemann submersiyonu [33] konform faktörü $\lambda = 1$ ve $(görF_*)^{\perp} = \{0\}$ olan bir konform anti-invaryant Riemann dönüşümüdür.

Örnek 3.3.2. Her Lagrange submersiyonu [33, 45] konform faktörü $\lambda = 1$ ve $(görF_*)^{\perp} = \{0\}$ olan bir Lagrange konform Riemann dönüşümüdür.

Örnek 3.3.3. Her konform anti-invaryant Riemann submersiyonu [2] $(görF_*)^{\perp} = \{0\}$ olan bir konform anti-invaryant Riemann dönüşümüdür.

Örnek 3.3.4. Her anti-invaryant Riemann dönüşümü [34] konform faktörü $\lambda = 1$ olan bir konform anti-invaryant Riemann dönüşümüdür.

Tanım 3.3.2. $F : (M, g_M, J_M) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J_M) Kaehler manifoldu ile (N, g_N) Riemann manifoldu arasındaki konform anti-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Eğer dönüşümün konform faktörü $\lambda \neq 1$ ve $(görF_*)^{\perp} \neq \{0\}$ ise F dönüşümüne bir **özgün konform anti-invaryant Riemann dönüşümü** denir.

Örnek 3.3.5. $F : (\mathbb{R}^4, g_4, J_4) \longrightarrow (\mathbb{R}^5, g_5)$ dönüşümü bir $(\mathbb{R}^4, g_4, J_4)$ Kaehler manifoldundan bir $(\mathbb{R}^5, g_5)$ Riemann manifolduna

$$(-e^{x_1}\cos x_3, e^{x_1}\sin x_3, 0, e^{x_1}\cos x_3, -e^{x_1}\sin x_3)$$

şeklinde tanımlansın. Yatay distribüsyon,

$$\begin{aligned}\mathcal{H} = (çekF_*)^{\perp} = \{X_1 &= \left(-e^{x_1}\cos x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + e^{x_1}\sin x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right),\\ X_2 &= \left(e^{x_1}\sin x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + e^{x_1}\cos x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\}\end{aligned}$$

ve dikey distribüsyon

$$\begin{aligned}\mathcal{V} = (çekF_*) = \{U_1 &= \left(e^{x_1}\cos x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - e^{x_1}\sin x_3\frac{\partial}{\partial x_4}\right),\\ U_2 &= \left(-e^{x_1}\sin x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - e^{x_1}\cos x_3\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$F_*(X_1) = e^{2x_1}\frac{\partial}{\partial x_1} - e^{2x_1}\frac{\partial}{\partial x_4}, \quad F_*(X_2) = e^{2x_1}\frac{\partial}{\partial x_2} - e^{2x_1}\frac{\partial}{\partial x_5}$$

olup F dönüşümü konform faktörü $\lambda = e^{x_1}\sqrt{2}$ olan bir konform Riemann dönüşümüdür. Diğer taraftan, $\mathbb{R}^4$ üzerinde tanımlanan kompleks yapı

$$J_4 = (-a_4, a_3, -a_2, a_1)$$

olmak üzere direk işlemlerle

$$\begin{aligned} J_4(U_1) &= -\sin 2x_3 X_1 - \cos 2x_3 X_2, \\ J_4(U_2) &= -\cos 2x_3 X_1 + \sin 2x_3 X_2 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $J_4(\text{ç}ekF_*) \subset (\text{ç}ekF_*)^\perp$ elde edilir. Dolayısıyla, F dönüşümü bir konform anti-invaryant Riemann dönüşümüdür.

Örnek 3.3.6. $F : (\mathbb{R}^4, g_4, J_4) \longrightarrow (\mathbb{R}^3, g_3)$ dönüşümü bir $(\mathbb{R}^4, g_4, J_4)$ Kaehler manifoldundan bir $(\mathbb{R}^3, g_3)$ Riemann manifolduna

$$(e^{x_1}\cos x_3, e^{x_1}\sin x_3, 0)$$

şeklinde tanımlansın. Yatay distribüsyon,

$$\begin{aligned} \mathcal{H} = (\text{ç}ekF_*)^\perp = \{X_1 &= \left(e^{x_1}\cos x_3\frac{\partial}{\partial x_1} - e^{x_1}\sin x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right), \\ X_2 &= \left(e^{x_1}\sin x_3\frac{\partial}{\partial x_1} + e^{x_1}\cos x_3\frac{\partial}{\partial x_3}\right)\} \end{aligned}$$

ve dikey distribüsyon

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = (\text{ç}ekF_*) = \{U_1 &= \left(-e^{x_1}\cos x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - e^{x_1}\sin x_3\frac{\partial}{\partial x_4}\right), \\ U_2 &= \left(e^{x_1}\sin x_3\frac{\partial}{\partial x_2} - e^{x_1}\cos x_3\frac{\partial}{\partial x_4}\right)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$F_*(X_1) = e^{2x_1}\frac{\partial}{\partial x_1}, \quad F_*(X_2) = e^{2x_1}\frac{\partial}{\partial x_2}$$

olup F dönüşümü konform faktörü $\lambda = e^{x_1}$ olan bir konform Riemann dönüşümüdür. Diğer taraftan, $\mathbb{R}^4$ üzerinde tanımlanan kompleks yapı

$$J_4 = (-a_4, a_3, -a_2, a_1)$$

olmak üzere direk işlemlerle

$$\begin{aligned} J_4(U_1) &= (e^{x_1} \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + e^{x_1} \cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}) = X_2, \\ J_4(U_2) &= (e^{x_1} \cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - e^{x_1} \sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}) = X_1 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $J_4(\text{çek}F_*) = (\text{çek}F_*)^{\perp}$ elde edilir. Dolayısıyla, F dönüşümü bir Lagrange konform Riemann dönüşümüdür.

Konform anti-invaryant Riemann dönüşümlerinin varlığını kabul ederek distribüsyonların geometrisini inceleyelim.

Teorem 3.3.1. *$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform anti-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, invaryant distribüsyon μ nün integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(\mu)$ olmak üzere*

$$A_X JY - A_Y JX = 0$$

olmasıdır.

İspat. M bir Kaehler manifold olduğundan $X, Y \in \Gamma(\mu)$ için (3.3.1) ve (2.1.6) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} \overset{M}{\nabla}_X JY &= J\overset{M}{\nabla}_X Y \\ A_X JY + h\overset{M}{\nabla}_X JY &= J(A_X Y + h\overset{M}{\nabla}_X Y) \\ A_X JY + h\overset{M}{\nabla}_X JY &= JA_X Y + Bh\overset{M}{\nabla}_X Y + Ch\overset{M}{\nabla}_X Y \end{aligned} \tag{3.3.4}$$

olur. (3.3.4) denkleminde X ve Y nin rollerini değiştirirsek

$$A_Y JX + h\overset{M}{\nabla}_Y JX = JA_Y X + Bh\overset{M}{\nabla}_Y X + Ch\overset{M}{\nabla}_Y X \tag{3.3.5}$$

elde edilir. (3.3.4) ve (3.3.5) denklemlerinin dikey bileşenlerini alırsak

$$Bh[X,Y] = A_X JY - A_Y JX$$

elde edilir. Eğer $A_X JY - A_Y JX = 0$ ise $Bh[X,Y] = 0$ ve $h[X,Y] \in \Gamma(\mu)$ elde edilir. Tersine, eğer μ integrallenebilir ise $Bh[X,Y] = 0$ dır. İspat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.3.2. *$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform anti-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, aşağıdaki herhangi iki ifade üçüncüyü belirtir:*

i) çekF_* distribüsyonu, M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.

ii) $\overset{N}{\nabla}{}^F_{JV} F_*(JW) = F_*(J[JV,W]) - g_M(JV,JW)F_*(grad(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)^\perp(JV,JW)$, $V,W \in \Gamma(çekF_*)$.

iii) $grad(\ln\lambda) \in \Gamma(\mu)$.

İspat. (2.2.1), (3.1.1) ve (3.1.4) denklemlerinden $V,W \in \Gamma(çekF_*)$ için

$$\begin{aligned}
F_*(\overset{M}{\nabla}_{JV} JW) &= -(\nabla F_*)(JV,JW) + \overset{N}{\nabla}{}^F_{JV} F_*(JW) \\
&= -(\nabla F_*)^\top(JV,JW) - (\nabla F_*)^\perp(JV,JW) + \overset{N}{\nabla}{}^F_{JV} F_*(JW) \\
&= -JV(\ln\lambda)F_*(JW) - JW(\ln\lambda)F_*(JV) \\
&+ g_M(JV,JW)F_*(grad(\ln\lambda)) - (\nabla F_*)^\perp(JV,JW) \\
&+ \overset{N}{\nabla}{}^F_{JV} F_*(JW)
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

elde edilir. Diğer taraftan, M nin Kaehler manifold olması kullanılarak

$$\begin{aligned}
F_*(\overset{M}{\nabla}_{JV} JW) &= F_*(J\overset{M}{\nabla}_{JV} W) \\
&= F_*(J[JV,W] + J\overset{M}{\nabla}_W JV) \\
&= F_*(J[JV,W]) - F_*(\overset{M}{\nabla}_W V)
\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

elde edilir. (3.3.6) ve (3.3.7) denklemlerinden

$$\begin{aligned} F_*(\overset{M}{\nabla}_W V) &= F_*(J[JV,W]) + JV(\ln\lambda)F_*(JW) \\ &+ JW(\ln\lambda)F_*(JV) - g_M(JV,JW)F_*(grad(\ln\lambda)) \\ &+ (\nabla F_*)^{\perp}(JV,JW) - \overset{N}{\nabla^F}_{JV}F_*(JW) \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

elde edilir. Kabul edelim ki (i) ve (ii) ifadeleri $V,W \in \Gamma(çekF_*)$ için (3.3.8) denkleminde sağlansın. $V = W$ için

$$g_M(grad(\ln\lambda), JV)F_*(JV) = 0$$

olur ki $grad(\ln\lambda) \in \Gamma(\mu)$ olur. Eğer (ii) ve (iii) ifadeleri sağlanırsa (3.3.8) denkleminden $F_*(\overset{M}{\nabla}_W V) = 0$ elde edilir. Böylece, $çekF_*$ distribüsyonu $V,W \in \Gamma(çekF_*)$ için M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar. (i) ve (iii) ifadelerinin (3.3.8) denkleminde $V,W \in \Gamma(çekF_*)$ için sağlandığını kabul edersek

$$0 = F_*(J[JV,W]) - g_M(JV,JW)F_*(grad(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)^{\perp}(JV,JW) - \overset{N}{\nabla^F}_{JV}F_*(JW)$$

denkleminden (ii) elde edilir. □

Şimdi, pluriharmonik dönüşüm tanımını verelim.

Tanım 3.3.3. $F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) kompleks manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlansın. Eğer F dönüşümü $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla F_*)(X,Y) + (\nabla F_*)(JX,JY) = 0 \tag{3.3.9}$$

denklemini sağlıyorsa F dönüşümüne **pluriharmonik dönüşüm** denir [27].

Pluriharmonik dönüşüm tanımını kullanarak sıradaki tanımı verebiliriz.

Tanım 3.3.4. $F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) kompleks manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform anti-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Eğer F dönüşümü $X,Y \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için

$$(\nabla F_*)(X,Y) + (\nabla F_*)(JX,JY) = 0$$

denklemini sağlıyorsa F dönüşümüne $(\mathbf{ç}ekF_*)^{\perp}$ **- pluriharmonik dönüşüm** denir.

Teorem 3.3.3. *$F:(M,g_M,J)\longrightarrow(N,g_N)$ dönüşümü (M,g_M,J) Kaehler manifoldundan (N,g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform anti-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Eğer F dönüşümü $(çekF_*)^\perp$ - pluriharmonik dönüşüm ise $çekF_*$ distribüsyonunun M üzerinde tamamen jeodezik dönüşüm tanımlaması için gerek ve yeter şart $X,Y\in\Gamma((çekF_*)^\perp)$ olmak üzere*

$$\begin{aligned}
F_*(\overset{M}{\nabla}_{BX}BY) &= X(\ln\lambda)F_*(Y)+Y(\ln\lambda)F_*(X)\\
&+ CX(\ln\lambda)F_*(CY)+CY(\ln\lambda)F_*(CX)\\
&- F_*(A_{CY}BX+A_{CX}BY)\\
&- F_*(grad(\ln\lambda))[g_M(X,Y)+g_M(CX,CY)]
\end{aligned}$$

dır.

İspat. F dönüşümü $(çekF_*)^\perp$ - pluriharmonik dönüşüm olduğundan $X,Y\in\Gamma((çekF_*)^\perp)$ olmak üzere

$$(\nabla F_*)(X,Y)+(\nabla F_*)(JX,JY)=0$$

dir. (3.3.1) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla F_*)(X,Y)+(\nabla F_*)(CX,CY)\\
&+ (\nabla F_*)(BX,CY)+(\nabla F_*)(CX,BY)\\
&+ (\nabla F_*)(BX,BY)
\end{aligned}$$

elde edilir. İkinci temel formları $görF_*$ ve $(görF_*)^\perp$ uzaylarının elemanları cinsinden ayırırsak

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla F_*)^\perp(X,Y)+(\nabla F_*)^\top(X,Y)\\
&+ (\nabla F_*)^\perp(CX,CY)+(\nabla F_*)^\top(CX,CY)\\
&+ (\nabla F_*)(BX,CY)+(\nabla F_*)(CX,BY)\\
&+ (\nabla F_*)(BX,BY)
\end{aligned}$$

elde edilir. Dönüşümün ikinci temel formu simetrik olduğundan ve (2.1.6), (2.2.1) ve

(3.1.1) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
0 &= (\nabla F_*)^{\perp}(X,Y) + X(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(X) \\
&- g_M(X,Y)F_*(grad(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)^{\perp}(CX,CY) + CX(\ln\lambda)F_*(CY) \\
&+ CY(\ln\lambda)F_*(CX) - g_M(CX,CY)F_*(grad(\ln\lambda)) \\
&- F_*(\overset{M}{\nabla}_{BX}BY) - F_*(A_{CY}BX) - F_*(A_{CX}BY)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada, *görF*$_*$ uzayının bileşenlerini alırsak

$$
\begin{aligned}
F_*(\overset{M}{\nabla}_{BX}BY) &= X(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(X) \\
&- g_M(X,Y)F_*(grad(\ln\lambda)) \\
&+ CX(\ln\lambda)F_*(CY) + CY(\ln\lambda)F_*(CX) \\
&- g_M(CX,CY)F_*(grad(\ln\lambda)) \\
&- F_*(A_{CY}BX) - F_*(A_{CX}BY)
\end{aligned}
$$

elde edilir. İspat tamamlanır. □

$(çekF_*)^{\perp}$ - pluriharmonik dönüşüm tanımı $çekF_*$ distribüsyonunu karakterize etmek için kullanılabilir.

Teorem 3.3.4. *$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform anti-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Eğer F dönüşümü $(çekF_*)^{\perp}$ - pluriharmonik dönüşüm ise aşağıdaki herhangi iki ifade üçüncüyü belirtir:*

i) *$çekF_*$ distribüsyonu, M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.*

ii) $grad(\ln\lambda) \in \Gamma(J(çekF_*))$.

iii) *$X, Y \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için*

$$
\begin{aligned}
\overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(Y) &= F_*(A_{CX}BY) - F_*(JA_XCY) - F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_X CY) \\
&- F_*(CA_XBY) - F_*(Jv\overset{M}{\nabla}_X BY) + F_*(h\overset{M}{\nabla}_{BX}CY) \\
&- g_M(CX,CY)F_*(grad(\ln\lambda)) - (\nabla F_*)^{\perp}(CX,CY).
\end{aligned}
$$

İspat. F dönüşümü $(\text{ç}ekF_*)^\perp$ - pluriharmonik dönüşüm olduğundan $X,Y \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ için

$$(\nabla F_*)(X,Y) + (\nabla F_*)(JX,JY) = 0$$

dir. Böylece, (2.1.6) ve (3.3.1) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
(\nabla F_*)(X,Y) \quad &+ \quad (\nabla F_*)(JX,JY) \\
&= \quad \overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(Y) - F_*(\overset{M}{\nabla}_X Y) + (\nabla F_*)(BX,CY) + (\nabla F_*)(CX,BY) \\
&+ \quad (\nabla F_*)(BX,BY) + (\nabla F_*)^\perp(CX,CY) + (\nabla F_*)^\top(CX,CY) \\
&= \quad \overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(Y) + F_*(J\overset{M}{\nabla}_X JY) - F_*(h\overset{M}{\nabla}_{BX} CY) - F_*(A_{CX}BY) \\
&- \quad F_*(\overset{M}{\nabla}_{BX} BY) + (\nabla F_*)^\perp(CX,CY) + (\nabla F_*)^\top(CX,CY) \\
&= \quad \overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(Y) + F_*(CA_X BY) + F_*(Jv\overset{M}{\nabla}_X BY) \\
&+ \quad F_*(JA_X CY) + F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_X CY) - F_*(h\overset{M}{\nabla}_{BX} CY) \\
&- \quad F_*(A_{CX}BY) - F_*(\overset{M}{\nabla}_{BX} BY) \\
&+ \quad (\nabla F_*)^\perp(CX,CY) + (\nabla F_*)^\top(CX,CY) \qquad (3.3.10)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.1), (3.1.4) ve denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
F_*(\overset{M}{\nabla}_{BX} BY) \quad &= \quad \overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(Y) - F_*(h\overset{M}{\nabla}_{BX} CY) - F_*(A_{CX}BY) \\
&+ \quad F_*(JA_X CY) + F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_X CY) + F_*(Jv\overset{M}{\nabla}_X BY) \\
&+ \quad F_*(CA_X BY) + (\nabla F_*)^\perp(CX,CY) + CX(\ln\lambda)F_*(CY) \\
&+ \quad CY(\ln\lambda)F_*(CX) - g_M(CX,CY)F_*(grad(\ln\lambda)) \qquad (3.3.11)
\end{aligned}$$

elde edilir. Kabul edelim ki (3.3.11) denkleminde (i) ve (ii) şartları sağlansın. Böylece, $X,Y \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ için $F_*(\overset{M}{\nabla}_{BX} BY) = 0$ ve $CX(\ln\lambda)F_*(CY) + CY(\ln\lambda)F_*(CX) = 0$ olur. Dolayısıyla, (iii) elde edilir. Eğer, (ii) ve (iii) şartları sağlanırsa $F_*(\overset{M}{\nabla}_{BX} BY) = 0$ elde edilir. $F_*(\overset{M}{\nabla}_{BX} BY) = 0$ olduğundan çekF_* distribüsyonu, M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar. Kabul edelim ki (i) ve (iii) şartları sağlansın. (3.3.11) denkleminde $X = Y$ alınırsa

$$g_M(CX, grad(\ln\lambda))F_*(CX) = 0$$

eşitliğinden $grad(\ln\lambda) \in \Gamma(J(\text{ç}ekF_*))$ elde edilir. $\square$

($\text{ç}ekF_*$) distribüsyonu için sıradaki sonucu verebiliriz.

Teorem 3.3.5. *$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform anti-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Aşağıdaki herhangi iki ifade üçüncüyü belirtir:*

i) $J(\text{ç}ekF_*)$ distribüsyonu, M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.

ii) F yatay homotetik dönüşümdür.

iii) $X \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ olmak üzere

$$\overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(JV) = (\nabla F_*)^\perp(X, JV) + F_*([X, JV]) - F_*(J\overset{M}{\nabla}_{JV} CX)$$

dir.

İspat. $X \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ and $V \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için (2.2.1) denkleminden

$$F_*(\overset{M}{\nabla}_X JV) = -(\nabla F_*)(X, JV) + \overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(JV)$$

olur. Böylece, (3.1.1) ve (3.1.4) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} F_*(\overset{M}{\nabla}_X JV) &= -(\nabla F_*)^\perp(X, JV) + \overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(JV) \\ &- X(\ln\lambda)F_*(JV) - JV(\ln\lambda)F_*(X) \\ &+ g_M(X, JV)F_*(grad(\ln\lambda)) \end{aligned}$$

ve buradan

$$\begin{aligned} F_*(\overset{M}{\nabla}_{JV} X) &= -F_*([X, JV]) - (\nabla F_*)^\perp(X, JV) + \overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(JV) \\ &- X(\ln\lambda)F_*(JV) - JV(\ln\lambda)F_*(X) \\ &+ g_M(X, JV)F_*(grad(\ln\lambda)) \\ F_*(J\overset{M}{\nabla}_{JV} JX) &= F_*([X, JV]) + (\nabla F_*)^\perp(X, JV) \\ &- \overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(JV) + X(\ln\lambda)F_*(JV) + JV(\ln\lambda)F_*(X) \\ &- g_M(X, JV)F_*(grad(\ln\lambda)) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.3.1) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} F_*(\overset{M}{\nabla}_{JV} JBX) &= -F_*(J\overset{M}{\nabla}_{JV} CX) + F_*([X,JV]) + (\nabla F_*)^{\perp}(X,JV) \\ &- \overset{N}{\nabla^F}{}_X F_*(JV) - X(\ln\lambda)F_*(JV) - JV(\ln\lambda)F_*(X) \\ &+ g_M(X,JV)F_*(grad(\ln\lambda)) \end{aligned} \tag{3.3.12}$$

olur. Kabul edelim ki (i) ve (ii) şartları (3.3.12) denkleminde sağlansın. Buradan, $X \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $V \in \Gamma(çekF_*)$ için $F_*(\overset{M}{\nabla}_{JV} JBX) = 0$ ve $X(\ln\lambda)F_*(JV) + JV(\ln\lambda)F_*(X) - g_M(X,JV)F_*(grad(\ln\lambda)) = 0$ elde edilir. Böylece, (3.3.12) denkleminden (iii) elde edilir. Eğer (ii) ve (iii) şartları sağlanırsa $F_*(\overset{M}{\nabla}_{JV} JBX) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, $J(çekF_*)$ distribüsyonu, M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar. Kabul edelim ki (i) ve (iii) şartları sağlansın. Burada, $X \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $V \in \Gamma(çekF_*)$ için $X(\ln\lambda)F_*(JV) + JV(\ln\lambda)F_*(X) - g_M(X,JV)F_*(grad(\ln\lambda)) = 0$ elde edilir. Böylece, $\ln\lambda$ nın gradyenti bir dikey vektör alanıdır. Dolayısıyla, F bir yatay homotetik dönüşümdür. □

μ distribüsyonu için sıradaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.3.6. *$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform anti-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Aşağıdaki herhangi iki ifade üçüncüyü belirtir:*

i) μ distribüsyonu, M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.

ii) $grad(\ln\lambda) \in \Gamma(J(çekF_*))$.

iii) $X, Y \in \Gamma(\mu)$ için

$$\overset{N}{\nabla^F}{}_X F_*(Y) = (\nabla F_*)^{\perp}(X,Y) - g_M(X,Y)F_*(grad(\ln\lambda)).$$

İspat. $X, Y \in \Gamma(\mu)$ için (2.2.1) denkleminden

$$(\nabla F_*)(X,Y) = \overset{N}{\nabla^F}{}_X F_*(Y) - F_*(\overset{M}{\nabla}_X Y)$$

dir. (3.1.1) ve (3.1.4) denklemleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
F_*(\overset{M}{\nabla}_X Y) &= \overset{N}{\nabla}^F{}_X F_*(Y) + g_M(X,Y)F_*(grad(\ln\lambda)) \\
&- X(\ln\lambda)F_*(Y) - Y(\ln\lambda)F_*(X) \\
&- (\nabla F_*)^{\perp}(X,Y). \qquad (3.3.13)
\end{aligned}
$$

olur. Kabul edelim ki (i) ve (ii) şartları (3.3.13) denkleminde sağlansın. Burada, $X,Y \in \Gamma(\mu)$ için $F_*(\overset{M}{\nabla}_X Y) = 0$ ve $X(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(X) = 0$ dır. Böylece (iii) şartı sağlanır. Eğer (ii) ve (iii) şartları sağlanırsa $F_*(\overset{M}{\nabla}_X Y) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla, μ distribüsyonu, M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar. (i) ve (iii) şartlarının sağlandığını kabul edersek $X,Y \in \Gamma(\mu)$ için $X(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(X) = 0$ elde edilir. Burada, $X = Y$ alınırsa

$$g_M(X, grad(\ln\lambda))F_*(X) = 0$$

olup $grad(\ln\lambda) \in \Gamma(J(çekF_*))$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. □

Tanım 3.3.5. $F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) kompleks manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform anti-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Eğer F dönüşümü $X \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $V \in \Gamma(çekF_*)$ olmak üzere

$$(\nabla F_*)(X,V) + (\nabla F_*)(JX, JV) = 0$$

denklemini sağlıyorsa F dönüşümüne **karışık - pluriharmonik dönüşüm** denir.

Bu tanımı kullanarak sıradaki sonucu elde ederiz.

Teorem 3.3.7. *$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform anti-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Eğer F dönüşümü karışık- pluriharmonik dönüşüm ise $X \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $V \in \Gamma(çekF_*)$ olmak üzere aşağıdaki iki ifade sağlanır:*

i) $(\nabla F_*)^{\perp}(CX, JV) = 0$,

ii) F dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür $\Leftrightarrow A_X V = -h\overset{M}{\nabla}_{BX} JV$.

İspat. F dönüşümü *karışık*- pluriharmonik dönüşüm olduğundan $X \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için

$$(\nabla F_*)(X,V) + (\nabla F_*)(JX,JV) = 0$$

dir. (2.2.1), (3.1.1), (3.1.4) ve (3.3.1) denklemleri ve ikinci temel formun simetrikliğinden

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla F_*)(X,V) + (\nabla F_*)(BX,JV) + (\nabla F_*)(CX,JV) \\
0 &= -F_*(\overset{M}{\nabla}_X V) - F_*(\overset{M}{\nabla}_{BX} JV) + (\nabla F_*)^\perp(CX,JV) \\
&+ (\nabla F_*)^\top(CX,JV) \\
0 &= -F_*(A_X V) - F_*(h\overset{M}{\nabla}_{BX} JV) + (\nabla F_*)^\perp(CX,JV) \\
&+ CX(\ln\lambda)F_*(JV) + JV(\ln\lambda)F_*(CX) \\
&- g_M(CX,JV)F_*(grad(\ln\lambda))
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

elde edilir. (3.3.3) denkleminden $g_M(CX,JV)F_*(grad(\ln\lambda)) = 0$ olur. (3.3.14) denklemi, $(\text{gör}F_*)$ ve $(\text{gör}F_*)^\perp$ uzaylarının elemanları cinsinden yazılırsa $(\nabla F_*)^\perp(CX,JV) = 0$ ve

$$0 = -F_*(A_X V) - F_*(h\overset{M}{\nabla}_{BX} JV) + CX(\ln\lambda)F_*(JV) + JV(\ln\lambda)F_*(CX)$$

elde edilir. Eğer F dönüşümü bir yatay homotetik dönüşüm ise

$$CX(\ln\lambda)F_*(JV) + JV(\ln\lambda)F_*(CX) = 0$$

olur. Böylece, $A_X V = -h\overset{M}{\nabla}_{BX} JV$ elde edilir. Kabul edelim ki $A_X V = -h\overset{M}{\nabla}_{BX} JV$ olsun. Buradan,

$$0 = CX(\ln\lambda)F_*(JV) + JV(\ln\lambda)F_*(CX) \tag{3.3.15}$$

elde edilir. $JV \in \Gamma(J(\text{çek}F_*))$ için (3.3.15) denkleminde $CX(\ln\lambda) = 0$ elde edilir ki $(\mu)(grad(\ln\lambda)) = 0$ olduğunu gösterir. Benzer şekilde, $CX \in \Gamma(\mu)$ için (3.3.15) denkleminde $JV(\ln\lambda) = 0$ elde edilir ki $J(\text{çek}F_*)(grad(\ln\lambda)) = 0$ olduğunu gösterir. Böylece, $\mathcal{H}(grad(\ln\lambda)) = 0$ elde edilir ki F dönüşümü bir yatay homotetik dönüşümdür. İspat tamamlanır. $\square$

Tanım 3.3.6. $F:(M,g_M,J)\longrightarrow(N,g_N)$ dönüşümü (M,g_M,J) kompleks manifoldundan (N,g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform anti-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Eğer F dönüşümü $V,W\in\Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için

$$(\nabla F_*)(V,W)+(\nabla F_*)(JV,JW)=0$$

denklemini sağlıyorsa F dönüşümüne $(\text{ç}ekF_*)$ **- pluriharmonik dönüşüm** denir.

Teorem 3.3.8. *$F:(M,g_M,J)\longrightarrow(N,g_N)$ dönüşümü (M,g_M,J) Kaehler manifoldundan (N,g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform anti-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Eğer F dönüşümü $(\text{ç}ekF_*)$ - pluriharmonik dönüşüm ise $V,W\in\Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için aşağıdaki iki ifade sağlanır:*

i) $(\nabla F_*)^{\perp}(JV,JW)=0$,

ii) $T_VJV=0$ *ve* $T_VW\in\Gamma(J(\text{ç}ekF_*))$ *olması için gerek ve yeter şart F dönüşümü yatay homotetik dönüşümdür.*

İspat. F dönüşümü bir $(\text{ç}ekF_*)$ - pluriharmonik dönüşüm olduğundan dolayı $V,W\in\Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için

$$(\nabla F_*)(V,W)+(\nabla F_*)(JV,JW)=0$$

dır. Böylece, (2.2.1), (3.1.1) ve (3.1.4) denklemlerinden

$$\begin{aligned}0 &= -F_*(T_VW)+(\nabla F_*)^{\perp}(JV,JW)+(\nabla F_*)^{\top}(JV,JW)\\ 0 &= -F_*(T_VW)+(\nabla F_*)^{\perp}(JV,JW)+JV(\ln\lambda)F_*(JW)\\ &+ JW(\ln\lambda)F_*(JV)-g_M(JV,JW)F_*(grad(\ln\lambda))\end{aligned}\tag{3.3.16}$$

elde edilir. Burada, $(g\ddot{o}rF_*)^{\perp}$ uzayının elemanı olan $(\nabla F_*)^{\perp}(JV,JW)=0$ olduğu açıktır. F dönüşümü konform ve T tensörü anti-simetrik olduğundan dolayı $JV\in\Gamma(J(\text{ç}ekF_*))$ için (3.3.16) denkleminden

$$\begin{aligned}0 &= -g_N(F_*(T_VW),F_*(JV))+JV(\ln\lambda)g_N(F_*(JW),F_*(JV))\\ &+ JW(\ln\lambda)g_N(F_*(JV),F_*(JV))-g_M(JV,JW)g_N(F_*(grad(\ln\lambda)),F_*(JV))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \lambda^2 g_M(T_V JV, W) + \lambda^2 JV(\ln\lambda) g_M(JW, JV) \\
&+ \lambda^2 JW(\ln\lambda) g_M(JV, JV) - \lambda^2 JV(\ln\lambda) g_M(JV, JW) \\
0 &= \lambda^2 JW(\ln\lambda) g_M(JV, JV) + \lambda^2 g_M(T_V JV, W) \\
0 &= \lambda^2 JW(\ln\lambda) g_M(V, V) + \lambda^2 g_M(T_V JV, W) \qquad (3.3.17)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.3.17) denkleminde $grad(\ln\lambda) \in \Gamma(\mu)$ olması için gerek ve yeter şart $T_V JV = 0$ olmalıdır. Şimdi, $X \in \Gamma(\mu)$ için (3.3.16) denkleminden

$$
\begin{aligned}
0 &= -g_N(F_*(T_V W), F_*(X)) + JV(\ln\lambda) g_N(F_*(JW), F_*(X)) \\
&+ JW(\ln\lambda) g_N(F_*(JV), F_*(X)) - g_M(JV, JW) g_N(F_*(grad(\ln\lambda)), F_*(X)) \\
0 &= -\lambda^2 g_M(T_V W, X) + \lambda^2 JV(\ln\lambda) g_M(X, JW) \\
&+ \lambda^2 JW(\ln\lambda) g_M(X, JV) - \lambda^2 X(\ln\lambda) g_M(V, W)
\end{aligned}
$$

olup (3.3.3) denklemi gereğince $g_M(X, JV) = 0$ ve $g_M(X, JW) = 0$ dır. Böylece,

$$
\begin{aligned}
0 &= -\lambda^2 g_M(T_V W, X) - \lambda^2 X(\ln\lambda) g_M(V, W) \\
0 &= \lambda^2 g_M(T_V W, X) + \lambda^2 g_M(V, W) g_M(X, grad(\ln\lambda)) \qquad (3.3.18)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (3.3.18) denkleminde $grad(\ln\lambda) \in \Gamma(J(\text{çek}F_*))$ olması için gerek ve yeter şart $T_V W \in \Gamma(J(\text{çek}F_*))$ olmalıdır. Böylece, $T_V JV = 0$ ve $T_V W \in \Gamma(J(\text{çek}F_*))$ elde edilir. Tersine, eğer $T_V JV = 0$ ve $T_V W \in \Gamma(J(\text{çek}F_*))$ ise öncelikle (3.3.17) denkleminden $\lambda^2 JW(\ln\lambda) g_M(V, V) = 0$ elde edilir ki $J(\text{çek}F_*)(grad(\ln\lambda)) = 0$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan, (3.3.18) denkleminden $\lambda^2 g_M(V, W) g_M(X, grad(\ln\lambda)) = 0$ elde edilir ki $\mu(grad(\ln\lambda)) = 0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $\mathcal{H}(grad(\ln\lambda)) = 0$ elde edilir. F dönüşümü bir yatay homotetik dönüşümdür. □

Teorem 3.3.9. *$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform anti-invaryant Riemann dönüşümü olsun. F dönüşümünün bir yatay homotetik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $X, Y, Z \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ için*

$$
\begin{aligned}
0 &= g_N(\overset{N}{\nabla^F}_X F_*(Y), F_*(Z)) + \lambda^2 g_M(A_X BZ, CY) \\
&+ \lambda^2 g_M(CA_X BY + Ch\overset{M}{\nabla}_X BY + Jv\overset{M}{\nabla}_X BY, Z) \qquad (3.3.19)
\end{aligned}
$$

dir.

İspat. (2.2.1) denkleminden $X, Y \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ için

$$(\nabla F_*)(X,Y) = \overset{N}{\nabla^F}{}_X F_*(Y) - F_*(\overset{M}{\nabla}_X Y)$$

dir. (3.1.1) denklemi kullanılarak eşitliğin sol tarafı için

$$\begin{aligned}(\nabla F_*)(X,Y) &= (\nabla F_*)^\perp(X,Y) + (\nabla F_*)^\top(X,Y)\\ &= (\nabla F_*)^\perp(X,Y) + X(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(X)\\ &- g_M(X,Y)F_*(grad(\ln\lambda))\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

elde edilir. Benzer şekilde, sağ taraf için M Kaehler olduğundan (2.1.5), (2.1.6) ve (3.3.1) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\overset{N}{\nabla^F}{}_X F_*(Y) - F_*(\overset{M}{\nabla}_X Y) &= \overset{N}{\nabla^F}{}_X F_*(Y) + F_*(J\overset{M}{\nabla}_X JY)\\ &= \overset{N}{\nabla^F}{}_X F_*(Y) + F_*(J\overset{M}{\nabla}_X BY + J\overset{M}{\nabla}_X CY)\\ &= \overset{N}{\nabla^F}{}_X F_*(Y) + F_*(J(A_X BY + v\overset{M}{\nabla}_X BY) + J(A_X CY + h\overset{M}{\nabla}_X CY))\\ &= \overset{N}{\nabla^F}{}_X F_*(Y) + F_*(CA_X BY) + F_*(Jv\overset{M}{\nabla}_X BY)\\ &+ F_*(JA_X CY) + F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_X CY)\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

elde edilir. (3.3.20) ve (3.3.21) denklemlerinin eşitliğinden

$$\begin{aligned}0 &= \overset{N}{\nabla^F}{}_X F_*(Y) + F_*(CA_X BY) + F_*(Jv\overset{M}{\nabla}_X BY) + F_*(JA_X CY)\\ &+ F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_X CY) - (\nabla F_*)(X,Y)^\perp - X(\ln\lambda)F_*(Y) - Y(\ln\lambda)F_*(X)\\ &+ g_M(X,Y)F_*(grad(\ln\lambda))\end{aligned} \tag{3.3.22}$$

elde edilir. Şimdi, M manifoldu Kaehler ve A tensörü anti-simetrik olduğundan

$$g_M(JA_X CY, Z) = -g_M(A_X CY, JZ) = g_M(A_X BZ, CY) \tag{3.3.23}$$

olur. $Z \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ için F dönüşümünün konformluğu kullanılarak (3.3.23) denklemini (3.3.22) denkleminde yerine yazarsak

$$\begin{aligned}
0 &= g_N(\overset{N}{\nabla^F}_X F_*(Y), F_*(Z)) + g_N(F_*(CA_X BY), F_*(Z)) + g_N(F_*(Jv\overset{M}{\nabla}_X BY), F_*(Z)) \\
&+ g_N(F_*(JA_X CY), F_*(Z)) + g_N(F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_X CY), F_*(Z)) - X(\ln\lambda) g_N(F_*(Y), F_*(Z)) \\
&- Y(\ln\lambda) g_N(F_*(X), F_*(Z)) + g_M(X,Y) g_N(F_*(grad(\ln\lambda)), F_*(Z)) \\
0 &= g_N(\overset{N}{\nabla^F}_X F_*(Y), F_*(Z)) + \lambda^2 g_M(CA_X BY, Z) + \lambda^2 g_M(Jv\overset{M}{\nabla}_X BY, Z) \\
&+ \lambda^2 g_M(A_X BZ, CY) + \lambda^2 g_M(Ch\overset{M}{\nabla}_X CY, Z) - \lambda^2 X(\ln\lambda) g_M(Y,Z) \\
&- \lambda^2 Y(\ln\lambda) g_M(X,Z) + \lambda^2 Z(\ln\lambda) g_M(X,Y) \qquad (3.3.24)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer (3.3.19) denklemi sağlanırsa

$$-\lambda^2 X(\ln\lambda) g_M(Y,Z) - \lambda^2 Y(\ln\lambda) g_M(X,Z) + \lambda^2 Z(\ln\lambda) g_M(X,Y) = 0 \qquad (3.3.25)$$

olur. (3.3.25) denkleminde $Y = Z$ alınırsa $-\lambda^2 X(\ln\lambda) g_M(Y,Y) = 0$ elde edilir. Görülür ki, $X(\ln\lambda) = 0$ dır. F dönüşümü bir yatay homotetik dönüşümdür. Aksine, eğer F dönüşümü bir yatay homotetik dönüşüm ise

$$-\lambda^2 X(\ln\lambda) g_M(Y,Z) - \lambda^2 Y(\ln\lambda) g_M(X,Z) + \lambda^2 Z(\ln\lambda) g_M(X,Y) = 0$$

olur. (3.3.24) denkleminden (3.3.19) elde edilir.

4. KONFORM YARI-İNVARYANT RİEMANN DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. İlk alt bölümde, konform yarı-invaryant Riemann dönüşümleri tanımlanmakta, örnek verilmekte ve yatay ile dikey distribüsyonların integral manifoldlarının geometrisi incelenmektedir. İkinci alt bölümde, konform yarı invaryant Riemann dönüşümlerinin yatay homotetik dönüşüm olma şartları bulunmaktadır. Üçüncü alt bölümde ise konform yarı-invaryant Riemann dönüşümlerinin jeodezik olma şartları sunulmaktadır.

4.1 Konform Yarı-İnvaryant Riemann Dönüşümleri

Bu alt bölümde, Kaehler manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümleri tanıtılacaktır. Bu dönüşümler için örnekler verilecek, distrübüsyonların geometrisi incelenecektir.

Tanım 4.1.1. $F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda,

i) $\text{ç}ekF_*$ distribüsyonunun bir alt demeti vardır öyleki $J(D_1) = D_1$ dir;

ii) $\text{ç}ekF_*$ distribüsyonunda D_1 alt demetine ortogonal bir tümleyen alt demet olan D_2 vardır öyleki $J(D_2) \subset (\text{ç}ekF_*)^{\perp}$ dir;

şartları sağlanıyorsa F dönüşümüne bir **konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü** denir.

Tanımdan hareketle,

$$\text{ç}ekF_* = D_1 \oplus D_2 \tag{4.1.1}$$

elde edilir.

Şimdi, konform yarı-invaryant Riemann dönüşümlerine örnekler verilecektir.

Örnek 4.1.1. Bir hemen hemen Hermityen manifolddan bir Riemann manifolduna tanımlanan her konform anti-invaryant Riemann submersiyonu [7] $D_2 = çekF_*$ olan bir konform yarı-invaryant Riemann dönüşümüdür.

Tanım 4.1.2. $F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü bir (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan bir (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan bir konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Eğer, $D_1 \neq 0$, $D_2 \neq 0$ and $\mu \neq 0$ şartları sağlanıyorsa F ye bir **özgün konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü** denir.

Şimdi, özgün konform yarı-invaryant Riemann dönüşümüne bir örnek verelim.

Örnek 4.1.2. $F : (\mathbb{R}^8, g_8, J) \longrightarrow (\mathbb{R}^4, g_4)$ dönüşümü bir $(\mathbb{R}^8, g_8, J)$ Kaehler manifoldundan bir $(\mathbb{R}^4, g_4)$ Riemann manifolduna

$$(e^{x_1}\cos x_3, -e^{x_1}\cos x_3, e^{x_1}\cos x_6, -e^{x_1}\cos x_6)$$

şeklinde tanımlansın. Yatay distribüsyon,

$$\mathcal{H} = (çekF_*)^{\perp} = \{X_1 = (e^{x_1}\cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - e^{x_1}\sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}), X_2 = (e^{x_1}\cos x_6 \frac{\partial}{\partial x_1} - e^{x_1}\sin x_6 \frac{\partial}{\partial x_6})\}$$

ve dikey distribüsyon

$$\begin{aligned} \mathcal{V} = (çekF_*) = \{V_1 &= \frac{\partial}{\partial x_2}, V_2 = \frac{\partial}{\partial x_4}, V_3 = \frac{\partial}{\partial x_5}, V_4 = \frac{\partial}{\partial x_7}, V_5 = \frac{\partial}{\partial x_8}, \\ V_6 &= (k\frac{\partial}{\partial x_1} + k\cot x_3 \frac{\partial}{\partial x_3} + k\cot x_6 \frac{\partial}{\partial x_6})\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} F_*(X_1) &= (e^{2x_1}, -e^{2x_1}, e^{2x_1}\cos x_3 \cos x_6, -e^{2x_1}\cos x_3 \cos x_6), \\ F_*(X_2) &= (e^{2x_1}\cos x_3 \cos x_6, -e^{2x_1}\cos x_3 \cos x_6, e^{2x_1}, -e^{2x_1}) \end{aligned}$$

olup, F dönüşümü konform faktörü $\lambda = e^{x_1}\sqrt{2(1+\cos^2 x_3 + \cos^2 x_6)}$ ve $rankF = 2$ olan bir konform Riemann dönüşümüdür. Diğer taraftan, $\mathbb{R}^8$ üzerinde tanımlanan kompleks yapı

$$J = (-a_8, -a_7, -a_6, -a_5, a_4, a_3, a_2, a_1)$$

olmak üzere direk işlemlerle

$$\begin{aligned}
JV_1 &= V_4, \quad JV_2 = V_3, \\
JX_1 &= e^{x_1}\cos x_3 V_5 - \frac{e^{x_1}\cot x_6 \sin x_3}{k(1+\cot^2 x_3+\cot^2 x_6)}V_6 + \frac{\sin 2x_3 \sin 2x_6}{4(1-\cos^2 x_3 \cos^2 x_6)}X_1 \\
&+ \frac{\sin x_3 \sin x_6}{1-\cos^2 x_3 \cos^2 x_6}X_2, \\
JX_2 &= e^{x_1}\cos x_6 V_5 - \frac{e^{x_1}\cot x_3 \sin x_6}{k(1+\cot^2 x_3+\cot^2 x_6)}V_6 + \frac{\cos x_3 \sin x_6}{1-\cos^2 x_3 \cos^2 x_6}X_1 \\
&+ \frac{\cos^2 x_3 \sin 2x_6}{2(\cos^2 x_3 \cos^2 x_6 - 1)}X_2
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, F dönüşümü $D_1 = \{V_1, V_2, V_3, V_4\}$, $D_2 \neq 0$ ve $\mu \neq 0$ olan bir özgün konform yarı-invaryant Riemann dönüşümüdür.

Tanım 4.1.3. $F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü bir (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan bir (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan bir konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Eğer, $J(D_2) = (çekF_*)^{\perp}$ şartı sağlanıyorsa F ye bir **anti-holomorfik konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü** denir.

Burada, anti-holomorfik konform yarı-invaryant Riemann dönüşümüne bir örnek verelim.

Örnek 4.1.3. $F : (\mathbb{R}^6, g_6, J) \longrightarrow (\mathbb{R}^4, g_4)$ dönüşümü bir $(\mathbb{R}^6, g_6, J)$ Kaehler manifoldundan bir $(\mathbb{R}^4, g_4)$ Riemannian manifolduna

$$(e^{x_1}\cos x_3, e^{x_1}\sin x_3, -e^{x_1}\cos x_3, -e^{x_1}\sin x_3)$$

şeklinde tanımlansın. Yatay distribüsyon

$$\mathcal{H} = (çekF_*)^{\perp} = \{X_1 = (e^{x_1}\cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} - e^{x_1}\sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_3}), X_2 = (e^{x_1}\sin x_3 \frac{\partial}{\partial x_1} + e^{x_1}\cos x_3 \frac{\partial}{\partial x_3})\}$$

ve dikey distribüsyon

$$\mathcal{V} = (çekF_*) = \{V_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, V_2 = \frac{\partial}{\partial x_4}, V_3 = \frac{\partial}{\partial x_5}, V_4 = \frac{\partial}{\partial x_6}\}$$

elde edilir. Böylece,

$$F_*(X_1) = e^{2x_1}\frac{\partial}{\partial y_1} - e^{2x_1}\frac{\partial}{\partial y_3}, \quad F_*(X_2) = e^{2x_1}\frac{\partial}{\partial y_2} - e^{2x_1}\frac{\partial}{\partial y_4}$$

olup, F dönüşümü konform faktörü $\lambda = e^{x_1}\sqrt{2}$ olan bir konform Riemann dönüşümüdür. Diğer taraftan, $\mathbb{R}^6$ üzerinde tanımlanan kompleks yapı

$$J = (-a_2, a_1, -a_4, a_3, -a_6, a_5)$$

olmak üzere direk işlemlerle

$$\begin{aligned} JV_1 &= -\frac{\partial}{\partial x_1} = -e^{-x_1} sin x_3 X_1 - e^{-x_1} cos x_3 X_2, \\ JV_2 &= -\frac{\partial}{\partial x_3} = -e^{-x_1} cos x_3 X_1 + e^{-x_1} sin x_3 X_2, \\ JV_3 &= \frac{\partial}{\partial x_6} = V_4, \;\; JV_4 = -\frac{\partial}{\partial x_5} = -V_3 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, F dönüşümü $D_1 = \{V_3, V_4\}$, $D_2 = \{V_1, V_2\}$ ve $J(D_2) = (\text{ç}ekF_*)^\perp = \{X_1, X_2\}$ olan bir anti-holomorfik konform yarı-invaryant Riemann dönüşümüdür.

$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. $V \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için

$$JV = \phi V + \omega V \tag{4.1.2}$$

olmak üzere $\phi V \in \Gamma(D_1)$ ve $\omega V \in \Gamma(J(D_2))$ dir. $X \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ için

$$JX = BX + CX \tag{4.1.3}$$

olmak üzere $BX \in \Gamma(D_2)$ and $CX \in \Gamma(\mu)$ dir. Böylece, (4.1.2) ve (4.1.3) eşitliklerinden $X \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ ve $U \in \Gamma(D_2)$ için

$$g_M(X, U) = 0 \tag{4.1.4}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned} 0 = g_M(X, U) &= g_M(JX, JU) \\ 0 &= g_M(BX, JU) + g_M(CX, JU) \\ 0 &= g_M(CX, JU) \end{aligned} \tag{4.1.5}$$

elde edilir. $(\c{c}ekF_*)^\perp$ distribüsyonunda $J(D_2)$ nin ortogonal tümleyen altdemeti μ olup

$$(\c{c}ekF_*)^\perp = \mu \oplus J(D_2) \tag{4.1.6}$$

dir. Burada, μ distribüsyonu invaryanttır.

Teorem 4.1.1. *$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, invaryant distribüsyon D_1 in integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $U, V \in \Gamma(D_1)$ olmak üzere*

$$(\nabla F_*)(U, JV) - (\nabla F_*)(V, JU) = 0$$

olmasıdır.

İspat. M bir Kaehler manifold olduğundan (2.1.3), (4.1.2) ile (4.1.3) denklemleri kullanılarak $U, V \in \Gamma(D_1)$ için

$$\begin{aligned}
\overset{M}{\nabla}_U JV &= J\overset{M}{\nabla}_U V \\
T_U JV + v\overset{M}{\nabla}_U JV &= J(T_U V + v\hat{\nabla}_U V) \\
T_U JV + v\overset{M}{\nabla}_U JV &= BT_U V + CT_U V + \phi v\hat{\nabla}_U V + \omega v\hat{\nabla}_U V
\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

elde edilir. (4.1.7) denkleminde U ile V nin rolleri değiştirilirse

$$T_V JU + v\overset{M}{\nabla}_V JU = BT_V U + CT_V U + \phi v\hat{\nabla}_V U + \omega v\hat{\nabla}_V U \tag{4.1.8}$$

olur. (4.1.7) ve (4.1.8) in yatay bileşenlerini kullanarak

$$T_U JV - T_V JU = C\{T_U V - T_V U\} + \omega\{v\hat{\nabla}_U V - v\hat{\nabla}_V U\}$$

elde edilir. (2.2.1), (2.4.2) ve T nin simetrikliğinden

$$(\nabla F_*)(U, JV) - (\nabla F_*)(V, JU) = F_*(\omega v[U, V])$$

dir. Böylece, $\omega v[U, V] = 0$ ise $v[U, V] \in \Gamma(D_1)$ elde edilir. İspat tamamlanır. $\square$

Teorem 4.1.2. *$F:(M,g_M,J)\longrightarrow(N,g_N)$ dönüşümü (M,g_M,J) Kaehler manifoldundan (N,g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, D_2 distribüsyonu her zaman integrallenebilirdir.*

İspat. Burada, $\text{çek}F_*$ distribüsyonu integrallenebilir olduğu için $g_M([\mathcal{V},\mathcal{V}],\mathcal{H})=0$ olup $g_M([D_2,D_2],D_1)=0$ olması D_2 distribüsyonunun integrallenebilmesi için yeterlidir. M Kaehler manifold olduğundan temel 2-form Ω kapalıdır. $U\in\Gamma(D_1)$ ve $W,V\in\Gamma(D_2)$ için

$$\begin{aligned}
0=3d\Omega(U,V,W) &= U\Omega(V,W)-V\Omega(U,W)-W\Omega(U,V)\\
&- \Omega([U,V],W)+\Omega(V,[U,W])+\Omega(U,[V,W])\\
&= Ug_M(V,JW)-Vg_M(U,JW)-Wg_M(U,JV)\\
&- g_M([U,V],JW)+g_M(V,J[U,W])+g_M(U,J[V,W])\\
&= -g_M(JU,[V,W])
\end{aligned}$$

elde edilir. D_1 distribüsyonu invaryant olduğundan, $[V,W]\in\Gamma(D_2)$ elde edilir. Buradan ispat tamamlanır. □

Teorem 4.1.3. *$F:(M,g_M,J)\longrightarrow(N,g_N)$ dönüşümü (M,g_M,J) Kaehler manifoldundan (N,g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Eğer, $X,Y\in\Gamma((\text{çek}F_*)^{\perp})$ için*

$$BA_YBX=-Bh\overset{M}{\nabla}_YCX,$$

$$\phi A_YCX=-\phi v\overset{M}{\nabla}_YBX$$

şartları sağlanırsa $(\text{çek}F_*)^{\perp}$ distribüsyonu integrallenebilirdir.

İspat. M manifoldu Kaehler olduğundan ve (2.1.5), (4.1.3) denklemleri kullanılarak $X,Y\in\Gamma((\text{çek}F_*)^{\perp})$ için

$$\begin{aligned}
\overset{M}{\nabla}_XY=-J\overset{M}{\nabla}_XJY &= -\{BA_XBY+CA_XBY+\phi v\overset{M}{\nabla}_XBY+\omega v\overset{M}{\nabla}_XBY\\
&+ \phi A_XCY+\omega A_XCY+Bh\overset{M}{\nabla}_XCY+Ch\overset{M}{\nabla}_XCY\}
\end{aligned} \tag{4.1.9}$$

olur. (4.1.9) denkleminde X ve Y nin rollerini değiştirirsek

$$\overset{M}{\nabla}_Y X = -J\overset{M}{\nabla}_Y JX = -\{BA_Y BX + CA_Y BX + \phi v\overset{M}{\nabla}_Y BX + \omega v\overset{M}{\nabla}_Y BX + \phi A_Y CX + \omega A_Y CX + Bh\overset{M}{\nabla}_Y CX + Ch\overset{M}{\nabla}_Y CX\} \quad (4.1.10)$$

elde edilir. (4.1.9), (4.1.10) denklemlerinin dikey bileşenlerini alırsak

$$\begin{aligned}[X,Y] &= B\{A_Y BX - A_X BY + h\overset{M}{\nabla}_Y CX - h\overset{M}{\nabla}_X CY\} \\ &+ \phi\{A_Y CX - A_X CY + v\overset{M}{\nabla}_Y BX - v\overset{M}{\nabla}_X BY\}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, dikey distribüsyonun elemanları sıfır ise $BA_Y BX = -Bh\overset{M}{\nabla}_Y CX$, $\phi A_Y CX = -\phi v\overset{M}{\nabla}_Y BX$ şartları sağlanır. □

Teorem 4.1.4. *$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, $U, V \in \Gamma(çekF_*)$ için aşağıdaki herhangi üç ifade dördüncüyü belirtir:*

i) $çekF_*$ distribüsyonu M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.

ii) F, bir $çekF_*$-pluriharmonik dönüşümdür.

iii) $T_{\phi U}\phi V + A_{\omega V}\phi U + A_{\omega U}\phi V = 0.$

iv) F, bir yatay homotetik dönüşümdür ve $(\nabla F_*)^{\perp}(\omega U, \omega V) = 0.$

İspat. (2.1.3), (2.2.1) ile (3.1.1) denklemleri, pluriharmonik dönüşüm tanımı ve ikinci temel form simetrik olduğundan $U, V \in \Gamma(çekF_*)$ için

$$\begin{aligned}(\nabla F_*)(U,V) + (\nabla F_*)(JU,JV) &= -F_*(T_U V) + (\nabla F_*)(\phi U, \phi V) + (\nabla F_*)(\phi U, \omega V) \\ &+ (\nabla F_*)(\omega U, \phi V) + (\nabla F_*)(\omega U, \omega V) \\ &= -F_*(T_U V) - F_*(T_{\phi U}\phi V) - F_*(A_{\omega V}\phi U) - F_*(A_{\omega U}\phi V) \\ &+ (\nabla F_*)^{\perp}(\omega U, \omega V) + \omega U(\ln\lambda)F_*(\omega V) \\ &+ \omega V(\ln\lambda)F_*(\omega U) - g_M(\omega U, \omega V)F_*(grad(\ln\lambda))\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
(\nabla F_*)(U,V)+(\nabla F_*)(JU,JV) &= -F_*(T_U V)-F_*(T_{\phi U}\phi V+A_{\omega V}\phi U+A_{\omega U}\phi V)\\
&+ (\nabla F_*)^{\perp}(\omega U,\omega V)-g_M(\omega U,\omega V)F_*(grad(\ln\lambda))\\
&+ \omega U(\ln\lambda)F_*(\omega V)+\omega V(\ln\lambda)F_*(\omega U) \qquad (4.1.11)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Kabul edelim ki (i), (ii) ve (iii) sağlansın. Böylece, $U,V\in\Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için sırasıyla $F_*(T_U V)=0$, $(\nabla F_*)(U,V)+(\nabla F_*)(JU,JV)=0$ ve $T_{\phi U}\phi V+A_{\omega V}\phi U+A_{\omega U}\phi V=0$ dır. Burada, $(g\ddot{o}rF_*)^{\perp}$ uzayının elemanı olan $(\nabla F_*)^{\perp}(\omega U,\omega V)=0$ ve

$$
\omega U(\ln\lambda)F_*(\omega V)+\omega V(\ln\lambda)F_*(\omega U)-g_M(\omega U,\omega V)F_*(grad(\ln\lambda))=0 \qquad (4.1.12)
$$

elde edilir. Şimdi, $\omega U\in\Gamma(J(D_2))$ için dönüşüm konform olduğundan (4.1.12) denkleminden

$$
\begin{aligned}
0 &= \omega U(\ln\lambda)g_N(F_*(\omega V),F_*(\omega U))+\omega V(\ln\lambda)g_N(F_*(\omega U),F_*(\omega U))\\
&- g_M(\omega U,\omega V)g_N(F_*(grad(\ln\lambda)),F_*(\omega U))\\
0 &= \lambda^2\omega U(\ln\lambda)g_M(\omega V,\omega U)+\lambda^2\omega V(\ln\lambda)g_M(\omega U,\omega U)\\
&- \lambda^2\omega U(\ln\lambda)g_M(\omega U,\omega V)\\
0 &= \lambda^2\omega V(\ln\lambda)g_M(\omega U,\omega U) \qquad (4.1.13)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.1.13) denkleminde $J(D_2)(grad(\ln\lambda))=0$ olduğu görülür. Diğer taraftan, $CX\in\Gamma(\mu)$ için dönüşüm konform olduğundan (4.1.6) denklemi (4.1.12) denkleminde kullanılarak

$$
\begin{aligned}
0 &= \omega U(\ln\lambda)g_N(F_*(\omega V),F_*(CX))+\omega V(\ln\lambda)g_N(F_*(\omega U),F_*(CX))\\
&- g_M(\omega U,\omega V)g_N(F_*(grad(\ln\lambda)),F_*(CX))\\
0 &= -g_M(\omega U,\omega V)g_N(F_*(grad(\ln\lambda)),F_*(CX))\\
0 &= -\lambda^2 CX(\ln\lambda)g_M(\omega U,\omega V) \qquad (4.1.14)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.1.14) denkleminde $\mu(grad(\ln\lambda))=0$ olduğu görülür. Dolayısıyla, $\mathcal{H}(grad(\ln\lambda))=0$ elde edilir. F dönüşümü bir yatay homotetik dönüşümdür. Şimdi, (ii), (iii) ve (iv) sağlansın. Böylece, $(\nabla F_*)(U,V)+(\nabla F_*)(JU,JV)=0$, $(\nabla F_*)^{\perp}(\omega U,\omega V)=0$,

$T_{\phi U}\phi V + A_{\omega V}\phi U + A_{\omega U}\phi V = 0$ ve

$$\omega U(\ln\lambda)F_*(\omega V) + \omega V(\ln\lambda)F_*(\omega U) - g_M(\omega U, \omega V)F_*(grad(\ln\lambda)) = 0$$

dır. Görülür ki, (4.1.11) denkleminde $U,V \in \Gamma(çekF_*)$ için $F_*(T_UV) = 0$ olup $çekF_*$ distribüsyonu M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar. Kabul edelim ki, (4.1.11) denkleminde (i), (iii) ve (iv) sağlansın. Böylece, $U,V \in \Gamma(çekF_*)$ için $F_*(T_UV) = 0$, $T_{\phi U}\phi V + A_{\omega V}\phi U + A_{\omega U}\phi V = 0$, $(\nabla F_*)^{\perp}(\omega U, \omega V) = 0$ ve

$$\omega U(\ln\lambda)F_*(\omega V) + \omega V(\ln\lambda)F_*(\omega U) - g_M(\omega U, \omega V)F_*(grad(\ln\lambda)) = 0$$

dır. Dolayısıyla, $(\nabla F_*)(U,V) + (\nabla F_*)(JU,JV) = 0$ elde edilir. Yani, F, bir $çekF_*$-pluriharmonik dönüşümdür. Son olarak, (4.1.11) denkleminde (i), (ii) ve (iv) sağlansın. Sırasıyla, $U,V \in \Gamma(çekF_*)$ için $F_*(T_UV) = 0$, $(\nabla F_*)(U,V) + (\nabla F_*)(JU,JV) = 0$, $(\nabla F_*)^{\perp}(\omega U, \omega V) = 0$ ve

$$\omega U(\ln\lambda)F_*(\omega V) + \omega V(\ln\lambda)F_*(\omega U) - g_M(\omega U, \omega V)F_*(grad(\ln\lambda)) = 0$$

dır. Böylece, $F_*(T_{\phi U}\phi V + A_{\omega V}\phi U + A_{\omega U}\phi V) = 0$ olup (iii) elde edilir. □

4.2 Yatay Homotetik Konform Yarı-İnvaryant Riemann Dönüşümleri

Bu alt bölümde bir konform yarı-invaryant dönüşümün homotetik olması için uygun şartlar bulunmaktadır.

Teorem 4.2.1. *$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, $X,Y \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için aşağıdaki herhangi üç ifade dördüncüyü belirtir:*

i) $(\nabla F_*)^{\perp}(X,Y) + (\nabla F_*)^{\perp}(CX, CY) = 0.$

ii) *F bir yatay homotetik dönüşümdür.*

iii) *F bir $(çekF_*)^{\perp}$-pluriharmonik dönüşümdür.*

iv) $\mathcal{A}_{CX}BY + \mathcal{A}_{CY}BX + \mathcal{T}_{BX}BY = 0.$

İspat. $(çekF_*)^{\perp}$-pluriharmonik dönüşüm tanımı, ikinci temel formun simetrik olması, (2.2.1), (3.1.1) ve (4.1.3) denklemlerinden

$$
\begin{aligned}
(\nabla F_*)(X,Y) + (\nabla F_*)(JX,JY) &= (\nabla F_*)^{\perp}(X,Y) + (\nabla F_*)^{\top}(X,Y) \\
&+ (\nabla F_*)(BX+CX, BY+CY) \\
&= (\nabla F_*)^{\perp}(X,Y) + X(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(X) \\
&- g_M(X,Y)F_*(grad(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)^{\perp}(CX,CY) \\
&+ (\nabla F_*)^{\top}(CX,CY) + (\nabla F_*)(BX,BY) \\
&+ (\nabla F_*)(CX,BY) + (\nabla F_*)(CY,BX) \\
(\nabla F_*)(X,Y) + (\nabla F_*)(JX,JY) &= (\nabla F_*)^{\perp}(X,Y) + (\nabla F_*)^{\perp}(CX,CY) + X(\ln\lambda)F_*(Y) \\
&+ Y(\ln\lambda)F_*(X) - g_M(X,Y)F_*(grad(\ln\lambda)) \\
&+ CX(\ln\lambda)F_*(CY) + CY(\ln\lambda)F_*(CX) \\
&- g_M(CX,CY)F_*(grad(\ln\lambda)) - F_*(\overset{M}{\nabla}_{BX}BY) \\
&- F_*(\overset{M}{\nabla}_{CY}BX) - F_*(\overset{M}{\nabla}_{CX}BY) \qquad (4.2.1) \\
(\nabla F_*)(X,Y) + (\nabla F_*)(JX,JY) &= -F_*(\mathcal{T}_{BX}BY + \mathcal{A}_{CY}BX + \mathcal{A}_{CX}BY) + (\nabla F_*)^{\perp}(X,Y) \\
&+ (\nabla F_*)^{\perp}(CX,CY) + X(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(X) \\
&+ CX(\ln\lambda)F_*(CY) + CY(\ln\lambda)F_*(CX) \\
&- F_*(grad(\ln\lambda))\{g_M(X,Y) + g_M(CX,CY)\} \qquad (4.2.2)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eğer (ii), (iii) ve (iv) şartları sağlanırsa $(görF_*)^{\perp}$ uzayının elemanları için $(\nabla F_*)^{\perp}(X,Y) + (\nabla F_*)^{\perp}(CX,CY) = 0$ olduğu açıktır. Kabul edelim ki (i), (ii) ve (iii) sağlansın. Böylece, $X,Y \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için $(\nabla F_*)^{\perp}(X,Y) + (\nabla F_*)^{\perp}(CX,CY) = 0$, $(\nabla F_*)(X,Y) + (\nabla F_*)(JX,JY) = 0$ ve

$$
\begin{aligned}
0 &= X(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(X) + CX(\ln\lambda)F_*(CY) + CY(\ln\lambda)F_*(CX) \\
&- F_*(grad(\ln\lambda))\{g_M(X,Y) + g_M(CX,CY)\}
\end{aligned}
$$

dır. Görülür ki, $F_*(\mathcal{T}_{BX}BY + \mathcal{A}_{CY}BX + \mathcal{A}_{CX}BY) = 0$ olup (iv) elde edilir. Eğer (i),

(ii) ve (iv) sağlanırsa $(\nabla F_*)(X,Y) + (\nabla F_*)(JX,JY) = 0$ elde edilir ki F bir $(\text{çek}F_*)^{\perp}$-pluriharmonik dönüşümdür. Son olarak, (4.2.2) denkleminde (i), (iii) ve (iv) sağlansın. Böylece,

$$\begin{aligned} 0 &= X(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(X) + CX(\ln\lambda)F_*(CY) + CY(\ln\lambda)F_*(CX) \\ &- F_*(grad(\ln\lambda))\{g_M(X,Y) + g_M(CX,CY)\} \end{aligned} \tag{4.2.3}$$

olur. Eğer (4.2.3) denkleminde $X,Y \in \Gamma(\mu)$ ise $X = CX$ ve $Y = CY$ alır $CX \in \Gamma(\mu)$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} 0 &= CX(\ln\lambda)g_N(F_*(CY),F_*(CX)) + CY(\ln\lambda)g_N(F_*(CX),F_*(CX)) \\ &+ CX(\ln\lambda)g_N(F_*(CY),F_*(CX)) + CY(\ln\lambda)g_N(F_*(CX),F_*(CX)) \\ &- 2g_N(F_*(grad(\ln\lambda)),F_*(CX))g_M(CX,CY) \\ 0 &= 2CY(\ln\lambda)g_N(F_*(CX),F_*(CX)) \end{aligned}$$

olup dönüşüm konform olduğundan

$$0 = 2\lambda^2 CY(\ln\lambda)g_M(CX,CX) \tag{4.2.4}$$

olur. (4.2.4) denkleminde $CY(\ln\lambda) = 0$ olup $\mu(grad(\ln\lambda)) = 0$ olduğu görülür. Benzer olarak, (4.2.3) denkleminde $X,Y \in \Gamma(J(D_2))$ ise $C(J(D_2)) = 0$ olacağından

$$CX(\ln\lambda)F_*(CY) + CY(\ln\lambda)F_*(CX) - F_*(grad(\ln\lambda))g_M(CX,CY) = 0 \tag{4.2.5}$$

olur. (4.2.3) denkleminden kalan terimleri $X,Y \in \Gamma(J(D_2))$ ile çarparsak

$$\begin{aligned} 0 &= X(\ln\lambda)g_N(F_*(Y),F_*(X)) + Y(\ln\lambda)g_N(F_*(X),F_*(X)) \\ &- g_N(F_*(grad(\ln\lambda)),F_*(X))g_M(X,Y) \\ 0 &= \lambda^2 Y(\ln\lambda)g_M(X,X) \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

olur. (4.2.6) denkleminde $Y(\ln\lambda) = 0$ olup $J(D_2)(grad(\ln\lambda)) = 0$ olduğu görülür. Böylece, $\mathcal{H}(grad(\ln\lambda)) = 0$ elde edilir. F dönüşümü bir yatay homotetik dönüşümdür. □

Teorem 4.2.2. *$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Eğer F dönüşümü $(çekF_*)^{\perp}$ - pluriharmonik dönüşüm ise $X, Y \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için aşağıdaki herhangi iki ifade üçüncüyü belirtir:*

i) *F bir yatay homotetik dönüşümdür.*

ii) $A_{CY}BX + A_{CX}BY = 0.$

iii) $\phi T_{BX}Y - T_{BX}CY \in \Gamma(D_2).$

İspat. Kabul edelim ki, (i) ve (ii) ifadeleri (4.2.1) denkleminde sağlansın. Böylece, $X, Y \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $U \in \Gamma(D_1)$ için

$$\begin{aligned} 0 &= X(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(X) + CX(\ln\lambda)F_*(CY) + CY(\ln\lambda)F_*(CX) \\ &- F_*(grad(\ln\lambda))\{g_M(X,Y) + g_M(CX,CY)\} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 0 &= F_*(\overset{M}{\nabla}_{CY}BX) + F_*(\overset{M}{\nabla}_{CX}BY) \\ 0 &= F_*(A_{CY}BX + A_{CX}BY) \end{aligned}$$

olur. M bir Kaehler manifold olduğundan, (2.1.4) ve (4.1.3) denklemleri kullanılarak

$$g_M(\overset{M}{\nabla}_{BX}BY, U) = g_M(\overset{M}{\nabla}_{BX}(JY - CY), U) = g_M(\phi T_{BX}Y - T_{BX}CY, U)$$

elde edilir. Buradan görülür ki $\phi T_{BX}Y - T_{BX}CY \in \Gamma(D_2)$ dir. Burada, diğer maddelerin ispatı önceki teoremin ispatı içerisinde yer almaktadır. □

Sonuç 4.2.1. $F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Eğer F dönüşümü $(çekF_*)^{\perp}$ - pluriharmonik dönüşüm ise $X, Y \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için

$$(\nabla F_*)^{\perp}(X,Y) + (\nabla F_*)^{\perp}(CX, CY) = 0$$

dır.

İspat. Bu sonucun ispatı, Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 nın ispatından rahatça görülebilir. □

Teorem 4.2.3. *$F:(M,g_M,J)\longrightarrow(N,g_N)$ dönüşümü (M,g_M,J) Kaehler manifoldundan (N,g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Eğer F dönüşümü çekF_* - pluriharmonik dönüşüm ise $U,V\in\Gamma(çekF_*)$ için aşağıdaki herhangi iki ifade üçüncüyü belirtir:*

i) D_1 distribüsyonu M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar.

ii) F bir yatay homotetik dönüşümdür ve $(\nabla F_*)^{\perp}(\omega U,\omega V)=0$.

iii) $C\{T_U\phi V+h\overset{M}{\nabla}_U\omega V\}+\omega\{T_U\omega V+v\overset{M}{\nabla}_U\phi V\}=A_{\omega V}\phi U+A_{\omega U}\phi V.$

İspat. çekF_*-pluriharmonik dönüşüm tanımı, (2.2.1) ve (3.1.1) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla F_*)(U,V)+(\nabla F_*)(JU,JV)\\
0 &= -F_*(\overset{M}{\nabla}_U V)+(\nabla F_*)(\phi U,\phi V)+(\nabla F_*)(\phi U,\omega V)+(\nabla F_*)(\omega U,\phi V)\\
&+ (\nabla F_*)(\omega U,\omega V)\\
0 &= F_*(J\overset{M}{\nabla}_U JV)-F_*(\overset{M}{\nabla}_{\phi U}\phi V)-F_*(\overset{M}{\nabla}_{\omega V}\phi U)-F_*(\overset{M}{\nabla}_{\omega U}\phi V)\\
&+ (\nabla F_*)^{\perp}(\omega U,\omega V)+\omega U(\ln\lambda)F_*(\omega V)+\omega V(\ln\lambda)F_*(\omega U)\\
&- g_M(\omega U,\omega V)F_*(grad(\ln\lambda))
\end{aligned}$$

olur. (2.1.3), (2.1.4) ve (2.1.5) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
F_*(\overset{M}{\nabla}_{\phi U}\phi V) &= F_*(J\overset{M}{\nabla}_U\phi V+J\overset{M}{\nabla}_U\omega V)-F_*(A_{\omega V}\phi U+v\hat{\nabla}_{\omega V}\phi U)\\
&- F_*(A_{\omega U}\phi V+v\hat{\nabla}_{\omega U}\phi V)+(\nabla F_*)^{\perp}(\omega U,\omega V)\\
&+ \omega U(\ln\lambda)F_*(\omega V)+\omega V(\ln\lambda)F_*(\omega U)\\
&- g_M(\omega U,\omega V)F_*(grad(\ln\lambda))
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
F_*(\overset{M}{\nabla}_{\phi U}\phi V) &= F_*(JT_U\phi V + Jv\hat{\nabla}_U\phi V) + F_*(JT_U\omega V + Jh\overset{M}{\nabla}_U\omega V) \\
&- F_*(A_{\omega V}\phi U) - F_*(A_{\omega U}\phi V) + (\nabla F_*)^{\perp}(\omega U, \omega V) \\
&+ \omega U(\ln\lambda)F_*(\omega V) + \omega V(\ln\lambda)F_*(\omega U) \\
&- g_M(\omega U, \omega V)F_*(grad(\ln\lambda)) \\
F_*(\overset{M}{\nabla}_{\phi U}\phi V) &= F_*(CT_U\phi V) + F_*(\omega v\hat{\nabla}_U\phi V) + F_*(\omega T_U\omega V) + F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_U\omega V) \\
&- F_*(A_{\omega V}\phi U) - F_*(A_{\omega U}\phi V) + (\nabla F_*)^{\perp}(\omega U, \omega V) \\
&+ \omega U(\ln\lambda)F_*(\omega V) + \omega V(\ln\lambda)F_*(\omega U) \\
&- g_M(\omega U, \omega V)F_*(grad(\ln\lambda)) \qquad (4.2.7)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Kabul edelim ki (i) ve (ii) sağlansın. Böylece, $U, V \in \Gamma(çekF_*)$ için $(görF_*)^{\perp}$ uzayının elemanı olan $(\nabla F_*)^{\perp}(\omega U, \omega V) = 0$, $F_*(\overset{M}{\nabla}_{\phi U}\phi V) = 0$ ve

$$
\omega U(\ln\lambda)F_*(\omega V) + \omega V(\ln\lambda)F_*(\omega U) - g_M(\omega U, \omega V)F_*(grad(\ln\lambda)) = 0 \qquad (4.2.8)
$$

olur. Burada, (4.2.7) denkleminden

$$
\begin{aligned}
F_*(A_{\omega V}\phi U) + F_*(A_{\omega U}\phi V) &= F_*(CT_U\phi V) + F_*(\omega v\hat{\nabla}_U\phi V) \\
&+ F_*(\omega T_U\omega V) + F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_U\omega V) \\
F_*(A_{\omega V}\phi U + A_{\omega U}\phi V) &= F_*(C(T_U\phi V + h\overset{M}{\nabla}_U\omega V)) \\
&+ F_*(\omega(v\hat{\nabla}_U\phi V + T_U\omega V)) \qquad (4.2.9)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.2.9) denklemi gösterir ki (iii) sağlanır. Eğer (ii) ve (iii) sağlanırsa $(\nabla F_*)^{\perp}(\omega U, \omega V) = 0$, $C\{T_U\phi V + h\overset{M}{\nabla}_U\omega V\} + \omega\{T_U\omega V + v\hat{\nabla}_U\phi V\} = A_{\omega V}\phi U + A_{\omega U}\phi V$ ve (4.2.8) denklemi sağlanır. Dolayısıyla, $F_*(\overset{M}{\nabla}_{\phi U}\phi V) = 0$ olur ki (i) sağlanır. Son olarak, (i) ve (iii) sağlansın. Eğer (4.2.7) denklemi $görF_*$ ve $(görF_*)^{\perp}$ uzayının elemanlarına ayrılırsa $(\nabla F_*)^{\perp}(\omega U, \omega V) = 0$ olduğu açıktır. (4.2.7) denkleminde $\omega V \in \Gamma(J(D_2))$ için dönüşümün konformluğundan

$$
\begin{aligned}
0 &= \omega U(\ln\lambda)g_N(F_*(\omega V), F_*(\omega V)) + \omega V(\ln\lambda)g_N(F_*(\omega U), F_*(\omega V)) \\
&- g_M(\omega U, \omega V)g_N(F_*(grad(\ln\lambda)), F_*(\omega V))
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
0 &= \lambda^2 \omega U(\ln\lambda) g_M(\omega V, \omega V) + \lambda^2 \omega V(\ln\lambda) g_M(\omega U, \omega V) \\
&- \lambda^2 g_M(\omega U, \omega V)) g_M(grad(\ln\lambda), \omega V) \\
0 &= \lambda^2 \omega U(\ln\lambda) g_M(\omega V, \omega V) + \lambda^2 \omega V(\ln\lambda) g_M(\omega U, \omega V) \\
&- \lambda^2 \omega V(\ln\lambda) g_M(\omega U, \omega V) \\
0 &= \lambda^2 \omega U(\ln\lambda) g_M(\omega V, \omega V) \qquad (4.2.10)
\end{aligned}
$$

olur. (4.2.10) denkleminde $\omega U(\ln\lambda) = 0$ olup $J(D_2)(grad(\ln\lambda)) = 0$ olduğu görülür. Benzer olarak, (4.2.7) denkleminde $CX \in \Gamma(\mu)$ için (4.1.6) denklemi kullanılarak

$$
\begin{aligned}
0 &= \omega U(\ln\lambda) g_N(F_*(\omega V), F_*(CX)) + \omega V(\ln\lambda) g_N(F_*(\omega U), F_*(CX)) \\
&- g_M(\omega U, \omega V) g_N(F_*(grad(\ln\lambda)), F_*(CX)) \\
0 &= \lambda^2 \omega U(\ln\lambda) g_M(\omega V, CX) + \lambda^2 \omega V(\ln\lambda) g_M(\omega U, CX) \\
&- \lambda^2 g_M(\omega U, \omega V)) g_M(grad(\ln\lambda), CX) \\
0 &= -\lambda^2 CX(\ln\lambda) g_M(\omega U, \omega V) \qquad (4.2.11)
\end{aligned}
$$

olur. (4.2.11) denkleminde $CX(\ln\lambda) = 0$ olup $\mu(grad(\ln\lambda)) = 0$ olduğu görülür. (4.2.10) ve (4.2.11) denklemlerinden $\mathcal{H}(grad(\ln\lambda)) = 0$ olduğu sonucu çıkar. Dolayısıyla, F dönüşümü bir yatay homotetik dönüşümdür. Böylece, (ii) sağlanır. □

Teorem 4.2.4. *$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Eğer F dönüşümü karışık-pluriharmonik dönüşüm ise $X \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(çekF_*)$ için aşağıdaki herhangi iki ifade üçüncüyü belirtir:*

i) F bir yatay homotetik dönüşümdür.

ii) $A_X V + T_{BX}\phi V + A_{CX}\phi V = 0.$

iii) $(\nabla F_*)(BX, \omega V) + (\nabla F_*)^\perp(CX, \omega V) = 0.$

İspat. *Karışık*-pluriharmonik dönüşüm tanımı, (2.2.1), (4.1.2) ve (4.1.3) denklemleri kullanılarak $X \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla F_*)(X,V) + (\nabla F_*)(JX,JV) \\ 0 &= -F_*(\overset{M}{\nabla}_X V) + \overset{N}{\nabla}^F{}_{JX} F_*(JV) - F_*(\overset{M}{\nabla}_{JX} JV) \end{aligned}$$

olup (2.1.3), (2.1.4) ve (2.1.5) denklemlerinden

$$\begin{aligned} 0 &= -F_*(A_X V + \hat{\nabla}_X V) + \overset{N}{\nabla}^F{}_{JX} F_*(\phi V + \omega V) - F_*(\overset{M}{\nabla}_{BX+CX} \phi V + \omega V) \\ 0 &= -F_*(A_X V) + \overset{N}{\nabla}^F{}_{JX} F_*(\omega V) - F_*(\overset{M}{\nabla}_{BX} \phi V) - F_*(\overset{M}{\nabla}_{BX} \omega V) \\ &- F_*(\overset{M}{\nabla}_{CX} \phi V) - F_*(\overset{M}{\nabla}_{CX} \omega V) \\ 0 &= -F_*(A_X V) + \overset{N}{\nabla}^F{}_{BX+CX} F_*(\omega V) - F_*(T_{BX} \phi V) - F_*(h\overset{M}{\nabla}_{BX} \omega V) \\ &- F_*(A_{CX} \phi V) - F_*(h\overset{M}{\nabla}_{CX} \omega V) \end{aligned} \tag{4.2.12}$$

olur. (3.1.4) ve (4.1.6) denklemlerinden

$$\begin{aligned} F_*(h\overset{M}{\nabla}_{CX} \omega V) &= \overset{N}{\nabla}^F{}_{CX} F_*(\omega V) - (\nabla F_*)^\perp(CX, \omega V) \\ &+ CX(\ln\lambda) F_*(\omega V) + \omega V(\ln\lambda) F_*(CX) \end{aligned} \tag{4.2.13}$$

olur. (4.2.13) denklemi (4.2.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \overset{N}{\nabla}^F{}_{BX} F_*(\omega V) - F_*(h\overset{M}{\nabla}_{BX} \omega V) \\ &- F_*(A_X V + T_{BX}\phi V + A_{CX}\phi V) + (\nabla F_*)^\perp(CX, \omega V) \\ &- CX(\ln\lambda) F_*(\omega V) - \omega V(\ln\lambda) F_*(CX) \\ 0 &= (\nabla F_*)(BX, \omega V) + (\nabla F_*)^\perp(CX, \omega V) \\ &- F_*(A_X V + T_{BX}\phi V + A_{CX}\phi V) \\ &- CX(\ln\lambda) F_*(\omega V) - \omega V(\ln\lambda) F_*(CX) \end{aligned} \tag{4.2.14}$$

elde edilir. Kabul edelim ki (i) ve (ii) sağlansın. Sırasıyla,

$$0 = CX(\ln\lambda) F_*(\omega V) + \omega V(\ln\lambda) F_*(CX) \tag{4.2.15}$$

ve $A_X V + T_{BX}\phi V + A_{CX}\phi V = 0$ dır. Böylece, (4.2.14) denkleminden $(\nabla F_*)(BX, \omega V) + (\nabla F_*)^\perp(CX, \omega V) = 0$ elde edilir. (iii) sağlanır. Eğer (4.2.14) denkleminde (i) ve (iii) sağlanırsa $F_*(A_X V + T_{BX}\phi V + A_{CX}\phi V) = 0$ olur ki (ii) elde edilir. Son olarak, (ii) ve (iii) sağlansın. Dönüşüm konform olduğundan (4.1.6) denklemi kullanılarak $CX \in \Gamma(\mu)$ için (4.2.15) denklemi

$$\begin{aligned}
0 &= CX(\ln\lambda) g_N(F_*(\omega V), F_*(CX)) + \omega V(\ln\lambda) g_N(F_*(CX), F_*(CX)) \\
0 &= \lambda^2 CX(\ln\lambda) g_M(\omega V, CX) + \lambda^2 \omega V(\ln\lambda) g_M(CX, CX) \\
0 &= \lambda^2 \omega V(\ln\lambda) g_M(CX, CX) \qquad (4.2.16)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.2.16) denkleminde $\omega V(\ln\lambda) = 0$ olur ki $J(D_2)(grad(\ln\lambda)) = 0$ elde edilir. Benzer şekilde, (4.1.6) denklemi kullanılarak $\omega V \in \Gamma(J(D_2))$ için (4.2.15) denklemi

$$\begin{aligned}
0 &= CX(\ln\lambda) g_N(F_*(\omega V), F_*(\omega V)) + \omega V(\ln\lambda) g_N(F_*(CX), F_*(\omega V)) \\
0 &= \lambda^2 CX(\ln\lambda) g_M(\omega V, \omega V) + \lambda^2 \omega V(\ln\lambda) g_M(CX, \omega V) \\
0 &= \lambda^2 CX(\ln\lambda) g_M(\omega V, \omega V) \qquad (4.2.17)
\end{aligned}$$

olur. (4.2.17) denkleminde $CX(\ln\lambda) = 0$ elde edilir ki $\mu(grad(\ln\lambda)) = 0$ olur. Böylece, (4.2.16) ve (4.2.17) denklemlerinden $\mathcal{H}(grad(\ln\lambda)) = 0$ olur. Dolayısıyla, F bir yatay homotetik dönüşümdür. (i) sağlanır. □

4.3 Jeodezik Konform Yarı-İnvaryant Riemann Dönüşümleri

Bu alt bölümde ilk olarak aşağıdaki kavram tanıtılmaktadır.

Tanım 4.3.1. $F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. Eğer $U, V \in \Gamma(çekF_*)$ olmak üzere

$$(\nabla F_*)(U, V) = 0$$

ise F ye **ç**ekF_*- **jeodezik dönüşüm** denir [4].

Bu kavram yardımı ile aşağıdaki sonuç elde edilmektedir.

Teorem 4.3.1. *$F:(M,g_M,J)\longrightarrow(N,g_N)$ dönüşümü (M,g_M,J) Kaehler manifoldundan (N,g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. F dönüşümünün çekF_*- jeodezik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $V,U\in\Gamma($çek$F_*)$ olmak üzere aşağıdakilerin sağlanmasıdır:*

i) $\hat{\nabla}_U\phi V+T_U\omega V\in\Gamma(D_1)$,

ii) $T_U\phi V+h\overset{M}{\nabla}_U\omega V\in\Gamma(J(D_2))$.

İspat. Bir dönüşümün ikinci temel formu olan (2.2.1) denkleminden hareketle, (2.1.3), (2.1.4), (4.1.2) ve (4.1.3) denklemleri kullanılarak $U,V\in\Gamma($ç$ekF_*)$ için

$$\begin{aligned}(\nabla F_*)(U,V) &= -F_*(\overset{M}{\nabla}_U V)\\ &= F_*(J\overset{M}{\nabla}_U JV)\\ &= F_*(CT_U\phi V)+F_*(\omega\hat{\nabla}_U\phi V)\\ &+ F_*(\omega T_U\omega V)+F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_U\omega V)\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

olur. (4.3.1) denkleminde $W\in\Gamma(D_2)$ için (4.1.6) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}g_N((\nabla F_*)(U,V),F_*(JW)) &= g_N(F_*(\omega\hat{\nabla}_U\phi V),F_*(JW))+g_N(F_*(\omega T_U\omega V),F_*(JW))\\ &= \lambda^2 g_M(\omega\{\hat{\nabla}_U\phi V+T_U\omega V\},JW)\end{aligned}\tag{4.3.2}$$

elde edilir. Burada, $JW\in\Gamma(J(D_2))$ ve $\hat{\nabla}_U\phi V+T_U\omega V$ toplamının terimleri ayrı ayrı dikey distribüsyonun elemanı olup $\omega(D_1)=0$ olduğu için (4.3.2) denkleminde $\hat{\nabla}_U\phi V+T_U\omega V\in\Gamma(D_1)$ olur. Benzer şekilde, (4.3.1) denkleminde $Z\in\Gamma(\mu)$ için (4.1.6) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}g_N((\nabla F_*)(U,V),F_*(Z)) &= g_N(F_*(CT_U\phi V),F_*(Z))+g_N(F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_U\omega V),F_*(Z))\\ &= \lambda^2 g_M(C\{T_U\phi V+h\overset{M}{\nabla}_U\omega V\},Z)\end{aligned}\tag{4.3.3}$$

elde edilir. Burada, $T_U\phi V+h\overset{M}{\nabla}_U\omega V$ toplamının terimleri ayrı ayrı yatay distribüsyonun elemanı olup $C(J(D_2))=0$ olduğu için (4.3.3) denkleminde $T_U\phi V+h\overset{M}{\nabla}_U\omega V\in\Gamma(J(D_2))$ olur. $\square$

Teorem 4.3.2. *$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. D_2 distribüsyonunun M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $Z \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$, $X, Y \in \Gamma(D_2)$ ve $U \in \Gamma(D_1)$ olmak üzere aşağıdakilerin sağlanmasıdır:*

i) $\frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(X, JU), F_*(JY)) = 0,$

ii) $\frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(X, CZ), F_*(JY)) = \frac{1}{\lambda^2} g_N(\overset{N}{\nabla^F}_X F_*(CZ), F_*(JY)) + g_M(T_X BZ, JY).$

İspat. D_2 distribüsyonunun M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için $X, Y \in \Gamma(D_2)$, $Z \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $U \in \Gamma(D_1)$ için $g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y, U) = 0$ ve $g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y, Z) = 0$ olmalıdır. Böylece, F dönüşümünün konformluğu, (2.1.5) ve (2.4.2) denklemlerinden $X, Y \in \Gamma(D_2)$ ile $U \in \Gamma(D_1)$ için

$$\begin{aligned} g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y, U) &= g_M(\overset{M}{\nabla}_X JY, JU) \\ &= -g_M(\overset{M}{\nabla}_X JU, JY) \\ &= -g_M(T_X JU + \hat{\nabla}_X JU, JY) \\ &= -g_M(T_X JU, JY) \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(T_X JU), F_*(JY)) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(X, JU), F_*(JY)) \end{aligned} \tag{4.3.4}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (2.1.3), (2.1.4), (2.2.1) ve (4.1.3) denklemleri kullanılarak $X, Y \in \Gamma(D_2)$, $Z \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için

$$\begin{aligned} g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y, Z) &= -g_M(\overset{M}{\nabla}_X Z, Y) \\ &= -g_M(\overset{M}{\nabla}_X JZ, JY) \\ &= -g_M(\overset{M}{\nabla}_X BZ + \overset{M}{\nabla}_X CZ, JY) \\ &= -g_M(T_X BZ + \hat{\nabla}_X BZ + T_X CZ + h\overset{M}{\nabla}_X CZ, JY) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -g_M(T_X BZ + h\overset{M}{\nabla}_X CZ, JY) \\
&= -\frac{1}{\lambda^2} g_N(\overset{N}{\nabla^F}_X F_*(CZ), F_*(JY)) \\
&+ \frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(X, CZ), F_*(JY)) - g_M(T_X BZ, JY) \qquad (4.3.5)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.3.4) ve (4.3.5) denklemlerinden ispat açıktır. □

Benzer bir şekilde, sıradaki teoremi verelim.

Teorem 4.3.3. *$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. D_1 distribüsyonunun M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $U, V \in \Gamma(D_1)$, $X \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ olmak üzere aşağıdakilerin sağlanmasıdır:*

i) $\hat{\nabla}_U BX + T_U CX \in \Gamma(D_2)$,

ii) $g_N((\nabla F_*)(U, JV), F_*(JW)) = 0.$

İspat. D_1 distribüsyonunun M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için $U, V \in \Gamma(D_1)$, $X \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için $g_M(\overset{M}{\nabla}_U V, X) = 0$ ve $g_M(\overset{M}{\nabla}_U V, W) = 0$ olmalıdır. Böylece, (2.1.3), (2.1.4) ve (4.1.3) denklemleri kullanılarak $U, V \in \Gamma(D_1)$ ve $X \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için

$$
\begin{aligned}
g_M(\overset{M}{\nabla}_U V, X) &= -g_M(\overset{M}{\nabla}_U X, V) \\
&= -g_M(\overset{M}{\nabla}_U JX, JV) \\
&= -g_M(\overset{M}{\nabla}_U BX + \overset{M}{\nabla}_U CX, JV) \\
&= -g_M(T_U BX + \hat{\nabla}_U BX, JV) - g_M(T_U CX + h\overset{M}{\nabla}_U CX, JV) \\
&= -g_M(\hat{\nabla}_U BX, JV) - g_M(T_U CX, JV) \\
&= g_M(J\hat{\nabla}_U BX, V) - g_M(JT_U CX, V) \\
&= g_M(\phi\hat{\nabla}_U BX + \omega\hat{\nabla}_U BX, V) + g_M(\phi T_U CX + \omega T_U CX, V) \\
&= g_M(\phi\{\hat{\nabla}_U BX + T_U CX\}, V) \qquad (4.3.6)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Buradan, $\hat{\nabla}_U BX + T_U CX$ toplamının terimleri ayrı ayrı dikey distribüsyonun elemanı olup $\phi(D_2) = 0$ olduğu için (4.3.6) denkleminde $\hat{\nabla}_U BX + T_U CX \in \Gamma(D_2)$ olur. Benzer şekilde, (2.4.2), (2.1.3) denklemleri kullanılarak $W \in \Gamma(D_2)$ için

$$\begin{aligned} g_M(\overset{M}{\nabla}_U V, W) &= g_M(\overset{M}{\nabla}_U JV, JW) \\ &= g_M(T_U JV + \hat{\nabla}_U JV, JW) \\ &= g_M(T_U JV, JW) \\ &= -\frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(U, JV), F_*(JW)) \end{aligned} \tag{4.3.7}$$

elde edilir. Böylece, (4.3.6) ve (4.3.7) denklemlerinden ispat tamamlanır. □

Teorem 4.3.4. *$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. çekF_* distribüsyonunun M üzerinde tamamen jeodezik foliason tanımlaması için gerek ve yeter şart aşağıdakilerin sağlanmasıdır:*

i) $U, V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için

$$\begin{aligned} g_N((\nabla F_*)(U, JX), F_*(\omega V)) &= g_N((\nabla F_*)(U, \phi V), F_*(JX)) \\ &+ g_N(\overset{N}{\nabla^F}_U F_*(JX), F_*(\omega V)), \end{aligned}$$

ii) $Z \in \Gamma(D_2)$ için $\frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(U, Z), F_*(\omega V)) = g_M(\hat{\nabla}_U Z, \phi V)$.

İspat. çekF_* distribüsyonunun M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için $U, V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$, $Z \in \Gamma(D_2)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için $g_M(\overset{M}{\nabla}_U V, X) = 0$ ve $g_M(\overset{M}{\nabla}_U V, JZ) = 0$ olmalıdır. Böylece, (2.1.4), (2.2.1), (4.1.2) ve (4.1.3) denklemleri kullanılarak $U, V \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ ve $X \in \Gamma(\mu)$ için

$$\begin{aligned} g_M(\overset{M}{\nabla}_U V, X) &= g_M(\overset{M}{\nabla}_U X, V) \\ &= -g_M(\overset{M}{\nabla}_U JX, JV) \\ &= -g_M(T_U JX + h\overset{M}{\nabla}_U JX, \phi V + \omega V) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -g_M(T_U JX, \phi V) - g_M(h\overset{M}{\nabla}_U JX, \omega V) \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\{g_N((\nabla F_*)(U, JX), F_*(\omega V)) - g_N(\overset{N}{\nabla}{}^F{}_U F_*(JX), F_*(\omega V))\} \\
&- \; g_M(T_U JX, \phi V) \qquad (4.3.8)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.3.8) denkleminde T tensör alanı anti-simetrik olduğundan $-g_M(T_U JX, \phi V) = g_M(T_U \phi V, JX)$ dir. Dolayısıyla, (2.4.2) denkleminden

$$
\begin{aligned}
g_M(\overset{M}{\nabla}_U V, X) &= \frac{1}{\lambda^2}\{g_N((\nabla F_*)(U, JX), F_*(\omega V)) - g_N(\overset{N}{\nabla}{}^F{}_U F_*(JX), F_*(\omega V))\} \\
&+ \frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(T_U \phi V), F_*(JX)) \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\{g_N((\nabla F_*)(U, JX), F_*(\omega V)) - g_N(\overset{N}{\nabla}{}^F{}_U F_*(JX), F_*(\omega V)) \\
&- g_N((\nabla F_*)(U, \phi V), F_*(JX))\} \qquad (4.3.9)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi, (2.1.3), (2.2.1) ve (4.1.2) denklemleri kullanılarak $U, V \in \Gamma(çekF_*)$ ve $Z \in \Gamma(D_2)$ için

$$
\begin{aligned}
g_M(\overset{M}{\nabla}_U V, JZ) &= -g_M(\overset{M}{\nabla}_U JZ, V) \\
&= -g_M(J\overset{M}{\nabla}_U Z, V) \\
&= g_M(\overset{M}{\nabla}_U Z, JV) \\
&= g_M(T_U Z + \hat{\nabla}_U Z, \phi V + \omega V) \\
&= g_M(T_U Z, \omega V) + g_M(\hat{\nabla}_U Z, \phi V) \\
&= \frac{1}{\lambda^2} g_N(F_*(T_U Z), F_*(\omega V)) \\
&= g_M(\hat{\nabla}_U Z, \phi V) - \frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(U, Z), F_*(\omega V)) \qquad (4.3.10)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (4.3.9) ve (4.3.10) denklemlerinden ispat tamamlanır. □

Teorem 4.3.5. *$F : (M, g_M, J) \longrightarrow (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform yarı-invaryant Riemann dönüşümü olsun. $(çekF_*)^\perp$ distribüsyonunun M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $W \in \Gamma(D_2)$, $X, Y \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(D_1)$ olmak üzere aşağıdakilerin sağlanmasıdır:*

i) $\frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(X,JV), F_*(CY)) = g_M(\hat{\nabla}_X JV, BY)$,

ii) $\frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(X,JW), F_*(CY)) = \frac{1}{\lambda^2} g_N(\overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(JW), F_*(CY)) + g_M(A_X JW, BY)$.

İspat. $(çekF_*)^\perp$ distribüsyonunun M üzerinde tamamen jeodezik dönüşüm tanımlaması için $W \in \Gamma(D_2)$, $X,Y \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(D_1)$ için $g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y, V) = 0$ ve $g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y, W) = 0$ olmalıdır. Böylece, (2.1.5), (2.4.3) ve (4.1.3) denklemleri kullanılarak $X,Y \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $V \in \Gamma(D_1)$ için

$$\begin{aligned} g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y, V) &= -g_M(\overset{M}{\nabla}_X V, Y) \\ &= -g_M(\overset{M}{\nabla}_X JV, JY) \\ &= -g_M(A_X JV + \hat{\nabla}_X JV, BY + CY) \\ &= -g_M(A_X JV, CY) - g_M(\hat{\nabla}_X JV, BY) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(X,JV), F_*(CY)) - g_M(\hat{\nabla}_X JV, BY) \qquad (4.3.11) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, (2.1.6), (2.2.1) ve (4.1.3) denklemleri kullanılarak $X,Y \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $W \in \Gamma(D_2)$ için

$$\begin{aligned} g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y, W) &= -g_M(\overset{M}{\nabla}_X W, Y) \\ &= -g_M(\overset{M}{\nabla}_X JW, JY) \\ &= -g_M(A_X JW + h\overset{M}{\nabla}_X JW, BY + CY) \\ &= -g_M(A_X JW, BY) - g_M(h\overset{M}{\nabla}_X JW, CY) \\ &= \frac{1}{\lambda^2} g_N((\nabla F_*)(X,JW), F_*(CY)) - \frac{1}{\lambda^2} g_N(\overset{N}{\nabla}{}^F{}_X F_*(JW), F_*(CY)) \\ &- g_M(A_X JW, BY) \qquad (4.3.12) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.3.11) ve (4.3.12) denklemlerinden ispat tamamlanır. □

5. KONFORM SLANT RİEMANN DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır. İlk alt bölümde konform slant Riemann dönüşümü tanımlanmakta ve örnekler verilmektedir. Ayrıca karakterizasyonlar elde edilmekte, distribüsyonların integrallenebilirliği sunulmaktadır. İkinci alt bölümde pluriharmonik konform slant Riemann dönüşümlerinin belirlediği geometri araştırılmaktadır. Üçüncü alt bölümde bir konform slant Riemann dönüşümünün jeodezik olması incelenmektedir.

5.1 Konform Slant Riemann Dönüşümleri

Bu alt bölümde, hemen hemen Hermityen manifoldlardan Riemann manifoldlara tanımlanan konform slant Riemann dönüşümleri tanıtılacaktır. Özgün konform slant Riemann dönüşümüne bir örnek verilecek, distribüsyonların integrallenebilir olması için bazı şartlar elde edilecektir.

Tanım 5.1.1. $F:(M,g_M,J_M)\to(N,g_N)$ dönüşümü bir (M,g_M,J_M) hemen hemen Hermityen manifoldu ile bir (N,g_N) Riemann manifoldu arasında tanımlanan bir konform Riemann dönüşümü olsun. Eğer sıfırdan farklı herhangi bir $X\in\Gamma(çekF_*)$ vektörü için $çekF_*$ ile J_MX arasındaki açı sabit ise, başka deyişle; $p\in M$ ile $çekF_*$ ın elemanı olan X tanjant vektörünün seçiminden bağımsız ise F dönüşümüne bir **konform slant Riemann dönüşümü** denir. Böylece, θ açısına da konform slant Riemann dönüşümünün **slant açısı** denir.

Şimdi, bir izometrik immersiyon ile bir konform anti-invaryant, konform yarı-invaryant veya konform slant Riemann submersiyonlarının bileşke dönüşümlerinden oluşan bazı konform slant Riemann dönüşümü örnekleri vereceğiz [2, 4, 5, 39].

Örnek 5.1.1. $I:(\mathbb{R}^2,g_2)\longrightarrow(\mathbb{R}^4,g_4)$ dönüşümü $(\mathbb{R}^2,g_2)$ ve $(\mathbb{R}^4,g_4)$ Riemann manifoldları arasında

$$(\cos\theta,\sin\theta,\cos\phi,\sin\phi)$$

olarak tanımlansın. I dönüşümün yatay distribüsyonu

$$(\c{c}ekI_*)^{\perp} = \{X_1 = -\sin\theta\frac{\partial}{\partial x_1}, X_2 = \cos\phi\frac{\partial}{\partial x_2}\},$$

olarak elde edilir. Türev dönüşümü yardımıyla

$$\begin{aligned} I_*(X_1) &= (\sin^2\theta, -\cos\theta\sin\theta, 0, 0) \\ I_*(X_2) &= (0, 0, -\cos\phi\sin\phi, \cos^2\phi) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, I dönüşümü $\lambda = 1$ ve $rankI_* = 2$ olan bir izometrik immersiyondur [39].

Örnek 5.1.2. $F : (\mathbb{R}^4, g_4, J) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, g_2)$ konform anti-invaryant Riemann submersiyonu bir $(\mathbb{R}^4, g_4, J)$ Kaehler manifoldundan bir $(\mathbb{R}^2, g_2)$ Riemann manifolduna üzerindeki kompleks yapı

$$J = (-a_3, -a_4, a_1, a_2)$$

ile beraber

$$(e^{x_3}\sin x_4, e^{x_3}\cos x_4)$$

olarak tanımlansın. Örnek 5.1.1 de verilen izometrik immersiyon örneği ile konform anti-invaryant Riemann submersiyonu olan F dönüşümünün bileşke dönüşümü $Z = I\circ F$ dir. $Z : (\mathbb{R}^4, g_4, J) \longrightarrow (\mathbb{R}^4, g_4)$ dönüşümü

$$(\cos(e^{x_3}\sin x_4), \sin(e^{x_3}\sin x_4), \cos(e^{x_3}\cos x_4), \sin(e^{x_3}\cos x_4))$$

olarak tanımlanır. Z dönüşümünün yatay distribüsyonu

$$\begin{aligned} (\c{c}ekZ_*)^{\perp} = \{X_1 &= (0, 0, e^{x_3}\sin x_4\cos(e^{x_3}\sin x_4), e^{x_3}\cos x_4\cos(e^{x_3}\sin x_4)), \\ X_2 &= (0, 0, e^{x_3}\cos x_4\cos(e^{x_3}\cos x_4), -e^{x_3}\sin x_4\cos(e^{x_3}\cos x_4))\} \end{aligned}$$

ve dikey distribüsyonu

$$(\c{c}ekZ_*) = \{V_1 = (1, 0, 0, 0), V_2 = (0, 1, 0, 0)\}$$

olarak elde edilir. Türev dönüşümü yardımıyla,

$$
\begin{aligned}
Z_*(X_1) &= (-e^{2x_3}\sin(e^{x_3}\sin x_4)\cos(e^{x_3}\sin x_4), e^{2x_3}\cos^2(e^{x_3}\sin x_4), 0, 0), \\
Z_*(X_2) &= (0, 0, -e^{2x_3}\sin(e^{x_3}\cos x_4)\cos(e^{x_3}\cos x_4), e^{2x_3}\cos^2(e^{x_3}\cos x_4))
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece, Z dönüşümü $\lambda = e^{x_3}$ ve $rankZ = 2$ olan bir konform Riemann dönüşümüdür. Burada,

$$
\begin{aligned}
JV_1 &= \frac{\sin x_4}{e^{x_3}\cos(e^{x_3}\sin x_4)} X_1, \\
JV_2 &= \frac{\cos x_4}{e^{x_3}\cos(e^{x_3}\cos x_4)} X_2
\end{aligned}
$$

olmak üzere Z bileşke dönüşümü, bir konform anti-invaryant Riemann dönüşümüdür.

Örnek 5.1.3. $F : (\mathbb{R}^6, g_6, J) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, g_2)$ konform yarı-invaryant Riemann submersiyonu bir $(\mathbb{R}^6, g_6, J)$ Kaehler manifoldundan bir $(\mathbb{R}^2, g_2)$ Riemann manifolduna üzerindeki kompleks yapı

$$J = (-a_2, a_1, -a_4, a_3, -a_6, a_5)$$

ile beraber

$$(e^{x_3}\cos x_5, e^{x_3}\sin x_5)$$

olarak tanımlansın. Örnek 5.1.1 de verilen izometrik immersiyon örneği ile konform yarı-invaryant Riemann submersiyonu olan F dönüşümünün bileşke dönüşümü $Z = I \circ F$ dir. $Z : (\mathbb{R}^6, g_6, J) \longrightarrow (\mathbb{R}^4, g_4)$ dönüşümü

$$(\cos(e^{x_3}\cos x_5), \sin(e^{x_3}\cos x_5), \cos(e^{x_3}\sin x_5), \sin(e^{x_3}\sin x_5))$$

olarak tanımlanır. Z dönüşümünün yatay distribüsyonu

$$
\begin{aligned}
(\text{ç}ekZ_*)^{\perp} = \{X_1 &= (0, 0, -e^{x_3}\cos x_5\sin(e^{x_3}\cos x_5), 0, e^{x_3}\sin x_5\sin(e^{x_3}\cos x_5)), \\
X_2 &= (0, 0, e^{x_3}\sin x_5\cos(e^{x_3}\sin x_5), 0, e^{x_3}\cos x_5\cos(e^{x_3}\sin x_5))\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
(\text{ç}ekZ_*) = \{V_1 &= (1, 0, 0, 0, 0, 0), V_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0), \\
V_3 &= (0, 0, 0, 1, 0, 0), V_4 = (0, 0, 0, 0, 0, 1)\}
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Türev dönüşümü yardımıyla,

$$\begin{aligned} Z_*(X_1) &= (e^{2x_3}\sin^2(e^{x_3}\cos x_5), -e^{2x_3}\sin(e^{x_3}\cos x_5)\cos(e^{x_3}\cos x_5), 0, 0), \\ Z_*(X_2) &= (0, 0, -e^{2x_3}\sin(e^{x_3}\sin x_5)\cos(e^{x_3}\sin x_5), e^{2x_3}\cos^2(e^{x_3}\sin x_5)) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Z dönüşümü $\lambda = e^{x_3}$ ve $rankZ = 2$ olan bir konform Riemann dönüşümüdür. Burada,

$$\begin{aligned} JV_1 &= V_2, JV_3 = \frac{\cos x_5}{e^{x_3}\sin(e^{x_3}\cos x_5)}X_1, \\ JV_4 &= -\frac{\cos x_5}{e^{x_3}\cos(e^{x_3}\sin x_5)}X_2 \end{aligned}$$

elde edilir. $V_1, V_2 \in \Gamma(D_1)$ ve $V_3, V_4 \in \Gamma(D_2)$ olmak üzere Z bileşke dönüşümü, bir konform yarı-invaryant Riemann dönüşümüdür.

Örnek 5.1.4. $F : (\mathbb{R}^4, g_4, J) \longrightarrow (\mathbb{R}^2, g_2)$ konform slant Riemann submersiyonu bir $(\mathbb{R}^4, g_4, J)$ Kaehler manifoldundan bir $(\mathbb{R}^2, g_2)$ Riemann manifolduna üzerindeki kompleks yapı

$$J = \cos\alpha(-c, -d, a, b) + \sin\alpha(-b, a, d, -c)$$

ve θ slant açısıyla beraber

$$(e^{x_1}\sin x_2, e^{x_1}\cos x_2)$$

olarak tanımlansın. Örnek 5.1.1 de verilen izometrik immersiyon örneği ile konform slant Riemann submersiyonu olan F dönüşümünün bileşke dönüşümü $Z = I \circ F$ dir. $Z : (\mathbb{R}^4, g_4, J) \longrightarrow (\mathbb{R}^4, g_4)$ dönüşümü

$$(\cos(e^{x_1}\sin x_2), \sin(e^{x_1}\sin x_2), \cos(e^{x_1}\cos x_2), \sin(e^{x_1}\cos x_2))$$

olarak tanımlanır. Z dönüşümünün yatay distribüsyonu

$$\begin{aligned} (\text{ç}ekZ_*)^\perp = \{X_1 &= (e^{x_1}\sin x_2\cos(e^{x_1}\sin x_2), e^{x_1}\cos x_2\cos(e^{x_1}\sin x_2), 0, 0), \\ X_2 &= (-e^{x_1}\cos x_2\sin(e^{x_1}\cos x_2), e^{x_1}\sin x_2\sin(e^{x_1}\cos x_2), 0, 0)\} \end{aligned}$$

ve dikey distribüsyonu

$$(\text{ç}ekZ_*) = \{V_1 = (0, 0, 1, 0), V_2 = (0, 0, 0, 1)\}$$

olarak elde edilir. Türev dönüşümü yardımıyla,

$$\begin{aligned} Z_*(X_1) &= (-e^{2x_1}\sin(e^{x_1}\sin x_2)\cos(e^{x_1}\sin x_2), e^{2x_1}\cos^2(e^{x_1}\sin x_2), 0, 0), \\ Z_*(X_2) &= (0, 0, e^{2x_1}\sin^2(e^{x_1}\cos x_2), -e^{2x_1}\sin(e^{x_1}\cos x_2)\cos(e^{x_1}\cos x_2)) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, Z dönüşümü $\lambda = e^{x_1}$ ve $rankZ = 2$ olan bir konform Riemann dönüşümüdür. Burada,

$$\theta = \arccos(\sin\alpha)$$

olmak üzere Z bileşke dönüşümü, slant açısı θ olan bir konform slant Riemann dönüşümüdür.

Tanım 5.1.2. $F : (M, g_M, J_M) \to (N, g_N)$ dönüşümü bir (M, g_M, J_M) hemen hemen Hermityen manifoldu ile bir (N, g_N) Riemann manifoldu arasında tanımlanan bir konform Riemann dönüşümü olsun. Eğer F dönüşümü ne bir konform invaryant ne de bir konform anti-invaryant Riemann dönüşümü değilse bu dönüşüme **özgün konform slant Riemann dönüşümü** denir.

Şimdi, özgün konform slant Riemann dönüşümüne bir örnek verelim.

Örnek 5.1.5. $F : (\mathbb{R}^4, g_4, J) \longrightarrow (\mathbb{R}^4, g_4)$ dönüşümü bir $(\mathbb{R}^4, g_4, J)$ Kaehler manifoldundan bir $(\mathbb{R}^4, g_4)$ Riemann manifolduna

$$(e^{x_2}\sin x_4, e^{x_2}\cos x_4, -e^{x_2}\sin x_4, -e^{x_2}\cos x_4)$$

şeklinde tanımlansın. Yatay distribüsyon

$$\mathcal{H} = (\text{çek}F_*)^\perp = \{X_1 = e^{x_2}\sin x_4\frac{\partial}{\partial x_2} + e^{x_2}\cos x_4\frac{\partial}{\partial x_4}, X_2 = e^{x_2}\cos x_4\frac{\partial}{\partial x_2} - e^{x_2}\sin x_4\frac{\partial}{\partial x_4}\}$$

ve dikey distribüsyon

$$\mathcal{V} = (\text{çek}F_*) = \{V_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, V_2 = \frac{\partial}{\partial x_3}\}$$

elde edilir. Böylece,

$$F_*(X_1) = (e^{2x_2}, 0, -e^{2x_2}, 0), F_*(X_2) = (0, e^{2x_1}, 0, -e^{2x_2})$$

olup F dönüşümü konform faktörü $\lambda = e^{x_2}\sqrt{2}$ ve $rankF = 2$ olan bir konform Riemann dönüşümüdür. Diğer taraftan, $\mathbb{R}^4$ üzerinde tanımlanan kompleks yapı

$$J_\alpha = \cos\alpha(-c,-d,a,b) + \sin\alpha(-b,a,d,-c), 0 < \alpha \leq \frac{\pi}{2}$$

olmak üzere F dönüşümü $\theta = \alpha$ olan bir özgün konform slant Riemann dönüşümüdür.

F dönüşümü bir (M, g_M, J_M) Kaehler manifoldundan bir (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan bir konform Riemann dönüşümü olsun. $V \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için

$$JV = \phi V + \omega V, \tag{5.1.1}$$

olup $\phi V \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ ve $\omega V \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ dir. $X \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ için

$$JX = BX + CX, \tag{5.1.2}$$

olup $BX \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ ve $CX \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ dir. Burada, ϕ ve ω nın kovaryant türevleri $U, V \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için

$$(\overset{M}{\nabla}_U \omega)V = h\overset{M}{\nabla}_U \omega V - \omega \hat{\nabla}_U V, \tag{5.1.3}$$
$$(\overset{M}{\nabla}_U \phi)V = \hat{\nabla}_U \phi V - \phi \hat{\nabla}_U V \tag{5.1.4}$$

dir.

Burada, (2.1.3), (2.1.4), (5.1.1), (5.1.2) denklemleri ve ϕ ile ω nın kovaryant türevleri kullanılarak sıradaki sonucu verelim.

Lemma 5.1.1. *$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$ dönüşümü bir (M, g_M, J) Kaehler manifoldu ile bir (N, g_N) Riemann manifoldu arasında tanımlanan bir konform Riemann dönüşümü olsun. F bir konform slant Riemann dönüşümü ise $U, V \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için*

$$h\overset{M}{\nabla}_U \omega V - \omega \hat{\nabla}_U V = CT_U V - T_U \phi V,$$

$$\hat{\nabla}_U \phi V - \phi \hat{\nabla}_U V = BT_U V - T_U \omega V$$

eşitlikleri vardır.

Konform slant Riemann dönüşümleri için sıradaki karakterizasyonu verelim.

Teorem 5.1.1. *$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform Riemann dönüşümü olsun. F dönüşümünün bir konform slant Riemann dönüşümü olması için gerek ve yeter şart $\lambda \in [-1, 0]$ olacak şekilde bir sabitin var olmasıdır öyleki $U \in \Gamma(çekF_*)$ için*

$$\phi^2 U = \lambda U$$

dur. Eğer F bir konform slant Riemann dönüşümü ise $\lambda = -\cos^2\theta$ dır.

İspat. F bir konform slant Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda $U \in \Gamma(çekF_*)$ için $\cos\theta = \frac{\|\phi U\|}{\|JU\|}$ dur. Öte yandan, M bir Kaehler manifold olduğundan

$$g_M(\phi^2 U, U) = -g_M(\phi U, \phi U) = -\cos^2\theta g_M(U, U)$$

olarak yazılır. Böylece, $\phi^2 U = \lambda U$ olur. Tersine, her $U \in \Gamma(çekF_*)$ için $\lambda \in [-1, 0]$ olacak şekilde $\phi^2 U = \lambda U$ olsun. Böylece,

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{g_M(JU, \phi U)}{\|JU\|\|\phi U\|} \\ &= -\frac{g_M(U, \phi^2 U)}{\|JU\|\|\phi U\|} \\ &= -\frac{\lambda g_M(U, U)}{\|JU\|\|\phi U\|} \\ &= -\lambda\frac{\|JU\|}{\|\phi U\|} \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

elde edilir. (5.1.5) denkleminde $\cos\theta = \frac{\|\phi U\|}{\|JU\|}$ olduğu kullanılırsa $\lambda = -\cos^2\theta$ elde edilir. □

(5.1.1) denkleminden ve Teorem 5.1.1 den sıradaki sonucu elde ederiz.

Teorem 5.1.2. *$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan slant açısı θ olan konform slant Riemann dönüşümü olsun. Burada, $U, V \in \Gamma(çekF_*)$ için*

$$g_M(\phi U, \phi V) = \cos^2\theta g_M(U, V) \tag{5.1.6}$$

$$g_M(\omega U, \omega V) = \sin^2\theta g_M(U, V) \tag{5.1.7}$$

dir.

F, hemen hemen Hermityen manifold (M, g_M, J) den Riemann manifoldu (N, g_N) üzerine tanımlanan slant açısı θ olan bir konform slant Riemann dönüşümü olsun. Burada, çekF_* üzerinde Levi-Civita konneksiyonu $\overset{M}{\nabla}$ e göre ω nın kovaryant türevi sıfır ise yani; $U, V \in \Gamma($ç$ekF_*)$ için (5.1.3) denkleminden

$$\overset{M}{\nabla}_U \omega V = \omega \overset{M}{\nabla}_U V$$

eşitliği var ise ω ya çekF_* üzerinde Levi-Civita konneksiyonu $\overset{M}{\nabla}$ e göre paraleldir denir.

Teorem 5.1.3. *$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform slant Riemann dönüşümü olsun. Eğer ω, çekF_* üzerinde Levi-Civita konneksiyonu $\overset{M}{\nabla}$ e göre paralel ise $U \in \Gamma($çek$F_*)$ için*

$$T_{\phi U}\phi U = -cos^2\theta T_U U \tag{5.1.8}$$

dir.

İspat. Eğer ω, çekF_* üzerinde Levi-Civita konneksiyonu $\overset{M}{\nabla}$ e göre paralel ise, $U, V \in \Gamma($ç$ekF_*)$ için (5.1.3) denklemi ve Lemma 5.1.1 kullanılarak

$$CT_U V = T_U \phi V \tag{5.1.9}$$

elde edilir. Burada, U ve V nin rolleri değiştirilerek (5.1.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$CT_V U = T_V \phi U \tag{5.1.10}$$

elde edilir. Dikey vektör alanı T simetrik olduğundan (5.1.9) ve (5.1.10) denklemlerinden

$$T_U \phi V = T_V \phi U \tag{5.1.11}$$

elde edilir. $\phi^2 V = \lambda V$ olduğundan ve $V = \phi U$ için (5.1.11) denkleminden

$$\begin{aligned} T_U \phi^2 U &= T_{\phi U} \phi U \\ -\cos^2 T_U U &= T_{\phi U} \phi U \end{aligned} \tag{5.1.12}$$

elde edilir. İspat (5.1.12) denkleminden açıktır. $\square$

Teorem 5.1.4. *$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform slant Riemann dönüşümü olsun. Bu taktirde, $X, Y \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $U \in \Gamma(çekF_*)$ için aşağıdaki ifadelerden herhangi ikisi üçüncüyü belirtir:*

i) Yatay distribüsyon $(çekF_*^{\perp})$ integrallenebilirdir,

ii) $X(\ln\lambda)g_M(Y, \omega\phi U) = Y(\ln\lambda)g_M(X, \omega\phi U)$,

iii) $g_N(F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_X \omega U + \omega A_X \omega U), F_*(Y)) + g_N(\overset{N}{\nabla}{}^F_X F_*(\omega\phi U), F_*(Y))$
$= g_N(F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_Y \omega U + \omega A_Y \omega U), F_*(X)) + g_N(\overset{N}{\nabla}{}^F_Y F_*(\omega\phi U), F_*(X))$.

İspat. Şimdi, $X, Y \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $U \in \Gamma(çekF_*)$ için

$$\begin{aligned} g_M([X,Y],U) &= g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y, U) - g_M(\overset{M}{\nabla}_Y X, U) \\ &= -g_M(\overset{M}{\nabla}_X U, Y) + g_M(\overset{M}{\nabla}_Y U, X) \\ &= -g_M(\overset{M}{\nabla}_X \phi U, JY) - g_M(\overset{M}{\nabla}_X \omega U, JY) \\ &+ g_M(\overset{M}{\nabla}_Y \phi U, JX) + g_M(\overset{M}{\nabla}_Y \omega U, JX) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.5) ve (5.1.1) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g_M([X,Y],U) &= g_M(\overset{M}{\nabla}_X J\phi U, Y) + g_M(JA_X \omega U + Jh\overset{M}{\nabla}_X \omega U, Y) \\ &- g_M(\overset{M}{\nabla}_Y J\phi U, X) - g_M(JA_Y \omega U + Jh\overset{M}{\nabla}_Y \omega U, X) \end{aligned}$$

bulunur. F bir konform dönüşüm olduğundan Teorem 5.1.1, (2.1.6) ve (5.1.2) denklemlerinden

$$\begin{aligned} g_M([X,Y],U) &= cos^2\theta g_M([X,Y]U) + \frac{1}{\lambda^2}\{g_N(F_*(h\overset{M}{\nabla}_X \omega\phi U), F_*(Y)) \\ &+ g_N(F_*(\omega A_X \omega U), F_*(Y)) + g_N(F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_X \omega U), F_*(Y)) \\ &- g_N(F_*(h\overset{M}{\nabla}_Y \omega\phi U), F_*(X)) - g_N(F_*(\omega A_Y \omega U), F_*(X)) \\ &- g_N(F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_Y \omega U), F_*(X))\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada, (2.2.1) ve (3.1.1) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned}
sin^2\theta g_M([X,Y],U) &= \frac{1}{\lambda^2}\{g_N(F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_X\omega U+\omega A_X\omega U),F_*(Y)) \\
&- g_N(F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_Y\omega U+\omega A_Y\omega U),F_*(X)) \\
&+ g_N(F_*(\overset{N}{\nabla}{}^F_X F_*(\omega\phi U),F_*(Y)) \\
&- g_N(F_*(\overset{N}{\nabla}{}^F_Y F_*(\omega\phi U),F_*(X)) \\
&- X(\ln\lambda)g_N(F_*(\omega\phi U),F_*(Y))-\omega\phi U(\ln\lambda)g_N(F_*(X),F_*(Y)) \\
&+ g_M(X,\omega\phi U)g_N(F_*(grad(\ln\lambda)),F_*(Y)) \\
&- g_N((\nabla F_*)^\perp(X,\omega\phi U),F_*(Y)) \\
&+ Y(\ln\lambda)g_N(F_*(\omega\phi U),F_*(X))+\omega\phi U(\ln\lambda)g_N(F_*(Y),F_*(X)) \\
&- g_M(Y,\omega\phi U)g_N(F_*(grad(\ln\lambda)),F_*(X)) \\
&+ g_N((\nabla F_*)^\perp(Y,\omega\phi U),F_*(X))\}
\end{aligned}$$

elde edilir. F dönüşümünün konformluğundan

$$\begin{aligned}
sin^2\theta g_M([X,Y],U) &= \frac{1}{\lambda^2}\{g_N(F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_X\omega U+\omega A_X\omega U),F_*(Y)) \\
&- g_N(F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_Y\omega U+\omega A_Y\omega U),F_*(X)) \\
&+ g_N(F_*(\overset{N}{\nabla}{}^F_X F_*(\omega\phi U),F_*(Y)) \\
&- g_N(F_*(\overset{N}{\nabla}{}^F_Y F_*(\omega\phi U),F_*(X))\} \\
&+ 2Y(\ln\lambda)g_M(X,\omega\phi U)-2X(\ln\lambda)g_M(Y,\omega\phi U)
\end{aligned}$$

bulunur. İspat yukarıdaki denklemden açıktır. □

Şimdi dikey distribüsyonun liflerinin geometrisini inceleyeceğiz.

Teorem 5.1.5. *$F:(M,g_M,J)\to(N,g_N)$ dönüşümü (M,g_M,J) Kaehler manifoldundan (N,g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform slant Riemann dönüşümü olsun. Bu durumda, dikey distribüsyon çekF_* ın M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlaması için gerek ve yeter şart $U,V\in\Gamma($çek$F_*)$, $X\in\Gamma(($çek$F_*)^\perp)$ olmak üzere*

$$g_N((\nabla F_*)(U,JX),F_*(\omega V))=g_N((\nabla F_*)(U,X),F_*(\omega\phi V))$$

olmasıdır.

İspat. M bir Kaehler manifold olduğundan Teorem 5.1.1, (5.1.1) ve (5.1.2) denklemlerinden $X \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^{\perp})$ ve $U,V \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için

$$\begin{aligned}
g_M(\overset{M}{\nabla}_U V, X) &= -g_M(J\overset{M}{\nabla}_U X, JV) \\
&= -g_M(J\overset{M}{\nabla}_U X, \phi V) - g_M(J\overset{M}{\nabla}_U X, \omega V) \\
&= g_M(\overset{M}{\nabla}_U X, J\phi V) - g_M(\overset{M}{\nabla}_U JX, \omega V) \\
&= g_M(\overset{M}{\nabla}_U X, \phi^2 V) - g_M(\overset{M}{\nabla}_U X, \omega\phi V) \\
&- g_M(\overset{M}{\nabla}_U BX, \omega V) - g_M(\overset{M}{\nabla}_U CX, \omega V) \\
&= -cos^2\theta g_M(\overset{M}{\nabla}_U X, V) - g_M(\overset{M}{\nabla}_U X, \omega\phi V) \\
&- g_M(\overset{M}{\nabla}_U BX, \omega V) - g_M(\overset{M}{\nabla}_U CX, \omega V)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece,

$$\begin{aligned}
sin^2\theta g_M(\overset{M}{\nabla}_U V, X) &= -g_M(h\overset{M}{\nabla}_U X, \omega\phi V) - g_M(T_U BX, \omega V) \\
&- g_M(h\overset{M}{\nabla}_U CX, \omega V)
\end{aligned}$$

bulunur. (2.2.1) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned}
sin^2\theta g_M(\overset{M}{\nabla}_U V, X) &= \frac{1}{\lambda^2}\{-g_N(F_*(h\overset{M}{\nabla}_U X), F_*(\omega\phi V)) - g_N(F_*(T_U BX), F_*(\omega V)) \\
&- g_N(F_*(h\overset{M}{\nabla}_U CX), F_*(\omega V))\} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\{-g_N((\nabla F_*)(U,X), F_*(\omega\phi V)) \\
&+ g_N((\nabla F_*)(U,BX), F_*(\omega V)) \\
&+ g_N((\nabla F_*)(U,CX), F_*(\omega V))\} \\
&= \frac{1}{\lambda^2}\{g_N((\nabla F_*)(U,JX), F_*(\omega V)) \\
&- g_N((\nabla F_*)(U,X), F_*(\omega\phi V))\}
\end{aligned}$$

elde edilir. İspat açıktır. □

Sıradaki teoremde ise yatay distribüsyonun geometrisini irdeleyeceğiz.

Teorem 5.1.6. *$F:(M,g_M,J)\to(N,g_N)$ dönüşümü bir (M,g_M,J) Kaehler manifoldundan bir (N,g_N) Riemann manifolduna tanımlanan bir konform slant Riemann dönüşümü olsun. $X,Y\in\Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $U\in\Gamma(çekF_*)$ için aşağıdaki ifadelerden herhangi ikisi üçüncüyü belirtir:*

i) Yatay distribüsyon $(çekF_*)^{\perp}$ M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar,

ii) F bir yatay homotetik dönüşümdür,

iii) $g_M(A_XY,U)=\frac{1}{\lambda^2}g_N(\overset{N}{\nabla}{}^F_XF_*(Y),F_*(\omega\phi U+C\omega U))$.

İspat. Burada, (2.1.6), (5.1.6) ve (5.1.7) denklemleri kullanılarak $X,Y\in\Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $U\in\Gamma(çekF_*)$ için

$$\begin{aligned}
g_M(\overset{M}{\nabla}_XY,U) &= g_M(\overset{M}{\nabla}_XJY,JU)\\
&= g_M(J\overset{M}{\nabla}_XY,\phi U)+g_M(J\overset{M}{\nabla}_XY,\omega U)\\
&= g_M(JA_XY+Jh\overset{M}{\nabla}_XY,\phi U)+g_M(JA_XY+Jh\overset{M}{\nabla}_XY,\omega U)\\
&= g_M(\phi A_XY,\phi U)+g_M(Jh\overset{M}{\nabla}_XY,\phi U)\\
&+ g_M(\omega A_XY,\omega U)+g_M(Jh\overset{M}{\nabla}_XY,\omega U)\\
&= cos^2\theta g_M(A_XY,U)-g_M(h\overset{M}{\nabla}_XY,J\phi U)\\
&+ sin^2\theta g_M(A_XY,U)-g_M(h\overset{M}{\nabla}_XY,J\omega U)\\
&= g_M(A_XY,U)-g_M(h\overset{M}{\nabla}_XY,\omega\phi U)-g_M(h\overset{M}{\nabla}_XY,C\phi U)
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.2.1) ve (3.1.1) denklemlerinden

$$\begin{aligned}
g_M(\overset{M}{\nabla}_XY,U) &= g_M(A_XY,U)-\frac{1}{\lambda^2}g_N(\overset{N}{\nabla}{}^F_XF_*(Y),F_*(\omega\phi U+C\omega U))\\
&+ X(\ln\lambda)g_M(Y,\omega\phi U)+Y(\ln\lambda)g_M(X,\omega\phi U)\\
&- \omega\phi U(\ln\lambda)g_M(X,Y)+X(\ln\lambda)g_M(Y,C\omega U)\\
&+ Y(\ln\lambda)g_M(X,C\omega U)-C\omega U(\ln\lambda)g_M(X,Y) \qquad (5.1.13)
\end{aligned}$$

bulunur. Eğer yatay distribüsyon $(çekF_*)^{\perp}$ M üzerinde $X,Y\in\Gamma((çekF_*)^{\perp})$ ve $U\in\Gamma(çekF_*)$ için tamamen jeodezik foliasyon tanımlıyor ve $g_M(A_XY,U)=$

$\frac{1}{\lambda^2}g_N(\overset{N}{\nabla}{}^F_X F_*(Y), F_*(\omega\phi U + C\omega U))$ eşitliği varsa F dönüşümünün bir yatay homotetik dönüşüm olduğunu gösterelim. Eğer (i) ve (iii) sağlanırsa $X,Y \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $U \in \Gamma(çekF_*)$ için

$$\begin{aligned} 0 &= X(\ln\lambda)g_M(Y,\omega\phi U) + Y(\ln\lambda)g_M(X,\omega\phi U) \\ &- \omega\phi U(\ln\lambda)g_M(X,Y) + X(\ln\lambda)g_M(Y,C\omega U) \\ &+ Y(\ln\lambda)g_M(X,C\omega U) - C\omega U(\ln\lambda)g_M(X,Y) \end{aligned} \tag{5.1.14}$$

elde edilir. Kabul edelim ki (5.1.14) denkleminde $X = \omega\phi U$, $Y = C\omega U$ olsun. Böylece,

$$C\omega U(\ln\lambda)g_M(\omega\phi U,\omega\phi U) + \omega\phi U(\ln\lambda)g_M(C\omega U, C\omega U) = 0 \tag{5.1.15}$$

elde edilir. Eğer $C\omega U(\ln\lambda) = 0$ ise (5.1.15) denkleminden $C\omega U \in \Gamma(C(çekF_*)^\perp)$ için $\omega\phi U(\ln\lambda)g_M(C\omega U, C\omega U) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla λ, $\Gamma(\omega(çekF_*))$ üzerinde bir sabittir. Diğer taraftan, eğer $\omega\phi U(\ln\lambda) = 0$ ise (5.1.15) denkleminden $\omega\phi U \in \Gamma(\omega(çekF_*))$ için $C\omega U(\ln\lambda)g_M(\omega\phi U,\omega\phi U) = 0$ elde edilir. Dolayısıyla λ, $\Gamma(C(çekF_*)^\perp)$ üzerinde bir sabittir. Böylece, F bir yatay homotetik dönüşümdür. (ii) sağlanır. Eğer (i) ve (ii) sağlanırsa $X,Y \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $U \in \Gamma(çekF_*)$ için $g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y, U) = 0$ ve (5.1.14) denklemi sağlanır. Dolayısıyla, (5.1.13) denkleminden $g_M(A_X Y, U) = \frac{1}{\lambda^2}g_N(\overset{N}{\nabla}{}^F_X F_*(Y), F_*(\omega\phi U + C\omega U))$ elde edilir. (iii) sağlanır. Son olarak, (5.1.13) denkleminde (ii) ve (iii), $X,Y \in \Gamma((çekF_*)^\perp)$ ve $U \in \Gamma(çekF_*)$ için sağlanırsa $g_M(\overset{M}{\nabla}_X Y, U) = 0$ elde edilir. Bu ifade gösterirki yatay distribüsyon $(çekF_*^\perp)$ M üzerinde tamamen jeodezik foliasyon tanımlar. □

5.2 Pluriharmonik Konform Slant Riemann Dönüşümleri

Tanım 5.2.1. Bir (M, g_M, J) kompleks manifoldundan bir (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan F konform slant Riemann dönüşümü $U,V \in \Gamma(çekF_*)$ için

$$(\nabla F_*)(U,V) + (\nabla F_*)(JU,JV) = 0$$

denklemini sağlarsa F dönüşümüne **ç**ekF_*- **pluriharmonik dönüşüm** denir.

Bu tanımı, konform slant Riemann dönüşümlerinin yatay homotetik dönüşüm olma şartlarını bulmak için kullanalım.

Teorem 5.2.1. *$F:(M,g_M,J)\to(N,g_N)$ dönüşümü bir (M,g_M,J) Kaehler manifoldundan bir (N,g_N) Riemann manifolduna tanımlanan bir konform slant Riemann dönüşümü olsun. Eğer F, çekF_*- pluriharmonik dönüşüm ise $U,V\in\Gamma(\text{çek}F_*)$ için aşağıdaki ifadelerden biri diğerini sağlar:*

i) F bir yatay homotetik dönüşümdür,

ii) $F_*(A_{\omega U}\phi V+A_{\omega V}\phi U)=F_*(h\overset{M}{\nabla}_U\omega\phi V+\omega T_U\omega V+Ch\overset{M}{\nabla}_U\omega V)$ ve $(\nabla F_*)^\perp(\omega U,\omega V)=0$.

İspat. çekF_*-pluriharmonik dönüşüm tanımı, (2.2.1) ve (3.1.4) denklemleri kullanılarak $U,V\in\Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için

$$
\begin{aligned}
0 &= (\nabla F_*)(U,V)+(\nabla F_*)(JU,JV)\\
0 &= -F_*(\overset{M}{\nabla}_U V)+(\nabla F_*)(\phi U,\phi V)+(\nabla F_*)(\omega U,\phi V)\\
&+ (\nabla F_*)(\omega U,\omega V)+(\nabla F_*)(\omega V,\phi U)\\
0 &= F_*(\overset{M}{\nabla}_U J\phi V+J\overset{M}{\nabla}_U\omega V)-F_*(\overset{M}{\nabla}_{\phi U}\phi V)-F_*(\overset{M}{\nabla}_{\omega V}\phi U)\\
&- F_*(\overset{M}{\nabla}_{\omega U}\phi V)+(\nabla F_*)^\perp(\omega U,\omega V)+\omega U(\ln\lambda)F_*(\omega V)\\
&+ \omega V(\ln\lambda)F_*(\omega U)-g_M(\omega U,\omega V)F_*(grad(\ln\lambda))
\end{aligned}
$$

elde edilir. Şimdi, (2.1.4), (5.1.8) denklemleri ile Teorem 5.1.1 kullanılıp

$$
\begin{aligned}
0 &= F_*(\overset{M}{\nabla}_U\phi^2V+\overset{M}{\nabla}_U\omega\phi V+JT_U\omega V+Jh\overset{M}{\nabla}_U\omega V)\\
&- F_*(T_{\phi U}\phi V)-F_*(A_{\omega U}\phi V)-F_*(A_{\omega V}\phi U)+(\nabla F_*)^\perp(\omega U,\omega V)\\
&+ \omega U(\ln\lambda)F_*(\omega V)+\omega V(\ln\lambda)F_*(\omega U)-g_M(\omega U,\omega V)F_*(grad(\ln\lambda))\\
0 &= F_*(h\overset{M}{\nabla}_U\omega\phi V+\omega T_U\omega V+Ch\overset{M}{\nabla}_U\omega V-A_{\omega U}\phi V-A_{\omega V}\phi U)\\
&+ (\nabla F_*)^\perp(\omega U,\omega V)+\omega U(\ln\lambda)F_*(\omega V)+\omega V(\ln\lambda)F_*(\omega U)\\
&- g_M(\omega U,\omega V)F_*(grad(\ln\lambda)) \qquad (5.2.1)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Eğer F bir yatay homotetik dönüşüm ise (5.2.1) denkleminden $U,V \in \Gamma(çekF_*)$ için

$$\omega U(\ln\lambda)F_*(\omega V)+\omega V(\ln\lambda)F_*(\omega U)-g_M(\omega U,\omega V)F_*(grad(\ln\lambda))=0$$

dır. Dolayısıyla, (ii) açıkca sağlanır. Eğer (ii) sağlanırsa, (5.2.1) denkleminden $U,V \in \Gamma(çekF_*)$ için $F_*(A_{\omega U}\phi V + A_{\omega V}\phi U) = F_*(h\overset{M}{\nabla}_U \omega\phi V + \omega T_U \omega V + Ch\overset{M}{\nabla}_U \omega V)$ ve $(\nabla F_*)^{\perp}(\omega U,\omega V)=0$ dır. Böylece, (5.2.1) denkleminden

$$\begin{aligned} 0 &= \omega U(\ln\lambda)F_*(\omega V)+\omega V(\ln\lambda)F_*(\omega U) \\ &- g_M(\omega U,\omega V)F_*(grad(\ln\lambda)) \end{aligned} \tag{5.2.2}$$

elde edilir. (5.2.2) denkleminde $\omega U \in \Gamma(\omega(çekF_*))$ için $0=\lambda^2\omega V(\ln\lambda)g_M(\omega U,\omega U)$ elde edilir. Bu ifade, $\omega(çekF_*)(grad(\ln\lambda))=0$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan, (5.2.2) denkleminde $X \in \Gamma(C(çekF_*)^{\perp})$ için $\omega U=\omega V$ alınırsa

$$0=2\lambda^2\omega U(\ln\lambda)g_M(X,\omega U)-\lambda^2 X(\ln\lambda)g_M(\omega U,\omega U) \tag{5.2.3}$$

elde edilir. λ, $\omega(çekF_*)$ üzerinde sabit olduğundan $2\lambda^2\omega U(\ln\lambda)g_M(X,\omega U)=0$ elde edilir. Böylece, (5.2.3) denkleminden $\lambda^2 X(\ln\lambda)g_M(\omega U,\omega U)=0$ olur ki $C(çekF_*)^{\perp}(grad(\ln\lambda))=0$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla, $\mathcal{H}(grad(\ln\lambda))=0$ dır. F bir yatay homotetik dönüşümdür. □

Tanım 5.2.2. (M,g_M,J) kompleks manifoldundan bir (N,g_N) Riemann manifolduna tanımlanan F konform slant Riemann dönüşümü $X,Y \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için

$$(\nabla F_*)(X,Y)+(\nabla F_*)(JX,JY)=0$$

denklemini sağlarsa F dönüşümüne $(\mathbf{ç}ekF_*)^{\perp}-$ **pluriharmonik dönüşüm** denir.

Teorem 5.2.2. *$F:(M,g_M,J)\to(N,g_N)$ dönüşümü (M,g_M,J) Kaehler manifoldundan (N,g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform slant Riemann dönüşümü olsun. Eğer F, $(çekF_*)^{\perp}-$ pluriharmonik dönüşüm ise F dönüşümünün bir yatay homotetik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $Z,Y \in \Gamma((çekF_*)^{\perp})$ için*

$$(\nabla F_*)^{\perp}(Z,Y)+(\nabla F_*)^{\perp}(CZ,CY)=0$$

ve

$$F_*(T_{BZ}BY + A_{CY}BZ + A_{CZ}BY) = 0$$

olmasıdır.

İspat. $(\text{ç}ekF_*)^\perp-$ pluriharmonik dönüşüm tanımı, (2.2.1) ve (3.1.1) denklemleri kullanılarak $Z, Y \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla F_*)(Z,Y) + (\nabla F_*)(JZ,JY) \\
0 &= (\nabla F_*)^\perp(Z,Y) + Z(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(Z) \\
&- g_M(Z,Y)F_*(grad(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)(BZ,BY) + (\nabla F_*)(CZ,CY) \\
&+ (\nabla F_*)(CY,BZ) + (\nabla F_*)(CZ,BY) \\
0 &= (\nabla F_*)^\perp(Z,Y) + Z(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(Z) \\
&- g_M(Z,Y)F_*(grad(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)^\perp(CZ,CY) + CZ(\ln\lambda)F_*(CY) \\
&+ CY(\ln\lambda)F_*(CZ) - g_M(CZ,CY)F_*(grad(\ln\lambda)) \\
&- F_*(\overset{M}{\nabla}_{BZ}BY) - F_*(\overset{M}{\nabla}_{CY}BZ) - F_*(\overset{M}{\nabla}_{CZ}BY) \\
0 &= (\nabla F_*)^\perp(Z,Y) + (\nabla F_*)^\perp(CZ,CY) + Z(\ln\lambda)F_*(Y) \\
&+ Y(\ln\lambda)F_*(Z) - g_M(Z,Y)F_*(grad(\ln\lambda)) + CZ(\ln\lambda)F_*(CY) \\
&+ CY(\ln\lambda)F_*(CZ) - g_M(CZ,CY)F_*(grad(\ln\lambda)) \\
&- F_*(T_{BZ}BY + A_{CY}BZ + A_{CZ}BY) \qquad (5.2.4)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer F bir yatay homotetik dönüşüm ise (5.2.4) denkleminden $Z, Y \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ için

$$\begin{aligned}
0 &= Z(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(Z) \\
&- g_M(Z,Y)F_*(grad(\ln\lambda)) + CZ(\ln\lambda)F_*(CY) \\
&+ CY(\ln\lambda)F_*(CZ) - g_M(CZ,CY)F_*(grad(\ln\lambda))
\end{aligned}$$

dır. Son denklem ve (5.2.4) denklemi beraber ele alınırsa $(\nabla F_*)^\perp(Z,Y) + (\nabla F_*)^\perp(CZ,CY) = 0$ ile $F_*(T_{BZ}BY + A_{CY}BZ + A_{CZ}BY) = 0$ olduğu görülür. Tersine,

$Z, Y \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ için (5.2.4) denkleminde $(\nabla F_*)^\perp(Z,Y) + (\nabla F_*)^\perp(CZ,CY) = 0$ ve $F_*(T_{BZ}BY + A_{CY}BZ + A_{CZ}BY) = 0$ şartları sağlanırsa

$$\begin{aligned} 0 &= Z(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(Z) \\ &- g_M(Z,Y)F_*(grad(\ln\lambda)) + CZ(\ln\lambda)F_*(CY) \\ &+ CY(\ln\lambda)F_*(CZ) - g_M(CZ,CY)F_*(grad(\ln\lambda)) \end{aligned} \tag{5.2.5}$$

elde edilir. (5.2.5) denkleminde $CY \in \Gamma(C(\text{çek}F_*)^\perp)$ için $Z = CZ$, $Y = CY$ alınırsa $0 = 2\lambda^2 CZ(\ln\lambda)g_M(CY,CY)$ olur. Bu gösterir ki $(C(\text{çek}F_*)^\perp)(grad(\ln\lambda)) = 0$ dır. Diğer taraftan, (5.2.5) denkleminde $\omega U \in \Gamma(\omega(\text{çek}F_*))$ için $Z = Y = CZ$ alınırsa

$$0 = 4\lambda^2 CZ(\ln\lambda)g_M(CZ,\omega U) - 2\lambda^2\omega U(\ln\lambda)g_M(CZ,CZ) \tag{5.2.6}$$

elde edilir. λ, $C(kerF_*)^\perp$ üzerinde bir sabit olduğundan $4\lambda^2 CZ(\ln\lambda)g_M(CZ,\omega U) = 0$ olur. Böylece, (5.2.6) denkleminden $-2\lambda^2\omega U(\ln\lambda)g_M(CZ,CZ) = 0$ elde edilir. Bu gösterir ki $(\omega(kerF_*))(grad(\ln\lambda)) = 0$ dır. Böylece, $\mathcal{H}(grad(\ln\lambda)) = 0$ elde edilir. F bir yatay homotetik dönüşümdür. □

Tanım 5.2.3. (M, g_M, J) kompleks manifoldundan bir (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan F konform slant Riemann dönüşümü $Y \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $U \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ için

$$(\nabla F_*)(Y,U) + (\nabla F_*)(JY,JU) = 0$$

denklemini sağlarsa F dönüşümüne $\{(\text{çek}F_*)^\perp - (\text{çek}F_*)\}-$ **pluriharmonik dönüşüm** denir.

Teorem 5.2.3. *$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform slant Riemann dönüşümü olsun. Eğer F, $\{(\text{çek}F_*)^\perp - (\text{çek}F_*)\}-$ pluriharmonik dönüşüm ise $X \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ ve $U \in \Gamma(\text{çek}F_*)$ olmak üzere aşağıdaki ifadelerden herhangi ikisi üçüncüyü sağlar:*

i) F bir yatay homotetik dönüşümdür,

ii) $(\nabla F_*)^\perp(CX,\omega U) = 0$ ve
$F_*(T_{BX}\phi U + A_{\omega U}BX + A_{CX}\phi U + h\overset{M}{\nabla}_X\omega\phi U) = F_*(\omega A_X\omega U + Ch\overset{M}{\nabla}_X\omega U)$,

iii) Dikey distribüsyon çekF_*, M üzerinde yatay distribüsyon $(\text{çek}F_*)^\perp$ boyunca paraleldir.

İspat. $\{(\text{ç}ekF_*)^\perp - (\text{ç}ekF_*)\}-$ pluriharmonik dönüşüm tanımından $X \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ ve $U \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için

$$0 = (\nabla F_*)(X,U) + (\nabla F_*)(JX,JU)$$

elde edilir. Bir dönüşümün ikinci temel formu tanımından ve (2.2.1), (5.1.1) ile (5.1.2) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= -F_*(\overset{M}{\nabla}_X U) + (\nabla F_*)(BX,\phi U) + (\nabla F_*)(\omega U, BX) \\ &+ (\nabla F_*)(CX,\phi U) + (\nabla F_*)(CX,\omega U) \end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.5), (2.1.6) ve (3.1.4) denklemleri için

$$\begin{aligned} 0 &= F_*(J\overset{M}{\nabla}_X(\phi U + \omega U)) - F_*(\overset{M}{\nabla}_{BX}\phi U) - F_*(\overset{M}{\nabla}_{\omega U} BX) \\ &- F_*(\overset{M}{\nabla}_{CX}\phi U) + (\nabla F_*)^\perp(CX,\omega U) + CX(\ln\lambda)F_*(\omega U) \\ &+ \omega U(\ln\lambda)F_*(CX) - g_M(CX,\omega U)F_*(grad(\ln\lambda)) \\ 0 &= F_*(\overset{M}{\nabla}_X J\phi U) + F_*(JA_X\omega U + Jh\overset{M}{\nabla}_X \omega U) - F_*(T_{BX}\phi U) \\ &- F_*(A_{\omega U}BX) - F_*(A_{CX}\phi U) + (\nabla F_*)^\perp(CX,\omega U) \\ &+ CX(\ln\lambda)F_*(\omega U) + \omega U(\ln\lambda)F_*(CX) - g_M(CX,\omega U)F_*(grad(\ln\lambda)) \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi, Teorem 5.1.1 kullanılarak $X \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^\perp)$ ve $U \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için

$$\begin{aligned} 0 &= F_*(\overset{M}{\nabla}_X \phi^2 U) + F_*(\overset{M}{\nabla}_X \omega\phi U) + F_*(\omega A_X \omega U + Ch\overset{M}{\nabla}_X \omega U) \\ &- F_*(T_{BX}\phi U + A_{\omega U}BX + A_{CX}\phi U) + (\nabla F_*)^\perp(CX,\omega U) \\ &+ CX(\ln\lambda)F_*(\omega U) + \omega U(\ln\lambda)F_*(CX) \\ &- g_M(CX,\omega U)F_*(grad(\ln\lambda)) \\ cos^2\theta F_*(\overset{M}{\nabla}_X U) &= F_*(h\overset{M}{\nabla}_X \omega\phi U + \omega A_X \omega U + Ch\overset{M}{\nabla}_X \omega U) \\ &- F_*(T_{BX}\phi U + A_{\omega U}BX + A_{CX}\phi U) + (\nabla F_*)^\perp(CX,\omega U) \\ &+ CX(\ln\lambda)F_*(\omega U) + \omega U(\ln\lambda)F_*(CX) \\ &- g_M(CX,\omega U)F_*(grad(\ln\lambda)) \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

elde edilir. Eğer (i) ve (ii) şartları (5.2.7) denkleminde sağlanırsa

$$0 = CX(\ln\lambda)F_*(\omega U) + \omega U(\ln\lambda)F_*(CX) - g_M(CX,\omega U)F_*(grad(\ln\lambda)),$$

$$(\nabla F_*)^{\perp}(CX,\omega U) = 0$$

ve

$$F_*(T_{BX}\phi U + A_{\omega U}BX + A_{CX}\phi U + h\overset{M}{\nabla}_X\omega\phi U) = F_*(\omega A_X\omega U + Ch\overset{M}{\nabla}_X\omega U)$$

denklemleri vardır. Buradan, $F_*(\overset{M}{\nabla}_X U) = 0$ elde edilir. Bundan dolayı, $X \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^{\perp})$ ve $U \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için dikey distribüsyon çekF_*, M üzerinde yatay distribüsyon $(\text{ç}ekF_*)^{\perp}$ boyunca paraleldir. (i) ve (iii) şartlarının (5.2.7) denkleminde sağlandığını kabul edelim. Burada, (i) şartı sağlandığından

$$0 = CX(\ln\lambda)F_*(\omega U) + \omega U(\ln\lambda)F_*(CX) - g_M(CX,\omega U)F_*(grad(\ln\lambda))$$

ve (iii) şartı sağlandığından $F_*(\overset{M}{\nabla}_X U) = 0$ denklemleri vardır. Dolayısıyla, $X \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^{\perp})$ ve $U \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için (ii) şartı $(\nabla F_*)^{\perp}(CX,\omega U) = 0$ ve

$$F_*(T_{BX}\phi U + A_{\omega U}BX + A_{CX}\phi U + h\overset{M}{\nabla}_X\omega\phi U) = F_*(\omega A_X\omega U + Ch\overset{M}{\nabla}_X\omega U)$$

sağlanır. Son olarak, (5.2.7) denkleminde $X \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^{\perp})$ ve $U \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için (ii) ve (iii) şartlarının sağlandığını kabul edersek

$$\begin{aligned} 0 &= CX(\ln\lambda)F_*(\omega U) + \omega U(\ln\lambda)F_*(CX) \\ &- g_M(CX,\omega U)F_*(grad(\ln\lambda)) \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

elde edilir. (5.2.8) denkleminde $CX \in \Gamma(C(\text{ç}ekF_*)^{\perp})$ için $0 = \lambda^2\omega U(\ln\lambda)g_M(CX,CX)$ elde edilir. Bu ifadeden, $(\omega(\text{ç}ekF_*))(grad(\ln\lambda)) = 0$ olduğu görülür. Diğer taraftan, (5.2.8) denkleminde $\omega U \in \Gamma(\omega(\text{ç}ekF_*))$ için $0 = \lambda^2 CX(\ln\lambda)g_M(\omega U,\omega U)$ elde edilir. Bu ifadeden, $(C(\text{ç}ekF_*)^{\perp})(grad(\ln\lambda)) = 0$ olduğu görülür. Böylece, $\mathcal{H}(grad(\ln\lambda)) = 0$ dır. F bir yatay homotetik dönüşümdür. (i) şartı sağlanır. □

Tanım 5.2.4. (M,g_M,J) kompleks manifoldundan bir (N,g_N) Riemann manifolduna tanımlanan F konform slant Riemann dönüşümü $Z,Y \in \Gamma(\omega(\text{ç}ekF_*))$ için

$$(\nabla F_*)(Z,Y) + (\nabla F_*)(JZ,JY) = 0$$

denklemini sağlarsa F dönüşümüne $\omega($**ç**$ekF_*)-$ **pluriharmonik dönüşüm** denir.

Yukarıda tanımlanan kavram yardımıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 5.2.4. *$F:(M,g_M,J)\to(N,g_N)$ dönüşümü (M,g_M,J) Kaehler manifoldundan (N,g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform slant Riemann dönüşümü olsun. Eğer F, $\omega(\text{ç}ekF_*)-$ pluriharmonik dönüşümse F dönüşümünün bir yatay homotetik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $Z,Y\in\Gamma(\omega(\text{ç}ekF_*))$ için*

$$(\nabla F_*)^{\perp}(Z,Y)+(\nabla F_*)^{\perp}(CZ,CY)=0$$

ve

$$F_*(T_{BZ}BY+A_{CZ}BY+A_{CY}BZ)=0$$

olmasıdır.

İspat. $\omega(\text{ç}ekF_*)-$ pluriharmonik dönüşüm tanımından $Z,Y\in\Gamma(\omega(\text{ç}ekF_*))$ için

$$0=(\nabla F_*)(Z,Y)+(\nabla F_*)(JZ,JY)$$

dir. (2.2.1), (3.1.1) ve (5.1.2) denklemleri kullanılarak $Z,Y\in\Gamma(\omega(\text{ç}ekF_*))$ için

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla F_*)(Z,Y)+(\nabla F_*)(JZ,JY)\\
0 &= (\nabla F_*)^{\perp}(Z,Y)+Z(\ln\lambda)F_*(Y)+Y(\ln\lambda)F_*(Z)\\
&- g_M(Z,Y)F_*(grad(\ln\lambda))+(\nabla F_*)(BZ,BY)+(\nabla F_*)(CZ,BY)\\
&+ (\nabla F_*)(CY,BZ)+(\nabla F_*)(CY,CZ)\\
0 &= (\nabla F_*)^{\perp}(Z,Y)+Z(\ln\lambda)F_*(Y)+Y(\ln\lambda)F_*(Z)\\
&- g_M(Z,Y)F_*(grad(\ln\lambda))-F_*(\overset{M}{\nabla}_{BZ}BY)-F_*(\overset{M}{\nabla}_{CZ}BY)\\
&- F_*(\overset{M}{\nabla}_{CY}BZ)+(\nabla F_*)^{\perp}(CY,CZ)+CZ(\ln\lambda)F_*(CY)\\
&+ CY(\ln\lambda)F_*(CZ)-g_M(CZ,CY)F_*(grad(\ln\lambda))
\end{aligned}$$

elde edilir. (2.1.3) ve (2.1.5) denklemleri kullanılarak

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla F_*)^{\perp}(Z,Y)+(\nabla F_*)^{\perp}(CY,CZ)+Z(\ln\lambda)F_*(Y) \\ &+ Y(\ln\lambda)F_*(Z)-g_M(Z,Y)F_*(grad(\ln\lambda))+CZ(\ln\lambda)F_*(CY) \\ &+ CY(\ln\lambda)F_*(CZ)-g_M(CZ,CY)F_*(grad(\ln\lambda)) \\ &- F_*(T_{BZ}BY)-F_*(A_{CZ}BY)-F_*(A_{CY}BZ) \end{aligned} \quad (5.2.9)$$

elde edilir. Eğer F bir yatay homotetik dönüşüm ise (5.2.9) denkleminden $Z,Y \in \Gamma(\omega(\text{çek}F_*))$ için

$$\begin{aligned} 0 &= Z(\ln\lambda)F_*(Y)+Y(\ln\lambda)F_*(Z)-g_M(Z,Y)F_*(grad(\ln\lambda)) \\ &+ CZ(\ln\lambda)F_*(CY)+CY(\ln\lambda)F_*(CZ)-g_M(CZ,CY)F_*(grad(\ln\lambda)) \end{aligned}$$

denklemi sağlanır. Buradan, $(\nabla F_*)^{\perp}(Z,Y)+(\nabla F_*)^{\perp}(CZ,CY)=0$ ve $F_*(T_{BZ}BY+A_{CZ}BY+A_{CY}BZ)=0$ elde edilir. Tersine, $Z,Y\in\Gamma(\omega(\text{çek}F_*))$ için $(\nabla F_*)^{\perp}(Z,Y)+(\nabla F_*)^{\perp}(CZ,CY)=0$ ve $F_*(T_{BZ}BY+A_{CZ}BY+A_{CY}BZ)=0$ şartlarının (5.2.9) denkleminde sağlandığını kabul edelim. Böylece, (5.2.9) denkleminden

$$\begin{aligned} 0 &= Z(\ln\lambda)F_*(Y)+Y(\ln\lambda)F_*(Z)-g_M(Z,Y)F_*(grad(\ln\lambda)) \\ &+ CZ(\ln\lambda)F_*(CY)+CY(\ln\lambda)F_*(CZ)-g_M(CZ,CY)F_*(grad(\ln\lambda)) \end{aligned} \quad (5.2.10)$$

elde edilir. $Y\in\Gamma(\omega(\text{çek}F_*))$ için $g_M(Y,CY)=g_M(Y,JY-BY)=g_M(Y,JY)=0$ olur. (5.2.10) denkleminde $CY\in\Gamma(C(\text{çek}F_*)^{\perp})$ olmak üzere $Y=Z$ alınırsa $0=-\lambda^2 CY(\ln\lambda)\{g_M(Y,Y)-g_M(CY,CY)\}$ elde edilir. Buradan, $(C(\text{çek}F_*)^{\perp})(grad(\ln\lambda))=0$ olduğu görülür. Diğer taraftan, (5.2.10) denkleminde $Y\in\Gamma(\omega(\text{çek}F_*))$ olmak üzere $Y=Z$ alınırsa $0=\lambda^2 Y(\ln\lambda)\{g_M(Y,Y)-g_M(CY,CY)\}$ elde edilir. Buradan, $(\omega(\text{çek}F_*))(grad(\ln\lambda))=0$ olduğu görülür. Böylece, $\mathcal{H}(grad(\ln\lambda))=0$ dır. F bir yatay homotetik dönüşümdür. □

Tanım 5.2.5. (M,g_M,J) kompleks manifoldundan bir (N,g_N) Riemann manifolduna tanımlanan F konform slant Riemann dönüşümü $X\in\Gamma(\mu)$ ve $Y\in\Gamma(\omega(\text{çek}F_*))$ için

$$(\nabla F_*)(X,Y)+(\nabla F_*)(JX,JY)=0$$

denklemini sağlarsa F dönüşümüne $(\mu-\omega(\mathbf{ç}ekF_*))-$ **pluriharmonik dönüşüm** denir.

Teorem 5.2.5. *$F:(M,g_M,J)\to(N,g_N)$ dönüşümü (M,g_M,J) Kaehler manifoldundan (N,g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform slant Riemann dönüşümü olsun. Eğer F, $(\mu-\omega(çekF_*))-$ pluriharmonik dönüşümse F dönüşümünün bir yatay homotetik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $Z\in\Gamma(\mu)$ ve $Y\in\Gamma(\omega(çekF_*))$ için*

$$(\nabla F_*)^{\perp}(Z,Y)+(\nabla F_*)^{\perp}(JZ,CY)=0$$

ve

$$F_*(A_{JZ}BY)=0$$

olmasıdır.

İspat. $(\mu-\omega(çekF_*))-$ pluriharmonik dönüşüm tanımından hareketle (2.2.1), (3.1.4) ve (5.1.2) denklemleri kullanılarak $Z\in\Gamma(\mu)$ ve $Y\in\Gamma(\omega(çekF_*))$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla F_*)(Z,Y)+(\nabla F_*)(JZ,JY)\\
0 &= (\nabla F_*)^{\perp}(Z,Y)+Z(\ln\lambda)F_*(Y)+Y(\ln\lambda)F_*(Z)\\
&- g_M(Z,Y)F_*(grad(\ln\lambda))+(\nabla F_*)(JZ,BY)+(\nabla F_*)(JZ,CY)
\end{aligned}$$

elde edilir. μ ve $\omega(çekF_*)$ distribüsyonları birbirine ortogonal olduğundan $g_M(Z,Y)=0$ dır. Dolayısıyla, $Z\in\Gamma(\mu)$ ve $Y\in\Gamma(\omega(çekF_*))$ için

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla F_*)^{\perp}(Z,Y)+Z(\ln\lambda)F_*(Y)+Y(\ln\lambda)F_*(Z)\\
&- F_*(\overset{M}{\nabla}_{JZ}BY)+(\nabla F_*)^{\perp}(JZ,CY)+JZ(\ln\lambda)F_*(CY)\\
&+ CY(\ln\lambda)F_*(JZ)-g_M(JZ,CY)F_*(grad(\ln\lambda))\\
0 &= (\nabla F_*)^{\perp}(Z,Y)+Z(\ln\lambda)F_*(Y)+Y(\ln\lambda)F_*(Z)\\
&- F_*(A_{JZ}BY)+(\nabla F_*)^{\perp}(JZ,CY)+JZ(\ln\lambda)F_*(CY)\\
&+ CY(\ln\lambda)F_*(JZ)-g_M(JZ,CY)F_*(grad(\ln\lambda)) \qquad (5.2.11)
\end{aligned}$$

elde edilir. Kabul edelimki, F bir yatay homotetik dönüşüm olsun. (5.2.11) denkleminden

$$\begin{aligned}
0 &= Z(\ln\lambda)F_*(Y)+Y(\ln\lambda)F_*(Z)\\
&+ JZ(\ln\lambda)F_*(CY)+CY(\ln\lambda)F_*(JZ)-g_M(JZ,CY)F_*(grad(\ln\lambda)) \qquad (5.2.12)
\end{aligned}$$

olduğu görülür. Böylece, (5.2.11) denkleminde $Z \in \Gamma(\mu)$ ve $Y \in \Gamma(\omega(çekF_*))$ için $(\nabla F_*)^{\perp}(Z,Y) + (\nabla F_*)^{\perp}(JZ,CY) = 0$ ve $F_*(A_{JZ}BY) = 0$ denklemleri sağlanır. Tersine, (5.2.11) denkleminde $Z \in \Gamma(\mu)$ ve $Y \in \Gamma(\omega(çekF_*))$ için $(\nabla F_*)^{\perp}(Z,Y) + (\nabla F_*)^{\perp}(JZ,CY) = 0$ ve $F_*(A_{JZ}BY) = 0$ denklemlerinin sağlandığını kabul edelim. F konform dönüşüm olduğundan (5.2.12) denkleminde $Z \in \Gamma(\mu)$ için

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^2\{Z(\ln\lambda)g_M(Y,Z) + Y(\ln\lambda)g_M(Z,Z) \\ &+ JZ(\ln\lambda)g_M(CY,Z) + CY(\ln\lambda)g_M(JZ,Z) - Z(\ln\lambda)g_M(JZ,CY)\} \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

elde edilir. (5.1.2) denkleminden $Z \in \Gamma(\mu)$ ve $Y \in \Gamma(\omega(çekF_*))$ için $g_M(CY,Z) = g_M(JY,Z) = -g_M(Y,JZ) = 0$ ve $g_M(JZ,CY) = 0$ olur. (5.2.13) denkleminden $\lambda^2 Y(\ln\lambda)g_M(Z,Z) = 0$ elde edilir. Buradan, $\omega(çekF_*)(grad(\ln\lambda)) = 0$ olduğu görülür. (5.2.12) denkleminde $Z \in \Gamma(\mu)$ olmak üzere $JZ = Z$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^2\{Z(\ln\lambda)g_M(Y,Z) + Y(\ln\lambda)g_M(Z,Z) \\ &+ Z(\ln\lambda)g_M(CY,Z) + CY(\ln\lambda)g_M(Z,Z) - Z(\ln\lambda)g_M(Z,CY)\} \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

elde edilir. λ, $\omega(çekF_*)$ üzerinde bir sabit olduğundan $Y(\ln\lambda) = 0$ dır. (5.2.14) denkleminden $\lambda^2 CY(\ln\lambda)g_M(Z,Z) = 0$ elde edilir. Buradan, $(C(çekF_*)^{\perp})(grad(\ln\lambda)) = 0$ olduğu görülür. Son olarak, (5.2.12) denkleminde $Y \in \Gamma(\omega(çekF_*))$ olmak üzere $JZ = Z$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda^2\{Z(\ln\lambda)g_M(Y,Y) + Y(\ln\lambda)g_M(Z,Y) \\ &+ Z(\ln\lambda)g_M(CY,Y) + CY(\ln\lambda)g_M(Z,Y) - Y(\ln\lambda)g_M(Z,CY)\} \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

elde edilir. (5.1.2) denkleminden $Y \in \Gamma(\omega(çekF_*))$ için $g_M(CY,Y) = g_M(JY,Y) = 0$ olur. (5.2.15) denkleminden $\lambda^2 Z(\ln\lambda)g_M(Y,Y) = 0$ elde edilir. Buradan, $\mu(grad(\ln\lambda)) = 0$ olduğu görülür. Böylece, $\mathcal{H}(grad(\ln\lambda)) = 0$ dır. F bir yatay homotetik dönüşümdür. □

Tanım 5.2.6. (M, g_M, J) kompleks manifoldundan bir (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform slant Riemann dönüşümü $X, Y \in \Gamma(\mu)$ için

$$(\nabla F_*)(X,Y) + (\nabla F_*)(JX,JY) = 0$$

denklemini sağlarsa F dönüşümüne $\mu-$ **pluriharmonik dönüşüm** denir.

Teorem 5.2.6. *$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$ dönüşümü (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform slant Riemann dönüşümü olsun. F dönüşümünün $\mu-$ pluriharmonik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart λ, $\omega(çekF_*)$ üzerinde sabit olmalıdır.*

İspat. $\mu-$ pluriharmonik dönüşüm tanımından ve (3.1.4) denkleminden $X, Y \in \Gamma(\mu)$ için

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla F_*)(X,Y) + (\nabla F_*)(JX,JY) \\
0 &= (\nabla F_*)^{\perp}(X,Y) + X(\ln\lambda)F_*(Y) + Y(\ln\lambda)F_*(X) \\
&- g_M(X,Y)F_*(grad(\ln\lambda)) + (\nabla F_*)^{\perp}(JX,JY) + JX(\ln\lambda)F_*(JY) \\
&+ JY(\ln\lambda)F_*(JX) - g_M(JX,JY)F_*(grad(\ln\lambda))
\end{aligned}$$

elde edilir. $g_M(X,Y) = g_M(JX,JY)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla F_*)^{\perp}(X,Y) + (\nabla F_*)^{\perp}(JX,JY) + X(\ln\lambda)F_*(Y) \\
&+ Y(\ln\lambda)F_*(X) + JX(\ln\lambda)F_*(JY) + JY(\ln\lambda)F_*(JX) \\
&- 2g_M(X,Y)F_*(grad(\ln\lambda)) \qquad (5.2.16)
\end{aligned}$$

elde edilir. (5.2.16) denkleminde $X = Y$ alınırsa

$$\begin{aligned}
0 &= (\nabla F_*)^{\perp}(X,X) + (\nabla F_*)^{\perp}(JX,JX) \\
&+ 2X(\ln\lambda)F_*(X) + 2JX(\ln\lambda)F_*(JX) \\
&- 2g_M(X,X)F_*(grad(\ln\lambda)) \qquad (5.2.17)
\end{aligned}$$

olup (5.2.17) denklemi $Z \in \Gamma(\omega(çekF_*))$ olmak üzere

$$\begin{aligned}
0 &= g_N((\nabla F_*)^{\perp}(X,X), F_*(Z)) + g_N((\nabla F_*)^{\perp}(JX,JX), F_*(Z)) \\
&+ 2X(\ln\lambda)g_N(F_*(X), F_*(Z)) + 2JX(\ln\lambda)g_N(F_*(JX), F_*(Z)) \\
&- 2g_M(X,X)g_N(F_*(grad(\ln\lambda)), F_*(Z))
\end{aligned}$$

elde edilir. F bir konform dönüşüm ve μ bir invaryant distribüsyon olduğundan

$$\begin{aligned}
0 &= 2\lambda^2\{X(\ln\lambda)g_M(X,Z) + JX(\ln\lambda)g_M(JX,Z)\} \\
&- 2\lambda^2 g_M(X,X)g_M(grad(\ln\lambda), Z) \\
0 &= -2\lambda^2 Z(\ln\lambda)g_M(X,X) \qquad (5.2.18)
\end{aligned}$$

olur. (5.2.18) denkleminde $Z \in \Gamma(\omega(\text{ç}ekF_*))$ için $Z(\ln\lambda) = 0$ olup λ, $\omega(\text{ç}ekF_*)$ üzerinde bir sabittir. İspatın tersi açıktır. $\square$

5.3 Jeodezik Konform Slant Riemann Dönüşümleri

Bu alt bölümde bir konform slant Riemann dönüşümünün tamamen jeodezik dönüşüm olması incelenecektir.

Teorem 5.3.1. *$F : (M, g_M, J) \to (N, g_N)$ dönüşümü bir (M, g_M, J) Kaehler manifoldundan bir (N, g_N) Riemann manifolduna tanımlanan konform slant Riemann dönüşümü olsun. F dönüşümünün tamamen jeodezik dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $Y, Z \in \Gamma((\text{ç}ekF_*)^{\perp})$ ve $U, V \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ olmak üzere aşağıdaki şartların sağlanmasıdır:*

i) $g_N(F_*(C h\overset{M}{\nabla}_U \omega V) + F_*(\omega\hat{\nabla}_U \phi V + \omega T_U \omega V), F_*(X)) = 0,$

ii) F bir yatay homotetik dönüşümdür ve $(\nabla F_*)^{\perp}(X, Y) = 0$.

İspat. (2.2.1), (2.1.3), (5.1.1) ve (5.1.2) denklemleri kullanılarak $U, V \in \Gamma(\text{ç}ekF_*)$ için

$$\begin{aligned}
(\nabla F_*)(U, V) &= -F_*(\overset{M}{\nabla}_U V) \\
&= F_*(J\overset{M}{\nabla}_U JV) \\
&= F_*(J\overset{M}{\nabla}_U \phi V + J\overset{M}{\nabla}_U \omega V) \\
&= F_*(J\overset{M}{\nabla}_U \phi V) + F_*(J T_U \omega V + J h\overset{M}{\nabla}_U \omega V) \\
&= F_*(J T_U \phi V + J\hat{\nabla}_U \phi V) \\
&+ F_*(\omega T_U \omega V + C h\overset{M}{\nabla}_U \omega V)
\end{aligned}$$

elde edilir. T tensörü simetrik olduğundan $J T_U \phi V = J T_{\phi V} U$ olup

$$\begin{aligned}
(\nabla F_*)(U, V) &= F_*(T_{\phi V} J U) + F_*(\omega\hat{\nabla}_U \phi V) \\
&+ F_*(\omega T_U \omega V + C h\overset{M}{\nabla}_U \omega V) \\
&= F_*(T_{\phi V} \phi U) + F_*(\omega\hat{\nabla}_U \phi V) \\
&+ F_*(\omega T_U \omega V + C h\overset{M}{\nabla}_U \omega V)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\cos^2\theta F_*(T_V U) + F_*(\omega\hat{\nabla}_U \phi V) \\
&+ F_*(\omega T_U \omega V + Ch\overset{M}{\nabla}_U \omega V)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son denklemden

$$
\sin^2\theta(\nabla F_*)(U,V) = F_*(\omega\hat{\nabla}_U\phi V) + F_*(\omega T_U \omega V + Ch\overset{M}{\nabla}_U \omega V) \tag{5.3.1}
$$

elde edilir. Burada, $Y \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ için (5.3.1) denkleminden

$$
\begin{aligned}
\sin^2\theta g_N((\nabla F_*)(U,V), F_*(Y)) &= g_N(F_*(\omega\hat{\nabla}_U\phi V + \omega T_U\omega V), F_*(Y)) \\
&+ g_N(F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_U\omega V), F_*(Y))
\end{aligned} \tag{5.3.2}
$$

elde edilir. Böylece, $g_N(F_*(Ch\overset{M}{\nabla}_U\omega V) + F_*(\omega\hat{\nabla}_U\phi V + \omega T_U\omega V), F_*(Y)) = 0$ olduğu görülür. (i) şartı sağlanır. Şimdi, (3.1.1) denklemi kullanılarak $Y,Z \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ için

$$
\begin{aligned}
(\nabla F_*)(Y,Z) &= (\nabla F_*)^\perp(Y,Z) + (\nabla F_*)^\top(Y,Z) \\
&= (\nabla F_*)^\perp(Y,Z) + Y(\ln\lambda)F_*(Z) + Z(\ln\lambda)F_*(Y) \\
&- g_M(Y,Z)F_*(grad(\ln\lambda))
\end{aligned} \tag{5.3.3}
$$

olur. (5.3.3) denkleminden $Y,Z \in \Gamma((\text{çek}F_*)^\perp)$ için

$$
\begin{aligned}
g_N((\nabla F_*)(Y,Z), F_*(Y)) &= g_N((\nabla F_*)^\perp(Y,Z), F_*(Y)) + Y(\ln\lambda)g_N(F_*(Z), F_*(Y)) \\
&+ Z(\ln\lambda)g_N(F_*(Y), F_*(Y)) \\
&- g_M(Y,Z)g_N(F_*(grad(\ln\lambda)), F_*(Y)) \\
&= Z(\ln\lambda)g_N(F_*(Y), F_*(Y)) \\
&= \lambda^2 Z(\ln\lambda)g_M(Y,Y)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Son denklemden, $\lambda^2 Z(\ln\lambda)g_M(Y,Y) = 0$ elde edilir. Buradan, $((\text{çek}F_*)^\perp)(grad(\ln\lambda)) = 0$ dır. F bir yatay homotetik dönüşümdür. F bir yatay homotetik dönüşüm ise (5.3.3) denkleminden $(\nabla F_*)^\perp(Y,Z) = 0$ elde edilir. (ii) şartı sağlanır. İspat tamamlanır. □

KAYNAKLAR

[1] M. A. Akyol, *Conformal semi-invariant submersions from almost product Riemannian manifolds,* **Acta Math. Vietnam** 42 (2017) 491–507.

[2] M. A. Akyol and B. Şahin, *Conformal anti-invariant submersions from almost Hermitian manifolds,* **Turk. J. Math.** 40 (2016) 43-70.

[3] M. A. Akyol and B. Şahin, *Conformal anti-invariant Riemannian maps to Kaehler manifolds,* **U.P.B. Sci Bull Series A** 80:4 (2018) 187-198.

[4] M. A. Akyol and B. Şahin, *Conformal semi-invariant submersions,* **Commun. Contemp. Math.** 19 (2017) 1650011–1650033.

[5] M. A. Akyol and B. Şahin, *Conformal slant submersions,* **Hacet. J. Math. Stat.** 48:1 (2019) 28-44.

[6] M. A. Akyol and B. Şahin, *Conformal slant Riemannian maps to Kaehler manifolds,* **Tokyo J. Math.** (2019) https://projecteuclid.org/euclid.tjm/1516935630.

[7] M. A. Akyol, *Kompleks Geometride Konform Submersiyonlar*, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye, 2015.

[8] P. Baird and J. C. Wood, *Harmonic morphisms between Riemannian manifolds,* London Mathematical Society Monographs, No.29, Oxford University Press, Oxford, 2003.

[9] W. M. Bootby, *An Introduction to Differentiable Manifolds and Riemannian Geometry*, Academic Press Inc, London, 1986.

[10] M. P. Do Carmo, *Riemannian Geometry,* Birkhauser Press, Boston, 1992.

[11] B. Y. Chen, *Geometry of Submanifolds,* Marcel Dekker, New York, 1973.

[12] C. Ehresmann, *Sur les varieties presque complexes,* **Proceedings International Congress of Math.** 11 (1950) 412-427.

[13] M. Falcitelli, S. Ianus and A. M. Pastore, *Riemannian Submersions and Related Topics*, World Scientific, Singapore 2004.

[14] A. E. Fischer, *Riemannian maps between Riemannian manifolds,* **Contemp. Math.** (1992) 331-366.

[15] E. Garcia-Rio and D. N. Kupeli, *Semi-Riemannian Maps and Their Applications*, Springer, Netherlands 1999.

[16] A. Gray, *Pseudo-Riemannian almost product manifolds and submersions,* **J. Math. Mech.** 16 (1967) 715-737.

[17] Y. Gündüzalp, *Riemann Submersiyonlarının Geometrisi Üzerine*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye, 2007.

[18] Y. Gündüzalp and M. A. Akyol, *Conformal slant submersions from cosymplectic manifolds,* **Turk. J. Math.** 42 (2018) 2672-2689.

[19] H. H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri*, İnönü Üniversitesi. Fen-Ed.Fak.Mat. No:2, Malatya 1982.

[20] H. H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri*, Cilt:1, 2, 3, Ankara Üniv. Fen Fakültesi, Ankara 2003.

[21] E. *Kähler*, *Über eine bemerkenswerte Hermitesche metrik*, **Abh. Math. Seminar Hamburg** 9 (1933) 173-186.

[22] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry*, Vol:I-II, Interscience Publishers, New York, 1963.

[23] K. Yano and M. Kon, *Structures on Manifolds*, World Scientific Publishing, Singapore 1984.

[24] Y. Matsushima, *Differentiable Manifolds*, Marcell Dekker Inc, New York 1972.

[25] J. Morrow and K. Kodaira, *Complex Manifolds*, Holt, Rinehart and Winston, New York 1971.

[26] T. Nore, *Second fundamental form of a map*, **Ann. Mat. Pur. and Appl.** 146 (1987) 281-310.

[27] Y. Ohnita, *On pluriharmonicity of stable harmonic maps*, **Jour. London Math. Soc.** 2:35 (1987) 563-587.

[28] B. O'Neill, *The fundamental equations of a submersion*, **Michigan Math. J.** 13 (1966) 458-469.

[29] B. O'Neill, *Semi-Riemannian geometry with applications to relativity*, Academic Press, New York 1983.

[30] B. Şahin, *CR-Altmanifoldların Geometrisi*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye, 1996.

[31] B. Şahin, *A survey on differential geometry of Riemannian maps between Riemannian manifolds*, **Scientific Annals of the Alexandru Ioan Cuza University of Iaşi (New Series)** Mathematics, 63:1 (2017) 151167.

[32] B. Şahin, *Contact horizontally conformal submersions*, **Demonstratio Mathematica.** 42:4 (2009) 849-860.

[33] B. Şahin, *Anti-invariant Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds*, **Central European J. Math.** 8:3 (2010) 437-447.

[34] B. Şahin, *Anti-invariant Riemannian maps from almost Hermitian manifolds*, **arXiv: 1210.0401.**

[35] B. Şahin, *Slant submersions from almost Hermitian manifolds*, **Bull. Math. Soc. Sci. Math.** 54:102 (2011) 93-105.

[36] B. Şahin, *Slant Riemannian maps from almost Hermitian manifolds*, **Quaest. Math.** 36 (2013) 449-461.

[37] B. Şahin, *Slant Riemannian maps to Kaehler manifolds,* **Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.** (2013) DOI: 10.1142/S0219887812500806.

[38] B. Şahin, *Holomorphic Riemannian maps*, **Zh. Mat. Fiz. Anal. Geom.** 10:4 (2014) 422-429.

[39] B. Şahin, *Manifoldların Diferensiyel Geometrisi*, Nobel Yayınevi, Ankara 2012.

[40] B. Şahin, *Riemannian submersions from almost Hermitian manifolds*, **Taiwanese J.Math.** 17:2 (2013) 629-659.

[41] B. Şahin, *Semi-invariant submersions from almost Hermitian manifolds*, **Canad. Math. Bull.** 56:1 (2013) 173-183.

[42] B. Şahin, *Semi-invariant Riemannian maps from almost Hermitian manifolds*, **Indag. Math.** 23 (2012) 80-94.

[43] B. Şahin, *Riemannian Submersions, Riemannian Maps in Hermitian Geometry, and Their Applications*, Academic Press, London 2017.

[44] B. Şahin, *Conformal Riemannian maps between Riemannian manifolds, their harmonicity and decomposition theorems*, **Acta Appl. Math.** 109 (2010) 829-847.

[45] H. M. Taştan, *On Lagrangian submersions,* **Hacet. J. Math. Stat.** 43:6 (2014) 993-1000.

[46] H. M. Taştan, *Anti-holomorphic semi-invariant submersion from Kaehlerian manifolds,* **arXiv: 1404.2385.**

[47] Ş. Yanan, *Riemann Manifoldları Arasındaki Konform Dönüşümler*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, Türkiye, 2012.

[48] B. Watson, *Almost Hermitian submersions*, **J. Diff. Geom.** 11:1 (1976) 147-165.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad : Şener Yanan

Doğum Yeri ve Tarihi : Malatya, 02.08.1987

Adres : Adıyaman Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü, ADIYAMAN

E-Posta : syanan@adiyaman.edu.tr

Lisans : Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü (2005-2009).

Yüksek Lisans : İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalı Geometri Bilim Dalı (2010-2012).

Mesleki Deneyim ve Ödüller :

1- Adıyaman Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Araştırma Görevlisi (2015-Halen),

2- TÜBİTAK Bilimsel Yayın Teşvik Ödülü (2018)

Yayın Listesi :

1. Taştan H. M., Şahin B., **Yanan Ş.**, Hemi-slant submersions, Mediterranean Journal of Mathematics. 13(4) (2016), 2171-2184.

Tezden Türetilen Yayınlar:

1. Şahin B., **Yanan Ş.**, Conformal Riemannian maps from almost Hermitian manifolds, Turkish Journal of Mathematics. 42(5) (2018), 2436-2451.
2. Şahin B., **Yanan Ş.**, Conformal semi-invariant Riemannian maps from almost Hermitian manifolds, Filomat. 33(4) (2019).