

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BURGERS TİPİ DENKLEMLERİN TRİGONOMETRİK B-SPLINE
KOLLOKASYON SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

İmran DİKEN

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf UÇAR

KASIM 2020

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**BURGERS TİPİ DENKLEMLERİN TRİGONOMETRİK B-SPLINE
KOLLOKASYON SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**İmran DİKEN
(36173614013)**

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf UÇAR

KASIM 2020

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında danışmanlığımı üstlenen, hem yüksek lisans öğrenimimin ders aşamasında iken zor zamanlarımda beni motive ederek tez aşamasına kadar gelmemde hem de tezin hazırlanması sürecinde yardımlarını ve desteklerini devamlı olarak üzerimde hissettiğim çok kıymetli hocam Sayın Doç. Dr. Yusuf UÇAR'a, ayrıca tezin yazımı sürecinde karşılaştığım her türlü güçlüğü üstesinden gelmem için bana yol gösteren, bilgi ve görüşlerinden istifade ettiğim hocalarım, Sayın Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a, Prof. Dr. Alaattin ESEN'e, Prof. Dr. Mustafa Kemal ÖZDEMİR'e ve Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU'ya, ders döneminde ve özellikle de tez yazımı sürecinde yardımlarını esirgemeyen kıymetli arkadaşım Hatice YILDIRIM'a ve eğitim hayatım boyunca büyük fedâkarlıklar yapan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli aileme ve sevgili eşim Fatma Nisa DİKEN'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Burgers Tipi Denklemlerin Trigonometrik B-spline Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemiyle Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

İmran DİKEN



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	v
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	ix
ÖZET.....	x
ABSTRACT.....	xi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	4
2.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	4
2.1.1 Kollokasyon Yöntemi.....	5
2.2 Kübik Trigonometrik B-Spline Fonksiyonlar.....	6
3. ISI DENKLEMİNİN KÜBİK TRİGONOMETRİK B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ.....	10
3.1 Isı Denklemi.....	10
3.2 Model Problemler.....	11
3.2.1 Problem 1.....	11
3.2.2 Problem 2.....	11
3.3 Isı Denklemine Kübik Trigonometrik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Nümerik Çözümü.....	11
3.3.1 Nümerik Sonuçlar.....	15
4. BURGERS DENKLEMİNİN KÜBİK TRİGONOMETRİK B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ.....	22
4.1 Model Problemler.....	25
4.1.1 Problem 1.....	25
4.1.2 Problem 2.....	26
4.1.3 Problem 3.....	26
4.1.4 Problem 4.....	26
4.2 LİNEERLEŞTİRME-1 (LİN-1).....	27
4.2.1 Kararlılık Analizi.....	33
4.2.2 Nümerik Sonuçlar.....	35
4.3 LİNEERLEŞTİRME-2 (LİN-2).....	50
4.3.1 Nümerik Sonuçlar.....	54
4.4 LİNEERLEŞTİRME-3 (LİN-3).....	57
4.4.1 Nümerik Sonuçlar.....	68
4.5 LİNEERLEŞTİRME-4 (LİN-4).....	77
4.5.1 Nümerik Sonuçlar.....	86
5. SONUÇ.....	90
KAYNAKLAR.....	105
ÖZGEÇMİŞ.....	109

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1	: Problem 1'in $N = 80$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 0.1$ için nümerik sonuçlarının grafiği.	17
Şekil 3.2	: Problem 1'in $N = 80$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 0.1$ için hata grafiği.	18
Şekil 3.3	: Problem 2'nin $N = 80$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 0.1$ için nümerik sonuçlarının grafiği.	19
Şekil 3.4	: Problem 2'nin $N = 80$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 0.1$ için hata grafiği.	20
Şekil 4.1	: Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 80$ ve $\nu = 1$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.	40
Şekil 4.2	: Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 80$ ve $\nu = 0.1$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.	41
Şekil 4.3	: Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 80$ ve $\nu = 0.01$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.	41
Şekil 4.4	: Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 80$ ve $\nu = 1$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.	43
Şekil 4.5	: Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 80$ ve $\nu = 0.1$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.	44
Şekil 4.6	: Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 80$ ve $\nu = 0.01$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.	44
Şekil 4.7	: Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 64$ ve $\nu = 0.01$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.	46
Şekil 4.8	: Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 64$ ve $\nu = 0.005$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.	47
Şekil 4.9	: Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 64$ ve $\nu = 0.001$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.	47
Şekil 4.10	: Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 160$ ve $\nu = 0.01$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.	49
Şekil 4.11	: Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 160$ ve $\nu = 0.005$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.	49
Şekil 4.12	: Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 160$ ve $\nu = 0.001$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.	50

ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1 : $t = 0.1, 0 \leq x \leq 1, \Delta t = 0.001$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	16
Çizelge 3.2 : $t = 0.1, 0 \leq x \leq 1, N = 40$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005$ için Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.....	17
Çizelge 3.3 : $t = 0.1, 0 \leq x \leq 1, \Delta t = 0.001$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	18
Çizelge 3.4 : $N = 40, 0 \leq x \leq 1, t = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005$ için Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.....	19
Çizelge 4.1 : Problem 1'in $t = 0.1, 0 \leq x \leq 1, \Delta t = 0.001, v = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için LİN-1 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	38
Çizelge 4.2 : Problem 1'in $t = 0.1, 0 \leq x \leq 1, N = 40, v = 1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ için LİN-1 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	39
Çizelge 4.3 : Problem 1'in $0 \leq x \leq 1, \Delta t = 0.0001, N = 40$ iken $v = 1$ ve $v = 0.01$ için LİN-1 ile [55]'in nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması. ..	39
Çizelge 4.4 : Problem 1'in $t = 0.1, 0 \leq x \leq 1, \Delta t = 0.00001, v = 1$ ve $N = 80$ için LİN-1 ile [34], [37], [44] ve [46]'nın nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması.	40
Çizelge 4.5 : Problem 2'nin $t = 0.1, 0 \leq x \leq 1, \Delta t = 0.001, v = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için LİN-1 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	42
Çizelge 4.6 : Problem 2'nin $t = 0.1, 0 \leq x \leq 1, N = 40, v = 1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ için LİN-1 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	42
Çizelge 4.7 : Problem 2'nin $0 \leq x \leq 1, \Delta t = 0.00001, v = 0.1$ ve $N = 80$ için LİN-1 ile [32], [34] ve [39]'un nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması.	43
Çizelge 4.8 : Problem 3'ün $t = 1.1, 0 \leq x \leq 8, \Delta t = 0.001, v = 1$ ve $N = 8, 16, 32, 64$ için LİN-1 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	45
Çizelge 4.9 : Problem 3'ün $t = 2.5, 0 \leq x \leq 1, \Delta t = 0.01, v = 0.005$ ve $N = 200$ için LİN-1 ile QCBM [36], CBCM [36]'nın nümerik ve tam çözümleri ile hata normlarının karşılaştırılması.	45
Çizelge 4.10 : Problem 3'ün $t = 2.5, 0 \leq x \leq 1, \Delta t = 0.01, v = 0.0005$ ve $N = 200$ için LİN-1 ile [37] ve [51]'in nümerik ve tam çözümleri ile hata normlarının karşılaştırılması.	46
Çizelge 4.11 : Problem 4'ün $t = 0.1, 0 \leq x \leq 1, \Delta t = 0.001, v = 0.01, \alpha = 0.4, \mu = 0.6, \gamma = 0.125$ ve $N = 40, 80, 120, 160$ için LİN-1 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	48
Çizelge 4.12 : Problem 4'ün $t = 0.5, 0 \leq x \leq 1, \Delta t = 0.01, v = 0.01$ ve $N = 36$ için LİN-1 ile [37], [45] (QBCA1), [45] (QBAC2), [49] ve [55]'in nümerik çözümleri ile hata normlarının ve tam çözümünün karşılaştırılması.	48
Çizelge 4.13 : Problem 1'in $t = 0.1, 0 \leq x \leq 1, \Delta t = 0.001, v = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için LİN-2 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	56
Çizelge 4.14 : Problem 1'in $t = 0.1, 0 \leq x \leq 1, N = 40, v = 1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ için LİN-2 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	57
Çizelge 4.15 : Problem 1'in $0 \leq x \leq 1, \Delta t = 0.0001, N = 40$ iken $v = 1$ ve $v = 0.01$ için LİN-2 ile [55]'in nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması. ..	58

Çizelge 4.16: Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu = 1$ ve $N = 80$ için LİN-2 ile [34], [37], [44] ve [46]'nın nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması.	58
Çizelge 4.17: Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için LİN-2 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	59
Çizelge 4.18: Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ için LİN-2 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları....	59
Çizelge 4.19: Problem 2'nin $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu = 0.1$ ve $N = 80$ için LİN-2 ile [32], [34] ve [39]'un nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması.	60
Çizelge 4.20: Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 8, 16, 32, 64$ için LİN-2 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	60
Çizelge 4.21: Problem 3'ün $t = 2.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.005$ ve $N = 200$ için LİN-2 ile QCBM [36], CBCM [36]'nın nümerik ve tam çözümleri ile hata normlarının karşılaştırılması.	61
Çizelge 4.22: Problem 3'ün $t = 2.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.0005$ ve $N = 200$ için LİN-2 ile [37] ve [51]'in nümerik ve tam çözümleri ile hata normlarının karşılaştırılması.	61
Çizelge 4.23: Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 40, 80, 120, 160$ için LİN-2 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	62
Çizelge 4.24: Problem 4'ün $t = 0.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.01$ ve $N = 36$ için LİN-2 ile [37], [45] (QBCA1), [45] (QBAC2), [49] ve [55]'in nümerik çözümleri ile hata normlarının ve tam çözümünün karşılaştırılması.	62
Çizelge 4.25: Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	71
Çizelge 4.26: Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ için LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	71
Çizelge 4.27: Problem 1'in $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.0001$, $N = 40$ iken $\nu = 1$ ve $\nu = 0.01$ için LİN-3 ile [55]'in nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması. ...	72
Çizelge 4.28: Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu = 1$ ve $N = 80$ için LİN-3 ile [34], [37], [44] ve [46]'nın nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması.	72
Çizelge 4.29: Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	73
Çizelge 4.30: Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ için LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları....	73
Çizelge 4.31: Problem 2'nin $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu = 0.1$ ve $N = 80$ için LİN-3 ile [32], [34] ve [39]'un nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması.	74
Çizelge 4.32: Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 8, 16, 32, 64$ için LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	74
Çizelge 4.33: Problem 3'ün $t = 2.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.005$ ve $N = 200$ için LİN-3 ile QCBM [36], CBCM [36]'nın nümerik ve tam çözümleri ile hata normlarının karşılaştırılması.	75

Çizelge 4.34: Problem 3'ün $t = 2.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.0005$ ve $N = 200$ için LİN-3 ile [37] ve [51]'in nümerik ve tam çözümleri ile hata normlarının karşılaştırılması.	75
Çizelge 4.35: Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 40, 80, 120, 160$ için LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	76
Çizelge 4.36: Problem 4'ün $t = 0.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.01$ ve $N = 36$ için LİN-3 ile [37], [45] (QBCA1), [45] (QBAC2), [49] ve [55]'in nümerik çözümleri ile hata normlarının ve tam çözümünün karşılaştırılması.	76
Çizelge 4.37: Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 8, 16, 32, 64$ için LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	87
Çizelge 4.38: Problem 3'ün $t = 2.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.005$ ve $N = 200$ için LİN-4 ile QCBM [36], CBCM [36]'nın nümerik ve tam çözümleri ile hata normlarının karşılaştırılması.	88
Çizelge 4.39: Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 40, 80, 120, 160$ için LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	88
Çizelge 4.40: Problem 4'ün $t = 0.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.01$ ve $N = 36$ için LİN-4 ile [37], [45] (QBCA1), [45] (QBAC2), [49] ve [55]'in nümerik çözümleri ile hata normlarının ve tam çözümünün karşılaştırılması.	89
Çizelge 5.1 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 10$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	91
Çizelge 5.2 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 20$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	91
Çizelge 5.3 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 40$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	92
Çizelge 5.4 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 80$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	92
Çizelge 5.5 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.01$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	93
Çizelge 5.6 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.005$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	93
Çizelge 5.7 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.001$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	94
Çizelge 5.8 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.0001$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	94
Çizelge 5.9 : Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 10$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	95
Çizelge 5.10: Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 20$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	96
Çizelge 5.11: Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 40$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	96
Çizelge 5.12: Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 80$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	97
Çizelge 5.13: Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.01$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	98

Çizelge 5.14: Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.005$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları	98
Çizelge 5.15: Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.001$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları	99
Çizelge 5.16: Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.0001$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları	99
Çizelge 5.17: Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 8$ için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	100
Çizelge 5.18: Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 16$ için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	100
Çizelge 5.19: Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 32$ için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	101
Çizelge 5.20: Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 64$ için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	101
Çizelge 5.21: Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 40$ için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	102
Çizelge 5.22: Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 80$ için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	103
Çizelge 5.23: Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 120$ için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	103
Çizelge 5.24: Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 160$ için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.	104

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

Δt	: Zaman Adım Uzunluğu,
h	: Konum Adım Uzunluğu,
ν	: Viskozite
$L\dot{I}N - 1$: Lineerlerleştirme-1
$L\dot{I}N - 2$: Lineerlerleştirme-2
$L\dot{I}N - 3$: Lineerlerleştirme-3
$L\dot{I}N - 4$: Lineerlerleştirme-4



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BURGERS TİPİ DENKLEMLERİN TRİGONOMETRİK B-SPLINE KOLLOKASYON SONLU ELEMAN YÖNTEMİYLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

İMİRAN DİKEN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

109+xi sayfa

2020

Danışman: Doç. Dr. Yusuf UÇAR

Beş bölümden oluşan bu yüksek lisans tezinin birinci bölümünde, tezde göz önüne alınan Burgers denkleminin tarihçesi hakkında kısaca bilgi verildikten sonra tezin amacından bahsedildi.

İkinci bölümde, tezde kullanılan sonlu eleman yöntemleri, kollokasyon yöntemi ve kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar konularında bilgiler verildi.

Üçüncü bölümde örnek bir uygulama olarak ısı denkleminin kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi ile nümerik şeması elde edildikten sonra farklı başlangıç ve sınır şartları ile verilen iki model problem için hesaplanan nümerik sonuçlar çizelgeler ve grafikler halinde sunuldu.

Dördüncü bölümde, ilk olarak Burgers denkleminin kısa bir literatür taraması sunulduktan sonra denklemlerle birlikte göz önüne alınan farklı başlangıç ve sınır şartları ile verilen dört model problem tanıtıldı. Daha sonra denklemlerdeki UU_x lineer olmayan terimi yerine dört farklı lineerleştirme tekniği kullanılarak kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi ile nümerik şemalar elde edildi. Elde edilen bu nümerik şemalar kullanılarak sunulan model problemlerin nümerik çözümleri hesaplandı ve bu nümerik çözümler mevcut tam çözüm ile literatürdeki farklı çalışmalarda sunulan sonuçlarla çizelgeler ve grafikler yardımıyla karşılaştırıldı. Ayrıca nümerik şemaların kararlılık analizleri benzer olduğundan sadece LİN-1 ile elde edilen şemanın kararlılık analizi von Neumann yöntemiyle incelendi.

Son bölüm olan beşinci bölümde, dört farklı lineerleştirme tekniğinin model problemlere uygulanması ile elde edilen sonuçlar kendi içerisinde karşılaştırılarak değerlendirildi.

Anahtar Kelimeler: Burgers Denklemi, Isı Denklemi, Kollokasyon Sonlu Eleman Yöntemi, Trigonometrik B-Spline

ABSTRACT

Master Thesis

NUMERICAL SOLUTIONS OF BURGERS TYPE EQUATIONS USING TRIGONOMETRIC B-SPLINE COLLOCATION FINITE ELEMENT METHOD

İmran DİKEN

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

109+xi pages

2020

Supervisor: Doç. Dr. Yusuf UÇAR

In the first chapter of this master's thesis, which consists of five chapters, after giving brief information about the history of Burgers equation considered in the thesis, the purpose of the thesis is mentioned.

In the second chapter, information about finite element methods used in the thesis, collocation method and cubic trigonometric B-spline functions are given.

In the third chapter, after obtaining the numerical scheme of the heat equation with the cubic trigonometric B-spline collocation method as an exemplary application, the numerical results calculated for the two model problems given with different initial and boundary conditions are presented in tables and graphs.

In the fourth chapter, after a brief literature review of the Burgers equation is presented, four model problems given with different initial and boundary conditions are introduced with the equation. Then, numerical diagrams were obtained by using cubic trigonometric B-spline collocation method by using four different linearization techniques instead of nonlinear term UU_x in the equation. Using these numerical schemes, the numerical solutions of the presented model problems were calculated and these numerical solutions were compared with the current full solution and the results presented in different studies in the literature with the help of charts and graphs. In addition, since the stability analysis of the numerical schemes would be similar, the stability analysis of the scheme obtained only with LIN-1 is examined by von Neumann method.

In the fifth chapter, which is the last chapter, the results obtained by applying four different linearization techniques to model problems are compared and evaluated.

Keywords: Burgers Equation, Heat Equation, Collocation Finite Element Method, Trigonometric B-Spline

1. GİRİŞ

Burgers denklemi uygulamalı matematik, fizik ve mühendisliğin pek çok alanında kullanılan lineer olmayan bir kısmi diferansiyel denklemdir. Özellikle son zamanlarda bilgisayar ve hesaplama kapasitesindeki muhteşem gelişmeler bilim insanlarını lineer olmayan diferansiyel denklemleri inceleme konusunda motive etmektedir. Bunlar arasından Burgers denklemi kendini ayrıcalıklı yapan başlıca özellikleri ile ön planda yer almaktadır. Bu özelliklerden bazıları; tam çözümünün iyi biliniyor olması, doğrusal olmayan konvektif terimin ve difüzyif terimin aynı anda var olması, kısmi diferansiyel denklemler için standart bir test problemi oluşturması, denklemden bulunan viskozitenin sıfıra yaklaşması neticesinde dalga denklemine ve U 'nun sıfıra yaklaşması durumunda ise ısı denklemine dönüşmesi olarak sıralanabilir [1].

Burgers denklemiyle ilgili ilk çalışmalar 1915 yılında İngiliz matematikçi Harry Bateman (1882-1946) tarafından gerçekleştirildi. Bateman

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} = \nu \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}, \quad 0 < x < L, \quad 0 < t < \tau \quad (1.0.1)$$

biçimindeki denklemi

$$U(x, 0) = \psi(x), \quad 0 < x < L \quad (1.0.2)$$

$$U(0, t) = \zeta_1(t), \quad U(L, t) = \zeta_2(t), \quad 0 < t < \tau \quad (1.0.3)$$

başlangıç ve sınır şartlarıyla beraber tanımasına rağmen Burgers denklemine asıl adını veren kişi Hollandalı bir fizikçi olan Johannes Martinus Burgers (1895-1981) olmuştur [1–3]. Burgers, 1948 yılında yaptığı çalışmalarda türbülans teorisinin matematiksel modellemesi için (1.0.1) denklemini kullanmıştır. Diğer çalışmaları sayesinde de akışkanlar mekaniğinin önde gelen isimleri arasına adını yazdırmıştır. Bu alanda yakaladığı başarılar için Burgers'i onurlandırmak adına (1.0.1) denklemi artık onun adıyla anılmaya başlanmıştır [1].

1950 yılına gelindiğinde Eberhard Hopf (1902-1983) [4] ve 1951 yılında ise David Cole (1925-1999) [5] birbirinden bağımsız olarak Burgers denklemini lineer ısı denklemine dönüştüren

$$U(x, t) = -2\nu \frac{\theta_x}{\theta} \quad (1.0.4)$$
$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2}$$

şeklinde bir dönüşüm elde ettiler ve bu ısı denklemini keyfi bir başlangıç şartıyla tam olarak çözdüler. Bu nedenle (1.0.4) ile verilen dönüşüm genel olarak Hopf-Cole dönüşümü olarak bilinir.

Fizik ve mühendislikte de kullanışlı olan Burgers denklemi viskoz akışı ve türbülans teorisi, dalga yayılımı, şok teorisi, gaz dinamiği, kozmoloji, trafik akışı, kuantumlar gibi birçok alanın analizinde yer almaktadır. Şimdi Burgers denkleminin verilen farklı alanlarda nasıl kullanıldığını görmek adına bunlardan bazılarını kısaca değinilirse;

Türbülans bir sıvının ya da gazın hareket halindeki düzensizliğini ifade etmek için kullanılmaktadır. Bu alandaki çalışmaları matematiksel olarak ifade edebilmek için Burgers denklemi hayati bir öneme sahiptir. Murray [6], Navier-Stokes türbülans denkleminde yola çıkarak çalışmalar yapsa da Baker ve arkadaşları [7]

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{1}{\text{Re}} \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} - U \frac{\partial U}{\partial z} + b(z)U(t)$$

şeklinde verilen dağıtılmış kontrole sahip Burgers denklemini kullanarak türbülans analizi gerçekleştirdiler. Burada $b(z)$, aktüatör (çalıştırıcı) dağıtım fonksiyonudur.

Kreiss ve Kreiss [8], şokun kararlı durum çözümünün yakınsaması durumundaki etkisini incelemek için viskoz Burgers denklemini, başlangıç ve homojen olmayan Dirichlet sınır şartlarını kullanarak değerlendirdiler. Lineer olmayan Burgers denklemi, şokların oluşumu ve yayılması, süreksizliklerin genişlemesi ve şok çarpışmaları gibi problemler için şok yakalama şemaları kullanılarak çözüldü [9].

Akışkanlar mühendisliğinde, konveksiyon ve difüzyonun etkileşimini göstermek için kullanılan Burgers denklemi gaz dinamiği teorisinde de kullanılmaya başlandı [10]. Ayrıca Burgers denlemi

$$U_t + UU_x = \nu U_{xx} - \lambda U$$

şeklinde formüle edilerek gaz dinamiğinde sınır tabakadaki ısı alışverişi ile ilişkilendirilmiştir.

Bu tezde, (1.0.1) ile verilen Burgers denklemi, (1.0.2) ve (1.0.3) ile verilen başlangıç ve sınır şartları ile birlikte göz önüne alındı. Denklemdaki U hızı, x konumu, t zamanı ve ν kinematik viskoziteyi karşılar. $\zeta_1(t)$ ve $\zeta_2(t)$ ise problemin çözülmesine yönelik spesifik koşullara bağlı olarak değişebilecek olan sınırların farklı değerlerini göstermektedir. UU_x ve U_{xx} terimleri ise sırasıyla lineer olmayan ısı taşınmasını ve yayılmasını ifade etmektedir.

Bu tezde Burgers denkleminin, denklemdaki lineer olmayan UU_x terimi yerine dört farklı lineerleştirme tekniği kullanılarak kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi ile yaklaşık çözümleri elde edildi.



2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Sonlu elemanlar yönteminin ilk ortaya çıkışı 1960 yıllarında başlamıştır ve o zamandan günümüze kadar fizik ve mühendisliğin hemen hemen tüm alanlarında sıklıkla kullanılmaktadır. Bu yöntemin gelişimine katkı sağlayan başlıca araştırmacılar Arygyris, Clough ve Zienkiewicz olarak söylenebilir [11]. Bu yöntemin gelişim süreci izlendiğinde yüksek hızlı dijital bilgisayarın gelişimiyle birlikte fizik ve mühendislik problemlerin çözümüne pratik bir yol sunduğu görülmektedir [12].

Sonlu elemanlar yöntemi, fiziksel bir oluşumu modelleyen, başlangıç ve sınır koşulları ile verilen bir kısmi diferansiyel denklemi eş zamanlı olarak cebirsel denklem sistemine indirgemek suretiyle problemi basitleştirmektedir. Bu yöntemlerde, problemin çözüm bölgesi iki veya daha fazla ortak düğüm noktalarında, sınır çizgilerinde veya yüzeylerde birbirine bağlı daha küçük bölgelere veya elemanlara ayrılır. Sonlu elemanlar yönteminde problem, çözüm bölgesi üzerinde tek bir işlem yapılarak çözülmek yerine alt bölgelerde ayrı ayrı çözümler yapıldıktan sonra elde edilen çözümler birleştirilir.

Problemlerin çözümünde sonlu elemanlar yöntemlerinin kullanılmasının sağladığı avantajlar şu şekilde sıralanabilir:

1. Düzgün olmayan yapıları dahi kolayca modelleyebilmesi,
2. Farklı malzemelerden yapılan yapıları modelleyebilmesi,
3. Çok çeşitli sınır şartlarını birlikte modelleyebilmesi,
4. Gerektiğinde elemanların büyüklüklerinin değiştirilebilmesi,
5. Sonlu eleman modelinin istenildiği zaman kolayca değiştirilebilmesi,
6. Sonlu eleman modelinin bilgisayar programlama mantığına uygun olması [12].

Sonlu elemanlar yönteminin problemlere uygulanması altı aşamada gerçekleşir:

1. Verilen bölgenin ayrıştırılması: Sonlu elemanlar yönteminin temel mantığı, verilen bölgeyi daha küçük parçalara ayırarak problemin çözümünü bu bölgeler üzerinden değerlendirmektir. Bölge parçalara ayrılırken düzgün olmayan yüzeylerde sonuçların

hızlı değiştiği yerlerde olabildiğince küçük, düzgün olan yerlerde ise daha büyük parçalara ayrılır.

2. Tipik elemanlar için eleman denklemlerinin türetilmesi: Tipik elemanlar için yaklaşım fonksiyonu seçilirken genellikle birinci, ikinci ve üçüncü dereceden polinom fonksiyonlarının yanı sıra trigonometrik fonksiyonlar da seçilebilir.

3. Elemanların birleştirilmesi: Burada, ikinci adımda türetilen fonksiyonlar birleştirilir ve

$$Ku = F$$

formunda yazılır. Bu formda yazılan denkleme birleştirilmiş veya global denklem denir. Burada F global düğüm kuvvet vektörü, K global yapı veya toplam stifness matrisi ve u bilinmeyenlerin oluşturduğu vektördür.

4. Problemin sınır şartlarının uygulanması: Bu adımda, 3. adımda elde edilen denklem sisteminde sınır şartları kullanılır.

5. Birleştirilmiş denklemlerin çözümlenmesi: 3. ve 4. adımlardan sonra n -bilinmeyenli n -tane denklem elde edilir. Elde edilen denklem sistemi, matris formunda değişik paket programlar ve herhangi bir programlama dilinde hazırlanan programlar yardımıyla çözülebilir.

6. Sonuçların değerlendirilmesi: Bu adımda, sonuçlar çizelge veya grafikler yardımıyla değerlendirilir [12–14].

2.1.1 Kollokasyon Yöntemi

Bir diferansiyel denklemin tam çözümleri ile yaklaşık çözümleri arasındaki farkın, sıfırdan farklı bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp toplamlarının en küçük yapılması işlemleri ağırlıklı kalan yöntemi olarak adlandırılır ve bu yaklaşıma dayanan metotlara ise ağırlıklı kalan metotları denir [15].

Ağırlıklı kalan yöntemini ifade etmek için Ω bölgesinde

$$A(u) = f \quad (2.1.1)$$

operatör denklemleri göz önüne alınsın. Burada A , lineer veya lineer olmayan operatör ve f , bağımsız değişkenin bir fonksiyonu olarak tanımlanırsa, buradaki denklemin u çözümüne bir yaklaşım

$$u_N = \sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0 \quad (2.1.2)$$

olarak kullanılır ve (2.1.2) ile verilen u_N yaklaşık çözümü (2.1.1) denkleminde yerine yazıldığında $f_N = A(u_N)$ fonksiyonu elde edilir. $A(u_N)$ ile f fonksiyonu arasındaki farka

$$R = A(u_N) - f = A\left(\sum_{j=1}^N c_j \phi_j + \phi_0\right) - f \neq 0 \quad (2.1.3)$$

yaklaşımın kalanı denir. Burada R kalan fonksiyonu, c_j parametrelerine bağlı olduğu kadar konuma da bağlıdır ve c_j parametreleri

$$\int_{\Omega} \psi_i(x, y) R(x, y, c_j) dx dy = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (2.1.4)$$

ağırlıklı kalan integralinde R kalanı sıfır olacak biçimde seçilir. Buradaki Ω iki boyutlu bir bölge ve ψ_i 'ler ise ağırlıklı kalan fonksiyonları olup (2.1.4) integralinin hesaplanmasıyla elde edilen denklemlerin çözülebilmesi için seçilen ψ_i ağırlıklı kalan fonksiyonlar kümesinin lineer bağımsız olması gerekir. Ağırlıklı kalan yönteminde, ağırlıklı fonksiyonunun seçimine bağlı olarak yöntemler farklı isimlerle adlandırılırlar [13, 15]. Bu tezde kollokasyon yöntemi kullanıldığı için bu kısımda yöntem ile ilgili bilgiler verilecektir.

Kollokasyon yönteminde, ψ_i ağırlık fonksiyonları $\delta(x - x_i)$ ile gösterilir ve

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i) dx dy = \begin{cases} 1 & x = x_i \\ 0 & x \neq x_i \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlanır. Burada, x_i 'lere kollokasyon noktaları denir ve keyfi olarak seçilir. (2.1.4) integralinde ψ_i ağırlık fonksiyonları yerine $\delta(x - x_i)$ yazılırsa

$$\int_{\Omega} \delta(x - x_i) R(x, c_j) dx dy = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \dots, N) \quad (2.1.5)$$

elde edilir. Buradan (2.1.5) denklemini kapalı formda

$$R(x_i, c_j) = 0 \quad (i = 1(1)N) \quad (2.1.6)$$

şeklinde yazılabilir. (2.1.6) denklemini, N tane kollokasyon yönteminden hesaplanırsa N -bilinmeyenli N -tane denklem sistemi elde edilir. c_j katsayıları bu denklem sisteminden kolayca bulunabilir [13, 16].

2.2 Kübik Trigonometrik B-Spline Fonksiyonlar

Sıfırıncı dereceden B-spline fonksiyonu

$$T_i^0(x) = \begin{cases} 1 & x_i < x < x_{i+1} \\ 0 & \text{diğer} \end{cases}$$

ve $k = 1, 2, 3, \dots$ olmak üzere

$$T_i^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{i+k}-x_i}{2}\right)} T_i^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x_i}{2}\right)} T_{i+1}^{k-1}(x)$$

bağıntısı ile trigonometrik B-spline fonksiyonlar elde edilir [17–19]. Eğer $[a, b]$ aralığındaki parçalanma düzgün ise indirgeme bağıntısı

$$T_i^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)} T_i^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)} T_{i+1}^{k-1}(x), \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (2.2.1)$$

olarak yazılabilir.

$T_i^3(x)$ kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için (2.2.1) bağıntısında $k = 3$ alındığında

$$p(x_i) = \sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)$$

olmak üzere

$$T_i^3(x) = \frac{p(x_i)}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_i^2(x) + \frac{p(x_{i+4})}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_{i+1}^2(x) \quad (2.2.2)$$

bulunur. Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını bulabilmek için gerekli olan kuadratik B-spline eşitlikleri

$$\theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right)$$

olmak üzere

$$\frac{p(x_i)}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_i^2(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} p^3(x_i), & x_i < x < x_{i+1} \\ p^2(x_i)p(x_{i+2}) \\ -p(x_i)p(x_{i+3})p(x_{i+1}), & x_{i+1} < x < x_{i+2} \\ p(x_i)p^2(x_{i+3}), & x_{i+2} < x < x_{i+3} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

ve

$$-\frac{p(x_{i+4})}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_{i+1}^2(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} -p(x_{i+4})p^2(x_{i+1}), & x_i < x < x_{i+1} \\ p(x_{i+4})p(x_{i+1})p(x_{i+3}) \\ -p(x_i)p(x_{i+3})p(x_{i+1}), & x_{i+1} < x < x_{i+2} \\ p^3(x_{i+4}), & x_{i+2} < x < x_{i+3} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak yazılabileceğinden (2.2.2) eşitliği

$$T_i^3(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} p^3(x_i), & x_i < x < x_{i+1} \\ -p^2(x_i)p(x_{i+2}) \\ -p(x_i)p(x_{i+3})p(x_{i+1}) \\ -p(x_{i+4})p^2(x_{i+1}), & x_{i+1} < x < x_{i+2} \\ p(x_i)p^2(x_{i+3}) \\ +p(x_{i+4})p(x_{i+1})p(x_{i+3}) \\ +p^2(x_{i+4})p(x_{i+1}), & x_{i+2} < x < x_{i+3} \\ -p^3(x_{i+4}), & x_{i+3} < x < x_{i+4} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde bulunur. Buradaki trigonometrik B-spline fonksiyonlar

$$p(x_i) = \sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right), \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right), i = 0, \dots, N$$

olmak üzere

$$T_i^3(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} p^2(x_{i-2}), & x_{i-2} < x < x_{i-1} \\ -p^2(x_{i-2})p(x_i) & \\ -p(x_{i-2})p(x_{i+1})p(x_{i-1}) & x_{i-1} < x < x_i \\ -p(x_{i+2})p^2(x_{i-1}), & \\ p(x_{i-2})p^2(x_{i+1}) & \\ +p(x_{i+2})p(x_{i-1})p(x_{i+1}) & x_i < x < x_{i+1} \\ +p^2(x_{i+2})p(x_i), & \\ -p^3(x_{i+2}), & x_{i+1} < x < x_{i+2} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

formunda bulunur.

Problemin analitik çözümü için genel yaklaşım kübik trigonometrik B-spline kullanılarak

$$U_N(x, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} T_i^3(x) \delta_i(t) \quad (2.2.3)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada δ_i katsayıları zamana bağlı değişkenler olmak üzere $T_i^3(x)$ fonksiyonları kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını gösterir. $T_i^3(x)$ fonksiyonlarının $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ aralığının dışında sıfır olduğu ve $[x_{i-2}, x_{i+2}]$ aralığında dört elemanı örttüğü bilinmektedir. Dolayısıyla her bir $[x_i, x_{i+1}]$ sonlu elemanı, $T_{i-1}^3(x)$, $T_i^3(x)$, $T_{i+1}^3(x)$, $T_{i+2}^3(x)$ olarak dört kübik trigonometrik B-spline tarafından örtüleceğinden (2.2.3) yaklaşımı

$$U_N(x, t) = \sum_{m=i-1}^{i+2} T_m^3(x) \delta_m(t) \quad (2.2.4)$$

$$U_N(x, t) = T_{i-1}^3(x) \delta_{i-1}(t) + T_i^3(x) \delta_i(t) + T_{i+1}^3(x) \delta_{i+1}(t) + T_{i+2}^3(x) \delta_{i+2}(t)$$

olarak elde edilir. Bu yaklaşım için kübik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılarak x_i noktasındaki $U(x_i, t)$ ve sırasıyla birinci ve ikinci türevi için yaklaşımlar

$$\begin{aligned} U_N(x_i, t) &= U_i = \sum_{m=i-1}^{i+2} T_m^3(x_i) \delta_m \\ \frac{dU_N(x, t)}{dx} &= U_i' = \sum_{m=i-1}^{i+2} \frac{dT_m^3(x_i)}{dx} \delta_m \\ \frac{d^2U_N(x, t)}{dx^2} &= U_i'' = \sum_{m=i-1}^{i+2} \frac{d^2T_m^3(x_i)}{dx^2} \delta_m \end{aligned}$$

olarak yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right) \\ \alpha_2 &= \frac{2}{1 + \cos(h)} \end{aligned}$$

$$\beta_1 = -\frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\beta_2 = \frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\gamma_1 = \frac{3((1 + 3 \cos(h)) \csc^2(\frac{h}{2}))}{16(2 \cos(\frac{h}{2}) + \cos(\frac{3h}{2}))}$$

$$\gamma_2 = -\frac{3 \cot^2(\frac{h}{2})}{2 + 4 \cos(h)}$$

olmak üzere

$$U_i = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

$$U'_i = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1}$$

$$U''_i = \gamma_1 \delta_{i-1} + \gamma_2 \delta_i + \gamma_1 \delta_{i+1}$$

(2.2.5)

eşitlikleri bulunur [20].

3. ISI DENKLEMİNİN KÜBİK TRİGONOMETRİK B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

3.1 Isı Denklemi

Uygulamalı matematiğin en önemli kısmı diferansiyel denklemlerinden biri olan ısı denklemi, ısı iletiminin modellenmesinde, yayınımlı işlemlerde ve gözenekli ortamlarda akışta önemli bir yer edinmektedir. Modern anlamda fiziksel ve matematiksel ısı iletiminin kaşifi olan Joseph Fourier, ilk olarak 1803 civarında konuya ilgi duymaya başladı ve başlangıçta sınırlı sayıda ayrı cisimler arasındaki ısı hareketini ele aldı. Daha sonra problemi sürekli cisimler arasındaki ısı hareketine taşıdı ve bunu 1822’de yayınladığı “Analytical Theory of Heat” isimli çalışmasıyla sundu. Fourier, bir cismin yüzeyindeki ısı hareketi için genel ifadeyi

$$\rho c \frac{\partial U}{\partial t} = k \nabla^2 U$$

biçiminde ifade etti. Burada ρ malzeminin yoğunluğunu, c özgül ısıyı, k ise ısı iletkenlik katsayısının göstermektedir [21]. Fourier, bu problemi çözmek için ilk olarak tahmin yöntemini kullandı. Çubuktaki sıcaklık, hem zamanın hem de mekanın (uzay) bir fonksiyonu olduğu için sonucun hem zaman hem de uzay fonsiyonlarının birbiriyle çarpımından bulunacağını öngördü. Sonuç, sinüs dalgasıyla (uzay) üstel azalan fonsiyonun (zaman) çarpımıydı. Eğer çubuk, en başta grafiği sinüs dalgası olan sıcaklık dalgasına sahipse, sinüs dalgasının dalga boyunun karesiyle orantılı olacağı noktada sıcaklık aşamalı olarak sifira veya ortam sıcaklığına düşecektir [22].

Bu kısımda

$$U_t = kU_{xx}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t \geq 0 \quad (3.1.1)$$

şeklinde verilen 1-boyutlu zamana bağlı ısı denklemi

$$U(0,t) = g_1, \quad t \geq 0$$

$$U(1,t) = g_2, \quad t \geq 0$$

sınır şartları ve

$$U(x,0) = f(x)$$

başlangıç şartlarıyla göz önüne alındı. Denklemden görülen x ve t indisleri sırasıyla konuma ve zamana göre türevleri temsil etmektedir.

3.2 Model Problemler

Bu kısımda (3.1.1) ile verilen ısı denklemi

$$U(0,t) = U(1,t) = 0, t \geq 0$$

sınır şartları ve aşağıda verilen iki farklı başlangıç şartı ile birlikte göz önüne alındı.

3.2.1 Problem 1

İlk olarak, (3.1.1) ile verilen 1-boyutlu zamana bağlı ısı denklemini, $k = 1$ olmak üzere

$$U(x,0) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 2(1-x) & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \end{cases}$$

başlangıç şartı ile göz önüne alındı. Verilen bu problemin tam çözümü

$$U(x,t) = \frac{8}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \left(\sin \frac{1}{2} n\pi \right) (\sin n\pi x) \exp(n^2 \pi^2 t)$$

dir [23].

3.2.2 Problem 2

İkinci olarak, (3.1.1) ile verilen 1-boyutlu zamana bağlı ısı denklemini $k = \frac{1}{\pi^2}$ olmak üzere

$$U(x,0) = \sin(\pi x)$$

başlangıç şartıyla göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü ise

$$U(x,t) = \exp(-t) \sin(\pi x)$$

dir [24].

3.3 Isı Denkleminin Kübik Trigonometrik B-spline Kollokasyon Yöntemi ile Nümerik Çözümü

Bu kısımda, örnek bir uygulama olarak ısı denklemine kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi uygulanacaktır. Bu amaçla (3.1.1) ile verilen denklemdeki U_t ve U_{xx} yerine sırasıyla

$$U_t = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}$$
$$U_{xx} = \frac{U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n}{2}$$

ileri fark ve Crank-Nicolson yaklaşımları yazılır

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - k \frac{U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n}{2} = 0$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U^{n+1} - \frac{\Delta t}{2} k U_{xx}^{n+1} = U^n + \frac{\Delta t}{2} k U_{xx}^n \quad (3.3.1)$$

elde edilir. (2.2.4) ile verilen yaklaşım ve bu yaklaşımda kübik trigonometrik fonksiyonların kullanılmasıyla

$$U_i = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

$$U'_i = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1}$$

$$U''_i = \gamma_1 \delta_{i-1} + \gamma_2 \delta_i + \gamma_1 \delta_{i+1}$$

şeklinde elde edilen ve (2.2.5) ile verilen yaklaşımlar (3.3.1)'de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2} k (\gamma_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \gamma_2 \delta_i^{n+1} + \gamma_1 \delta_{i+1}^{n+1}) = \\ & (\alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n) + \frac{\Delta t}{2} k (\gamma_1 \delta_{i-1}^n + \gamma_2 \delta_i^n + \gamma_1 \delta_{i+1}^n) \end{aligned}$$

bulunur. Daha sonra gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \delta_{i-1}^{n+1} (\alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1) + \delta_i^{n+1} (\alpha_2 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_2) + \delta_{i+1}^{n+1} (\alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1) \\ & = \delta_{i-1}^n (\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1) + \delta_i^n (\alpha_2 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_2) + \delta_{i+1}^n (\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

olarak elde edilir. Bu sistem matris formunda

$$e_1 = \alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1$$

$$e_2 = \alpha_2 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_2$$

$$f_1 = \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1$$

$$f_2 = \alpha_2 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_2$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_1 & & & \\ & e_1 & e_2 & e_1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & e_1 & e_2 & e_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^{n+1} \\ \delta_0^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_N^{n+1} \\ \delta_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_1 & & & \\ & f_1 & f_2 & f_1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & f_1 & f_2 & f_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^n \\ \delta_0^n \\ \vdots \\ \delta_N^n \\ \delta_{N+1}^n \end{bmatrix}$$

yazılabilir. Böylece $(N+3)$ bilinmeyen ve $(N+1)$ tane denklemden oluşan bir sistem elde edilir. Daha sonra problemle birlikte verilen sınır şartları kullanılarak δ_{-1} ve δ_{N+1} bilinmeyenleri diğerleri cinsinden yazılabilir.

$x = x_i$ noktasında

$$U(x_i, t) \implies \alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1}$$

yaklaşımı yardımıyla δ_{-1} bilinmeyeni, $i = 0$ için $x = x_0$ noktasında $U(x_0, t) = 0$ olduğundan

$$\delta_{-1}^{n+1} = \frac{-\alpha_1 \delta_1^{n+1} - \alpha_2 \delta_0^{n+1}}{\alpha_1}$$

ve δ_{N+1} bilinmeyeni ise $i = N$ için $x = x_N$ noktasında $U(x_N, t) = 0$ olduğundan

$$\delta_{N+1}^{n+1} = \frac{-\alpha_1 \delta_{N-1}^{n+1} - \alpha_2 \delta_N^{n+1}}{\alpha_1}$$

şeklinde diğerleri cinsinden bulunur. Daha sonra δ_{-1} ve δ_{N+1} eşitlikleri (3.3.2)'de yerlerine yazılırsa $i = 0$ için

$$\begin{aligned} & \left(\frac{-\alpha_1 \delta_1^{n+1} - \alpha_2 \delta_0^{n+1}}{\alpha_1} \right) \left(\alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) + \delta_0^{n+1} \left(\alpha_2 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_2 \right) + \\ & \delta_1^{n+1} \left(\alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) = \left(\frac{-\alpha_1 \delta_1^n - \alpha_2 \delta_0^n}{\alpha_1} \right) \left(\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) + \\ & \delta_0^n \left(\alpha_2 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_2 \right) + \delta_1^n \left(\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta_0^{n+1} \left[\frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \left(\alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) + \left(\alpha_2 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_2 \right) \right] + \delta_1^{n+1} \left[-\left(\alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) + \left(\alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) \right] = \\ & \delta_0^n \left[\frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \left(\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) + \left(\alpha_2 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_2 \right) \right] + \delta_1^n \left[-\left(\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) + \left(\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) \right] \\ & \delta_0^{n+1} \left[\frac{\Delta t}{2} k (\alpha_2 \gamma_1 - \gamma_2) \right] + \delta_1^{n+1} \cdot 0 = \delta_0^n \left[\frac{\Delta t}{2} k (-\alpha_2 \gamma_1 + \gamma_2) \right] + \delta_1^n \cdot 0 \end{aligned}$$

ve $i = N$ için

$$\begin{aligned} & \delta_{N-1}^{n+1} \left(\alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) + \delta_N^{n+1} \left(\alpha_2 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_2 \right) + \left(\frac{-\alpha_1 \delta_{N-1}^{n+1} - \alpha_2 \delta_N^{n+1}}{\alpha_1} \right) \left(\alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) = \\ & \delta_{N-1}^n \left(\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) + \delta_N^n \left(\alpha_2 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_2 \right) + \left(\frac{-\alpha_1 \delta_{N-1}^n - \alpha_2 \delta_N^n}{\alpha_1} \right) \left(\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta_{N-1}^{n+1} \left[-\left(\alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) + \left(\alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) \right] + \delta_N^{n+1} \left[\frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \left(\alpha_1 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) + \left(\alpha_2 - \frac{\Delta t}{2} k \gamma_2 \right) \right] = \\ & \delta_{N-1}^n \left[-\left(\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) + \left(\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) \right] + \delta_N^n \left[\frac{-\alpha_2}{\alpha_1} \left(\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_1 \right) + \left(\alpha_2 + \frac{\Delta t}{2} k \gamma_2 \right) \right] \end{aligned}$$

elde edilir ve matris formunda

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1} \\ \delta_0 \\ \vdots \\ \delta_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_N \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Bu sistemde de $(N+3)$ bilinmeyen $(N+1)$ tane denklem olduğundan δ_{-1} ve δ_{N+1} bilinmeyenlerinin yok edilmesi gerekir. Yan şart olarak U' kullanılmasıyla

$$U'_i = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1}$$

$$U'_0 = \beta_1 \delta_{-1} + \beta_2 \delta_1 \implies \delta_{-1} = \frac{U'_0 - \beta_2 \delta_1}{\beta_1}$$

$$\alpha_1 \left(\frac{U'_0 - \beta_2 \delta_1}{\beta_1} \right) + \alpha_2 \delta_0 + \alpha_1 \delta_1 = 0$$

$$\alpha_2 \delta_0 + \alpha_1 \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \delta_1 + \alpha_1 \left(\frac{U'_0}{\beta_1} \right) = 0$$

$$U'_N = \beta_1 \delta_{N-1} + \beta_2 \delta_{N+1} \implies \delta_{N+1} = \frac{U'_N - \beta_1 \delta_{N-1}}{\beta_2}$$

$$0 = \alpha_1 \delta_{N-1} + \alpha_2 \delta_N + \alpha_1 \left(\frac{U'_N - \beta_1 \delta_{N-1}}{\beta_2} \right)$$

$$\alpha_1 \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \delta_{N-1} + \alpha_2 \delta_N + \alpha_1 \left(\frac{U'_N}{\beta_2} \right) = 0$$

sistem

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \\ & & & \alpha_1 \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) & \alpha_2 & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \\ \delta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_1 \left(\frac{U'_0}{\beta_1} \right) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\alpha_1 \left(\frac{U'_N}{\beta_2} \right) \end{bmatrix}$$

şeklinde $(N+1) \times (N+1)$ tipinde bir sisteme dönüşür. Bu sistemin çözülmesiyle elde edilen δ^0 parametreleri (3.3.3) ile verilen sistemde kullanılarak istenilen t zamanındaki sonuçlara ulaşılır.

3.3.1 Nümerik Sonuçlar

Bu çalışmada bütün hesaplamalar Intel Pentium bilgisayarlarda Matlab R2011a derleyicisi kullanılarak yapıldı. Nümerik çözümlerin analitik sonuçlara ne kadar yakın olduğunu göstermek

için

$$L_{\infty} = \max_j |U_j^{tam} - U_j^n|$$

$$L_2 = \left[h \sum_{i=1}^N |U(x_i, t_j) - U_{i,j}|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ile verilen hata normları hesaplandı ve nümerik çözümler çizelgeler/grafikler halinde verildi.

Problem 1 ve Problem 2 için elde edilen nümerik çözümler ile tam çözümlerin karşılaştırılması Çizelge 3.1-Çizelge 3.4'de verildi.

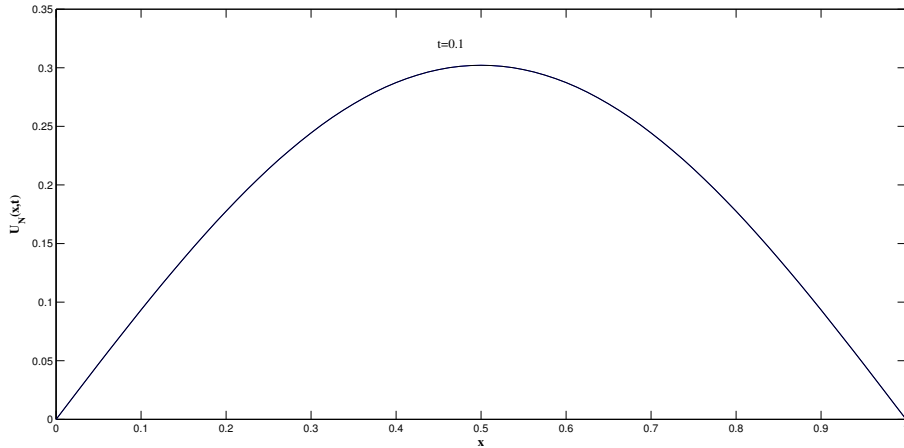
Çizelge 3.1 : $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	N=10	N=20	N=40	N=80	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.09354572	0.09339561	0.09335766	0.09334814	0.09334565
0.2	0.17793860	0.17765535	0.17758386	0.17756595	0.17756133
0.3	0.24491841	0.17765535	0.24443521	0.24441088	0.24440470
0.4	0.28792546	0.28747530	0.28736223	0.28733401	0.28732684
0.5	0.30274539	0.30227353	0.30215511	0.30213522	0.30211809
0.6	0.28792546	0.28747530	0.28736223	0.28733401	0.28732684
0.7	0.24491841	0.24453238	0.24443521	0.24441088	0.24440470
0.8	0.17793860	0.17765535	0.17758386	0.17756595	0.17756133
0.9	0.09354572	0.09339561	0.09335766	0.09334814	0.09334565
1	0	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.44751703	0.11113889	0.02653592	0.00588529	
$L_{\infty} \times 10^3$	0.62729705	0.15543912	0.03701821	0.01713053	

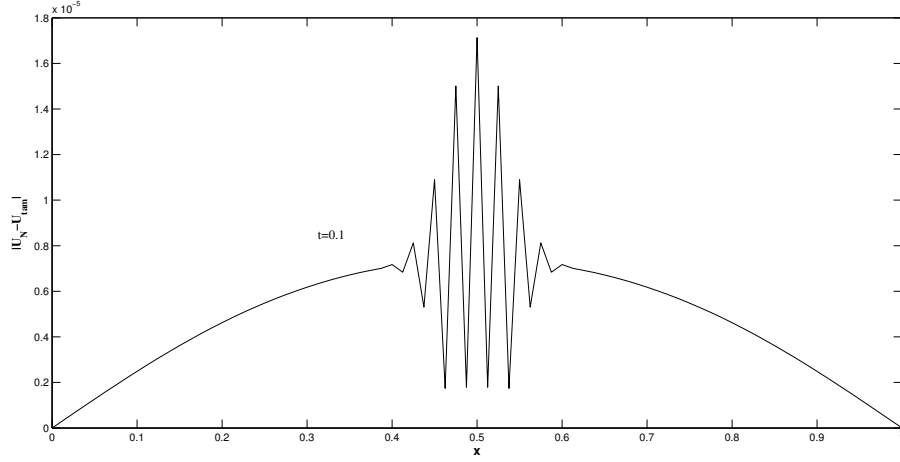
Kısmi diferensiyel denklemlerinin çözüm yollarından biri olan kollokasyon sonlu eleman yönteminin en önemli özelliği, verilen problemin çözüm bölgesini alt bölgelere ayırarak çözmesi olduğundan bir önceki bölümde bahsedilmişti. Bu yöntemde çözüm bölgesi ne kadar çok alt bölgeye ayrılırsa nümerik çözümün tam çözüme o kadar yakın sonuç vermesi ve hata normlarının da küçük olması beklenmektedir. Bu durum sırasıyla Çizelge 3.1 ve Çizelge 3.2'de incelendi. Çizelge 3.1'de $\Delta t = 0.001$ ve $t = 0.1$ olmak üzere N bölüntü sayısının 10, 20, 40, 80 değerleri için sonuçlar sunuldu. N bölüntü sayısı arttıkça sonlu elemanlar yönteminden beklendiği gibi hata normlarının küçüldüğü ve nümerik sonuçların tam çözüme daha iyi yaklaştığı açık bir şekilde görülmektedir.

Çizelge 3.2 : $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005$ için Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.09328670	0.09334094	0.09335766	0.09335817	0.09334565
0.2	0.17747107	0.17755181	0.17758386	0.17758488	0.17756133
0.3	0.24410005	0.24438837	0.24443521	0.24443667	0.24440470
0.4	0.28799071	0.28716984	0.28736223	0.28736399	0.28732684
0.5	0.31636515	0.30596752	0.30215511	0.30215698	0.30211809
0.6	0.28799071	0.28716984	0.28736223	0.28736399	0.28732684
0.7	0.24410005	0.24438837	0.24443521	0.24443667	0.24440470
0.8	0.17747107	0.17755181	0.17758386	0.17758488	0.17756133
0.9	0.09328670	0.09334094	0.09335766	0.09335817	0.09334565
1	0	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	2.69916171	0.90468387	0.02653592	0.02782061	
$L_\infty \times 10^3$	14.24706112	3.84942604	0.03701821	0.03888928	



Şekil 3.1 : Problem 1'in $N = 80$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 0.1$ için nümerik sonuçlarının grafiği.



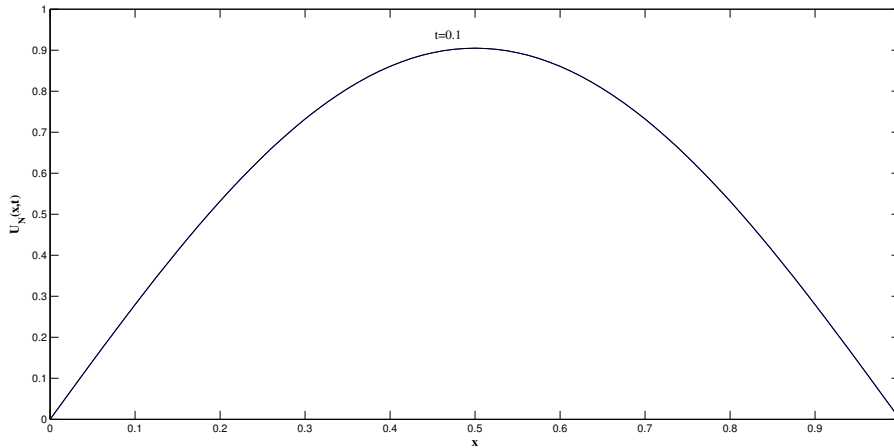
Şekil 3.2 : Problem 1'in $N = 80$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 0.1$ için hata grafiği.

Çizelge 3.3 : $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

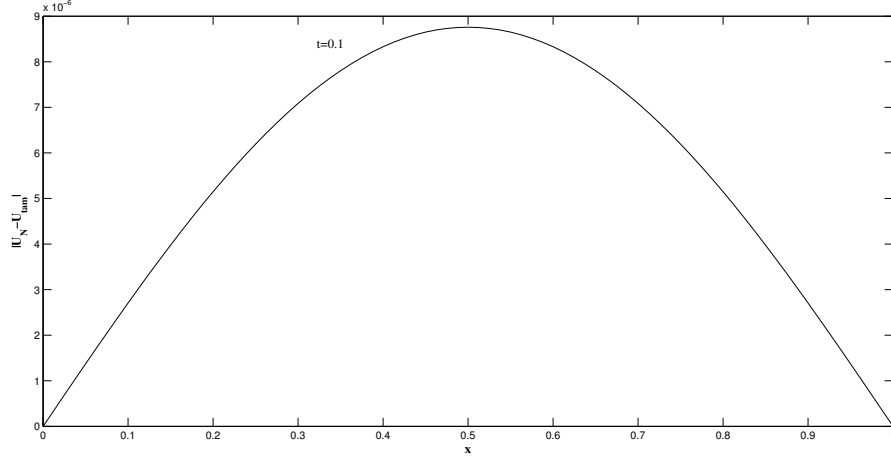
x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$N=10$	$N=20$	$N=40$	$N=80$	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.27943651	0.27956684	0.27959932	0.27960743	0.27961014
0.2	0.53151982	0.53176773	0.53182951	0.53184494	0.53185009
0.3	0.73157427	0.73191549	0.73200052	0.73202176	0.73202885
0.4	0.86001714	0.86041826	0.86051822	0.86054319	0.86055152
0.5	0.90427553	0.90469729	0.90480240	0.90482866	0.90483742
0.6	0.86001714	0.86041826	0.86051822	0.86054319	0.86055152
0.7	0.73157427	0.73191549	0.73200052	0.73202176	0.73202885
0.8	0.53151982	0.53176773	0.53182951	0.53184494	0.53185009
0.9	0.27943651	0.27956684	0.27959932	0.27960743	0.27961014
1	0	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.39731314	0.09908222	0.02475882	0.00619272	
$L_\infty \times 10^3$	0.56188563	0.14012342	0.03501427	0.00875783	

Çizelge 3.4 : $N = 40$, $0 \leq x \leq 1$, $t = 0.1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005$ için Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0005$	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.27959909	0.27959926	0.27959932	0.27959932	0.27961014
0.2	0.53182907	0.53182940	0.53182951	0.53182951	0.53185009
0.3	0.73199992	0.73200037	0.73200052	0.73200053	0.73202885
0.4	0.86051751	0.86051805	0.86051822	0.86051823	0.86055152
0.5	0.90480166	0.90480222	0.90480240	0.90480241	0.90483742
0.6	0.86051751	0.86051805	0.86041822	0.86051823	0.86055152
0.7	0.73199992	0.73200037	0.73200052	0.73200053	0.73202885
0.8	0.53182907	0.53182940	0.53182951	0.53182951	0.53185009
0.9	0.27959909	0.27959926	0.27959932	0.27959932	0.27961014
1	0	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.02528727	0.02488693	0.02475882	0.02475482	
$L_\infty \times 10^3$	0.03576160	0.03519544	0.03501427	0.03500860	



Şekil 3.3 : Problem 2'nin $N = 80$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 0.1$ için nümerik sonuçlarının grafiği.



Şekil 3.4 : Problem 2'nin $N = 80$, $\Delta t = 0.001$ ve $t = 0.1$ için hata grafiği.

Çizelge 3.2'de ise $N = 40$ ve $t = 0.1$ olmak üzere Δt zaman adım uzunluğunun 0.01, 0.005, 0.001, 0.0005 değerleri için nümerik ve tam çözüm ile hata normları verildi. Δt zaman adım uzunluğu küçüldükçe bir değere kadar iyileşme gösterirken devamında hata normlarındaki küçülmenin çok az olduğu ve örneğin $\Delta t = 0.001$ 'den $\Delta t = 0.0005$ 'e adımında bir miktar arttığı görülmektedir.

Problem 1'in $t = 0.1$ 'de nümerik ve tam çözümün grafiği ile hata grafiği sırasıyla Şekil 3.1 ve Şekil 3.2'de gösterildi.

Şekil 3.1 ile verilen grafikte tam çözüm ile nümerik çözüm birlikte yer almaktadır. Tam çözüm ile analitik çözümün birbirine çok yakın olmasından dolayı çözümlere ait olan iki tane eğrinin üst üste gelmesiyle grafik artık tek bir eğriye ait gibi görünmektedir. Bu durum Çizelge 3.1 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan yöntem tam çözüme çok yakın sonuçlara ulaştırmaktadır.

Şekil 3.2'de ise birinci probleme ait hata grafiği gösterilmiştir. Grafik incelendiğinde çözüm aralığının sınırlarında hatanın çok az olduğu ve en fazla hatanın da dalganın genliğinin en büyük olduğu aralık civarında olduğu görülmektedir.

Problem 2'ye yöntemin uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar Problem 1'e benzer olarak incelendi. Bu amaçla ilk olarak Çizelge 3.3'de $\Delta t = 0.001$ ve $t = 0.1$ olmak üzere N bölüntü sayısının 10, 20, 40, 80 değerleri için sonuçlar sunuldu. Bu tablodan N bölüntü sayısı arttıkça sonlu elemanlar yönteminden beklendiği gibi hata normlarının küçüldüğü görülmektedir. Zaman adımının değişimine bağlı olarak değişen hata

normlarını içeren Çizelge 3.4 incelendiğinde ise zaman adım uzunluğu küçüldükçe başlangıçta hata normlarının azaldığı ancak zaman aralığının devamlı olarak küçülmesi durumunda hata normlarında değişimin çok az olduğu gözlemlendi.

Problem 2 için Şekil 3.3 ile verilen grafikte tam çözüm ile nümerik çözüm birlikte sunuldu. Ancak tam çözüm ile analitik çözüm birbirinden ayırt edilemeyecek kadar yakın olduğundan çözümlere ait olan iki eğri üst üste gelmektedir. Şekil 3.4'te ikinci probleme ait hata grafiği verildi. Grafik incelendiğinde en fazla hata, dalganın genliğinin en büyük olduğu aralık civarındadır.

Yukarıda verilen çizelge ve grafikler göz önüne alındığında her iki model problemin çözümü için kullanılan kübik trigonometrik B-spline Kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik sonuçların tam çözümlere çok yakın olduğu anlaşılmaktadır.

4. BURGERS DENKLEMİNİN KÜBİK TRİGONOMETRİK B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Burgers denkleminin çözümü üzerine literatürde birçok çalışma vardır. Örneğin; Caldwell vd. [25], denklemde görülen vizkozite parametresinin küçük değerleri için nümerik çözümlerde ortaya çıkan problemleri göz önüne alarak, elemanların boyutunun çözümün doğası ile belirlenen parçalı polinom yaklaşımını kullandılar. Evans ve Abdullah [26], grup açık yöntemin uygulamasını ikinci mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin nümerik çözümlerine genişletmeyi amaçladılar. Bu yöntemi, farklı başlangıç ve sınır şartlarına sahip Burgers denklemi için test ettiler. Ames ve Nucci [27], Lie-grup analiz mekanizmasını kullanarak akışkanlar mekaniğinde ortaya çıkan Burgers, KdV, Hopf ve iki-boyutlu KdV gibi denklemleri analiz ettiler. Cecchi vd. [28], Burgers denkleminin belirlediği konum-zaman bölgesinde, kuazi lineer parabolik problemlerin zayıf formülasyonunu çözmek için bir sonlu eleman nümerik yöntemi önerdiler. Bu nümerik çözümün kararlılık ve hata tahmin teoremlerini ispatladılar. Doğan [29], Petrov-Galerkin sonlu eleman yöntemini kullanarak geçişken lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin çözümlerini elde etti. Örnek uygulamalardan birini ise Burgers denklemi olarak ele aldı. Kutluay vd. [30], akışkanlar dinamiğinde problemleri çözmek için kullanılan matematiksel modellemelerde ortaya çıkan bir boyutlu Burgers denklemini çözmek için standart açık yöntemeye dayalı sonlu fark yaklaşımlarının analitik ve sonlu fark çözümlerini sundular. Lin ve Zhou [31], varyasyonel formun integrallerini hesaplamada bağlantı katsayılarının değerlendirilmesini uygulayarak Burgers denklemini çözmek için yarı-açık fark şemasını kullandılar. Önerdikleri yöntemin doğruluk ve etkinliğini örneklerle açıkladılar. Öziş vd. [32], türbülans ve şok dalgalar teorisinde bir model problem olarak kullanılan Burgers denklemi için bir sonlu eleman çözümü sundular ve farklı vizkozite değerleri için elde ettikleri nümerik sonuçları Cole'nin analitik çözümleri ile karşılaştırdılar. Kutluay ve Esen [33], bir boyutlu Burgers tipi denklemlerin nümerik çözümlerini bulmak için lineerleştirilmiş kapalı sonlu fark yöntemini uyguladılar. Yazarlar elde ettikleri sonuçları tam çözümle elde edilen sonuçlarla karşılaştırdılar ve sonuçların uyum içinde olduklarını buldular. Kutluay vd. [34], bu çalışmalarında uygun başlangıç ve sınır şartları ile verilmiş olan bir boyutlu Burgers tipi denklemlerin nümerik çözümlerini hesaplamak için en küçük kareler kuadratik B-spline sonlu eleman yöntemini uyguladılar. Uyguladıkları yöntemin doğruluğunu test etmek için üç test problemini ele aldılar. Aksan ve Özdeş [35], bir boyutlu kuazi lineer parabolik kısmi diferansiyel denklem olan Burgers denklemini, zaman ayrıklaştırma yöntemine dayalı bir

varyasyonel yöntemle çözdüler ve sonuçlarını tam çözümle karşılaştırdılar. Dağ vd. [36], hem zaman hem de konum yönünde parçalanmış Burgers denklemini nümerik olarak çözdüler. Zaman yönünde parçalanmış Burgers denklemini kübik B-spline kollokasyon ve konum yönünde parçalanmış Burgers denklemini kuadratik B-spline kollokasyon yöntemi ile çözdüler. Dağ vd. [37], bu çalışmalarında bir boyutlu Burgers denkleminin nümerik çözümlerini sonlu elemanlar üzerinde kübik B-spline fonksiyonların kollokasyonuna dayalı olarak çözdüler. Önerdikleri metodun doğruluğunu üç test problemi ile gösterdiler. Dağ vd. [38], Burgers denklemine, birinci mertebeden parçalama (splitting) yöntemini uyguladılar ve zaman yönünde parçalanmış Burgers denklemi için hem kuadratik hem de kübik B-spline Galerkin sonlu eleman tekniklerini uyguladılar. Öziş vd. [39], Hopf-Cole dönüşümü ile indirgenmiş olan bir boyutlu Burgers denklemini nümerik olarak çözmek için Galerkin kuadratik B-spline sonlu eleman yöntemini sundular. Sundukları yöntemin performansını bilinen tam çözüme sahip iki problem üzerinde test ettiler. Kadalbajoo vd. [40], küçük vizkozite katsayısına sahip bir boyutlu zamana bağlı Burgers denkleminin çözümü için nümerik bir çalışma sundular. Bu çalışmalarında hem küçük hem de büyük vizkozite değerleri için güzel bir şekilde çalışan sonlu farklara dayalı nümerik bir yöntem kullandılar. Hassanien vd. [41], lineer olmayan bir boyutlu Burgers denklemini çözümü için dördüncü mertebe sonlu fark yöntemini önerdiler. Önerilen metodun kararlılık analizini yaptılar ve hatanın üs sınırını türettiler. Gülsu ve Öziş [42], bir grup başlangıç ve sınır şartları ile birlikte verilen Burgers denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için kısıtlayıcı Taylor yaklaşım klasik açık sonlu fark yöntemini uyguladılar. Önerdikleri yeni yöntemin kararlılık bölgesi ve kesme hatasını ele aldılar. Ramadan vd. [43], lineer olmayan Burgers denkleminin nümerik çözümlerini, sonlu elemanlar üzerinde septik B-spline fonksiyonların kollokasyonuna dayalı bir yöntemle elde ettiler. Sundukları yöntemin doğruluğunu iki test problemi ile gösterdiler. Kadalbajoo ve Awasthi [44], çalışmalarında bir boyutlu Burgers denklemi için Crank-Nicolson sonlu fark yöntemine dayalı bir çözüm sundular. Reynolds sayısının farklı değerleri için elde ettikleri nümerik çözümleri tam çözüm değerleriyle karşılaştırdılar. Saka ve Dağ [45], ilk olarak Burgers ve modifiye edilmiş Burgers denklemlerine zaman ve konum parçalama tekniklerini uyguladılar. Daha sonra elde edilen sistemlerin yaklaşık çözümünü bulmak için kuintik B-spline kollokasyon prosedürünü uyguladılar. Liao [46], bir boyutlu Burgers denklemini çözmek için dördüncü mertebeden kompakt sonlu fark yöntemini sundu. Yazarın sunduğu bu yeni yöntem Hopf-Cole dönüşümüne dayanıyordu ve orjinal lineer olmayan Burgers denklemini, lineer ısı denklemine ve Dirichlet sınır şartında Robin sınır şartına dönüştürüyordu. Sari ve Gürarlan [47], bir boyutlu Burgers denkleminin bir nümerik

çözümünü altıncı mertebeden kompakt sonlu fark yöntemi ile elde ettiler. Bu çözümü elde etmek için konum yönünde üç bantlı altıncı mertebeden kompakt sonlu fark şemasını ve zaman yönünde de düşük depolama yeri işgal eden üçüncü mertebeden toplam varyasyonu ortadan kaldıran Runge-Kutta şemasını birleştirdiler. Zhu ve Wang [48], çalışmalarında kübik B-spline kuazi interpolasyona dayalı olarak denklemin nümerik çözümlerini elde ettiler. Önerdikleri metodun etkinliğini bazı test problemleri ile gösterdiler. Mittal ve Jain [49], lineer olmayan Burgers denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için nümerik bir yöntem sundular. Bu yöntem modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonların kollokasyonuna dayanıyordu. Yöntemin uygulanmasıyla elde edilen sistemleri, SSP-RK43 veya SSP-RK54 şemaları ile çözdüler. Zhang ve Wang [50], makalelerinde, Burgers denklemini çözmek için kompakt prediktör-korrektör sonlu fark şemasını önerdiler. Bu şema, kompakt türev yaklaşımına dayanıyordu. Yazarlar daha sonra test problemleri ile elde ettikleri nümerik sonuçların tam çözümle uyum içinde olduğunu gösterdiler. Soliman [51], Burgers denkleminin nümerik çözümlerini hem ağırlık hem de interpolasyon fonksiyonları olarak kübik B-spline baz fonksiyonlarını kullanan Galerkin yöntemine dayalı olarak elde etti. Yazar, aynı zamanda, bu yöntemin çok küçükten çok büyüğe değişen bir aralıktaki vizkozite değerleri için Burgers denklemini doğru olarak çözebildiğini gösterdi. Dehghan vd. [52], Burgers denklemlerinin nümerik çözümü için bir teknik önerdiler. Bu teknik, ölçekli interpolasyon fonksiyonlarını kullanan Galerkin yöntemi ile birlikte sonlu fark formülüne dayalı idi. İnan ve Bahadır [53], Burgers denkleminin geliştirilmiş üstel sonlu fark çözümlerinin oluşturulmasında yeni bir teknik sunmuşlardır. Sundukları bu tekniği Crank-Nicolson üstel sonlu fark yöntemi olarak adlandırdılar ve elde ettikleri nümerik çözümleri tam çözümlerle karşılaştırdılar. Ay vd. [54], Burgers denkleminin nümerik çözümlerini bulmak için subdomain Galerkin yönteminin bir çeşidini oluşturdu. Yaklaşım fonksiyonu olarak trigonometrik B-spline fonksiyonların kombinasyonunu kullandılar. Dağ vd. [55], Burgers denklemini, Crank-Nicolson yöntemini kullanarak tamamen ayrıştırdıktan sonra kübik trigonometrik B-Spline fonksiyonlar yardımı ile sayısal çözümler elde ettiler ve yöntemin uygunluğunu gösterdiler.

Bu bölümde

$$U_t + UU_x - \nu U_{xx} = 0, \quad a \leq x \leq b, \quad t > t_0 \quad (4.0.1)$$

biçiminde verilen Burgers denkleminin, UU_x lineer olmayan terimi yerine farklı lineerleştirme teknikleri kullanılarak kübik trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile nümerik şemaları elde edildi. Bu şemalar, Burgers denkleminin farklı başlangıç ve sınır

şartlarıyla verilen ve aşağıda tanıtilan model problemler için uygulandı. Elde edilen nümerik sonuçlar, mevcut tam çözümler ve literatürde sunulan diğer sonuçlarla grafikler halinde karşılaştırıldı.

4.1 Model Problemler

Bu bölümde (4.0.1) ile verilen Burgers denklemi ilk üç problem için

$$U(a,t) = U(b,t) = 0, \quad t \geq t_0 \quad (4.1.1)$$

sınır şartlarıyla, dördüncü problem için farklı bir sınır şartıyla ve aşağıda verilen dört farklı başlangıç şartı ile ele alındı.

4.1.1 Problem 1

Birinci problem için başlangıç şartı

$$U(x,0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1 \quad (4.1.2)$$

olarak ele alındı. (1.0.4) ile verilen Hopf-Cole dönüşümü kullanılırsa (4.1.2) başlangıç ve (4.1.1) sınır şartları ile birlikte Burgers denklemi

$$\theta_t = v\theta_{xx} \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0$$

$$\theta(x,0) = \exp\left\{-(2\pi v)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\right\}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$\theta_x(0,t) = \theta_x(1,t) = 0, \quad t > 0$$

biçiminde ısı problemine dönüşür. Bu problemin Fourier seri çözümü

$$\theta(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 v t) \cos(n\pi x)$$

dir. Bu eşitlikte a_0 ve a_n Fourier seri katsayıları olup

$$a_0 = \int_0^1 \exp\left\{-(2\pi v)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\right\} dx$$

$$a_n = 2 \int_0^1 \exp\left\{-(2\pi v)^{-1}[1 - \cos(\pi x)]\right\} \cos(n\pi x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

dir [5]. $\theta(x,t)$ ısı probleminin bir çözümü ise (1.0.4) dönüşümü, (4.1.2) başlangıç ve (4.1.1) sınır şartları ile verilen Burgers denkleminin bir çözümüdür.

4.1.2 Problem 2

İkinci problem için ise

$$U(x,0) = 4x(1-x), \quad 0 < x < 1 \quad (4.1.3)$$

başlangıç şartı göz önüne alındı. Burada da (1.0.4) Hopf-Cole dönüşümü kullanılırsa (4.1.3) ile verilen başlangıç şartı

$$\theta(x,0) = \exp \{ -x^2(3v)^{-1}(3-2x) \}, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

biçimine dönüşür. Bu problemin tam çözümü

$$\theta(x,t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \exp(-n^2 \pi^2 vt) \cos(n\pi x)$$

dir. Bu problem için a_0 ve a_n Fourier seri katsayıları ise

$$a_0 = \int_0^1 \exp \{ -x^2(3v)^{-1}(3-2x) \} dx$$
$$a_n = 2 \int_0^1 \exp \{ -x^2(3v)^{-1}(3-2x) \} \cos(n\pi x) dx \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

şeklindedir [56].

4.1.3 Problem 3

Üçüncü problem için başlangıç şartı

$$U(x,1) = \frac{x}{1 + \exp[(1/4v)(x^2 - (1/4))]}, \quad a \leq x \leq b$$

dir. Bu problemin tam çözümü ise, $t_s = \exp(1/8v)$ olmak üzere

$$U(x,t) = \frac{x/t}{1 + (t/t_s)^{\frac{1}{2}} \exp(x^2/4vt)}, \quad t > 1$$

dir [34].

4.1.4 Problem 4

Dördüncü problem ise

$$\eta = \frac{\alpha(x-\gamma)}{v}$$

olmak üzere

$$U(x,0) = \frac{\alpha + \mu + (\mu - \alpha) \exp \eta}{1 + \exp \eta}, \quad 0 \leq x \leq 1$$

başlangıç ve

$$U(0,t) = 1, U(1,t) = 0.2, t \geq 0$$

sınır şartları olarak alındı. Bu problemin tam çözümü

$$U(x,t) = \frac{\alpha + \mu + (\mu - \alpha) \exp \eta}{1 + \exp \eta}, 0 \leq x \leq 1$$

dir. Burada

$$\eta = \frac{\alpha(x - \mu t - \gamma)}{\nu}$$

dır ve α , μ ve γ ise keyfi sabitlerdir [55].

4.2 LİNEERLEŞTİRME-1 (LİN-1)

(4.0.1) ile verilen Burgers denkleminde UU_x lineer olmayan terimindeki U yerine

$$U = Z_i$$

alınırsa

$$U_t + Z_i U_x - \nu U_{xx} = 0$$

biçiminde yazılabilir. Daha sonra da U_t , U_x ve U_{xx} terimleri yerine sırasıyla

$$U_t = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}$$

$$U_x = \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2}$$

$$U_{xx} = \frac{U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n}{2}$$

ileri fark ve Crank-Nicolson yaklaşımları kullanılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + Z_i \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} - \nu \frac{U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n}{2} = 0$$

elde edilir. Bu ifadede eşitliğin her iki tarafı Δt ile çarpılırsa

$$U^{n+1} - U^n + \frac{Z_i \Delta t}{2} (U_x^{n+1} + U_x^n) - \frac{\nu \Delta t}{2} (U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n) = 0$$

olur ve sonra aynı zaman adımına ait terimler eşitliğin aynı tarafında olacak şekilde düzenlendiğinde

$$U^{n+1} + \frac{Z_i \Delta t}{2} U_x^{n+1} - \frac{\nu \Delta t}{2} U_{xx}^{n+1} = U^n - \frac{Z_i \Delta t}{2} U_x^n + \frac{\nu \Delta t}{2} U_{xx}^n$$

elde edilir. Burada (2.2.4) ile verilen yaklaşım ve bu yaklaşımda kübik trigonometrik fonksiyonların kullanılmasıyla

$$U_i = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1} \quad (4.2.1)$$

$$U'_i = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1}$$

$$U''_i = \gamma_1 \delta_{i-1} + \gamma_2 \delta_i + \gamma_1 \delta_{i+1}$$

şeklinde elde edilen ve (2.2.5) ile verilen yaklaşımlar yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1} + \frac{Z_i \Delta t}{2} [(\beta_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_{i+1}^{n+1})] - \\ & \frac{v \Delta t}{2} (\gamma_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \gamma_2 \delta_i^{n+1} + \gamma_1 \delta_{i+1}^{n+1}) = \\ & \alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n - \frac{Z_i \Delta t}{2} [(\beta_1 \delta_{i-1}^n + \beta_2 \delta_{i+1}^n)] + \\ & \frac{v \Delta t}{2} (\gamma_1 \delta_{i-1}^n + \gamma_2 \delta_i^n + \gamma_1 \delta_{i+1}^n) \end{aligned}$$

olur ve gerekli düzenlemeler yapılarak

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_1 + \frac{Z_i \Delta t \beta_1}{2} - \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right) \delta_{i-1}^{n+1} + \left(\alpha_2 - \frac{v \Delta t \gamma_2}{2} \right) \delta_i^{n+1} + \\ & \left(\alpha_1 + \frac{Z_i \Delta t \beta_2}{2} - \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right) \delta_{i+1}^{n+1} \quad (4.2.2) \\ & = \left(\alpha_1 - \frac{Z_i \Delta t \beta_1}{2} + \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right) \delta_{i-1}^n + \\ & \left(\alpha_2 + \frac{v \Delta t \gamma_2}{2} \right) \delta_i^n + \left(\alpha_1 - \frac{Z_i \Delta t \beta_2}{2} + \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right) \delta_{i+1}^n \end{aligned}$$

denklem sistemine ulaşılır. Bu sistem matris formunda

$$\begin{aligned} g_1 &= \alpha_1 + \frac{Z_i \Delta t \beta_1}{2} - \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \quad (4.2.3) \\ g_2 &= \alpha_2 - \frac{v \Delta t \gamma_2}{2} \\ g_3 &= \alpha_1 + \frac{Z_i \Delta t \beta_2}{2} - \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \\ h_1 &= \alpha_1 - \frac{Z_i \Delta t \beta_1}{2} + \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \\ h_2 &= \alpha_2 + \frac{v \Delta t \gamma_2}{2} \\ h_3 &= \alpha_1 - \frac{Z_i \Delta t \beta_2}{2} + \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} g_1 & g_2 & g_3 & & & \\ & g_1 & g_2 & g_3 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & g_1 & g_2 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^{n+1} \\ \delta_0^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} h_1 & h_2 & h_3 & & & \\ & h_1 & h_2 & h_3 & & \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & h_1 & h_2 & h_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^n \\ \delta_0^n \\ \vdots \\ \delta_{N+1}^n \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Böylece $(N+3) \times (N+1)$ tipinde bir matris elde edilir. Burada problemle birlikte verilen sınır şartları kullanılarak δ_{-1} ve δ_{N+1} bilinmeyenleri diğerleri cinsinden yazılabilir. Bu amaçla

$x = x_i$ noktasında

$$U(x_i, t) = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

yaklaşımı yardımıyla δ_{-1} bilinmeyi, $i = 0$ için $x = x_0$ noktasında $U(x_0, t) = U(a, t)$ olduğundan

$$\delta_{-1} = \frac{U(a, t) - \alpha_1 \delta_1 - \alpha_2 \delta_0}{\alpha_1}$$

ve δ_{N+1} bilinmeyi ise $i = N$ için $x = x_N$ noktasında $U(x_N, t) = U(b, t)$ olduğundan

$$\delta_{N+1} = \frac{U(b, t) - \alpha_1 \delta_{N-1} - \alpha_2 \delta_N}{\alpha_1}$$

şeklinde diğerleri cinsinden bulunur. Bu ifadeler (4.2.2) sisteminde yazılırsa $i = 0$ için

$$\begin{aligned} & \left[\alpha_1 + \frac{Z_0 \Delta t \beta_1}{2} - \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right] \left(\frac{U^{n+1}(a, t) - \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1} - \alpha_2 \delta_i^{n+1}}{\alpha_1} \right) + \\ & \left(\alpha_2 - \frac{v \Delta t \gamma_2}{2} \right) \delta_0^{n+1} + \left(\alpha_1 + \frac{Z_0 \Delta t \beta_1}{2} - \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right) \delta_1^{n+1} = \\ & \left(\alpha_1 - \frac{Z_0 \Delta t \beta_1}{2} + \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right) \left(\frac{U^n(a, t) - \alpha_1 \delta_1^n - \alpha_2 \delta_0^n}{\alpha_1} \right) + \\ & \left(\alpha_2 + \frac{v \Delta t \gamma_2}{2} \right) \delta_0^n + \left(\alpha_1 - \frac{Z_0 \Delta t \beta_2}{2} + \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right) \delta_1^n \end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\Delta t}{2\alpha_1} (v\alpha_2\gamma_1 - Z_0\alpha_2\beta_1 - v\alpha_1\gamma_2) \right] \delta_0^{n+1} + \left[\frac{Z_0\Delta t}{2} (\beta_2 - \beta_1) \right] \delta_1^{n+1} \\ & = \left[\frac{\Delta t}{2\alpha_1} (Z_0\alpha_2\beta_1 + v\alpha_1\gamma_2 - v\alpha_2\gamma_2) \right] \delta_0^n + \left[\frac{Z_0\Delta t}{2} (\beta_2 - \beta_1) \right] \delta_1^n + \\ & - \frac{U^{n+1}(a, t)}{\alpha_1} \left[\alpha_1 + \frac{Z_0\Delta t\beta_1}{2} - \frac{v\Delta t\gamma_1}{2} \right] + \\ & \frac{U^n(a, t)}{\alpha_1} \left[\alpha_1 - \frac{Z_0\Delta t\beta_1}{2} + \frac{v\Delta t\gamma_1}{2} \right] \end{aligned}$$

bulunur. $i = N$ için ise

$$\begin{aligned} & \left[\alpha_1 + \frac{Z_N \Delta t \beta_1}{2} - \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right] \delta_{N-1}^{n+1} + \left(\alpha_2 - \frac{v \Delta t \gamma_2}{2} \right) \delta_N^{n+1} + \\ & \left(\alpha_1 + \frac{Z_N \Delta t \beta_1}{2} - \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right) \left(\frac{U^{n+1}(b, t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^{n+1} - \alpha_2 \delta_N^{n+1}}{\alpha_1} \right) = \\ & \left(\alpha_1 - \frac{Z_N \Delta t \beta_1}{2} + \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right) \delta_{N-1}^n + \left(\alpha_2 + \frac{v \Delta t \gamma_2}{2} \right) \delta_N^n + \\ & \left(\alpha_1 - \frac{Z_N \Delta t \beta_2}{2} + \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right) \left(\frac{U^n(b, t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^n - \alpha_2 \delta_N^n}{\alpha_1} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \left[\frac{Z_N \Delta t}{2} (\beta_1 - \beta_2) \right] \delta_{N-1}^{n+1} + \left[\frac{\Delta t}{2 \alpha_1} (v \alpha_2 \gamma_1 - Z_N \alpha_2 \beta_2 - v \alpha_1 \gamma_2) \right] \delta_N^{n+1} \\ & = \left[\frac{Z_N \Delta t}{2} (\beta_2 - \beta_1) \right] \delta_{N-1}^n + \left[\frac{\Delta t}{2 \alpha_1} (Z_N \alpha_2 \beta_2 + v \alpha_1 \gamma_2 - v \alpha_2 \gamma_1) \right] \delta_N^n - \\ & \frac{U^{n+1}(b, t)}{\alpha_1} \left[\alpha_1 + \frac{Z_N \Delta t \beta_1}{2} - \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right] + \\ & \frac{U^n(b, t)}{\alpha_1} \left[\alpha_1 - \frac{Z_N \Delta t \beta_2}{2} + \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right] \end{aligned}$$

bulunur. Oluşan bu yeni eşitlikler (4.2.3) kullanılarak ve bunlara ek olarak

$$\begin{aligned} j_1 &= \frac{\Delta t}{2 \alpha_1} (v \alpha_2 \gamma_1 - Z_0 \alpha_2 \beta_1 - v \alpha_1 \gamma_2) \\ j_2 &= \frac{Z_0 \Delta t}{2} (\beta_2 - \beta_1) \\ j_3 &= \frac{Z_N \Delta t}{2} (\beta_1 - \beta_2) \\ j_4 &= \frac{\Delta t}{2 \alpha_1} (v \alpha_2 \gamma_1 - Z_N \alpha_2 \beta_2 - v \alpha_1 \gamma_2) \\ k_1 &= \frac{\Delta t}{2 \alpha_1} (Z_0 \alpha_2 \beta_1 + v \alpha_1 \gamma_2 - v \alpha_2 \gamma_2) \\ k_2 &= \frac{Z_0 \Delta t}{2} (\beta_2 - \beta_1) \\ k_3 &= \frac{Z_N \Delta t}{2} (\beta_2 - \beta_1) \\ k_4 &= \frac{\Delta t}{2 \alpha_1} (Z_N \alpha_2 \beta_2 + v \alpha_1 \gamma_2 - v \alpha_2 \gamma_1) \\ l_1 &= -\frac{U^{n+1}(a, t)}{\alpha_1} \left[\alpha_1 + \frac{Z_0 \Delta t \beta_1}{2} - \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right] + \\ & \frac{U^n(a, t)}{\alpha_1} \left[\alpha_1 - \frac{Z_0 \Delta t \beta_1}{2} + \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right] \\ l_2 &= -\frac{U^{n+1}(b, t)}{\alpha_1} \left[\alpha_1 + \frac{Z_N \Delta t \beta_1}{2} - \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right] + \\ & \frac{U^n(b, t)}{\alpha_1} \left[\alpha_1 - \frac{Z_N \Delta t \beta_2}{2} + \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right] \end{aligned}$$

eşitlikleri de kullanılırsa

$$\begin{bmatrix} j_1 & j_2 & & & \\ g_1 & g_2 & g_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & j_3 & j_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_0^{n+1} \\ \delta_1^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & & & \\ h_1 & h_2 & h_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & k_3 & k_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta_0^n \\ \delta_1^n \\ \vdots \\ \delta_N^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_2 \end{bmatrix} \quad (4.2.4)$$

şeklinde matris formunda yazılabilir. Böylece $(N + 1) \times (N + 1)$ tipinde bir matris sistemi oluşur. Bu sistemin iteratif olarak çözümüne başlamak için $n = 0$ olmak üzere δ^0 başlangıç parametrelerinin bulunması gerekir. Bu amaçla problemle birlikte verilen

$$U_i = U(x, t_0) \implies U_i = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

başlangıç şartı kullanılarak

$$U_0 = \alpha_1 \delta_{-1} + \alpha_2 \delta_0 + \alpha_1 \delta_1$$

$$U_1 = \alpha_1 \delta_0 + \alpha_2 \delta_1 + \alpha_1 \delta_2$$

\vdots

$$U_N = \alpha_1 \delta_{N-1} + \alpha_2 \delta_N + \alpha_1 \delta_{N+1}$$

denklem sistemi elde edilir ve bu sistem matris formunda

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1} \\ \delta_0 \\ \vdots \\ \delta_N \\ \delta_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix} \quad (4.2.5)$$

biçiminde yazılır. Burada yine $(N + 3)$ bilinmeyen ve $(N + 1)$ denklem olduğundan δ_{-1} ve δ_{N+1} bilinmeyenleri diğerleri cinsinden yazılabilir. Bunun için problemde yan şart olarak verilen U'

kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
U'_i &= \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1} \\
U'_0 &= \beta_1 \delta_{-1} + \beta_2 \delta_1 \implies \delta_{-1} = -\frac{\beta_2 \delta_1}{\beta_1} \\
0 &= \alpha_1 \left(-\frac{\beta_2 \delta_1}{\beta_1}\right) + \alpha_2 \delta_0 + \alpha_1 \delta_1 \\
0 &= \alpha_2 \delta_0 + \alpha_1 \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) \delta_1 \\
U'_N &= \beta_1 \delta_{N-1} + \beta_2 \delta_{N+1} \implies \delta_{N+1} = -\frac{\beta_1 \delta_{N-1}}{\beta_2} \\
0 &= \alpha_1 \delta_{N-1} + \alpha_2 \delta_N + \alpha_1 \left(-\frac{\beta_1 \delta_{N-1}}{\beta_2}\right) \\
0 &= \alpha_1 \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right) \delta_{N-1} + \alpha_2 \delta_N
\end{aligned}$$

olur ve sistem

$$\begin{bmatrix}
\alpha_2 & \alpha_1 \left(1 - \frac{\beta_2}{\beta_1}\right) & & & & & & & & & \\
\alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & & & & & \\
& \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & & & & \\
& & & & \ddots & & & & & & \\
& & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & \\
& & & & & & & \alpha_1 \left(1 - \frac{\beta_1}{\beta_2}\right) & \alpha_2 & &
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\delta_0 \\
\delta_1 \\
\delta_2 \\
\vdots \\
\delta_{N-1} \\
\delta_N
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
U_0 \\
U_1 \\
U_2 \\
\vdots \\
U_{N-1} \\
U_N
\end{bmatrix}$$

haline geldikten sonra $(N + 1) \times (N + 1)$ tipindeki bu matris sistemi çözülerek δ^0 başlangıç parametreleri elde edilir. Bu başlangıç parametreleri (4.2.4) ile verilen sistemde kullanılarak istenilen bir t zamanına ait değerlere iterasyon yöntemi ile ulaşılır.

U_N nümerik çözümlerini iyileştirmek adına (4.2.4) denklem sisteminde lineer olmayan terimler için

$$\delta_i^* = \delta_i^n + \frac{1}{2}(\delta_i^{n+1} - \delta_i^n)$$

şeklinde tanımlanan iç iterasyon formülü birkaç defa kullanıldı.

4.2.1 Kararlılık Analizi

Bu kısımda (4.0.1) ile verilen Burgers denkleminin LİN-1 ile elde edilen şemasının kararlılık analizi von-Neumann yöntemi ile araştırılacaktır. Bu amaçla $Z_j = \hat{U}$ olmak üzere LİN-1 ile

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_1 + \frac{\hat{U}\Delta t\beta_1}{2} - \frac{v\Delta t\gamma_1}{2} \right) \delta_{j-1}^{n+1} + \left(\alpha_2 - \frac{v\Delta t\gamma_2}{2} \right) \delta_j^{n+1} + \\ & \left(\alpha_1 + \frac{\hat{U}\Delta t\beta_2}{2} - \frac{v\Delta t\gamma_1}{2} \right) \delta_{j+1}^{n+1} \\ & = \left(\alpha_1 - \frac{\hat{U}\Delta t\beta_1}{2} + \frac{v\Delta t\gamma_1}{2} \right) \delta_{j-1}^n + \\ & \left(\alpha_2 + \frac{v\Delta t\gamma_2}{2} \right) \delta_j^n + \left(\alpha_1 - \frac{\hat{U}\Delta t\beta_2}{2} + \frac{v\Delta t\gamma_1}{2} \right) \delta_{j+1}^n \end{aligned} \quad (4.2.6)$$

şeklinde elde edilen nümerik şemayı göz önüne alalım. Von-Neumann kararlılık analizi, nümerik yaklaşımdaki nümerik hatanın Fourier serilerine ayrıklaştırılmasına dayanır. δ_j^n , grid noktasında yaklaşık çözüm olmak üzere

$$\delta_j^n = \xi^n e^{i\psi x} = \xi^n e^{i\psi jh} \quad (4.2.7)$$

olarak kabul edilir. Burada ψ dalga sayısı, $j = 0, 1, 2, \dots, n$, h konum adım uzunluğu ve $i = \sqrt{-1}$ ise kompleks sayıdır. e^{ix} kompleks üstel ifadesi olup Euler's formülü hatırlanırsa

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x$$

dir. (4.2.7) ile verilen ifade (4.2.6)'da yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \left(\alpha_1 + \frac{\hat{U}\Delta t\beta_1}{2} - \frac{v\Delta t\gamma_1}{2} \right) \xi^{n+1} e^{i\psi(j-1)h} + \left(\alpha_2 - \frac{v\Delta t\gamma_2}{2} \right) \xi^{n+1} e^{i\psi jh} + \\ & \left(\alpha_1 + \frac{\hat{U}\Delta t\beta_2}{2} - \frac{v\Delta t\gamma_1}{2} \right) \xi^{n+1} e^{i\psi(j+1)h} \\ & = \left(\alpha_1 - \frac{\hat{U}\Delta t\beta_1}{2} + \frac{v\Delta t\gamma_1}{2} \right) \xi^n e^{i\psi(j-1)h} + \\ & \left(\alpha_2 + \frac{v\Delta t\gamma_2}{2} \right) \xi^n e^{i\psi jh} + \left(\alpha_1 - \frac{\hat{U}\Delta t\beta_2}{2} + \frac{v\Delta t\gamma_1}{2} \right) \xi^n e^{i\psi(j+1)h} \end{aligned}$$

elde edilir ve bu ifade, $\xi^n e^{i\psi jh}$ ortak parantezine alınırsa

$$\begin{aligned} & \xi^{n+1} e^{i\psi jh} \left[\left(\alpha_1 + \frac{\hat{U}\Delta t\beta_1}{2} - \frac{v\Delta t\gamma_1}{2} \right) e^{-i\psi h} + \left(\alpha_2 - \frac{v\Delta t\gamma_2}{2} \right) + \left(\alpha_1 + \frac{\hat{U}\Delta t\beta_2}{2} - \frac{v\Delta t\gamma_1}{2} \right) e^{i\psi h} \right] \\ & = \xi^n e^{i\psi jh} \left[\left(\alpha_1 - \frac{\hat{U}\Delta t\beta_1}{2} + \frac{v\Delta t\gamma_1}{2} \right) e^{-i\psi h} + \left(\alpha_2 + \frac{v\Delta t\gamma_2}{2} \right) + \left(\alpha_1 - \frac{\hat{U}\Delta t\beta_2}{2} + \frac{v\Delta t\gamma_1}{2} \right) e^{i\psi h} \right] \end{aligned}$$

olur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \xi & \left[\alpha_1(e^{-i\psi h} + e^{i\psi h}) - \frac{v\Delta t\gamma_1}{2}(e^{-i\psi h} + e^{i\psi h}) + \left(\alpha_2 - \frac{v\Delta t\gamma_2}{2}\right) + \frac{\widehat{U}\Delta t}{2}(\beta_1 e^{-i\psi h} + \beta_2 e^{i\psi h}) \right] \\ & = \left[\alpha_1(e^{-i\psi h} + e^{i\psi h}) + \frac{v\Delta t\gamma_1}{2}(e^{-i\psi h} + e^{i\psi h}) + \left(\alpha_2 + \frac{v\Delta t\gamma_2}{2}\right) - \frac{\widehat{U}\Delta t}{2}(\beta_1 e^{-i\psi h} + \beta_2 e^{i\psi h}) \right] \end{aligned}$$

bulunur. Şimdi de

$$\begin{aligned} \cos \theta & = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \\ \sin \theta & = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i} \end{aligned}$$

eşitlikleri yardımıyla

$$\begin{aligned} \xi & \left[2\alpha_1 \cos \psi h - v\Delta t\gamma_1 \cos \psi h + \left(\alpha_2 - \frac{v\Delta t\gamma_2}{2}\right) + \frac{\widehat{U}\Delta t}{2}(\beta_1 e^{-i\psi h} + \beta_2 e^{i\psi h}) \right] \\ & = \left[2\alpha_1 \cos \psi h + v\Delta t\gamma_1 \cos \psi h + \left(\alpha_2 + \frac{v\Delta t\gamma_2}{2}\right) - \frac{\widehat{U}\Delta t}{2}(\beta_1 e^{-i\psi h} + \beta_2 e^{i\psi h}) \right] \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

elde edilir. Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlardan

$$\begin{aligned} \beta_1 & = -\frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right) \\ \beta_2 & = \frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right) \end{aligned}$$

eşitlikleri yerine yazıldığında

$$\beta_1 e^{-i\psi h} + \beta_2 e^{i\psi h} = -\frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right) e^{-i\psi h} + \frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right) e^{i\psi h}$$

olur ve $\frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$ ortak parantezine alınarak

$$\frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right) (e^{i\psi h} - e^{-i\psi h})$$

elde edilir ve böylece

$$\frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right) (2i \sin \psi h) = \frac{3}{2} \csc\left(\frac{3h}{2}\right) (i \sin \psi h)$$

ifadesine ulaşılır. Daha sonra ise (4.2.8) ile verilen ifade

$$\begin{aligned} \lambda_1 & = 2\alpha_1 \cos \psi h + \alpha_2 \\ \lambda_2 & = \Delta t(v\gamma_1 \cos(\psi h) + \frac{v\gamma_2}{2}) \\ \lambda_3 & = \frac{\widehat{U}\Delta t}{2} \frac{3}{2} \csc\left(\frac{3h}{2}\right) \sin(\psi h) \end{aligned}$$

olmak üzere

$$\xi [\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3] = [\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3]$$

şeklinde yazılabilir. Nümerik şemanın kararlı olabilmesi için $|\xi| \leq 1$ olmalıdır. Bunun için ise

$$|\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3| - |\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3| \geq 0$$

olduğu gösterilmelidir. Verilen eşitlik için

$$((\lambda_1 + \lambda_2)^2 + \lambda_3^2) - ((\lambda_1 - \lambda_2)^2 + \lambda_3^2) = 4\lambda_1\lambda_2$$

yazıldıktan sonra

$$4\lambda_1\lambda_2 = 4(2\alpha_1 \cos \psi h + \alpha_2)(\Delta t(v\gamma_1 \cos(\psi h) + \frac{v\gamma_2}{2}))$$

olur. α_1 , α_2 , γ_1 ve γ_2 değerleri yerine yazılır ve $-1 \leq \cos(\psi h) \leq 1$ olduğundan

$$4\Delta t(2\alpha_1 \cos \psi h + \alpha_2)(v\gamma_1 \cos(\psi h) + \frac{v\gamma_2}{2}) \geq 0$$

elde edilir. Böylece

$$|\lambda_1 + \lambda_2 - i\lambda_3| - |\lambda_1 - \lambda_2 + i\lambda_3| \geq 0$$

eşitsizliği her zaman sağlanır. Buradan $|\xi| \leq 1$ sonucuna ulaşılır ve kararlı olabilmesi için gerekli şart sağlanmış olur.

4.2.2 Nümerik Sonuçlar

LİN-1 ile elde edilen nümerik sonuçlar, problemlerin tam çözümleri ve parametrelere bağlı olarak oluşan L_2 ve L_∞ hata normları aşağıdaki çizelgelerde verildi. Çizelge 4.1 ile verilen çizelgede, Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $v = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ değerleri için nümerik ve tam çözümleri ile hata normları sunuldu. Çizelge incelendiğinde N bölüntü sayısının artışıyla beraber nümerik sonuçların tam çözüme giderek yaklaştığı, bununla birlikte hata normlarının belirgin şekilde küçüldüğü açıkça görülmektedir. Çizelge 4.2'de ise yine Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $v = 1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ değerleri için nümerik ve tam çözümleri ile hata normları ele alındı. Çizelge incelendiğinde, Δt parametresinin küçülmesiyle beraber hata normları da giderek küçülmekte ve nümerik sonuçlar tam çözüme daha da yaklaşmaktadır.

Çizelge 4.3 ile verilen çizelgede, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.0001$, $N = 40$ iken $v = 1$ ve $v = 0.01$ için Problem 1'in LİN-1'den elde edilen sonuçları ile literatürde yer alan Ref. [55]'te verilen

sonuçlar ve tam zm karşılaştırıldı. Bu izelgeye göre LİN-1 ile elde edilen sonuçlarla Ref. [55]'teki sonuçların birbirlerine çok yakın olduğu görülmektedir. Ayrıca bu çizelgeden, bazı noktasal değerlerde iki çalışma arasında çok az farklar olsa da sonuçların birbiriyle uyumlu ve tam zme yakın olduğu anlaşılmaktadır.

Çizelge 4.4 ile verilen izelgede, Problem1'in, LİN-1 ile elde edilen noktasal değerleri ile literatürde yer alan Ref. [34, 37, 44, 46] 'daki noktasal değerlerin ve tam üzümünün karşılaştırılması sunuldu. Çizelgeye göre LİN-1 yöntemi ile literatürde bulunan sonuçların uyum içerisinde olduğu görülmektedir. Noktasal değerlerden tam zme en yakın sonuçların Ref. [46] ile verilen çalışmadan elde edildiği, bununla birlikte LİN-1 ile elde edilen sonuçların Ref. [44]'teki sonuçlarla iyi uyum içinde olduğu ve Ref. [34, 37]'de verilen sonuçlara göre ise tam zme daha yakın sonuçlar verdiği görülmektedir.

Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 80$ ve $\nu = 1, 0.1, 0.01$ için nümerik zm ile tam üzümünün ve mutlak hatanın grafikleri Şekil 4.1-Şekil 4.3 ile verildi. Grafikler incelendiğinde nümerik zmler ile tam üzümlerin grafikleri st üste gelmekte ve burada tek bir grafik gibi görülmektedirler. Bu da nümerik zm ile tam zmn birbiri ile çok uyumlu olduğunu göstermektedir. Hata grafikleri incelendiğinde ise $\nu = 1$ için, sınırlarda hatanın yok denilebilecek kadar az olduğu ancak genliğin en yüksek olduğu yerde hatanın da en yüksek noktaya ulaştığı görülmektedir. Ancak viskozitenin değeri kcldke mutlak hatanın en büyük değeri sağ sınır bölgesine kaymakta ve burada keskin düşüşler görülmektedir.

Çizelge 4.5'te ise Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ile $N = 10, 20, 40, 80$ değerleri için nümerik ve tam zmleri ile hata normları verildi. Çizelgeye bakıldığında düğüm noktası sayısı arttııka hata normlarındaki kclme belirgin bir biçimde görülmektedir. Yine Problem 2 için sunulan ve izelge 4.6 ile verilen çizelgede $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ sabitleri ve zaman adım uzunluğu olan Δt 'nin $0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ değerleri için nümerik ve tam zmleri ile hata normları incelenmektedir. Çizelgeye bakıldığında zaman adımının kclmesiyle beraber nümerik sonuçların tam zme yakınlaşması ve buna uygun olarak da hata normlarındaki azalma kolaylıkla gzlmektedir.

Problem 2'nin LİN-1 ile elde edilen bazı noktasal değerleri ile Ref. [32, 34, 39]'da verilen noktasal değerlerin ve tam üzümünün karşılaştırılması için verilen izelge 4.7 incelendiğinde LİN-1 kullanılarak elde edilen noktasal değerlerin Ref. [39]'dakilerle iyi uyumlu olduğu diğer çalışmalardaki sonuçlara göre ise tam zme daha yakın sonuçlar verdiği açıktır.

Şekil 4.4-Şekil 4.6’da, Problem 2’nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 80$ ve $\nu = 1, 0.1, 0.01$ için nümerik çözümleri ile tam çözümlerin ve mutlak hataların grafiği verildi. Grafikler incelendiğinde tam çözümler ile nümerik çözümlerin, birbirinden ayırt edilemeyecek kadar yakın değerlere sahip oldukları görülmektedir. $\nu = 1$ için elde edilen ve Şekil 4.4 ile verilen hata grafiğine bakıldığında verilen aralığın sınır bölgelerinde hatanın neredeyse yok olduğu buna karşın dalga genliğinin en yüksek olduğu yerde mutlak hatanın da en yüksek noktaya ulaştığı görülmektedir. Ancak viskozitenin değeri küçüldükçe, mutlak hata, bölge içerisinde dalgalanmalar gösterse de maksimum değerine sağ sınır bölgesinde ulaşmaktadır.

Çizelge 4.8 ile verilen çizelgede de $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 8, 16, 32, 64$ için Problem 3’ün nümerik ve tam çözümleri ile hata normları verilmiştir. Çizelgeden de kolaylıkla görüleceği üzere düğüm (mesh) noktalarının çoğalmasıyla beraber nümerik sonuçlar ile tam çözüm arasındaki fark azalmaktadır ve hata normlarında ciddi bir iyileşme meydana gelmektedir.

Çizelge 4.9 ve 4.10 ile verilen çizelgelerde ise $t = 2.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.0005$ ve bölüntü sayısı $N = 200$ iken Problem 3 için LIN-1 ile elde edilen nümerik sonuçlar ile Ref. [36, 37, 51]’deki nümerik sonuçlar ve tam çözümleri ile hata normlarının karşılaştırılması verildi. Çizelgelere bakıldığında, LIN-1 yöntemi ile elde edilen sonuçların literatürde daha önce yapılan çalışmaların sonuçlarıyla çok yakın olduğu görülmektedir. Bununla birlikte yine de karşılaştırılan makalelerdeki noktasal değerler ve verilen hata normları ile tam çözüm incelendiğinde LIN-1 ile elde edilen sonuçların diğer çalışmalara göre daha iyi olduğu görülmektedir.

Problem 3’ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 64$ ve $\nu = 0.01, 0.005, 0.001$ değerleri için nümerik çözümleri ile tam çözümlerinin ve mutlak hatalarının grafikleri Şekil 4.7-Şekil 4.9 ile sunuldu. Şekil 4.7 ve Şekil 4.8 ile verilen grafikler incelendiğinde nümerik çözümler ile tam çözümlerin grafikleri, iki grafik yerine tek bir grafik gibi gözükmektedir. Bu da nümerik çözüm ile tam çözümün birbirine çok yakın ve uyumlu oldukları anlamına gelmektedir. Ancak $\nu = 0.001$ için verilen ve Şekil 4.9’da gösterilen grafikte, $x = 0.5$ civarında, tam çözüm eğrisindeki kırılma noktasında nümerik çözümün farklılaştığı görülmektedir. Verilen üç grafikte de mutlak hatanın en yüksek değeri, tam çözümün genliğinin en yüksek olduğu bölgelerde meydana gelmiştir.

Çizelge 4.11’de, Problem 4’ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 40, 80, 120, 160$ değerleri için nümerik ve tam çözümleri ile hata normları verilmiştir ve burada da bölüntü sayısının artışıyla beraber nümerik sonuçlarla tam çözüm arasındaki farkın azalışı net olarak görülebilmektedir.

Çizelge 4.12 ile verilen çizelgede ise Problem 4’ün $t = 0.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.01$ ve $N = 36$ değerleri için LİN-1 ile literatürde yer alan ve Ref. [37,45,49,55]’te verilen sonuçlar ile hata normlarının ve tam çözümünün karşılaştırılması sunuldu. Bu çizelge incelendiğinde LİN-1 ile elde edilen hata normlarının, Ref. [45]’te verilen QBCA2 yöntemi dışındaki diğer yöntemlerden daha küçük olduğu anlaşılmaktadır.

Şekil 4.10-Şekil 4.12’de, Problem 4’ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 160$ ve $\nu = 0.01, 0.005, 0.001$ için nümerik çözümü ile tam çözümünün ve mutlak hatasının grafiği yer almaktadır. İlk iki grafiğe bakılarak nümerik çözüm ile tam çözümün birbiri ile uyum içinde hareket ettikleri söylenebilir. Bununla birlikte Şekil 4.12 ile verilen grafikte, $x = 0.2$ civarında tam çözüm eğrisinin kırılma noktasına sahip olduğu ve bu kırılma yerinde nümerik çözümün tam çözümden bir miktar farklılaştığı görülmektedir. Grafiklerde genliğin en yüksek olduğu sol sınır bölgesinde mutlak hata da en yüksek değerine ulaşmıştır. Bununla birlikte bu bölgeden sonra, mutlak hatanın hızla azaldığı hatta yok denilebilecek bir noktaya geldiği gözükmektedir.

Çizelge 4.1 : Problem 1’in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için LİN-1 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.10908768	0.10942554	0.10950929	0.10953018	0.10953815
0.2	0.20887654	0.20956320	0.20973357	0.20977608	0.20979215
0.3	0.29050309	0.29154775	0.29180738	0.29187219	0.29189635
0.4	0.34607360	0.34746051	0.34780594	0.34789222	0.34792391
0.5	0.36936149	0.37102177	0.37143633	0.37153994	0.37157748
0.6	0.35665582	0.35844536	0.35889341	0.35900546	0.35904558
0.7	0.30763557	0.30933409	0.30976044	0.30986714	0.30990500
0.8	0.22602149	0.22736499	0.22770295	0.22778756	0.22781741
0.9	0.11969008	0.12043539	0.12062314	0.12067017	0.12068669
1	0	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	1.62470084	0.40794665	0.10354297	0.02743295	
$L_\infty \times 10^3$	2.38975662	0.60021910	0.15223656	0.04013340	

Çizelge 4.2 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ için LİN-1 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

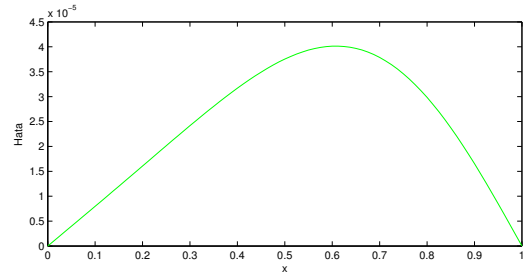
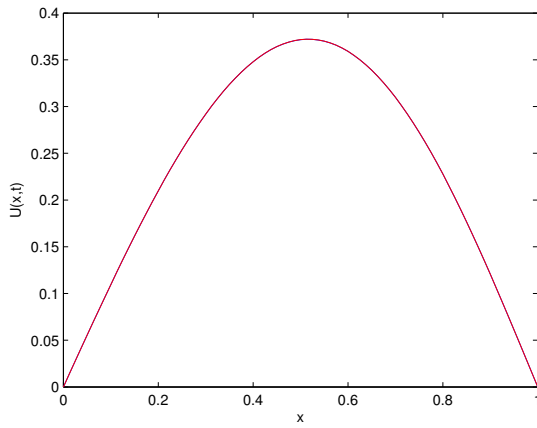
x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0001$	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.10940916	0.10948501	0.10950929	0.10951029	0.10953815
0.2	0.20954541	0.20968795	0.20973357	0.20973545	0.20979215
0.3	0.29155334	0.29174579	0.29180738	0.29180992	0.29189635
0.4	0.34751466	0.34773535	0.34780594	0.34780886	0.34792391
0.5	0.37113869	0.37136423	0.37143633	0.37143931	0.37157748
0.6	0.35861854	0.35882685	0.35889341	0.35889615	0.35904558
0.7	0.30953291	0.30970538	0.30976044	0.30976271	0.30990500
0.8	0.22754123	0.22766383	0.22770295	0.22770456	0.22781741
0.9	0.12053933	0.12060288	0.12062314	0.12062398	0.12068669
1	0	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.31208820	0.15351772	0.10354297	0.10150485	
$L_\infty \times 10^3$	0.43984924	0.21948027	0.15223656	0.14959020	

Çizelge 4.3 : Problem 1'in $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.0001$, $N = 40$ iken $\nu = 1$ ve $\nu = 0.01$ için LİN-1 ile [55]'in nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması.

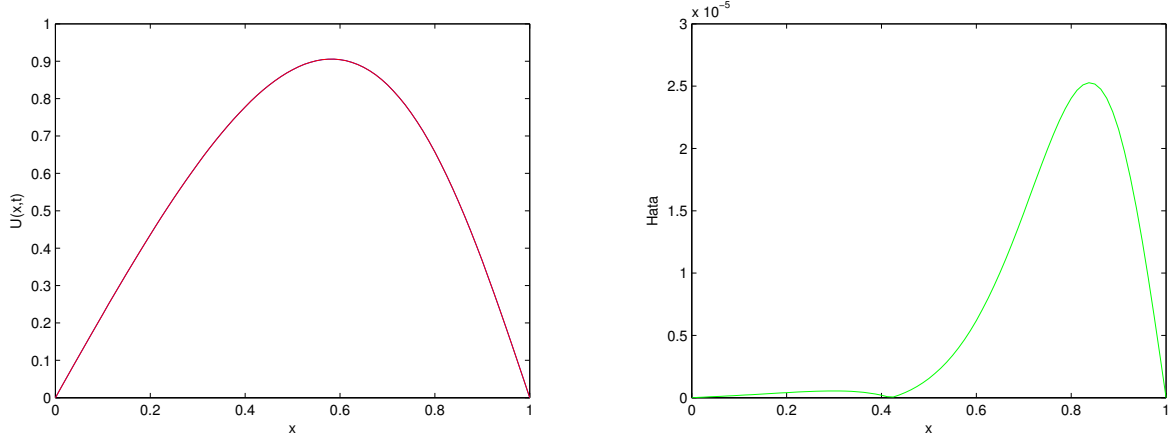
x	t	$\nu = 1$			$\nu = 0.01$		
		LİN-1	[55]	Tam Çözüm	LİN-1	[55]	Tam Çözüm
0.25	0.4	0.01355	0.01355	0.01357	0.34192	0.34191	0.34191
	0.6	0.00189	0.00188	0.00189	0.26899	0.26896	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.00026	0.22148	0.22148	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.00004	0.18819	0.18819	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.07511	0.07511	0.07511
0.5	0.4	0.01921	0.01920	0.01924	0.66072	0.66071	0.66071
	0.6	0.00267	0.00266	0.00267	0.52948	0.52942	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.00037	0.43914	0.43914	0.43914
	1.0	0.00004	0.00005	0.00005	0.37442	0.37442	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.15018	0.15017	0.15018
0.75	0.4	0.01361	0.01361	0.01363	0.91029	0.91029	0.91026
	0.6	0.00189	0.00188	0.00189	0.76732	0.76725	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.00026	0.64740	0.64740	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.00004	0.55605	0.55605	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.22490	0.22489	0.22481

Çizelge 4.4 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu = 1$ ve $N = 80$ için LIN-1 ile [34], [37], [44] ve [46]'nın nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması.

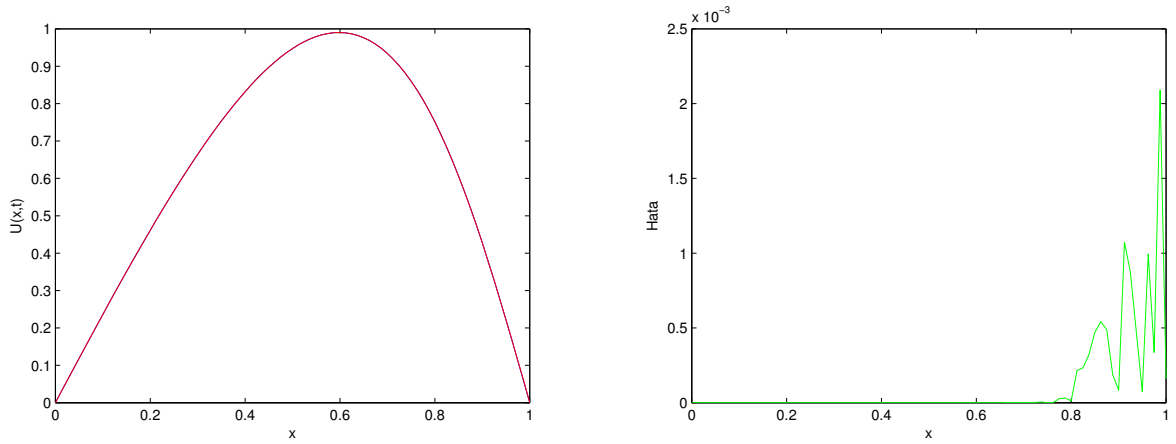
x	Nümerik Çözümler					Tam Çözüm
	LIN-1	[34]	[37]	[44]	[46]	
0	0.00000000	0.00000	0.00000	0.00000	0.000000000000	0.00000000
0.1	0.10953119	0.10978	0.10952	0.10952	0.10953815119	0.10953815
0.2	0.20977798	0.21019	0.20975	0.20976	0.20979214867	0.20979215
0.3	0.29187476	0.29238	0.29184	0.29186	0.29189635032	0.29189635
0.4	0.34789516	0.34845	0.34785	0.34788	0.34792391150	0.34792391
0.5	0.37154294	0.37212	0.37149	0.37153	0.37157747490	0.37157748
0.6	0.35900823	0.35960	0.35896	0.35900	0.35904557846	0.35904558
0.7	0.30986943	0.31044	0.30983	0.30986	0.30990499905	0.30990500
0.8	0.22778919	0.22827	0.22776	0.22779	0.22781740532	0.22781741
0.9	0.12067101	0.12097	0.12065	0.12067	0.12068669034	0.12068669
1	0.00000000	0.00000	0.00000	0.00000	0.000000000000	0.00000000
$L_2 \times 10^3$	0.02537211	-	-	-	-	
$L_\infty \times 10^3$	0.03741176	-	-	-	-	



Şekil 4.1 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 80$ ve $\nu = 1$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.



Şekil 4.2 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 80$ ve $\nu = 0.1$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.



Şekil 4.3 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 80$ ve $\nu = 0.01$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.

Çizelge 4.5 : Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için LİN-1 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

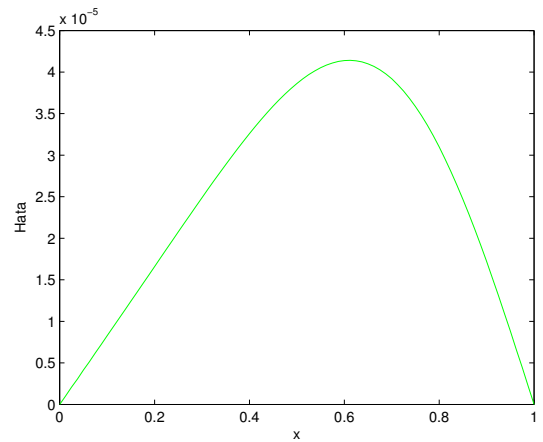
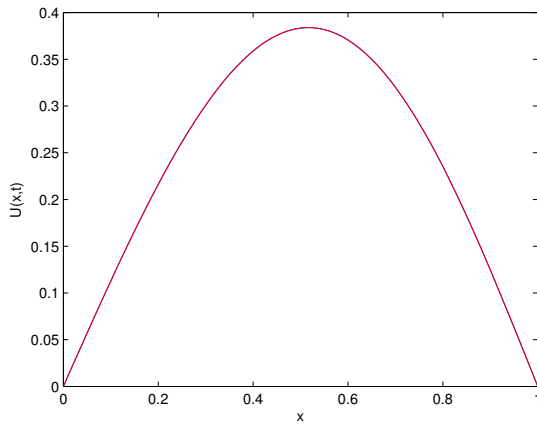
x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.11242409	0.11277588	0.11286243	0.11288399	0.11289225
0.2	0.21530194	0.21601592	0.21619176	0.21623555	0.21625214
0.3	0.29952188	0.30060670	0.30087430	0.30094098	0.30096586
0.4	0.35694618	0.35838576	0.35874173	0.35883047	0.35886306
0.5	0.38112480	0.38284935	0.38327708	0.38338380	0.38342242
0.6	0.36817542	0.37003737	0.37050074	0.37061645	0.37065784
0.7	0.31770268	0.31947376	0.31991598	0.32002650	0.32006569
0.8	0.23349699	0.23490077	0.23525225	0.23534016	0.23537115
0.9	0.12367638	0.12445626	0.12465189	0.12470084	0.12471805
1	0	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	1.68832152	0.42186725	0.10694288	0.02832185	
$L_\infty \times 10^3$	2.48241267	0.62046778	0.15727983	0.04141275	

Çizelge 4.6 : Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ için LİN-1 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

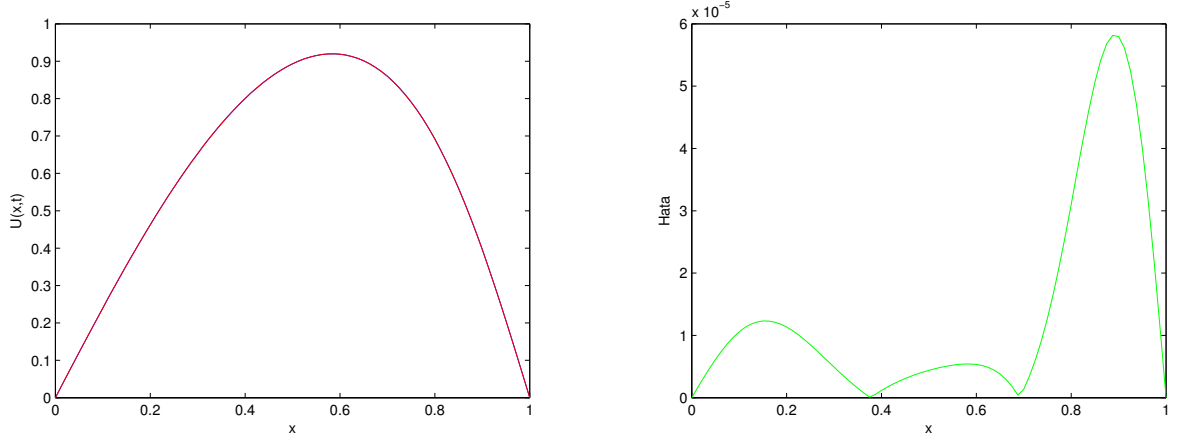
x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0001$	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.11266704	0.11284419	0.11286243	0.11286350	0.11289225
0.2	0.21600953	0.21614405	0.21619176	0.21619374	0.21625214
0.3	0.30060499	0.30081005	0.30087430	0.30087695	0.30096586
0.4	0.35844244	0.35866897	0.35874173	0.35874473	0.35886306
0.5	0.38297202	0.38320333	0.38327708	0.38328012	0.38342242
0.6	0.37022067	0.37043274	0.37050074	0.37050355	0.37065784
0.7	0.31967811	0.31985936	0.31991598	0.31991832	0.32006569
0.8	0.23509988	0.23521208	0.23525225	0.23525393	0.23537115
0.9	0.12447721	0.12463819	0.12465189	0.12465277	0.12471805
1	0	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.33924477	0.15922180	0.10694288	0.10484335	
$L_\infty \times 10^3$	0.45120217	0.22571204	0.15727983	0.15457408	

Çizelge 4.7 : Problem 2' nin $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.00001$, $v = 0.1$ ve $N = 80$ için LİN-1 ile [32], [34] ve [39]'un nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması.

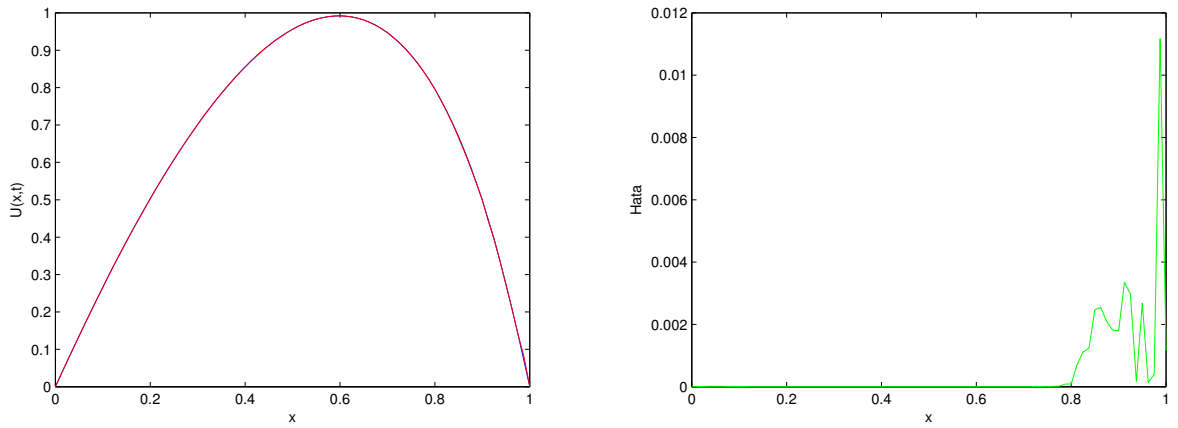
x	t	Nümerik Çözümler				Tam Çözüm
		LİN-1	[32]	[34]	[39]	
$(\Delta t = 0.0001)$						
0.25	0.4	0.31753	0.32679	0.32091	0.31760	0.31752
	0.6	0.24615	0.25117	0.24910	0.24618	0.24614
	0.8	0.19957	0.20270	0.20211	0.19959	0.19956
	1.0	0.16561	0.16780	0.16782	0.16562	0.16560
	3.0	0.02776	0.02804	0.02828	0.02776	0.02775
0.5	0.4	0.58456	0.59661	0.58788	0.58460	0.58454
	0.6	0.45801	0.46581	0.46174	0.45803	0.45798
	0.8	0.36742	0.37293	0.37111	0.36744	0.36740
	1.0	0.29836	0.30253	0.30183	0.29838	0.29834
	3.0	0.04106	0.04155	0.04185	0.04107	0.04106
0.75	0.4	0.64557	0.64680	0.65054	0.64558	0.64562
	0.6	0.50263	0.50852	0.50825	0.50269	0.50268
	0.8	0.38528	0.39117	0.39068	0.38536	0.38534
	1.0	0.29581	0.30066	0.30057	0.29589	0.29586
	3.0	0.03043	0.03081	0.03106	0.03044	0.03044



Şekil 4.4 : Problem 2' nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 80$ ve $v = 1$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.



Şekil 4.5 : Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 80$ ve $\nu = 0.1$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.



Şekil 4.6 : Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 80$ ve $\nu = 0.01$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.

Çizelge 4.8 : Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 8, 16, 32, 64$ için LİN-1 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

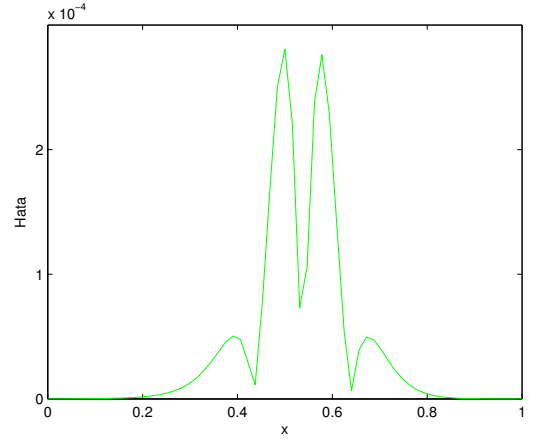
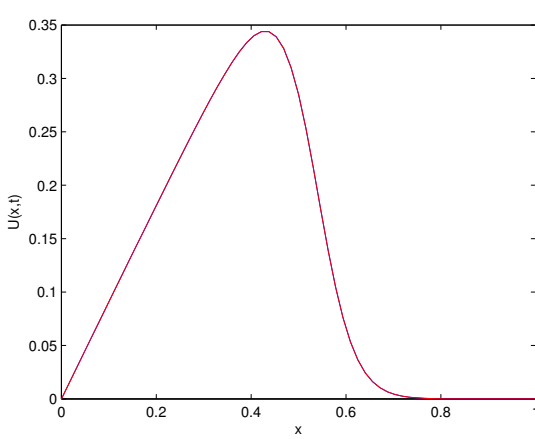
x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	N = 8	N = 16	N = 32	N = 64	
0	0	0	0	0	0
1	0.40925432	0.40714790	0.40661879	0.40648981	0.40644714
2	0.52860356	0.52777217	0.52771553	0.52770300	0.52769887
3	0.31728431	0.31678705	0.31652424	0.31645772	0.31643558
4	0.09319195	0.09425035	0.09459617	0.09468235	0.09471099
5	0.01330718	0.01515829	0.01554100	0.01563446	0.01566545
6	0.00110539	0.00142056	0.00151577	0.00153991	0.00154797
7	0.00005256	0.00007912	0.00009014	0.00009309	0.00009412
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00000356
$L_2 \times 10^3$	4.18157274	1.02112067	0.25116818	0.06253367	
$L_\infty \times 10^3$	2.80718043	0.70075809	0.17164395	0.04266499	

Çizelge 4.9 : Problem 3'ün $t = 2.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.005$ ve $N = 200$ için LİN-1 ile QCBM [36], CBCM [36]'nın nümerik ve tam çözümleri ile hata normlarının karşılaştırılması.

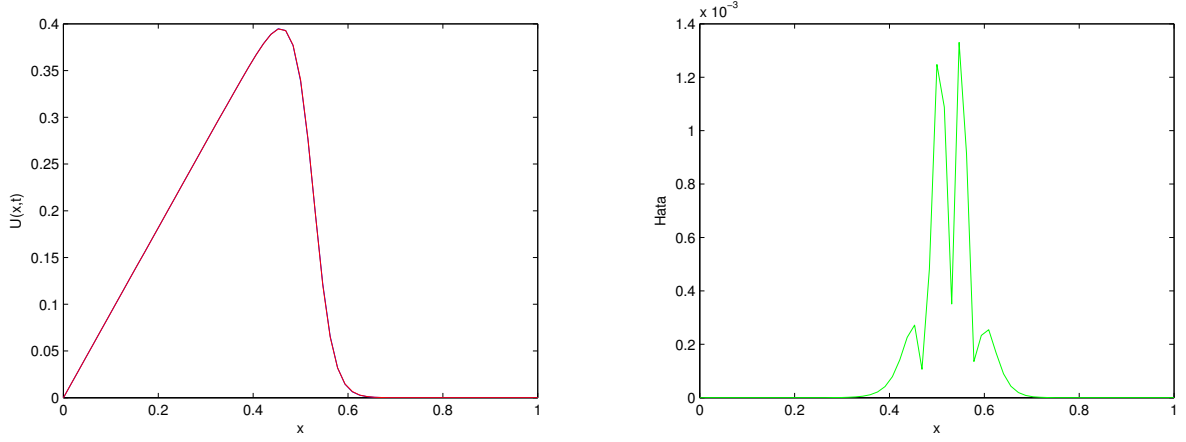
x	Nümerik Çözümler			Tam Çözüm
	LİN-1	QCBM [36]	CBCM [36]	
0	0.00000000			0.00000000
0.1	0.03999947	0.04000	0.04000	0.03999971
0.2	0.07999848	0.08000	0.08000	0.07999895
0.3	0.11999504	0.12000	0.12000	0.11999572
0.4	0.15997619	0.15998	0.15998	0.15997687
0.5	0.19982593	0.19982	0.19983	0.19982525
0.6	0.23813056	0.23811	0.23812	0.23812066
0.7	0.25311482	0.25302	0.25275	0.25310477
0.8	0.10211942	0.10228	0.10269	0.10209570
0.9	0.00552602	0.00553	0.00568	0.00554249
1	0.00000000			0.00013987
$L_2 \times 10^3$	0.02169465	0.05103	2.11187	
$L_\infty \times 10^3$	0.13987158	0.18902	25.1517	

Çizelge 4.10 : Problem 3'ün $t = 2.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.0005$ ve $N = 200$ için LİN-1 ile [37] ve [51]'in nümerik ve tam çözümleri ile hata normlarının karşılaştırılması.

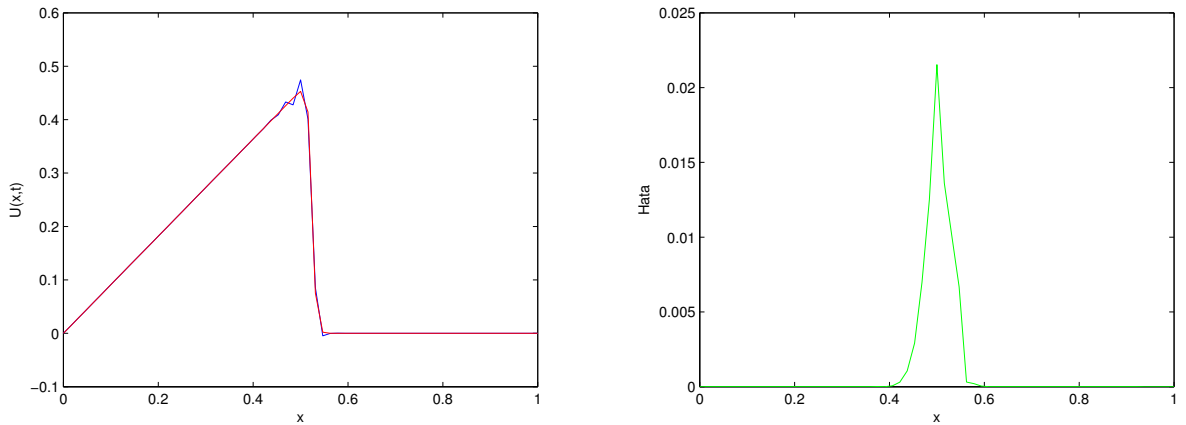
x	Nümerik Çözümler			Tam
	LİN-1	[37]	[51]	Çözüm
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.1	0.04000	0.04000	0.04003	0.04000
0.2	0.08000	0.08000	0.08000	0.08000
0.3	0.12000	0.12001	0.12000	0.12000
0.4	0.16000	0.16001	0.16000	0.16000
0.5	0.20000	0.20001	0.20000	0.20000
0.6	0.24000	0.24001	0.24000	0.24000
0.7	0.28000	0.28001	0.28000	0.28000
0.8	0.00834	0.00811	0.00994	0.00977
0.9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$L_2 \times 10^3$	0.40924	-	-	
$L_\infty \times 10^3$	4.28902	-	-	



Şekil 4.7 : Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 64$ ve $\nu = 0.01$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.



Şekil 4.8 : Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 64$ ve $\nu = 0.005$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.



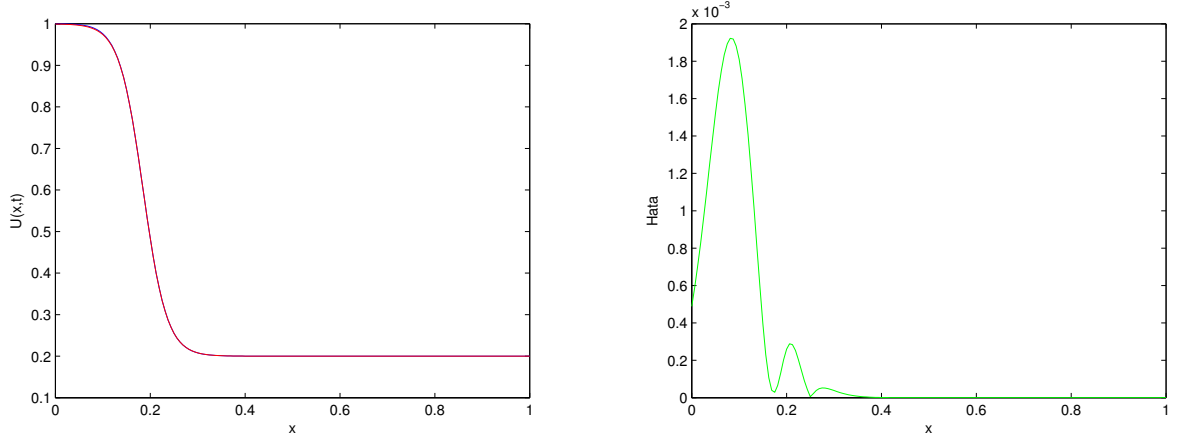
Şekil 4.9 : Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 64$ ve $\nu = 0.001$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.

Çizelge 4.11 : Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 40, 80, 120, 160$ için LİN-1 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

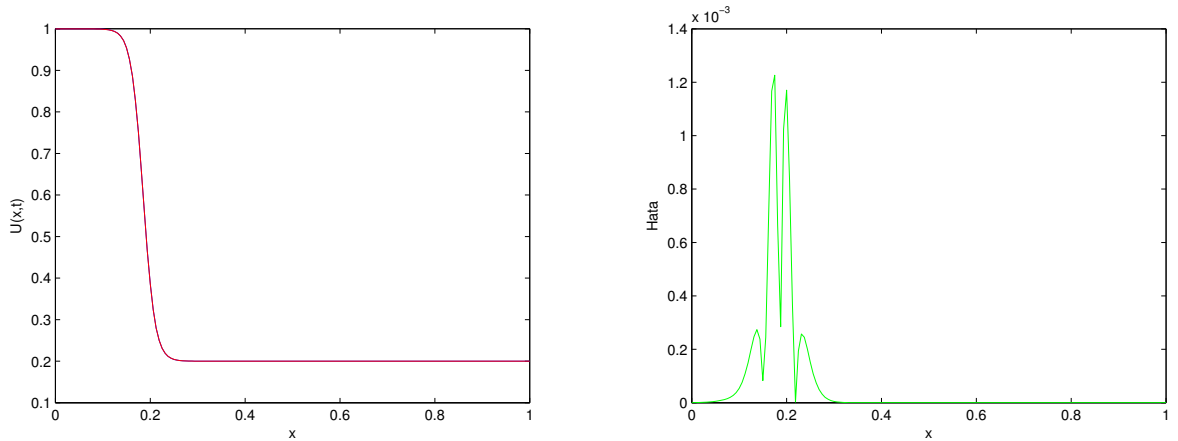
x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	N = 40	N = 80	N = 120	N = 160	
0	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	0.99951130
0.1	0.97693301	0.97617184	0.97602633	0.97597336	0.97416363
0.2	0.48638738	0.48438915	0.48391082	0.48373487	0.48347496
0.3	0.20728185	0.20780375	0.20789248	0.20792306	0.20796144
0.4	0.20012908	0.20014250	0.20014514	0.20014607	0.20014726
0.5	0.20000236	0.20000261	0.20000266	0.20000268	0.20000270
0.6	0.20000004	0.20000005	0.20000005	0.20000005	0.20000005
0.7	0.19999999	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
0.8	0.19999999	0.20000020	0.20000000	0.20000000	0.20000000
0.9	0.19999999	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
1	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
$L_2 \times 10^3$	1.16176188	0.61498010	0.55999319	0.54830453	
$L_\infty \times 10^3$	3.34370822	2.10411199	1.97111503	1.92230207	

Çizelge 4.12 : Problem 4'ün $t = 0.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.01$ ve $N = 36$ için LİN-1 ile [37], [45] (QBAC1), [45] (QBAC2), [49] ve [55]'in nümerik çözümleri ile hata normlarının ve tam çözümünün karşılaştırılması.

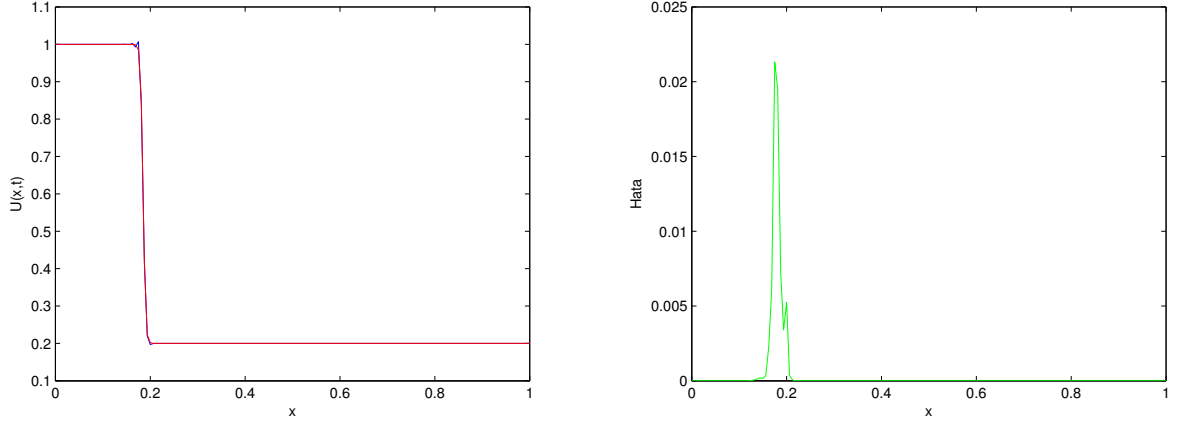
x	Nümerik Çözüm						Tam Çözüm
	Uygulanan Yöntemler						
	LİN-1	[37] ($\Delta t = 0.025$)	[45] (QBAC1)	[45] (QBAC2)	[49]	[55]	
0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.056	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.111	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.167	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.222	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.278	0.999	0.999	0.998	0.999	0.998	0.999	0.998
0.333	0.982	0.986	0.980	0.982	0.982	0.983	0.980
0.389	0.844	0.850	0.842	0.850	0.844	0.845	0.847
0.444	0.455	0.448	0.458	0.452	0.458	0.456	0.452
0.500	0.237	0.236	0.240	0.238	0.238	0.237	0.238
0.556	0.203	0.204	0.205	0.204	0.203	0.203	0.204
0.611	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.667	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.722	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
1.000	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
$L_2 \times 10^3$	1.31542	-	1.72434	0.59530	1.45E-03	-	
$L_\infty \times 10^3$	3.65064	-	5.78454	2.76077	5.97E-03	-	



Şekil 4.10 : Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 160$ ve $\nu = 0.01$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.



Şekil 4.11 : Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 160$ ve $\nu = 0.005$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.



Şekil 4.12 : Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $N = 160$ ve $\nu = 0.001$ için nümerik çözüm ile tam çözüm ve mutlak hata grafiği.

4.3 LİNEERLEŞTİRME-2 (LİN-2)

Dag vd. Ref. [55]'teki çalışmalarında, (4.0.1) ile verilen Burgers denkleminin, denlemdaki UU_x lineer olmayan terimi yerine Rubin-Graves tipi yaklaşım kullanarak kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemiyle çözüm şemasını elde etmişlerdir. Tezin bu kısmında, aynı şema aşağıdaki gibi benzer şekilde elde edildikten sonra dört model problem için uygulandı.

(4.0.1) ile verilen Burgers denkleminde U_t terimi yerine

$$U_t = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}$$

ileri fark yaklaşımı, U_x ve U_{xx} terimleri yerine de

$$U_x = \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2}$$

$$U_{xx} = \frac{U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n}{2}$$

Crack-Nicolson yaklaşımları yazılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{(UU_x)^{n+1} + (UU_x)^n}{2} - \nu \frac{U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n}{2} = 0$$

elde edilir. Bu ifade de $(UU_x)^{n+1}$ terimi yerine

$$(UU_x)^{n+1} = U^{n+1}U_x^n + U^nU_x^{n+1} - U^nU_x^n$$

Rubin-Graves [57] tipi yaklaşım yazıldığında

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{U^{n+1}U_x^n + U^nU_x^{n+1} - U^nU_x^n + U^nU_x^n}{2} - \nu \frac{U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n}{2} = 0$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + \frac{U^{n+1}U_x^n + U^nU_x^{n+1}}{2} - v \frac{U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n}{2} = 0$$

elde edilir. Bu denklem

$$U^{n+1} - U^n + \frac{\Delta t}{2}(L_2U^{n+1} + L_1U_x^{n+1}) - \frac{v\Delta t}{2}(U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n) = 0$$

biçiminde yazıldıktan sonra aynı zaman adımına ait ifadeler bir arada olacak şekilde düzenleme yapılırsa

$$U^{n+1} + \frac{\Delta t}{2}(L_2U^{n+1} + L_1U_x^{n+1}) - \frac{v\Delta t}{2}U_{xx}^{n+1} = U^n + \frac{v\Delta t}{2}U_{xx}^n$$

şeklini alır. Türevler yerine (2.2.4) ile verilen yaklaşım ve bu yaklaşımda kübik trigonometrik B-spline fonksiyonların kullanılmasıyla elde edilen ve (2.2.5) ile verilen yaklaşımlar yazılırsa

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1} + \\ & \frac{\Delta t}{2} [L_2(\alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1}) + L_1(\beta_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_{i+1}^{n+1})] - \\ & \frac{v\Delta t}{2}(\gamma_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \gamma_2 \delta_i^{n+1} + \gamma_1 \delta_{i+1}^{n+1}) = \alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n + \\ & \frac{v\Delta t}{2}(\gamma_1 \delta_{i-1}^n + \gamma_2 \delta_i^n + \gamma_1 \delta_{i+1}^n) \end{aligned}$$

olur ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} & \left[\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 L_2 + \beta_1 L_1 - v\gamma_1) \right] \delta_{i-1}^{n+1} + \left[\alpha_2 + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_2 L_2 - v\gamma_2) \right] \delta_i^{n+1} + \\ & \left[\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 L_2 + \beta_2 L_1 - v\gamma_1) \right] \delta_{i+1}^{n+1} = \\ & \left(\alpha_1 + \frac{v\Delta t \gamma_1}{2} \right) \delta_{i-1}^n + \left(\alpha_2 + \frac{v\Delta t \gamma_2}{2} \right) \delta_i^n + \left(\alpha_1 + \frac{v\Delta t \gamma_1}{2} \right) \delta_{i+1}^n \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$L_1 = U_i = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1} \quad (4.3.1)$$

$$L_2 = U_i' = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1}$$

$$L_3 = U_i'' = \gamma_1 \delta_{i-1} + \gamma_2 \delta_i + \gamma_1 \delta_{i+1}$$

dir. Elde edilen bu ifade matris sistemiyle

$$\begin{aligned}
 e_1 &= \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 L_2 + \beta_1 L_1 - v \gamma_1) \\
 e_2 &= \alpha_2 + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_2 L_2 - v \gamma_2) \\
 e_3 &= \alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 L_2 + \beta_2 L_1 - v \gamma_1) \\
 f_1 &= \alpha_1 + \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \\
 f_2 &= \alpha_2 + \frac{v \Delta t \gamma_2}{2}
 \end{aligned} \tag{4.3.2}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} e_1 & e_2 & e_3 & & & \\ & e_1 & e_2 & e_3 & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & e_1 & e_2 & e_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^{n+1} \\ \delta_0^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 & f_2 & f_1 & & & \\ & f_1 & f_2 & f_1 & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & f_1 & f_2 & f_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^n \\ \delta_0^n \\ \vdots \\ \delta_{N+1}^n \end{bmatrix}$$

şeklinde gösterilebilir. Böylece $(N + 3)$ bilinmeyenli $(N + 1)$ denklemden oluşan bir sistem bulunur. Şimdi de bu sistemde δ_{-1} ve δ_{N+1} bilinmeyenleri diğerleri cinsinden yazılacaktır. Bu amaçla problemle birlikte verilen sınır şartları kullanılacaktır.

$x = x_i$ noktasında

$$U(x_i, t) = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

yaklaşımı yardımıyla δ_{-1} bilinmeyeni, $i = 0$ için $x = x_0$ noktasında $U(x_0, t) = U(a, t)$ olduğundan

$$\delta_{-1} = \frac{U(a, t) - \alpha_1 \delta_1 - \alpha_2 \delta_0}{\alpha_1}$$

ve δ_{N+1} bilinmeyeni ise $i = N$ için $x = x_N$ noktasında $U(x_N, t) = U(b, t)$ olduğundan

$$\delta_{N+1} = \frac{U(b, t) - \alpha_1 \delta_{N-1} - \alpha_2 \delta_N}{\alpha_1}$$

şeklinde diğerleri cinsinden yazılabilir. Daha sonra δ_{-1} ve δ_{N+1} eşitlikleri yerine yazılırsa $i = 0$ için

$$\begin{aligned}
 & \left[\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 L_2 + \beta_1 L_1 - v \gamma_1) \right] \left(\frac{U^{n+1}(a, t) - \alpha_1 \delta_1^{n+1} - \alpha_2 \delta_0^{n+1}}{\alpha_1} \right) + \\
 & \left[\alpha_2 + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_2 L_2 - v \gamma_2) \right] \delta_0^{n+1} + \left[\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 L_2 + \beta_2 L_1 - v \gamma_1) \right] \delta_1^{n+1} = \\
 & \left(\alpha_1 + \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right) \left(\frac{U^n(a, t) - \alpha_1 \delta_1^n - \alpha_2 \delta_0^n}{\alpha_1} \right) + \left(\alpha_2 + \frac{v \Delta t \gamma_2}{2} \right) \delta_0^n + \\
 & \left(\alpha_1 + \frac{v \Delta t \gamma_1}{2} \right) \delta_1^n
 \end{aligned}$$

bulunur ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\Delta t}{2\alpha_1} (v\alpha_2\gamma_1 - \beta_1 L_1 - v\alpha_1\gamma_2) \right] \delta_0^{n+1} + \left[\frac{\Delta t L_1}{2} (\beta_2 - \beta_1) \right] \delta_1^{n+1} \\
& = \left[\frac{\Delta t v}{2} (\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1) \right] \delta_0^n + 0 \cdot \delta_1^n - \\
& \frac{U^{n+1}(a,t)}{\alpha_1} \left[\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 L_2 + \beta_1 L_1 - v\gamma_1) \right] + \\
& \frac{U^n(a,t)}{\alpha_1} \left[\left(\alpha_1 + \frac{v\Delta t \gamma_1}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

elde edilir. Aynı şekilde $i = N$ için

$$\begin{aligned}
& \left[\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 L_2 + \beta_1 L_1 - v\gamma_1) \right] \delta_{N-1}^{n+1} + \left[\alpha_2 + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_2 L_2 - v\gamma_2) \right] \delta_N^{n+1} + \\
& \left[\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 L_2 + \beta_2 L_1 - v\gamma_1) \right] \left(\frac{U^{n+1}(b,t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^{n+1} - \alpha_2 \delta_N^{n+1}}{\alpha_1} \right) = \\
& \left(\alpha_1 + \frac{v\Delta t \gamma_1}{2} \right) \delta_{N-1}^n + \left(\alpha_2 + \frac{v\Delta t \gamma_2}{2} \right) \delta_N^n + \\
& \left(\alpha_1 + \frac{v\Delta t \gamma_1}{2} \right) \left(\frac{U^n(b,t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^n - \alpha_2 \delta_N^n}{\alpha_1} \right)
\end{aligned}$$

olarak yazdıktan sonra

$$\begin{aligned}
& \left[\frac{\Delta t L_1}{2} (\beta_1 - \beta_2) \right] \delta_{N-1}^{n+1} + \left[\frac{\Delta t}{2\alpha_1} (v\alpha_2\gamma_1 + \alpha_2\beta_2 L_1 - v\alpha_1\gamma_2) \right] \delta_N^{n+1} \\
& = 0 \cdot \delta_{N-1}^n + \left[\frac{v\Delta t}{2\alpha_1} (\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1) \right] \delta_N^n - \\
& \frac{U^{n+1}(b,t)}{\alpha_1} \left[\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 L_2 + \beta_2 L_1 - v\gamma_1) \right] + \\
& \frac{U^n(b,t)}{\alpha_1} \left(\alpha_1 + \frac{v\Delta t \gamma_1}{2} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Sistemin son hali matris formunda (4.3.2) ile verilen dönüşümlere ek olarak

$$\begin{aligned}
c_1 &= \frac{\Delta t}{2\alpha_1} (v\alpha_2\gamma_1 - \beta_1 L_1 - v\alpha_1\gamma_2) \\
d_1 &= \frac{\Delta t v}{2} (\alpha_1\gamma_2 - \alpha_2\gamma_1) \\
l_1 &= -\frac{U^{n+1}(a,t)}{\alpha_1} \left[\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 L_2 + \beta_1 L_1 - v\gamma_1) \right] + \\
& \frac{U^n(a,t)}{\alpha_1} \left[\left(\alpha_1 + \frac{v\Delta t \gamma_1}{2} \right) \right] \\
l_2 &= -\frac{U^{n+1}(b,t)}{\alpha_1} \left[\alpha_1 + \frac{\Delta t}{2} (\alpha_1 L_2 + \beta_2 L_1 - v\gamma_1) \right] + \\
& \frac{U^n(b,t)}{\alpha_1} \left(\alpha_1 + \frac{v\Delta t \gamma_1}{2} \right)
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} c_1 & 0 & & & \\ e_1 & e_2 & e_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & c_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0^{n+1} \\ \delta_1^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d_1 & 0 & & & \\ f_1 & f_2 & f_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 0 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0^n \\ \delta_1^n \\ \vdots \\ \delta_N^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} l_1 \\ \vdots \\ l_2 \end{bmatrix} \quad (4.3.3)$$

formunda yazılabilir. Böylece $(N + 1) \times (N + 1)$ tipinde bir sistem elde edilir. Bu sistemin iteratif olarak çözülmesi için ise öncelikle δ^0 başlangıç bilinmeyenlerinin bulunması gerekir. δ^0 bilinmeyenlerinin bulunması ise (4.2.5) ile verilen ve LİN-1 için ayrıntılı olarak anlatılan sistemin çözülmesinde olduğu gibi kolayca gerçekleştirilebilir. Elde edilen δ^0 parametreleri (4.3.3) ile verilen sistemde kullanılarak istenilen t zamanındaki sonuçlara ulaşılır.

Burada da U_N nümerik çözümlerini iyileştirmek adına (4.2.4) denklem sisteminde lineer olmayan terimler için

$$\delta_i^* = \delta_i^n + \frac{1}{2}(\delta_i^{n+1} - \delta_i^n)$$

şeklinde tanımlanan iç iterasyon formülü birkaç defa kullanıldı.

4.3.1 Nümerik Sonuçlar

LİN-2 ile elde edilen nümerik sonuçlar, tam çözümler ve problemlerin literatürdeki çalışmalarıyla karşılaştırılmalarını içeren çizelgeler aşağıda verildi. Çizelge 4.13'te, $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ değerleri için Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri ile hata normları yer almaktadır. Çizelge incelendiğinde N bölüntü sayısı arttıkça hata normlarının küçüldüğü açık bir şekilde görülmektedir. Çizelge 4.14'te de $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ için yine Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri ile hata normları sunuldu. Çizelgeden Δt zaman adımı küçüldükçe nümerik sonuçların tam çözüme daha yakın sonuçlar verdiği görülebilmektedir.

Çizelge 4.15 ile verilen çizelgede, LİN-2 ile literatürdeki Ref. [55] ile verilen çalışma karşılaştırıldı. Verilen çalışma ile LİN-2 aynı lineerleştirme yöntemi ve kübik trigonometrik B-spline kollokasyon kullanıldığı için verilen çalışmalar birbiriyle çok uyumlu olduğu görülmektedir. Bununla birlikte, aynı zaman adımına ait noktasal değerler incelendiğinde, bir kaç noktada çok küçük farklar ortaya çıkmaktadır. Bu farklar ise kullanılan programlar, bilgisayarların kapasiteleri vb. durumlardan dolayı öngörülebilir düzeydedirler.

Çizelge 4.16 ile verilen çizelgede ise $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu = 1$ ve $N = 80$ değerleri için Problem 1'in LİN-2 ile elde edilen sonuçları ile literatürde yer alan Ref. [34, 37, 44, 46]'daki sonuçların karşılaştırılması verildi. Bu çizelgede nümerik olarak verilen noktasal değerler ile problemin tam çözümünün noktasal değerleri incelendiğinde en iyi sonuçların bütün çizelge boyunca Ref. [46]'daki yöntemle elde edildiği görülmektedir. Diğer yöntemlere bakıldığında, sol sınır bölgesinde LİN-2 ile elde edilen değerler, geriye kalan diğer üç yönteme göre tam çözüme daha yakındır. Ancak sağ sınıra yaklaşıldığında Ref. [44] ile elde edilen değerlerin tam çözüme daha yakın olduğu anlaşılmaktadır.

Çizelge 4.17'de ise Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ değerleri için nümerik ve tam çözümleri ile hata normları ele alınmıştır. Çizelgeye bakıldığında Problem 1'de olduğu gibi verilen aralığın parçalanma sayısı artırıldığında nümerik sonuçlar ile tam çözüm arasındaki yakınlık ve bunun sonucunda hata normlarındaki düşüş net bir şekilde görülmektedir. Yine Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ değerleri için verilen Çizelge 4.18'e bakıldığında zaman adımı küçüldükçe nümerik çözümlerin tam çözümlere yaklaştığı ve hata normlarının küçüldüğü gözlenebilmektedir.

Çizelge 4.19'da, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu = 0.1$ ve $N = 80$ için Problem 2'nin LİN-2 ile literatürde yer alan Ref. [32, 34, 39] çalışmalarının nümerik çözümleri ile noktasal değerlerinin ve tam çözümünün karşılaştırılması verildi. Verilen bu çizelgede LİN-2 ile elde edilen nümerik sonuçların literatürdeki çalışmalarla birbirlerine yakın değerler içerdiği görülmektedir. Hatta aralığın sağ sınırı hariç diğer bütün değerler için tam çözüme daha yakın değerler elde edilmiştir. Sağ sınırda ise Ref. [39] ile verilen çalışmaya çok yakın değerler elde edilmekle birlikte çok küçük bir farkla gerisinde kalmıştır.

Çizelge 4.20'de ise Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 8, 16, 32, 64$ değerleri için nümerik ve tam çözümleri ile hata normları incelenmiştir. Çizelgeye bakıldığında N bölüntü sayısı arttıkça hata normlarındaki düşüşler net bir biçimde görülmektedir.

Çizelge 4.21 ve 4.22'de, $t = 2.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.0005$, bölüntü sayısı $N = 200$ iken Problem 3 için LİN-2 ile elde edilen noktasal değerlerin ve hata normlarının Ref. [36, 37, 51] çalışmalarında verilen noktasal değerler ile hata normlarının ve tam çözümlerinin karşılaştırılması sunuldu. Çizelgelere bakıldığında LİN-2 ile elde edilen sonuçların, literatürdeki çalışmaların sonuçlarıyla tam bir uyum içinde olduğu görülmektedir. Karşılaştırılan makalelerdeki noktasal değerler ve verilen hata normları ile tam çözüm

incelendiğinde LİN-2 ile elde edilen sonuçların diğer çalışmalara göre daha iyi olduğu açıkça görülmektedir.

Problem 4'ün LİN-2 ile elde edilen ve Çizelge 4.23'te sunulan çizelgede, $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 40, 80, 120, 160$ değerleri için nümerik ve tam çözümleri ile hata normları yer almaktadır. Bu çizelgeye göre bölüntü sayısının artışıyla birlikte hata normlarında başlangıçta iyi bir azalma gözlenmekle birlikte bölüntü sayısı arttıkça hata normlarındaki azalmalar daha küçük değerlerle meydana gelmektedir.

Çizelge 4.24 ile verilen çizelgede, $t = 0.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.01$ ve $N = 36$ değerleri için Problem 4'ün LİN-2 ile elde edilen nümerik çözümleri ve hata normları ile literatürde sunulan Ref. [37, 45, 49, 55]'in nümerik çözümleri ile hata nomlarının ve tam çözümünün karşılaştırılması verildi. Çizelgeye bakıldığında LİN-2 ile elde edilen değerlerin literatürde yer alan çalışmalarla birbirine yakın ve uyumlu olduğu görülmektedir. Çalışmalarda verilen hata normları ile hata normları verilmeyen Ref. [37, 55]'in noktasal değerleri göz önüne alındığında LİN-2 ile elde edilen değerlerin Ref. [45] (QBCA2)'den sonra tam çözüme en yakın değerlere sahip olduğu açıktır.

Çizelge 4.13 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için LİN-2 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	N = 10	N = 20	N = 40	N = 80	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.10908758	0.10942573	0.10950942	0.10953031	0.10953815
0.2	0.20887686	0.20956342	0.20973378	0.20977629	0.20979215
0.3	0.29050326	0.29154797	0.29180760	0.29187241	0.29189635
0.4	0.34607376	0.34746067	0.30853159	0.34789237	0.34792391
0.5	0.36936151	0.37102179	0.34780610	0.37153997	0.37157748
0.6	0.35665570	0.35844524	0.37143636	0.35900534	0.35904558
0.7	0.30763540	0.30933387	0.30976023	0.30986692	0.30990500
0.8	0.22602114	0.22736475	0.22770272	0.22778733	0.22781741
0.9	0.11969020	0.12043517	0.12062299	0.12067002	0.12068669
1	0	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	1.62472208	0.40797369	0.10357036	0.02745852	
$L_\infty \times 10^3$	2.38988339	0.60033655	0.15238573	0.04026775	

Çizelge 4.14 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.01$, 0.005 , 0.001 , 0.0001 için LİN-2 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0001$	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.10942200	0.10948819	0.10950942	0.10951029	0.10953815
0.2	0.20956642	0.20969320	0.20973378	0.20973545	0.20979215
0.3	0.29157546	0.29175132	0.29180760	0.29180992	0.29189635
0.4	0.34752987	0.34773915	0.30853159	0.34780886	0.34792391
0.5	0.37114106	0.37136482	0.34780610	0.37143931	0.37157748
0.6	0.35860672	0.35882390	0.37143636	0.35889615	0.35904558
0.7	0.30951113	0.30969994	0.30976023	0.30976271	0.30990500
0.8	0.22751818	0.22765807	0.22770272	0.22770456	0.22781741
0.9	0.12052444	0.12059918	0.12062299	0.12062397	0.12068669
1	0	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.31252442	0.15392054	0.10357036	0.10150514	
$L_\infty \times 10^3$	0.44317473	0.22168161	0.15238573	0.14959169	

4.4 LİNEERLEŞTİRME-3 (LİN-3)

(4.0.1) ile verilen Burgers denklemini

$$U_t + 2UU_x = 0$$

ve

$$U_t - 2\nu U_{xx} = 0$$

biçiminde iki denklem olarak yazıldıktan sonra ilk olarak lineer olmayan

$$U_t + 2UU_x = 0$$

denkleminde yöntem uygulanacaktır. Bu denklemde UU_x lineer olmayan teriminde $U = Z_i$ olarak alınır, U_t ve U_{xx} terimleri yerine de ileri fark ve Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımları yazılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} + 2Z_i \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} = 0$$

olur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$U^{n+1} + Z_i \Delta t U_x^{n+1} = U^n - Z_i \Delta t U_x^n$$

Çizelge 4.15 : Problem 1'in $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.0001$, $N = 40$ iken $\nu = 1$ ve $\nu = 0.01$ için LİN-2 ile [55]'in nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması.

x	t	$\nu = 1$			$\nu = 0.01$		
		LİN-2	[55]	Tam Çözüm	LİN-2	[55]	Tam Çözüm
0.25	0.4	0.01355	0.01355	0.01357	0.34192	0.34191	0.34191
	0.6	0.00189	0.00188	0.00189	0.26899	0.26896	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.00026	0.22148	0.22148	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.00004	0.18819	0.18819	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.07511	0.07511	0.07511
0.5	0.4	0.01921	0.01920	0.01924	0.66072	0.66071	0.66071
	0.6	0.00267	0.00266	0.00267	0.52948	0.52942	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.00037	0.43914	0.43914	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.00005	0.37442	0.37442	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.15018	0.15017	0.15018
0.75	0.4	0.01361	0.01361	0.01363	0.91029	0.91029	0.91026
	0.6	0.00189	0.00188	0.00189	0.76732	0.76725	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.00026	0.64740	0.64740	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.00004	0.55605	0.55605	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.22490	0.22489	0.22481

Çizelge 4.16 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu = 1$ ve $N = 80$ için LİN-2 ile [34], [37], [44] ve [46]'nın nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması.

x	Nümerik Çözümler				Tam Çözüm	
	LİN-1	[34]	[37]	[44]		[46]
0	0.00000000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000000
0.1	0.10953119	0.10978	0.10952	0.10952	0.10953815119	0.10953815
0.2	0.20977798	0.21019	0.20975	0.20976	0.20979214867	0.20979215
0.3	0.29187476	0.29238	0.29184	0.29186	0.29189635032	0.29189635
0.4	0.34789516	0.34845	0.34785	0.34788	0.34792391150	0.34792391
0.5	0.37154294	0.37212	0.37149	0.37153	0.37157747490	0.37157748
0.6	0.35900823	0.35960	0.35896	0.35900	0.35904557846	0.35904558
0.7	0.30986943	0.31044	0.30983	0.30986	0.30990499905	0.30990500
0.8	0.22778919	0.22827	0.22776	0.22779	0.22781740532	0.22781741
0.9	0.12067101	0.12097	0.12065	0.12067	0.12068669034	0.12068669
1	0.00000000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000000000	0.00000000
$L_2 \times 10^3$	0.02537211	-	-	-	-	-
$L_\infty \times 10^3$	0.03741177	-	-	-	-	-

Çizelge 4.17 : Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $v = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için LİN-2 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.11242395	0.11277608	0.11286257	0.11288411	0.11289225
0.2	0.21530230	0.21601614	0.21619197	0.21623576	0.21625214
0.3	0.29952205	0.30060692	0.30087452	0.30094120	0.30096586
0.4	0.35694635	0.35838591	0.35874187	0.35883062	0.35886306
0.5	0.38112483	0.38284936	0.38327709	0.38338381	0.38342242
0.6	0.36817528	0.37003724	0.37050061	0.37061632	0.37065784
0.7	0.31770252	0.31947353	0.31991575	0.32002627	0.32006569
0.8	0.23349659	0.23490051	0.23525201	0.23533991	0.23537115
0.9	0.12367655	0.12445601	0.12465173	0.12470069	0.12471805
1	0	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	1.68834533	0.42190093	0.10697776	0.02835499	
$L_\infty \times 10^3$	2.48255138	0.62059646	0.15744144	0.04155922	

Çizelge 4.18 : Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $v = 1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ için LİN-2 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0001$	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.11268054	0.11284744	0.11286257	0.11286350	0.11289225
0.2	0.21603069	0.21614936	0.21619197	0.21619374	0.21625214
0.3	0.30062718	0.30081558	0.30087452	0.30087695	0.30096586
0.4	0.35845732	0.35867269	0.35874187	0.35874473	0.35886306
0.5	0.38297360	0.38320372	0.38327709	0.38328012	0.38342242
0.6	0.37020760	0.37042947	0.37050061	0.37050354	0.37065784
0.7	0.31965475	0.31985354	0.31991575	0.31991831	0.32006569
0.8	0.23507539	0.23520596	0.23525201	0.23525392	0.23537115
0.9	0.12446097	0.12463425	0.12465173	0.12465277	0.12471805
1	0	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.34025011	0.15979895	0.10697776	0.10484370	
$L_\infty \times 10^3$	0.45511666	0.22836066	0.15744144	0.15457570	

Çizelge 4.19 : Problem 2'nin $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu = 0.1$ ve $N = 80$ için LİN-2 ile [32], [34] ve [39]'un nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması.

x	t	Nümerik Çözümler				Tam Çözüm
		LİN-2	[32]	[34]	[39]	
$(\Delta t = 0.0001)$						
0.25	0.4	0.31753	0.32679	0.32091	0.31760	0.31752
	0.6	0.24615	0.25117	0.24910	0.24618	0.24614
	0.8	0.19957	0.20270	0.20211	0.19959	0.19956
	1.0	0.16561	0.16780	0.16782	0.16562	0.16560
	3.0	0.02776	0.02804	0.02828	0.02776	0.02775
0.5	0.4	0.58456	0.59661	0.58788	0.58460	0.58454
	0.6	0.45801	0.46581	0.46174	0.45803	0.45798
	0.8	0.36742	0.37293	0.37111	0.36744	0.36740
	1.0	0.29836	0.30253	0.30183	0.29838	0.29834
	3.0	0.04106	0.04155	0.04185	0.04107	0.04106
0.75	0.4	0.64557	0.64680	0.65054	0.64558	0.64562
	0.6	0.50263	0.50852	0.50825	0.50269	0.50268
	0.8	0.38528	0.39117	0.39068	0.38536	0.38534
	1.0	0.29581	0.30066	0.30057	0.29589	0.29586
	3.0	0.03043	0.03081	0.03106	0.03044	0.03044

Çizelge 4.20 : Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 8, 16, 32, 64$ için LİN-2 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$N = 8$	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	
0	0	0	0	0	0
1	0.40925432	0.40714791	0.40661879	0.40648981	0.40644714
2	0.52860356	0.52777216	0.52771553	0.52770300	0.52769887
3	0.31728431	0.31678705	0.31652424	0.31645772	0.31643558
4	0.09319195	0.09425035	0.09459617	0.09468235	0.09471099
5	0.01330718	0.01515829	0.01554100	0.01563446	0.01566545
6	0.00110539	0.00142056	0.00151577	0.00153991	0.00154797
7	0.00005256	0.00007912	0.00009014	0.00009309	0.00009412
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00000356
$L_2 \times 10^3$	4.18157238	1.02112194	0.25116948	0.06253498	
$L_\infty \times 10^3$	2.80717937	0.70076556	0.17164654	0.04266722	

Çizelge 4.21 : Problem 3'ün $t = 2.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.005$ ve $N = 200$ için LİN-2 ile QBCM [36], CBCM [36]'nın nümerik ve tam çözümleri ile hata normlarının karşılaştırılması.

x	Nümerik Çözümler			Tam Çözüm
	LİN-2	QBCM [36]	CBCM [36]	
0	0.00000000			0.00000000
0.1	0.03999971	0.040000	0.040000	0.03999971
0.2	0.07999896	0.080000	0.080000	0.07999895
0.3	0.11999576	0.120000	0.120000	0.11999572
0.4	0.15997714	0.15998	0.15998	0.15997687
0.5	0.19982707	0.19982	0.19983	0.19982525
0.6	0.23813181	0.23811	0.23812	0.23812066
0.7	0.25311829	0.25302	0.25275	0.25310477
0.8	0.10211139	0.10228	0.10269	0.10209570
0.9	0.00552364	0.00553	0.00568	0.00554249
1	0.00000000			0.00013987
$L_2 \times 10^3$	0.02129922	0.05103	2.11187	
$L_\infty \times 10^3$	0.13987158	0.18902	25.1517	

Çizelge 4.22 : Problem 3'ün $t = 2.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.0005$ ve $N = 200$ için LİN-2 ile [37] ve [51]'in nümerik ve tam çözümleri ile hata normlarının karşılaştırılması.

x	Nümerik Çözümler			Tam Çözüm
	LİN-2	[37]	[51]	
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.1	0.04000	0.04000	0.04003	0.04000
0.2	0.08000	0.08000	0.08000	0.08000
0.3	0.12000	0.12001	0.12000	0.12000
0.4	0.16000	0.16001	0.16000	0.16000
0.5	0.20000	0.20001	0.20000	0.20000
0.6	0.24000	0.24001	0.24000	0.24000
0.7	0.28000	0.28001	0.28000	0.28000
0.8	0.00829	0.00811	0.00994	0.00977
0.9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$L_2 \times 10^3$	0.28973	-	-	
$L_\infty \times 10^3$	2.38936	-	-	

Çizelge 4.23 : Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 40, 80, 120, 160$ için LİN-2 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	N = 40	N = 80	N = 120	N = 160	
0	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	0.99951130
0.1	0.97676168	0.97610397	0.97598982	0.97595042	0.97416363
0.2	0.48638223	0.48438883	0.48391170	0.48373627	0.48347496
0.3	0.20728176	0.20780367	0.20789240	0.20792298	0.20796144
0.4	0.20012908	0.20014250	0.20014514	0.20014607	0.20014726
0.5	0.20000236	0.20000261	0.20000266	0.20000268	0.20000270
0.6	0.20000004	0.20000005	0.20000005	0.20000005	0.20000005
0.7	0.19999999	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
0.8	0.19999999	0.20000020	0.20000000	0.20000000	0.20000000
0.9	0.19999993	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
1	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
$L_2 \times 10^3$	1.14285061	0.59957294	0.55096924	0.54262555	
$L_\infty \times 10^3$	3.34305836	2.03916455	1.93743857	1.90162190	

Çizelge 4.24 : Problem 4'ün $t = 0.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.01$ ve $N = 36$ için LİN-2 ile [37], [45] (QBAC1), [45] (QBAC2), [49] ve [55]'in nümerik çözümleri ile hata normlarının ve tam çözümünün karşılaştırılması.

x	Nümerik Çözüm						Tam Çözüm
	Uygulanan Yöntemler						
	LİN-2	[37] ($\Delta t = 0.025$)	[45] (QBAC1)	[45] (QBAC2)	[49]	[55]	
0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.056	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.111	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.167	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.222	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.278	0.999	0.999	0.998	0.999	0.998	0.999	0.998
0.333	0.983	0.986	0.980	0.982	0.982	0.983	0.980
0.389	0.845	0.850	0.842	0.850	0.844	0.845	0.847
0.444	0.457	0.448	0.458	0.452	0.458	0.456	0.452
0.500	0.237	0.236	0.240	0.238	0.238	0.237	0.238
0.556	0.203	0.204	0.205	0.204	0.203	0.203	0.204
0.611	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.667	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.722	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
1.000	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
$L_2 \times 10^3$	1.27329	-	1.72434	0.59530	1.45E-03	-	
$L_\infty \times 10^3$	4.69339	-	5.78454	2.76077	5.97E-03	-	

elde edilir. Burada (2.2.4) ile verilen yaklaşım ve bu yaklaşımda kübik trigonometrik fonksiyonların kullanılmasıyla elde edilen ve (2.2.5) ile verilen yaklaşımlar yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1} + Z_i \Delta t (\beta_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_{i+1}^{n+1}) \\ & = \alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n - Z_i \Delta t (\beta_1 \delta_{i-1}^n + \beta_2 \delta_{i+1}^n) \end{aligned}$$

olur ve sonunda

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 + Z_i \Delta t \beta_1) \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + (\alpha_1 + Z_i \Delta t \beta_2) \delta_{i+1}^{n+1} \\ & = (\alpha_1 - Z_i \Delta t \beta_1) \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + (\alpha_1 - Z_i \Delta t \beta_2) \delta_{i+1}^n \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

elde edilir. Bu eşitlik matris formunda

$$\begin{aligned} m_1 &= \alpha_1 + Z_i \Delta t \beta_1 \\ m_2 &= \alpha_1 + Z_i \Delta t \beta_2 \\ n_1 &= \alpha_1 - Z_i \Delta t \beta_1 \\ n_2 &= \alpha_1 - Z_i \Delta t \beta_2 \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} m_1 & \alpha_2 & m_2 & & & \\ & m_1 & \alpha_2 & m_2 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & m_1 & \alpha_2 & m_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^{n+1} \\ \delta_0^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n_1 & \alpha_2 & n_2 & & & \\ & n_1 & \alpha_2 & n_2 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & n_1 & \alpha_2 & n_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^n \\ \delta_0^n \\ \vdots \\ \delta_{N+1}^n \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Bu matris, $(N + 3)$ bilinmeyen ve $(N + 1)$ tane denklemden oluşan bir sistem oluşturur. Bu sistemde problemle birlikte verilen sınır şartlarının kullanılmasıyla δ_{-1} ve δ_{N+1} bilinmeyenlerinin yok edilebilir.

$x = x_i$ noktasında

$$U(x_i, t) = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

yaklaşımı yardımıyla δ_{-1} bilinmeyeni, $i = 0$ için $x = x_0$ noktasında $U(x_0, t) = U(a, t)$ olduğundan

$$\delta_{-1} = \frac{U(a, t) - \alpha_1 \delta_1 - \alpha_2 \delta_0}{\alpha_1}$$

ve δ_{N+1} bilinmeyeni ise $i = N$ için $x = x_N$ noktasında $U(x_N, t) = U(b, t)$ olduğundan

$$\delta_{N+1} = \frac{U(b, t) - \alpha_1 \delta_{N-1} - \alpha_2 \delta_N}{\alpha_1}$$

şeklinde diğerleri cinsinden elde edilir. Bulunan bu ifadeler (4.4.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1 + Z_i \Delta t \beta_1) \left(\frac{U^{n+1}(a, t) - \alpha_1 \delta_1^{n+1} - \alpha_2 \delta_0^{n+1}}{\alpha_1} \right) + \\
& \alpha_2 \delta_0^{n+1} + (\alpha_1 + Z_i \Delta t \beta_2) \delta_1^{n+1} \\
& = (\alpha_1 - Z_i \Delta t \beta_1) \left(\frac{U^n(a, t) - \alpha_1 \delta_1^{n+1} - \alpha_2 \delta_0^{n+1}}{\alpha_1} \right) + \\
& \alpha_2 \delta_0^n + (\alpha_1 - Z_i \Delta t \beta_2) \delta_1^n
\end{aligned}$$

olur ve $i = 0$ için düzenlenirse

$$\begin{aligned}
& - \frac{Z_0 \Delta t \alpha_2 \beta_1}{\alpha_1} \delta_0^{n+1} + Z_0 \Delta t (\beta_2 - \beta_1) \delta_1^{n+1} \\
& = \frac{Z_0 \Delta t \alpha_2 \beta_1}{\alpha_1} \delta_0^n + Z_0 \Delta t (\beta_1 - \beta_2) \delta_1^{n+1} - \\
& \frac{U^{n+1}(a, t)}{\alpha_1} (\alpha_1 + Z_0 \Delta t \beta_1) + \frac{U^n(a, t)}{\alpha_1} (\alpha_1 - Z_0 \Delta t \beta_1)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Benzer şekilde $i = N$ için düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& (\alpha_1 + Z_N \Delta t \beta_1) \delta_{N-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_N^{n+1} + \\
& (\alpha_1 + Z_N \Delta t \beta_2) \left(\frac{U^{n+1}(b, t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^{n+1} - \alpha_2 \delta_N^{n+1}}{\alpha_1} \right) \\
& = (\alpha_1 - Z_N \Delta t \beta_1) \delta_{N-1}^n + \\
& \alpha_2 \delta_N^n + (\alpha_1 - Z_N \Delta t \beta_2) \left(\frac{U^n(b, t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^{n+1} - \alpha_2 \delta_N^{n+1}}{\alpha_1} \right)
\end{aligned}$$

olur ve son olarak

$$\begin{aligned}
& Z_N \Delta t (\beta_1 - \beta_2) \delta_{N-1}^{n+1} + \left(- \frac{Z_N \Delta t \alpha_2 \beta_1}{\alpha_1} \right) \delta_N^{n+1} \\
& = Z_N \Delta t (\beta_2 - \beta_1) \delta_{N-1}^n + \frac{Z_N \Delta t \alpha_2 \beta_1}{\alpha_1} \delta_N^n - \\
& \frac{U^{n+1}(b, t)}{\alpha_1} (\alpha_1 + Z_N \Delta t \beta_2) + \frac{U^n(b, t)}{\alpha_1} (\alpha_1 - Z_N \Delta t \beta_2)
\end{aligned}$$

şeklini alır. Oluşan yeni sistem matris formunda (4.4.2) ile verilenlere ek olarak

$$\begin{aligned}
 o_1 &= \frac{Z_0 \Delta t \alpha_2 \beta_1}{\alpha_1} \\
 o_2 &= Z_0 \Delta t (\beta_2 - \beta_1) \\
 o_3 &= Z_N \Delta t (\beta_1 - \beta_2) \\
 o_4 &= -\frac{Z_N \Delta t \alpha_2 \beta_1}{\alpha_1} \\
 p_1 &= -\frac{U^{n+1}(a,t)}{\alpha_1} (\alpha_1 + Z_0 \Delta t \beta_1) + \frac{U^n(a,t)}{\alpha_1} (\alpha_1 - Z_0 \Delta t \beta_1) \\
 p_2 &= -\frac{U^{n+1}(b,t)}{\alpha_1} (\alpha_1 + Z_N \Delta t \beta_2) + \frac{U^n(b,t)}{\alpha_1} (\alpha_1 - Z_N \Delta t \beta_2)
 \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{bmatrix} -o_1 & o_2 & & & \\ m_1 & \alpha_2 & m_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & o_3 & o_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0^{n+1} \\ \delta_1^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} o_1 & -o_2 & & & \\ n_1 & \alpha_2 & n_2 & & \\ & & \ddots & & \\ & & & -o_3 & -o_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0^n \\ \delta_1^n \\ \vdots \\ \delta_N^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_2 \end{bmatrix} \quad (4.4.3)$$

biçiminde yazılabilir.

İkinci olarak ise

$$U_t - 2\nu U_{xx} = 0$$

lineer denklemi göz önüne alalım. Denklemden U_t terimi yerine

$$U_t = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}$$

ileri fark ve U_{xx} terimi yerine de

$$U_{xx} = \frac{U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n}{2}$$

Crank-Nicolson yaklaşımları yazılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - 2\nu \frac{U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n}{2} = 0$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - 2\nu \frac{U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n}{2} = 0$$

elde edilir. Önce payda eşitlemesi yapılırsa

$$U^{n+1} - U^n - \nu \Delta t (U_{xx}^{n+1} + U_{xx}^n) = 0$$

olur ve devamında aynı zaman adımına ait ifadeler eşitliğin aynı tarafında olacak şekilde gerekli düzenlemeler yapılarak

$$U^{n+1} - v\Delta t U_{xx}^{n+1} = U^n + v\Delta t U_{xx}^n$$

elde edilir. Burada (4.2.1) ile verilen eşitlikler yazıldığında

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1} - v\Delta t (\gamma_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \gamma_2 \delta_i^{n+1} + \gamma_1 \delta_{i+1}^{n+1}) \\ & = \alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n + v\Delta t (\gamma_1 \delta_{i-1}^n + \gamma_2 \delta_i^n + \gamma_1 \delta_{i+1}^n) \end{aligned}$$

olur ve bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 - v\Delta t \gamma_1) \delta_{i-1}^{n+1} + (\alpha_2 - v\Delta t \gamma_2) \delta_i^{n+1} + (\alpha_1 - v\Delta t \gamma_1) \delta_{i+1}^{n+1} \\ & = (\alpha_1 + v\Delta t \gamma_1) \delta_{i-1}^n + (\alpha_2 + v\Delta t \gamma_2) \delta_i^n + (\alpha_1 + v\Delta t \gamma_1) \delta_{i+1}^n \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

bulunur. Bu sistem matris formunda

$$\begin{aligned} r_1 &= \alpha_1 - v\Delta t \gamma_1 \\ r_2 &= \alpha_2 - v\Delta t \gamma_2 \\ r_3 &= \alpha_1 + v\Delta t \gamma_1 \\ r_4 &= \alpha_2 + v\Delta t \gamma_2 \end{aligned} \quad (4.4.5)$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} r_1 & r_2 & r_1 & & & \\ & r_1 & r_2 & r_1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & r_1 & r_2 & r_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^{n+1} \\ \delta_0^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_{N+1}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_3 & r_4 & r_3 & & & \\ & r_3 & r_4 & r_3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & r_3 & r_4 & r_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1}^n \\ \delta_0^n \\ \vdots \\ \delta_{N+1}^n \end{bmatrix}$$

biçiminde yazılabilir. Bu matris $(N+3) \times (N+1)$ tipinde bir sistem oluşturur. Şimdi de problemle birlikte verilen sınır şartları kullanılarak δ_{-1} ve δ_{N+1} bilinmeyenleri diğerleri cinsinden ifade edilecektir.

$x = x_i$ noktasında

$$U(x_i, t) = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

yaklaşımı yardımıyla δ_{-1} bilinmeyeni, $i = 0$ için $x = x_0$ noktasında $U(x_0, t) = U(a, t)$ olduğundan

$$\delta_{-1} = \frac{U(a, t) - \alpha_1 \delta_1 - \alpha_2 \delta_0}{\alpha_1}$$

ve δ_{N+1} bilinmeyi ise $i = N$ için $x = x_N$ noktasında $U(x_N, t) = U(b, t)$ olduğundan

$$\delta_{N+1} = \frac{U(b, t) - \alpha_1 \delta_{N-1} - \alpha_2 \delta_N}{\alpha_1}$$

şeklinde diğerleri cinsinden bulunur ve bu sonuçlar (4.4.4)'te yerine yazılırsa $i = 0$ için

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 - v\Delta t \gamma_1) \left(\frac{U^{n+1}(a, t) - \alpha_1 \delta_1^{n+1} - \alpha_2 \delta_0^{n+1}}{\alpha_1} \right) + \\ & (\alpha_2 - v\Delta t \gamma_2) \delta_0^{n+1} + (\alpha_1 - v\Delta t \gamma_1) \delta_1^{n+1} \\ & = (\alpha_1 + v\Delta t \gamma_1) \left(\frac{U^n(a, t) - \alpha_1 \delta_1^n - \alpha_2 \delta_0^n}{\alpha_1} \right) + \\ & (\alpha_2 + v\Delta t \gamma_2) \delta_0^n + (\alpha_1 + v\Delta t \gamma_1) \delta_1^n \end{aligned}$$

olur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\Delta t}{\alpha_1} (\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2) \delta_0^{n+1} + 0. \delta_1^{n+1} \\ & = \frac{\Delta t}{\alpha_1} (\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1) \delta_0^n + 0. \delta_1^n - \\ & \frac{U^{n+1}(a, t)}{\alpha_1} (\alpha_1 - v\Delta t \gamma_1) + \frac{U^n(a, t)}{\alpha_1} (\alpha_1 + v\Delta t \gamma_1) \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Benzer şekilde $i = N$ için yerine yazılıp

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 - v\Delta t \gamma_1) \delta_{N-1}^{n+1} + (\alpha_2 - v\Delta t \gamma_2) \delta_N^{n+1} + (\alpha_1 - v\Delta t \gamma_1) \delta_{N+1}^{n+1} \\ & = (\alpha_1 + v\Delta t \gamma_1) \delta_{N-1}^n + (\alpha_2 + v\Delta t \gamma_2) \delta_N^n + (\alpha_1 + v\Delta t \gamma_1) \delta_{N+1}^n \end{aligned}$$

düzenlemeler gerçekleştirilirse

$$\begin{aligned} & (\alpha_1 - v\Delta t \gamma_1) \delta_{N-1}^{n+1} + (\alpha_2 - v\Delta t \gamma_2) \delta_N^{n+1} + \\ & (\alpha_1 - v\Delta t \gamma_1) \left(\frac{U^{n+1}(b, t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^{n+1} - \alpha_2 \delta_N^{n+1}}{\alpha_1} \right) \\ & = (\alpha_1 + v\Delta t \gamma_1) \delta_{N-1}^n + (\alpha_2 + v\Delta t \gamma_2) \delta_N^n + \\ & (\alpha_1 + v\Delta t \gamma_1) \left(\frac{U^n(b, t) - \alpha_1 \delta_{N-1}^n - \alpha_2 \delta_N^n}{\alpha_1} \right) \end{aligned}$$

olur ve son olarak

$$\begin{aligned} & 0. \delta_{N-1}^{n+1} + \frac{\Delta t}{\alpha_1} (\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2) \delta_N^{n+1} \\ & = 0. \delta_{N-1}^n + \frac{\Delta t}{\alpha_1} (\alpha_1 \gamma_2 - \alpha_2 \gamma_1) \delta_N^n - \\ & \frac{U^{n+1}(b, t)}{\alpha_1} (\alpha_1 - v\Delta t \gamma_1) + \frac{U^n(b, t)}{\alpha_1} (\alpha_1 + v\Delta t \gamma_1) \end{aligned}$$

elde edilir. İlk matris, son elde edilen eşitliklere göre yeniden düzenlenirse

(4.4.5) ile verilen eşitliklere ek olarak

$$s = \frac{\Delta t}{\alpha_1} (\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2)$$

$$v_1 = -\frac{U^{n+1}(a,t)}{\alpha_1} (\alpha_1 - v\Delta t \gamma_1) + \frac{U^n(a,t)}{\alpha_1} (\alpha_1 + v\Delta t \gamma_1)$$

$$v_2 = -\frac{U^{n+1}(b,t)}{\alpha_1} (\alpha_1 - v\Delta t \gamma_1) + \frac{U^n(b,t)}{\alpha_1} (\alpha_1 + v\Delta t \gamma_1)$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} s & & & & & & \\ r_1 & r_2 & r_1 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0^{n+1} \\ \delta_1^{n+1} \\ \vdots \\ \delta_N^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -s & & & & & & \\ r_3 & r_4 & r_3 & & & & \\ & & & \ddots & & & \\ & & & & & & \\ & & & & & & -s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0^n \\ \delta_1^n \\ \vdots \\ \delta_N^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (4.4.6)$$

formunda $(N + 1) \times (N + 1)$ tipinde bir matris sistemi oluşmuş olur. Bu sistemin iteratif olarak çözülebilmesi için δ^0 bilinmeyenlerinin bulunması gerekir. δ^0 bilinmeyenlerinin bulunması ise (4.2.5) ile verilen ve LİN-1 yönteminde ayrıntılı olarak anlatılan sistemin çözülmesi ile kolayca elde edilebilir. δ^0 bilinmeyenleri ilk olarak lineer denklem için elde edilen ve (4.4.6) ile verilen şemada kullanıldıktan sonra elde edilen çözümler lineer olmayan denklem için elde edilen ve (4.4.3) ile verilen şemada kullanılır ve böylece bir adım için nümerik sonuçlar elde edilir. Bu şekilde istenilen t zamanındaki sonuçlara ulaşılabilir.

Burada da U_N nümerik sonuçlarını iyileştirmek adına (4.4.3) ile verilen denklem sistemindeki lineer olmayan terimler için her bir zaman adımında

$$\delta_i^* = \delta_i^n + \frac{1}{2}(\delta_i^{n+1} - \delta_i^n)$$

biçiminde tanımlanan iç iterasyon formülü bir kaç defa kullanıldı.

4.4.1 Nümerik Sonuçlar

LİN-3'ün kullanılmasıyla elde edilen nümerik sonuçlar ve hata normları ile problemlerin tam çözümleri ve literatürde verilen değerlerle karşılaştırılmaları aşağıdaki çizelgelerde verildi. Çizelge 4.25 ile verilen çizelge, Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $v = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ değerleri için elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile hata normlarını içermektedir. Bu çizelgeye göre verilen aralığın bölüntü sayısının artışına bağlı olarak nümerik çözümlerin tam

çözümüne giderek yaklaştığı, bu yaklaşma ile birlikte de L_2 ve L_∞ hata normlarındaki değerlerin düşüşü net bir biçimde görülmektedir. Çizelge 4.26'da ise $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ için Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri ile hata normları ele alındı. Burada da Δt zaman adım uzunluğunun küçülmesiyle beraber nümerik sonuçlarla tam çözüm arasındaki yakınlaşma ve hata normlarındaki azalma açıkça görülmektedir.

$0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.0001$, $N = 40$ iken $\nu = 1$ ve $\nu = 0.01$ değerleri için, Problem 1'in LİN-3 ile Ref. [55]'teki nümerik çözümler ve tam çözümlerin karşılaştırılması Çizelge 4.27'de sunuldu. Verilen çizelge incelendiğinde LİN-3 ve Ref. [55] ile verilen çalışmanın birbirine yakın değerlere sahip olduğu söylenebilir. Bununla birlikte tam çözüme genellikle daha yakın olan çalışma Ref. [55] olarak gözükmektedir. LİN-3 ile verilen çalışma ve tam çözüm arasındaki en büyük fark ise $x = 0.75$, $t = 3$ ve $\nu = 0.01$ iken gerçekleşmiştir. Verilen noktada, LİN-3 ile elde edilen noktasal değerle tam çözüm arasındaki hata 0.00033, Ref. [55] arasındaki hata ise 0.00041 olarak gerçekleşmiştir.

Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu = 1$ ve $N = 80$ değerleri için LİN-3 ile Ref. [34,37,44,46]'daki noktasal değerlerin ve tam çözümünün karşılaştırılması Çizelge 4.28'de sunuldu. LİN-3 ile literatürde yer alan çalışmalar birbirine yakın değerler içermektedir. Yine de tam çözüme en yakın değerler Ref. [46]'da, en uzak değerler ise Ref. [34]'te yer almaktadır. Çizelgenin tamamında LİN-3 ile elde edilen noktasal değerlerin Ref. [46]'dan sonra tam çözüme en yakın olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.29 ile sunulan çizelgede ise Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ değerleri için nümerik ve tam çözümleri ile hata normları incelendi. Burada bölüntü sayısının artmasına bağlı olarak L_2 hata normu yine beklendiği gibi sürekli olarak azalmaktadır. Ancak L_∞ hata normunda bölüntü sayısının artmasına bağlı olarak bir yere kadar küçülmeler açık bir şekilde gözlense de belirli bir sayıdan sonra çok küçük bir artış ortaya çıkabilmiştir. Yine Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ için nümerik ve tam çözümleri ile hata normları Çizelge 4.30'da verildi. Bu çizelgede, sonuçların, zaman adımının küçülmesine paralel olarak iyileştiği, nümerik sonuçların tam çözümle yaklaştığı hata normlarındaki azalmadan kolaylıkla görülebilmektedir.

Çizelge 4.31 ile verilen çizelgede, Problem 2'nin LİN-3 ile literatürde yer alan Ref. [32,34,39] çalışmalarının $x = 0.25, 0.5, 0.75$ değerlerinin her biri için ayrı ayrı olacak şekilde, zamanın $t = 0.4, 0.6, 0.8, 1, 3$ olduğu anlarda elde edilen noktasal değerleri ve tam çözüm

karşılaştırmalı olarak sunuldu. Verilen çizelge incelendiğinde LİN-3 ile elde edilen değerlerin literatürdeki çalışmalarla yakın bir ilişki içinde olduğu görülmektedir. Bununla beraber LİN-3 ile elde edilen değerlerin aralığın sol sınır bölgesinden sağ sınır bölgesine kadar literatürde sunulan değerlere göre tam çözüme daha yakındır. Yalnızca sağ sınır bölgesinden Ref. [39] ile verilen çalışmanın 10^{-5} birimlik bir farkla gerisinde kalmıştır.

Çizelge 4.32’de ise Problem 3’ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 8, 16, 32, 64$ değerleri için nümerik ve tam çözümleri ile hata normları yer almaktadır. Verilen çizelgeye bakıldığında bölüntü sayısının artmasıyla elde edilen nümerik değerlerin, tam çözüme olan yaklaşması hata normları aracılığıyla kolaylıkla fark edilmektedir.

Çizelge 4.33 ve 4.34 ile verilen çizelgelerde $t = 2.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.005$ ve $\nu = 0.0005$, bölüntü sayısı $N = 200$ iken Problem 3 için LİN-3 ile Ref. [36, 37, 51]’e ait çalışmaların nümerik ve tam çözümleri ile hata normlarının karşılaştırılması verildi. Çizelgelere bakıldığında LİN-3 ile elde edilen sonuçlar, literatürde verilen çalışmaların sonuçlarıyla uyumlu değerler içermektedir.

Problem 4’ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 40, 80, 120, 160$ değerleri için elde edilen nümerik ve tam çözümleri ile hata normları Çizelge 4.35’te yer almaktadır. Bu çizelge incelendiğinde, bölüntü sayısı arttıkça başlangıçta hata normlarında azalmalar net bir şekilde gözükmemektedir. Bununla birlikte bölüntü sayısının daha büyük değerleri için L_∞ değerlerinde az da olsa azalmalar devam etmekte ancak L_2 hata normunda çok küçük artışlar gözükmemektedir.

Problem 4’ün $t = 0.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.01$ ve $N = 36$ değerleri için LİN-3 ile literatürde yer alan Ref. [37, 45, 49, 55] çalışmalarında sunulan noktasal değerlerinin, L_2 ile L_∞ hata normalarının ve tam çözümün karşılaştırılması Çizelge 4.36’da verildi. Çizelge incelendiğinde LİN-3’ün literatürde yapılan çalışmalarla uyum içerisinde olduğu görülmektedir. L_2 hata normu göz önüne alındığında en az hatanın Ref. [45] (QBCA2) ile verilen çalışmada yer aldığı, daha sonra ise LİN-3 ile Ref. [49] çalışması birbirine çok yakın değerlere sahip olmasına rağmen LİN-3 ile elde edilen değerlerin küçük bir farkla tam çözüme daha yakın olduğu görülmektedir. L_∞ hata normunda da en düşük değerler yine Ref. [45] (QBCA2) çalışmasında yer almakla birlikte daha sonra LİN-3 ile elde edilmiştir.

Çizelge 4.25 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $v = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.10898897	0.10941435	0.10947780	0.10948408	0.10953815
0.2	0.20883298	0.20949531	0.20965783	0.20970016	0.20979215
0.3	0.29041011	0.29147046	0.29172899	0.29179381	0.29189635
0.4	0.34602834	0.34741050	0.34775580	0.34784207	0.34792391
0.5	0.36936348	0.37102296	0.37143746	0.37154104	0.37157748
0.6	0.35670744	0.35850294	0.35895109	0.35906310	0.35904558
0.7	0.30775133	0.30942936	0.30985727	0.30996394	0.30990500
0.8	0.22607875	0.22745419	0.22780256	0.22788771	0.22781741
0.9	0.11982302	0.12045216	0.12066518	0.12072868	0.12068669
1	0	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	1.60622467	0.39426538	0.10782478	0.07197867	
$L_\infty \times 10^3$	2.33814175	0.55536675	0.17175400	0.14863661	

Çizelge 4.26 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $v = 1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ için LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0001$	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.10899363	0.10930014	0.10947780	0.10950583	0.10953815
0.2	0.20890082	0.20933472	0.20965783	0.20972774	0.20979215
0.3	0.29089309	0.29138203	0.29172899	0.29180195	0.29189635
0.4	0.34709989	0.34750441	0.34775580	0.34780375	0.34792391
0.5	0.37116270	0.37137284	0.37143746	0.37143940	0.37157748
0.6	0.35911975	0.35909775	0.35895109	0.35890199	0.35904558
0.7	0.31034934	0.31014918	0.30985727	0.30977254	0.30990500
0.8	0.22828472	0.22804971	0.22780256	0.22771473	0.22781741
0.9	0.12016135	0.12020191	0.12066518	0.12063012	0.12068669
1	0	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	1.05960939	0.62337196	0.10782478	0.09974720	
$L_\infty \times 10^3$	3.25587129	1.76745640	0.17175400	0.14362370	

Çizelge 4.27 : Problem 1'in $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.0001$, $N = 40$ iken $\nu = 1$ ve $\nu = 0.01$ için LİN-3 ile [55]'in nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması.

x	t	$\nu = 1$			$\nu = 0.01$		
		LİN-3	[55]	Tam Çözüm	LİN-3	[55]	Tam Çözüm
0.25	0.4	0.01355	0.01355	0.01357	0.34192	0.34191	0.34191
	0.6	0.00189	0.00188	0.00189	0.26899	0.26896	0.26896
	0.8	0.00026	0.00026	0.00026	0.22148	0.22148	0.22148
	1.0	0.00004	0.00004	0.00004	0.18819	0.18819	0.18819
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.07511	0.07511	0.07511
0.5	0.4	0.01921	0.01920	0.01924	0.66071	0.66071	0.66071
	0.6	0.00267	0.00266	0.00267	0.52947	0.52942	0.52942
	0.8	0.00037	0.00037	0.00037	0.43914	0.43914	0.43914
	1.0	0.00005	0.00005	0.00005	0.37442	0.37442	0.37442
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.15018	0.15017	0.15018
0.75	0.4	0.01361	0.01361	0.01363	0.91029	0.91029	0.91026
	0.6	0.00189	0.00188	0.00189	0.76732	0.76725	0.76724
	0.8	0.00026	0.00026	0.00026	0.64740	0.64740	0.64740
	1.0	0.00004	0.00004	0.00004	0.55605	0.55605	0.55605
	3.0	0.00000	0.00000	0.00000	0.22448	0.22489	0.22481

Çizelge 4.28 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu = 1$ ve $N = 80$ için LİN-3 ile [34], [37], [44] ve [46]'nın nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması.

x	Nümerik Çözümler				Tam Çözüm	
	LİN-1	[34]	[37]	[44]		[46]
0	0.00000000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000000
0.1	0.10953072	0.10978	0.10952	0.10952	0.10953815119	0.10953815
0.2	0.20977721	0.21019	0.20975	0.20976	0.20979214867	0.20979215
0.3	0.29187396	0.29238	0.29184	0.29186	0.29189635032	0.29189635
0.4	0.34789465	0.34845	0.34785	0.34788	0.34792391150	0.34792391
0.5	0.37154295	0.37212	0.37149	0.37153	0.37157747490	0.37157748
0.6	0.35900881	0.35960	0.35896	0.35900	0.35904557846	0.35904558
0.7	0.30987041	0.31044	0.30983	0.30986	0.30990499905	0.30990500
0.8	0.22779021	0.22827	0.22776	0.22779	0.22781740532	0.22781741
0.9	0.12067165	0.12097	0.12065	0.12067	0.12068669034	0.12068669
1	0.00000000	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000000000	0.00000000
$L_2 \times 10^3$	0.02518356	-	-	-	-	-
$L_\infty \times 10^3$	0.03676822	-	-	-	-	-

Çizelge 4.29 : Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $v = 1$ ve $N = 10, 20, 40, 80$ için LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$N = 10$	$N = 20$	$N = 40$	$N = 80$	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.11230977	0.11277045	0.11283145	0.11283419	0.11289225
0.2	0.21526016	0.21594419	0.21610998	0.21615352	0.21625214
0.3	0.29941941	0.30052328	0.30078943	0.30085609	0.30096586
0.4	0.35689780	0.35833132	0.35868706	0.35877578	0.35886306
0.5	0.38112649	0.38284993	0.38327756	0.38338423	0.38342242
0.6	0.36822934	0.37009875	0.37056226	0.37067792	0.37065784
0.7	0.31783011	0.31957571	0.32001994	0.32013044	0.32006569
0.8	0.23355127	0.23499450	0.23535935	0.23544794	0.23537115
0.9	0.12383129	0.12446472	0.12469236	0.12476242	0.12471805
1	0	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	1.66859435	0.40782438	0.11398168	0.08134062	
$L_\infty \times 10^3$	2.42849412	0.57264554	0.18051474	0.19404062	

Çizelge 4.30 : Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $v = 1$ ve $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001, 0.0001$ için LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$\Delta t = 0.01$	$\Delta t = 0.005$	$\Delta t = 0.001$	$\Delta t = 0.0001$	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.11221476	0.11264200	0.11283145	0.11285874	0.11289225
0.2	0.21530976	0.21576163	0.21610998	0.21618541	0.21625214
0.3	0.29988666	0.30041531	0.30078943	0.30086832	0.30096586
0.4	0.35798651	0.35841658	0.35868706	0.35873916	0.35886306
0.5	0.38299093	0.38320910	0.38327756	0.38328015	0.38342242
0.6	0.37075638	0.37072183	0.37056226	0.37050977	0.37065784
0.7	0.32055490	0.32033286	0.32001994	0.31992886	0.32006569
0.8	0.23585671	0.23559771	0.23535935	0.23526487	0.23537115
0.9	0.12380237	0.12399402	0.12469236	0.12465933	0.12471805
1	0	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	1.36783571	0.79940667	0.11398168	0.10297828	
$L_\infty \times 10^3$	4.95805878	2.40728356	0.18051474	0.14806351	

Çizelge 4.31 : Problem 2'nin $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.00001$, $\nu = 0.1$ ve $N = 80$ için LİN-3 ile [32], [34] ve [39]'un nümerik çözümleri ve tam çözümünün karşılaştırılması.

x	t	Nümerik Çözümler				Tam Çözüm
		LİN-3	[32]	[34]	[39]	
$(\Delta t = 0.0001)$						
0.25	0.4	0.31753	0.32679	0.32091	0.31760	0.31752
	0.6	0.24615	0.25117	0.24910	0.24618	0.24614
	0.8	0.19957	0.20270	0.20211	0.19959	0.19956
	1.0	0.16561	0.16780	0.16782	0.16562	0.16560
	3.0	0.02776	0.02804	0.02828	0.02776	0.02775
0.5	0.4	0.58456	0.59661	0.58788	0.58460	0.58454
	0.6	0.45801	0.46581	0.46174	0.45803	0.45798
	0.8	0.36742	0.37293	0.37111	0.36744	0.36740
	1.0	0.29836	0.30253	0.30183	0.29838	0.29834
	3.0	0.04106	0.04155	0.04185	0.04107	0.04106
0.75	0.4	0.64557	0.64680	0.65054	0.64558	0.64562
	0.6	0.50263	0.50852	0.50825	0.50269	0.50268
	0.8	0.38528	0.39117	0.39068	0.38536	0.38534
	1.0	0.29581	0.30066	0.30057	0.29589	0.29586
	3.0	0.03043	0.03081	0.03106	0.03044	0.03044

Çizelge 4.32 : Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 8, 16, 32, 64$ için LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$N = 8$	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	
0	0	0	0	0	0
1	0.40923587	0.40714856	0.40661068	0.40648101	0.40644714
2	0.52861762	0.52777564	0.52771781	0.52770515	0.52769887
3	0.31727979	0.31678637	0.31652368	0.31645721	0.31643558
4	0.09318950	0.09424790	0.09459377	0.09467996	0.09471099
5	0.01330751	0.01515814	0.01554078	0.01563422	0.01566545
6	0.00110533	0.00142056	0.00151577	0.00153990	0.00154797
7	0.00005257	0.00007912	0.00009014	0.00009309	0.00009412
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00000356
$L_2 \times 10^3$	4.17207719	1.01626713	0.24672855	0.05861075	
$L_\infty \times 10^3$	2.78873025	0.70142060	0.16354238	0.04066889	

Çizelge 4.33 : Problem 3'ün $t = 2.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.005$ ve $N = 200$ için LİN-3 ile QBCM [36], CBCM [36]'nın nümerik ve tam çözümleri ile hata normlarının karşılaştırılması.

x	Nümerik Çözümler			Tam Çözüm
	LİN-3	QBCM [36]	CBCM [36]	
0	0.00000000			0.00000000
0.1	0.03999948	0.04000	0.04000	0.03999971
0.2	0.07999847	0.08000	0.08000	0.07999895
0.3	0.11999496	0.12000	0.12000	0.11999572
0.4	0.15997590	0.15998	0.15998	0.15997687
0.5	0.19982594	0.19982	0.19983	0.19982525
0.6	0.23815205	0.23811	0.23812	0.23812066
0.7	0.25348573	0.25302	0.25275	0.25310477
0.8	0.10154570	0.10228	0.10269	0.10209570
0.9	0.00537128	0.00553	0.00568	0.00554249
1	0.00000000			0.00013987
$L_2 \times 10^3$	0.22841061	0.05103	2.11187	
$L_\infty \times 10^3$	0.74150223	0.18902	25.1517	

Çizelge 4.34 : Problem 3'ün $t = 2.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.0005$ ve $N = 200$ için LİN-3 ile [37] ve [51]'in nümerik ve tam çözümleri ile hata normlarının karşılaştırılması.

x	Nümerik Çözümler			Tam Çözüm
	LİN-3	[37]	[51]	
0	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
0.1	0.04000	0.04000	0.04003	0.04000
0.2	0.08000	0.08000	0.08000	0.08000
0.3	0.12000	0.12001	0.12000	0.12000
0.4	0.16000	0.16001	0.16000	0.16000
0.5	0.20000	0.20001	0.20000	0.20000
0.6	0.24000	0.24001	0.24000	0.24000
0.7	0.28000	0.28001	0.28000	0.28000
0.8	0.00620	0.00811	0.00994	0.00977
0.9	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
1	0.00000	0.00000	0.00000	0.00000
$L_2 \times 10^3$	0.73223	-	-	
$L_\infty \times 10^3$	5.95954	-	-	

Çizelge 4.35 : Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 40, 80, 120, 160$ için LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	N = 40	N = 80	N = 120	N = 160	
0	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	0.99951130
0.1	0.97649777	0.97610708	0.97604889	0.97602954	0.97416363
0.2	0.48612032	0.48413579	0.48366050	0.48348577	0.48347496
0.3	0.20727461	0.20779338	0.20788160	0.20791201	0.20796144
0.4	0.20012907	0.20014248	0.20014512	0.20014605	0.20014726
0.5	0.20000236	0.20000261	0.20000266	0.20000267	0.20000270
0.6	0.20000004	0.20000005	0.20000005	0.20000005	0.20000005
0.7	0.19999999	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
0.8	0.19999999	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
0.9	0.19999999	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
1	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
$L_2 \times 10^3$	1.04534831	0.57995491	0.56709781	0.57213427	
$L_\infty \times 10^3$	3.01845716	2.01337878	1.95955730	1.94508081	

Çizelge 4.36 : Problem 4'ün $t = 0.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.01$ ve $N = 36$ için LİN-3 ile [37], [45] (QBAC1), [45] (QBAC2), [49] ve [55]'in nümerik çözümleri ile hata normlarının ve tam çözümünün karşılaştırılması.

x	Nümerik Çözüm						Tam Çözüm
	Uygulanan Yöntemler						
	LİN-3	[37] ($\Delta t = 0.025$)	[45] (QBAC1)	[45] (QBAC2)	[49]	[55]	
0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.056	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.111	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.167	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.222	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.278	0.999	0.999	0.998	0.999	0.998	0.999	0.998
0.333	0.984	0.986	0.980	0.982	0.982	0.983	0.980
0.389	0.849	0.850	0.842	0.850	0.844	0.845	0.847
0.444	0.453	0.448	0.458	0.452	0.458	0.456	0.452
0.500	0.235	0.236	0.240	0.238	0.238	0.237	0.238
0.556	0.203	0.204	0.205	0.204	0.203	0.203	0.204
0.611	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.667	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.722	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
1.000	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
$L_2 \times 10^3$	1.41492	-	1.72434	0.59530	1.45E-03	-	
$L_\infty \times 10^3$	5.09912	-	5.78454	2.76077	5.97E-03	-	

4.5 LİNEERLEŞTİRME-4 (LİN-4)

(4.0.1) ile verilen Burgers denklemine

$$V = -U_x$$

dönüşümü uygulanırsa

$$V + U_x = 0$$

ve

$$U_t - UV + vV_x = 0$$

biçiminde birbirini etkileyen ve birlikte çözümü gereken iki denkleme dönüşür. Şimdi bu iki denkleme kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları yardımıyla kollokasyon yöntemini uygulayalım.

$$U = Z_i$$

olmak üzere

$$U_x + V = 0$$

dönüşümü yapılarak

$$U_t - Z_i V + vV_x = 0$$

şeklinde yazılabilir. Burada

$$U_t = \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t}$$
$$V = \frac{V^{n+1} + V^n}{2}$$
$$V_x = \frac{V_x^{n+1} + V_x^n}{2}$$

ileri fark ve Crank-Nicolson yaklaşımları kullanılırsa denklem

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - Z_i \frac{V^{n+1} + V^n}{2} + v \frac{V_x^{n+1} + V_x^n}{2} = 0$$

haline gelir. Burada eşitliğin iki tarafı da Δt ile çarpılarak

$$U^{n+1} - U^n - \frac{Z_i \Delta t}{2} (V^{n+1} + V^n) + \frac{v \Delta t}{2} (V_x^{n+1} + V_x^n) = 0$$

ifadesi yazılabilir ve aynı zaman adımlarına ait ifadeler eşitliğin aynı yerinde yazılmak üzere düzenlenirse

$$U^{n+1} - \frac{Z_i \Delta t}{2} V^{n+1} + \frac{v \Delta t}{2} V_x^{n+1} = U^n + \frac{Z_i \Delta t}{2} V^n - \frac{v \Delta t}{2} V_x^n$$

elde edilir. Burada (2.2.4) ile verilen yaklaşım ve bu yaklaşımda kübik trigonometrik fonksiyonların kullanılmasıyla elde edilen ve (2.2.5) ile verilen yaklaşımlar yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1} - \frac{Z_i \Delta t}{2} [(\alpha_1 \sigma_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \sigma_i^{n+1} + \alpha_1 \sigma_{i+1}^{n+1})] \\
& + \frac{v \Delta t}{2} (\beta_1 \sigma_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \sigma_{i+1}^{n+1}) \\
& = \alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n + \frac{Z_i \Delta t}{2} [(\alpha_1 \sigma_{i-1}^n + \alpha_2 \sigma_i^n + \alpha_1 \sigma_{i+1}^n)] - \\
& \frac{v \Delta t}{2} (\beta_1 \sigma_{i-1}^n + \beta_2 \sigma_{i+1}^n)
\end{aligned}$$

eşitliği oluşur ve bu eşitlik de düzenlenerek

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1} + \left(\frac{v \Delta t \beta_1}{2} - \frac{Z_i \Delta t \alpha_1}{2} \right) \sigma_{i-1}^{n+1} \\
& + \left(-\frac{Z_i \Delta t \alpha_2}{2} \right) \sigma_i^{n+1} + \left(\frac{v \Delta t \beta_2}{2} - \frac{Z_i \Delta t \alpha_1}{2} \right) \sigma_{i+1}^{n+1} \\
& = \alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n + \left(\frac{Z_i \Delta t \alpha_1}{2} - \frac{v \Delta t \beta_1}{2} \right) \sigma_{i-1}^n + \\
& \left(\frac{Z_i \Delta t \alpha_2}{2} \right) \sigma_i^n + \left(\frac{Z_i \Delta t \alpha_1}{2} - \frac{v \Delta t \beta_2}{2} \right) \sigma_{i+1}^n
\end{aligned} \tag{4.5.1}$$

haline gelir.

Problemin çözümü için şimdi de ikinci denklem olan

$$V + U_x = 0$$

denklemini göz önüne alalım. Bu çözüm için de benzer süreçler takip edilecektir. Öncelikle

$$\begin{aligned}
V &= \frac{V^{n+1} + V^n}{2} \\
U_x &= \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2}
\end{aligned}$$

Crank-Nicolson yaklaşımları kullanılırsa

$$\frac{V^{n+1} + V^n}{2} + \frac{U_x^{n+1} + U_x^n}{2} = 0$$

halini alır. Aynı zaman adımına ait ifadeler bir arada olacak şekilde düzenleme yapılırsa

$$\frac{U_x^{n+1} + V^{n+1}}{2} = -\frac{U_x^n + V^n}{2}$$

olur. Burada

$$U_x = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1}$$

$$V = \alpha_1 \sigma_{i-1} + \alpha_2 \sigma_i + \alpha_1 \sigma_{i+1}$$

yaklaşımları yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned} & \frac{\beta_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_{i+1}^{n+1}}{2} + \frac{\alpha_1 \sigma_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \sigma_i^{n+1} + \alpha_1 \sigma_{i+1}^{n+1}}{2} \\ &= -\frac{\beta_1 \delta_{i-1}^n + \beta_2 \delta_{i+1}^n}{2} - \frac{\alpha_1 \sigma_{i-1}^n + \alpha_2 \sigma_i^n + \alpha_1 \sigma_{i+1}^n}{2} \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

elde edilir. Elde edilen bu eşitlikler, birlikte

$$\begin{aligned} y_1 &= \frac{v\Delta t \beta_1}{2} - \frac{Z_i \Delta t \alpha_1}{2} \\ y_2 &= -\frac{Z_i \Delta t \alpha_2}{2} \\ y_3 &= \frac{v\Delta t \beta_2}{2} - \frac{Z_i \Delta t \alpha_1}{2} \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

olmak üzere (4.5.1) ve (4.5.2) sistemlerindeki δ ve σ parametrelerinin $(N+3) \times (N+1)$ tipindeki katsayılar matrisleri olan $[A_{11}]$, $[A_{12}]$, $[B_{21}]$, $[B_{22}]$ ile δ ve σ parametrelerini içeren $(N+3) \times 1$ tipindeki $[D_{11}]$, $[R_{11}]$ vektörleri

$$[A_{11}^{n+1}] = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix}$$

$$[A_{12}^{n+1}] = \begin{bmatrix} y_1 & y_2 & y_3 & & & \\ & y_1 & y_2 & y_3 & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & y_1 & y_2 & y_3 \end{bmatrix}$$

$$[B_{21}^{n+1}] = \begin{bmatrix} \frac{\beta_1}{2} & 0 & \frac{\beta_2}{2} & & & \\ & \frac{\beta_1}{2} & 0 & \frac{\beta_2}{2} & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \frac{\beta_1}{2} & 0 & \frac{\beta_2}{2} \end{bmatrix}$$

$$[B_{22}^{n+1}] = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & & & \\ & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
[A_{11}^n] &= \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \\
[A_{12}^n] &= \begin{bmatrix} -y_1 & -y_2 & -y_3 & & \\ & -y_1 & -y_2 & -y_3 & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -y_1 & -y_2 & -y_3 \end{bmatrix} \\
[B_{21}^n] &= \begin{bmatrix} -\frac{\beta_1}{2} & 0 & -\frac{\beta_2}{2} & & \\ & -\frac{\beta_1}{2} & 0 & -\frac{\beta_2}{2} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -\frac{\beta_1}{2} & 0 & -\frac{\beta_2}{2} \end{bmatrix} \\
[B_{22}^n] &= \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_1}{2} & -\frac{\alpha_2}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & & \\ & -\frac{\alpha_1}{2} & -\frac{\alpha_2}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} & \\ & & & \ddots & \\ & & & & -\frac{\alpha_1}{2} & -\frac{\alpha_2}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} \end{bmatrix} \\
[D_{11}] &= \begin{bmatrix} \delta_{-1} \\ \delta_0 \\ \vdots \\ \delta_{N+1} \end{bmatrix}, \quad [R_{11}] = \begin{bmatrix} \sigma_{-1} \\ \sigma_0 \\ \vdots \\ \sigma_{N+1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olmak üzere tüm sistem

$$\begin{bmatrix} [A_{11}^{n+1}] & [A_{12}^{n+1}] \\ [B_{21}^{n+1}] & [A_{22}^{n+1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D_{11}^{n+1}] \\ [R_{11}^{n+1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{11}^n] & [A_{12}^n] \\ [B_{21}^n] & [A_{22}^n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D_{11}^n] \\ [R_{11}^n] \end{bmatrix}$$

şeklinde yazılabilir. Bu yazım sonucunda $(2N + 6) \times (2N + 2)$ tipinde bir matris sistemi elde edilmiş olur. Bu sistemde sınır şartları kullanılarak δ_{-1} , δ_{N+1} , σ_{-1} ve σ_{N+1} parametrelerini diğerleri cinsinden yazılacaktır.

$x = x_i$ noktasında

$$U'(x_i, t) = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1}$$

yaklaşımı yardımıyla δ_{-1} bilinmeyişi, $i = 0$ için $x = x_0$ noktasında $U'(x_0, t) = U'(a, t)$ olduğundan

$$\delta_{-1} = \frac{U'(a, t) - \beta_2 \delta_{i+1}}{\beta_1}$$

ve δ_{N+1} bilinmeyişi ise $i = N$ için $x = x_N$ noktasında $U'(x_N, t) = U'(b, t)$ olduğundan

$$\delta_{N+1} = \frac{U'(b, t) - \beta_1 \delta_{N-1}}{\beta_2}$$

şeklinde diğerleri cinsinden bulunur.

Aynı sınır şartlarını V için uygulandırsa

$$V'(x_i, t) = \beta_1 \sigma_{i-1} + \beta_2 \sigma_{i+1}$$

yaklaşımı yardımıyla σ_{-1} bilinmeyişi, $i = 0$ için $x = x_0$ noktasında $V'(x_0, t) = V'(a, t)$ olduğundan

$$\sigma_{-1} = \frac{V'(a, t) - \beta_2 \sigma_{i+1}}{\beta_1}$$

ve σ_{N+1} bilinmeyişi ise $i = N$ için $x = x_N$ noktasında $V'(x_N, t) = V'(b, t)$ olduğundan

$$\sigma_{N+1} = \frac{V'(b, t) - \beta_1 \sigma_{N-1}}{\beta_2}$$

şeklinde diğerleri cinsinden bulunur. Elde edilen δ_{i-1} ve σ_{i-1} ifadeleri (4.5.1) eşitliğinde yerine yazılıp $i = 0$ alınırsa

$$\begin{aligned} & \alpha_1 \left(\frac{(U'(a, t))^{n+1} - \beta_2 \delta_1^{n+1}}{\beta_1} \right) + \alpha_2 \delta_0^{n+1} + \alpha_1 \delta_1^{n+1} + \\ & \left(\frac{v \Delta t \beta_1}{2} - \frac{Z_0 \Delta t \alpha_1}{2} \right) \left(\frac{(V'(a, t))^{n+1} - \beta_2 \sigma_1^{n+1}}{\beta_1} \right) + \\ & \left(-\frac{Z_0 \Delta t \alpha_2}{2} \right) \sigma_0^{n+1} + \left(\frac{v \Delta t \beta_2}{2} - \frac{Z_0 \Delta t \alpha_1}{2} \right) \sigma_1^{n+1} \\ & = \alpha_1 \left(\frac{(U'(a, t))^n - \beta_2 \delta_1^{n+1}}{\beta_1} \right) + \alpha_2 \delta_0^n + \alpha_1 \delta_1^n + \\ & \left(\frac{Z_0 \Delta t \alpha_1}{2} - \frac{v \Delta t \beta_1}{2} \right) \left(\frac{(V'(a, t))^n - \beta_2 \sigma_1^n}{\beta_1} \right) + \\ & \left(\frac{Z_0 \Delta t \alpha_2}{2} \right) \sigma_0^n + \left(\frac{Z_0 \Delta t \alpha_1}{2} - \frac{v \Delta t \beta_2}{2} \right) \sigma_1^n \end{aligned}$$

eşitliği oluşur. Burada gerekli düzenlemeler yapıldığında

$$\begin{aligned}
& \alpha_2 \delta_0^{n+1} + \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_1 \beta_2}{\beta_1} \right) \delta_1^{n+1} + \left(-\frac{Z_0 \Delta t \alpha_2}{2} \right) \sigma_0^{n+1} \\
& + \left[Z_0 \Delta t \alpha_1 \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2\beta_1} \right) \right] \sigma_1^{n+1} \\
& = \alpha_2 \delta_0^n + \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_1 \beta_2}{\beta_1} \right) \delta_1^n + \left(\frac{Z_0 \Delta t \alpha_2}{2} \right) \sigma_0^n \\
& + \left[Z_0 \Delta t \alpha_1 \left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{2\beta_1} \right) \right] \sigma_1^n - \\
& \frac{(U'(a,t))^{n+1}}{\beta_1} \alpha_1 - \frac{(V'(a,t))^{n+1}}{\beta_1} \left(\frac{v \Delta t \beta_1}{2} - \frac{Z_0 \Delta t \alpha_1}{2} \right) \\
& + \frac{(U'(a,t))^n}{\beta_1} \alpha_1 + \frac{(V'(a,t))^n}{\beta_1} \left(\frac{Z_0 \Delta t \alpha_1}{2} - \frac{v \Delta t \beta_1}{2} \right)
\end{aligned}$$

olur. Aynı şekilde δ_{i+1} ve σ_{i+1} ifadeleri yerine yazıldığında $i = N$ için

$$\begin{aligned}
& \alpha_1 \delta_{N-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_N^{n+1} + \alpha_1 \left(\frac{(U'(b,t))^{n+1} - \beta_1 \delta_{N-1}^{n+1}}{\beta_2} \right) + \left(\frac{v \Delta t \beta_1}{2} - \frac{Z_i \Delta t \alpha_1}{2} \right) \sigma_{N-1}^{n+1} \\
& + \left(-\frac{Z_i \Delta t \alpha_2}{2} \right) \sigma_N^{n+1} + \left(\frac{v \Delta t \beta_2}{2} - \frac{Z_i \Delta t \alpha_1}{2} \right) \left(\frac{V'(b,t)^{n+1} - \beta_1 \sigma_{N-1}^{n+1}}{\beta_2} \right) \\
& = \alpha_1 \delta_{N-1}^n + \alpha_2 \delta_N^n + \alpha_1 \left(\frac{(U'(b,t))^n - \beta_1 \delta_{N-1}^n}{\beta_2} \right) + \left(\frac{Z_i \Delta t \alpha_1}{2} - \frac{v \Delta t \beta_1}{2} \right) \sigma_{N-1}^n \\
& + \left(\frac{Z_i \Delta t \alpha_2}{2} \right) \sigma_N^n + \left(\frac{Z_i \Delta t \alpha_1}{2} - \frac{v \Delta t \beta_2}{2} \right) \left(\frac{V'(b,t)^n - \beta_1 \sigma_{N-1}^n}{\beta_2} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_1 \beta_1}{\beta_2} \right) \delta_{N-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_N^{n+1} + \\
& \left[Z_N \Delta t \alpha_1 \left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{2\beta_2} \right) \right] \sigma_{N-1}^{n+1} + \left(-\frac{Z_N \Delta t \alpha_2}{2} \right) \sigma_N^{n+1} \\
& = \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_1 \beta_1}{\beta_2} \right) \delta_{N-1}^n + \alpha_2 \delta_N^n + \\
& \left[Z_N \Delta t \alpha_1 \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2\beta_2} \right) \right] \sigma_{N-1}^n + \left(\frac{Z_N \Delta t \alpha_2}{2} \right) \sigma_N^n \\
& - \alpha_1 \frac{(U'(b,t))^{n+1}}{\beta_2} - \left(\frac{v \Delta t \beta_2}{2} - \frac{Z_N \Delta t \alpha_1}{2} \right) \frac{(V'(b,t))^{n+1}}{\beta_2} \\
& + \alpha_1 \frac{(U'(b,t))^n}{\beta_2} + \left(\frac{Z_N \Delta t \alpha_1}{2} - \frac{v \Delta t \beta_2}{2} \right) \frac{(V'(b,t))^n}{\beta_2}
\end{aligned}$$

olur.

İkinci denklem için ise $x = x_i$ noktasında

$$U(x_i, t) = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

$$V(x_i, t) = \alpha_1 \sigma_{i-1} + \alpha_2 \sigma_i + \alpha_1 \sigma_{i+1}$$

yaklaşımları yardımıyla δ_{-1} ve σ_{-1} bilinmeyenleri, $i = 0$ için $x = x_0$ noktasında $U(x_0, t) = U(a, t)$ ve $V(x_0, t) = V(a, t)$ olduğundan

$$\delta_{-1} = \frac{U(a, t) - \alpha_1 \delta_1 - \alpha_2 \delta_0}{\alpha_1}$$

$$\sigma_{-1} = \frac{V(a, t) - \alpha_2 \sigma_0 - \sigma_1}{\alpha_1}$$

bulunur. δ_{N+1} ve σ_{N+1} bilinmeyenleri ise $i = N$ için $x = x_N$ noktasında $U(x_N, t) = U(b, t)$ ve $V(x_N, t) = V(b, t)$ olduğundan

$$\delta_{N+1} = \frac{U(b, t) - \alpha_1 \delta_{N-1} - \alpha_2 \delta_N}{\alpha_1}$$

$$\sigma_{N+1} = \frac{V(b, t) - \alpha_2 \sigma_N - \sigma_{N-1}}{\alpha_1}$$

şeklinde diğerleri cinsinden bulunur. Elde edilen bu dönüşümler denklemde yerine yazılıp gerekli düzenlemeler yapıldığında

$i = 0$ için

$$\begin{aligned} & \frac{-\alpha_2 \beta_1}{2\alpha_1} \delta_0^{n+1} + \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right) \delta_1^{n+1} + 0 \cdot \sigma_0^{n+1} + 0 \cdot \sigma_1^{n+1} \\ & = \frac{\alpha_2 \beta_1}{2\alpha_1} \delta_0^n + \left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right) \delta_1^n + 0 \cdot \sigma_0^n + 0 \cdot \sigma_1^n \\ & - \frac{\beta_1 U^{n+1}(a, t)}{2\alpha_1} - \frac{V^{n+1}(a, t)}{2} - \frac{\beta_1 U^n(a, t)}{2\alpha_1} - \frac{V^n(a, t)}{2} \end{aligned}$$

ve $i = N$ için

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{2}\right) \delta_{N-1}^{n+1} + \left(\frac{-\alpha_2 \beta_2}{2\alpha_1}\right) \delta_N^{n+1} + 0 \cdot \sigma_{N-1}^{n+1} + 0 \cdot \sigma_N^{n+1} \\ & = \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2}\right) \delta_{N-1}^n + \left(\frac{\alpha_2 \beta_2}{2\alpha_1}\right) \delta_N^n + 0 \cdot \sigma_{N-1}^n + 0 \cdot \sigma_N^n - \\ & \frac{\beta_2 U^{n+1}(b, t)}{2\alpha_1} - \frac{V^{n+1}(b, t)}{2} - \frac{\beta_2 U^n(b, t)}{2\alpha_1} - \frac{V^n(b, t)}{2} \end{aligned}$$

eşitlikleri oluşur. Denklem sistemini elde edilen yeni sonuçlarla tekrar yazarsak (4.5.3) ile birlikte

$$\begin{aligned}
z_1 &= \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_1 \beta_2}{\beta_1} \right) \\
z_2 &= \left(\alpha_1 - \frac{\alpha_1 \beta_1}{\beta_2} \right) \\
z_3 &= -\frac{Z_i \Delta t \alpha_2}{2} \\
z_4 &= Z_i \Delta t \alpha_1 \left(\frac{\beta_2 - \beta_1}{2\beta_1} \right) \\
z_5 &= Z_i \Delta t \alpha_1 \left(\frac{\beta_1 - \beta_2}{2\beta_2} \right) \\
z_6 &= -\alpha_1 \frac{(U'(a,t))^{n+1}}{\beta_1} - \frac{(V'(a,t))^{n+1}}{\beta_1} \left(\frac{v \Delta t \beta_1}{2} - \frac{Z_0 \Delta t \alpha_1}{2} \right) \\
&\quad + \alpha_1 \frac{(U'(a,t))^n}{\beta_1} + \frac{(V'(a,t))^n}{\beta_1} \left(\frac{Z_0 \Delta t \alpha_1}{2} - \frac{v \Delta t \beta_1}{2} \right) \\
z_7 &= -\alpha_1 \frac{(U'(b,t))^{n+1}}{\beta_2} - \frac{(V'(b,t))^{n+1}}{\beta_2} \left(\frac{v \Delta t \beta_2}{2} - \frac{Z_N \Delta t \alpha_1}{2} \right) \\
&\quad + \alpha_1 \frac{(U'(b,t))^n}{\beta_2} + \frac{(V'(b,t))^n}{\beta_2} \left(\frac{Z_N \Delta t \alpha_1}{2} - \frac{v \Delta t \beta_2}{2} \right) \\
z_8 &= -\frac{\beta_1 U^{n+1}(a,t)}{2\alpha_1} - \frac{V^{n+1}(a,t)}{2} - \frac{\beta_1 U^n(a,t)}{2\alpha_1} - \frac{V^n(a,t)}{2} \\
z_9 &= -\frac{\beta_2 U^{n+1}(b,t)}{2\alpha_1} - \frac{V^{n+1}(b,t)}{2} - \frac{\beta_2 U^n(b,t)}{2\alpha_1} - \frac{V^n(b,t)}{2}
\end{aligned}$$

ve ayrıca

$$\begin{aligned}
[A_{11}^{n+1}] &= \begin{bmatrix} \alpha_2 & z_1 & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & z_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} \\
[A_{12}^{n+1}] &= \begin{bmatrix} z_3 & z_4 & & & \\ y_1 & y_2 & y_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & z_4 & z_3 \end{bmatrix} \\
[B_{21}^{n+1}] &= \begin{bmatrix} -\frac{\alpha_2 \beta_1}{2\alpha_1} & \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} & & & \\ \frac{\beta_1}{2} & 0 & \frac{\beta_2}{2} & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} & -\frac{\alpha_2 \beta_2}{2\alpha_1} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$[B_{22}^{n+1}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \frac{\alpha_1}{2} & \frac{\alpha_2}{2} & \frac{\alpha_1}{2} \\ & & \ddots \\ & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A_{11}^n] = \begin{bmatrix} \alpha_2 & z_1 & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & \\ & & & & & z_2 & \alpha_2 \end{bmatrix}$$

$$[A_{12}^n] = \begin{bmatrix} -z_3 & -z_4 & & & & \\ -y_1 & -y_2 & -y_3 & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & & z_4 & -z_3 \end{bmatrix}$$

$$[B_{21}^n] = \begin{bmatrix} \frac{\alpha_2 \beta_1}{2\alpha_1} & \frac{\beta_1 - \beta_2}{2} & & & & \\ & -\frac{\beta_1}{2} & 0 & -\frac{\beta_2}{2} & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & & & \frac{\beta_2 - \beta_1}{2} & \frac{\alpha_2 \beta_2}{2\alpha_1} \end{bmatrix}$$

$$[B_{22}^n] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -\frac{\alpha_1}{2} \\ & -\frac{\alpha_1}{2} & -\frac{\alpha_2}{2} & -\frac{\alpha_1}{2} \\ & & & \ddots \\ & & & & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[D_{11}] = \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_N \end{bmatrix}, \quad [R_{21}] = \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_N \end{bmatrix},$$

$$[G_{11}] = \begin{bmatrix} z_6 \\ \vdots \\ z_7 \end{bmatrix}, \quad [G_{21}] = \begin{bmatrix} z_8 \\ \vdots \\ z_9 \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} [A_{11}^{n+1}] & [A_{12}^{n+1}] \\ [B_{21}^{n+1}] & [B_{22}^{n+1}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D_{11}^{n+1}] \\ [R_{21}^{n+1}] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [A_{11}^n] & [A_{12}^n] \\ [B_{21}^n] & [B_{22}^n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [D_{11}^n] \\ [R_{21}^n] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [G_{11}] \\ [G_{21}] \end{bmatrix}$$

şeklinde $(2N + 2) \times (2N + 2)$ tipinde bir matris sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümünde iterasyona başlamak için δ^0 ve σ^0 parametrelerinin bulunması gerekir. LİN-1'de ayrıntılı bir şekilde adımları anlatılarak elde edilen ve (4.2.5) ile verilen sistemin çözümünden δ^0 parametrelerinin elde edildiği gibi benzer adımlar uygulanarak σ^0 parametreleri de kolayca elde edilebilir. Daha sonra δ^0 ve σ^0 parametreleri kullanılarak istenilen t zamanındaki nümerik sonuçlar elde edilir.

Burada U_N nümerik çözümlerini iyileştirmek adına (4.2.4) denklem sisteminde lineer olmayan terimler için

$$\delta_i^* = \delta_i^n + \frac{1}{2}(\delta_i^{n+1} - \delta_i^n)$$

şeklinde tanımlanan iç iterasyon formülü birkaç defa kullanıldı.

4.5.1 Nümerik Sonuçlar

Problem 3 ve Problem 4'ün LİN-4 ile elde edilen nümerik sonuçları ve tam çözümleri ile literatürde yer alan çalışmalarla karşılaştırılmaları aşağıdaki çizelgelerde verildi. Çizelge 4.37 ile verilen çizelgede, Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 8, 16, 32, 64$ değerleri için nümerik ve tam çözümleri ile hata normları incelendi. Çizelgeye bakıldığında bölüntü sayısının artmasıyla beraber nümerik sonuçların tam çözüme yaklaşması bununla birlikte hata normlarındaki azalma çok nettir. Özellikle bölüntü sayısının 16 ile 32 arasındaki hata normlarının farkı çok dikkat çekmektedir.

Çizelge 4.38 ile verilen çizelgede ise $t = 2.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.005$ ve bölüntü sayısı $N = 200$ iken Problem 3 için LİN-4 ile Ref. [36](QBCM ve CBCM)'deki nümerik çözümler ve tam çözüm ile hata normlarının karşılaştırılması yer almaktadır. Çizelge incelendiğinde LİN-4 ile elde edilen değerlerin, literatürde verilen çalışmalar ile uyumlu olduğu görülmektedir. Bununla birlikte LİN-4 ile elde edilen noktasal değerlerin tam çözüme daha yakın değerler içerdiği ve hata normlarının diğer çalışmalara göre daha küçük olduğu açıktır.

Çizelge 4.39'da ise $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 40, 80, 120, 160$ için Problem 4'ün nümerik ve tam çözümleri ile hata normları yer almaktadır. Bu çizelge incelendiğinde ise bölüntü sayısının artışı başlangıçta beklenen

Çizelge 4.37 : Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 8, 16, 32, 64$ için LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$N = 8$	$N = 16$	$N = 32$	$N = 64$	
0	0	0	0	0	0
1	0.40466785	0.40636144	0.40644227	0.40644683	0.40644714
2	0.53000226	0.52780181	0.52770382	0.52769917	0.52769887
3	0.31413649	0.31630942	0.31642980	0.31643526	0.31643558
4	0.09614996	0.09477837	0.09471454	0.09471119	0.09471099
5	0.01575514	0.01567036	0.01566588	0.01566546	0.01566545
6	0.00123436	0.00153688	0.00154721	0.00154783	0.00154797
7	0.00011489	0.00009100	0.00009344	0.00009361	0.00009412
8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00000356
$L_2 \times 10^3$	3.99184275	0.14797988	0.00777016	0.00167134	
$L_\infty \times 10^3$	2.30338664	0.12616807	0.00578205	0.00355741	

iyileşmeyi sağlamakla birlikte N 'in artışı devam ettikçe hata normlarındaki azalış daha küçük bir şekilde gerçekleşmektedir.

Problem 4'ün $t = 0.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.01$ ve $N = 36$ için LİN-4 ile literatürde yer alan Ref. [37, 45, 49, 55] çalışmalarına ait karşılaştırma çizelgesi Çizelge 4.40 ile sunuldu. Verilen çizelge incelendiğinde L_2 hata normu için en iyi değerler Ref. [45] (QBCA2) ile verilen çalışmada elde edilmiş olup daha sonra ise LİN-4 öne çıkmaktadır. L_∞ hata normu göz önüne alındığında ise yine en iyi sonuçlar Ref. [45] (QBCA2) çalışmasında yer alıyor olup daha sonra Ref. [45] (QBCA1) ile verilen değerler daha az hataya sahiptir. LİN-4 ile Ref. [49] çalışmasındaki L_∞ hata normaları birbirine çok yakın olmasına rağmen küçük bir farkla LİN-4 kullanılarak daha iyi sonuca ulaşılmıştır.

Çizelge 4.38 : Problem 3'ün $t = 2.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.005$ ve $N = 200$ için LİN-4 ile QCBM [36], CBCM [36]'nın nümerik ve tam çözümleri ile hata normlarının karşılaştırılması.

x	Nümerik Çözümler			Tam Çözüm
	LİN-4	QCBM [36]	CBCM [36]	
0	0.00000000			0.00000000
0.1	0.03999949	0.04000	0.04000	0.03999971
0.2	0.07999847	0.08000	0.08000	0.07999895
0.3	0.11999497	0.12000	0.12000	0.11999572
0.4	0.15997580	0.15998	0.15998	0.15997687
0.5	0.19982385	0.19982	0.19983	0.19982525
0.6	0.23812007	0.23811	0.23812	0.23812066
0.7	0.25311333	0.25302	0.25275	0.25310477
0.8	0.10207550	0.10228	0.10269	0.10209570
0.9	0.00552138	0.00553	0.00568	0.00554249
1	0.00000000			0.00013987
$L_2 \times 10^3$	0.01826597	0.05103	2.11187	
$L_\infty \times 10^3$	0.13987158	0.18902	25.1517	

Çizelge 4.39 : Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 40, 80, 120, 160$ için LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$N = 40$	$N = 80$	$N = 120$	$N = 160$	
0	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	0.99951130
0.1	0.97610169	0.97538900	0.97532444	0.97529026	0.97416363
0.2	0.48177682	0.48341483	0.48348633	0.48349612	0.48347496
0.3	0.20793691	0.20796371	0.20796374	0.20796363	0.20796144
0.4	0.20014323	0.20014746	0.20014747	0.20014745	0.20014726
0.5	0.20000233	0.20000273	0.20000272	0.20000271	0.20000270
0.6	0.19999999	0.20000005	0.20000005	0.20000005	0.20000005
0.7	0.19999999	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
0.8	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
0.9	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
1	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
$L_2 \times 10^3$	0.68573982	0.37353280	0.35448299	0.34525511	
$L_\infty \times 10^3$	2.70939383	1.28450471	1.24276625	1.20516706	

Çizelge 4.40 : Problem 4'ün $t = 0.5$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.01$, $\nu = 0.01$ ve $N = 36$ için LIN-4 ile [37], [45] (QBCA1), [45] (QBAC2), [49] ve [55]'in nümerik çözümleri ile hata normlarının ve tam çözümünün karşılaştırılması.

x	Nümerik Çözüm						Tam Çözüm
	Uygulanan Yöntemler						
	LIN-4	[37] ($\Delta t = 0.025$)	[45] (QBCA1)	[45] (QBAC2)	[49]	[55]	
0.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.056	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.111	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.167	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.222	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000	1.000
0.278	0.998	0.999	0.998	0.999	0.998	0.999	0.998
0.333	0.982	0.986	0.980	0.982	0.982	0.983	0.980
0.389	0.853	0.850	0.842	0.850	0.844	0.845	0.847
0.444	0.450	0.448	0.458	0.452	0.458	0.456	0.452
0.500	0.239	0.236	0.240	0.238	0.238	0.237	0.238
0.556	0.204	0.204	0.205	0.204	0.203	0.203	0.204
0.611	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.667	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.722	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.778	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.833	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.889	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
0.944	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
1.000	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200	0.200
$L_2 \times 10^3$	1.12826	-	1.72434	0.59530	1.45E-03	-	
$L_\infty \times 10^3$	5.92254	-	5.78454	2.76077	5.97E-03	-	

5. SONUÇ

Bu bölümde, Bölüm 4'te Burgers denkleminin farklı lineerleştirme teknikleri kullanılarak kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi ile elde edilen nümerik şemaların model problemlere uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar kendi içerisinde karşılaştırıldı. Her bir problem için hangi lineerleştirmenin daha iyi sonuç verdiği çizelgeler halinde sunulularak incelendi.

Çizelge 5.1-5.4'de Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve bölüntü sayısı $N = 10, 20, 40, 80$ için lineerleştirmelerin karşılaştırılması sunuldu. Çizelge 5.1 ve Çizelge 5.2 incelendiğinde kullanılan her üç lineerleştirmenin de birbirine çok yakın değerler verdiği gözlenmektedir. Bununla birlikte bu çizelgelerde hata normları göz önüne alındığında LİN-3 ile elde edilen hata normlarının diğer lineerleştirme teknikler ile elde edilen hata normlarına göre daha ön plana çıktığı görülmektedir. LİN-1 ve LİN-2 ile elde edilen sonuçların birbirine çok yakın olmasıyla beraber LİN-1'in LİN-2'ye göre biraz daha iyi sonuç verdiği anlaşılmaktadır.

Çizelge 5.3 ve 5.4 ile verilen çizelgelerde ise bölüntü sayısının artmasıyla birlikte LİN-3 ile elde edilen sonuçlarda iyileşmenin diğer lineerleştirmelere göre daha yavaş olduğu gözlemlendi. LİN-1 ve LİN-2 hata normları açısından birbirine yakın sonuçlar vermekle beraber en iyi sonuçlar LİN-1 ile bulunmuştur. Özetle bölüntü sayısının azaldığı durumlarda LİN-3 iyi sonuçlar verirken bölüntü sayısının artmasıyla LİN-1 tam çözüme daha yakın sonuçlar vermektedir.

Çizelge 5.5-5.8'de Problem 1'in zaman adım uzunluğunun değişimine bağlı olarak LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile elde edilen nümerik sonuçlar ve hata normları karşılaştırıldı. Çizelge 5.5 ve Çizelge 5.6 incelendiğinde LİN-1'in zaman adımının küçülmesiyle en iyi sonucu verdiği görülmektedir. LİN-2, LİN-1'e çok yakın sonuçlar vermekle beraber hata normları çok az bir fark olsa da daha büyüktür. Bununla birlikte zaman adımının daha büyük olduğu bu iki çizelgede LİN-3 ile elde edilen hata normları diğer iki lineerleştirmeye göre çok daha büyüktür.

Çizelge 5.7'ye bakıldığında ise LİN-3 ile elde edilen sonuçların diğer lineerleştirme teknikleri kullanılarak elde edilen sonuçlara yakın olduğu çok rahat görülmektedir. Ancak bu çizelgeden en iyi sonuçların LİN-1 yaklaşımı ile elde edildiği söylenebilir. Çizelge 5.8'de ise zaman adımının daha da küçülmesiyle beraber LİN-3 ile elde edilen hata normlarının diğer iki lineerleştirmeden daha küçük olduğu açıktır. Sonuç olarak zaman adımının küçük değerleri için LİN-3 iyi sonuçlar verirken zaman adımının daha büyük değerleri için LİN-1 daha iyi sonuçlar vermektedir.

Çizelge 5.1 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $v = 1$ ve $N = 10$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler			
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	
0	0	0	0	0
0.1	0.10908768	0.10908758	0.10898897	0.10953815
0.2	0.20887654	0.20887686	0.20883298	0.20979215
0.3	0.29050309	0.29050326	0.29041011	0.29189635
0.4	0.34607360	0.34607376	0.34602834	0.34792391
0.5	0.36936149	0.36936151	0.36936348	0.37157748
0.6	0.35665582	0.35665570	0.35670744	0.35904558
0.7	0.30763557	0.30763540	0.30775133	0.30990500
0.8	0.22602149	0.22602114	0.22607875	0.22781741
0.9	0.11969008	0.11969020	0.11982302	0.12068669
1	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	1.62470084	1.62472208	1.60622467	
$L_\infty \times 10^3$	2.38975662	2.38988339	2.33814175	

Çizelge 5.2 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $v = 1$ ve $N = 20$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler			
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	
0	0	0	0	0
0.1	0.10942554	0.10942573	0.10941435	0.10953815
0.2	0.20956320	0.20956342	0.20949531	0.20979215
0.3	0.29154775	0.29154797	0.29147046	0.29189635
0.4	0.34746051	0.34746067	0.34741050	0.34792391
0.5	0.37102177	0.37102179	0.37102296	0.37157748
0.6	0.35844536	0.35844524	0.35850294	0.35904558
0.7	0.30933409	0.30933387	0.30942936	0.30990500
0.8	0.22736499	0.22736475	0.22745419	0.22781741
0.9	0.12043539	0.12043517	0.12045216	0.12068669
1	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.40794665	0.40797369	0.39426538	
$L_\infty \times 10^3$	0.60021910	0.60033655	0.55536675	

Çizelge 5.3 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 40$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler			
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	
0	0	0	0	0
0.1	0.10950929	0.10950942	0.10947780	0.10953815
0.2	0.20973357	0.20973378	0.20965783	0.20979215
0.3	0.29180738	0.29180760	0.29172899	0.29189635
0.4	0.34780594	0.30853159	0.34775580	0.34792391
0.5	0.37143633	0.34780610	0.37143746	0.37157748
0.6	0.35889341	0.37143636	0.35895109	0.35904558
0.7	0.30976044	0.30976023	0.30985727	0.30990500
0.8	0.22770295	0.22770272	0.22780256	0.22781741
0.9	0.12062314	0.12062299	0.12066518	0.12068669
1	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.10354297	0.10357036	0.10782478	
$L_\infty \times 10^3$	0.15223656	0.15238573	0.17175400	

Çizelge 5.4 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 80$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler			
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	
0	0	0	0	0
0.1	0.10953018	0.10953031	0.10948408	0.10953815
0.2	0.20977608	0.20977629	0.20970016	0.20979215
0.3	0.29187219	0.29187241	0.29179381	0.29189635
0.4	0.34789222	0.34789237	0.34784207	0.34792391
0.5	0.37153994	0.37153997	0.37154104	0.37157748
0.6	0.35900546	0.35900534	0.35906310	0.35904558
0.7	0.30986714	0.30986692	0.30996394	0.30990500
0.8	0.22778756	0.22778733	0.22788771	0.22781741
0.9	0.12067017	0.12067002	0.12072868	0.12068669
1	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.02743295	0.02745852	0.07197867	
$L_\infty \times 10^3$	0.04013340	0.04026775	0.14863661	

Çizelge 5.5 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.01$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler			
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	
0	0	0	0	0
0.1	0.10940916	0.10942200	0.10899363	0.10953815
0.2	0.20954541	0.20956642	0.20890082	0.20979215
0.3	0.29155334	0.29157546	0.29089309	0.29189635
0.4	0.34751466	0.34752987	0.34709989	0.34792391
0.5	0.37113869	0.37114106	0.37116270	0.37157748
0.6	0.35861854	0.35860672	0.35911975	0.35904558
0.7	0.30953291	0.30951113	0.31034934	0.30990500
0.8	0.22754123	0.22751818	0.22828472	0.22781741
0.9	0.12053933	0.12052444	0.12016135	0.12068669
1	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.31208820	0.31252442	1.05960939	
$L_\infty \times 10^3$	0.43984924	0.44317473	3.25587129	

Çizelge 5.6 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.005$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler			
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	
0	0	0	0	0
0.1	0.10948501	0.10948819	0.10930014	0.10953815
0.2	0.20968795	0.20969320	0.20933472	0.20979215
0.3	0.29174579	0.29175132	0.29138203	0.29189635
0.4	0.34773535	0.34773915	0.34750441	0.34792391
0.5	0.37136423	0.37136482	0.37137284	0.37157748
0.6	0.35882685	0.35882390	0.35909775	0.35904558
0.7	0.30970538	0.30969994	0.31014918	0.30990500
0.8	0.22766383	0.22765807	0.22804971	0.22781741
0.9	0.12060288	0.12059918	0.12020191	0.12068669
1	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.15351772	0.15392054	0.62337196	
$L_\infty \times 10^3$	0.21948027	0.22168161	1.76745640	

Çizelge 5.7 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.001$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler			
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	
0	0	0	0	0
0.1	0.10950929	0.10950942	0.10947780	0.10953815
0.2	0.20973357	0.20973378	0.20965783	0.20979215
0.3	0.29180738	0.29180760	0.29172899	0.29189635
0.4	0.34780594	0.30853159	0.34775580	0.34792391
0.5	0.37143633	0.34780610	0.37143746	0.37157748
0.6	0.35889341	0.37143636	0.35895109	0.35904558
0.7	0.30976044	0.30976023	0.30985727	0.30990500
0.8	0.22770295	0.22770272	0.22780256	0.22781741
0.9	0.12062314	0.12062299	0.12066518	0.12068669
1	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.10354297	0.10357036	0.10782478	
$L_\infty \times 10^3$	0.15223656	0.15238573	0.17175400	

Çizelge 5.8 : Problem 1'in $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.0001$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler			
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	
0	0	0	0	0
0.1	0.10951029	0.10951029	0.10950583	0.10953815
0.2	0.20973545	0.20973545	0.20972774	0.20979215
0.3	0.29180992	0.29180992	0.29180195	0.29189635
0.4	0.34780886	0.34780886	0.34780375	0.34792391
0.5	0.37143931	0.37143931	0.37143940	0.37157748
0.6	0.35889615	0.35889615	0.35890199	0.35904558
0.7	0.30976271	0.30976271	0.30977254	0.30990500
0.8	0.22770456	0.22770456	0.22771473	0.22781741
0.9	0.12062398	0.12062397	0.12063012	0.12068669
1	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.10150485	0.10150514	0.09974720	
$L_\infty \times 10^3$	0.14959020	0.14959169	0.14362370	

Problem 2 için kullanılan LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 lineerleştirmelerinden düğüm noktalarının sayısının değişimine göre hangi lineerleştirmeden daha iyi sonuç elde edildiği Çizelge 5.9-5.12 ile sunuldu. Çizelge 5.9 ve Çizelge 5.10 incelendiğinde LİN-1 ve LİN-2 ile birbirine çok yakın sonuçlar alındığı bununla birlikte düğüm noktalarının görece daha düşük olduğu bu çizelgelerde LİN-3 ile daha iyi sonuçlar elde edildiği görülmektedir. Bölüntü sayısının daha büyük olduğu Çizelge 5.11 ve Çizelge 5.12’de ise LİN-3 ile elde edilen sonuçlarda bölüntü sayısının artmasıyla beraber görülen iyileşme, LİN-1 ve LİN-2’ye göre daha azdır. LİN-1 ve LİN-2 ile elde edilen sonuçlar birbirine olan yakınlığını korumakla beraber bölüntü sayısının büyük değerleri için LİN-1’in daha iyi sonuçlar verdiği açıktır.

Çizelge 5.9 : Problem 2’nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 10$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler			
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	
0	0	0	0	0
0.1	0.11242409	0.11242395	0.11230977	0.11289225
0.2	0.21530194	0.21530230	0.21526016	0.21625214
0.3	0.29952188	0.29952205	0.29941941	0.30096586
0.4	0.35694618	0.35694635	0.35689780	0.35886306
0.5	0.38112480	0.38112483	0.38112649	0.38342242
0.6	0.36817542	0.36817528	0.36822934	0.37065784
0.7	0.31770268	0.31770252	0.31783011	0.32006569
0.8	0.23349699	0.23349659	0.23355127	0.23537115
0.9	0.12367638	0.12367655	0.12383129	0.12471805
1	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	1.68832152	1.68834533	1.66859435	
$L_\infty \times 10^3$	2.48241267	2.48255138	2.42849412	

Çizelge 5.13-5.16’da ise Problem 2’nin çözümü için kullanılan üç lineerleştirmeden zaman adım uzunluğunun değişimine göre hangisinin daha iyi sonuçlar verdiği incelendi. Çizelge 5.13 ve Çizelge 5.14 incelendiğinde seçilen zaman adımları için LİN-1 ile LİN-2 ve LİN-3 lineerleştirmelerine göre daha iyi sonuçlar alındığı görülmektedir.

Çizelge 5.15 ile verilen çizelge incelendiğinde ise hem LİN-2 hem de LİN-3’ün, LİN-1’e yakın sonuçlar verdiği ancak yine de LİN-1 ile elde edilen hata normlarının daha düşük olduğu görülmektedir. Zaman adımının en küçük seçildiği Çizelge 5.16’da ise en iyi sonuçlar LİN-3

Çizelge 5.10 : Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $v = 1$ ve $N = 20$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler			
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	
0	0	0	0	0
0.1	0.11277588	0.11277608	0.11277045	0.11289225
0.2	0.21601592	0.21601614	0.21594419	0.21625214
0.3	0.30060670	0.30060692	0.30052328	0.30096586
0.4	0.35838576	0.35838591	0.35833132	0.35886306
0.5	0.38284935	0.38284936	0.38284993	0.38342242
0.6	0.37003737	0.37003724	0.37009875	0.37065784
0.7	0.31947376	0.31947353	0.31957571	0.32006569
0.8	0.23490077	0.23490051	0.23499450	0.23537115
0.9	0.12445626	0.12445601	0.12446472	0.12471805
1	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.42186725	0.42190093	0.40782438	
$L_\infty \times 10^3$	0.62046778	0.62059646	0.57264554	

Çizelge 5.11 : Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $v = 1$ ve $N = 40$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler			
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	
0	0	0	0	0
0.1	0.11286243	0.11286257	0.11283145	0.11289225
0.2	0.21619176	0.21619197	0.21610998	0.21625214
0.3	0.30087430	0.30087452	0.30078943	0.30096586
0.4	0.35874173	0.35874187	0.35868706	0.35886306
0.5	0.38327708	0.38327709	0.38327756	0.38342242
0.6	0.37050074	0.37050061	0.37056226	0.37065784
0.7	0.31991598	0.31991575	0.32001994	0.32006569
0.8	0.23525225	0.23525201	0.23535935	0.23537115
0.9	0.12465189	0.12465173	0.12469236	0.12471805
1	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.10694288	0.10697776	0.11398168	
$L_\infty \times 10^3$	0.15727983	0.15744144	0.18051474	

Çizelge 5.12 : Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 80$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler			
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	
0	0	0	0	0
0.1	0.11288399	0.11288411	0.11283419	0.11289225
0.2	0.21623555	0.21623576	0.21615352	0.21625214
0.3	0.30094098	0.30094120	0.30085609	0.30096586
0.4	0.35883047	0.35883062	0.35877578	0.35886306
0.5	0.38338380	0.38338381	0.38338423	0.38342242
0.6	0.37061645	0.37061632	0.37067792	0.37065784
0.7	0.32002650	0.32002627	0.32013044	0.32006569
0.8	0.23534016	0.23533991	0.23544794	0.23537115
0.9	0.12470084	0.12470069	0.12476242	0.12471805
1	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.02832185	0.02835499	0.08134062	
$L_\infty \times 10^3$	0.04141275	0.04155922	0.19404062	

ile elde edilmiştir. LİN-2 ile elde edilen sonuçlar LİN-1 ile elde edilen sonuçlara çok yaklaşmış olmasına rağmen hala daha büyük hatalara sahiptir.

Çizelge 5.17-5.20'de Problem 3'ün çözümünde kullanılan LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 lineerleştirmeleri $N = 8, 16, 32, 64$ değerleri için karşılaştırdı. Bu çizelgelerden bölüntü sayısının en az seçildiği Çizelge 5.17'ye bakıldığında elde edilen sonuçların birbirine yakın olduğu gözlenmektedir. Yine de LİN-4'ün sonuçlarının diğerlerine göre daha iyi olduğu açıktır. LİN-4'ten sonra ise hata normları göz önüne alındığında LİN-3 diğerlerine göre daha iyi sonuçlar vermiştir ve daha sonra da LİN-2 ve LİN-1 şeklinde sıralama yapılabilmektedir.

Çizelge 5.18'de ise her iki hata normları düşünüldüğünde LİN-4 ile elde edilen sonuçlardaki iyileşme diğerlerine göre çok daha fazla olmuştur ve tam çözüme daha yakındır. L_2 hata normu için bakıldığında LİN-4'ten sonra en iyi sonuçlar sırasıyla LİN-3, LİN-1 ve LİN-2 ile elde edilirken L_∞ hata normunda ise LİN-4'ten sonraki sıralama LİN-1, LİN-3 ve LİN-2 şeklinde olmaktadır.

Çizelge 5.19 ve Çizelge 5.20'ye bakıldığında ise bölüntü sayısının artmasıyla birlikte en iyi sonuçlar LİN-4 ile elde edilirken daha sonra ise birbirine yakın değerler veren üç lineerleştirme içerisinden LİN-3 daha ön plana çıkmaktadır. Diğer iki lineerleştirme arasında ise LİN-1 çok küçük farkla da olsa LİN-2'ye göre daha iyi sonuçlar vermiştir.

Çizelge 5.13 : Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.01$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler			
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	
0	0	0	0	0
0.1	0.11266704	0.11268054	0.11221476	0.11289225
0.2	0.21600953	0.21603069	0.21530976	0.21625214
0.3	0.30060499	0.30062718	0.29988666	0.30096586
0.4	0.35844244	0.35845732	0.35798651	0.35886306
0.5	0.38297202	0.38297360	0.38299093	0.38342242
0.6	0.37022067	0.37020760	0.37075638	0.37065784
0.7	0.31967811	0.31965475	0.32055490	0.32006569
0.8	0.23509988	0.23507539	0.23585671	0.23537115
0.9	0.12447721	0.12446097	0.12380237	0.12471805
1	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.33924477	0.34025011	1.36783571	
$L_\infty \times 10^3$	0.45120217	0.45511666	4.95805878	

Çizelge 5.14 : Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.005$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler			
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	
0	0	0	0	0
0.1	0.11284419	0.11284744	0.11264200	0.11289225
0.2	0.21614405	0.21614936	0.21576163	0.21625214
0.3	0.30081005	0.30081558	0.30041531	0.30096586
0.4	0.35866897	0.35867269	0.35841658	0.35886306
0.5	0.38320333	0.38320372	0.38320910	0.38342242
0.6	0.37043274	0.37042947	0.37072183	0.37065784
0.7	0.31985936	0.31985354	0.32033286	0.32006569
0.8	0.23521208	0.23520596	0.23559771	0.23537115
0.9	0.12463819	0.12463425	0.12399402	0.12471805
1	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.15922180	0.15979895	0.79940667	
$L_\infty \times 10^3$	0.22571204	0.22836066	2.40728356	

Çizelge 5.15 : Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.001$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler			
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	
0	0	0	0	0
0.1	0.11286243	0.11286257	0.11283145	0.11289225
0.2	0.21619176	0.21619197	0.21610998	0.21625214
0.3	0.30087430	0.30087452	0.30078943	0.30096586
0.4	0.35874173	0.35874187	0.35868706	0.35886306
0.5	0.38327708	0.38327709	0.38327756	0.38342242
0.6	0.37050074	0.37050061	0.37056226	0.37065784
0.7	0.31991598	0.31991575	0.32001994	0.32006569
0.8	0.23525225	0.23525201	0.23535935	0.23537115
0.9	0.12465189	0.12465173	0.12469236	0.12471805
1	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.10694288	0.10697776	0.11398168	
$L_\infty \times 10^3$	0.15727983	0.15744144	0.18051474	

Çizelge 5.16 : Problem 2'nin $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $N = 40$, $\nu = 1$ ve $\Delta t = 0.0001$ için LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler			
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	
0	0	0	0	0
0.1	0.11286350	0.11286350	0.11285874	0.11289225
0.2	0.21619374	0.21619374	0.21618541	0.21625214
0.3	0.30087695	0.30087695	0.30086832	0.30096586
0.4	0.35874473	0.35874473	0.35873916	0.35886306
0.5	0.38328012	0.38328012	0.38328015	0.38342242
0.6	0.37050355	0.37050354	0.37050977	0.37065784
0.7	0.31991832	0.31991831	0.31992886	0.32006569
0.8	0.23525393	0.23525392	0.23526487	0.23537115
0.9	0.12465277	0.12465277	0.12465933	0.12471805
1	0	0	0	0
$L_2 \times 10^3$	0.10484335	0.10484370	0.10297828	
$L_\infty \times 10^3$	0.15457408	0.15457570	0.14806351	

Çizelge 5.17 : Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 8$ için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler				
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	LİN-4	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.40925432	0.40925432	0.40923587	0.40466785	0.40644714
0.2	0.52860356	0.52860356	0.52861762	0.53000226	0.52769887
0.3	0.31728431	0.31728431	0.31727979	0.31413649	0.31643558
0.4	0.09319195	0.09319195	0.09318950	0.09614996	0.09471099
0.5	0.01330718	0.01330718	0.01330751	0.01575514	0.01566545
0.6	0.00110539	0.00110539	0.00110533	0.00123436	0.00154797
0.7	0.00005256	0.00005256	0.00005257	0.00011489	0.00009412
0.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00000356
0.9					
1					
$L_2 \times 10^3$	4.18157274	4.18157238	4.17207719	3.99184275	
$L_\infty \times 10^3$	2.80718043	2.80717937	2.78873025	2.30338664	

Çizelge 5.18 : Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 1$ ve $N = 16$ için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler				
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	LİN-4	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.40714790	0.40714791	0.40714856	0.40636144	0.40644714
0.2	0.52777217	0.52777216	0.52777564	0.52780181	0.52769887
0.3	0.31678705	0.31678705	0.31678637	0.31630942	0.31643558
0.4	0.09425035	0.09425035	0.09424790	0.09477837	0.09471099
0.5	0.01515829	0.01515829	0.01515814	0.01567036	0.01566545
0.6	0.00142056	0.00142056	0.00142056	0.00153688	0.00154797
0.7	0.00007912	0.00007912	0.00007912	0.00009100	0.00009412
0.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00000356
0.9					
1					
$L_2 \times 10^3$	1.02112067	1.02112194	1.01626713	0.14797988	
$L_\infty \times 10^3$	0.70075809	0.70076556	0.70142060	0.12616807	

Çizelge 5.19 : Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $v = 1$ ve $N = 32$ için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler				
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	LİN-4	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.40661879	0.40661879	0.40661068	0.40644227	0.40644714
0.2	0.52771553	0.52771553	0.52771781	0.52770382	0.52769887
0.3	0.31652424	0.31652424	0.31652368	0.31642980	0.31643558
0.4	0.09459617	0.09459617	0.09459377	0.09471454	0.09471099
0.5	0.01554100	0.01554100	0.01554078	0.01566588	0.01566545
0.6	0.00151577	0.00151577	0.00151577	0.00154721	0.00154797
0.7	0.00009014	0.00009014	0.00009014	0.00009344	0.00009412
0.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00000356
0.9					
1					
$L_2 \times 10^3$	0.25116818	0.25116948	0.24672855	0.00777016	
$L_\infty \times 10^3$	0.17164395	0.17164654	0.16354238	0.00578205	

Çizelge 5.20 : Problem 3'ün $t = 1.1$, $0 \leq x \leq 8$, $\Delta t = 0.001$, $v = 1$ ve $N = 64$ için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler				
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	LİN-4	
0	0	0	0	0	0
0.1	0.40648981	0.40648981	0.40648101	0.40644683	0.40644714
0.2	0.52770300	0.52770300	0.52770515	0.52769917	0.52769887
0.3	0.31645772	0.31645772	0.31645721	0.31643526	0.31643558
0.4	0.09468235	0.09468235	0.09467996	0.09471119	0.09471099
0.5	0.01563446	0.01563446	0.01563422	0.01566546	0.01566545
0.6	0.00153991	0.00153991	0.00153990	0.00154783	0.00154797
0.7	0.00009309	0.00009309	0.00009309	0.00009361	0.00009412
0.8	0.0	0.0	0.0	0.0	0.00000356
0.9					
1					
$L_2 \times 10^3$	0.06253367	0.06253498	0.05861075	0.00167134	
$L_\infty \times 10^3$	0.04266499	0.04266722	0.04066889	0.00355741	

Çizelge 5.21 : Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 40$ için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler				
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	LİN-4	
0	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	0.99951130
0.1	0.97693301	0.97676168	0.97649777	0.97610169	0.97416363
0.2	0.48638738	0.48638223	0.48612032	0.48177682	0.48347496
0.3	0.20728185	0.20728176	0.20727461	0.20793691	0.20796144
0.4	0.20012908	0.20012908	0.20012907	0.20014323	0.20014726
0.5	0.20000236	0.20000236	0.20000236	0.20000233	0.20000270
0.6	0.20000004	0.20000004	0.20000004	0.19999999	0.20000005
0.7	0.19999999	0.19999999	0.19999999	0.19999999	0.20000000
0.8	0.19999999	0.19999999	0.19999999	0.20000000	0.20000000
0.9	0.19999999	0.19999993	0.19999999	0.20000000	0.20000000
1	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
$L_2 \times 10^3$	1.16176188	1.14285061	1.04534831	0.68573982	
$L_\infty \times 10^3$	3.34370822	3.34305836	3.01845716	2.70939383	

Çizelge 5.21-5.24'te düğüm noktalarının $N = 40, 80, 120, 160$ olduğu durumlarda Problem 4 için elde edilen sonuçları karşılaştırabilmek için her bir bölüntü sayısı için ayrı ayrı çizelgeler verildi. Verilen bu çizelgelerden Çizelge 5.21 ve Çizelge 5.22'de bölüntü sayısının sırasıyla 40 ve 80 değerleri için karşılaştırılmalar yer almaktadır. Bu iki çizelge de en iyi sonuçlar LİN-4 ile elde edilirken daha sonra ise LİN-3 ile elde edilmiştir. Diğer iki lineerleştirme için ise Çizelge 5.22'e bakıldığında LİN-2, LİN-1'e göre daha iyi sonuç verirken Çizelge 5.22'de tam tersi bir durum ortaya çıkmaktadır.

Çizelge 5.23'de her iki hata normu göz önüne alındığında LİN-4 tam çözüme daha yakın sonuçlar vermektedir. Ancak hata normları açısından LİN-4 dışında kalan diğer üç lineerleştirme arasındaki sıralamada farklılıklar olmaktadır. L_2 hata normu için sıralama LİN-2, LİN-1 ve LİN-3 şeklinde olurken L_∞ hata normu için en iyi sonuçların sırasıyla LİN-2, LİN-3 ve LİN-1 ile elde edildiği görülmektedir.

Çizelge 5.24'te ise en iyi sonuçlar yine LİN-4 ile elde edilirken daha sonra sırasıyla LİN-2, LİN-1 ve LİN-3 ile elde edilmiştir.

Sonuç olarak, bu tezde göz önüne alınan Burgers denkleminde, denklemdeki UU_x lineer olmayan terimi yerine dört farklı lineerleştirme tekniği kullanılarak kübik trigonometrik

Çizelge 5.22 : Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 80$ için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler				
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	LİN-4	
0	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	0.99951130
0.1	0.97617184	0.97610397	0.97610708	0.97538900	0.97416363
0.2	0.48438915	0.48438883	0.48413579	0.48341483	0.48347496
0.3	0.20780375	0.20780367	0.20779338	0.20796371	0.20796144
0.4	0.20014250	0.20014250	0.20014248	0.20014746	0.20014726
0.5	0.20000261	0.20000261	0.20000261	0.20000273	0.20000270
0.6	0.20000005	0.20000005	0.20000005	0.20000005	0.20000005
0.7	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
0.8	0.20000020	0.20000020	0.20000000	0.20000000	0.20000000
0.9	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
1	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
$L_2 \times 10^3$	0.61498010	0.59957294	0.57995491	0.37353280	
$L_\infty \times 10^3$	2.10411199	2.03916455	2.01337878	1.28450471	

Çizelge 5.23 : Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 120$ için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler				
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	LİN-4	
0	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	0.99951130
0.1	0.97602633	0.97598982	0.97604889	0.97532444	0.97416363
0.2	0.48391082	0.48391170	0.48366050	0.48348633	0.48347496
0.3	0.20789248	0.20789240	0.20788160	0.20796374	0.20796144
0.4	0.20014514	0.20014514	0.20014512	0.20014747	0.20014726
0.5	0.20000266	0.20000266	0.20000266	0.20000272	0.20000270
0.6	0.20000005	0.20000005	0.20000005	0.20000005	0.20000005
0.7	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
0.8	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
0.9	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
1	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
$L_2 \times 10^3$	0.55999319	0.55096924	0.56709781	0.35448299	
$L_\infty \times 10^3$	1.97111503	1.93743857	1.95955730	1.24276625	

Çizelge 5.24 : Problem 4'ün $t = 0.1$, $0 \leq x \leq 1$, $\Delta t = 0.001$, $\nu = 0.01$, $\alpha = 0.4$, $\mu = 0.6$, $\gamma = 0.125$ ve $N = 160$ için LİN-1, LİN-2, LİN-3 ve LİN-4 ile nümerik ve tam çözümleri ile hata normları.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	Uygulanan Lineerleştirmeler				
	LİN-1	LİN-2	LİN-3	LİN-4	
0	1.00000000	1.00000000	1.00000000	1.00000000	0.99951130
0.1	0.97597336	0.97595042	0.97602954	0.97529026	0.97416363
0.2	0.48373487	0.48373627	0.48348577	0.48349612	0.48347496
0.3	0.20792306	0.20792298	0.20791201	0.20796363	0.20796144
0.4	0.20014607	0.20014607	0.20014605	0.20014745	0.20014726
0.5	0.20000268	0.20000268	0.20000267	0.20000271	0.20000270
0.6	0.20000005	0.20000005	0.20000005	0.20000005	0.20000005
0.7	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
0.8	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
0.9	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
1	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000	0.20000000
$L_2 \times 10^3$	0.54830453	0.54262555	0.57213427	0.34525511	
$L_\infty \times 10^3$	1.92230207	1.90162190	1.94508081	1.20516706	

B-spline kollokasyon sonlu eleman yönteminin başarılı bir şekilde uygulanabildiği ve iyi sonuçlar elde edildiği görüldü. Dolayısıyla tezde kullanılan bu yöntemin fizik ve mühendislikte karşılaşılan benzer yapıdaki lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlere de kolaylıkla uygulanabileceği anlaşılmaktadır.

KAYNAKLAR

- [1] **Dag, I., Ersoy Hepson, O. ve Kaçmaz, O.** (2017). The trigonometric cubic B-spline algorithm for Burgers' equation, *International Journal of Nonlinear Science*, 24(2), 120–128.
- [2] **Kutluay, S., Esen, A. ve Dag, I.** (2004). Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 167(1), 21–33.
- [3] **Dağ, İ., Irk, D. ve Saka, B.** (2005). A numerical solution of the Burgers' equation using cubic B-splines, *Applied Mathematics and Computation*, 163(1), 199–211.
- [4] **Kadalbajoo, M.K. ve Awasthi, A.** (2006). A numerical method based on Crank-Nicolson scheme for Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 182(2), 1430–1442.
- [5] **Liao, W.** (2008). An implicit fourth-order compact finite difference scheme for one-dimensional Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 206(2), 755–764.
- [6] **Öziş, T., Aksan, E.N. ve Özdeş, A.** (2003). A finite element approach for solution of Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 139(2-3), 417–428.
- [7] **Özis, T., Esen, A. ve Kutluay, S.** (2005). Numerical solution of Burgers' equation by quadratic B-spline finite elements, *Applied Mathematics and Computation*, 165(1), 237–249.
- [8] **Dağ, I., Irk, D. ve Şahin, A.** (2005). B-spline collocation methods for numerical solutions of the Burgers' equation, *Mathematical Problems in Engineering*, 2005(5), 521–538.
- [9] **Soliman, A.A.** (2012). A Galerkin Solution for Burgers' Equation Using Cubic B-Spline Finite Elements, *Abstract and Applied Analysis*, 2012, 1–15.
- [10] **Saka, B. ve Dağ, I.** (2008). A numerical study of the Burgers' equation, *Journal of the Franklin Institute. Engineering and Applied Mathematics*, 345(4), 328–348.
- [11] **Mittal, R.C. ve Jain, R.K.** (2012). Numerical solutions of nonlinear Burgers' equation with modified cubic B-splines collocation method, *Applied Mathematics and Computation*, 218(15), 7839–7855.
- [12] **Bonkile, M.P., Awasthi, A., Lakshmi, C., Mukundan, V. ve Aswin, V.S.** (2018). A systematic literature review of Burgers' equation with recent advances, *Pramana*, 90(6).
- [13] **Bateman, H.** (1915). Some Recent Researchers on the Motion of Fluids, *Monthly Weather Review*, 43(4), 163–170.
- [14] **Nieuwstadt, F.T.M.** (1995). *Selected Papers of J.M. Burgers*, Springer Netherlands Imprint Springer, Dordrecht.

- [15] **Hopf, E.** (1950). The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u_{xx}$, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 3(3), 201–230.
- [16] **Cole, J.D.** (1951). On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics, *Quarterly of Applied Mathematics*, 9(3), 225–236.
- [17] **Murray, J.D.** (1973). On Burgers' model equations for turbulence, *Journal of Fluid Mechanics*, 59(2), 263–279.
- [18] **Baker, J., Armaou, A. ve Christofides, P.D.** (2000). Nonlinear Control of Incompressible Fluid Flow: Application to Burgers' Equation and 2D Channel Flow, *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 252(1), 230–255.
- [19] **Kreiss, G. ve Kreiss, H.O.** (1986). Convergence to steady state of solutions of Burgers' equation, *Applied Numerical Mathematics*, 2(3-5), 161–179.
- [20] **Yang, H. ve Przekwas, A.** (1992). A comparative study of advanced shock-capturing schemes applied to Burgers' equation, *Journal of Computational Physics*, 102(1), 139–159.
- [21] **Panayotounakos, D.E. ve Drikakis, D.** (1995). On the Closed-Form Solutions of the Wave, Diffusion and Burgers Equations in Fluid Mechanics, *ZAMM - Journal of Applied Mathematics and Mechanics / Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 75(6), 437–447.
- [22] **Niels Ottosen, G.P.** (1992). *Introduction Finite Element Method*, Pearson Education (US), https://www.ebook.de/de/product/2963344/niels_ottosen_glen_peters_introduction_finite_element_method.html.
- [23] **Logan, D.** (2011). *A First Course in the Finite Element Method - SI Version (4th edition)*, Cengage Learning, Stamford, CT.
- [24] **Reddy, J.N.** (2004). *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis*, Oxford University Press.
- [25] **Bhatti, M.** (2005). *Fundamental finite element analysis and applications: with Mathematica and MATLAB computations*, John Wiley, Hoboken, NJ.
- [26] **Şahin, D.** (2018). *B-Spline Kollokasyon Yöntemi ile Generalized Regularized Long Wave (GRLW) Denklemine Yaklaşık Çözümleri*, cilt sayı: 19, Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi, <http://hdl.handle.net/20.500.11787/331>.
- [27] **Stasa, F.** (1985). *Applied finite element analysis for engineers*, Holt, Rinehart, and Winston, New York.
- [28] **Hamid, N.N.A., Majid, A.A. ve Ahmad Izani Md. Ismail** (2010). Cubic Trigonometric B-Spline Applied To Linear Two-Point Boundary Value Problems Of Order Two, *International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, 4(10), 1377–1382.
- [29] **Abbas, M., Majid, A.A., Ismail, A.I.M. ve Rashid, A.** (2014). Numerical Method Using Cubic Trigonometric B-Spline Technique for Nonclassical Diffusion Problems, *Abstract and Applied Analysis*, 2014, 1–11.

- [30] **Walz, G.** (1997). Identities for trigonometric B-splines with an application to curve design, *BIT Numerical Mathematics*, 37(1), 189–201.
- [31] **Keskin, P.** (2016). *RLW denkleminin trigonometrik B-spline çözümleri* (Doktora Tezi). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [32] **Hill, J.M. ve Dewynne, J.** (1987). *Heat conduction*, Blackwell Scientific Publications, Oxford Oxfordshire Boston.
- [33] **Mackenzie, D.** (2019). *24 Denklemden Matematiğin Hikayesi*, Ketebe Yayınları.
- [34] **Smith, G.D.** (1985). *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, OUP Oxford, https://www.ebook.de/de/product/3596663/gordon_d_smith_numerical_solution_of_partial_differential_equations.html.
- [35] **Goh, J., Majid, A.A. ve Ismail, A.I.M.** (2011). Numerical method using cubic B-spline for the heat and wave equation, *Computers & Mathematics with Applications*, 62(12), 4492–4498.
- [36] **Caldwell, J., Wanless, P. ve Cook, A.E.** (1981). A finite element approach to Burgers' equation, *Applied Mathematical Modelling*, 5(3), 189–193.
- [37] **Evans, D.J. ve Abdullah, A.R.** (1984). The Group Explicit method for the solution of Burger's equation, *Computing*, 32(3), 239–253.
- [38] **Ames, W.F. ve Nucci, M.C.** (1986). Analysis of fluid equations by group methods, *Journal of Engineering Mathematics*, 20(2), 181–187.
- [39] **Morandi Cecchi, M., Nociforo, R. ve Patuzzo Grego, P.** (1996). Space-time finite elements numerical solution of Burgers problems, *Le Matematiche*, 51(1), 43–57 (1997).
- [40] **Dogan, A.** (2004). A Galerkin finite element approach to Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 157(2), 331–346.
- [41] **Kutluay, S. ve Esen, A.** (2004). A linearized numerical scheme for Burgers-like equations, *Applied Mathematics and Computation*, 156(2), 295–305.
- [42] **Lin, E.B. ve Zhou, X.** (2001). Connection coefficients on an interval and wavelet solutions of Burgers equation, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 135(1), 63–78.
- [43] **Kutluay, S., Bahadir, A. ve Özdeş, A.** (1999). Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 103(2), 251–261.
- [44] **Aksan, E. ve Özdeş, A.** (2004). A numerical solution of Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 156(2), 395–402.
- [45] **Dağ, İ., Saka, B. ve Boz, A.** (2005). B-spline Galerkin methods for numerical solutions of the Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 166(3), 506–522.

- [46] **Kadalbajoo, M.K., Sharma, K.K. ve Awasthi, A.** (2005). A parameter-uniform implicit difference scheme for solving time-dependent Burgers' equations, *Applied Mathematics and Computation*, 170(2), 1365–1393.
- [47] **Hassanien, I.A., Salama, A.A. ve Hosham, H.A.** (2005). Fourth-order finite difference method for solving Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 170(2), 781–800.
- [48] **Gülsu, M. ve Öziş, T.** (2005). Numerical solution of Burgers' equation with restrictive Taylor approximation, *Applied Mathematics and Computation*, 171(2), 1192–1200.
- [49] **Ramadan, M.A., El-Danaf, T.S. ve Alaal, F.E.A.** (2005). A numerical solution of the Burgers' equation using septic B-splines, *Chaos, Solitons & Fractals*, 26(3), 795–804.
- [50] **Sari, M. ve Gürarşlan, G.** (2009). A sixth-order compact finite difference scheme to the numerical solutions of Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 208(2), 475–483.
- [51] **Zhu, C.G. ve Wang, R.H.** (2009). Numerical solution of Burgers' equation by cubic B-spline quasi-interpolation, *Applied Mathematics and Computation*, 208(1), 260–272.
- [52] **Zhang, P.G. ve Wang, J.P.** (2012). A predictor-corrector compact finite difference scheme for Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 219(3), 892–898.
- [53] **Dehghan, M., Saray, B.N. ve Lakestani, M.** (2014). Mixed finite difference and Galerkin methods for solving Burgers equations using interpolating scaling functions, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 37(6), 894–912.
- [54] **İnan, B. ve Bahadır, A.R.** (2014). A numerical solution of the Burgers' equation using a Crank-Nicolson exponential finite difference method, *Journal of Mathematical and Computational Science*, 4(5), 849–860.
- [55] **Ay, B., Dag, I. ve Gorgulu, M.Z.** (2015). Trigonometric quadratic B-spline subdomain Galerkin algorithm for the Burgers' equation, *Open Physics*, 13(1).
- [56] **Uçar, Y.** (2005). *1-Boyutlu Burgers Tipi Denklemlerin Sonlu Fark Çözümleri* (Yüksek Lisans Tezi). İnönü Üniversitesi.
- [57] **Rubin, S.G. ve Graves, R.A.** (1975). Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics, *Washington: Nasa, TR R-436*.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : İmran DİKEN

Doğum Tarihi ve Yeri : 12.10.1994, Erdemli-Mersin

E-Posta : imodiken@gmail.com

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** Erciyes Üniversitesi Eğitim Fakültesi İlköğretim Matematik Öğretmenliği Bölümü

