T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HARMONİK DÖNÜŞÜMLER ÜZERİNE

KÜBRA ATLIHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

KASIM 2019

Tezin Başlığı : Harmonik Dönüşümler Üzerine

Tezi Hazırlayan : Kübra ATLIHAN

Sınav Tarihi : 08.11.2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı : **Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ**
İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ
Adıyaman Üniversitesi

Doç. Dr. Cumali YILDIRIM
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Kazım TÜRK
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum ‘‘Harmonik Dönüşümler Üzerine’’ başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Kübra ATLIHAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HARMONİK DÖNÜŞÜMLER ÜZERİNE

Kübra ATLIHAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimler Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

64 + v pages

2019

Danışman: Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm tezin amacı ve kullanım alanlarını belirtmek üzere giriş kısmına ayrılmıştır.

İkinci bölümde, Riemann manifoldları ile ilgili diğer bölümlerde kullanılacak temel kavramlara yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, Öklidyen uzayda harmonik dönüşümler ve bu dönüşümlerin minimal yüzeylerle ilişkisi verilerek Riemann manifoldları arasındaki harmonik dönüşümlerin özellikleri ele alınmıştır.

Dördüncü bölümde, hemen hemen kontakt metrik manifoldlar ile ilgili temel tanımlar verilerek Kenmotsu manifoldlar ve kosimplektik manifoldların özellikleri verilmiştir.

Son bölümde ise önceki bölümlerde verilen kavramlar göz önüne alınarak sırasıyla Kenmotsu manifoldlar ve kosimplektik manifoldlar üzerinde harmonik dönüşümlerin özellikleri derlenmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Kenmotsu Manifoldları, Kosimplektik Manifoldlar, Holomorfik Dönüşümler, Harmonik Dönüşümler, Harmonik Morfizm, Hemen Hemen Kontakt Metrik Manifoldlar, Tamamen Jeodezik Dönüşümler.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON HARMONIC MAPS

Kübra ATLIHAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Matematics

64 + v pages

2019

Supervisor: Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ

This study which is prepared as a master thesis consists of five chapters.

The first chapter, of this thesis is devoted to the introduction part which states the aim and usage areas of the thesis.

The second chapter contains fundamental definitions which are concerned with Riemann manifolds that will be used in other chapters.

In the third chapter, harmonic maps in the Euclidean space, their reltions with minimal surfacesand the properties of harmonic maps between the Riemannian manifolds are given.

In the fourth chapter, properties of Kenmotsu manifolds and cosymplectic manifoldsare presented by giving fundamental definitionswhich are concerned with almost contact metric manifolds.

In the last part,the properties of harmonic maps on Kenmotsu manifolds and cosymlectic manifolds are compiled, respectively as considering the concepts which are mentioned in previous chapters.

KEYWORDS: Kenmotsu Manifolds, Cosymplectic Manifolds, Holomorfic Maps, Harmonic Maps, Harmonic Morphism, Almost Contact Metric Manifols, Totally Geodesic Maps.

TEŞEKKÜR

Çalışmamın her aşamasında bilgi ve tecrübelerinin yanı sıra ilgi ve teşvikleriyle de bana destek olan tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ'e, lisans ve lisansüstü öğrenimim sürecinde tecrübeleriyle beni yönlendiren Sayın Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ'a, bölümün tüm imkânlarını sunarak desteğini üzerimizden eksik etmeyen Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e teşekkürlerimi borç bilirim.

Ayrıca maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen aileme de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER VE KISALTMALAR

M	Manifold
g	Metrik tensörü
V_p	Tanjant vektör
T_pM	Tanjant uzay
dF	Türev dönüşümü
$\chi(M)$	Vektör alanları uzayı
$[\, ,\,]$	Lie parantez operatörü
∇	Levi-Civita konneksiyonu
∇^{ϕ}	Geri-çekme konneksiyonu
∇F_*	İkinci temel form
Δ	Laplace dönüşümü
ds	Yay uzunluğu
$L_{\alpha\beta}^{\gamma}$	Christoffel sembolü
L_p	Vektör demet lifi
R	Eğrilik tensörü
H	Ortalama eğrilik
S	Ricci tensör alanı
Φ	Temel 2-form
$\tau(F)$	Tensiyon alanı
$e(F)$	Enerji yoğunluğu
$E(F;D)$	Enerji integrali
F_t	Dönüşümünün varyasyonu
$v(x)$	Varyasyon vektör alanı
ξ	Vektör Alanı
φ	Tensör Alanı
η	1-Form
$\otimes$	Tensör Çarpımı

1. GİRİŞ

Matematik ve matematiksel fizikte önemli bir yere sahip harmonik fonksiyonlar kavramı genel olarak Laplace denklemini sağlayan tüm fonksiyonları ifade etmek için kullanılmaktadır. Harmonik fonksiyonlar ile ilgili çalışmalar Jacobi'nin 1848 yılında yayınlanan ve 3-boyutlu uzayda Laplace denkleminin kompleks değerli çözümlerini verdiği makalesi ile başladı.

Sampson 1954 yılında Hodge teorisinin homotopi versiyonunu bulmaya çalışırken harmonik dönüşümleri tanımladı. Ancak Sampson'un bu raporu yayınlanmadı. Aynı yıl Sampson' un tanımı birinci varyasyon formülü ve Hopf dönüşümünün harmonikliğini de kapsayacak şekilde Fuller tarafından verildi. Riemann manifoldlar arasındaki harmonik dönüşümler üzerine ilk kapsamlı çalışma 1964 yılında Eells [29] ve Sampson tarafından yapıldı.

R ve C sırasıyla reel ve kompleks sayılar cismini göstermek üzere

$$\varphi : W \subset R^3 \to C$$

C^2 -sınıfından kompleks değerli bir fonksiyon olsun. Eğer φ fonksiyonu $x = (x_1, x_2, x_3) \in W$ için

$$\Delta\varphi \equiv \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^2} = 0,$$

ile tanımlanan Laplace denklemini sağlıyorsa φ ye bir harmonik fonksiyon denir.

Riemann manifoldlarından tanımlanan reel değerli diferensiyellenebilir bir f fonksiyonu $\Delta f = (div \circ grad) f = 0$ ile tanımlanan Laplace denklemini sağlıyor ise f ye M Riemann manifoldu üzerinde bir harmonik fonksiyon denir.

Harmonik dönüşümler varyasyonel hesap ile yakından ilişkilidir:

(M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları olsun. Eğer diferensiyellenebilir $\varphi : (M, g) \to (N, h)$ dönüşümü $E(\varphi) = \int_M \|\varphi_*\| \, v_g$ ile tanımlanan enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise φ ye bir harmonik dönüşüm denir. Enerji integrali için birinci varyasyon formülü hesaplandığında, genel olarak Riemann manifoldları arasında tanımlanan diferensiyellenebilir bir dönüşümün harmonikliği, dönüşümün ikinci temel formunun izi olarak tanımlanan tensiyon alanının sıfır olması ile karakterize edilir. Özel olarak φ bir immersiyon olacak şekilde seçilirse bu dönüşümün harmonikliği ile $\varphi(M)$ altmanifoldunun minimalliği birbirine denk olur.

Harmonik fonksiyonları, esas uzay üzerindeki harmonik fonksiyonlara geri çekmek suretiyle koruyan dönüşümler harmonik morfizmler olarak bilinmektedir. Harmonik fonksiyonlar, düzlemdeki konformal dönüşümler, Riemann yüzeylerindeki holomorfik dönüşümler, Killing ve jeodezik alanlardan doğan belli bazı submersiyonlar harmonik morfizmlerin örneklerini içermektedir.

1978-1979 yıllarında Riemann manifoldları arasındaki harmonik morfizmler teorisinin çalışıldığı çalışmalar birbirinden bağımsız olarak ortaya çıkmıştır. 1978 de Fuglede [28] bu teoriyle ilgili ortaya çıkan pek çok temel özelliği içeren makalesini yayımlamıştır. Ishihara [27] 1979 yılında harmonik fonksiyonları kapsayacak şekilde Riemann manifoldları arasında çeşitli fonksiyon sınıflarını koruyan dönüşümlerin karakterizasyonlarını belirlemiştir. Günümüzde harmonik morfizmler üzerine yapılan çalışmaların çoğunda bu iki çalışmadan esinlenilmiştir.

Bu çalışmanın amacı Riemann manifoldları arasındaki harmonik dönüşümlerin anlaşılması için temel tanımları sunmak ve bunların Kenmotsu manifoldlar, kosimplektik manifoldlar gibi bazı özel manifoldlar üzerindeki uygulamalarını gösteren çalışmaları derlemektir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Riemann geometri ile ilgili temel kavramlara ayırdığımız bu bölüm üç alt bölüm olarak düzenlenmiştir. İlk alt bölümde Riemann manifoldları ile ilgili sonraki bölümlerde de kullanılacak bazı temel kavramlar ve gösterimler açıklanmıştır. İkinci alt bölümde vektör demetlerinden bahsedilmiştir. Üçüncü alt bölümde ise bir dönüşümün ikinci temel formu ve tensiyon alanı tanıtılarak tamamen jeodezik dönüşümlere yer verilmiştir.

2.1 Riemann Manifoldları

Tanım 2.1.1. M bir manifold ve M manifoldu üzerindeki diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi $C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ olsun. Bu durumda her $f,g \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ ve $a,b \in \mathbf{R}$ için

$$V_p(af+bg) = aV_pf + bV_pg$$

$$V_p(fg) = V_p(f)g + fV_p(g)$$

şartlarını sağlayan $V_p : C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \to \mathbf{R}$ dönüşümüne M manifoldunun p noktasındaki tanjant vektörü denir.

Tanımdan kolayca görülür ki tanjant vektörlerin kümesi reel sayılar cismi üzerinde bir vektör uzayı yapısına sahiptir. Bu vektör uzayına M manifoldunun p noktasındaki tanjant uzayı denir ve T_pM ile gösterilir.

Tanım 2.1.2. M bir manifold ve T_pM manifoldun p noktasındaki tanjant uzayı olsun. Bu durumda her $p \in M$ noktasına T_pM uzayında bir tanjant vektör karşılık getiren bir diferensiyellenebilir X dönüşümüne M üzerinde bir vektör alanı denir. Böylece M manifoldu üzerinde bir X vektör alanı

$$X : M \to \bigcup_{p\in M} T_pM$$

ile tanımlanan bir diferensiyellenebilir dönüşümdür [3].

Tanım 2.1.3. M, N iki manifold ve $F : M \to N$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda (U,ϕ) ve (V,φ) sırasıyla $p \in M$ ve $F(p) \in N$ noktalarının komşuluğundaki haritalar olmak üzere

$$\varphi \circ F \circ \phi^{-1} : \phi(U) \subset \mathbb{R}^m \to \varphi(V) \subset \mathbb{R}^n$$

dönüşümü diferensiyellenebilir ise F dönüşümüne $p \in M$ noktasında diferensiyellenebilirdir denir [3].

Tanım 2.1.4. M ve N diferensiyellenebilir iki manifold ve $F : M \to N$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $X \in T_pM$ için M de seçilen $\alpha(t)$ eğrisine $\alpha(t_0) = p$ noktasında X vektörü teğet olsun. Bu durumda $F(p) = F(\alpha(t_0))$ noktasında $F(\alpha(t))$ eğrisine teğet olacak şekilde $F_*(X)$ vektörünü karşılık getiren $F_* : T_pM \to T_{F(p)}N$ dönüşümüne türev dönüşümü denir. Türev dönüşümü dF ile de gösterilir [3].

Tanım 2.1.5. M manifoldunun boş olmayan, açık, bağlantılı bir U altkümesine M nin bir tanım kümesi denir. Eğer U tanım kümesi kompakt $\bar{U}$ kapanışına sahip ise $D = \bar{U}$ biçiminde tanımlanan D kümesine M nin bir kompakt tanım kümesi denir [3].

Tanım 2.1.6. M bir diferensiyellenebilir manifold, M manifoldunda bir U açık kümesi üzerinde vektör alanları X ve Y olmak üzere, $f \in C^{\infty}(U,\mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$[,] : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

$$[X,Y]f = X(Yf) - Y(Xf) \tag{2.1.1}$$

ile tanımlanan dönüşüme X ve Y vektör alanlarının Lie (parantez) operatörü denir. Burada $X(f), f$ fonksiyonunun X vektör alanına göre türevidir [23].

Lemma 2.1.1. M bir diferensiyellenebilir manifold, M manifoldunda bir U açık kümesi üzerinde vektör alanları X ve Y olmak üzere $f,g \in C^{\infty}(U,\mathbb{R})$ fonksiyonları ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için Lie parantez operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar [3]:

(i) $[X,Y](f+g) = [X,Y](f) + [X,Y](g)$,

(ii) $[X,Y](\lambda f) = \lambda[X,Y](f)$,

(iii) $[X,Y](fg) = [X,Y](f)g + [X,Y](g)f$,

(iv) $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$.

Tanım 2.1.7. M bir manifold olsun. Bu durumda $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ vektör alanları ve $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

ile tanımlı ve

(1) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

(2) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(3) $\nabla_{fX} Y = f\nabla_X Y$,

(4) $\nabla_X (fY) = X[f]Y + f\nabla_X Y$,

şartlarını sağlayan ∇ dönüşümüne bir afin (lineer) konneksiyon adı verilir. $\nabla_X Y$ vektör alanına Y vektör alanının X vektör alanı boyunca kovaryant türevi denir [3].

Tanım 2.1.8. $F : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm olsun. $X,Y \in \Gamma(TM_1)$ ve $U,V \in \Gamma_F(TM_2)$ için bir $\nabla^F : \Gamma(TM_1) \times \Gamma_F(TM_2) \to \Gamma_F(TM_2)$ dönüşümü

(i) $\nabla^F_{X+Y} U = \nabla^F_X U + \nabla^F_Y U$,

(ii) $\nabla^F_{hX} U = h\nabla^F_X U,\ h \in C^{\infty}(M_1,\mathbb{R})$,

(iii) $\nabla^F_X (U+V) = \nabla^F_X U + \nabla^F_X V$,

(iv) $\nabla^F_X (hU) = X(h)U + h\nabla^F_X U$, şartlarını sağlıyorsa ∇^F operatörüne F dönüşümü boyunca bir konneksiyon denir. Özel olarak $M_1 = M_2 = M$ ve F birim ise ∇ , M üzerindeki afin konneksiyon olur [3].

$F : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm ve ∇^F , M_2 üzerinde F boyunca bir konneksiyon olsun. $p_1 \in M_1$ olmak üzere $(\nabla^F_X U)(p_1)$ değeri yalnız X vektör alanının p_1 noktasındaki değerine bağlıdır. Dolayısıyla $\nabla^F_x U$, $X \in \Gamma(TM_1)$ ve $X(p_1) = x$ olmak üzere

$$\nabla^F_x U = (\nabla^F_X U)(p_1)$$

şeklinde tanımlanır [3].

Tanım 2.1.9. M bir diferansiyellenebilir manifold olsun. M manifoldu üzerindeki diferansiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\Gamma(TM)$ olsun. Bu durumda

$$g : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$$

ile tanımlanan g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

(i) $g(X,Y) = g(Y,X)$,

(ii) $g(X,X) \geq 0$ ve $g(X,X) = 0 \Leftrightarrow X = 0$

şartları sağlanıyor ise g bilineer formuna bir Riemann metriği veya metrik tensör denir. Bu durumda (M, g) ikilisine de bir Riemann manifoldu denir [3].

Örnek 2.1.1. $\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzayını ve bu uzay üzerinde

$$< X, Y > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

iç çarpımını göz önüne alalım. Burada kolayca görülür ki $<,>$ dönüşümü bilineer, simetrik ve pozitif tanımlıdır. Dolayısıyla $<,>$ bir Riemann metrik ve $(\mathbb{R}^n, <,>)$ ikilisi de bir Riemann manifoldudur [3].

Tanım 2.1.10. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. $\{([a,b],\alpha)\}$ atlası ile verilen eğrinin teğet vektör alanı T ise, $\alpha([a,b])\subset M$ eğrisinin $\alpha(a)$ dan $\alpha(b)$ ye kadar olan yay uzunluğu

$$|\alpha|_b^a=\int_b^a \sqrt{g\left(T(t),T(t)\right)}\ dt, \qquad t\in I$$

olarak tanımlanır. Burada verilen uzunluk ds ile gösterilir. Dolayısıyla metrik tensörün lokal koordinatlardaki ifadesi

$$ds^2=g_{ij}dx^i dx^j$$

ile verilir [3].

Tanım 2.1.11. M_1 ve M_2 iki manifold ve $f:M_1\to M_2$ bir dönüşüm olsun. $\forall p_1\in M_1$ için $X(p_1)\in T_{f(p_1)}M_2$ ise $X:M_1\to\Gamma\left(TM_2\right)$ dönüşümüne f boyunca bir vektör alanı denir. $f:M_1\to M_2$ dönüşümü boyunca vektör alanlarının kümesi $\Gamma_f\left(TM_2\right)$ ile gösterilir. $\Gamma_f\left(TM_2\right)$ kümesi $C^\infty(M_1,\mathbb{R})$ halkası üzerinde bir modüldür. Özel olarak $M_1=M_2=M$ ve f özdeşlik dönüşümü ise $\Gamma_I\left(TM_2\right)=\Gamma\left(TM\right)$, M üzerindeki vektör alanlarının kümesidir [18].

Bir dönüşüm boyunca vektör alanı kavramına en basit örnek $\alpha:I\to M$ boyunca tanımlı olan X vektör alanıdır. Gerçekten α boyunca tanımlı X vektör alanı, her $t\in I$ parametresine $\alpha(t)$ noktasında M deki tanjant vektörü karşılık getirir. Buna göre $\dot{\alpha}=\alpha_*(\frac{d}{dt})$ vektörü α boyunca bir vektör alanıdır ve bu vektör alanı, $X\in\Gamma(TM)$ vektör alanının X_α kısıtlanmışıdır [3].

Önerme 2.1.1. M bir Riemann manifoldu, $\alpha:I\to M$ bir eğri, $t\in I$ ve $x\in T_{\alpha(t)}M$ olsun. Bu durumda $X(t)=x$ olacak şekilde α boyunca paralel bir tek X vektör alanı vardır [3].

Tanım 2.1.12. M bir Riemann manifoldu olsun. $\alpha : I \subset \mathbb{R} \to M$, $\alpha(t_1) = p$, $\alpha(t_2) = q$, $t_1, t_2 \in I$ olacak şekilde bir eğri ve X , $X(t_1) = x$ sağlayan α boyunca paralel bir vektör alanı olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} P_{t_1}^{t_2}(\alpha): \quad T_pM \;&\to\; T_qM \\ x \;&\to\; P_{t_1}^{t_2}(\alpha)(x) = z, X(t_2) = z \end{aligned}$$

şekilde tanımlı $P_{t_1}^{t_2}(\alpha)$ dönüşümüne p den q noktasına α boyunca bir paralel öteleme adı verilir [3].

Tanım 2.1.13. (M, g) bir Riemann manifold olsun. Herhangi bir

$$f : M \to \mathbb{R}$$

diferensiyellenebilir fonksiyonu için

$$grad : C^{\infty}(M) \to \Gamma(TM)$$

olmak üzere $gradf$ vektör alanı bir tek X vektör alanı ve bütün Y vektör alanları cinsinden

$$g(X, Y) = df(Y) = Y[f]$$

ile tanımlanır. Bu durumda $X = gradf$ için

$$g(gradf, Y) = df(Y) = Y[f]$$

karakterizasyonu yapılabilir [23].

Önerme 2.1.2. (M, g) Riemann manifoldu üzerinde bir lokal koordinat sistemi $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ olsun. Bu durumda $f : M \to \mathbb{R}$ diferansiyellenebilir fonksiyonu için lokal koordinatlar cinsinden

$$gradf = \sum_{i,j=1}^{n} \left(g^{ij} \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

dir.

Eğer $M = \mathbb{R}^n$ ise $g^{ij} = \delta_i^j$ ve

$$grad f = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right) \frac{\partial}{\partial x^i}$$

olur [23].

Tanım 2.1.14. (M, g) bir Riemann manifold ve ∇, M üzerinde lineer konneksiyon olsun. Eğer ∇ konneksiyonu $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

1. $[X, Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X,$
2. $Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

şartlarını sağlıyor ise ∇ ya M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu denir [15].

M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y, Z) &= X\big(g(Y, Z)\big) + Y\big(g(Z, X)\big) - Z\big(g(X, Y)\big) \\ &\quad - g(X, [Y, Z]) + g(Y, [Z, Y]) + g(Z, [X, Y]) \end{aligned}$$

Kozsul eşitliği ile belirlenir [15] .

Herhangi bir g metrik tensörün, $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

ile verilen kovaryant türevi, ∇ bir Levi-Civita konneksiyon ise

$$\nabla g = 0$$

biçiminde de yazılabilir [15].

Tanım 2.1.15. (M, g), m-boyutlu bir Riemann manifold ve $(x^1, x^2, \dots, x^m)$, M nin bir lokal koordinat sistemi olsun. Bu durumda

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = \sum_{k=1}^{m} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x^k}, \quad 1 \le i, j \le m,$$

ile karakterize edilen Γ_{ij}^{k} bileşenlerine ∇ nın bileşenleri veya Christoffel katsayıları denir ve

$$dx_k\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}\right)=\Gamma_{ij}^{k}$$

olarak tanımlanır [15].

Tanım 2.1.16. M, m-boyutlu bir manifold olsun. Bu durumda $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için

$$R:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to\Gamma(TM)$$

$$(X,Y,Z)\to R(X,Y,Z)=R(X,Y)Z$$

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z$$

olarak tanımlanan R tensör alınına ∇ konneksiyonunun eğrilik tensörü denir [15].

Tanım 2.1.17. (M,g), m-boyutlu bir Riemann manifold olsun. Bu durumda

$$K:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\to C^{\infty}(M)$$

$$(X,Y,Z,W)\to K(X,Y,Z,W)=g(R(X,Y)Z,W)$$

olarak tanımlanan 4.mertebeden kovaryant tensöre M üzerinde Riemann Christoffel eğrilik tensörü denir [15].

Tanım 2.1.18. (M,g) , m-boyutlu bir Riemann manifold ve M nin bir p noktasındaki tanjant uzayının 2-boyutlu bir alt uzayı P olsun. P yi geren birim vektörler X_p, Y_p ve M üzerindeki Riemann Christoffel eğrilik tensörü K olmak üzere

$$K(X_p,Y_p,X_p,Y_p)$$

değerine M nin p noktasındaki P düzlemine göre kesit eğriliği denir ve

$K^M(X \wedge Y)$ ile de gösterilir [15].

Tanım 2.1.19. (M,g), m-boyutlu bir Riemann manifold olsun. Bu durumda $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$S : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to C^{\infty}(M)$$

$$S(X,Y) = iz\langle R(X,-)-,Y\rangle = = \sum_{i=1}^{m} g(R(X,e_i)e_i,Y)$$

olarak tanımlanan tensör alanına M nin Ricci tensör alanı denir. Burada $\{e_i\}$, M de ortonormal bir çatıdır [15].

Ricci operatörü ise (1,1) tipinde bir tensördür. Q ile gösterilir ve $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$g(Q(X),Y) = S(X,Y)$$

ile karakterize edilir [15].

Önerme 2.1.3. Ricci operatörü self-adjointtir. Yani (M,g) bir Riemann manifold ve $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(Q(X),Y) = g(X,Q(Y))$$

dir [15].

Tanım 2.1.20. (M,g), m-boyutlu bir Riemann manifold olsun. $p \in M$ olmak üzere T_pM nin 2-boyutlu altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına skaler eğrilik denir ve $\{e_i\}$, M de ortonormal bir çatı olmak üzere

$$r = \sum_{i=1}^{m} S(e_i,e_i)$$

ile tanımlanır [15].

Tanım 2.1.21. M bir Riemann manifold ve $K(P)$, M üzerinde kesit eğriliği olsun. Eğer bütün P düzlemleri ve bütün p noktaları için $K(P)$ sabit ise bu durumda M

ye sabit eğrilikli uzay denir. Sabit eğrilikli Riemann manifolduna da bir uzay form denir [15].

Teorem 2.1.1. Eğer M sabit c eğrilikli uzay form ise $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$R(X,Y)Z = c[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]$$

ile verilir [15].

Tanım 2.1.22. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. M üzerinde θ bir 1-form ve E de bir vektör alanı ise T^*M deki konneksiyon

$$\nabla : \Gamma(TM) \times \Gamma(T^*M) \to \Gamma(T^*M)$$

$$(E,\theta) \to \nabla_E \theta$$

$$\nabla_E \theta(G) = E\big(\theta(G)\big) - \theta(\nabla_E G)$$

biçiminde tanımlanır. Böylece

$$E\big(\theta(G)\big) = \nabla_E \theta(G) + \theta(\nabla_E G)$$

Leibniz çarpım kuralı elde edilir [23].

Tanım 2.1.23. (M,g), n-boyutlu bir Riemann manifold olsun. θ 1-formunun divengensi

$$div\theta = div^M \theta$$

ile gösterilir ve

$$div\theta = iz\nabla\theta = g^{ij}\left(\nabla_{X_i}\theta\right)X_j = g^{ij}\left\{X_i\left(\theta\left(X_j\right)\right) - \theta\left(\nabla_{X_i}X_j\right)\right\}$$

$$= \sum_{i=1}^{n}(\nabla_{e_i}\theta)e_i = \sum_{i=1}^{n}\left\{e_i\big(\theta(e_i)\big) - \theta(\nabla_{e_i}e_i)\right\}$$

biçiminde tanımlanır. E vektör alanının divergensi $div\, E$ ise

$$div\, E = iz\nabla E = \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{e_i} E, e_i) = \sum_{i=1}^{m} \{e_i(g(E, e_i)) - g(E, \nabla_{e_i} e_i)\}$$

ile verilir. Burada $\{X_i\}$, M üzerinde keyfi çatı sistemi ve $\{e_i\}$, T_pM için ortonormal bir bazdır [23].

Önerme 2.1.4. (M, g), n-boyutlu bir Riemann manifold ve $(x^1, x^2, \dots, x^n)$, M nin bir lokal koordinat sistemi olsun.

$$\theta = \theta_j\, \partial x^j \in \Gamma(T^*M)$$

ve

$$E = E^j \frac{\partial}{\partial x^j} \in \Gamma(TM)$$

alalım. Bu durumda lokal koordinatlarda

$$div\theta = g^{ij}\left(\frac{\partial \theta_j}{\partial x^i} - \Gamma_{ij}^k \theta_k\right)$$

ve

$$divE = \frac{\partial E^i}{\partial x^i} + E^j \Gamma_{ij}^k$$

ile verilir.

Ayrıca $|g| = \det(g_{ij})$ olmak üzere

$$div\theta = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|} g^{ij} \theta_j\right)$$

ve

$$divE = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|} E^i\right)$$

dir [23].

Tanım 2.1.24. (M,g) bir Riemann manifold olsun. Bu durumda θ bir 1-form olmak üzere kodiferasiyel d^*

$$d^* = -div\theta$$

şeklinde tanımlanır [23].

Tanım 2.1.25. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları olsun.

$$\varphi : (M,g) \to (N,h)$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm olmak üzere h metriğini pull-backi $\varphi^* h$ ile gösterilir ve $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\varphi^* h(X,Y) = h\big(d\varphi_x(X), d\varphi_x(Y)\big), \qquad x \in M$$

biçiminde tanımlanır [23].

Tanım 2.1.26. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları

$$\varphi : (M,g) \to (N,h)$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $x \in M$ olmak üzere x noktasında φ nin türev dönüşümünün Hilbert-Schmidt normu $|d\varphi_x|$ ile gösterilir ve $T_x M$ tanjant uzayının bir $\{e_i\}_{i=1}^m$ bazı için

$$|d\varphi_x|^2 = \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))$$

ile tanımlanır.

Lokal koordinatlarda ise

$$|d\varphi_x|^2 = g^{ij} \varphi_i^\alpha \varphi_j^\beta h_{\alpha\beta}$$

dır. Buradan

$$|d\varphi_x|^2 = \sum_{i=1}^{m} h(d\varphi(e_i), d\varphi(e_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{m} \varphi^* h(e_i, e_i)$$

$$= iz\varphi^* h$$

olduğu görülür [23].

Tanım 2.1.27. (M, g) ve (N, h) Riemann manifoldları

$$\varphi : (M, g) \to (N, h)$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. φ nin $d\varphi_x$ türev dönüşümünün eki $d\varphi_x^*$ ile gösterilir ve $X \in T_x M,\ Y \in T_{\varphi(x)} N$ için

$$g\big(X, d\varphi_x^*(Y)\big) = h(d\varphi_x(X), Y)$$

biçiminde karakterize edilir. Böylece

$$\varphi^* h(X, Y) = h\big(d\varphi_x(X), d\varphi_x(Y)\big)$$

$$= g(d\varphi_x^* o d\varphi_x(X), Y)$$

elde edilir [23].

Tanım 2.1.28. Öklidyen uzay $\mathbb{R}^n$ de Laplasyan, $f \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$\Delta : C^\infty(\mathbb{R}^n) \to C^\infty(\mathbb{R}^n)$$

$$f \to div(gradf)$$

$$\Delta f = div(gradf) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}$$

olarak tanımlanır [23].

Gradiyent ve divergens tanımları kullanılarak Laplasyan tanımı keyfi bir Riemann manifolduna genişletilebilir:

Tanım 2.1.29. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda M üzerindeki Laplasyan ya da Laplace-Beltrami operatörü $\Delta = \Delta^M = \Delta_g$ ile gösterilir ve

$$\Delta f = div(gradf) = divdf = -d^* df = iz\nabla df$$

biçiminde tanımlanır. Burada $f, U\subset M$ açığı üzerinde tanımlı reel-değerli C^2-sınıfından bir fonksiyondur [23].

Tanım 2.1.30. (M, g) bir Riemann manifoldu ve $f\in C^\infty(M)$ olsun. Bu durumda

$$\Delta f = 0$$

eşitliği Laplace denklemi olarak adlandırılır ve bu denklemin çözümlerine $U\subset M$ üzerinde harmonik fonksiyonlar denir [23].

M manifoldunun $\{e_i\}_{i=1}^m$ ortonormal çatısını göz önüne alalım. Bu durumda

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{m} \{e_i(e_i(f)) - (\nabla_{e_i}^M e_i) f\}$$

olur [23].

Önerme 2.1.5. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $(x^1, x^2, \ldots, x^m)$, M üzerinde bir lokal koordinat sistemi ise $|g| = det(g_{kl})$ olmak üzere

$$\Delta f = \sum_{i,j=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{|g|} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x^j}\right)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{m} g^{ij} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma_{ij}^k \frac{\partial f}{\partial x^k}\right)$$

dır [23].

Tanım 2.1.31. (M, g) bir Riemann manifoldu olsun. $f : (M, g) \to C^\infty(M, \mathbb{R})$ foksiyonu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} h_f : \quad \Gamma(TM) &\to \Gamma(TM) \\ X &\to h_f(X) = \nabla_X \nabla f \end{aligned}$$

lineer dönüşümüne (M, g) üzerinde f fonksiyonunun Hessiyan tensörü denir [3].

Tanım 2.1.32. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. $f:(M,g)\rightarrow C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ foksiyonu olsun. Bu durumda

$$\begin{array}{llll} H_f: & \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) & \rightarrow & C^{\infty}(M,\mathbb{R}) \\ & (X,Y) & \rightarrow & H_f(X,Y)=g(h_f(X),Y) \end{array}$$

tensörüne (M,g) üzerinde f fonksiyonunun Hessiyan formu denir [3].

Tanım 2.1.33. M, $2n$-boyutlu bir manifold ve φ, M üzerinde (1,1) mertebeli tensör alanı olsun. Bu durumda $p\in M$ için

$$\varphi_p: T_M(p)\rightarrow T_M(p)$$

lineer dönüşümü $T_M(p)$ üzerinde $\varphi^2=-I$ şartını sağlıyor ise φ ye M üzerinde hemen hemen kompleks yapı denir. M ye de φ kompleks yapısıyla birlikte bir hemen hemen kompleks manifold denir [18].

Tanım 2.1.34. M ve M' sırasıyla φ ve φ' hemen hemen kompleks yapıları ile birlikte hemen hemen kompleks manifoldlar olsun. Eğer $\varphi' o\, f_* = f_* o \varphi$ ise f ye hemen hemen komplekstir veya f, φ ve φ' yapılarını korur denir [18].

Önerme 2.1.6. M ve M' kompleks manifoldlar olsun. Bu durumda $f: M\rightarrow M'$ dönüşümünün holomorfik olması için gerek ve yeter şart M ve M' kompleks manifoldlarının kompleks yapılarına göre f nin hemen hemen kompleks olmasıdır.

Tanım 2.1.35. M hemen hemen kompleks manifold ve M nin hemen hemen kompleks yapısı φ olsun. g, M üzerinde bir Riemann metriği olmak üzere $X,Y\in\chi(M)$ için

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y)$$

ise g fonksiyonuna Hermityen metrik denir.

Tanım 2.1.36. M bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer g Hermityen metriği tanımlı ise M ye hemen hemen Hermityen manifold denir. Eğer M bir kompleks manifold ve M üzerinde g Hermityen metriği tanımlı ise M ye Hermityen manifold denir.

Tanım 2.1.37. M bir hemen hemen kompleks manifold ve g M üzerinde Hermityen metrik olsun. Bu durumda M üzerinde tanımlanan Φ temel 2-formu kapalı ise ($d\Phi = 0$) g Hermityen metriğine Kaehler metrik denir.

Tanım 2.1.38. M bir hemen hemen kompleks manifold olsun. Eğer g Kaehler metriği tanımlı ise M ye hemen hemen Kaehler manifold denir. M bir kompleks manifold ve M üzerinde g Kaehler metriği tanımlı ise M ye Kahler manifold denir.

Teorem 2.1.2. M bir Hermityen manifold olsun. Eğer M nin bir Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla \varphi = 0$ olmasıdır.

2.2 Vektör Demetleri

Tanım 2.2.1. E , B , F diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\pi : E \to B$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. B manifoldunun açık bir örtüsü $\{U_\alpha\}_{\alpha \in I}$ olmak üzere, eğer

$$(\pi \circ \psi_\alpha)(x, y) = x, \; x \in U_\alpha, \; y \in F$$

olacak şekilde

$$\psi_\alpha : U_\alpha \subset B \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha) \subset E \xrightarrow{\pi} B$$

$$(x,y) \to \psi_\alpha(x,y) \to (\pi \circ \psi_\alpha)(x) = x$$

diffeomorfizmlerinin bir $\{\psi_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ailesi varsa π , F ye göre yerel çarpım özelliğine sahiptir denir. $D = \{(U_\alpha, \psi_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ sistemine de π dönüşümünün yerel ayrışması denir. Eğer, $C^\infty(E,B) = \{\pi \mid \pi : E \to B\}$ modülünün herhangi bir elemanı yerel çarpım özelliğine sahipse o zaman bu dönüşüm örten ve açık bir dönüşümdür [3].

Tanım 2.2.2. M_1 ve M_2 diferensiyellenebilir manifoldlar ve $\pi : M_1 \to M_2$ diferensiyellenebilir bir örten dönüşüm olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa $E(M_1, M_2, \pi)$ ye M_1 üzerinde bir vektör demeti denir [3]:

(i) Her $p \in M_2$, $\pi^{-1}(p)$ vektör uzayı yapısına sahiptir. Bu uzayın boyutu her zaman sabit kabul edilmektedir. $\pi^{-1}(p)$ vektör uzayına vektör demetinin lifi denir ve $L_p(E)$ veya L_p ile gösterilir.

(ii) Herhangi $p \in M_2$ noktası için, M_2 de p noktasının bir komşuluğu U, $n \geq 0$ sayısı ve

$$h : U \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_\alpha)$$

difeomorfizmi var öyle ki herhangi $q \in U$ için

$$h_q : \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U)$$

$$y \to h(q,y)$$

dönüşümü $\mathbb{R}^n$ ile $\pi^{-1}(q)$ arasında bir lineer izomorfizmadır.

Bu durumda M_1 manifolduna taban manifoldu, M_2 manifolduna üs manifoldu, π dönüşümüne projeksiyon dönüşümü, $\pi^{-1}(p)$ uzayına p noktasındaki lif ve (U,h) ikilisine de M_1 manifoldunun koordinat haritası denir. Eğer U, M_2 olarak alınırsa E vektör demetine aşikar vektör demeti denir. Bir lif demeti ile bir vektör demeti karşılaştırıldığında $F=\mathbb{R}^n$ ve F_x nin bir vektör uzayı olduğu görülür [18].

Tanım 2.2.3. S, E vektör demetinin M_2 üs manifoldundan M_1 total manifolduna bir diferensiyellenebilir dönüşümü olsun. Eğer

$$\pi \circ S = I$$

ise S, dönüşümüne E vektör demetinin bir çapraz kesiti denir. Burada I, M üzerindeki birim dönüşümdür. E vektör demetinin çapraz kesitlerinin kümesi $\Gamma(E)$ ile gösterilir [3].

2.3 Bir Dönüşümün İkinci Temel Formu ve Tensiyon Alanı

Tanım 2.3.1. $F:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ bir dönüşüm olsun. F boyunca $\overset{2}{\nabla}$ konneksiyonunun geri çekme konneksiyonu $\overset{2}{\nabla}{}^F$ olmak üzere

$$\nabla F_*:\Gamma(TM_1)\times\Gamma(TM_1)\to\Gamma_F(TM_2)$$

$$(\nabla F_*)(X,Y)=\overset{2}{\nabla}{}^F{}_X\, F_*Y - F_*(\overset{1}{\nabla}_X Y)$$

şeklinde tanımlanan ∇F_* dönüşümüne F dönüşümünün ikinci temel formu denir [3]. $h\in C^\infty(M_1)$ ve $X,Y,Z\in\Gamma(TM_1)$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(\nabla F_*)(X,hY) &= \overset{2}{\nabla}{}^F{}_X\, F_*(hY) - F_*(\overset{1}{\nabla}_X(hY)) \\
&= \overset{2}{\nabla}{}^F{}_X(hF_*Y) - F_*(X(h)Y + h\overset{1}{\nabla}_X Y) \\
&= X(h)(F_*Y) + h\overset{2}{\nabla}{}^F{}_X\, F_*Y - X(h)(F_*Y) - hF_*(\overset{1}{\nabla}_X Y) \\
&= h((\overset{2}{\nabla}{}^F{}_X\, F_*Y) - F_*(\overset{1}{\nabla}_X Y)) \\
&= h(\nabla F_*)(X,Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$(\nabla F_*)(hX,Y) = h(\nabla F_*)(X,Y) \ ,$$

$$(\nabla F_*)(X+Z,Y) = (\nabla F_*)(X,Y) + (\nabla F_*)(Z,Y)$$

ve

$$(\nabla F_*)(X,Y+Z) = (\nabla F_*)(X,Y) + (\nabla F_*)(X,Z)$$

olacağından ikinci temel form ∇F_* bilineerdir. $p_1 \in M_1$ noktasında $(\nabla F_*)(X,Y)$ ikinci temel formunun değeri yalnızca $(\nabla F_*)(X,Y)$ ve $(\nabla F_*)(X,Y)$ vektör alanlarının $p_1 \in M_1$ noktasındaki değerine bağlıdır. Dolayısıyla $X,Y \in \Gamma(TM_1)$, $X(p_1) = x$, $Y(p_1) = y$ olmak üzere

$$(\nabla F_*)(x,y) = (\nabla F_*)(X,Y)(p_1)$$

dır.

Önerme 2.3.1. $F:(M_1,g_1) \to (M_2,g_2)$ bir dönüşüm olsun. Her $X,Y \in \Gamma(TM_1)$ için

$$(\nabla F_*)(X,Y) = (\nabla F_*)(Y,X)$$

dir. Yani ∇F_* ikinci temel formu simetriktir [3].

$F:(M_1,g_1) \to (M_2,g_2)$ bir dönüşüm olsun. İkinci temel form $\forall X \in \Gamma(TM_1)$ için

$$\nabla_X F_* : \Gamma(TM_1) \to \Gamma_F(TM_2)$$

şeklinde göz önüne alınırsa

$$(\nabla_X F_*)(Y) = (\nabla F_*)(X,Y)$$

lineer dönüşümüyle tanımlanır. $\nabla_X F_*$ dönüşümünün lineerliği ∇F_* formunun bilineerliğinden kolayca görülür.

$(\nabla F_*)(X,Y)$ formunun $p_1 \in M_1$ noktasındaki değeri X, Y nin $p_1 \in M_1$ noktasındaki değerine bağlı olduğundan $\forall x \in T_{p_1}M_1$ için $X,Y \in \Gamma(TM_1)$, $X(p_1)=x$, $Y(p_1)=y$ olmak üzere

$$\nabla_x F_* : T_{p_1}M_1 \to T_{F(p_1)}M_2$$

$$(\nabla_x F_*)(y) = ((\nabla_X F_*)(Y))(p_1) = (\nabla F_*)(X,Y)(p_1)$$

lineer dönüşümü tanımlanabilir.

Diğer taraftan $F:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ ile tanımlı

$$F_{*_{p_1}} : (T_{p_1}M_1, g_{1_{p_1}}) \to (T_{F(p_1)}M_2, g_{2_{F(p_1)}})$$

dönüşümü $\forall p_1 \in M_1$ için $(T_{p_1}M_1, g_{1_{p_1}})$ ve $(T_{F(p_1)}M_2, g_{2_{F(p_1)}})$ iç çarpım uzayları arasında bir lineer dönüşümdür.

Önerme 2.3.2. M_1, M_2 ve M_3 birer manifold, $F_1 : M_1 \to M_2$ ve $F_2 : M_2 \to M_3$ dönüşümleri olsun. Bu durumda $F_2 \circ F_1$ dönüşümünün ikinci temel formu

$$\nabla(F_2\circ F_1)_* = F_{2*}(\nabla F_{1*}) + (\nabla F_{2*})(F_{1*},F_{1*})$$

dır [3].

Tanım 2.3.2. $F:(M_1^m,g_1)\to(M_2^n,g_2)$ bir dönüşüm olsun. $\{e_1,...,e_{n_1}\}$, TM_1 için yerel ortonormal çatı olsun. F dönüşümünün tensiyon alanı $\tau(F)$ ile gösterilir ve

$$\tau(F) = iz(\nabla F_*) = \sum_{i=1}^{m} (\nabla F_*)(e_i,e_i)$$

ile tanımlanır [3].

Bir $F:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ dönüşümünün tensiyon alanı F boyunca bir vektör alanıdır, yani $\tau(F)\in\Gamma_F(TM_2)$ dir [3].

Önerme 2.3.3. M_1^m, M_2^n ve M_3^k Riemann manifoldları olsun. $F_1 : M_1^m \to M_2^n$ ve $F_2 : M_2^n \to M_3^k$ dönüşümlerinin bileşkesi olan $F_2 \circ F_1$ dönüşümünün tensiyon alanı

$$\tau(F_2 \circ F_1) = F_{2*}(\tau(F_1)) + iz(\nabla F_{2*})(F_{1*}, F_{1*})$$

dır [3].

Tanım 2.3.3. $F:(M_1,g_1) \to (M_2,g_2)$ dönüşümünün ikinci temel formu sıfır ise F dönüşümüne tamamen jeodeziktir denir. Tamamen jeodezik dönüşümler afin dönüşümler olarak da adlandırılır [3].

Tanım 2.3.4. $F:(M_1,g_1) \to (M_2,g_2)$ bir dönüşüm ve $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\gamma : I \to M_1$ bir eğri olsun. γ boyunca X vektör alanı için $F \circ \gamma : I \to M_2$ dönüşümü de bir eğri tanımlar. Dolayısıyla $t \in I$ için $F \circ \gamma$ boyunca $F_* X$ bir vektör alanıdır ve

$$(F_* X)(t) = F_{*_{\gamma(t)}} X(t)$$

dir. Her $\gamma : I \to M_1$ eğrisi ve γ boyunca paralel her X vektör alanı için $F_* X$, $F \circ \gamma : I \to M_2$ eğrisi boyunca paralel ise F paralel ötelemeyi korur denir [3].

Önerme 2.3.3. $F:(M_1,g_1) \to (M_2,g_2)$ bir dönüşüm olsun. F dönüşümünün tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter koşul F dönüşümünün paralel ötelemeyi korumasıdır [3].

İspat. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık, $\gamma : I \to M_1$ bir eğri ve X, γ boyunca bir paralel vektör alanı olsun. $X = X' \circ \gamma$ olacak şekilde X', M_1 üzerinde yerel tanımlı vektör alanı olsun. Bu takdirde

$$F_* X = (F_* X') \circ \gamma$$

dir. Buradan

$$\overset{2}{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} F_* = \overset{2}{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} ((F_* X') \circ \gamma) = \overset{2}{\nabla}_{\gamma_* \frac{\partial}{\partial t}} F_* X' = \overset{2}{\nabla}_{\dot{\gamma}} F_* X'$$

olur. Burada dönüşümün ikinci temel formu kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\overset{2}{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} F_* &= (\nabla F_*)(\dot{\gamma}, X' \circ \gamma) + F_*(\overset{1}{\nabla}_{\dot{\gamma}} X') \\
&= (\nabla F_*)(\dot{\gamma}, X) + F_*(\overset{1}{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}}(X' \circ \gamma)) \\
&= (\nabla F_*)(\dot{\gamma}, X) + F_*(\overset{1}{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} X) \\
&= (\nabla F_*)(\dot{\gamma}, X)
\end{aligned}
$$

elde edilir ve ispat tamamlanmış olur.

3. HARMONİK DÖNÜŞÜMLER

Harmonik dönüşümler ile ilgili temel tanımların verildiği bu bölüm üç alt bölüm olarak düzenlenmiştir. İlk alt bölümde Öklidyen uzayda harmonik dönüşümler ile ilgili bazı bilgiler verilmiştir. İkinci alt bölümde minimal yüzeyler ile harmonik dönüşümler arasındaki ilişki ele alınmıştır. Son alt bölüm ise daha genel olarak Riemann manifoldları arasındaki dönüşümlerin harmonikliği ile ilgili temel kavramlara ayrılmıştır.

3.1 Öklidyen Uzayda Harmonik Dönüşümler

m-boyutlu Öklid uzayı $\mathbb{R}^m$ nin bir açık alt kümesi U ve $(x_1, x_2, \ldots, x_m) \in U$ olsun. $f : U \to \mathbb{R}$ veya $f : U \to \mathbb{C}$ şeklinde reel veya kompleks değerli bir f fonksiyonu için Laplace denklemi

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = 0$$

şeklinde verilir. Laplace denklemini sağlayan fonksiyonlara harmonik fonksiyonlar adı verilir [25].

Tanım 3.1.1. M ve N Öklid uzaylarının iki açık alt kümesi olsun. Buna göre $V \subset N$ bir açık altküme ve $\phi^{-1}(V) \neq \varnothing$ olmak üzere $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu V üstünde bir harmonik fonksiyon iken

$$f \circ \phi : \phi^{-1}(V) \to \mathbb{R}$$

bileşke dönüşümü de $\phi^{-1}(V)$ üzerinde bir harmonik fonksiyon ise ϕ dönüşümüne bir harmonik morfizm denir [25].

Bu tanıma göre, harmonik morfizmler; harmonik fonksiyonları harmonik fonksiyonlara geri çeken dönüşümlerdir.

1848 yılında Jakobi yaptığı bir çalışmada ‘‘ $U \subset \mathbb{R}^m$ açık alt kümesi üzerinde bir $\phi : U \to \mathbb{C}$ düzgün dönüşüm ve $V \subset \mathbb{C}$ için $f : V \to \mathbb{C}$ şeklinde bir V açık altkümesi üstünde verilen holomorfik bir fonksiyon olmak üzere $f \circ \phi$

bileşke fonksiyonunun harmonik olması için ϕ hangi şartları gerçekleştirmelidir?'' sorusuna yanıt aramıştır.

Herhangi bir harmonik fonksiyon lokal olarak bir holomorfik fonksiyonun reel kısmı olduğundan ϕ nin Jakobi koşulunu gerçekleştirmesi için gerek ve yeter şartın ϕ nin bir harmonik morfizm olması gerektiği aşikardır. Bu durumda zincir kuralından

$$\Delta(f \circ \phi) = \frac{df}{dz}\Delta\phi + \frac{d^2 f}{dz^2}\sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial\phi}{\partial x_i})^2 = 0 \tag{3.1.1}$$

elde edilir. $\phi : U \to \mathbb{C}$ herhangi bir noktada keyfi birinci ve ikinci mertebeden kısmi türevlere sahip bu dönüşümün bir harmonik morfizm olabilmesi için aşağıdaki şartların sağlanması gerektiği görülür [25]:

(i) $\Delta\phi = 0$,

(ii) $(grad\ \phi^2) = \sum_{i=1}^{m}(\frac{\partial\phi}{\partial x_i})^2 = 0$.

Yukarıdaki tanımda verilen (3.1.1) ifadesinde (ii) koşulunu gerçekleyen düzgün bir fonksiyona yarı-konformal dönüşüm denir.

3.2 Minimal Yüzeyler ve Harmonik Dönüşümleri

Tanım 3.2.1. $U \subset \mathbb{R}^2$ veya $U \subset \mathbb{C}$ bağlantılı ve açık bir altküme olsun. C^2-sınıfından

$$X : U \to \mathbb{R}^3$$

şeklinde bir dönüşüme $\mathbb{R}^3$ de bir düzgün parametrik yüzey denir [25].

dX türev dönüşümünün birebir olması halinde $X(U) \subset \mathbb{R}^3$ kümesi üstünde yüzeyin normal vektör alanı

$$N = \frac{X_u \times X_v}{|X_u \times X_v|} \tag{3.2.1}$$

olacak şekilde daima bulunur. Burada $(u,v)\in U,\ X_u=\dfrac{\partial X}{\partial u}$ ve $X_v=\dfrac{\partial X}{\partial v}$ dir. Diğer taraftan yüzeyin birinci ve ikinci esas formlarının katsayıları sırasıyla

$$E=<X_u,X_u>\ ,\ F=<X_u,X_v>\ ,\ G=<X_v,X_v>$$

ve

$$e=<X_{uu},N>\ ,\ f=<X_{uv},N>=<X_{vu},N>\ ,\ g=<X_{vv},N>$$

şeklinde verilir. Burada

$$X_{uu}=\frac{\partial^2 X}{\partial u^2}\ ,\ X_{uv}=\frac{\partial^2 X}{\partial u\partial v}\ ,\ X_{vu}=\frac{\partial^2 X}{\partial v\partial u}\ ,\ X_{vv}=\frac{\partial^2 X}{\partial v^2}$$

dir. Dolayısıyla yüzeyin ortalama eğriliği

$$H=-\frac{1}{2}iz(dN)=\frac{1}{2}\frac{eG+gE-2fF}{EG-F^2} \tag{3.2.2}$$

olur. Burada dN yüzeyin şekil operatörünü ifade etmektedir. N ise yüzeyin birim normal vektörlerini S^2 birim küresi üzerine resmeden Gauss dönüşümü olarak adlandırılır.

Eğer yüzeyin ortalama eğriliği $H\equiv 0$ koşulunu sağlıyorsa X yüzeyine bir parametrik minimal yüzey denir.

$V\subset U$ bir kompakt altküme ve V nin kapanışı $\overline{V}$ olsun.

$$h:\overline{V}\to\mathbb{R}$$

fonksiyonu C^1-sınıfından bir fonksiyon olmak üzere

$$X_t(u,v)=X(u,v)+th(u,v)N(u,v), \tag{3.2.3}$$

dönüşümüne X in h tarafından tanımlanan bir normal varyasyonu adı verilir. Burada $t\in(-\varepsilon,\varepsilon)$ ve $(u,v)\in\overline{V}$ dır. (3.2.3) ifadesinin sırasıyla u ve v ye göre kısmi türevleri alınırsa

$$\frac{\partial X_t}{\partial u}=X_u+thN_u+th_uN$$

ve

$$\frac{\partial X_t}{\partial v} = X_v + thN_v + th_v N$$

elde edilir. Burada X_t nin birinci esas formunun katsayıları E_t , F_t , G_t ile gösterilirse

$$E_t = E + th(< X_u, N_u > + < X_u, N_u >) + t^2h^2 < N_u, N_u > + t^2 h_u h_u$$

$$F_t = F + th(< X_u, N_v > + < X_v, N_u >) + t^2h^2 < N_u, N_v > + t^2 h_u h_v$$

$$G_t = G + th(< X_v, N_v > + < X_v, N_v >) + t^2h^2 < N_v, N_v > + t^2 h_v h_v$$

bulunur. Şimdi (3.2.2) denklemini kullanırsak

$$E_t G_t - F_t^2 = EG - F^2 - 2th(Eg - 2Ff + Ge) + R$$

$$= (EG - F^2)(1 - 4thH) + R$$

elde edilir. Burada $\lim_{t\to 0} \frac{R}{t} = 0$ olduğunu göz önüne alıp ε değerini yeteri kadar küçük seçersek X_t nin bir düzgün parametrik yüzey tanımlayacağı açıktır. Buradan $X_t(\bar{V})$ nın alanı $A(t)$ olmak üzere

$$A(t) = \int_{\bar{V}} \sqrt{E_t G_t - F_t^2}\, dudv$$

$$= \int_{\bar{V}} \sqrt{1 - 4thH + \bar{R}} \sqrt{EG - F^2}\, dudv$$

olacak şekilde verilir. Burada $\bar{R} = \dfrac{R}{EG - F^2}$ dır. Eğer ε yeteri kadar küçük ise $A(t)$ türevlenebilir bir fonksiyondur ve $t = 0$ daki türevi

$$A'(0) = -\int_{\bar{V}} 2hH \sqrt{EG - F^2}\, dudv \qquad (3.2.4)$$

şeklindedir.

Teorem 3.2.1. $X:U\to\mathbb{R}^3$ düzgün parametrik bir yüzey ve U nun sınırlı bir altkümesi $V\subset\overline{V}\subset U$ olsun. X in minimal olması için gerek ve yeter koşul $X(\overline{V})$ nin her bir normal varyasyonu ve U nun her sınırlı $V\subset\overline{V}\subset U$ altkümesi için

$$A'(X_t(\overline{V}))\big|_{t=0}=0$$

olmasıdır [25].

İspat. X in minimal olması durumda ortalama eğriliği $\boldsymbol{H}\equiv 0$ olduğundan (3.2.4) ifadesinden $A'(X_t(\overline{V}))\big|_{t=0}=0$ elde edilir. Tersine eğer $A'(X_t(\overline{V}))\big|_{t=0}=0$ ise bazı $p\in V$ noktalarında $H(p)\neq 0$ olduğunu kabul edelim. $\boldsymbol{h}:\overline{V}\to\mathbb{R}$ fonksiyonunu $H(p)\neq 0$ şeklinde tanımlayalım ve $\boldsymbol{p}$ nin küçük bir komşuluğu dışında $\boldsymbol{h}\equiv 0$ olduğunu kabul edelim. Buradan seçilen $\boldsymbol{h}\equiv 0$ fonksiyonunun tanımlayacağı varyasyon için $A'(X_t(\overline{V}))\big|_{t=0}=0$ buluruz ki bu bir çelişkidir. Dolayısıyla $\overline{V}$ nin tamamında $\boldsymbol{h}\equiv 0$ olmalıdır. Bu durumda $\boldsymbol{H}\equiv 0$ olacağından X minimaldir.

Tanım 3.2.2. $\mathbb{R}^3$ de C^2- sınıfından bir düzgün yüzey

$$E=G,\;\; F=0$$

olacak şekilde bir koordinat sistemine sahip ise yüzeye bir yüzeye izotermal yüzey denir [25].

X in bir izotermal yüzey olduğunu kabul edelim. X in Laplasyanı ΔX ise ΔX in yüzeye dik olduğunu aşağıdaki gibi gösterilebilir:

$$\begin{aligned}<X_u,\Delta X> &= <X_u, X_{uu}+X_{vv}> \\ &= <X_u,X_{uu}> - <X_{vu},X_v> \\ &= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}|X_u|^2-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}|X_v|^2 \\ &= 0\end{aligned}$$

dır. Benzer şekilde

$$< X_v, \Delta X > = < X_v, X_{uu} + X_{vv} >$$

$$= < X_v, X_{vv} > - < X_{uv}, X_u >$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}|X_v|^2 - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}|X_u|^2$$

$$= 0$$

bulunur. Böylece ΔX , hem X_u hem de X_v ye dik olacağından yüzeye de dik olmak durumundadır. Üstelik yüzeyi izotermal parametrelendirildiği için $E = G,\ \ F = 0$ dır. Ortalama eğriliği veren (3.2.2) ifadesi kullanılırsa

$$H = \frac{1}{2}\frac{eG + gE - 2fF}{EG - F^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{eE + gE}{E^2}$$

$$= \frac{1}{2}\frac{E(e+g)}{E^2}$$

$$= \frac{e+g}{2E}$$

elde edilir. Buradan

$$H = \frac{e+g}{2E}$$

$$= \frac{< N, X_{uu} > + < N, X_{vv} >}{2E}$$

$$= \frac{< N, X_{uu} + X_{vv} >}{2E}$$

$$= \frac{< N, \Delta X >}{2E}$$

bulunur.

Sonuç 3.2.1. $X : U \to \mathbb{R}^3$ düzgün izotermal parametrik bir yüzey olsun. X in minimal olması için gerek ve yeter koşul X in harmonik olmasıdır [25].

Bu durumda minimal parametrik bir yüzey

$$X : U \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{R}^3$$

şeklinde $E = G,\ F = 0$ ve $\Delta X = 0$ koşullarını gerçekleştiren bir izotermal yüzeydir.

$U \subseteq \mathbb{C}$ açık altkümesinin basit bağlantılı olduğunu kabul edelim. Bu durumda X in izotermal oluşuna eşdeğer olarak

$$\left(\frac{\partial \psi_1}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_2}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial \psi_3}{\partial z}\right)^2 = 0$$

dır [25].

$U \subseteq \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir açık altküme olsun. $X : U \to \mathbb{R}^3$ düzgün izotermal parametrik bir minimal yüzey olsun. Yani

$$|X_u|^2 = |X_v|^2,\ < X_u, X_v >= 0,\ \Delta X = 0$$

koşullarını sağlasın. O takdirde U üstünde tanımlanan ve özdeş olarak sıfırdan farklı meromorfik f ve g fonksiyonları, f ve fg^2 holomorfik ve $\forall z_0 \in U$ için

$$X(z) = X(z_0) + \operatorname{Re}\int_{z_0}^{z} f(\omega)(1 - g(\omega)^2, i(1 + g(\omega)^2), 2g(\omega))d\omega$$

olacak şekilde Weierstrass gösterimi vardır. Tersine yukarıdaki gibi tanımlanacak her meromorfik f ve g fonksiyon çifti bir minimal parametrik yüzeyi bu şekilde tanımlar [25].

3.3 Riemann Manifoldları Arasındaki Harmonik Dönüşümler

Tanım 3.3.1. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları ve $F : M_1 \to M_2$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $x \in M_1$ için

$$e(F): M_1 \to [0,\infty)$$

$$x \to e(F)_x = \frac{1}{2}\left|F_{*x}\right|^2 \qquad (3.3.1)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona F dönüşümünün enerji yoğunluğu denir [3].

M_1 ve M_2 Riemann manifoldları ve $F: M_1 \to M_2$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $x \in M_1$ olsun. Bu durumda $\{e_1,\ldots,e_m\}$, T_xM_1 için bir ortonormal baz olmak üzere

$$\left|F_{*x}\right|^2 = \sum_{i=1}^{m} g_2(F_{*x}(e_i), F_{*x}(e_i))$$

$$= \sum_{i=1}^{m} F^* g_2(e_i, e_i)$$

$$= iz_{g_1} F^* g_2$$

olduğundan F dönüşümünün x noktasındaki enerji yoğunluğu

$$e(F)_x = \frac{1}{2} iz_{g_1} F^* g_2 = \frac{1}{2} < g_1, F^* g_2 > \qquad (3.3.2)$$

olur [3].

Tanım 3.3.2. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları; D, M_1 manifoldunun bir kompakt altkümesi ve $F: M_1 \to M_2$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. O halde

$$E(F;D) = \int_D e(F) dV_g = \frac{1}{2}\int_D \left|F_*\right|^2 dV_g \qquad (3.3.3)$$

ile tanımlı fonksiyona F dönüşümünün enerji integrali denir [3].

(3.3.3) ifadesinden $E(F;D) \geq 0$ eşitsizliği elde edilir. Eşitliğin olması için gerek ve yeter koşul F dönüşümünün D üzerinde sabit olmasıdır. Eğer M_1 manifoldu kompakt ise $E(F;M_1)$ yerine sadece $E(F)$ gösterimi kullanılır. Enerji integrali sadece g_1 ve g_2 metriklerine bağlıdır.

Tanım 3.3.3. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları ve

$$C^\infty(M_1, M_2) = \{F \mid F : M_1 \to M_2, F \textit{ bir diferensiyellenebilir dönüşüm}\}$$

olsun. $F : M_1 \to M_2$ dönüşümü, kompakt bir bölge üzerinde

$$E(.;D) : C^\infty(M_1, M_2) \to R$$

şeklinde tanımlanan enerji fonksiyonelinin kritik noktası ise F dönüşümüne bir harmonik dönüşüm denir [3].

Tanım 3.3.4. M_1 ve M_2 Riemann manifoldları ve $F : M_1 \to M_2$ bir dönüşümü olsun. $\varepsilon > 0$ olmak üzere

$$F : M_1 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_2$$

$$(x,t) \to F_t(x)M$$

ve $F_0 = F$ ile tanımlanan F_t dönüşümüne F dönüşümünün bir varyasyonu denir. $\{F_t\}$ dönüşümü sadece $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ parametresine bağlı diferensiyellenebilir dönüşümlerinin bir ailesidir [3].

Tanım 3.3.5. M_1 ve M_2 Riemann manifoldları, $F : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm ve $x \in M_1$ olsun. Her $x \in M_1$ için $t \to F_t(x)$ dönüşümü $F(x) \in M_2$ noktasından geçen bir regüler eğri tanımlar. Bu eğrinin

$$v(x) = \frac{\partial F_t(x)}{\partial t}\Big|_{t=0} \in T_{F(x)}M_2$$

ile tanımlanan ve indirgenmiş $F^{-1}TM_2$ demetinin bir kesiti olan hız vektörüne F_t dönüşümünün bir varyasyon vektör alanı denir [3].

Tanım 3.3.6. M_1 ve M_2 Riemann manifoldları, D , M_1 manifoldunun bir kompakt altkümesi olsun. $F : M_1 \to M_2$ bir dönüşümünün bir $\{F_t\}$ varyasyonu her t noktası için $M_1 \setminus D^\circ$ üzerinde $F_t = F$ koşulunu sağlıyorsa $\{F_t\}$ varyasyonu D içinde desteklenir denir.

Bu durumda Tanım 3.3.3 aşağıdaki şekilde de verilebilir:

Tanım 3.3.7. (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) Riemann manifoldları olsun. $F : M_1 \to M_2$ dönüşümü M_1 manifoldunun bütün D kompakt bölgeleri ve D içinde desteklenen bütün $\{F_t\}$ varyasyonları için

$$\frac{d}{dt} E(F_t; D)\Big|_{t=0} = 0 \tag{3.3.4}$$

oluyorsa F dönüşümüne harmonik dönüşüm denir [3].

Teorem 3.3.1. (Birinci Varyasyon Formülü) M_1 ve M_2 Riemann manifoldları, $F : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm olsun. $\{F_t\}$, F dönüşümünün $D \subset M_1$ kompakt altkümesi içinde desteklenen bir varyasyonu olsun. Bu takdirde $< , >$, $F^{-1}TM_2$ indirgenmiş demeti üzerindeki metrik olmak üzere

$$\frac{d}{dt} E(F_t; D)\Big|_{t=0} = -\int_D < v, \tau(F) > dV_g \tag{3.3.5}$$

dır [3].

İspat. D , M_1 manifoldunun bir kompakt altkümesi, $\{F_t\}$, F dönüşümünün D içinde desteklenen bir varyasyonu ve $v \in \Gamma(F^{-1}TM_2)$ bir varyasyon vektör alanı olsun. O halde

$$\phi : M_1 \times (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_2$$

$$(x,t) \to \phi(x,t) = F_t(x)$$

dönüşümü ve

$$E = \phi^{-1}TM_2 \to M_1 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$$

vektör demeti tanımlansın. E demeti üzerindeki geri-çekme konneksiyonu ∇^{ϕ} ile gösterilir. Bu durumda

$$\phi(p,0) = F,\ \phi(p,t) = F_t(p)$$

dır. M_1 manifoldu üzerindeki bir X manifoldunu vektör alanı aynı zamanda $M_1 \times (-\varepsilon, \varepsilon)$ üzerinde bir vektör alanı olduğundan

$$[\frac{\partial}{\partial t}, X] = 0$$

elde edilir. M_1 manifoldu üzerindeki $\{e_1, ..., e_m\}$ yerel ortonormal çatı olmak üzere $\frac{\partial}{\partial t}, e_i \in \Gamma(TM_1)$ için

$$\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} \phi_*(e_i) - \nabla^{\phi}_{e_i} \phi_*(\frac{\partial}{\partial t}) - \phi_*([\frac{\partial}{\partial t}, e_i]) = 0$$

dır. Böylece

$$\nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} \phi_*(e_i) = \nabla^{\phi}_{e_i} \phi_*(\frac{\partial}{\partial t}) \tag{3.3.6}$$

dır. Diğer taraftan (3.3.1) den

$$\frac{d}{dt}(e(F)) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} |\phi_*|^2$$

dır. Buradan

$$\frac{d}{dt}(e(F)) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial t} \sum_{i=1}^{m} < \phi_*(e_i), \phi_*(e_i) >$$

elde edilir. Böylece metrik konneksiyon olma durumu kullanılırsa

$$\frac{d}{dt}(e(F)) = \sum_{i=1}^{m} < \nabla^{\phi}_{\frac{\partial}{\partial t}} \phi_*(e_i), \phi_*(e_i) >$$

bulunur. (3.3.6) ifadesi kullanılırsa

$$\frac{d}{dt}(e(F)) = \sum_{i=1}^{m} < \nabla^{\phi}_{e_i} \phi_*(\frac{\partial}{\partial t}), \phi_*(e_i) >$$

elde edilir. Diğer taraftan (3.3.3) ifadesinden

$$\frac{d}{dt}E(F_t;D)\Big|_{t=0} = \int_D \sum_{i=1}^{m} < \nabla^{\phi}_{e_i}\phi_*(\frac{\partial}{\partial t}), \phi_*(e_i) > dV_g\Big|_{t=0} \tag{3.3.7}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned} < \nabla^{\phi}_{e_i}\phi_*(\frac{\partial}{\partial t}), \phi_*(e_i) > &= e_i < \phi_*(\frac{\partial}{\partial t}), \phi_*(e_i) > \\ &- < \phi_*(\frac{\partial}{\partial t}), \nabla^{\phi}_{e_i}\phi_*(e_i) > \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

bulunur. Şimdi M_1 manifoldu üzerinde her $Y \in \chi(M_1)$ için

$$g_1(X_t, Y) = g_2(\phi_*(\frac{\partial}{\partial t}), \phi_*(Y))$$

olacak şekilde X_t vektör alanı tanımlansın. Buradan

$$\sum_{i=1}^{m} e_i < \phi_*(\frac{\partial}{\partial t}), \phi_*(e_i) > = \sum_{i=1}^{m} e_i g_1(X_t, e_i)$$

olur. $\overset{1}{\nabla}$, M_1 manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\sum_{i=1}^{m} e_i < \phi_*(\frac{\partial}{\partial t}), \phi_*(e_i) > = \sum_{i=1}^{m} g_1(\overset{1}{\nabla}_{e_i} X_t, e_i) + g_1(X_t, \overset{1}{\nabla}_{e_i} e_i)$$

elde edilir. birinci ifade X_t vektör alanı için diverjens tanımı olduğundan

$$\sum_{i=1}^{m} e_i < \phi_*(\frac{\partial}{\partial t}), \phi_*(e_i) > = div(X_t) + \sum_{i=1}^{m} g_1(X_t, \overset{1}{\nabla}_{e_i} e_i)$$

bulunur. Burada X_t vektör alanının tanımı kullanılırsa

$$\sum_{i=1}^{m} e_i < \phi_*(\frac{\partial}{\partial t}), \phi_*(e_i) > = div(X_t) + \sum_{i=1}^{m} < \phi_*(\frac{\partial}{\partial t}), \phi_*(\overset{1}{\nabla}_{e_i} e_i) > \tag{3.3.9}$$

olur. Böylece (3.3.9) ifadesi (3.3.8) ifadesinde yerine yazılırsa

$$\sum_{i=1}^{m} < \nabla^{\phi}_{e_i}\phi_*(\frac{\partial}{\partial t}), \phi_*(e_i) > = div(X_t) + \sum_{i=1}^{m} < \phi_*(\frac{\partial}{\partial t}), \phi_*(\overset{1}{\nabla}_{e_i} e_i) >$$

$$- \sum_{i=1}^{m} < \phi_*(\frac{\partial}{\partial t}), \nabla^{\phi}_{e_i}\phi_*(e_i) >$$

dır. Bu son ifade (3.3.7) denkleminde yerine yazılır ve diverjens teoremi kullanılırsa

$$\frac{d}{dt}E(F_t;D)\Big|_{t=0} = \int_D \sum_{i=1}^{m} \{ < (\phi_*(\frac{\partial}{\partial t}), \phi_*(\nabla^{\phi}_{e_i} e_i)) >$$

$$- < \phi_*(\frac{\partial}{\partial t}), \nabla^{\phi}_{e_i}\phi_*(e_i) > \} dV_g \qquad (3.3.10)$$

elde edilir. Böylece $t=0$ yazılırsa

$$\begin{aligned} &\phi_*(\frac{\partial}{\partial t})(0,p) = V(p), \\ &\phi_*(e_i)(0,p) = F_*(e_i(p)), \\ &\phi_*(\nabla_{e_i} e_i)(0,p) = F_*(\nabla_{e_i} e_i)(p) \end{aligned}$$

olduğundan, ikinci temel formun tanımından

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial t}E(F_t;D)\Big|_{t=0} = -\int_D \{ < v, \sum_{i=1}^{m} (\nabla F_*)(e_i, e_i) > \} dV_g$$

olur. Böylece tensiyon alanının tanımı kullanılırsa

$$\frac{d}{dt}E(F_t;D)\Big|_{t=0} = -\int_D < v, \tau(F) > dV_g$$

bulunur ve ispat biter.

Sonuç 3.3.1. M_1 ve M_2 Riemann manifoldları, D, M_1 manifoldunun bir kompakt altkümesi ve $F: M_1 \to M_2$ bir dönüşüm olsun. Bu durumda F dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter koşul $\tau(F)=0$ olmasıdır [3].

Sonuç 3.3.1 de ifade edilen $\tau(F)=0$ denklemine harmonik denklem veya Euler-Lagrange denklemi veya tensiyon alanı denklemi denir.

Sonuç 3.3.2. $i : M \to \bar{M}$ izometrik immersiyonun harmonik olması için gerek ve yeter koşul $i(M)$ altmanifoldunun minimal olmasıdır [3].

Diğer taraftan $F : M_1 \to M_2$ bir Riemann submersiyonu olsun. Burada

$$X,Y \in \chi^h(M) \text{ için } (\nabla F_*)(X,Y) = 0$$

ve

$$U,V \in \chi^v(M) \text{ için } (\nabla F_*)(U,V) = -F_*(\overset{1}{\nabla}_U V) = -F_*(T_U V)$$

olduğundan aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.3.3. M_1 ve M_2 Riemann manifoldları olsun. Bu durumda $F : M_1 \to M_2$ Riemann submersiyonunun harmonik olması için gerek ve yeter koşul liflerin minimal olmasıdır [3].

Aşağıdaki önermelerde bazı özel dönüşümler için harmonik olma şartları sunulmaktadır.

Önerme 3.3.1. $F : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter şart her bir $F^\gamma : U \subset \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ bileşeninin harmonik fonksiyonlar olmasıdır [3].

İspat. $\mathbb{R}^m$ ve $\mathbb{R}^n$ sırasıyla m ve n boyutlu Öklidyen uzaylar ve $D \subset M_1$ bir kompakt altkümesi olmak üzere $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ dönüşümü için

$$E(F;D) = \int_D e(F)\, dV_g$$

$$= \frac{1}{2}\int_D |F_*|^2\, dV_g$$

olur. $\{x^1,\dots,x^m\}$ ve $\{y^1,\dots,y^n\}$ sırasıyla $\mathbb{R}^m$ ve $\mathbb{R}^n$ üzerinde standart lokal koordinat sistemleri olmak üzere

$$E(F;D)=\frac{1}{2}\int_D\sum_{i=1}^{m}< F_*(\frac{\partial}{\partial x^i}),F_*(\frac{\partial}{\partial x^i})>dx^1...dx^m$$

$$=\frac{1}{2}\int_D\sum_{i=1}^{m}<\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha},\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial}{\partial y^\alpha}>dx^1...dx^m$$

$$=\frac{1}{2}\int_D\sum_{i,\alpha}(\frac{\partial F^\alpha}{\partial x^i})^2\,dx^1...dx^m$$

elde edilir. Ayrıca $\mathbb{R}^m$ deki standart metrik göz önüne alınır ve Laplasyan Δ ile gösterilirse

$$\tau(F)^\gamma=F^\gamma_{;ii}=\sum_i\frac{\partial^2F^\gamma}{(\partial x^i)^2}=\Delta(F^\gamma)$$

bulunur ve ispat biter.

Bir Riemann manifoldundan Öklidyen uzaya tanımlanan dönüşümler için harmonik olma şartı aşağıdaki önermede verilmiştir.

Önerme 3.3.2. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $\mathbb{R}^n$ Öklidyen uzay olsun. Bu durumda φ: $M\to\mathbb{R}^n$ dönüşümünün harmonik olması için gerek ve yeter şart φ dönüşümü için $\Delta^M(\varphi^\gamma)=0$ dır [3].

İspat. $\{x^1,...,x^m\}$ ve $\{y^1,...,y^n\}$ sırasıyla $x\in M$ ve $\varphi(x)\in\mathbb{R}^n$ noktalarındaki yerel koordinat sistemi ve $\tau(\varphi)=\tau(\varphi)^\gamma\dfrac{\partial}{\partial y^\gamma}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\tau(\varphi)^\gamma &= g^{ij}\varphi^\gamma_{;ij}\\ &= g^{ij}(\frac{\partial^2\varphi^\gamma}{\partial x^i\partial x^j}-\Gamma^k_{ij}\frac{\partial\varphi^\gamma}{\partial x^k}+L^\gamma_{\alpha\beta}\frac{\partial\varphi^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial\varphi^\beta}{\partial x^j})\end{aligned}$$

bulunur. Γ^k_{ij} ve $L^\gamma_{\alpha\beta}$ sırasıyla M ve $\mathbb{R}^n$ manifoldlarının Chrisstoffel sembolleridir. Buradan

$$\tau(\varphi)^\gamma\ =\ \Delta^M\varphi^\gamma+g(grad\varphi^\alpha,grad\varphi^\alpha)L^\gamma_{\alpha\beta}$$

dır. Öklidyen uzayda Chrisstoffel sembolleri sıfır olduğundan

$$\begin{aligned}\Gamma(\varphi)^{\gamma} &= g^{ij}\varphi^{\gamma}_{;ij} \\ &= g^{ij}\left(\frac{\partial^2\varphi^{\gamma}}{\partial x^i \partial x^j} - \Gamma^k_{ij}\frac{\partial\varphi^{\gamma}}{\partial x^k}\right) \\ &= \Delta^M(\varphi^{\gamma})\end{aligned}$$

bulunur. Burada Δ^M, M üzerindeki Laplasyan operatörüdür.

Önerme 3.3.3. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $F:(M,g)\rightarrow(\mathbb{R}, dt\otimes dt)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir [3].

(i) F tamamen jeodeziktir.
(ii) F fonksiyonunun Hessiyan formu sıfırdır.
(iii) F harmonik fonksiyondur.

İspat. $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$(\nabla F_*)(X,Y) = H_F(X,Y)\frac{\partial}{\partial t}\circ F$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{m}(\nabla F_*)(X_i,X_i) &= \sum_{i=1}^{m} H_F(X_i,X_i)\frac{\partial}{\partial t}\circ F \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(h_F(X_i),X_i)\frac{\partial}{\partial t}\circ F \\ &= \sum_{i=1}^{m} g(\nabla_{X_i}\nabla F, X_i)\frac{\partial}{\partial t}\circ F \\ &= (div\nabla F)\frac{\partial}{\partial t}\circ F \\ &= -(\Delta F)\frac{\partial}{\partial t}\circ F\end{aligned}$$

bulunur. Burada

$$\tau(F) = -(\Delta F)\frac{\partial}{\partial t} \circ F$$

olur. Böylece ispat tamamlanır.

Önerme 3.3.4. $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık ve (M, g_1) bir Riemann manifoldu olsun. Bu takdirde her harmonik $F : (I, dt \otimes dt) \to (M, g_1)$ dönüşümü tamamen jeodeziktir ve $F : I \to M$ dönüşümü de (M, g_1) manifoldunun bir jeodeziğidir [3].

İspat. Tensiyon alanı tanımından

$$\tau(F) = (\nabla F_*)(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t})$$

dır. Böylece F harmonik ise F tamamen jeodeziktir. Diğer taraftan

$$0 = \tau(F) = (\nabla F_*)(\frac{\partial}{\partial t}, \frac{\partial}{\partial t})$$

$$= \overset{M}{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} F_* \frac{\partial}{\partial t} - F_*(\overset{I}{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial t}} \frac{\partial}{\partial t})$$

$$= \nabla_{\frac{\partial}{\partial t}} \dot{F}$$

olur. Bu ise F dönüşümünün bir jeodezik olduğunu gösterir.

Tanım 3.3.8. (M,g), (N,h) Riemann manifoldları ve

$$\varphi \ : \ (M,g) \to (N,h)$$

bir C^∞ dönüşümü olsun. Bu durumda $x \in M$ noktasında $X, Y \in T_xM$ için

$$h(d\varphi_x(X), d\varphi_x(Y)) = \Lambda(x) g(X, Y)$$

olacak biçimde bir $\Lambda(x)$ sayısı varsa φ dönüşümüne $x \in M$ noktasında bir zayıf konformal dönüşüm denir. $\forall x \in M$ için yukarıdaki ifade sağlanıyorsa φ

dönüşümüne M üzerinde bir zayıf konformal dönüşüm denir [23].

Tanım 3.3.9. M ve N Riemann manifoldları ve

$$\varphi \,:\, (M,g) \to (N,h)$$

bir C^{∞} dönüşümü ve $x \in M$ olsun. Bu durumda

$$\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_x(\varphi) = cek\ d\varphi_x = \{X \in T_xM \,|\, d\varphi_x(X)=0\} \subset T_xM$$

ve

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_x(\varphi) = \mathcal{V}_x^{\perp} \subset T_xM$$

olarak tanımlansın. $\mathcal{V}_x$ uzayına φ nin x noktasındaki dikey uzayı denir. M deki g metriğine göre $\mathcal{V}_x$ dikey uzayının dik tümleyeni olan $\mathcal{H}_x$ uzayına ise φ nin x noktasındaki yatay uzayı denir [6].

Tanım 3.3.10. M ve N Riemann manifoldları ve

$$\varphi \,:\, M \to N$$

bir C^{∞} dönüşümü ve $x \in M$ olsun. Bu durumda

(i) $d\varphi_x = 0$

(ii) $d\varphi_x$ türev dönüşümü $\mathcal{H}_x$ yatay uzayını $T_{\varphi(x)}N$ üzerine konform olarak resmeder. Yani $d\varphi_x$ örtendir ve $\forall X, Y \in \mathcal{H}_x$ için

$$h(d\varphi_x(X), d\varphi_x(Y)) = \Lambda(x)\, g(X,Y)$$

olacak biçimde bir $\Lambda(x) \neq 0$ sayısı vardır.

şartlarından herhangi biri sağlanıyorsa φ ye $x \in M$ noktasında yatay zayıf konformal dönüşüm veya yarı konformal dönüşüm denir [23].

Tanım 3.3.11. M ve N Riemann manifoldları ve

$$\varphi : M \to N$$

bir C^∞ dönüşümü ve $x \in M$ olsun. $V \subset N$ açık altküme ve $\varphi^{-1}(V) \neq \emptyset$ olacak şekilde her

$$f : V \to \mathbb{R}$$

harmonik fonksiyonu için $f \circ \varphi$, $\varphi^{-1}(V)$ üzerinde harmonik oluyorsa φ ye harmonik morfizm denir [6].

Önerme 3.3.5. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları olsun. Bu durumda

$$\varphi : M^m \to N^n$$

harmonik ve yatay zayıf konform dönüşümü bir harmonik morfizmdir [18].

4. KENMOTSU MANİFOLDLAR VE KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR

Bu bölümde Kenmotsu manifoldlar ve kosimplektik manifoldlar ile ilgili temel kavramlara yer verilmiştir.

4.1 Hemen Hemen Kontakt Metrik Manifoldlar

Tanım 4.1.1. M, $(2m+1)$-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. ξ bir vektör alanı; φ, (1,1)-tipinde bir tensör alanı; η, M üzerinde bir diferensiyellenebilir 1-form olmak üzere (φ, ξ, η) üçlüsü

$$\varphi:\chi(M) \xrightarrow{lineer} \chi(M)$$

$$\eta:\chi(M) \xrightarrow{dif.bilir} C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

$$\eta(\xi)=1 \text{ ve } \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi$$

şartlarını sağlıyor ise bu üçlüye bir hemen hemen kontakt yapı, (M, φ, ξ, η) dörtlüsüne de bir hemen hemen kontakt manifold adı verilir [13].

Tanım 4.1.2. M hemen hemen kontakt manifold ise (M,η) manifoldu üzerinde $X \neq \xi$ için

$$\eta(\xi)=1$$

ve

$$d\eta(\xi,X)=0$$

olacak şekilde bir $\xi \in \chi(M)$ vektör alanı varsa; ξ vektör alanına $\eta-$kontakt yapısının öz (karakteristik) vektör alanı denir [8].

Teorem 4.1.1. *(2m+1)*-boyutlu M hemen hemen kontakt manifoldu üzerinde $\forall X\in\chi(M)$, $\xi\in\chi(M)$ ve $X\neq\xi$ vektör alanları için

(i) $\varphi(\xi)=0$

(ii) $\eta o\varphi=0$

(iii) rank$\varphi=2m$

eşitlikleri sağlanır [13].

Tanım 4.1.3. $(M,\ \varphi,\ \xi,\ \eta)$, *(2m+1)*-boyutlu bir hemen hemen kontakt manifoldu olsun. $\xi\in\chi(M)$ ve $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$\eta(X)=g(X,\xi)$$

ile

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$$

şartlarını sağlayan bir g Riemann metriği tanımlı ise; $(\varphi,\ \xi,\ \eta,g)$ dörtlüsüne hemen hemen kontakt metrik yapı, $(M,\varphi,\ \xi,\ \eta,g)$ beşlisine de bir hemen hemen kontakt metrik manifold denir [13].

Teorem 4.1.2. M, $(\varphi,\ \xi,\ \eta)$ yapısı ile verilmiş *(2m+1)*-boyutlu bir hemen hemen kontakt manifold olsun. Bu durumda M üzerinde $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$g(\varphi X,\varphi Y)=g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$$

olacak biçimde bir g Riemann metriği daima vardır [13].

Sonuç 4.1.1. *(2m+1)*-boyutlu M hemen hemen kontakt manifoldu üzerinde $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

$$g(\varphi X,Y)=-g(X,\varphi Y)$$

dir. Bu ifade ise $\varphi-$nin g ye göre anti-simetrik bir tensör alanı olduğunu gösterir [13].

Sonuç 4.1.2. *(2m+1)*-boyutlu M hemen hemen kontakt manifoldu üzerinde $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$g(\varphi X, X)=0$$

dır [13].

Teorem 4.1.3. *(2m+1)*-boyutlu M hemen hemen kontakt manifoldu üzerinde bir η kontakt yapısı verilsin. $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\varphi: \chi(M) \xrightarrow{lineer} \chi(M)$$
$$g(X, \varphi Y)=d\eta(X, Y)$$

olacak şekilde (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısı vardır [13].

Tanım 4.1.4. M, *(2m+1)*-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. M üzerinde bir (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısı verilsin. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$\Phi(X, Y)=g(X, \varphi Y)$$

olacak şekilde tanımlı Φ tensörüne (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısının temel 2-formu adı verilir [13].

Önerme 4.1.1. *(2m+1)*-boyutlu M hemen hemen kontakt manifold üzerinde bir (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısı verilsin. ∇, M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonu olsun. Bu durumda $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$(\nabla_X \Phi)(Y, Z)=g(Y, (\nabla_X \varphi)Z)$$

$$(\nabla_X \Phi)(Y,Z)+(\nabla_X \Phi)(\varphi Y,\varphi Z)=\eta(Z)(\nabla_X \eta)\varphi Y-\eta(Y)(\nabla_X \eta)\varphi Z$$

$$(\nabla_X \eta)Y = g(Y,(\nabla_X \xi)=(\nabla_X \Phi)(\xi,\varphi Y)$$

$$2d\eta(X,Y)=(\nabla_X \eta)Y-(\nabla_Y \eta)X$$

$$3d\Phi(X,Y,Z)=\underset{X,Y,Z}{\oplus}(\nabla_X \Phi)(Y,Z)$$

eşitlikleri geçerlidir [8]. Burada, $\underset{X,Y,Z}{\oplus}$ ifadesi X, Y, Z vektör alanları üzerinden alınan devirli toplamı belirtmektedir.

Tanım 4.1.5. M, *(2m+1)*-boyutlu diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Eğer M üzerinde her yerde diferensiyellenebilir bir η 1-formu var ve

$$\eta\wedge(d\eta)^m\neq 0$$

koşulunu sağlıyorsa M ye bir kontakt manifold ya da bir kontakt yapıya sahiptir denir. Dolayısıyla η 1-formuna da bir kontakt form adı verilir [24].

Tanım 4.1.6. (M,η) bir kontakt manifold olsun. Bu durumda

$$D=\{X\in TM \mid \eta(X)=0\}$$

biçimde tanımlanan D distribüsyonuna kontakt distribüsyon denir [24].

Önerme 4.1.2. M, *(2m+1)*-boyutlu hemen hemen kontakt manifoldu her yerde

$$\eta\wedge\Phi^m\neq 0$$

olacak şekilde global bir η 1-formuna ve global bir Φ 2-formuna sahip diferensiyellenebilir bir manifold olsun. Burada M^{2m+1} manifoldu bir η kontakt formuna sahip ise, temel 2-formu

$$\Phi = d\eta$$

olacak biçimde bir $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ hemen hemen kontakt metrik yapısı vardır. Dolayısıyla M ye bir kontakt metrik manifoldu (hemen hemen Sasakian manifoldu) adı verilir [24].

Tanım 4.1.7. φ tensör alanının Nijenhuis tensörü $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

$$N(X,Y) = \varphi^2[X,Y] + [\varphi X, \varphi Y] - \varphi[\varphi X, Y] - \varphi[X, \varphi Y]$$

biçiminde tanımlıdır. Burada

$$N(X,Y) + 2\,d\eta(X,Y)\xi = 0$$

ifadesi sağlanıyor ise (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısına normaldir denir [24].

4.2 *K*-Kontakt Yapılar

Tanım 4.2.1. M^{2m+1}, (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısına sahip bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Eğer ξ öz vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanı ise M manifoldu üzerindeki kontakt metrik yapıya K-kontakt yapı ve M ye de bir K-kontakt manifold denir [24].

Önerme 4.2.1. M^{2m+1} bir K-kontakt manifold olsun. Bu durumda M^{2m+1} manifoldunun bir K-kontakt metrik manifold olması için gerek ve yeter koşul

$$\nabla_X \xi = -\varphi X$$

olmasıdır [24].

Önerme 4.2.2. M, *(2m+1)*-boyutlu $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ hemen hemen kontakt metrik yapısına sahip bir K-kontakt manifoldu olsun. Bu durumda ξ vektör alanını içeren herhangi bir düzlemin kesit eğriliği 1 dir [24].

4.3 Kenmotsu Manifoldları

Tanım 4.3.1. M, $(\varphi,\ \xi,\ \eta,\ g)$ hemen hemen kontakt metrik yapısı ile verilmiş *(2m+1)*-boyutlu bir hemen hemen kontakt metrik manifoldu olsun. Eğer M, hemen hemen kontakt metrik manifoldu üzerinde

$$d\eta=0$$

ve

$$d\Phi= 2\eta\wedge\Phi$$

eşitlikleri sağlanıyorsa M ye bir hemen hemen Kenmotsu manifoldu denir [12].

Tanım 4.3.2. M, (φ, ξ, η, g) yapısı ile verilmiş *(2m+1)*-boyutlu bir hemen hemen kontakt metrik manifoldu olsun. Eğer M manifoldu üzerinde

$$(\nabla_X\varphi)Y = -\,g(X,\varphi Y)\xi - \eta(Y)\varphi X \tag{4.3.1}$$

koşulu sağlanıyorsa M ye Kenmotsu manifoldu denir [12].

M bir Kenmotsu manifold olsun. Bu durumda $\forall X, Y\in\chi(M)$için

$$\nabla_X\xi=X-\eta(X)\xi$$

$$(\nabla_X\eta)Y\ =g(X,Y)-\eta(X)\eta(Y)$$

eşitlikleri sağlanır [36].

Örnek 4.3.1. N, (J,h) Kaehlerian yapısı ile birlikte bir Kaehler manifoldu ve $f:\mathbb{R}\rightarrow\mathbb{R}$, $f(t)=ce^{t}$, $c\in\mathbb{R},\ \ c>0$ ile tanımlanan bir fonksiyon olsun.

Buna göre, $M=\mathbb{R}\times_f N$ çarpım manifoldu

$$g_{(t,x)}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & f^2(t)h_x\end{bmatrix}$$

ile tanımlanan bir Riemann metriğine sahip bir Riemann manifoldudur. Eğer herhangi bir $(t,x)\in\mathbb{R}\times N$ noktası ve M ye teğet olan herhangi bir vektör alanı X için $\xi=\frac{d}{dt}$, $\eta(X)=g(X,\xi)$ ve

$$\varphi_{(t,x)}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & exp((t\xi))_* J_{(x)} exp((-t\xi))_*\end{bmatrix}$$

alınırsa M Kenmotsu manifoldu olur [12].

Tanım 4.3.3. M bir Kenmotsu manifoldu olsun. T_pM tanjant uzayındaki $p\in M$ noktasındaξ vektör alanına dik bir X birim vektör alanı $\{X,\varphi X\}$ ortonormal olacak biçimde var ise $\{X,\varphi X\}$ düzlemine T_pM tanjant uzayının $\varphi-$kesitseli denir.

Burada

$$K(X,\varphi X)=g(R(X,\varphi X)\varphi X,X)$$

şeklinde tanımlanan ifadeye ise M nin $\varphi-$kesitsel eğriliği adı verilir [12,36].

Tanım 4.3.4. M Kenmotsu manifoldunun *(2m+1)*-boyutlu R eğrilik tensörü $\forall X,Y,Z\in\chi(M)$ için

$$R(X,Y)Z=\frac{c-3}{4}[g(Y,Z)X-g(X,Z)Y]$$

$$+\frac{c+1}{4}[\eta(X)\eta(Z)Y-\eta(Y)\eta(Z)X$$

$$+\eta(Y)g(X,Z)\xi-\eta(X)g(Y,Z)\xi$$

$$+g(X,\varphi Z)\varphi Y-g(Y,\varphi Z)\varphi X+2g(X,\varphi Y)\varphi Z\,]$$

şeklinde verilirse M ye c=sabit $\varphi-$kesitsel eğriliğine sahip Kenmotsu uzay form adı verilir [12].

4.4 Kosimplektik Manifoldlar

Tanım 4.4.1. M, (φ, ξ, η, g)yapısı ile verilmiş *(2m+1)*-boyutlu bir hemen hemen kontakt metrik manifoldu, η bir 1-form ve Φ bir temel 2-form olsun. Eğer η ve Φ kapalı ise M ye hemen hemen kosimplektik manifold denir. (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısı normal ise $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontakt metrik manifolduna kosimplektik manifold denir [32].

Teorem 4.4.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ hemen hemen kontakt metrik manifoldu verilsin. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldunun kosimplektik olması için gerek ve yeter koşul $\varphi-$nin paralel olmasıdır. Burada ∇, M nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\nabla\varphi=0$$

eşitliği sağlanır.

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ kosimplektik manifoldu için

(i) $\nabla\varphi=0$

(ii) $\nabla\eta=0$

(iii) $\nabla\xi=0$

dır [33,34].

Teorem 4.4.2. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ kosimplektik manifoldu verilsin. Bu durumda M nin eğrilik tensörü ve kesit eğriliği $\forall X, Y \in \chi(M)$ için

(i) $R(\varphi X, \varphi Y) = R(X, Y)$

(ii) $K(\varphi X, \varphi Y) = K(X, Y)$

(iii) $K(X, \xi) = 0$

özelliklerini sağlar [16,32].

Teorem 4.4.3. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir kosimplektik manifold olsun. Herhangi $X, Y \in \chi(M)$ için X, Y ve $\varphi X, \varphi Y$ vektörlerinin ortonormal olması halinde M nin eğrilik tensörü ve kesit eğriliği

$$g(R(X, \varphi X)Y, \varphi Y) = -K(X, Y) - K(X, \varphi Y)$$

eşitliğini sağlar [35].

5. KENMOTSU MANİFOLDLARI VE KOSİMPLEKTİK MANİFOLDLAR ÜZERİNDE HARMONİK DÖNÜŞÜMLER

Bu bölüm sırasıyla Kenmotsu manifoldları ve kosimplektik manifoldları üzerindeki harmonik dönüşümler ile ilgili bazı karakterizasyonlara ayrılmıştır.

5.1 Kenmotsu Manifoldları Üzerindeki Harmonik Dönüşümler

$M(\varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold ve $N(J,h)$ bir hemen hemen Hermityen manifold olsun. Eğer $F: M(\varphi,\xi,\eta,g) \to (N,J)$ dönüşümü $dF \circ \varphi = J \circ dF$ şartını sağlıyor ise F ye bir (φ,J)- holomorfik dönüşüm denir. $M(\varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldunun bir Kenmotsu manifold olması durumunda aşağıdaki teoreme ulaşılır [17]:

Teorem 5.1.1. $M(\varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold, $N(J,h)$ bir hemen hemen Hermityen manifold ve $F: M \to N$ bir $(\varphi, J)-$ holomorfik dönüşüm olsun. Bu durumda

$$J(\tau(F)) = dF(div\varphi) - tr_g\beta \tag{5.1.1}$$

dır. Burada $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için $\beta(X,Y) = (\tilde{\nabla}_X J)(dFY)$ dir [17].

İspat. $dF \circ \varphi$ ve $J \circ dF$ anlamlıdır. F, $(\varphi, J)-$holomorfik dönüşümü ve ∇' N deki Levi-Civita konneksiyonu olduğundan

$$\nabla'(dF \circ \varphi) = \nabla'(J \circ dF) \tag{5.1.2}$$

dur. ω, 1-formu ve $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla\omega)(X,Y) = (\nabla_X\omega)(Y) = \nabla_X\omega(Y) = \omega\nabla_X Y \tag{5.1.3}$$

olduğunu biliyoruz.

Şimdi $\omega = dF \circ \varphi$ alalım.

$$
\begin{aligned}
(\nabla'\omega)(X,Y) &= (\nabla'(dF\circ\varphi))(X,Y)\\
&= \tilde{\nabla}_X(dF\circ\varphi)(Y) - dF\circ\varphi(\nabla_X^M Y)\\
&= \tilde{\nabla}_X dF(\varphi Y) - dF\circ\varphi(\nabla_X^M Y)\\
&= (\tilde{\nabla}_X dF)(\varphi Y) + dF(\nabla_X^M \varphi Y) - dF\circ\varphi(\nabla_X^M Y)\\
&= (\tilde{\nabla}_X dF)(\varphi Y) + dF(\nabla_X^M \varphi Y - \varphi(\nabla_X^M Y))\\
&= (\tilde{\nabla}_X dF)(\varphi Y) + dF((\nabla_X \varphi)(Y))
\end{aligned}
$$

olur. Burada

$$\alpha_F(X,Y) = (\tilde{\nabla} dF)(X,Y) = (\tilde{\nabla}_X dF)(Y)$$

eşitliğinden $\alpha_F(X,\varphi Y) = (\tilde{\nabla}_X dF)(\varphi Y)$ olur. Dolayısıyla

$$(\nabla'(dF\circ\varphi))(X,Y) = \alpha_F(X,\varphi Y) + dF((\nabla_X\varphi)(Y))$$

elde edilir.

Şimdi (5.1.3) ifadesinde $\omega = J\circ dF$ alalım.

$$
\begin{aligned}
(\nabla'\omega)(X,Y) &= (\nabla'(J\circ dF))(X,Y)\\
&= \tilde{\nabla}_X(J\circ dF)(Y) - J\circ dF(\nabla_X^M Y)\\
&= \tilde{\nabla}_X J(dF(Y)) - J\circ dF(\nabla_X^M Y)\\
&= (\tilde{\nabla}_X J)(dF(Y)) + J(\tilde{\nabla}_X dF(Y)) - J(dF(\nabla_X^M Y))\\
&= (\tilde{\nabla}_X J)(dF(Y)) + J(\tilde{\nabla}_X dF(Y) - dF(\nabla_X^M Y))\\
&= (\tilde{\nabla}_X J)(dF(Y)) + J((\tilde{\nabla}_X dF)(Y))
\end{aligned}
$$

dır. Dolayısıyla

$$(\nabla'(J\circ dF))(X,Y) = (\tilde{\nabla}_X J)(dF(Y)) + J(\alpha_F(X,Y))$$

elde edilir. (5.1.2) ifadesinden dolayı

$$(\tilde{\nabla}_X J)(dF(Y)) + J(\alpha_F(X,Y)) = \alpha_F(X,\varphi Y) + dF((\nabla_X\varphi)(Y)) \qquad (5.1.4)$$

olur. M hemen hemen kontakt metrik yapısına sahip bir manifold olup (5.1.4) ifadesinin izi alınırsa

$$\sum_{i=1}^{2m+1}\{(\tilde{\nabla}_{e_i}J)(dF(e_i))+J(\alpha_F(e_i,e_i))\}=\sum_{i=1}^{2m+1}\{\alpha_F(e_i,\varphi e_i)+dF((\nabla_{e_i}\varphi)(e_i))\}$$

elde edilir. $\beta(e_i,e_i)=(\nabla_{e_i}J)(dF(e_i))=iz\beta$, $div\varphi=(\nabla_{e_i}\varphi)(e_i)$ ve ikinci temel formun izi tensiyon alanı olduğundan

$$J(\tau(F))+iz\beta=dF(div\varphi)$$

$$J(\tau(F))=dF(div\varphi)-tr_g\beta$$

elde edilir ve ispat biter.

Önerme 5.1.1. $M(\varphi,\xi,\eta,g)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold, $N(J,h)$ bir hemen hemen Hermityen manifold ve $F:M\to N$ bir yatay konformal $(\varphi,J)-$ holomorfik dönüşüm olsun. Bu durumda $Tr_g\beta=0$ ise $divJ=0$ dır [17].

Teorem 5.1.2. $M(\varphi,\xi,\eta,g)$ bir Kenmotsu manifoldu, $N(J,h)$ bir Kaehler manifoldu ve $F:M\to N$ bir (φ,J)- holomorfik dönüşümü olsun. Öyleyse F bir harmonik dönüşümdür [5].

İspat. $F:M\to N$ bir (φ,J)- holomorfik dönüşüm ise

$$J(\tau(F))=F_*(div\varphi)-tr_g\beta$$

dır [17]. Burada $\beta(X,Y)=(\tilde{\nabla}_X J)F_*Y$ ve $\tilde{\nabla}$; $F^{-1}TN$ geri çekme demetine indirgenen konneksiyondur. $\{e_1,\ldots,e_m,\varphi e_1,\ldots,\varphi e_m,\xi\}$ TM nin yerel ortonormal φ- bazı olmak üzere

$$\begin{aligned} div\varphi &= \sum_{i=1}^{2m+1} (\nabla_{e_i}\varphi)e_i \\ &= \sum_{i=1}^{2m+1} g(\varphi e_i, e_i)\xi - \eta(e_i)\varphi e_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Diğer taraftan N Kaehler manifoldu olduğu için $\nabla J = 0$ dır. Dolayısıyla $J(\tau(F)) = 0$ yani $\tau(F) \equiv 0$ olup F nin harmoniktir [5].

Örnek 5.1.1. $F: M \to N$ kanonik projeksiyonunun bir Kenmotsu manifoldundan bir Kaehler manifolduna tanımlanan bir $(\varphi, J)-$ holomorfik dönüşüm olsun. Dolayısıyla Teorem 5.1.1 gereği F nin harmonik olduğu görülür [5].

$N(J,h)$ bir hemen hemen Hermityen bir manifold ve $M(\varphi, \xi, \eta, g)$ de bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Eğer $F: N \to M$ diferensiyellenebilir dönüşümü $dF \circ J = \varphi \circ dF$ eşitliğini sağlıyorsa F ye bir $(J,\varphi)-$ holomorfik dönüşüm denir [5].

Teorem 5.1.3. $N(J,h)$ bir Kaehler manifoldu, $M(\varphi, \xi, \eta, g)$ bir Kenmotsu manifoldu ve $F: N \to M$ bir $(J,\varphi)-$ holomorfik dönüşüm olsun. Bu durumda F nin harmonik olması için gerek ve yeter şart F nin sabit olmasıdır [5].

İspat. $(J,\varphi)-$ holomorfik bir dönüşüm için, (5.1.1) eşitliğine benzer şekilde

$$\varphi(\tau(F)) = dF(divJ) - tr_h\beta$$

dır. Burada $\beta(X,Y) = (\tilde{\nabla}_X \varphi)(dFY)$ dir. N bir Kaehler manifoldu olduğu için

$$divJ = \sum_{i=1}^{2n} (\nabla_{e_i} J)e_i = 0$$

dır. $\{e_i\}_{i=1...2n}$ TN de bir yerel ortonormal baz ise (4.3.1) kullanılarak

$$Tr_h\beta = \sum_{i=1}^{2n} (\tilde{\nabla}_{e_i} \varphi)(dFe_i) = -\sum_{i=1}^{2n} \eta(F_* e_i)\varphi F_* e_i,$$

olur. Buradan

$$\varphi(\tau(F)) = -\sum_{i=1}^{2n} \eta(F_* e_i)\varphi F_* e_i$$

elde edilir. Diğer taraftan, F bir (J,φ)- holomorfik dönüşüm olduğundan

$$\eta(F_* e_i) = -\eta(F_* J^2 e_i) = -\eta(\varphi F_* J e_i) = 0$$

olur. Böylece $\varphi(\tau(F)) = 0$, yani $\tau(F) = \eta(\tau(F))\xi$ elde edilir. Öte yandan

$$\begin{aligned} g(\tau(F),\xi) &= \sum_{i=1}^{2n} g(\tilde{\nabla}_{e_i} F_* e_i - F_* \nabla_{e_i} e_i, \xi) \\ &= \sum_{i=1}^{2n} g(\tilde{\nabla}_{e_i} F_* e_i, \xi) - \sum_{i=1}^{2n} g(F_* \nabla_{e_i} e_i, \xi) \\ &= -\sum_{i=1}^{2n} \{ g(\tilde{\nabla}_{e_i} \varphi(F_*(Je_i)), \xi) - g(\varphi \circ F_*(J\nabla_{e_i} e_i), \xi) \} \end{aligned}$$

dır. Son eşitlikte N nin Kaehlerian manifold ve F nin de bir $(J,\varphi)-$ holomorfik dönüşüm olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} g(\tau(F),\xi) &= -\sum_{i=1}^{2n} g(\nabla^M_{F_* e_i} \varphi F_*(Je_i), \xi) - \sum_{i=1}^{2n} g(\varphi(\nabla^M_{F_* e_i} F_* J e_i), \xi) \\ &= -\sum_{i=1}^{2n} g(\nabla^M_{F_* e_i} \varphi F_*(Je_i), \xi) \end{aligned}$$

olur. (4.3.1) ve $\eta(F_* e_i) = 0$ olduğundan

$$g(\tau(F),\xi) = \sum_{i=1}^{2n} g(F_* e_i, F_* e_i)$$

bulunur. O halde $i = 1,...,2n$ için $g(F_* e_i, F_* e_i) = 0$ ve dolayısıyla F sabit bir dönüşüm ise F harmonik bir dönüşümdür [5]. Tersine F harmonik ise sabittir.

Harmonik morfizmler için Fuglede [28] ve Ishihara [27] tarafından ortaya konulan karakterizasyon göz önüne alınarak Kenmotsu manifoldlarında tanımlanan harmonik morfizmler için aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 5.1.4. $M(\varphi, \xi, \eta, g)$ bir Kenmotsu manifold, $N(J,h)$ bir Hermityen manifold ve $F: M \to N$ bir yatay konformal (φ, J)- holomorfik dönüşüm olsun. F dönüşümünün harmonik morfizm olması için gerek ve yeter koşul N nin yarı Kaehler manifold olmasıdır [5].

İspat. Bir hemen hemen kontakt metrik manifolddan, hemen hemen Hermityen manifolda tanımlanan yatay konformal bir $(\varphi, J)-$ holomorfik F dönüşümü için, aşağıdaki koşullardan herhangi ikisinin kalan üçüncü koşulu ifade ettiğini biliyoruz [17]:

(i) $divJ = 0$

(ii) $dF(div\varphi) = 0$

(iii) F harmonik ve dolayısıyla harmonik morfizmdir.

Şimdi $\{e_1, \ldots, e_m, \varphi e_1, \ldots, \varphi e_m, \xi\}$ TM nin bir $\varphi-$ bazı olsun, sonra $e_{2m+1} = \xi$

$$\begin{aligned} div\varphi &= \sum_{i=1}^{2m+1} (\nabla_{e_i}\varphi)e_i \\ &= \sum_{i=1}^{2m+1} g(\varphi e_i, e_i)\xi - \eta(e_i)\varphi e_i \\ &= 0 \end{aligned}$$

alınır. F, yatay konformal $(\varphi, J)-$ holomorfik bir dönüşüm olduğundan, F nin bir harmonik morfizm olması için gerek ve yeter şart $divJ = 0$ yani N nin bir yarı Kaehler manifold olmasıdır [5].

Teorem 5.1.5. $M(\varphi, \xi, \eta, g)$ bir Sasakian manifold, $N(J,h)$ bir hemen hemen Hermityen manifold ve $F: M \to N$ bir yatay konformal $(\varphi, J)-$ holomorfik dönüşüm olsun. F dönüşümünün harmonik morfizm olması için gerek ve yeter koşul N nin yarı Kaehler manifold olmasıdır [17].

İspat. $M(\varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold ve F yatay konformal $(\varphi, J)-$ holomorfik dönüşüm olsun. Aşağıdaki iki şart üçüncüyü sağlar:

(i) $divJ = 0$

(ii) $dF(div\varphi) = 0$

(iii) F harmonik ve dolayısıyla harmonik morfizmdir.

Gerçekten $divJ = 0$ ise F yatay koformal $(\varphi, J)-$ holomorfik olduğunda önerme 5.1.1'e göre $Tr_g\beta = 0$ dır. Ayrıca $dF(div\varphi) = 0$ ise

$$J(\tau(F)) = dF(div\varphi) - tr_g\beta$$

ifadesinden $\tau(F) = 0$ yani F harmonik olur.

Şimdi $\{e_1,...,e_m,\varphi e_1,...,\varphi e_m,\xi\}$ TM nin bir $\varphi-$bazı olsun. M bir Sasakian manifold ve $div\varphi = 2m\xi$ olmak üzere

$$(\nabla_{e_i}\varphi)e_i = \xi$$

$$(\nabla_{\varphi e_i}\varphi)\varphi e_i = \xi$$

$$(\nabla_{\xi}\varphi)\xi = 0$$

dır. F , $(\varphi,J)-$ holomorfik bir dönüşüm olduğundan $dF(\xi) = 0$ yani $dF(div\varphi) = 0$ dır. F , yatay konformal $(\varphi,J)-$ holomorfik bir dönüşüm olduğundan, F nin bir harmonik morfizm olması için gerek ve yeter şart $divJ = 0$ yani N nin bir yarı Kaehler manifold olmasıdır [17].

5.2 Kosimplektik Manifoldların Harmonik Dönüşümleri

Teorem 5.2.1. $F : N_1 \to N_2$ dönüşümü Kaehler manifoldları arasında tanımlı bir holomorfik veya anti-holomorfik dönüşüm ise F bir harmonik dönüşümdür. Ayrıca N_1 kompakt ise enerji fonksiyoneli homotopi sınıfında bir mutlak minimumdur [14].

Teorem 5.2.2. $f : M \to N$ dönüşümü aşağıdaki koşullardan birini sağlıyorsa f bir harmonik dönüşümdür:

(i) f, N Kaehler manifoldu ve M kosimplektik manifoldu arasında bir $(\varphi,J)-$holomorfik veya $(\varphi,J)-$anti-holomorfik dönüşümdür.

(ii) f, N kosimplektik manifold ve M Kaehler manifoldu arasında bir $(J,\varphi)-$holomorfik veya $(J,\varphi)-$anti-holomorfik dönüşümdür.

(iii) f, iki kosimplektik manifold arasında bir $\varphi-$holomorfik dönüşümdür.

Ayrıca M kompakt ise enerji fonksiyoneli homotopi sınıfında bir mutlak minimumdur [14].

İspat. Yukarıdaki üç koşul için ispatlar benzerdir. Bu nedenle sadece (iii) koşulunu ispatlayalım:

$f : M_1 \to M_2$ kosimplektik manifoldlar üzerinde bir $\varphi-$holomorfik dönüşüm olsun. $F : M_1^{\times} \to M_2^{\times} : (x,y) \to (f(x),f(y))$ dönüşümü Kaehler manifoldları üzerinde bir holomorfik dönüşümdür. Dolayısıyla F dönüşümü bir harmonik dönüşümdür.

Sonuç 5.2.1. M bir kompakt manifold, (M,P) ve (N,P') Kaehler veya kosimplektik manifoldlar olsun. Eğer $f_t : M \to N$ dönüşümü, harmonik dönüşümler boyunca $(P,P')-$holomorfik dönüşümünün diferensiyellenebilir bir deformasyonu ise bu durumda her f_t, $(P,P')-$holomorfiktir [14].

6. KAYNAKLAR

[1] A. Sabuncuoğlu, *Lineer Cebir*, Nobel Yayınları, 2004.

[2] B. Fuglede, *Harmonic Morphisms between Riemannian Manifolds*, **Amer. J. Math.** 86 (1964), 109-160.

[3] B. Şahin, *Manifoldların Diferansiyel Geometrisi*, Nobel Yayınları, Ankara, 2012.

[4] B. Unal, Doubly warped products, *Differantial Geometry and its Applications Volume* 15, Issue 3, November 2001.

[5] N. A. Rehman, *Harmonic Maps on Kenmotsu Manifolds*, Ovidius Constanta University, 200-203, 2013.

[6] M. Svensson, *Polynomial Harmonic Morphisms*, Master Thesis, Lund Universitet, November, 1998.

[7] D. E. Blair, *Contact Manifolds in Riemannian Geometry*, **Lecture Notes in Math**. Vol. 509, Springer-Verlag, 1976.

[8] D. E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Birkhauser, Boston, 2002.

[9] B. O’Neill, *Semi-Riemannian Geometry*, Academic Press, New York, 1983.

[10] Ç. Karaman, *Riemann Manifoldları Üzerindeki Bazı Özel Yapılar ve F-Konneksiyonları*, Doktora Tezi, Atatürk Üni. Fen Bilimleri Enst.2016.

[11] H. Urakawa, *Calculus of Variations and Harmonic Mapping*, Transl. Math. Monographs 132, **Amer. Math. Soc.,** Providence, 1993.

[12] K. Kenmotsu, *A class of Almost Contact Riemannian Manifolds*, **Tohoku Math.,** Journ., 24, 93-103, 1972.

[13] K. Yano and M. Kon, *Structures on Manifolds*, Series in Pure Mathematics, 3. World Scientific Publishing Co., Singapore,1984.

[14] C. Gherghe, E. Boeckx, *Harmonic Maps and Cosymplectic Manifolds*, J. Aust. Math. Soc., 85-88 2004.

[15] B. O’Neill, *Semi-Riemann Geometry*, Academic Press, New York, 1983.

[16] S.I. Goldberg and K. Yano, *Integrability of Almost Cosymplectic Structures*, **Pacific Journal of Mathematics**, 31, 373-381, 1969.

[17] C. Gherghe, S. Ianus, A. M. Pastore, *Harmonic Maps, Harmonic Morphism and Stability*, **Bull. Math. Soc. Sci. Roum**. 1-11, 2000.

[18] S. Yüksel, *Harmonik Morfizmlerin Geometrisi Üzerine*, Y. Lisans Tezi, İnönü Üni., Fen Bilimleri Enst., 2005.

[19] S. Tanno, *The Aotomorphism Groups Of Almost Contact Riemannian Manifolds*, **Illinois J. Math.,** vol.3, no.2, 1989.

[20] Ş. Yanan, *Bir Dönüşümün İkinci Temel Formu*, Y. Lisans Semineri, İnönü Üni., Fen Bilimleri Enst., 2011.

[21] S. Kobayashi and K. Yano, Prolongations of Tensor Fields and Connections to tangent bundles ı. **General Theory, J. Math. Soc**., Japan,1966.

[22] M.J. Lee, *Manifolds and Diferential Geometry*, American Mathematical Society, United States of America, 2009.

[23] P. Baird, J. C. Wood, *Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*, Clarendon Press, Oxford, 2003.

[24] S. Şener, *Diferensiyellenebilir Manifoldlar Üzerindeki Kontakt Yapılar*, Y. L. Tezi, İnönü Üniversitesi, Türkiye, 2008.

[25] İ. Altunay, *Manifoldların Harmonik Dönüşümleri Üzerine*, Y. Lisans Tezi, Beykent Üni. Fen Bilimleri Enst.2008.

[26] G. Pitiş, *Geometry of Kenmotsu Manifolds*, Publishing House of Transilvania University of Braşov, 2007.

[27] T. Ishihara, *A Mapping of Riemannian Manifolds which Preserves Harmonic Functions* J. Math. Kyoto University, 1979.

[28] B. Fuglede, *Harmonic Morphisms between Riemannian Manifolds*, Anales de l' institute Fourier, 107-144, 1978.

[29] J. Eells, L. Lemaire, *A Report on Harmonic Maps*, Bull. **London Math. Soc.** 1-68, 1978.

[30] L. R. Bishop and S. Goldberg, *Tensor Analysisn on Manifolds*. The Macmillan Company, New York, 1968.

[31] H. H. Hacısalihoğlu, *Diferensiyel Geometri*, Erten Matbaası, Ankara, 2000.

[32] D. E. Blair, *Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds*, Birkhauser, Springer, 2010.

[33] J. W. Ludden, *Submanifolds of Cosymplectic Manifolds*, J. Differential Geom. 4, 237-244, 1970.

[34] A. Bejancu, *Geometry of CR-Submanifolds*, Polytechnic Institute of Iasi, Romania, 1986.

[35] S. Aykurt Sepet, *Slant Submersiyonların Geometrisi*, Doktora Tezi, Fırat Üni. Fen Bilimleri Enst., 2015.

[36] S. Sular, *Kenmotsu Manifoldlar ve Bunların Altmanifoldları*, Doktora Tezi, Balıkesir Üni. Fen Bilimleri Enst., 2009.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad	**:** Kübra ATLIHAN
Doğum Yeri ve Tarihi	**:** Adıyaman, 1993
Adres	**:**İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü, Merkez/Malatya
E-Posta	**:** kbr261@gmail.com
Lisans	**:** Adıyaman Üniversitesi (2011-2015)
Mesleki Deneyim	**:**2016'da Batman 16 Mayıs Ortaokulu'nda öğretmenliğe başlamıştır ve halen devam etmektedir.