

T.C.  
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ISI İLETİM DENKLEMİNİN KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE  
AYRIKLAŞTIRILMIŞ ŞEMALARININ DEĞİŞKENLERİNE AYIRMA  
TEKNİĞİYLE ÇÖZÜMLERİ

Selin ERTAŞ DOĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ  
MATEMATİK ANA BİLİM DALI

Haziran 2019

Tezin Başlığı : ISI İLETİM DENKLEMİNİN KLASİK SONLU FARK  
YÖNTEMLERİ İLE AYRIKLAŞTIRILMIŞ ŞEMALARININ  
DEĞİŞKENLERİNE AYIRMA TEKNİĞİYLE ÇÖZÜMLERİ

Tezi Hazırlayan : Selin ERTAŞ DOĞAN

Sınav Tarihi : 17.06.2019

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında  
Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

### Sınav Jüri Üyeleri

**Tez DanıŐmanı: Prof.Dr. Selçuk KUTLUAY** \_\_\_\_\_

İnönü Üniversitesi

**Prof.Dr. Alaattin ESEN** \_\_\_\_\_

İnönü Üniversitesi

**Dr. Öğr. Üyesi Muaz SEYDAOĞLU** \_\_\_\_\_

MuŐ Alparslan Üniversitesi

**Prof.Dr. Halil İbrahim ADIGÜZEL**

Enstitü Müdürü

## ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Isı İletim Denkleminin Klasik Sonlu Fark Yöntemleri ile Ayrıklaştırılmış şemalarının Değişkenlerine Ayırma Tekniğiyle Çözümleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Selin ERTAş DOğAN

# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## ISI İLETİM DENKLEMİNİN KLASİK SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE AYRIKLAŞTIRILMIŞ ŞEMALARININ DEĞİŞKENLERİNE AYIRMA TEKNİĞİYLE ÇÖZÜMLERİ

Selin ERTAŞ DOĞAN

İnönü Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Ana Bilim Dalı

102+viii sayfa

2019

Danışman : Prof.Dr. Selçuk KUTLUAY

Üç bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde tezde kullanılacak olan bazı temel tanım ve kavramlarla birlikte başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen 1-boyutlu ısı iletim denkleminin yaklaşık ve tam çözümlerinin elde edilmesinde kullanılan ve literatürde sıklıkla karşılaşılan klasik sonlu fark ve değişkenlerine ayırma yöntemleri hakkında bazı bilgiler verildi.

Tezin esasını teşkil eden ikinci bölümde iki farklı başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen 1-boyutlu ısı iletim denkleminin klasik sonlu fark şemalarının değişkenlerine ayırma yöntemi ile tam (Fourier seri) çözümü verildi.

Tezin son bölümü olan üçüncü bölümde, 1-boyutlu ısı iletim denklemi için iki test problem göz önüne alındı. Her bir test problemin ayrıklaştırılmış nümerik şemalar diye adlandırılan klasik sonlu fark şemaları ve bu şemaların değişkenlerine ayırma tekniği kullanılarak nümerik çözümleri bulundu. Elde edilen nümerik sonuçlar analitik çözümle karşılaştırıldı ve  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarıyla birlikte tablolar halinde sunuldu. Ayrıca elde edilen sonuçların sürekliliğini göstermek için bazı grafikler verildi.

**ANAHTAR KELİMELEER:** Isı İletim Denklemi, Klasik Sonlu Fark Yöntemleri, Değişkenlerine Ayırma Yöntemi

# ABSTRACT

M.Sc. Thesis

SOLUTIONS OF DISCRETIZED SCHEMES OF HEAT CONDUCTION  
EQUATION VIA CLASSICAL FINITE DIFFERENCE METHODS BY  
SEPERATION OF VARIABLES TECHNIQUE

Selin ERTAŞ DOĞAN

İnönü University  
Graduate School of Natural and Applied Sciences  
Department of Mathematics

102+viii pages

2019

Supervisor : Prof.Dr. Selçuk KUTLUAY

In the first chapter of this thesis consisting of three chapters, some fundamental information and concepts that will be used in the thesis as well as some substantial information about the classical finite difference and the separation of variables methods frequently encountered in the literature and used for obtaining the approximate and exact solutions of the one-dimensional heat equation given together with the initial and boundary conditions are given.

In the second chapter constituting the main body of the thesis, exact (Fourier series) solution has been obtained by the method of separation of variables via the classical finite difference schemes of the one dimensional heat equation subject to two different initial and boundary conditions.

In the third chapter, which is the last chapter of the thesis, two test problems have been taken into consideration for one dimensional heat equation. Numerical solutions of each test problem have been obtained by using the classical finite difference schemes as called discretized numerical schemes and the method of separation of variables of these schemes. The obtained numerical results are compared with analytical solution and presented in tables together with the error norms  $L_2$  and  $L_\infty$ . Moreover, to show the continuity of the obtained results, some graphs have been illustrated.

**KEYWORDS:** Heat Conduction Equation, Classical Finite Difference Methods, the Method of Separation of Variables

## TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenen ve tezin hazırlanması sürecinde yardımlarını ve desteğini esirgemeyen çok değerli hocam Sayın Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a, Matematik Anabilim Dalı Başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŐ'e, tezin yazımı sürecinde bana zaman ayırıp yardımlarını esirgemeyen Doç. Dr. Yusuf UÇAR'a, Doç. Dr. N. Murat YAĞMURLU'ya ve Doç. Dr. Kemal ÖZDEMİR'e ve bütün eğitim hayatımda büyük fedâkarlıklar gösteren benden maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen annem ve babama, tez yazım sürecinde beni sabırla evde bekleyen kızım Zeynep Nisa DOĞAN'a sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



# İÇİNDEKİLER

ÖZET .....	i
ABSTRACT .....	ii
TEŞEKKÜR .....	iii
İÇİNDEKİLER .....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
TABLolar DİZİNİ .....	vi
SİMGELER VE KISALTMALAR .....	viii
1. TEMEL KAVRAMLAR .....	1
1.1. Lineer Fark Denklemleri .....	2
1.2. Değişkenlerine Ayırma Yöntemi .....	5
1.3. Klasik Sonlu Fark Yöntemleri .....	12
1.3.1. Açık Sonlu Fark Yaklaşımı (ASFY) .....	13
1.3.2. Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımı (KSFY) .....	15
1.3.3. Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı (CNSFY).....	17
1.3.4. Klasik Sonlu Fark Şemalarının Değişkenlerine Ayırma Yöntemi ile Çözümü	19
1.3.5. von Neumann Kararlılık Analizi .....	28
1.3.6. Kapalı Sonlu Fark Şeması .....	34
1.3.7. Enerji Argümanları.....	38
2. TEST PROBLEMLER ve TAM-KLASİK SONLU FARK ŞEMALARI..	46
2.1. Problem 1 .....	46
2.1.1. Problem 1'in Tam-Açık Sonlu Fark Çözümü .....	46
2.1.2. Problem 1'in Tam-Kapalı Sonlu Fark Çözümü .....	51
2.1.3. Problem 1'in Tam-Crank-Nicolson Sonlu Fark Çözümü .....	54
2.2. Problem 2 .....	56
2.2.1. Problem 2'nin Tam-Açık Sonlu Fark Çözümü .....	57
2.2.2. Problem 2'nin Tam-Kapalı Sonlu Fark Çözümü .....	61
2.2.3. Problem 2'nin Tam-Crank-Nicolson Sonlu Fark Çözümü.....	64
3. TEST PROBLEMLERİN NÜMERİK SONUÇLARI .....	66
3.0.1. Problem 1'in Nümerik Sonuçları .....	66
3.0.2. Problem 2'nin Nümerik Sonuçları .....	82
KAYNAKLAR .....	101
ÖZGEÇMİŞ.....	102

## ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 1.1	Açık Şemanın Hesaplama Molekülü .....	15
Şekil 1.2	Kapalı Şemanın Hesaplama Molekülü .....	36
Şekil 3.1	Problem 1'in tam ve $h = 0.0125$ , $k = 0.00001$ için $t = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0$ zamanlarında T-KSFY ile elde edilen nümerik çözümleri .....	97
Şekil 3.2	Problem 1'in tam ve $h = 0.0125$ , $k = 0.00001$ için $t = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0$ zamanlarında KSFY ile elde edilen nümerik çözümleri .....	98
Şekil 3.3	Problem 2'nin tam ve $h = 0.0125$ , $k = 0.00001$ için $t =$ $0.1, 0.5, 1.0, 2.0$ zamanlarında T-KSFY ile elde edilen nümerik çözümleri .....	99
Şekil 3.4	Problem 2'nin tam ve $h = 0.0125$ , $k = 0.00001$ için $t =$ $0.1, 0.5, 1.0, 2.0$ zamanlarında KSFY ile elde edilen nümerik çözümleri .....	100



## TABLolar DİZİNİ

Tablo 3.1	Açık Sonlu Fark Yöntemi: $k = 0.00001$ ve $h$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri .....	67
Tablo 3.2	Tam-Açık Sonlu Fark Yöntemi: $k = 0.00001$ ve $h$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri .....	68
Tablo 3.3	Açık Sonlu Fark Yöntemi: $h = 0.05$ ve $h = 0.0125$ değerleri için $k$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri .....	70
Tablo 3.4	Tam-Açık Sonlu Fark Yöntemi: $h = 0.05$ ve $h = 0.0125$ değerleri ile $k$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri .....	71
Tablo 3.5	Kapalı Sonlu Fark Yöntemi: $k = 0.00001$ ve $h$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri .....	73
Tablo 3.6	Tam-Kapalı Sonlu Fark Yöntemi: $k = 0.00001$ ve $h$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri .....	74
Tablo 3.7	Kapalı Sonlu Fark Yöntemi: $h = 0.025$ ve $k$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri .....	75
Tablo 3.8	Tam-Kapalı Sonlu Fark Yöntemi: $h = 0.025$ ve $k$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri .....	76
Tablo 3.9	Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi: $k = 0.00001$ ve $h$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri .....	78
Tablo 3.10	Tam-Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi: $k = 0.00001$ ve $h$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri .....	79
Tablo 3.11	Crank Nicolson Sonlu Fark Yöntemi: $h = 0.025$ ve $k$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri .....	80
Tablo 3.12	Tam-Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi: $h = 0.025$ ve $k$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri .....	81
Tablo 3.13	Açık Sonlu Fark Yöntemi: $k = 0.00001$ ve $h$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri .....	83

Tablo 3.14	Tam-Açık Sonlu Fark Yöntemi: $k = 0.00001$ ve $h$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 2'nin nümerik tam çözümleri .....	84
Tablo 3.15	Açık Sonlu Fark Yöntemi: $h = 0.05$ ve $h = 0.0125$ değerleri için $k$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri .....	85
Tablo 3.16	Tam-Açık Sonlu Fark Yöntemi $h = 0.05$ ve $h = 0.0125$ değerleri için $k$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri .....	86
Tablo 3.17	Kapalı Sonlu Fark Yöntemi: $k = 0.00001$ ve $h$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri .....	88
Tablo 3.18	Tam-Kapalı Sonlu Fark Yöntemi: $k = 0.00001$ ve $h$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri .....	89
Tablo 3.19	Kapalı Sonlu Fark Yöntemi: $h = 0.025$ ve $k$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri .....	90
Tablo 3.20	Tam-Kapalı Sonlu Fark Yöntemi: $h = 0.025$ ve $k$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri .....	91
Tablo 3.21	Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi: $k = 0.00001$ ve $h$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri .....	93
Tablo 3.22	Tam-Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi: $k = 0.00001$ ve $h$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri .....	94
Tablo 3.23	Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi: $h = 0.025$ ve $k$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri .....	95
Tablo 3.24	Tam-Crank Nicolson Sonlu Fark Yöntemi: $h = 0.025$ ve $k$ 'nın farklı değerleri için $t = 0.1, 0.5$ zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri .....	96

## SİMGELER VE KISALTMALAR

$u$	:	Kısmi türevli denkleme karşılık gelen tam çözüm
$v_j^m$	:	$u(x_j, t_m)$ 'ye bir yaklaşım
$\Delta x (= h)$	:	Konum adım uzunluğu
$\Delta t (= k)$	:	Zaman adım uzunluğu
$ASFY$	:	Açık sonlu fark yöntemi
$KSFY$	:	Kapalı sonlu fark yöntemi
$CNSFY$	:	Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi
$T - ASFY$	:	Tam-Açık sonlu fark yöntemi
$T - KSFY$	:	Tam-Kapalı sonlu fark yöntemi
$T - CNSFY$	:	Tam-Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi

# 1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde bazı temel tanım ve kavramlarla birlikte başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen bir kısmi türevli denklemin analitik çözümünü bulmada kullanılan Fourier seri yöntemi ile nümerik çözümlerini bulmada kullanılan en yaygın yöntemlerden biri olan klasik sonlu fark yöntemleri hakkında bazı bilgiler verildi. Ayrıca bu bölümde 1-boyutlu ısı iletim denklemi için biri homojen Dirichlet sınır şartlarıyla diğeri homojen Neumann sınır şartlarıyla verilen iki başlangıç ve sınır değer probleminin değişkenlerine ayırma yöntemi ile Fourier serisi cinsinden tam çözümleri elde edildi. Bunların dışında bu bölümde başlangıç şartı nümerik hesaplamalar sırasında belirlenecek olan Dirichlet ve Neumann sınır şartlarıyla verilen ısı denklemi için ayrı ayrı göz önüne alınan iki test problemin klasik sonlu fark yöntemleri kullanılarak nümerik şemaları verildi. Ayrıca her bir şemanın değişkenlerine ayırma yöntemi ile ayrık çözüm olarak bilinen Tam-Sonlu Fark Çözümleri verildi. Bunlarında ötesinde ayrık şemaların kararlılığının incelenmesiyle birlikte tam ve ayrık çözümlerin terim terim karşılaştırılması hakkında bazı önemli bilgiler verildi.

Bu bölümdeki kavramların bir çoğu [3] referanslı kitabın 3. bölümü ve özellikle 4. bölümü esas alınarak hazırlanmıştır. Okuyucu daha detaylı bilgi için referans verilen kitaba ve içindeki referanslara bakabilir.

Bu tezde farklı başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen 1-boyutlu ısı iletim denklemi için aşağıdaki iki test problem göz önüne alındı.

*Problem 1* (Dirichlet sınır şartlı ısı iletim problemi):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Burada  $f(x)$  verilen bir fonksiyondur.

*Problem 2* (Neumann sınır şartlı ısı iletim problemi):

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u_x(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

Burada  $g(x)$  verilen bir fonksiyondur.

Ayrıca bu tez çalışmasında yapılanlar genel çerçevede aşağıdaki şekilde özetlenebilir:

Önce her bir test problemin değişkenlerine ayırma yöntemiyle tam çözümü bulundu. Sonra her bir test problemin klasik sonlu fark şemaları elde edildi. Nümerik şemaların kararlılığı incelendi. Daha sonra her bir test problem için elde edilen klasik sonlu fark şemalarının değişkenlerine ayırma yöntemiyle Fourier seri çözümü verildi. Bu konu tezin esas amacını oluşturmaktadır. Son olarak elde edilen nümerik sonuçlar tablolar ve grafikler halinde sunuldu.

## 1.1 Lineer Fark Denklemleri

$a_0, a_1, \dots, a_n$ 'ler reel sabit olmak üzere  $n$ . mertebeden sabit katsayılı homojen lineer bir fark denklemi

$$a_0 y_j + a_1 y_{j+1} + \dots + a_n y_{j+n} = 0, \quad (a_n \neq 0) \quad (1.1.1)$$

şekindedir. Bu tip denklemlerin çözümleri,  $m$  reel veya kompleks sayı olmak üzere,

$$y_j = m^j$$

formunda aranır. Bu durumda  $y_j = m^j$  fonksiyonunun (1.1.1) denklemini özdeş olarak sağlaması gerekir. O halde  $y_j = m^j \implies y_{j+1} = m^{j+1}, y_{j+2} = m^{j+2}, \dots, y_{j+n} = m^{j+n}$  olup bunlar (1.1.1)'de yerine yazılırsa

$$a_0 m^j + a_1 m^{j+1} + \dots + a_n m^{j+n} = 0 \implies m^j (a_0 + a_1 m + \dots + a_n m^n) = 0$$

bulunur.  $m^j \neq 0$  olduğundan

$$a_0 + a_1 m + \dots + a_n m^n = 0 \quad (1.1.2)$$

$n$ . dereceden cebirsel denklemi elde edilir. Bu denkleme (1.1.1) fark denkleminin karakteristik denklemi denir. Bilindiği üzere (1.1.2) denkleminin  $n$  tane kökü vardır.  $m$  nin durumlarına göre (1.1.1) denkleminin çözümü sabit katsayılı homojen lineer adi türevli denklemlerin çözümlerine benzer şekilde bulunur.

Şimdi 2. mertebeden

$$a_0 y_j + a_1 y_{j+1} + a_2 y_{j+2} = 0 \quad (1.1.3)$$

fark denklemini ele alalım.

$$y_j = m^j \implies y_{j+1} = m^{j+1}, y_{j+2} = m^{j+2}$$

dır. Bunlar (1.1.3) de yerlerine yazılırsa

$$a_0 + a_1 m + a_2 m^2 = 0 \quad (1.1.4)$$

karakteristik denklemi elde edilir. Bilindiği üzere (1.1.4) cebirsel denkleminin  $m_1$  ve  $m_2$  gibi iki tane kökü vardır. Bu köklerin durumlarına göre (1.1.3) fark denkleminin çözümünü yazalım.

*Köklerin Farklı Reel Sayı Olması Durumu:* Bu durumda fark denkleminin çözümü,  $c_1$  ve  $c_2$  reel sabitler olmak üzere,

$$y_j = c_1 m_1^j + c_2 m_2^j$$

dir.

*Köklerin Çakışık Reel Sayı Olması Durumu:* Bu durumda fark denkleminin çözümü,  $c_1$ ,  $c_2$  reel sabitler ve  $m = m_1 = m_2$  olmak üzere,

$$y_j = (c_1 + c_2 j) m^j$$

dir.

*Köklerin Eşlenik Kompleks Sayı Olması Durumu:*  $m_{1,2} = a \pm ib$  olsun.  $\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$  ve  $\theta = \arctan(b/a)$  olmak üzere  $m_{1,2} = \rho e^{\pm i\theta}$  olarak yazılabilir. Bu durumda fark denkleminin çözümü

$$\begin{aligned} y_j &= d_1 m_1^j + d_2 m_2^j, \quad (d_1, d_2 \in \mathbb{R}) \\ &= d_1 (\rho e^{i\theta})^j + d_2 (\rho e^{-i\theta})^j \\ &= \rho^j (c_1 \cos j\theta + c_2 \sin j\theta), \quad (c_1 = d_1 + d_2, c_2 = i(d_1 - d_2)) \end{aligned}$$

dir.

## 1.2 Değişkenlerine Ayırma Yöntemi

Kısmi türevli denklemlerin çözümü için bir çok etkili analitik yöntem vardır. Denklemlerin analitik çözümleri incelenerek niteliksel davranışları hakkında bir çok şey söylenebilir. Bu niteliksel bakış daha karmaşık denklemlerin anlaşılmasına da yardımcı olur. Kısmi türevli denklemleri analitik olarak çözmek için sıkça kullanılan yöntemlerden biri Fourier yöntemi olarak bilinen değişkenlerine ayırma yöntemidir. Bu yöntem üzerine ilk çalışma Fransız fizikçi Joseph Fourier (1768-1830) tarafından başlatıldı. J.Fourier, ısı problemini analiz ederken kısmi türevli denklemleri çözenin en etkili yollarından biri olan bu yöntemi yani Fourier seri yöntemini buldu.

Başlangıç ve sınır koşullarıyla verilen bir kısmi türevli denklemin çözümünü her zaman bir analitik yöntem kullanılarak elde etmek mümkün olmayabilir. Bu tip problemlerin çözümünü bulmak için genellikle nümerik yöntemler kullanılır. Bunun bir kaç sebebi vardır. Bunlar analitik yöntemlerden biri olan Fourier yönteminin ana zorlukları göz önüne alınarak aşağıdaki gibi özetlenebilir:

*Lineer olmayan problemler:* Fourier yöntemi lineer olmayan denklemleri ele alamaz. Hem değişkenlerin ayrılması hem de süperpozisyon prensibi genel olarak bu tür denklemlere uygulanamaz. Uygulamada karşılaşılan bir çok problem lineer olmadığından Fourier yöntemi gibi lineer tekniklerin bu tip denklemlere uygulanabilmesi için lineerleştirmeye yönelik güçlü bir eğilim vardır. Lineer olmayan kısmi türevli denklemler önemli nümerik yöntemlerden biri olan sonlu fark yöntemleri kullanılarak ele alınabilir. Ancak bu durumda lineer olmayan cebirsel denklem sisteminin çözümü gibi zorluklar ortaya çıkabilir.

*Değişken katsayılar:* Değişken katsayılara sahip lineer problemleri bile Fourier yöntemini kullanarak çözmek zor olabilir. Bu durum özellikle süreksiz katsayılar için geçerlidir. Ancak değişken katsayılı lineer problemler sonlu fark



şemaları ile kolayca ele alınabilir.

*İntegral:* Fourier katsayılarının hesaplanmasında karşılaşılan bazı integrallerin analitik olarak hesaplanması zor ve hatta bazen imkansız olabilir. Bu gibi durumlarda bu tip integraller nümerik olarak hesaplanır.

*Sonsuz seriler:* Bir problemin Fourier çözümünün grafiğini çizebilmek için serinin toplamını hesaplamak gerekir. Seri sonsuz ise serinin bir yerde kesilmesine dayalı bir yaklaşıma güvenmek zorundayız. Ayrıca bazı sıradan durumlar hariç serinin kısmi toplamının bir bilgisayar kullanılarak nümerik olarak hesaplanması gerekir.

Yukarıdaki açıklamalardan Fourier yöntemi ile çözülemeyecek pek çok problemin olduğu sonucuna varılır. Çözümü bulunabilecek bir çok problemin çözüm grafiğini çizmek için bazı nümerik prosedürlere ihtiyaç duyulur. Bu gözlemler nümerik yöntemlerin daha genel bir ortamda incelenmesini açık bir şekilde motive etmektedir.

Değişkenlerine ayırma yöntemi başlangıç ve sınır değer problemlerini çözmek için en sık kullanılan yöntemlerden biridir. Bu yöntemin bir probleme uygulanabilmesi için problemde verilen kısmi türevli denklemin lineer ve homojen (katsayılarının sabitler olması gerekmiyor) ve ayrıca sınır şartlarının lineer ve homojen olması gerekir. Bu yöntemin uygulanışını aşağıdaki iki problem üzerinde verelim.

*PROBLEM 1:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (1.2.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.2.2)$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.2.3)$$

Burada  $f$  fonksiyonu  $x$ 'in bilinen bir fonksiyonu olup nümerik hesaplamalar sırasında verilecektir.

*PROBLEM 2:*

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (1.2.4)$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.2.5)$$

$$u_x(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (1.2.6)$$

Burada  $g$  fonksiyonu  $x$ 'in bilinen bir fonksiyonu olup nümerik hesaplamalar sırasında verilecektir.

Değişkenlerine ayırma yöntemi ile Problem 1'in çözümü aşağıdaki şekilde bulunur:

*Adım 1: (Adi Türevli Denklemlere İndirgeme)*

$X$  sadece  $x$ 'e bağlı ve  $T$  sadece  $t$ 'ye bağlı herhangi iki fonksiyon olmak üzere ısı denkleminin çözümü

$$u(x, t) = X(x)T(t) \quad (1.2.7)$$

formunda aranır. (1.2.7)'den

$$u_t(x, t) = X(x)T'(t)$$

ve

$$u_{xx}(x, t) = X''(x)T(t)$$

dir. Bunlar (1.2.1) ısı denkleminde yerlerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)}$$

eşitliği elde edilir. Sol tarafı sadece  $t$ 'ye sağ tarafı sadece  $x$ 'e bağlı olan bu eşitlik ancak

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = c$$

şeklinde herhangi bir  $c \in \mathbb{R}$  sabitine eşit olması ile sağlanır.  $c$  sabitine ayırma katsayısı denir. Buradan aşağıdaki iki adi türevli denklem elde edilir:

$$T' - cT = 0 \quad (1.2.8)$$

$$X'' - cX = 0 \quad (1.2.9)$$

Böylece (1.2.1) ile verilen kısmi türevli denklem üzerinde çalışılması daha kolay olan (1.2.8) ve (1.2.9) ile verilen iki tane adi türevli denkleme indirgenmiş olur.

*Adım 2: ( Sınır şartlarının kullanılması)*

(1.2.7) çözümünü (1.2.2) de verilen sınır şartlarını sağlayacağından

$$u(0, t) = X(0)T(t) = 0 \text{ ve } u(1, t) = X(1)T(t) = 0, \quad t > 0$$

olur. Bu eşitlikler ya tüm  $t$  ler için  $T(t) = 0$  ya da  $X(0) = X(1) = 0$  olmasıyla sağlanır. Her  $t > 0$  için  $T(t) = 0$  ise  $u(x, t) = 0$  dır. Bu da aşıkâr çözümdür. Oysa bu çözüm her zaman vardır. Aşıkâr olmayan çözümün elde edilebilmesi için  $X(0) = X(1) = 0$  olmalıdır. Böylece (1.2.9) denklemi için aşağıdaki sınır değer problemi

$$X''(x) - cX(x) = 0$$

$$X(0) = X(1) = 0 \quad (1.2.10)$$

elde edilir. Burada  $c < 0$ ,  $c > 0$  ve  $c = 0$  durumlarının ayrı ayrı incelenmesi gerekir. Bunun için  $\lambda > 0$  herhangi bir sabit olmak üzere  $c < 0$  iken  $c = -\lambda^2$  ve  $c > 0$  iken  $c = \lambda^2$  durumlarını göz önüne almak daha uygundur.

*Durum 1: ( $\lambda > 0$  için  $c = \lambda^2 > 0$ )* Bu durumda (1.2.9) denkleminin genel çözümü,  $c_1$  ve  $c_2$  herhangi iki keyfi reel sabit olmak üzere,

$$X(x) = c_1 e^{\lambda x} + c_2 e^{-\lambda x}$$

dir. Bu çözümde (1.2.10) de verilen  $X(0) = 0$  ve  $X(1) = 0$  sınır şartlarının kullanılmasıyla

$$c_1 + c_2 = 0$$

$$c_1 e^\lambda + c_2 e^{-\lambda} = 0$$

elde edilir. Buradan  $c_1 = 0$  ve  $c_2 = 0$  olarak bulunur. Böylece  $X(x) = 0$  olup  $u(x, t) = 0$  elde edilir. O halde  $c > 0$  durumunda (1.2.9) denkleminin ve dolayısıyla (1.2.1) denkleminin aşikar olmayan (sıfırdan farklı) çözümü yoktur.

*Durum 2:* ( $c = 0$ ) Bu durumda (1.2.9) denkleminin genel çözümü,  $c_3$  ve  $c_4$  iki keyfi reel sabit olmak üzere,

$$X(x) = c_3 + c_4 x$$

dir. (1.2.10) sınır şartlarının kullanılmasıyla  $c_3 = c_4 = 0$  bulunur. Böylece  $X(x) = 0$  olup  $u(x, t) = X(x)T(t) = 0$  elde edilir. Dolayısıyla  $c = 0$  durumunda da aşikar olmayan çözüm yoktur.

*Durum 3:* ( $\lambda > 0$  için  $c = -\lambda^2 < 0$ ) Bu durumda (1.2.9) denkleminin genel çözümü,  $c_5$  ve  $c_6$  birbirinden bağımsız iki keyfi reel sabit olmak üzere,

$$X(x) = c_5 \cos(\lambda x) + c_6 \sin(\lambda x),$$

dir. (1.2.10) sınır koşullarının kullanılmasıyla

$$c_5 = 0,$$

$$c_5 \cos(\lambda) + c_6 \sin(\lambda) = 0,$$

cebirsel denklem sistemi bulunur. Açıkça  $c_5 = 0$  olduğundan  $c_6 \sin \lambda = 0$  dır.  $c_6 \sin \lambda = 0$  ise ya  $\sin \lambda = 0$  yada  $c_6 = 0$  dır.  $c_6 = 0$  dan  $u(x, t) = X(x)T(t) = 0$  aşikar çözüm elde edilir.  $c_6 \neq 0$  iken  $\sin \lambda = 0$  ise  $\lambda = n\pi$ ,  $n = 0, \mp 1, \mp 2, \dots$  elde edilir. Böylece  $\lambda = n\pi$ ,  $n = 1, 2, 3, \dots$  iken (1.2.9) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü vardır. Burada  $n = 0$  gözönüne alınmıyor. Çünkü  $n = 0$  ise  $c = 0$

olur ki bu durum *Adım 2*'de incelendi. Böylece  $c = -\lambda^2$  özdeğerine karşılık gelen aşikar olmayan yani sıfırdan farklı  $X_n$  çözümleri,  $a_n$ 'ler keyfi sabitler olmak üzere,

$$X_n(x) = a_n \sin(n\pi x), \quad (1.2.11)$$

dır.

*Adım 3: (Başlangıç şartının kullanılması)*

Şimdi (1.2.8) denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin  $T_n$  çözümleri  $b_n$ 'ler keyfi reel sabitler olmak üzere,

$$T_n(t) = b_n e^{ct},$$

dir.  $c = -\lambda^2 = -(n\pi)^2$  olduğundan

$$T_n(t) = b_n e^{-(n\pi)^2 t}, \quad (1.2.12)$$

bulunur.

(1.2.12)'un (1.2.11) ile birleştirilmesi ile  $u(x, t) = X(x)T(t)$  çözümü,  $c_n$ 'ler keyfi reel sabitler olmak üzere,

$$\begin{aligned} u_n(x, t) &= X_n(x)T_n(t) \\ &= a_n \sin(n\pi x) b_n e^{-(n\pi)^2 t} \\ &= c_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x), \quad (c_n = a_n b_n, \quad n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

olur. Göz önüne alınan başlangıç ve sınır değer problemi lineer ve homojen olduğundan süperpozisyon ilkesinden problemin uygun yakınsaklık davranışına sahip bir sonsuz seri çözümü

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{-(n\pi)^2 t} \sin(n\pi x), \quad (1.2.13)$$

olarak elde edilir.

(1.2.13) çözümü (1.2.3) başlangıç şartını sağlayacağından

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x) = f(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

dir. Böylece  $f(x)$  fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \sin(n\pi x)$$

formunda bir açılıma sahiptir. Bu ise Fourier sinüs serisi olup  $c_n$  katsayıları

$$c_n = 2 \int_0^1 f(x) \sin(n\pi x) dx \quad (1.2.14)$$

dir. O halde (1.2.14) katsayıları ile verilen (1.2.13) sonsuz serisi Problem 1'in değişkenlerine ayırma yöntemi ile elde edilen tam (Fourier serisi) çözümdür.

(1.2.4)- (1.2.6) ile verilen Problem 2'nin değişkenlerine ayırma yöntemi ile çözümü yukarıdakine benzer şekilde elde edilebilir. Şöyleki  $d_n$ 'ler belirlenecek olan reel sabitler olmak üzere,

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n e^{-(n\pi)^2 t} \cos(n\pi x) \quad (1.2.15)$$

olup bu çözüm (1.2.6) başlangıç şartını sağlayacağından

$$u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(n\pi x) = g(x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

olur. Böylece  $g(x)$  fonksiyonu

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} d_n \cos(n\pi x)$$

formunda bir açılıma sahiptir. Bu ise Fourier kosinüs serisi olup  $d_n$  katsayıları

$$d_n = 2 \int_0^1 g(x) \cos(n\pi x) dx \quad (1.2.16)$$

dir. O halde (1.2.16) katsayıları ile verilen (1.2.15) sonsuz serisi Problem 2'nin değişkenlerine ayırma yöntemi ile elde edilen tam çözümdür.

### 1.3 Klasik Sonlu Fark Yöntemleri

Başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen bir kısmi türevli denklemin nümerik çözümlerini bulmak için kullanılan en yaygın yöntemlerden biri sonlu fark yöntemleridir.

Sonlu fark yönteminin bir başlangıç ve sınır değer problemine uygulanmasında izlenen genel adımlar şunlardır: Önce problemin çözüm bölgesi düzgün veya belirli geometrik şekiller içeren kafeslere bölünür ve yaklaşık çözüm her bir kafesin düğüm (grid veya mesh) noktaları üzerinde hesaplanır. Sonra problemdeki türevler yerine Taylor serisi yardımı ile elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen lineer veya lineer olmayan diferansiyel denklemin çözümü problemi, fark denklemlerinden oluşan lineer veya lineer olmayan bir cebirsel denklem sisteminin çözümü problemine indirgenir. Daha sonra nümerik şemanın yakınsaklığı, tutarlılığı ve kararlılığı incelenir. Son olarak elde edilen cebirsel denklem sistemi direkt veya iteratif yöntemlerden biri yardımıyla çözülerek problemin düğüm noktalarındaki yaklaşık çözümü bulunur.

$(x, t) \in [0, l] \times [0, T]$  olmak üzere  $u$  bir kısmi türevli denklemi sağlayan  $x$ -konum ve  $t$ -zaman değişkenlerine bağlı bir fonksiyon olsun.

$$x_j = j\Delta x = jh; \quad j = 0, 1, \dots, n; \quad l = nh$$

ve

$$t_m = m\Delta t = mk; \quad m = 0, 1, \dots, M$$

olmak üzere  $(x_j, t_m)$  düğüm noktalarındaki  $u(x, t)$ 'ye bir yaklaşım  $v_j^m$  ile gösterilir. Burada  $\Delta x (\equiv h)$  konum uzunluğu ve  $\Delta t (\equiv k)$  zaman adım uzunluğudur.

Bir kısmi türevli denklemi sonlu fark formunda ifade etmek için sıklıkla kullanılan yöntemler

- Açık (Explicit) Yöntem
- Kapalı (Implicit) Yöntem

### -Crank-Nicolson Yöntemi

dir. Bu yöntemlere klasik veya standart sonlu fark yöntemleri de denilmektedir [1, 2]. Bu yöntemler uygulamalı matematikte, matematiksel fizikte ve mühendislik bilimlerinde karşılaşılan lineer veya lineer olmayan kısmi türevli denklemlerden oluşan başlangıç-sınır değer problemlerinin çözümünde sıklıkla kullanılan nümerik yöntemlerdir.

Aşağıdaki kısımlarda Problem 1 ve Problem 2'nin açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark şemaları verilecektir.

### 1.3.1 Açık Sonlu Fark Yaklaşımı (ASFY)

Bu kısımda (1.2.1) ile verilen

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 \leq x \leq 1, \quad t > 0$$

ısı denkleminin açık sonlu fark yaklaşımı verilecektir.

$n \geq 1$  bir tam sayı olmak üzere  $x$  yönündeki düğüm aralığı  $\Delta x = 1/n$  ile tanımlansın.  $x$  yönündeki düğüm noktaları  $x_j = j\Delta x (\equiv jh), j = 0, \dots, n$  ile verilir. Benzer şekilde  $m \geq 0$  tam sayıları için  $t_m = m\Delta t (\equiv mk)$  tanımlanır. Burada  $\Delta t$  zaman adımını gösterir. Bilindiği üzere sonlu fark yöntemlerindeki temel fikir kısmi türevli denklemdaki  $\frac{\partial u}{\partial t}$  ve  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  türevleri yerine Taylor seri açılımından sırasıyla elde edilen

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t} + O(\Delta t)$$

ve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) = \frac{u(x - \Delta x, t) - 2u(x, t) + u(x + \Delta x, t)}{(\Delta x)^2} + O(\Delta x^2)$$

yaklaşımlarını yazmaktır.  $u(x_j, t_m)$ ' ye bir yaklaşım  $v_j^m$  ile gösterilir ve hatalar ihmal edilirse  $u_t$  ve  $u_{xx}$  türevleri

$$u_t \simeq \frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t}$$



ve

$$u_{xx} \simeq \frac{v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m}{(\Delta x)^2}$$

olur. Bunlar (1.2.1) de yerlerine yazılırsa ısı iletim denkleminin açık sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} = \frac{v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m}{(\Delta x)^2} \quad (1.3.1)$$

veya  $r = \Delta t / (\Delta x)^2$  olmak üzere

$$v_j^{m+1} = rv_{j-1}^m + (1 - 2r)v_j^m + rv_{j+1}^m, \quad j = 1, 2, \dots, n - 1, \quad m \geq 0 \quad (1.3.2)$$

dir.

### Problem 1'in Açık Sonlu Fark Şeması

(1.2.1) denkleminin (1.3.2) açık sonlu fark yaklaşımında (1.2.2) sınır şartlarından elde edilen

$$v_0^m = 0 \text{ ve } v_n^m = 0 \quad (1.3.3)$$

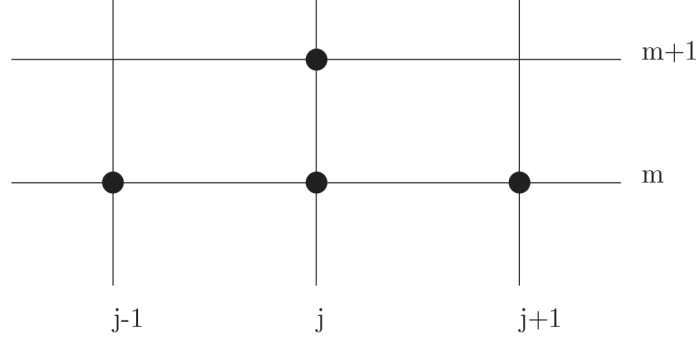
değerleri kullanılırsa Problem 1'in açık sonlu fark şeması, herhangi bir  $m$ .zaman adımı için

$$v_j^{m+1} = (1 - 2r)v_j^m + rv_{j+1}^m, \quad j = 1$$

$$v_j^{m+1} = rv_{j-1}^m + (1 - 2r)v_j^m + rv_{j+1}^m, \quad j = 2(1)n - 2$$

$$v_j^{m+1} = rv_{j-1}^m + (1 - 2r)v_j^m, \quad j = n - 1$$

olur. (1.2.3) başlangıç şartı hesaplamalar sırasında göz önüne alınacaktır. Böylece (1.3.2)'den yalnızca  $t_m$  zaman seviyesindeki bilinen  $v_j^m$  değerleri yardımıyla bir sonraki  $t_{m+1}$  zaman seviyesindeki  $v_j^{m+1}$  bilinmeyen değerleri bulunur. Bu şema cebirsel denklem sisteminin çözümüne gerek kalmadan her bir bilinmeyen sadece bir denklemden kolayca elde edilebildiğinden açık şema olarak bilinir. Bu şemanın hesaplama molekülü Şekil 1.1 de olduğu gibidir.



Şekil 1.1. Açık Şemanın Hesaplama Molekülü

### Problem 2'nin Açık Sonlu Fark Şeması

(1.2.5) ile verilen sınır şartlarında  $\frac{\partial u}{\partial x}$  türevi yerine Taylor serisi yardımıyla elde edilen

$$\frac{\partial u}{\partial x} \simeq \frac{v_{j+1}^m - v_{j-1}^m}{2\Delta t}$$

merkezi fark yaklaşımı yazılır ve problemin çözüm bölgesi içine düşmeyen  $v_j^m$  değerleri (1.3.2) açık sonlu fark yaklaşımının kullanılmasıyla yok edilip gerekli düzenlemeler yapılırsa (1.2.4)-(1.2.6) denklemleriyle verilen Neumann sınır şartlı ısı probleminin açık sonlu fark şeması, herhangi bir  $m$ .zaman adımı için

$$\begin{aligned} v_j^{m+1} &= 2rv_{j+1}^m + (1 - 2r)v_j^m, & j = 0 \\ v_j^{m+1} &= rv_{j-1}^m + (1 - 2r)v_j^m + rv_{j+1}^m, & j = 1(1)n - 1 \\ v_j^{m+1} &= 2rv_{j-1}^m + (1 - 2r)v_j^m, & j = n \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

olarak elde edilir. (1.2.6) başlangıç şartı hesaplamalar sırasında göz önüne alınacaktır.

### 1.3.2 Kapalı Sonlu Fark Yaklaşımı (KSFY)

(1.2.1) ısı denkleminde  $\frac{\partial u}{\partial t}$  türevi yerine ileri fark formülü

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t}$$

ve  $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$  yerine  $(m+1)$ . zaman adımındaki

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \simeq \frac{v_{j-1}^{m+1} - 2v_j^{m+1} + v_{j+1}^{m+1}}{(\Delta x)^2}$$

olarak verilen merkezi fark formülü yazılırsa denklemin kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} = \frac{v_{j-1}^{m+1} - 2v_j^{m+1} + v_{j+1}^{m+1}}{(\Delta x)^2} \quad (1.3.5)$$

veya  $r = \Delta t / (\Delta x)^2$  olmak üzere

$$-rv_{j-1}^{m+1} + (1+2r)v_j^{m+1} - rv_{j+1}^{m+1} = v_j^m, \quad j = 0(1)n, \quad m \geq 0 \quad (1.3.6)$$

olarak elde edilir.

### Problem 1'in Kapalı Sonlu Fark Şeması

(1.3.6) kapalı sonlu fark yaklaşımıyla birlikte (1.2.2) nin yani

$$v_0^m = 0 \text{ ve } v_n^m = 0$$

sınır şartlarının kullanılmasıyla Problem 1'in kapalı sonlu fark şeması herhangi bir  $m$ . zaman adımı için

$$(1+2r)v_j^{m+1} - rv_{j+1}^{m+1} = v_j^m, \quad j = 1$$

$$-rv_{j-1}^{m+1} + (1+2r)v_j^{m+1} - rv_{j+1}^{m+1} = v_j^m, \quad j = 2(1)n-2, m \geq 0 \quad (1.3.7)$$

$$-rv_{j-1}^{m+1} + (1+2r)v_j^{m+1} = v_j^m, \quad j = n-1 \quad (1.3.8)$$

olarak bulunur. (1.2.3) başlangıç şartı hesaplamalar esnasında kullanılacaktır.

### Problem 2'in Kapalı Sonlu Fark Şeması

(1.2.5) ile verilen sınır şartlarında  $\frac{\partial u}{\partial x}$  türevi yerine  $(m+1)$ . zaman adımındaki

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{v_{j+1}^{m+1} - v_{j-1}^{m+1}}{2\Delta t}$$

merkezi fark formülü yazılırsa ve problemin çözüm bölgesi içine düşmeyen  $v_j^m$  değerleri (1.3.6) kapalı sonlu fark yaklaşımı kullanılarak yok edilip gerekli

düzenlemeler yapılırsa Neumann sınır şartlı ısı probleminin kapalı sonlu fark şeması, herhangi bir  $m$ .zaman adımı için

$$\begin{aligned} (1 + 2r) v_j^{m+1} - 2rv_{j+1}^{m+1} &= v_j^m, & j = 0 \\ -rv_{j-1}^{m+1} + (1 + 2r) v_j^{m+1} - rv_{j+1}^{m+1} &= v_j^m, & j = 1(1) n - 1 \\ -2rv_{j-1}^{m+1} + (1 + 2r) v_j^{m+1} &= v_j^m, & j = n \end{aligned} \quad (1.3.9)$$

olarak bulunur. (1.2.6) başlangıç şartı daha sonra hesaplamalar sırasında kullanılacaktır.

### 1.3.3 Crank-Nicolson Sonlu Fark Yaklaşımı (CNSFY)

Bu yöntem (1.3.1) ve (1.3.5) denklemleri ile verilen açık ve kapalı sonlu fark yaklaşımlarının sağ taraflarının averajlarının alınmasıyla elde edilmiştir. (1.2.1) ile verilen ısı iletim denkleminin Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} = \frac{1}{2} \left[ \frac{v_{j-1}^{m+1} - 2v_j^{m+1} + v_{j+1}^{m+1}}{\Delta t} + \frac{v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m}{(\Delta x)^2} \right]$$

veya  $r = \Delta t / (\Delta x)^2$  olmak üzere

$$-rv_{j-1}^{m+1} + (2 + 2r) v_j^{m+1} - rv_{j+1}^{m+1} = rv_{j-1}^m + (2 - 2r) v_j^m + rv_{j+1}^m \quad (1.3.10)$$

dir.

#### Problem 1'in Crank-Nicolson Fark Şeması

(1.2.2) ile verilen sınır şartlarından herhangi bir  $m$ . ve  $(m + 1)$ . zaman adımlarındaki  $v_0^m, v_n^m, v_0^{m+1}$  ve  $v_n^{m+1}$  değerleri bilindiğinden Problem 1'in Crank-Nicolson sonlu fark şeması herhangi bir  $m$ .zaman adımı için,

$$\begin{aligned} (2 + 2r) v_j^{m+1} - rv_{j+1}^{m+1} &= (2 - 2r) v_j^m + rv_{j+1}^m, & j = 1 \\ -rv_{j-1}^{m+1} + (2 + 2r) v_j^{m+1} - rv_{j+1}^{m+1} &= rv_{j-1}^m + (2 - 2r) v_j^m + rv_{j+1}^m, & j = 2(1) n - 2 \\ -rv_{j-1}^{m+1} + (2 + 2r) v_j^{m+1} &= rv_{j-1}^m + (2 - 2r) v_j^m, & j = n - 1 \end{aligned}$$

olur.

## Problem 2'in Crank-Nicolson Fark Şeması

(1.2.5) ile verilen sınır şartlarında  $\frac{\partial u}{\partial x}$  türevi yerine  $m$ . ve  $(m + 1)$ . zaman adımlarındaki merkezi fark formülleri yazılır ve problemin içine düşmeyen  $v_j^m$  hayali değerleri (1.3.10) Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı yardımıyla yok edilir ve gerekli düzenlemeler yapılırsa Problem 2'nin Crank-Nicolson sonlu fark şeması, herhangi bir  $m$ .zaman adımı için

$$(2 + 2r) v_j^{m+1} - 2rv_{j+1}^{m+1} = (2 - 2r) v_j^m + 2rv_{j+1}^m, \quad j = 0$$

$$-rv_{j-1}^{m+1} + (2 + 2r) v_j^{m+1} - rv_{j+1}^{m+1} = rv_{j-1}^m + (2 - 2r) v_j^m + rv_{j+1}^m, \quad j = 1(1) n - 1$$

$$-2rv_{j-1}^{m+1} + (2 + 2r) v_j^{m+1} = 2rv_{j-1}^m + (2 - 2r) v_j^m, \quad j = n$$

olarak bulunur.

(1.2.1) ile verilen ısı denklemi için yukarıda bahsedilen açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımları,  $0 \leq \theta \leq 1$  olmak üzere,

$$\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} = \frac{\{\theta (v_{j+1}^{m+1} - 2v_j^{m+1} + v_{j-1}^{m+1}) + (1 - \theta) (v_{j+1}^m - 2v_j^m + v_{j-1}^m)\}}{\Delta x^2}$$

veya

$$-r\theta v_{j-1}^{m+1} + (1 + 2r\theta) v_j^{m+1} - r\theta v_{j+1}^{m+1} = r(1 - \theta) v_{j-1}^m + (1 - 2r(1 - \theta)) v_j^m + r(1 - \theta) v_{j+1}^m \quad (1.3.11)$$

olarak verilen ağırlıklı averaj yaklaşımıyla temsil edilebilir. Şöyle ki (1.3.11) yaklaşımı  $\theta = 0$  için (1.2.1) ısı denkleminin açık sonlu fark yaklaşımını,  $\theta = 1$  için kapalı sonlu fark yaklaşımını ve  $\theta = 1/2$  için Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımını verir. Burada  $r = \Delta t / (\Delta x)^2$  dir. Bu şema  $\theta \geq 1/2$  olduğunda  $\forall r > 0$  için kararlıdır. Bu durumda şema şartsız kararlıdır denir.  $0 \leq \theta < 1/2$  olduğunda şemanın kararlı çözümleri için  $r \leq 1/[2(1 - \theta)]$  eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Bu durumda şema şartlı kararlıdır denir [9].

### 1.3.4 Klasik Sonlu Fark Şemalarının Değişkenlerine Ayırma Yöntemi ile Çözümü

Bu kısımda Problem 1 ve Problem 2'nin bir önceki kısımda verilen klasik sonlu fark yaklaşımlarının değişkenlerine ayırma tekniği ile çözümlerinin nasıl bulunacağından bahsedilecektir. Sadece Problem 1'in açık şemasının değişkenlerine ayırma yöntemi ile seri çözümünün elde edilişi detaylı olarak verilecektir.

#### *Problem 1'in Açık Sonlu Fark Yaklaşımının Değişkenlere Ayırma Yöntemi ile Çözümü*

Kısım 1.2 den (1.2.1) ve (1.2.2) denklemleri ile verilen problemin değişkenlerine ayırma yöntemi ile tam çözümünün

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$

formunda arandığı biliniyor. Bu durum ayırık şemalar içinde uygulanabilir. Böylece (1.3.1) açık sonlu fark yaklaşımının (1.2.2) sınır şartlarına bağlı özel çözümleri de

$$w_j^m = X_j T_m, \quad j = 0, \dots, n, \quad m \geq 0 \quad (1.3.12)$$

formunda aranır. Burada  $X$ ,  $m$  den bağımsız  $n$  bileşenli bir vektör,  $\{T_m\}_{m \geq 0}$  ise bir reel sayılar dizisidir. (1.3.12) eşitliği (1.3.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\frac{X_j T_{m+1} - X_j T_m}{\Delta t} = \frac{X_{j-1} T_m - 2X_j T_m + X_{j+1} T_m}{(\Delta x)^2}$$

elde edilir. Sadece aşık olmaya çözümler aradığından  $X_j T_m \neq 0$  olup yukarıdaki eşitlik

$$\frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta t T_m} = \frac{X_{j-1} - 2X_j + X_{j+1}}{(\Delta x)^2 X_j}$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliğin sol tarafı sadece  $m$ 'ye ve sağ tarafı sadece  $j$ 'ye bağlı olduğundan her iki ifade  $(-\mu)$  gibi ortak bir sabite eşit olmalıdır. Yani,

$$\frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta t T_m} = \frac{X_{j-1} - 2X_j + X_{j+1}}{(\Delta x)^2 X_j} = -\mu$$

olmalıdır. Böylece aşağıdaki iki fark denklemi elde edilir:

$$\frac{T_{m+1} - T_m}{\Delta t} = -\mu T_m \quad (1.3.13)$$

$$\frac{X_{j-1} - 2X_j + X_{j+1}}{(\Delta x)^2} = -\mu X_j$$

(1.3.3) de verilen sınır koşullarından

$$X_0 = X_n = 0$$

dir. İlk olarak (1.3.13) denklemini yani

$$T_{m+1} = (1 - \Delta t \mu) T_m, \quad m \geq 0$$

fark denklemi göz önüne alınsın. Buradan

$$T_{m+1} = (1 - \Delta t \mu) T_m = (1 - \Delta t \mu)^2 T_{m-1} = \dots$$

yazılabilir. Böylece  $T_m$  çözümü

$$T_m = (1 - \Delta t \mu)^m, \quad m \geq 0 \quad (1.3.14)$$

olarak bulunur. Burada basitlik olsun diye  $T_0 = 1$  alındı. Hemen belirtmek gerekirse  $T_0$  sıfırdan farklı herhangi bir sabit sayı da alınabilir. Böylece

$$\mu_k = \frac{4}{(\Delta x)^2} \sin^2(k\pi \Delta x / 2), \quad k = 1, 2, \dots, n \quad (1.3.15)$$

ile verilen  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  özdeğerleri elde edilir. Bu özdeğerlere karşılık gelen özvektörler  $X_k = (X_{k,1}, X_{k,2}, \dots, X_{k,n}) \in \mathbb{R}^n, k = 1, \dots, n$  olup bileşenleri

$$X_{k,j} = \sin(k\pi x_j), \quad j = 0, \dots, n$$

dir. Böylece  $w_{k,j}^m$  özel çözümleri

$$w_{k,j}^m = (1 - \Delta t \mu_k)^m \sin(k\pi x_j) \quad (1.3.16)$$

olarak elde edilir.

Bundan böyle bu tezde (1.3.16)'ye yani açık sonlu fark şemasının değişkenlerine ayırma yöntemi ile elde edilen çözümüne Tam-Açık Sonlu Fark Çözümü (T-ASFÇ) yöntemede Tam-Açık Sonlu Fark Yöntemi (T-ASFY) denilecektir. Diğer şemalar için de benzer tanımlamalar kullanılacaktır. Şimdiye kadar  $(x_j, t_m)$  grid noktalarında  $w_{k,j}^m$  değerleri ile verilen özel çözümlerin bir  $\{w_k\}_{k=1}^n$  ailesi elde edildi. Bu özel çözümlerin herhangi bir lineer kombinasyonu,  $\gamma_k$ 'lar skalerler olmak üzere,

$$v = \sum_{k=1}^n \gamma_k w_k$$

(1.2.1) nin (1.2.2) sınır şartlarına bağlı aynı zamanda bir çözümdür. Son olarak

$$v_j^0 = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n$$

başlangıç şartını kullanılarak  $\{\gamma_k\}$  katsayılarını belirlenebilir.  $t = 0$  da  $w_k = X_k$  olduğundan  $\{\gamma_k\}$ 'lar

$$\sum_{k=1}^n \gamma_k X_{k,j} = f(x_j), \quad j = 1, \dots, n$$

olacak şekilde belirlenir.  $\gamma_k$  lar

$$\gamma_k = 2\Delta x \sum_{k=1}^n f(x_j) X_{k,j}, \quad k = 1, \dots, n$$

olarak bulunur.

(1.3.1) yaklaşımının ve (1.2.2) sınır şartlarını sağlayan sonlu fark şemasının genel çözümünün bir temsilini türetmek için alternatif bir yol da vardır. Varsayalım

ki  $A \in \mathbb{R}_n^n$

$$A = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \ddots & \ddots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \ddots & \ddots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (1.3.17)$$

formunda bir matris ve  $m \geq 0$  için  $v^m \in \mathbb{R}^n$

$$v^m = (v_1^m, v_2^m, \dots, v_n^m)$$



formunda bir vektör olsun. O zaman fark şeması denk bir şekilde

$$v^{m+1} = (I - \Delta t A)v^m$$

formda yazılabilir. Burada  $I$  birim matristir. Bunun basit bir sonucu olarak

$$v^m = (I - \Delta t A)^m v^0 \quad (1.3.18)$$

elde edilir. Böylece yukarıda verilen  $X_k$  vektörleri  $A$  matrisinin  $\mu_k$  öz değerlerine karşılık gelen özvektörleridir. Dolayısıyla  $X_k$  aynı zamanda  $(I - \Delta t A)^m$  matrisinin  $(1 - \Delta t \mu_k)^m$  özdeğerine karşılık gelen özvektördür. Böylece eğer  $v^0 = X_k$  ise (1.3.18)'den

$$v_j^m = (1 - \Delta t \mu_k)^m \sin(k\pi x_j)$$

(1.2.2) sınır şartlarını sağlayan (1.3.1) yaklaşımının bir özel çözümüdür. Bu çözüm tam olarak (1.3.16)'ye karşılık gelir. Yukarıdakine benzer şekilde sonlu fark şemasının genel çözümü  $v_j^m$  lerin lineer kombinasyonu alınarak elde edilir.

### ***Analitik ve Ayrık Çözümlerin Karşılaştırılması***

Şimdi hem (1.2.1) sürekli problemin hem de (1.3.2) ayrık problemin çözümlerinin açık formüllerine sahibiz. Referansları kolay olsun diye bu formülleri tekrar ediyoruz. Sürekli problemin analitik çözümü

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t} \sin(k\pi x)$$

ile verilir. Burada  $\lambda_k = (k\pi)^2$  ve

$$c_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin(k\pi x) dx \quad (1.3.19)$$

dir. Bu analitik çözümü bir önceki kısımda verilen

$$v_j^m = \sum_{k=1}^n \gamma_k (1 - \Delta t \mu_k)^m \sin(k\pi x_j) \quad (1.3.20)$$

ayrık çözümle karşılaştıralım. Burada  $k = 1, \dots, n$  için

$$\mu_k = \frac{4}{(\Delta x)^2} \sin^2(k\pi\Delta x/2)$$

ve

$$\gamma_k = 2\Delta x \sum_{j=1}^n f(x_j) \sin(k\pi x_j)$$

dir. Analitik ve nümerik çözümünü  $(x_j, t_m)$  grid noktasında karşılaştırmak için

$$u_j^m = u(x_j, t_m) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t_m} \sin(k\pi x_j)$$

eşitliğini göz önüne alalım. Burada esas amaç  $\Delta x$  ve  $\Delta t$  grid parametrelerinin üzerine konulan uygun koşullar altında

$$v_j^m \approx u_j^m$$

olacak şekilde bir argümanın belirlenmesidir. Teknik prosedürden kaçınmak için mesh parametrelerinden bağımsız  $\bar{t} > 0$  için  $t_m \geq \bar{t}$  olmak üzere  $(x_j, t_m)$  sabit düğüm noktasını göz önüne alınsın. Bunun ötesinde başlangıç fonksiyonu olan  $f$  'nin bir düzgün fonksiyon olduğu ve sınır koşullarını yani  $f(0) = f(1) = 0$  sağladığı kabul edilsin. Son olarak  $\Delta x$  ve  $\Delta t$  mesh parametreleri yeterince küçük olsun.

$u_j^m$  ve  $v_j^m$  karşılaştırmak için

$$\begin{aligned} u_j^m &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t_m} \sin(k\pi x_j) \\ &= \sum_{k=1}^n c_k e^{-\lambda_k t_m} \sin(k\pi x_j) + \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t_m} \sin(k\pi x_j) \end{aligned}$$

eşitliğini göz önünde bulundurarak

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t_m} \sin(k\pi x_j) \approx 0$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Bir kere  $f$  fonksiyonu düzgün ve aynı zamanda sınırlı olduğundan tüm  $k$ 'lar için (1.3.19) ile verilen  $c_k$  Fourier katsayıları sınırlıdır. Dolayısıyla tüm  $k$ 'lar

için  $|c_k| \leq c$  olacak şekilde sonlu bir  $c$  sabiti vardır. Ayrıca  $|\sin(k\pi x_j)| \leq 1$  olduğu bilinmektedir. Bu durumlar kullanarak  $n$ 'nin büyük değerleri için

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t_m} \sin(k\pi x_j) \right| &\leq \max_k |c_k| \sum_{k=n+1}^{\infty} e^{-(k\pi)^2 t_m} \\ &\leq c \sum_{k=n+1}^{\infty} \left( e^{-\pi^2 \bar{t}} \right)^k \\ &= c \left( e^{-\pi^2 \bar{t}} \right)^{n+1} \frac{1}{1 - e^{-\pi^2 \bar{t}}} \approx 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Burada geometrik seriler için toplam formülü kullanıldı ve  $t_m \geq \bar{t}$  gerçeğinden yararlandı. Böylece

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t_m} \sin(k\pi x_j) \approx 0$$

olup

$$u_j^m \approx \sum_{k=1}^n c_k e^{-\lambda_k t_m} \sin(k\pi x_j) \quad (1.3.21)$$

dir. Şimdi (1.3.21) ve (1.3.20) sonlu toplamlarını karşılaştıralım. Çözümlerin türetilmesinden hareketle bu iki toplam terim terim karşılaştırılacaktır. Bunun için  $k$  sabit tutulup

$$c_k e^{-\lambda_k t_m} \sin(k\pi x_j)$$

ve

$$\gamma_k (1 - \Delta t \mu_k)^m \sin(k\pi x_j)$$

ifadeleri karşılaştırılmalıdır. Her iki ifadenin sinüslü kısımları aynı olduğundan geriye Fourier katsayıları  $c_k$  ve  $\gamma_k$ 'ları ve zamana bağlı  $e^{-\lambda_k t_m}$  ve  $(1 - \Delta t \mu_k)^m$  terimlerini karşılaştırmak kalır. İlk olarak Fourier katsayılarını göz önüne alalım.

$$2\Delta x \sum_{j=1}^n f(x_j) \sin(k\pi x_j)$$

ifadesi

$$2 \int_0^1 f(x) \sin(k\pi x) dx$$

ifadesinin dikdörtgen kuralına göre yaklaşımı olduğu için  $\gamma_k$  katsayıları  $c_k$  katsayıları için iyi bir yaklaşımdır. Gerçekten yeterince düzgün  $f$  için

$$|c_k - \gamma_k| = O((\Delta x)^2)$$

dir.

Son olarak aşağıdaki kısımda zamana bağlı  $e^{-\lambda_k t_m}$  ve  $(1 - \Delta t \mu_k)^m$  terimlerinin karşılaştırması verilecektir.

### ***Kararlılık ile İlgili Durumlar***

Karşılaştırmaya geçmeden önce kullanılacak olan ilgili büyüklüklerden kısaca bahsedelim.  $\lambda_k t_m$  pozitif olduğu için

$$|e^{-\lambda_k t_m}| \leq 1, \quad k = 1, \dots, n$$

ve aynı zamanda

$$|1 - \Delta t \mu_k| \leq 1, \quad k = 1, \dots, n$$

dir. Buradan  $\Delta t \mu_k \leq 2$  veya buna denk olan

$$\frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(k\pi \Delta x/2) \leq 2 \quad k = 1, \dots, n$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1/2 \tag{1.3.22}$$

elde edilir. Bu şarta kararlılık şartı denir. Hemen belirtmeli ki (1.3.22) kararlılık şartına uyulmadığında çözümlerde ciddi salınımlar ortaya çıkabilecektir. Bunun sebebi bazı  $k$  lar için eğer  $|1 - \Delta t \mu_k| > 1$  ise  $m$  artarken  $(1 - \Delta t \mu_k)^m$  teriminin oldukça büyümesinden kaynaklanmaktadır. Böylesine bir davranış analitik çözümde ortaya çıkamayacağından güvenilir nümerik sonuçları elde edebilmek için (1.3.22) şartının sağlanması gerekir. Bu kararlılık şartı daha sonra diğer teknikler kullanılarak tekrar türetilenektir.

### ***Yaklaşımın Doğruluğu***

Yukarıda bahsedilen doğruluk konusuna tekrar dönelim. Şuandan itibaren mesh boyutlarının (1.3.22) şartının sağlanacak şekilde seçildiğini varsayıyoruz. Geriye kalan problem  $(1 - \Delta t \mu_k)^m$  teriminin  $e^{-\lambda_k t_m}$  terimine ne kadar iyi yaklaştığını tartışmaktır. Bu soruyu ele almak için  $t_m$ 'yi  $t_m = 1$  gibi sabit bir zaman seçerek ve  $\Delta t = (\Delta x)^2 / 2$  olduğunu varsayarak problemi biraz basitleştirelim. Sonuç olarak

$$\alpha_k = e^{-\lambda_k}$$

ve

$$\beta_k = (1 - \Delta t \mu_k)^{1/\Delta t} = \left(1 - 2 \sin^2 \left(k\pi \sqrt{\Delta t/2}\right)\right)^{1/\Delta t}$$

terimlerini karşılaştırmak istiyoruz. Açıkça  $k$ 'nın büyük değerleri için  $\alpha_k$  çok küçüktür ve ilk üç değeri Matlab yardımıyla sırasıyla

$$\alpha_1 \approx 5.172 \cdot 10^{-5}, \alpha_2 \approx 7.157 \cdot 10^{-18}, \alpha_3 \approx 2.65 \cdot 10^{-39}$$

olarak bulunur.  $\beta_k$ 'nın değerleri hem  $k$ 'ya hem de mesh parametrelerine bağlıdır.  $\Delta x$  mesh uzunluğunun uygun seçimiyle örneğin  $\Delta x = 1/100$  için  $\beta_k$  ların ilk üç değeri Matlab kullanılarak

$$\beta_1 \approx 5.164 \cdot 10^{-5}, \beta_2 \approx 6.973 \cdot 10^{-18}, \beta_3 \approx 2.333 \cdot 10^{-39}$$

olarak elde edilir.

Bu hesaplamalar açıkça  $k$  arttıkça hem  $\alpha_k$  hem de  $\beta_k$ 'nın gittikçe çok küçüldüğünü gösterir. Bununda ötesinde  $\beta_k$ 'nın  $\alpha_k$ 'ya yeterince yaklaştığı açıkça görülmektedir. Bu problemi biraz daha yakından ele almak uygun olacaktır. Hem  $\alpha_k$  hem de  $\beta_k$ ,  $k$ 'nın büyük değerleri için çok küçük olduğundan bunları küçük  $k$  için karşılaştırmak yeterlidir.

$k$  nın küçük değerleri için  $\alpha_k$  ve  $\beta_k$ 'yi karşılaştırmak amacıyla

$$\sin(y) = y + O(y^3)$$

olduğunu hatırlayalım. Böylece

$$2 \sin^2 \left( k\pi \sqrt{\Delta t/2} \right) \approx (k\pi)^2 \Delta t$$

elde edilir. Bunun ötesinde yeterince küçük  $\varepsilon$  için genel olarak

$$e^y \approx (1 + \varepsilon y)^{1/\varepsilon}$$

dir. Bu gerçekleri kullanarak

$$\begin{aligned} \beta_k &= \left( 1 - 2 \sin^2 \left( k\pi \sqrt{\Delta t/2} \right) \right)^{1/\Delta t} \\ &\approx \left( 1 - (k\pi)^2 \Delta t \right)^{1/\Delta t} \\ &\approx e^{-(k\pi)^2} \\ &= \alpha_k \end{aligned}$$

bulunur. Bu durum zamana bağlı  $e^{-\lambda_k t_m}$  terimine ayrık karşılığı olan  $(1 - \Delta t \mu_k)^m$  ile daha iyi bir şekilde yaklaşıldığını gösterir.

### ***Karşılaştırmanın Özeti***

Yukarıda yapılan analizleri özetlemek için

$$u(x, t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e^{-\lambda_k t} \sin(k\pi x)$$

ile verilen tam çözümü ve

$$v_j^m = \sum_{k=1}^n \gamma_k (1 - \Delta t \mu_k)^m \sin(k\pi x_j)$$

ile verilen ayrık çözümü tekrar göz önüne alalım. Fourier serisini bir noktada keserek

$$(i) \quad u(x_j, t_m) \approx \sum_{k=1}^n c_k e^{-\lambda_k t_m} \sin(k\pi x_j)$$

olduğu görüldü. (i)'de Fourier katsayıları nümerik integrasyonun dikdörtgen kuralına göre

$$(ii) \quad c_k = 2 \int_0^1 f(x) \sin(k\pi x) dx \approx 2\Delta x \sum_{j=1}^n f(x_j) \sin(k\pi x_j) = \gamma_k$$

sağlar. Bunun da ötesinde eğer mesh parametreleri

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1/2$$

eşitsizliğini sağlıyorsa o zaman özdeğerlerin özelliğinden

$$(iii) \quad e^{-\lambda_k t_m} \approx (1 - \Delta t \mu_k)^m$$

olur. (i), (ii) ve (iii) gözlemleri

$$u(x_j, t_m) \approx \sum_{k=1}^n \gamma_k (1 - \Delta t \mu_k)^m \sin(k\pi x_j) = v_j^m$$

olduğunu gerektirir. Bu durum  $\Delta x$  ve  $\Delta t$ 'nin uygun seçimleri için neden iyi yaklaşımlar elde edildiğini açıklar.

Yukarıda iyi davranışlı nümerik yaklaşımlar elde etmek için sağlanması gereken (1.3.22) kararlılık şartı türetildi. İkinci olarak analitik çözümdeki her bir önemli terimin ayrık çözümdeki benzer bir terimle iyi bir şekilde yaklaşık olarak elde edildiğini göstermek için Fourier metodunun ayrık bir versiyonu kullanıldı. Bu analiz her ne kadar hassas bir hata tahmini sunmasa da hesaplamalarda neler olup bittiğini çok iyi açıklar. Bir sonraki kısımda kararlılık analizi için von Neumann yönteminden bahsedilecektir. Bu tekniğin temel fikri bu kısımdaki ile aynı olup tüm yaklaşımın kararlılığı özel çözümlerin analiz edilmesi ile incelenir. Not etmek gerekirse bu yöntem sadece lineer problemler için geçerlidir. Lineer olmayan problemler için benzer bir yöntem henüz yoktur.

### 1.3.5 von Neumann Kararlılık Analizi

Yukarıdaki kısımda Fourier yönteminin ayrık versiyonun bir nümerik şemanın önemli özelliklerinin anlaşılmasına yardımcı olduğu görüldü. Temel gözlem, kararlılık ve yakınsaklık ile ilgili soruların analitik ve nümerik çözümlerin terim terim karşılaştırılması ile analiz edilebileceğidir. Dolayısıyla her iki problemin özel çözümleri çok önemlidir. Bu kısımda aynı fikir üzerinde devam edilecektir. Amaç

bir şemanın kararlılığını incelemenin bu yolunu daha geniş denklem sınıfı ve sınır koşullarını kapsayacak şekilde genelleştirmektedir.

### **Özel Çözümler: Sürekli ve Ayrık**

$$u_t = u_{xx} \quad x \in (0, 1) \quad t > 0$$

ile verilen ısı denkleminin bazı özel çözümleri;

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

Dirichlet sınır şartları verildiğinde özel çözümler

$$F_D = \{T_k(t) \sin(k\pi x)\}_{k=1}^{\infty}$$

dir. Burada

$$T_k(t) = e^{-(k\pi)^2 t}$$

dır.

$$u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

Neumann şartları için özel çözümler

$$F_N = \{T_k(t) \cos(k\pi x)\}_{k=0}^{\infty}$$

ile verilir. Son olarak

$$u(-1, t) = u(1, t) \quad \text{ve} \quad u_x(-1, t) = u_x(1, t) = 0, \quad t \geq 0$$

Periyodik sınır şartları için konum değişkeni  $x \in (-1, 1)$  olmak üzere,

$$F_P = F_D \cup F_N$$

dir.



Tüm bu özel çözümleri bir tek tarzda ele alabilmek için bunları biraz farklı bir formda yazmak daha uygundur. Cebirden

$$e^{ix} = \cos(x) + i \sin(x), \quad i^2 = -1$$

olduğu biliniyor. Dolayısıyla

$$\cos(x) = \frac{1}{2} (e^{ix} + e^{-ix})$$

ve

$$\sin(x) = \frac{1}{2i} (e^{ix} - e^{-ix})$$

dir. Bu formüller kullanarak,  $F_D$ ,  $F_N$  ve  $F_P$  ailelerindeki tüm fonksiyonlar

$$F = \{T_k(t) e^{ik\pi x}\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

fonksiyonlarının lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Benzer şekilde karşılık gelen ayrık problemler

$$F_{\Delta} = \{(\alpha_k)^m e^{ik\pi x_j}\}_{k=-\infty}^{\infty}$$

formundaki özel çözümlerin bir ailesine sahiptir. Burada  $\alpha_k$  ayrık çözümlerin zamana bağlı olduğunu gösterir. Isı denklemi için açık şemada bu terim  $\alpha_k = (1 - \Delta t \mu_k)$  ile verilir. Bu terime genellikle şemanın güçlendirme faktörü denir.

### **Örnekler**

Von Neumann yönteminin temel fikri analitik ve ayrık özel çözümlerin büyümesini karşılaştırmaktır. Daha doğrusu, ayrık çözümlerin büyümesi analitik çözümlerin büyümesiyle sınırlanacak şekilde  $\Delta x$  ve  $\Delta t$  mesh parametreleri üzerine şartların türetilmesidir. Burada ne yapılmak istenildiğini açıklığa kavuşturmak için aşağıdaki iki örneği göz önüne alalım.

#### **Örnek 1.3.1.**

$$u_t = u_{xx} \quad (1.3.23)$$

olarak verilen ısı denklemini göz önüne alalım.

$$u_k(x, t) = T_k(t) e^{ik\pi x}$$

formunda verilen bir özel çözümün (1.3.23) de yerine yazılmasıyla

$$T'_k(t) = -(k\pi)^2 T_k(t)$$

elde edilir. Böylece

$$T_k(t) = e^{-(k\pi)^2 t} \quad (1.3.24)$$

olur. Burada bilindiği gibi  $T_k(0) = 1$  dir. (1.3.23) ile verilen kısmi türevli denklemin çözümüne

$$\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} = \frac{v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m}{\Delta x^2}$$

şeması ile yaklaşılır.

$$v_j^m = (\alpha_k)^m e^{ik\pi x_j}$$

formundaki bir özel çözümün yukarıdaki şemada yerine yazılmasıyla

$$\frac{(\alpha_k)^{m+1} - (\alpha_k)^m}{\Delta t} e^{ik\pi x_j} = \frac{e^{ik\pi x_{j-1}} - 2e^{ik\pi x_j} + e^{ik\pi x_{j+1}}}{(\Delta x)^2} (\alpha_k)^m$$

bulunur.  $x_j = j\Delta x$  olduğundan yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_k - 1}{\Delta t} &= \frac{e^{-ik\pi\Delta x} - 2 + e^{ik\pi\Delta x}}{(\Delta x)^2} \\ &= 2 \frac{\cos(k\pi\Delta x) - 1}{(\Delta x)^2} \\ &= -\frac{4}{(\Delta x)^2} \sin^2(k\pi\Delta x/2) \end{aligned}$$

olur. Böylece buradan

$$\alpha_k = 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(k\pi\Delta x/2)$$

bulunur. (1.3.24) ile verilen  $T_k$ , her  $k$  için

$$|T_k(t)| \leq 1$$

eşitsizliğini sağladığından yine her  $k$  için

$$|(\alpha_k)^m| \leq 1$$

dir. Yukarıda verilen (1.3.22) de olduğu gibi bu eşitsizlik yani  $|(\alpha_k)^m| \leq 1$  eşitsizliği

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1/2 \quad (1.3.25)$$

şartı sağlanırsa geçerlidir. Böylece Dirichlet, Neumann ve periyodik sınır koşulları ile verilen bir problemin makul yani kabul edilebilir nümerik sonuçlarını elde etmek için (1.3.25) şartı sağlanmalıdır.

### Örnek 1.3.2.

Şimdide yukarıda bahsedilen işlemi

$$u_t = u_{xx} + u \quad (1.3.26)$$

denklemine uygulayalım.

$$u_k(x, t) = T_k(t) e^{ik\pi x}$$

özel çözümünün (1.3.26) denkleminde yerine yazılmasıyla

$$T'_k(t) = (1 - (k\pi)^2) T_k(t)$$

elde edilir. Böylece

$$T_k(t) = e^{(1-(k\pi)^2)t}$$

olup her  $k$  için

$$|T_k(t)| \leq e^t, \quad t \geq 0 \quad (1.3.27)$$

dır. (1.3.26) denkleminin çözümüne

$$\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} = \frac{v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m}{\Delta x^2} + v_j^m$$

şeması ile yaklaşılır.

$$v_j^m = (\alpha_k)^m e^{ik\pi x_j}$$

özel çözümü yukarıdaki son şemada yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\frac{\alpha_k - 1}{\Delta t} = \frac{e^{-ik\pi\Delta x} - 2 + e^{ik\pi\Delta x}}{(\Delta x)^2} + 1$$

veya

$$\alpha_k = 1 + \Delta t - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(k\pi\Delta x/2) \quad (1.3.28)$$

bulunur. Analitik çözüm için (1.3.27) sınıрыla birlikte ayrık nümerik çözümün her  $k$  için

$$|(\alpha_k)^m| \leq e^{tm}$$

eşitsizliğini sağlaması gerekir. Varsayalım ki

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1/2 \quad (1.3.29)$$

şartı sağlasın. O zaman (1.3.28) den

$$\begin{aligned} |(\alpha_k)^m| &\leq |\alpha_k|^m \\ &\leq \left( \left| 1 - \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(k\pi\Delta x/2) \right| + \Delta t \right)^m \\ &\leq (1 + \Delta t)^m \\ &\leq e^{m\Delta t} = e^{tm} \end{aligned}$$

dir. Burada her  $y \geq -1$  için geçerli olan önemli

$$(1 + y)^m \leq e^{my}, \quad m \geq 0$$

eşitsizliği kullanıldı.

Bu örneğin sonucu olarak kararlı sonuçlar elde etmek için (1.3.29) şartı sağlanmak zorundadır. Şimdiye kadar yapılan tartışmalar şöyle özetlenebilir. Eğer ayrık özel çözümlerin büyümesi sürekli özel çözümlerin büyümesiyle

sınırlandırılabilirse o zaman bir nümerik çözüm von Neumann anlamında kararlıdır denir. Daha doğrusu,

$$T(t) = \max_k |T_k(t)|$$

olduğunda eğer her  $t_m \geq 0$  için

$$\max_k |(\alpha_k)^m| \leq T(t_m)$$

oluyorsa nümerik şema von Neumann anlamında kararlıdır denir.

### 1.3.6 Kapalı Sonlu Fark Şeması

Bir önceki kısımda ısı denklemini çözmek için (1.3.2) ile verilen açık şema olarak adlandırılan özel bir nümerik yöntem çalışıldı. Bazı iyi özelliklere sahip olan bu şemanın bilgisayara uygulanması oldukça basittir. Fakat açık yöntem kararlılık şartından dolayı çok küçük zaman adımlarının kullanılmasını gerektirdiğinden bu durum açık yöntem için bir dezavantajdır.

Bu sebepten dolayı (1.3.22) ile verilen

$$\frac{\Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 1/2 \quad (1.3.30)$$

kararlılık şartına biraz daha yakından bakalım. Isı denkleminin  $t = 1$  zamanında makul yani kabul edilebilir doğrulukta nümerik çözümünün hesaplanması için konum adım uzunluğunun küçük seçilmesi gerekir. Varsayalım ki  $n = 100$  olsun. O zaman kararlılık şartından

$$\Delta t \leq \frac{1}{20402}$$

olmalıdır. Çözüm  $t_M = 1$  zamanında istendiğinde,  $M = 20402$  zaman adımı alınmalıdır.  $n = 1000$  seçilmesi durumunda zaman adım sayısı  $M = 2004002$  olur. Açıkça bu çok basit problem bile çok güçlü olmayan bazı bilgisayarları zorlayabilir. Bu durum iki veya üç boyutlu problemlerde daha da sıkıntılı olur.

Açık şemanın bu istenmeyen özelliği daha yüksek hesapsal etkinliğe sahip alternatifleri araştırmaya yönlendirir. Bu kısımda en basit ve muhtemelen en popüler metod olan standart kapalı şema göz önüne alınacaktır. Burada farklı yöntemlerin ayrıntısına girilmeyecektir.

Şimdi

$$u_t = u_{xx} \quad x \in (0, 1), \quad t > 0$$

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (1.3.31)$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

$$u(x, 0) = f(x), \quad x \in [0, 1]$$

ile verilen problemin kapalı şemasını verelim. Isı denklemindeki  $u_t$  ve  $u_{xx}$  türevleri yerine

$$u_t(x, t + \Delta t) \approx \frac{u(x, t + \Delta t) - u(x, t)}{\Delta t}$$

ve

$$u_{xx}(x, t + \Delta t) \approx \frac{u(x - \Delta x, t + \Delta t) - 2u(x, t + \Delta t) + u(x + \Delta x, t + \Delta t)}{(\Delta x)^2}$$

yaklaşımları alınıp açık şemada verilen notasyonlar kullanılırsa ısı denkleminin kapalı sonlu fark şeması

$$\frac{v_j^{m+1} - v_j^m}{\Delta t} = \frac{v_{j-1}^{m+1} - 2v_j^{m+1} + v_{j+1}^{m+1}}{\Delta x^2} \quad j = 0, \dots, n, \quad m \geq 0$$

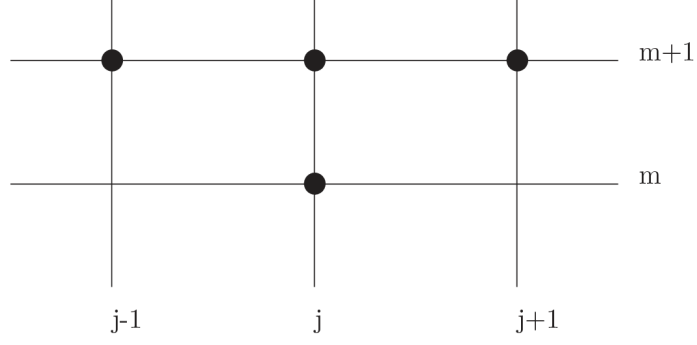
olarak elde edilir. Bu şemanın hesaplamalı molekülü Şekil 1.2 deki gibidir.

(1.3.31) sınır şartlarından tüm  $m \geq 0$  için

$$v_0^m = 0 \text{ ve } v_n^m = 0$$

ve başlangıç şartından

$$v_j^0 = f(x_j) \text{ için } j = 0, \dots, n$$



Şekil 1.2. Kapalı Şemanın Hesaplama Molekülü

dir. Bu şemayı daha uygun bir formda yazmak için  $v^m = (v_1^m, \dots, v_n^m)^T$  bileşenini  $v^m \in \mathbb{R}^n$  vektörünü tanımlayalım. O zaman şema

$$((I + \Delta t A)) v^{m+1} = v^m, \quad m \geq 0 \quad (1.3.32)$$

olarak yazılabilir. Burada  $I \in \mathbb{R}^{n,n}$  birim matristir ve  $A \in \mathbb{R}^{n,n}$  yukarıda (1.3.17) ile verilen

$$A = \frac{1}{(\Delta x)^2} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & \dots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \dots & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

formunda bir matristir. Bu şema yardımıyla nümerik çözümleri hesaplamak için her zaman adımında (1.3.32) lineer cebirsel denklem sistemini çözmek gerekir. Bu nedenle  $v^{m+1}$ 'in  $v^m$  yardımıyla tek bir şekilde elde edilebilmesi için  $(I + \Delta t A)$  matrisinin tekil olmadığını göstermek gerekir.

**Lemma 1.3.1. :**

$(I + \Delta t A)$  matrisi bütün  $\Delta x$  ve  $\Delta t$  mesh parametreleri için simetrik ve pozitif tanımlıdır.

### İspat:

$A$  matrisi simetrik olduğundan  $(I + \Delta t A)$  matrisi de açıkça simetriktir. Bununla birlikte  $A$ 'nın özdeğerleri  $\mu$  olmak üzere  $(I + \Delta t A)$ 'nın özdeğerleri  $(1 + \Delta t \mu)$  formundadır. (1.3.15) ile verilen  $A$ 'nın özdeğerlerinin tümü pozitif olduğundan  $(I + \Delta t A)$ 'nın da tüm özdeğerleri pozitiftir. Dolayısıyla  $(I + \Delta t A)$  matrisi pozitif tanımlıdır.

$(I + \Delta t A)$  matrisi simetrik ve pozitif tanımlı olduğundan (1.3.32) sisteminin bir tek çözümü vardır. (1.3.32) ile verilen lineer cebirsel denklem sisteminin çözümü literatürde mevcut olan direkt yöntemlerden biri yardımıyla kolayca bulunabilir. Hesaplama açısından (1.3.32) da verilen  $(I + \Delta t A)$  katsayı matrisinin zamanla değişmediği açıktır. Bu durum şemadaki toplam hesaplama yükünü azaltmak için kullanılabilir.

### ***Kararlılık Analizi***

(1.3.31) ısı denkleminin özel çözümlerinin

$$T_k(t) = e^{-(k\pi)^2 t}$$

olmak üzere

$$u_k(x, t) = T_k(t) e^{ik\pi x}$$

olduğunu hatırlayalım.

$$(v_j^m) = (\alpha_k)^m e^{ik\pi x_j}$$

formunda verilen özel çözümü (1.3.32) kapalı şemada yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{\alpha_k - 1}{\Delta t} &= \frac{e^{-ik\pi\Delta x} - 2 + e^{ik\pi\Delta x}}{(\Delta x)^2} \alpha_k \\ &= -\frac{4\alpha_k}{(\Delta x)^2} \sin^2(k\pi\Delta x/2) \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha_k = \frac{1}{1 + \frac{4\Delta t}{(\Delta x)^2} \sin^2(k\pi\Delta x/2)}$$



dir. Tüm  $k$ 'lar için

$$|T_k(t)| \leq 1$$

olduğu göz önüne alınırsa

$$|(\alpha_k)^m| \leq 1 \quad (1.3.33)$$

olması gerekir. Kesinlikle pozitif olan tüm  $\mu_k$ 'lar için

$$\alpha_k = \frac{1}{1 + \Delta t \mu_k}$$

olduğundan (1.3.33) şartı bütün grid parametreler için sağlanır.

Grid parametrelerin herhangi bir seçimi için iyi davranış sergileyen nümerik yöntemlere *şartsız kararlıdır* denir. Dolayısıyla kapalı şema şartsız kararlıdır. Açık şemaya benzer bir şekilde *şartlı kararlıdır* denir.

Her ne kadar keyfi uzunlukta zaman adımları kullanılarak yaklaşık çözümler hesaplanabiliyorsa da çözümün doğruluğu konusu henüz ele alınmadı. Açıkça  $\Delta t$ 'nin çok büyük seçilmesi hesaplama doğruluğunu zayıflatır. Nümerik analizde bu mesele halen devam eden önemli bir tartışma konusudur: açık şema mı yoksa kapalı şema mı kullanılmalıdır. Bu konu bilgisayar açısından mümkün olduğunca az CPU zamanı ve hafıza kullanarak iyi yaklaşımların nasıl hesaplanacağıdır.

### 1.3.7 Enerji Argümanları

Şuana kadar (1.2.1) başlangıç sınır değer probleminin  $u$  çözümünün bir formülünü bulmamıza izin veren Fourier yöntemi diye adlandırılan bir tekniği inceledik. Fakat aslında bir diferansiyel denklemin çözümünü detaylı olarak bilmeksizinde çözümünün bazı özelliklerini türetmek mümkündür. Bu tür teknikler çözümün analitik gösteriminin türetilmesinin genellikle imkansız olduğu lineer olmayan problemlerin analizinde özellikle önemlidir. Enerji argümanları bu tür tekniklerin tipik örnekleridir ve burada bu tür argümanların (1.2.1) problemine nasıl uygulanabileceğinden bahsedilecektir.

Bunun için

$$u_t = u_{xx} \quad x \in (0, 1), t > 0 \quad (1.3.34)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad t > 0 \quad (1.3.35)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad x \in [0, 1] \quad (1.3.36)$$

olarak verilen başlangıç ve sınır değer problemini tekrar göz önüne alalım ve  $u(x, t)$  çözüm fonksiyonunu bulmaya çalışalım. Bu kısım da  $u = u(x, t)$  fonksiyonunun aşağıdaki şartları sağladığı kabul edilecektir:

- $u, u_t, u_{xx} \in C([0, 1] \times [0, \infty))$  dir.
- $u$ , (1.3.34)-(1.3.36)'in bir çözümüdür.

Her  $t \geq 0$  için

$$E(t) = \int_0^1 u^2(x, t) dx$$

olsun. Şimdi skaler değişken olan  $E(t)$ 'nin  $t$  zamanına göre nasıl bir davranış sergilediğini araştıralım. Bunun için  $E(t)$ 'nin

$$E'(t) \equiv \frac{d}{dt} \int_0^1 u^2(x, t) dx$$

birinci mertebeden türevini göz önüne alalım. Düzgün  $u$  fonksiyonları için türev ve integralin sırası değiştirilebildiğinden öyleki  $t > 0$  için

$$E'(t) = \int_0^1 \frac{\partial}{\partial t} u^2(x, t) dx \quad (1.3.37)$$

yazılabilir. Bu durumda (1.3.34)-(1.3.35) denklemlerinden ve kısmi integrasyondan

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2 \int_0^1 u(x, t) u_t(x, t) dx \\ &= 2 \int_0^1 u(x, t) u_{xx}(x, t) dx \\ &= 2 [u(x, t) u_x(x, t)]_0^1 - 2 \int_0^1 (u_x(x, t))^2 dx \\ &= -2 \int_0^1 (u_x(x, t))^2 dx \leq 0 \end{aligned}$$

elde edilir. O halde,  $E(t)$  artmayan bir fonksiyondur yani

$$E(t) \leq E(0)$$

dır.

Yukarıda ifade edildiği gibi bu eşitsizliğin çıkarımı türev ve integralin yerlerinin değiştirilerek (1.3.37)'un geçerli olmasını gerektirir. Bu durum aslında aşağıda verilen (1.3.1) önermesinden gelir.

### Önerme 1.3.1.

$$F(y) = \int_a^b f(x, y) dx$$

ile verilen  $F$  ve  $f$  ile  $f_y$ 'nin ikisinde  $[a, b] \times [c, d]$  aralığında sürekli olduğunu varsayalım. Bu durumda her  $y \in (c, d)$  için  $F'(y)$ ,

$$F'(y) = \int_a^b f_y(x, y) dx$$

vardır.

Şimdi yukarıdaki sonuçları şöyle özetleyebiliriz.

### Teorem 1.3.1. :

$u, u_t, u_{xx} \in C([0, 1] \times [0, \infty))$  olmak üzere eğer  $u$ , (1.3.34)-(1.3.36)'in bir çözümü ise o zaman

$$\int_0^1 u^2(x, t) dx \leq \int_0^1 f^2(x) dx \quad t \geq 0 \quad (1.3.38)$$

dir.

(1.3.38) formundaki bir eşitsizliğe sıklıkla kararlılık tahmini denir. Çünkü bu  $E(t)$  integrali ile ölçülen çözümün boyutunun  $f$  başlangıç verisinin karşılık gelen boyutu ile sınırlı olabileceğini ifade eder. Bunun bir sonucu başlangıç fonksiyonundaki küçük perturbasyonların çözümde küçük perturbasyonlara yol açacağıdır. Bunu görmek için (1.3.34)-(1.3.36)'in  $f_1$  ve  $f_2$  gibi başlangıç fonksiyonları ile  $u_1(x, t)$  ve  $u_2(x, t)$  gibi iki çözümü olduğunu varsayalım.  $w = u_1 - u_2$  olsun. O zaman

$$w(0, t) = w(1, t) = 0 \text{ ve } w(0, t) = f_1 - f_2$$

olur. Bununla ötesinde

$$w_t = (u_1)_t - (u_2)_t = (u_1)_{xx} - (u_2)_{xx} = w_{xx}$$

dır. Dolayısıyla  $w$ ,  $f_1 - f_2$  başlangıç şartı ile verilen (1.3.34)-(1.3.36)'in bir çözümüdür. (1.3.38)'den

$$\int_0^1 (u_1 - u_2)^2(x, t) dx = \int_0^1 w^2(x, t) dx \leq \int_0^1 (f_1 - f_2)^2(x, t) dx \quad (1.3.39)$$

elde edilir. Dolayısıyla  $t$  zamanında çözümlerin farkının boyutu başlangıç fonksiyonlarının farkının boyutu ile sınırlıdır. (1.3.39) tahmini özel olarak eğer  $f_1 = f_2$  ise o zaman  $u_1(x, t) = u_2(x, t)$  olduğunu gerektirir. Böylece her bir başlangıç fonksiyonu için (1.3.34)-(1.3.36) probleminin en fazla bir çözümü yani bir tek çözümü vardır.

Bu bölümün başında enerji argümanlarının çözümün temsiline dayanmadığını bu yüzden de enerji argümanlarının aynı zamanda lineer olmayan

problemlere de uygulanabileceği iddia edilmişti. Bunu göstermek için (1.3.34)-(1.3.36) yerine aşağıda verilen lineer olmayan problemi göz önüne alalım:

$$u_t = u_{xx} - u^3, \quad x \in (0, 1), t > 0 \quad (1.3.40)$$

$$u(0, t) = u(1, t) = 0 \quad (1.3.41)$$

$$u(x, 0) = f(x) \quad (1.3.42)$$

Bilindiği üzere denklemde görülen  $u^3$  lineer olmayan teriminden dolayı bu probleme Fourier metodunu uygulamak mümkün değildir. Buna rağmen yukarıda olduğu gibi

$$E(t) = \int_0^1 u^2(x, t) dx$$

olsun. Buradan

$$\begin{aligned} E'(t) &= 2 \int_0^1 u(x, t) u_t(x, t) dx \\ &= 2 \int_0^1 u(x, t) (u_{xx}(x, t) - u^3(x, t)) dx \\ &= -2 \int_0^1 (u_x(x, t))^2 dx - 2 \int_0^1 u^4(x, t) dx \leq 0 \end{aligned}$$

bulunur. Dolayısıyla (1.3.40)-(1.3.42) denklemleri ile verilen problem nonlineer olmasına rağmen  $u$  çözümü

$$\int_0^1 u^2(x, t) dx \leq \int_0^1 f^2(x) dx \quad t \geq 0$$

eşitsizliğini sağlar. Fakat bu enerji tahmini lineer durumlarda gözlemlediğimiz şekliyle bir kararlılık anlamına gelmez.

### ***Enerji Argümanları ile Nümerik Kararlılık***

Bir önceki kısımda ısı denkleminin çözümü için kararlılık özelliğini türetmek amacıyla enerji argümanları sunuldu. Benzer bir analiz sıklıkla sonlu fark

çözümleri içinde yapılabilir. Çözümü detaylı olarak bilmeksizin sonlu fark metodunun belirli özelliklerini türetmek mümkündür ve bunlar (1.2.1) başlangıç ve sınır değer problemine uygulanan (1.3.2) açık sonlu fark yönteminin çözümü yardımıyla verilecektir. Söz konusu problemin daha önce verilen

$$v_j^{m+1} = v_j^m + r(v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m), \quad j = 1, \dots, n, \quad m \geq 0 \quad (1.3.43)$$

$$v_0^m = v_n^m = 0, \quad m \geq 0 \quad (1.3.44)$$

açık sonlu fark şemasını tekrar göz önüne alalım. Burada  $r = \Delta t / (\Delta x)^2$  dir. Ayrıca bu kısımda (1.3.22) kararlılık şartının yani

$$1 - 2r \geq 0 \quad (1.3.45)$$

şartının geçerli olduğu kabul edilecektir. Bir önceki kısım doğrultusunda  $m \geq 0$  her bir zaman seviyesi için

$$E^m = \Delta x \sum_{j=1}^n (v_j^m)^2 \quad (1.3.46)$$

olarak verilen ayırık enerjinin skaler değişkeninin dinamikleri ile ilgilenilecektir. Daha doğrusu  $E$ 'nin zamanla azaldığı yani

$$E^{m+1} \leq E^m, \quad m \geq 0 \quad (1.3.47)$$

olduğu gösterilecektir. Bir önceki kısımda olduğu gibi enerjinin zamana göre türevini hesaplamak yerine buna karşılık gelen

$$\begin{aligned} E^{m+1} - E^m &= \Delta x \sum_{j=1}^n \left( (v_j^{m+1})^2 - (v_j^m)^2 \right) \quad (1.3.48) \\ &= \Delta x \sum_{j=1}^n (v_j^{m+1} + v_j^m) (v_j^{m+1} - v_j^m) \\ &= r \Delta x \sum_{j=1}^n (v_j^{m+1} + v_j^m) (v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m) \\ &= r \Delta x \left\{ \sum_{j=1}^n v_j^m (v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m) - 2 \sum_{j=1}^n v_j^{m+1} v_j^m \right. \\ &\quad \left. + \sum_{j=1}^n v_j^{m+1} (v_{j-1}^m + v_{j+1}^m) \right\} \end{aligned}$$

zaman farkı göz önüne alınır. Burada (1.3.43) fark şeması kullanıldı. Sağ taraftaki üç parçanın herbirinin ayrı ayrı göz önüne alınması gerekir. İlk olarak (1.3.44) sınır şartlarının ve genel olarak verilen

$$\sum_{j=0}^n (y_{j+1} - y_j) z_j = y_{n+1} z_{n+1} - y_0 z_0 - \sum_{j=0}^n (z_{j+1} - z_j) y_{j+1}$$

kısmi toplamının kullanılmasıyla (1.3.48)'nin birinci parçası

$$\sum_{j=1}^n v_j^m (v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m) = - \sum_{j=1}^n (v_{j+1}^m - v_j^m)^2$$

olarak yazılabilir. Ayrıca (1.3.43) fark şemasının ve kısmi toplamın bir defa daha uygulanmasıyla

$$\begin{aligned} -2 \sum_{j=1}^n v_j^{m+1} v_j^m &= -2 \sum_{j=1}^n \left( (v_j^m)^2 + 2r (v_{j-1}^m - 2v_j^m + v_{j+1}^m) v_j^m \right) \\ &= -2 \sum_{j=1}^n (v_j^m)^2 + 2r \sum_{j=1}^n (v_{j+1}^m - v_j^m)^2 \end{aligned}$$

elde edilir. Son olarak

$$ab \leq \frac{1}{2} (a^2 + b^2)$$

eşitsizliğini kullanarak

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n v_j^{m+1} (v_{j-1}^m + v_{j+1}^m) &\leq \sum_{j=1}^n \left( (v_j^{m+1})^2 + \frac{1}{2} \left( (v_{j-1}^m)^2 + (v_{j+1}^m)^2 \right) \right) \\ &\leq \sum_{j=1}^n \left( (v_j^{m+1})^2 + (v_j^m)^2 \right) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu üç eşitsizliğin bir araya getirilmesi ve (1.3.45) kararlılık şartının kullanılmasıyla (1.3.48) den

$$\begin{aligned} E^{m+1} - E^m &\leq r (E^{m+1} - E^m) - r (1 - 2r) \Delta x \sum_{j=1}^n (v_{j+1}^m - v_j^m)^2 \\ &\leq r (E^{m+1} - E^m) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$(1 - r) (E^{m+1} - E^m) \leq 0$$

yazılabilir. Bu son eşitsizlikten (1.3.45) şartının tekrar kullanılmasıyla (1.3.47) eşitsizliği elde edilir ve böylece ayrık enerji için istenilen şart gösterilmiş olur.

Yukarıda tartışılan durumlar aşağıda verilen teorem ve sonuçla özetlenebilir.

### **Teorem 1.3.2.**

$\{v_j^m\}$ , (1.3.43) ve (1.3.44) sonlu fark şemasının çözümü ve buna karşılık gelen  $\{E^m\}$  enerjiside (1.3.46) ile verilmiş olsun. Eğer (1.3.22) kararlılık şartı sağlanıyorsa o zaman  $\{E^m\}$  enerjisi  $m$ 'ye göre artmayandır.

Bu teoreme göre (1.3.22) veya (1.3.45) kararlılık şartı açık sonlu fark şemasının sürekli problem için verilen (1.3.38) tahminine benzer bir tahmini benimsediğini gerektirir yani kabul eder. Bu tahmin sürekli olan problemlerde olduğu gibi farklı başlangıç verileri ile verilen iki çözüm arasındaki farkı tahmin etmede de kullanılabilir. Sonlu fark şemasının iki çözümünün farkı yeni bir sonlu fark çözümü olduğundan bu sonuca varılır. Bu durum aşağıdaki sonuçla verilebilir.

### **Sonuç 1.3.1.**

(1.3.22) kararlılık şartının sağlandığı,  $\{v_j^m\}$  ve  $\{w_j^m\}$ 'nin (1.3.43)-(1.3.44) sonlu fark şemasının iki çözümü olduğu kabul edilirse tüm  $m \geq 0$  için

$$\Delta x \sum_{j=1}^n (v_j^m - w_j^m)^2 \leq \Delta x \sum_{j=1}^0 (v_j^0 - w_j^0)^2$$

dir.

Bu sonucun yorumu şudur: Başlangıç verisindeki hata karşılık gelen çözümdeki hatayı sınırlandırdığı için fark şeması kararlı bir dinamik sistemdir.

Enerji argümanları daha önceki kısımda verilen açık şemadakine benzer şekilde kapalı şema için de verilebilir.



## 2. TEST PROBLEMLER ve TAM-KLASİK SONLU FARK ŞEMALARI

Bu bölümde, tanımlanmış başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen (1.2.1) ısı iletim denklemi için aşağıdaki iki test problemin Bölüm 1’de elde edilen klasik sonlu fark yaklaşımlarının değişkenlerine ayırma tekniğiyle çözümleri verildi.

### 2.1 Problem 1

Bu problemde

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (2.1.1)$$

ısı iletim denklemi

$$u(0, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.1.2)$$

$$u(1, t) = 0, \quad t > 0$$

Dirichlet sınır şartları ve

$$u(x, 0) = \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1 \quad (2.1.3)$$

başlangıç şartı ile göz önüne alındı. Problemin tam çözümü

$$u(x, t) = e^{-\pi^2 t} \sin \pi x, \quad 0 \leq x \leq 1$$

dir [1].

#### 2.1.1 Problem 1’in Tam-Açık Sonlu Fark Çözümü

Bu kısımda Problem 1’in Bölüm 1’de

$$v_j^{m+1} = r v_{j-1}^m + (1 - 2r) v_j^m + r v_{j+1}^m, \quad r = k/h^2 \quad (2.1.4)$$

olarak verilen klasik açık sonlu fark yaklaşımının

$$v_0^m = 0 \quad (2.1.5)$$

$$v_n^m = 0$$

sınır şartları ve

$$v_j^0 = \sin \pi x_j \quad (2.1.6)$$

başlangıç şartları altında değişkenlerine ayırma yöntemi ile tam (Fourier seri) çözümü elde edilecektir.

(2.1.4) açık sonlu fark yaklaşımının değişkenlerine ayırma yöntemiyle özel çözümleri

$$w_j^m = X_j T_m, \quad j = 0, \dots, n, \quad m \geq 0 \quad (2.1.7)$$

olacak şekilde aranır. Burada  $X$ ,  $m$  den bağımsız  $n$  bileşenli bir vektör,  $\{T_m\}_{m \geq 0}$  ise bir reel sayılar dizisidir. (2.1.7) eşitliği (2.1.4) denkleminde yerine yazılırsa,

$$\frac{X_j T_{m+1} - X_j T_m}{k} = \frac{X_{j-1} T_m - 2X_j T_m + X_{j+1} T_m}{h^2}$$

elde edilir. Burada  $r = k/h^2$  dir. Sadece aşikar olmayan çözümler arandığından  $X_j T_m \neq 0$  olup yukarıdaki eşitlik

$$\frac{T_{m+1}}{T_m} = \frac{rX_{j-1} + (1 - 2r)X_j + rX_{j+1}}{X_j} = \mu$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliğin sol tarafı sadece  $m$ 'ye ve sağ tarafı sadece  $j$ 'ye bağlı olduğundan her iki ifade  $\mu$  gibi ortak bir sabite eşit olmalıdır. Böylece aşağıdaki iki fark denklemini elde edilir:

$$T_{m+1} - \mu T_m = 0, \quad m \geq 0 \quad (2.1.8)$$

$$X_{j-1} + \left(\frac{1 - 2r - \mu}{r}\right)X_j + X_{j+1} = 0, \quad j = 0, \dots, n \quad (2.1.9)$$

(2.1.5) de verilen sınır koşullarından

$$X_0 = X_n = 0 \quad (2.1.10)$$

dir. İlk olarak (2.1.8) denklemini yani

$$T_{m+1} - \mu T_m = 0, \quad m \geq 0$$

fark denklemi göz önüne alınsın. Buradan  $T_m = \lambda^m$  alınırsa  $\lambda = \mu$  bulunur.

Böylece  $T_m$  çözümü

$$T_m = (\mu)^m, \quad m \geq 0$$

olur.

Şimdi (2.1.10) sınır şartıyla verilen (2.1.9) denklemine yani

$$X_{j-1} + \left(\frac{1-2r-\mu}{r}\right)X_j + X_{j+1} = 0 = 0$$

dönelim.

$$a = (1-2r-\mu)/r \tag{2.1.11}$$

olmak üzere

$$X_{j+1} + aX_j + X_{j-1} = 0$$

denklemi 2. mertebeden homojen fark denklemi olup Kısım 1.1'den çözümü

$$X_j = \lambda^j$$

formunda aranır. Fark denklemine  $X_j = \lambda^j$  yazılırsa

$$\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0 \tag{2.1.12}$$

karakteristik denklemi bulunur.  $\Delta = a^2 - 4 < 0$  olduğundan karakteristik denklemin kökleri

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = \rho \cos \theta \pm i\rho \sin \theta$$

veya

$$\lambda_1 = \rho e^{i\theta} \text{ ve } \lambda_2 = \rho e^{-i\theta}$$

dir. O halde 2. mertebeden (2.1.12) fark denkleminin genel çözümü,  $c_1$  ve  $c_2$  iki keyfi sabit olmak üzere,

$$X_j = c_1(\rho e^{i\theta})^j + c_2(\rho e^{-i\theta})^j$$

veya gerekli işlemler ve düzenlemeler yapılırsa

$$X_j = B \cos j\theta + D \sin j\theta, \quad (B = c_1 + c_2, D = i(c_1 - c_2))$$

olarak bulunur. Sınır şartları uygulanırsa

$$X_0 = 0 \text{ dan } B = 0$$

ve

$$X_n = 0 \text{ dan } D \sin n\theta = 0$$

bulunur. Sadece aşikar olmayan çözümler arandığından  $D \sin n\theta = 0$  ise  $\sin n\theta = 0$  olmalıdır. Buradan  $n\theta = k\pi$ , ( $k = 0, 1, \dots$ ) olup  $X_j$  özel çözümü

$$X_j = \sin \frac{jk\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots$$

olarak bulunur.

(2.1.12) denkleminin köklerinin çarpımından  $\lambda_1 \lambda_2 = 1$  olup  $\rho = 1$ ; köklerin toplamından

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -a$$

olup

$$\cos \theta = -\frac{a}{2} = -\frac{1 - 2r - \mu}{2r} \quad (2.1.13)$$

dir. (2.1.11) ile verilen  $a$ 'nın değeri (2.1.13) de yerine yazılırsa

$$\mu = 1 - 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

olarak bulunur. O halde  $T_m$  özel çözümü

$$T_m = \left(1 - 4r \sin^2 \frac{k\pi}{2n}\right)^m$$

olur. Böylece  $w_j^m$  özel çözümleri

$$\begin{aligned} w_j^m &= X_j T_m \\ &= \left(1 - 4r \sin^2 \frac{k\pi}{2n}\right)^m \sin \frac{jk\pi}{n} \end{aligned} \quad (2.1.14)$$

olup

$$\begin{aligned} v_j^m &= v(x_j, t_m) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(1 - 4r \sin^2 \frac{k\pi}{2n}\right)^m \sin(k\pi x_j) \\ &= c_0 \cdot 0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(1 - 4r \sin^2 \frac{k\pi}{2n}\right)^m \sin(k\pi x_j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(1 - 4r \sin^2 \frac{k\pi}{2n}\right)^m \sin(k\pi x_j) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise Fourier sinüs serisi olup (2.1.6) başlangıç şartının yani

$$v_j^0 = f(x_j), \quad j = 0, \dots, n$$

kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \sin \pi x &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{jk\pi}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\pi x \end{aligned}$$

bulunur. Burada  $c_k$  Fourier katsayısı

$$c_k = 2 \int_0^1 \sin \pi x \sin k\pi x dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

olup dikdörtgen kuralından

$$c_k = 2h \sum_{j=0}^n \sin \pi x_j \sin k\pi x_j$$

ile hesaplanır.

## 2.1.2 Problem 1'in Tam-Kapalı Sonlu Fark Çözümü

Problem 1'in Bölüm 1'de verilen

$$-rv_{j-1}^{m+1} + (1 + 2r)v_j^{m+1} - rv_{j+1}^{m+1} = v_j^m, \quad r = k/h^2 \quad (2.1.15)$$

kapalı sonlu fark yaklaşımın verilen başlangıç ve sınır şartları altında değişkenlerine ayırma yöntemi ile tam (Fourier serisi) çözümü elde edilecektir. (2.1.15) özel çözümleri (2.1.7) ile verilen

$$w_j^m = X_j T_m, \quad j = 0, \dots, n, \quad m \geq 0$$

formunda aranır. Burada  $X$ ,  $m$  den bağımsız  $n$  bileşenli bir vektör,  $\{T_m\}_{m \geq 0}$  ise bir reel sayılar dizisidir. (2.1.7) eşitliği (2.1.15) denkleminde yerine yazılırsa

$$X_j T_m = -rX_{j-1} T_{m+1} + (1 + 2r) X_j T_{m+1} - rX_{j+1} T_{m+1}$$

elde edilir. Sadece aşık olmaya çözümler aradığından  $X_j T_m \neq 0$  olup yukarıdaki eşitlik

$$\frac{T_m}{T_{m+1}} = \frac{-rX_{j-1} + (1 + 2r)X_j - rX_{j+1}}{X_j} = \mu$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliğin sol tarafı sadece  $m$ 'ye ve sağ tarafı sadece  $j$ 'ye bağlı olduğundan her iki ifade  $\mu$  gibi ortak bir sabite eşit olmalıdır. Böylece aşağıdaki iki fark denklemi elde edilir:

$$T_m - \mu T_{m+1} = 0, \quad m \geq 0 \quad (2.1.16)$$

$$X_{j-1} + \frac{(-1 - 2r + \mu)}{r} X_j + X_{j+1} = 0, \quad j = 0, \dots, n \quad (2.1.17)$$

(2.1.5) de verilen sınır koşullarından

$$X_0 = X_n = 0 \quad (2.1.18)$$

dır. İlk olarak (2.1.16) yani

$$T_m - \mu T_{m+1} = 0$$

fark denklemini ele alalım. Burada  $T_m = \lambda^m$  alınırsa  $\lambda = \mu$  bulunur. Böylece  $T_m$  çözümü,

$$T_m = \left(\frac{1}{\mu}\right)^m$$

olarak bulunur. Şimdi de (2.1.17) fark denklemini ele alalım. Bu fark denklemini

$$a = (-1 - 2r + \mu)/r \quad (2.1.19)$$

olmak üzere

$$X_{j-1} + aX_j + X_{j+1} = 0$$

olarak yazılabilir. Açık sonlu fark çözümündekine benzer işlemler yapılırsa  $X_j$  çözümü,  $B$  ve  $D$  keyfi sabitler olmak üzere,

$$X_j = B \cos j\theta + D \sin j\theta$$

olarak bulunur. (2.1.18) sınır şartları uygulanırsa

$$X_0 = 0 \text{ dan } B = 0$$

ve

$$X_n = 0 \text{ dan } D \sin n\theta = 0$$

bulunur. Sadece aşikar olmayan çözümler arandığından  $D \sin n\theta = 0$  ise  $\sin n\theta = 0$  olmalıdır. Buradan  $n\theta = k\pi$ , ( $k = 0, 1, \dots$ ) olup  $X_j$  özel çözümü

$$X_j = \sin \frac{jk\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots$$

olarak buunur.

(2.1.12) denklemini ile verilen denklemin kökler toplamından  $\lambda_1 + \lambda_2 = -a$  ve kökler çarpımından  $\lambda_1\lambda_2 = 1$  olup

$$\cos \theta = -\frac{a}{2} = \frac{1 + 2r + \mu}{2r} \quad (2.1.20)$$

dir. Buradan (2.1.19) ile verilen  $a$ 'nın değeri (2.1.20) da yerine yazılırsa

$$\mu = 1 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

olarak bulunur. O halde,  $T_m$  özel çözümü

$$T_m = \left( \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^m$$

olur. Böylece  $w_j^m$  özel çözümleri

$$w_j^m = \left( \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^m \sin \frac{jk\pi}{n}$$

olup

$$\begin{aligned} v_j^m &= v(x_j, t_m) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left( \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^m \sin(k\pi x_j) \\ &= c_0 \cdot 0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^m \sin(k\pi x_j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^m \sin(k\pi x_j) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise Fourier sinüs serisi olup başlangıç şartının kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} v_j^0 &= \sin \pi x \\ \sin \pi x &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{jk\pi}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\pi x \end{aligned}$$

bulunur. Burada  $c_k$  Fourier katsayısı

$$c_k = 2 \int_0^1 \sin \pi x \sin k\pi x dx$$

olup dikdörtgen kuralından

$$c_k = 2h \sum_{j=0}^n \sin \pi x_j \sin k\pi x_j$$

ile hesaplanır.



### 2.1.3 Problem 1'in Tam-Crank-Nicolson Sonlu Fark Çözümü

Problem 1'in yine Bölüm 1'de verilen

$$-rv_{j-1}^{m+1} + (2 + 2r)v_j^{m+1} - rv_{j+1}^{m+1} = rv_{j-1}^m + (2 - 2r)v_j^m + rv_{j+1}^m \quad (2.1.21)$$

Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımın değişkenlerine ayırma yöntemi ile tam (Fourier serisi) çözümü elde edilecektir. Burada da verilen problemin özel çözümleri öncekilerle aynı şekilde (2.1.7) yani

$$w_j^m = X_j T_m, \quad j = 0, \dots, n, \quad m \geq 0$$

formunda aranır. (2.1.7) eşitliği (2.1.21) denkleminde kullanılırsa

$$\frac{T_{m+1}}{T_m} = \frac{rX_{j-1} + (2 - 2r)X_j + rX_{j+1}}{-rX_{j-1} + (2 + 2r)X_j - rX_{j+1}} = \mu$$

eşitliği elde edilir. Sadece aşikar olmayan çözümler arandığından  $X_j T_m \neq 0$  olmalıdır. Bu eşitliğin sol tarafı sadece  $m$ 'ye ve sağ tarafı sadece  $j$ 'ye bağlı olduğundan her iki oran  $\mu$  gibi ortak bir sabite eşit olmalıdır. Böylece aşağıdaki iki fark denklemi elde edilir:

$$T_{m+1} - \mu T_m = 0, \quad m \geq 0 \quad (2.1.22)$$

$$\frac{rX_{j-1} + (2 - 2r)X_j + rX_{j+1}}{-rX_{j-1} + (2 + 2r)X_j - rX_{j+1}} = \mu, \quad j = 0, \dots, n \quad (2.1.23)$$

(2.1.5) de verilen sınır koşullarından

$$X_0 = X_n = 0$$

dır. İlk olarak (2.1.22)

$$T_{m+1} - \mu T_m = 0$$

fark denklemi ele alınsın. Bir önceki kısımdakine benzer şekilde  $T_m = \lambda^m$  alınırsa (2.1.22)'nin  $T_m$  çözümü

$$T_m = (\mu)^m$$

olarak bulunur.

Şimdi de (2.1.23) ile verilen fark denklemini ele alalım. Bu fark denkleminde

$$a = \frac{2(1 - \mu) - 2r(1 + \mu)}{r(1 + \mu)} \quad (2.1.24)$$

olmak üzere

$$X_{j-1} + aX_j + X_{j+1} = 0$$

olarak yazılabilir. Açık sonlu fark çözümündekine benzer işlemler yani  $X_j = \lambda^j$  yapılırsa

$$\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0 \quad (2.1.25)$$

karakteristik denklemini bulunur ve  $X_j$  çözümü

$$X_j = B \cos j\theta + D \sin j\theta$$

olur.  $X_0 = X_n = 0$  sınır şartları uygulanırsa

$$X_0 = 0 \text{ dan } B = 0$$

$$X_n = 0 \text{ dan } D \sin n\theta = 0$$

bulunur. Sadece aşık olmaya çözümler arandığından  $D \sin n\theta = 0$  ise  $\sin \theta = 0$  olmalıdır. Buradan  $n\theta = k\pi$ , ( $k = 0, 1, \dots$ ) olup  $X_j$  özel çözümü

$$X_j = \sin \frac{jk\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots$$

olarak bulunur. (2.1.25) denkleminin kökler toplamından  $\lambda_1 + \lambda_2 = -a$ , kökler çarpımından  $\lambda_1\lambda_2 = 1$  olursa

$$\cos \theta = -\frac{a}{2} \quad (2.1.26)$$

dır. (2.1.24) ile verilen  $a$  'nın değeri (2.1.26) de yerine yazılırsa

$$\mu = \frac{r(1 - \cos \theta) - 1}{r(\cos \theta - 1) - 1}$$

olarak bulunur. O halde,  $T_m$  çözümleri

$$T_m = \left( \frac{r(1 - \cos \theta) - 1}{r(\cos \theta - 1) - 1} \right)^m$$

olur. Böylece  $w_j^m$  özel çözümleri

$$w_{k,j}^m = \left( \frac{r(1 - \cos \theta) - 1}{r(\cos \theta - 1) - 1} \right)^m \sin \frac{jk\pi}{n}$$

olup

$$\begin{aligned} v_j^m &= v(x_j, t_m) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left( \frac{r(1 - \cos \theta) - 1}{r(\cos \theta - 1) - 1} \right)^m \sin(k\pi x_j) \\ &= c_0 \cdot 0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \frac{r(1 - \cos \theta) - 1}{r(\cos \theta - 1) - 1} \right)^m \sin(k\pi x_j) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \frac{r(1 - \cos \theta) - 1}{r(\cos \theta - 1) - 1} \right)^m \sin(k\pi x_j) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise Fourier sinüs serisidir.  $v_j^0 = \sin \pi x$  başlangıç şartının kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} \sin \pi x &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin \frac{jk\pi}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin k\pi x \end{aligned}$$

bulunur.  $c_k$  Fourier katsayıları

$$c_k = 2 \int_0^1 \sin \pi x \sin k\pi x dx$$

olup dikdörtgen kuralından

$$c_k = 2h \sum_{j=0}^n \sin \pi x_j \sin k\pi x_j$$

ile hesaplanır.

## 2.2 Problem 2

Bu problemde ise

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (2.2.1)$$

ısı denklemi

$$u_x(0, t) = 0 \quad (2.2.2)$$

$$u_x(1, t) = 0$$

Neumann tipi sınır şartları ve

$$u(x, 0) = 9 + 3 \cos(\pi x) + 5 \cos(4\pi x) \quad (2.2.3)$$

başlangıç şartına bağlı olarak göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$u(x, t) = 9 + 3e^{-\pi^2 t} \cos(\pi x) + 5e^{-16\pi^2 t} \cos(4\pi x), \quad 0 \leq x \leq 1$$

dir [3].

### 2.2.1 Problem 2'nin Tam-Açık Sonlu Fark Çözümü

Bu kısımda Problem 2'nin çözümü yukarıda verilen Problem 1'in çözümüne benzer şekilde yapılacaktır. (2.2.1) ile verilen ısı iletim denkleminin

$$v_j^{m+1} = rv_{j-1}^m + (1 - 2r)v_j^m + rv_{j+1}^m, \quad r = k/h^2 \quad (2.2.4)$$

açık sonlu fark yaklaşımının

$$v_x(x_0, t_m) = 0 \quad (2.2.5)$$

$$v_x(x_n, t_m) = 0$$

sınır şartları ve

$$v_j^0 = 9 + 3 \cos(\pi x_j) + 5 \cos(4\pi x_j)$$

başlangıç şartları altında değişkenlerine ayırma yöntemi ile tam (Fourier seri) çözümü elde edilecektir. (2.2.4) açık sonlu fark yaklaşımının değişkenlerine ayırma yöntemiyle özel çözümleri

$$w_j^m = X_j T_m, \quad j = 0, \dots, n, \quad m \geq 0 \quad (2.2.6)$$

formunda aranır. Burada  $X$ ,  $m$  den bağımsız  $n$  bileşenli bir vektör,  $\{T_m\}_{m \geq 0}$  ise bir reel sayılar dizisidir. (2.2.6) eşitliği (2.2.4) denkleminde yerine yazılırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,

$$\frac{T_{m+1}}{T_m} = \frac{rX_{j-1} + (1 - 2r)X_j + rX_{j+1}}{X_j} = \mu$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliğin sol tarafı sadece  $m$ 'ye ve sağ tarafı sadece  $j$ 'ye bağlı olduğundan her iki ifade ( $\mu$ ) gibi ortak bir sabite eşit olmalıdır. Böylece aşağıdaki iki fark denklemi elde edilir:

$$T_{m+1} - \mu T_m = 0, \quad m \geq 0 \quad (2.2.7)$$

$$X_{j-1} + \left(\frac{1 - 2r - \mu}{r}\right)X_j + X_{j+1} = 0, \quad j = 0, \dots, n \quad (2.2.8)$$

(2.2.5) de verilen sınır koşullarından

$$X'_0 = X'_n = 0 \quad (2.2.9)$$

dır. İlk olarak (2.2.7) denklemini yani

$$T_{m+1} - \mu T_m = 0, \quad m \geq 0$$

fark denklemi göz önüne alınsın. Bu fark denkleminin çözümü problem 1'dekine benzer olarak yani  $T_m = \lambda^m$  şeklinde aranırsa  $T_m$  çözümü

$$T_m = \mu^m, \quad m \geq 0$$

olarak bulunur.

Şimdi de (2.2.9) sınır şartıyla verilen (2.2.8) fark denklemini yani

$$X_{j-1} + \left(\frac{1 - 2r - \mu}{r}\right)X_j + X_{j+1} = 0, \quad j = 0, \dots, n$$

önüne alalım. Bu denklemde

$$a = \frac{1 - 2r - \mu}{r}$$

olmak üzere,

$$X_{j+1} + aX_j + X_{j-1} = 0 \quad (2.2.10)$$

denklemi 2. mertebeden homojen fark denklemi olup çözümü

$$X_j = \lambda^j$$

formunda aranır. Fark denkleminde  $X_j = \lambda^j$  yazılırsa

$$\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0 \quad (2.2.11)$$

karakteristik denklemi bulunur.  $\Delta = a^2 - 4 < 0$  olduğundan karakteristik denklemin kökleri

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta = \rho \cos \theta \pm i\rho \sin \theta$$

veya

$$\lambda_1 = \rho e^{i\theta} \text{ ve } \lambda_2 = \rho e^{-i\theta}$$

dir. O halde 2. mertebeden (2.2.10) fark denkleminin genel çözümü,  $c_1$  ve  $c_2$  iki keyfi sabit olmak üzere,

$$X_j = c_1(\rho e^{i\theta})^j + c_2(\rho e^{-i\theta})^j$$

veya gerekli işlemler ve düzenlemeler yapılırsa

$$X_j = B \cos j\theta + D \sin j\theta, \quad (B = c_1 + c_2, D = i(c_1 - c_2))$$

olarak bulunur. Buradan

$$X'_j = -B\theta \sin j\theta + D\theta \cos j\theta$$

dir. (2.2.9) ile verilen sınır şartları uygulanırsa

$$X'_0 = 0 \text{ dan } D = 0$$

ve

$$X'_n = 0 \text{ dan } (-B \sin n\theta) = 0$$

bulunur. Sadece aşikar olmayan çözümler arandığından  $\sin n\theta = 0$  olmalıdır. Buradan  $n\theta = k\pi$ , ( $k = 0, 1, \dots$ ) olup  $X_j$  özel çözümü

$$X_j = \cos \frac{jk\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots, n$$

olarak bulunur. (2.2.11) denkleminin kökler çarpımından  $\lambda_1\lambda_2 = 1$  olup  $\rho = 1$ ; köklerin toplamından

$$\lambda_1 + \lambda_2 = -a$$

olup

$$\cos \theta = -\frac{a}{2} = -\frac{1 - 2r - \mu}{2r} \quad (2.2.12)$$

dir.  $a$ 'nın değeride (2.2.12) de yerine yazılırsa

$$\mu = 1 - 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

olarak bulunur. O halde  $T_m$  özel çözümü

$$T_m = \left(1 - 4r \sin^2 \frac{k\pi}{2n}\right)^m$$

olur. Böylece  $w_j^m$  özel çözümleri

$$\begin{aligned} w_j^m &= X_j T_m \\ &= \left(1 - 4r \sin^2 \frac{k\pi}{2n}\right)^m \cos \frac{jk\pi}{n} \end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned} v_j^m &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left(1 - 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2}\right)^m \cos k\pi x_j \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left(1 - 4 \sin^2 \frac{k\pi}{2}\right)^m \cos k\pi x_j \end{aligned}$$

bulunur. Bu ise Fourier kosinüs serisi olup,  $v_j^0 = g(x_j)$ , ( $j = 0(1)n$ ) başlangıç şartı kullanılmasıyla  $c_0$  ve  $c_k$  katsayıları sırasıyla

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^1 g(x) dx \\ &= \int_0^1 [9 + 3 \cos(\pi x) + 5 \cos(4\pi x)] dx \\ &= 9 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} c_k &= 2 \int_0^1 g(x) \cos k\pi x dx, \quad k = 1, 2, \dots \\ &= 2 \int_0^1 [9 + 3 \cos(\pi x) + 5 \cos(4\pi x)] \cos k\pi x dx \end{aligned}$$

olarak bulunur.  $c_k$  katsayısı dikdörtgen kuralından

$$c_k = 2h \sum_{j=0}^n [9 + 3 \cos(\pi x_j) + 5 \cos(4\pi x_j)] \cos k\pi x_j$$

ile hesaplanır.

## 2.2.2 Problem 2'nin Tam-Kapalı Sonlu Fark Çözümü

(2.2.1) ısı iletim denkleminin

$$-rv_{j-1}^{m+1} + (1 + 2r)v_j^{m+1} - rv_{j+1}^{m+1} = v_j^m, \quad j = 0(1)n, \quad m = 0(1)M \quad (2.2.13)$$

kapalı sonlu fark yaklaşımının (2.2.2) sınır ve (2.2.3) başlangıç şartları altında değişkenlerine ayırma yöntemi ile tam (Fourier seri) çözümü elde edilecektir. (2.2.13)'in çözümü

$$w_j^m = X_j T_m, \quad j = 1, \dots, n, \quad m \geq 0$$

formunda aranacağından yine benzer işlemler yapılırsa

$$X_j T_m = -rX_{j-1}T_{m+1} + (1 + 2r)X_j T_{m+1} - rX_{j+1}T_{m+1}$$

elde edilir. Sadece aşık olmaya çözümler aradığından  $X_j T_m \neq 0$  olup yukarıdaki eşitlik

$$\frac{T_m}{T_{m+1}} = \frac{-rX_{j-1} + (1 + 2r)X_j - rX_{j+1}}{X_j} = \mu$$

olarak yazılabilir. Bu eşitliğin sol tarafı sadece  $m$ 'ye ve sağ tarafı sadece  $j$ 'ye bağlı olduğundan her iki ifade  $\mu$  gibi ortak bir sabite eşit olmalıdır. Böylece aşağıdaki iki fark denklemini elde edilir:

$$\frac{T_m}{T_{m+1}} = \mu, \quad m \geq 0$$



$$\frac{-rX_{j-1} + (1 + 2r)X_j - rX_{j+1}}{X_j} = \mu, \quad j = 0, \dots, n \quad (2.2.14)$$

İlk olarak

$$T_m - \mu T_{m+1} = 0$$

fark denklemini ele alalım. Problem 1'e benzer işlemler yapılırsa  $T_m$  çözümü

$$T_m = \left(\frac{1}{\mu}\right)^m$$

olarak bulunur.

Şimdi de diğer fark denklemini yani (2.2.14) denklemini ele alalım. Bu denklemde

$$a = \frac{-1 - 2r + \mu}{r}$$

olmak üzere,

$$X_{j-1} + aX_j + X_{j+1} = 0$$

olarak yazılabilir. Yine benzer şekilde  $X_j = \lambda^j$  şeklinde çözüm aranır.

$$\lambda^2 + a\lambda + 1 = 0 \quad (2.2.15)$$

karakteristik denklemini bulunur. Buradan denklemin kökleri

$$\lambda_1 = \rho e^{i\theta} \text{ ve } \lambda_2 = \rho e^{-i\theta}$$

dır. Böylece fark denkleminin  $X_j$  çözümü

$$X_j = B \cos j\theta + D \sin j\theta$$

olarak bulunur. Buradan

$$X'_j = -B\theta \sin j\theta + D\theta \cos j\theta$$

olup (2.2.9) sınır şartları uygulanırsa

$$X'_0 = 0 \text{ dan } D = 0$$

ve

$$X'_n = 0 \text{ dan } -B \cos n\theta = 0$$

dir. Sadece aşikar olmayan çözümler arandığından  $-B \sin n\theta = 0$  ise  $\sin n\theta = 0$  olmalıdır. Buradan  $n\theta = k\pi$ , ( $k = 0, 1, \dots$ ) olup  $X_j$  özel çözümü

$$X_j = \cos \frac{jk\pi}{n}, \quad k = 0, 1, \dots$$

olarak buunur.

(2.2.15) denklemi ile verilen denklemin kökler toplamından  $\lambda_1 + \lambda_2 = -a$  ve kökler çarpımından  $\lambda_1\lambda_2 = 1$  olup

$$\cos \theta = -\frac{a}{2} = \frac{1 + 2r + \mu}{2r} \quad (2.2.16)$$

dir. Buradan  $a$ 'nın değeri (2.2.16) de yerine yazılırsa

$$\mu = 1 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}$$

olarak bulunur. O halde  $T_m$  özel çözümü

$$T_m = \left( \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^m$$

olur. Böylece  $w_j^m$  özel çözümleri

$$w_j^m = \left( \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^m \cos \frac{jk\pi}{n}$$

bulunur. Burada

$$\begin{aligned} v_j^m &= v(x_j, t_m) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left( \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^m \cos(k\pi x_j) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^m \cos(k\pi x_j) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \frac{1}{1 + 4r \sin^2 \frac{\theta}{2}} \right)^m \cos(k\pi x_j) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise Fourier kosinüs serisi olup  $v_j^0 = g(x_j)$  başlangıç şartının kullanılmasıyla

$$\begin{aligned} g(x_j) &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos \frac{jk\pi}{n} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} c_k \cos k\pi x_j \end{aligned}$$

olur. Burada benzer şekilde  $c_0$  katsayısıda

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^1 g(x) dx \\ &= \int_0^1 [9 + 3 \cos(\pi x) + 5 \cos(4\pi x)] dx \\ &= 9 \end{aligned}$$

dır. Fourier katsayıları  $c_k$  değeride,

$$c_k = 2 \int_0^1 [9 + 3 \cos(\pi x) + 5 \cos(4\pi x)] \cos k\pi x dx, \quad k = 1, 2, \dots$$

olup dikdörtgen kuralından

$$c_k = 2h \sum_{j=0}^n [9 + 3 \cos(\pi x_j) + 5 \cos(4\pi x_j)] \cos k\pi x_j dx$$

ile hesaplanır.

### 2.2.3 Problem 2'nin Tam-Crank-Nicolson Sonlu Fark Çözümü

(2.2.1) ile verilen ısı iletim denkleminin

$$-rv_{j-1}^{m+1} + (2 + 2r)v_j^{m+1} - rv_{j+1}^{m+1} = rv_{j-1}^m + (2 - 2r)v_j^m + r_{j+1}^m$$

Crank-Nicolson klasik sonlu fark yaklaşımının (2.2.2) sınır ve (2.2.3) başlangıç şartları altında değişkenlerine ayırma yöntemi ile tam (Fourier seri) çözümü elde edilecektir. Burada da verilen problemin özel çözümleri

$$w_j^m = X_j T_m, \quad j = 0, \dots, n, \quad m \geq 0$$

formunda aranır. Yukarıdakilerine benzer işlemler yapılırsa  $T_m$  çözümü

$$T_m = \mu^m$$

ve  $X_j$  çözümü

$$X_j = \cos \frac{jk\pi}{n}$$

olarak bulunur. Böylece  $w_j^m$  özel çözümleri

$$w_j^m = \mu^m \cos k\pi x_j$$

olup

$$\begin{aligned} v_j^m &= v(x_j, t_m) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} c_k \left( \frac{r(1 - \cos \theta) - 1}{r(\cos \theta - 1) - 1} \right)^m \cos(k\pi x_j) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \frac{r(1 - \cos \theta) - 1}{r(\cos \theta - 1) - 1} \right)^m \cos(k\pi x_j) \\ &= c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k \left( \frac{r(1 - \cos \theta) - 1}{r(\cos \theta - 1) - 1} \right)^m \cos(k\pi x_j) \end{aligned}$$

olur. Başlangıç şartının kullanılmasıyla  $c_0$  ve  $c_k$  katsayıları Fourier kosinüs serisinden

$$\begin{aligned} c_0 &= \int_0^1 g(x) dx \\ &= \int_0^1 [9 + 3 \cos(\pi x) + 5 \cos(4\pi x)] dx \\ &= 9 \end{aligned}$$

ve

$$c_k = 2 \int_0^1 [9 + 3 \cos(\pi x) + 5 \cos(4\pi x)] \cos k\pi x dx$$

olarak elde edilir.  $c_k$  katsayısı dikdörtgen kuralından

$$c_k = 2h \sum_{j=0}^n [9 + 3 \cos(\pi x_j) + 5 \cos(4\pi x_j)] \cos k\pi x_j dx$$

ile hesaplanır.

### 3. TEST PROBLEMLERİN NÜMERİK SONUÇLARI

Bu bölümde, bir önceki bölümde ele alınan problemlerin klasik sonlu fark yöntemleri ve ayırık şemaların değişkenlerine ayırma yöntemi ile nümerik çözümleri elde edildi. Bulunan sonuçlar analitik sonuçlarla karşılaştırıldı ve tablolar halinde sunuldu. Ayrıca elde edilen çözümlerinin sürekliliğini göstermek için bazı grafikler verildi.

Bunlarında ötesinde nümerik çözümlerin analitik çözümlere ne ölçüde yakın olduğunu göstermek için

$$L_2 = \left[ h \sum_{j=1}^N |u(x_j, t_m) - v_j^m|^2 \right]^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$L_\infty = \max_j |u(x_j, t_m) - v_j^m|$$

olarak tanımlanan hata normları hesaplandı.

#### 3.0.1 Problem 1'in Nümerik Sonuçları

Bu kısımda, ilk olarak Problem 1' in ASFY ve T-ASFY yöntemleri kullanılarak elde edilen nümerik şemaların farklı konum ve zaman adımlarında hesaplanan noktasal değerleri problemin analitik sonuçlarıyla karşılaştırıldı ve  $L_2$  ,  $L_\infty$  hata normaları ile birlikte Tablo 3.1-3.4 de sunuldu.

Problem 1'in  $k = 0.00001$  ve  $h$  konum adım uzunluğunun  $0.1, 0.05, 0.025$  ve  $0.0125$  değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında ASFY ve T-ASFY ile elde edilen noktasal değerleri ve hata normları sırasıyla Tablo 3.1 ve 3.2 de verildi. Tablo 3.1 ve 3.2'den elde edilen nümerik sonuçların tam çözümle iyi uyum içinde olduğu  $h$  konum adım uzunluğu küçüldükçe tam çözüme yaklaştığı ve hata normlarının

kayda değer ölçüde küçüldüğü açıktır. Tablo 3.1 ve 3.2 kendi içinde karşılaştırıldığında ise Tablo 3.1 de sunulan ASFY ile elde edilen sonuçların Tablo 3.2 de sunulan T-ASFY ile elde edilen sonuçlara göre daha iyi olduğu noktasal değerlerden ve hata normlarından görölmektedir. Tablolardan T-ASFY ile elde edilen hata normlarının bütün  $h$  değerleri için ASFY ile elde edilen hata normlarıyla iyi uyum içinde olduğu açıktır.

Tablo 3.1: Açık Sonlu Fark Yöntemi:  $k = 0.00001$  ve  $h$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri

$t$		Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
0.1	$x$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.1161031170	0.1154012357	0.1152258896	0.1151820609	0.1151730561
	0.2	0.2208412519	0.2195061943	0.2191726662	0.2190892992	0.2190721707
	0.3	0.3039619062	0.3021243572	0.3016652951	0.3015505502	0.3015269742
	0.4	0.3573286512	0.3551684828	0.3546288230	0.3544939323	0.3544662158
	0.5	0.3757175781	0.3734462427	0.3728788108	0.3727369783	0.3727078334
	0.6	0.3573286507	0.3551684824	0.3546288226	0.3544939318	0.3544662104
	0.7	0.3039619054	0.3021243564	0.3016652944	0.3015505495	0.3015269640
	0.8	0.2208412510	0.2195061936	0.2191726655	0.2190892984	0.2190721566
	0.9	0.1161031165	0.1154012352	0.1152258891	0.1151820605	0.1151730395
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$L_2 \times 10^3$	2.1282128443	0.5221361767	0.1209012450	0.0206105076	
	$L_\infty \times 10^3$	3.0097447634	0.7384093047	0.1709774092	0.0291448836	
$t$	$x$					
0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.0023136089	0.0022445167	0.0022275164	0.0022232832	0.0022224142
	0.2	0.0044007457	0.0042693245	0.0042369879	0.0042289359	0.0042272830
	0.3	0.0060571068	0.0058762211	0.0058317135	0.0058206309	0.0058183559
	0.4	0.0071205560	0.0069079122	0.0068555904	0.0068425620	0.0068398876
	0.5	0.0074869957	0.0072634087	0.0072083943	0.0071946954	0.0071918834
	0.6	0.0071205560	0.0069079122	0.0068555904	0.0068425620	0.0068398875
	0.7	0.0060571068	0.0058762211	0.0058317135	0.0058206309	0.0058183557
	0.8	0.0044007457	0.0042693245	0.0042369879	0.0042289359	0.0042272828
	0.9	0.0023136089	0.0022445167	0.0022275164	0.0022232832	0.0022224139
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$L_2 \times 10^3$	0.2086759770	0.0505761208	0.0116750679	0.0019884699	
	$L_\infty \times 10^3$	0.2951123428	0.0715253822	0.0165109858	0.0028120675	

Tablo 3.2: Tam-Açık Sonlu Fark Yöntemi:  $k = 0.00001$  ve  $h$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri

$t$	$x$	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.1161031176	0.1154012363	0.1152258902	0.1151820616	0.1151730561
	0.2	0.2208412530	0.2195061956	0.2191726675	0.2190893004	0.2190721707
	0.3	0.3039619080	0.3021243590	0.3016652970	0.3015505521	0.3015269742
	0.4	0.3573286535	0.3551684852	0.3546288254	0.3544939347	0.3544662158
	0.5	0.3757175808	0.3734462454	0.3728788136	0.3727369810	0.3727078334
	0.6	0.3573286535	0.3551684852	0.3546288254	0.3544939347	0.3544662104
	0.7	0.3039619080	0.3021243590	0.3016652970	0.3015505521	0.3015269640
	0.8	0.2208412530	0.2195061956	0.2191726675	0.2190893004	0.2190721566
	0.9	0.1161031176	0.1154012363	0.1152258902	0.1151820616	0.1151730395
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$L_2 \times 10^3$	2.1282147580	0.5221381279	0.1209032054	0.0206124705	
	$L_\infty \times 10^3$	3.0097474671	0.7384120623	0.1709801801	0.0291476579	
$t$	$x$					
0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.0023136089	0.0022445168	0.0022275164	0.0022232832	0.002224142
	0.2	0.0044007457	0.0042693246	0.0042369879	0.0042289359	0.0042272830
	0.3	0.0060571068	0.0058762211	0.0058317136	0.0058206309	0.0058183559
	0.4	0.0071205561	0.0069079123	0.0068555905	0.0068425620	0.0068398876
	0.5	0.0074869958	0.0072634088	0.0072083944	0.0071946955	0.0071918834
	0.6	0.0071205561	0.0069079123	0.0068555905	0.0068425620	0.0068398875
	0.7	0.0060571068	0.0058762211	0.0058317136	0.0058206309	0.0058183557
	0.8	0.0044007457	0.0042693246	0.0042369879	0.0042289359	0.0042272828
	0.9	0.0023136089	0.0022445168	0.0022275164	0.0022232832	0.002224139
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$L_2 \times 10^3$	0.2086760151	0.0505761587	0.0116751058	0.0019885078	
	$L_\infty \times 10^3$	0.2951123967	0.0715254359	0.0165110394	0.0028121211	

Tablo 3.3 ve 3.4 de, Problem 1' in  $h = 0.05$  ve  $k$  zaman adım uzunluğunun 0.001 ile 0.0005 ve  $h = 0.0125$  ile  $k$  zaman adım uzunluğunun 0.00005 ve 0.00001 değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanında ASFY ve T-ASFY ile elde edilen noktasal değerleri ve hata normları sunuldu. Tablo 3.3 incelendiğinde beklendiği gibi  $k$  zaman adım uzunluğunu küçüldükçe hata normlarında iyileşme görülmektedir.

Tablo 3.4 den  $k$  zaman adım uzunluğunun verilen bütün değerleri için nümerik sonuçların elde edildiği görülmektedir. Tablodan  $k$  zaman adım uzunluğunun küçülmesi ile hata normlarında oldukça azalma olduğu açıktır.





Tablo 3.3: Açık Sonlu Fark Yöntemi:  $h = 0.05$  ve  $h = 0.0125$  değerleri için  $k$ 'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri

		Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$h = 0.05$	$h = 0.0125$			
$t$	$x$	$k = 0.001$	$k = 0.0005$	$k = 0.00005$	$k = 0.00001$	
0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.1148447193	0.1151263562	0.1151596205	0.1151820609	0.1151730561
	0.2	0.2184476372	0.2189833425	0.2190466149	0.2190892992	0.2190721707
	0.3	0.3006673783	0.3014047133	0.3014918003	0.3015505502	0.3015269742
	0.4	0.3534557014	0.3543224908	0.3544248676	0.3544939323	0.3544662158
	0.5	0.3716453178	0.3725567140	0.3726643594	0.3727369783	0.3727078334
	0.6	0.3534557010	0.3543224903	0.3544248672	0.3544939318	0.3544662104
	0.7	0.3006673776	0.3014047126	0.3014917996	0.3015505495	0.3015269640
	0.8	0.2184476365	0.2189833418	0.2190466141	0.2190892984	0.2190721566
	0.9	0.1148447189	0.1151263558	0.1151596200	0.1151820605	0.1151730395
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$		0.7513100367	0.1068555946	0.0307387856	0.0206105076	
$L_\infty \times 10^3$		1.0625155883	0.1511193823	0.0434739800	0.0291448836	
$t$	$x$					
0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.0021909159	0.0022179122	0.0022211182	0.0022232832	0.0022224142
	0.2	0.0041673697	0.0042187197	0.0042248179	0.0042289359	0.0042272830
	0.3	0.0057358923	0.0058065695	0.0058149630	0.0058206309	0.0058183559
	0.4	0.0067429458	0.0068260318	0.0068358990	0.0068425620	0.0068398876
	0.5	0.0070899528	0.0071773146	0.0071876896	0.0071946954	0.0071918834
	0.6	0.0067429458	0.0068260318	0.0068358990	0.0068425620	0.0068398875
	0.7	0.0057358923	0.0058065695	0.0058149630	0.0058206309	0.0058183557
	0.8	0.0041673697	0.0042187197	0.0042248179	0.0042289359	0.0042272828
	0.9	0.0021909159	0.0022179122	0.0022211182	0.0022232832	0.0022224139
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$		0.0720757826	0.0103016062	0.0029654066	0.0019884699	
$L_\infty \times 10^3$		0.1019306017	0.0145687242	0.0041937717	0.0028120675	

Tablo 3.4: Tam-Açık Sonlu Fark Yöntemi:  $h = 0.05$  ve  $h = 0.0125$  değerleri ile  $k$ 'nin farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri

		Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$h = 0.05$		$h = 0.0125$		
$t$	$x$	$k = 0.001$	$k = 0.0005$	$k = 0.00005$	$k = 0.00001$	
0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.1148447199	0.1151263568	0.1151596211	0.1151820616	0.1151730561
	0.2	0.2184476385	0.2189833437	0.2190466161	0.2190893004	0.2190721707
	0.3	0.3006673802	0.3014047152	0.3014918022	0.3015505521	0.3015269742
	0.4	0.3534557038	0.3543224931	0.3544248700	0.3544939347	0.3544662158
	0.5	0.3716453205	0.3725567167	0.3726643622	0.3727369810	0.3727078334
	0.6	0.3534557038	0.3543224931	0.3544248700	0.3544939347	0.3544662104
	0.7	0.3006673802	0.3014047152	0.3014918022	0.3015505521	0.3015269640
	0.8	0.2184476385	0.2189833437	0.2190466161	0.2190893004	0.2190721566
	0.9	0.1148447199	0.1151263558	0.1151596211	0.1151820616	0.1151730395
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$		0.7513080948	0.1068536481	0.0307368233	0.0206124705	
$L_\infty \times 10^3$		1.0625128433	0.1511166308	0.0434712063	0.0291476579	
$t$	$x$					
0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.0021909159	0.0022179122	0.0022211182	0.0022232832	0.002224142
	0.2	0.0041673697	0.0042187197	0.0042248180	0.0042289359	0.0042272830
	0.3	0.0057358923	0.0058065696	0.0058149631	0.0058206309	0.0058183559
	0.4	0.0067429458	0.0068260319	0.0068358991	0.0068425620	0.0068398876
	0.5	0.0070899528	0.0071773147	0.0071876896	0.0071946955	0.0071918834
	0.6	0.0067429458	0.0068260319	0.0068358991	0.0068425620	0.0068398875
	0.7	0.0057358923	0.0058065696	0.0058149631	0.0058206309	0.0058183557
	0.8	0.0041673697	0.0042187197	0.0042248180	0.0042289359	0.0042272828
	0.9	0.0021909159	0.0022179122	0.0022211182	0.0022232832	0.002224139
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$		0.0720757456	0.0103015687	0.0029653687	0.0019885078	
$L_\infty \times 10^3$		0.1019305493	0.0145686711	0.0041937182	0.0028121211	

İkinci olarak Problem 1'in KSFY ve T-KSFY yöntemleriyle yine farklı konum ve zaman adımlarında elde edilen noktasal değerleri ile birlikte  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normaları Tablo 3.5-3.8 de sunuldu.

Tablo 3.5 ve 3.6 da Problem 1' in  $h$  konum adım uzunluğunun küçülmesi durumunda nümerik sonuçların nasıl bir davranış sergilediğini görmek amacıyla

$k = 0.00001$  ve  $h$  konum adım uzunluğunun  $0.1, 0.05, 0.025$  ve  $0.0125$  değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında sırasıyla KSFY ve T-KSFY ile elde edilen noktasal değerleri ve hata normları verildi. Tablo 3.5 ve 3.6 'ya bakıldığında hem KSFY hem de T-KSFY ile edilen sonuçların birbiriyle iyi uyum içinde oldukları  $h$  konum adım uzunluğu küçüldükçe tam çözüme yaklaştığı ve hata normlarının oldukça küçüldüğü açıkça görülmektedir. Tablo 3.5 ve 3.6 da sunulan sonuçlar kendi içinde karşılaştırıldığında ise Tablo 3.5 de sunulan KSFY ile elde edilen sonuçların Tablo 3.6 da sunulan T-KSFY ile elde edilen sonuçlara göre daha iyi olduğu noktasal değerlerden ve  $L_2$  ile  $L_\infty$  hata normlarından da görülmektedir. Her iki tablodan, KSFY ile elde edilen hata normlarının bütün  $h$  değerleri için T-KSFY ile elde edilen hata normlarından daha küçük olduğu açıktır.

Tablo 3.5: Kapalı Sonlu Fark Yöntemi:  $k = 0.00001$  ve  $h$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri

		Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
$t$	$x$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.1134172211	0.1150723771	0.1151945033	0.1151879506	0.1151730561
	0.2	0.2158733473	0.2188974556	0.2191150393	0.2191007603	0.2190721707
	0.3	0.2974228844	0.3013221832	0.3015903885	0.3015668748	0.3015269742
	0.4	0.3500769567	0.3542777067	0.3545472266	0.3545139285	0.3544662158
	0.5	0.3685905078	0.3725696602	0.3728004498	0.3727589307	0.3727078334
	0.6	0.3510142747	0.3543910532	0.3545612710	0.3545156798	0.3544662104
	0.7	0.2989396091	0.3015055858	0.3016131131	0.3015697084	0.3015269640
	0.8	0.2173902110	0.2190808633	0.2191377645	0.2191035940	0.2190721566
	0.9	0.1143547638	0.1151857318	0.1152085484	0.1151897019	0.1151730395
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$		2.9746550845	0.1198211302	0.0659418141	0.0361372588	
$L_\infty \times 10^3$		4.3892590563	0.2047910024	0.0954553826	0.0511750674	
$t$	$x$					
0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.0022705103	0.0022401103	0.0022279145	0.0022242803	0.002224142
	0.2	0.0043187673	0.0042609430	0.0042377451	0.0042308325	0.0042272830
	0.3	0.0059442733	0.0058646849	0.0058327558	0.0058232413	0.0058183559
	0.4	0.0069879125	0.0068943506	0.0068568157	0.0068456308	0.0068398876
	0.5	0.0073475261	0.0072491492	0.0072096826	0.0071979221	0.0071918834
	0.6	0.0069879127	0.0068943506	0.0068568157	0.0068456308	0.0068398875
	0.7	0.0059442737	0.0058646849	0.0058327558	0.0058232413	0.0058183557
	0.8	0.0043187677	0.0042609430	0.0042377451	0.0042308325	0.0042272828
	0.9	0.0022705105	0.0022401103	0.0022279145	0.0022242803	0.002224139
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$		0.1100560812	0.0404931266	0.0125860327	0.0042701092	
$L_\infty \times 10^3$		0.1556427498	0.0572658752	0.0177992845	0.0060387927	

Tablo 3.6: Tam-Kapalı Sonlu Fark Yöntemi:  $k = 0.00001$  ve  $h$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri

		Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
$t$	$x$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.1161142429	0.1154124319	0.1152371033	0.1151932790	0.1151730561
	0.2	0.2208624148	0.2195274908	0.2191939960	0.2191106373	0.2190721707
	0.3	0.3039910346	0.3021536693	0.3016946532	0.3015799197	0.3015269742
	0.4	0.3573628939	0.3552029415	0.3546633357	0.3545284584	0.3544662158
	0.5	0.3757535833	0.3734824749	0.3729150998	0.3727732814	0.3727078334
	0.6	0.3573628939	0.3552029415	0.3546633357	0.3545284584	0.3544662104
	0.7	0.3039910346	0.3021536693	0.3016946532	0.3015799197	0.3015269640
	0.8	0.2208624148	0.2195274908	0.2191949960	0.2191106373	0.2190721566
	0.9	0.1161142429	0.1154124319	0.1152371033	0.1151932790	0.1151730395
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$		2.1536723331	0.5477562494	0.1465614405	0.0462807313	
$L_\infty \times 10^3$		3.0457499147	0.7746415569	0.2072664040	0.0654480611	
$t$	$x$					
0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.0023147176	0.0022456057	0.0022286004	0.0022243660	0.002224142
	0.2	0.0044028546	0.0042713959	0.0042390499	0.0042309956	0.0042272830
	0.3	0.0060600094	0.0058790721	0.0058345516	0.0058234658	0.0058183559
	0.4	0.0071239683	0.0069112637	0.0068589268	0.0068458946	0.0068398876
	0.5	0.0074905836	0.0072669327	0.0072119025	0.0071981996	0.0071918834
	0.6	0.0071239683	0.0069112637	0.0068589268	0.0068458946	0.0068398875
	0.7	0.0060600094	0.0058790721	0.0058345516	0.0058234658	0.0058183557
	0.8	0.0044028546	0.0042713959	0.0042390499	0.0042309956	0.0042272828
	0.9	0.0023147176	0.0022456057	0.0022286004	0.0022243660	0.002224139
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$		0.2112129910	0.0530679631	0.0141556796	0.0044662777	
$L_\infty \times 10^3$		0.2987002223	0.0750493794	0.0200191004	0.0063162169	

Problem 1'in  $h = 0.025$  ve  $k$  zaman adım uzunluğunun 0.01, 0.001, 0.0001 ve 0.00005 değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında KSFY ve T-KSFY yöntemleri ile elde edilen nümerik sonuçlar sırasıyla Tablo 3.7 ve 3.8 de sunuldu. Tablo 3.7 incelendiğinde görüldüğü gibi  $k$  zaman adım uzunluğu küçüldükçe nümerik sonuçların tam çözüme yaklaştığı ve  $L_2, L_\infty$  hata normlarının büyük ölçüde küçüldüğü görülmektedir. Benzer durum Tablo 3.8 de sunulan sonuçlar için de

söylenebilir. Her iki yöntemin birbirlerine göre üstünlükleri incelendiğinde Tablo 3.8 de verilen T-KSFY ile elde edilen sonuçların Tablo 3.7 de verilen KSFY ile elde edilen sonuçlara birbirleri ile iyi uyum içinde olduğu açıktır.

Tablo 3.7: Kapalı Sonlu Fark Yöntemi:  $h = 0.025$  ve  $k$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri

$t$	$x$	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$k = 0.01$	$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00005$	
0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.1205650957	0.1157464664	0.1152448707	0.1152168935	0.1151730561
	0.2	0.2293332266	0.2201651255	0.2192108605	0.2191576354	0.2190721707
	0.3	0.3156598031	0.3030360996	0.3017223096	0.3016490323	0.3015269742
	0.4	0.3710936610	0.3562473102	0.3547023579	0.3546161882	0.3544662158
	0.5	0.3902051726	0.3745886194	0.3729636179	0.3728729840	0.3727078334
	0.6	0.3711195155	0.3562624455	0.3547165004	0.3546302761	0.3544662104
	0.7	0.3157018206	0.3030605901	0.3017451930	0.3016718274	0.3015269640
	0.8	0.2293754742	0.2201896173	0.2192337444	0.2191804310	0.2190721566
	0.9	0.1205913227	0.1157616039	0.1152590140	0.1152309822	0.1151730395
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$L_2 \times 10^3$	12.3713554161	1.3298143035	0.1809719538	0.1169933429	
	$L_\infty \times 10^3$	17.4973392404	1.8807860591	0.2568753627	0.1668090236	
$t$	$x$					
0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.0027988089	0.0022818597	0.0022327942	0.0022300826	0.0022224142
	0.2	0.0053236510	0.0043403550	0.0042470269	0.0042418692	0.0042272830
	0.3	0.0073273770	0.0059739861	0.0058455311	0.0058384321	0.0058183559
	0.4	0.0086138483	0.0070228419	0.0068718339	0.0068634886	0.0068398876
	0.5	0.0090571361	0.0073842530	0.0072254738	0.0072166990	0.0071918834
	0.6	0.0086138483	0.0070228419	0.0068718339	0.0068634886	0.0068398875
	0.7	0.0073273770	0.0059739862	0.0058455311	0.0058384321	0.0058183557
	0.8	0.0053236510	0.0043403550	0.0042470269	0.0042418692	0.0042272828
	0.9	0.0027988090	0.0022818597	0.0022327942	0.0022300826	0.0022224139
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$L_2 \times 10^3$	1.3189328923	0.1360259045	0.0237520354	0.0175473155	
	$L_\infty \times 10^3$	1.8652527168	0.1923696241	0.0335903969	0.0248155980	

Tablo 3.8: Tam-Kapalı Sonlu Fark Yöntemi:  $h = 0.025$  ve  $k$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri

$t$	$x$	Nümerik Çözüm				Tam çözüm
		$k = 0.01$	$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00005$	
0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.1206166554	0.1157898301	0.1152875391	0.1152595238	0.1151730561
	0.2	0.2294265122	0.2202453449	0.2192899306	0.2192366424	0.2190721707
	0.3	0.3157785035	0.3031417107	0.3018266958	0.3017533509	0.3015269742
	0.4	0.3712198947	0.3563644539	0.3548185610	0.3547323390	0.3544662158
	0.5	0.3903236962	0.3747037613	0.3730783134	0.3729876542	0.3727078334
	0.6	0.3712198947	0.3563644539	0.3548185610	0.3547323390	0.3544662104
	0.7	0.3157785035	0.3031417107	0.3018266958	0.3017533509	0.3015269640
	0.8	0.2294265122	0.2202453449	0.2192899306	0.2192366424	0.2190721566
	0.9	0.1206166554	0.1157898301	0.1152875391	0.1152595238	0.1151730395
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$L_2 \times 10^3$	12.4562981090	1.4113361341	0.2619708954	0.1978651548	
	$L_\infty \times 10^3$	17.6158628202	1.9959279158	0.3704800191	0.2798208120	
$t$	$x$					
0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.0027996707	0.0022825622	0.0022334816	0.0022307692	0.0022224142
	0.2	0.0053252901	0.0043416914	0.0042483345	0.0042431753	0.0042272830
	0.3	0.0073296331	0.0059758255	0.0058473309	0.0058402297	0.0058183559
	0.4	0.0086165004	0.0070250042	0.0068739497	0.0068656018	0.0068398876
	0.5	0.0090599247	0.0073865265	0.0072276984	0.0072189209	0.0071918834
	0.6	0.0086165004	0.0070250042	0.0068739497	0.0068656018	0.0068398875
	0.7	0.0073296331	0.0059758255	0.0058473309	0.0058402297	0.0058183557
	0.8	0.0053252901	0.0043416914	0.0042483345	0.0042431753	0.0042272828
	0.9	0.0027996707	0.0022825622	0.0022334816	0.0022307692	0.0022224139
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$L_2 \times 10^3$	1.3209047551	0.1376335577	0.0253251202	0.0191184899	
	$L_\infty \times 10^3$	1.8680413519	0.1946431891	0.0358150747	0.0270375741	

Son olarak, Problem 1'in CNSFY ve T-CNSFY yöntemleri için farklı konum ve zaman adımlarındaki noktasal değerleri,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normaları Tablo 3.9-3.12 de sunuldu.

Problem 1'in  $k = 0.00001$  ve  $h$  konum adım uzunluğunun 0.1, 0.05, 0.025 ve 0.0125 değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında CNSFY ve T-CNSFY ile elde edilen noktasal değerleri ve hata normları sırasıyla Tablo 3.9 ve 3.10 da verildi. Tablo 3.9 ve 3.10 incelendiğinde beklendiği gibi her iki yöntemle de elde edilen sonuçların  $h$  konum adım uzunluğu küçüldükçe tam çözüme yaklaştığı ve hata normlarının kayda değer ölçüde küçüldüğü açıktır. Tablo 3.9 ve 3.10 kendi içinde karşılaştırıldığında ise Tablo 3.9 da sunulan CNSFY ile elde edilen sonuçların Tablo 3.10 da sunulan T-CNSFY ile elde edilen sonuçlara göre daha iyi olduğu noktasal değerlerden ve hata normlarından görülmektedir. Tablolardan, T-CNSFY ile elde edilen hata normlarının bütün  $h$  değerleri için CNSFY ile elde edilen hata normlarıyla da iyi uyum içindedir.



Tablo 3.9: Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi:  $k = 0.00001$  ve  $h$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri

$t$	$x$	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.1161086798	0.1154068336	0.1152314963	0.1151876698	0.1151730561
	0.2	0.2208518330	0.2195168422	0.2191833308	0.2190999679	0.2190721707
	0.3	0.3039764699	0.3021390127	0.3016799736	0.3015652344	0.3015269742
	0.4	0.3573457718	0.3551857114	0.3546460786	0.3545111946	0.3544662158
	0.5	0.3757355798	0.3734643579	0.3728969543	0.3727551289	0.3727078334
	0.6	0.3573457713	0.3551857109	0.3546460781	0.3545111941	0.3544662104
	0.7	0.3039764690	0.3021390119	0.3016799728	0.3015652337	0.3015269640
	0.8	0.2208518322	0.2195168414	0.2191833300	0.2190999671	0.2190721566
	0.9	0.1161086793	0.1154068331	0.1152314958	0.1151876693	0.1151730395
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$L_2 \times 10^3$	2.1409419500	0.5349455576	0.1337306835	0.0334449583	
	$L_\infty \times 10^3$	3.0277464372	0.7565245048	0.1891209750	0.0472955383	
$t$	$x$					
0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.0023141632	0.0022450612	0.0022280583	0.0022238245	0.002224142
	0.2	0.0044018000	0.0042703601	0.0042380188	0.0042299656	0.0042272830
	0.3	0.0060585580	0.0058776465	0.0058331325	0.0058220482	0.0058183559
	0.4	0.0071222620	0.0069095878	0.0068572585	0.0068442281	0.0068398876
	0.5	0.0074887895	0.0072651706	0.0072101482	0.0071964473	0.0071918834
	0.6	0.0071222620	0.0069095878	0.0068572585	0.0068442281	0.0068398875
	0.7	0.0060585580	0.0058776465	0.0058331325	0.0058220482	0.0058183557
	0.8	0.0044018000	0.0042703601	0.0042380188	0.0042299656	0.0042272828
	0.9	0.0023141632	0.0022450612	0.0022280583	0.0022238245	0.002224139
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	$L_2 \times 10^3$	0.2099443751	0.0518219332	0.0129152651	0.0032272651	
	$L_\infty \times 10^3$	0.2969061286	0.0732872271	0.0182648895	0.0045639885	

Tablo 3.10: Tam-Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi:  $k = 0.00001$  ve  $h$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri

		Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
$t$	$x$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.1161086804	0.1154068342	0.1152314969	0.1151876704	0.1151730561
	0.2	0.2208518342	0.2195168434	0.2191833320	0.2190999691	0.2190721707
	0.3	0.3039764716	0.3021390145	0.3016799755	0.3015652363	0.3015269742
	0.4	0.3573457742	0.3551857138	0.3546460810	0.3545111970	0.3544662158
	0.5	0.3757355825	0.3734643606	0.3728969571	0.3727551317	0.3727078334
	0.6	0.3573457742	0.3551857138	0.3546460810	0.3545111970	0.3544662104
	0.7	0.3039764716	0.3021390145	0.3016799755	0.3015652363	0.3015269640
	0.8	0.2208518342	0.2195168434	0.2191833320	0.2190999691	0.2190721566
	0.9	0.1161086804	0.1154068342	0.1152314969	0.1151876704	0.1151730395
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$		2.1409438637	0.5349475085	0.1337326439	0.0334469213	
$L_\infty \times 10^3$		3.0277491408	0.7565272620	0.1891237459	0.0472983127	
$t$	$x$					
0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.0023141632	0.0022450612	0.0022280584	0.0022238245	0.0022224142
	0.2	0.0044018000	0.0042703602	0.0042380188	0.0042299656	0.0042272830
	0.3	0.0060585580	0.0058776465	0.0058331325	0.0058220482	0.0058183559
	0.4	0.0071222621	0.0069095879	0.0068572585	0.0068448282	0.0068398876
	0.5	0.0074887895	0.0072651706	0.0072101483	0.0071964474	0.0071918834
	0.6	0.0071222621	0.0069095879	0.0068572585	0.0068448282	0.0068398875
	0.7	0.0060585580	0.0058776465	0.0058331325	0.0058220482	0.0058183557
	0.8	0.0044018000	0.0042703602	0.0042380188	0.0042299656	0.0042272828
	0.9	0.0023141632	0.0022450612	0.0022280584	0.0022238245	0.0022224139
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$L_2 \times 10^3$		0.2099444132	0.0518219711	0.0129153030	0.0032273030	
$L_\infty \times 10^3$		0.2969061825	0.0732872807	0.0182649431	0.0045640421	

Tablo 3.11 ve 3.12' de, Problem 1' in  $h = 0.025$  ve  $k$  zaman adım uzunluğunun  $0.01, 0.001, 0.0001$  ve  $0.00005$  değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında CNSFY ve T-CNSFY ile elde edilen noktasal değerleri sunuldu. Tablolara bakıldığında her iki yöntemle elde edilen nümerik sonuçların kendi aralarında iyi uyum içinde olduğu gibi analitik sonuçlara oldukça yakın olduğu açıkça görülmektedir. Tablo 3.11 ve 3.12 incelendiğinde  $k$  zaman adım uzunluğu

küçüldükçe noktasal değerler analitik çözümden uzaklaşmaktadır.

Tablo 3.11: Crank Nicolson Sonlu Fark Yöntemi:  $h = 0.025$  ve  $k$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri

$t$	$x$	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$k = 0.01$	$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00005$	
0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.1151392219	0.1152305663	0.1152314871	0.1152314941	0.1151730561
	0.2	0.2190078145	0.2191815619	0.2191833134	0.2191833265	0.2190721707
	0.3	0.3014383961	0.3016775389	0.3016799497	0.3016799678	0.3015269742
	0.4	0.3543620872	0.3546432165	0.3546460505	0.3546460718	0.3544662158
	0.5	0.3725983482	0.3728939450	0.3728969248	0.3728969472	0.3727078334
	0.6	0.3543620868	0.3546432160	0.3546460500	0.3546460713	0.3544662104
	0.7	0.3014383954	0.3016775382	0.3016799490	0.3016799671	0.3015269640
	0.8	0.2190078138	0.2191815611	0.2191833127	0.2191833258	0.2190721566
	0.9	0.1151392216	0.1152305659	0.1152314867	0.1152314936	0.1151730395
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.0022191518	0.0022279684	0.0022280575	0.0022280581	0.0022224142
	0.2	0.0042210775	0.0042378478	0.0042380171	0.0042380184	0.0042272830
	0.3	0.0058098147	0.0058328971	0.0058331302	0.0058331319	0.0058183559
	0.4	0.0068298468	0.0068569818	0.0068572558	0.0068572578	0.0068398876
	0.5	0.0071813260	0.0072098573	0.0072101454	0.0072101476	0.0071918834
	0.6	0.0068298468	0.0068569818	0.0068572558	0.0068572578	0.0068398875
	0.7	0.0058098147	0.0058328971	0.0058331302	0.0058331319	0.0058183557
	0.8	0.0042210775	0.0042378478	0.0042380171	0.0042380184	0.0042272828
	0.9	0.0022191518	0.0022279684	0.0022280575	0.0022280581	0.0022224139
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

Tablo 3.12: Tam-Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi:  $h = 0.025$  ve  $k$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 1'in nümerik ve tam çözümleri

$t$	$x$	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$k = 0.01$	$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00005$	
0.1	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.1151392225	0.1152305669	0.1152314878	0.1152314947	0.1151730561
	0.2	0.2190078157	0.2191815631	0.2191833147	0.2191833278	0.2190721707
	0.3	0.3014383980	0.3016775408	0.3016799516	0.3016799697	0.3015269742
	0.4	0.3543620897	0.3546432189	0.3546460529	0.3546460742	0.3544662158
	0.5	0.3725983510	0.3728939477	0.3728969276	0.3728969500	0.3727078334
	0.6	0.3543620897	0.3546432189	0.3546460529	0.3546460742	0.3544662104
	0.7	0.3014383980	0.3016775408	0.3016799516	0.3016799697	0.3015269640
	0.8	0.2190078157	0.2191815631	0.2191833147	0.2191833278	0.2190721566
	0.9	0.1151392225	0.1152305669	0.1152314878	0.1152314947	0.1151730395
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
$t$	$x$					
0.5	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0
	0.1	0.0022191518	0.0022279685	0.0022280575	0.0022280581	0.002224142
	0.2	0.0042210775	0.0042378478	0.0042380172	0.0042380184	0.0042272830
	0.3	0.0058098148	0.0058328971	0.0058331302	0.0058331319	0.0058183559
	0.4	0.0068298469	0.0068569818	0.0068572558	0.0068572579	0.0068398876
	0.5	0.0071813260	0.0072098574	0.0072101454	0.0072101476	0.0071918834
	0.6	0.0068298469	0.0068569818	0.0068572558	0.0068572579	0.0068398875
	0.7	0.0058098148	0.0058328971	0.0058331302	0.0058331319	0.0058183557
	0.8	0.0042210775	0.0042378478	0.0042380172	0.0042380184	0.0042272828
	0.9	0.0022191518	0.0022279685	0.0022280575	0.0022280581	0.002224139
	1.0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0

### 3.0.2 Problem 2'nin Nümerik Sonuçları

Burada, ilk olarak Problem 2'nin ASFY ve T-ASFY yöntemleriyle farklı konum ve zaman adımlarında elde edilen noktasal değerleri problemin analitik sonuçlarıyla karşılaştırıldı ve  $L_2$  ile  $L_\infty$  hata normaları Tablo 3.13-3.16 da verildi.

Problem 2'in  $k = 0.00001$  ve  $h = 0.1, 0.05, 0.025, 0.0125$  için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında ASFY ve T-ASFY ile elde edilen noktasal değerleri ile  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları sırasıyla Tablo 3.13 ve 3.14 de verildi. Tablo 3.13 ve 3.14 incelendiğinde hem ASFY hem de T-ASFY ile edilen nümerik sonuçların  $h$  konum adım uzunluğu küçüldükçe tam çözüme yaklaştığı ve hata normlarında küçüldüğü açıktır. Aynı zamanda Tablo 3.13 ve 3.14 kendi içinde karşılaştırıldığında ise Tablo 3.13 de verilen ASFY ile elde edilen nümerik sonuçların Tablo 3.14 de verilen T-ASFY ile elde edilen sonuçlara göre daha iyi olduğu noktasal değerlerden ve hata normlarından görülmektedir. Tablolara bakıldığında, bütün  $h$  değerleri için T-ASFY ile elde edilen hata normlarının ASFY ile elde edilen hata normlarıyla uyumludur.

Tablo 3.13: Açık Sonlu Fark Yöntemi:  $k = 0.00001$  ve  $h$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri

$t$	$x$	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.0	10.1271576550	10.1203398630	10.1186372031	10.1182116335	10.1181241933
	0.1	10.0719874666	10.0655057933	10.0638867018	10.0634820074	10.0633988534
	0.2	9.9118817199	9.9063721405	9.9049952502	9.9046510740	9.9045803464
	0.3	9.6625197620	9.6585176583	9.6575173702	9.6572673276	9.6572159301
	0.4	9.3483108796	9.3462040712	9.3456779216	9.3455464137	9.3455193576
	0.5	9.0000049475	9.0000011671	9.0000008042	9.0000007325	9.0000006670
	0.6	8.6516922013	8.6537966836	8.6543226114	8.6544540756	8.6544810210
	0.7	8.3374722953	8.3414805426	8.3424814244	8.3427315847	8.3427829059
	0.8	8.0881103431	8.0936260659	8.0950035499	8.0953478437	8.0954185012
	0.9	7.92801156291	7.9344949758	7.9361138454	7.9365184961	7.9366015588
1.0	7.8728522582	7.8796624890	7.8813644229	7.8817898491	7.8818771931	
$L_2 \times 10^3$		6.3839995178	1.5663337800	0.3626579270	0.0617888766	
$L_\infty \times 10^3$		9.0249349329	2.2147041145	0.5127701914	0.0873726637	
$t$	$x$					
0.5	0.0	9.0224610065	9.0217902529	9.0216252114	9.0215841151	9.0215756501
	0.1	9.0213616876	9.0207237633	9.0205667997	9.0205277148	9.0205196626
	0.2	9.0181713398	9.0176286901	9.0174951691	9.0174619216	9.0174550675
	0.3	9.0132022566	9.0128080006	9.0127109924	9.0126868368	9.0126818487
	0.4	9.0069408466	9.0067335774	9.0066825780	9.0066698789	9.0066672422
	0.5	9.0000000201	9.0000000274	9.0000000292	9.0000000297	8.9999999995
	0.6	8.9930591936	8.9932664775	8.9933174804	8.9933301805	8.9933327569
	0.7	8.9867977836	8.9871920543	8.9872890660	8.9873132226	8.9873181505
	0.8	8.9818287004	8.9823713648	8.9825048893	8.9825381377	8.9825449320
	0.9	8.9786383526	8.9792762916	8.9794332587	8.9794723446	8.9794803371
1.0	8.9775390337	8.9782098020	8.9783748470	8.9784159442	8.9784243499	
$L_2 \times 10^3$		0.6260243633	0.1517256352	0.0350233803	0.0059641535	
$L_\infty \times 10^3$		0.8853162126	0.2145479016	0.0495029397	0.0084585468	

Tablo 3.14: Tam-Açık Sonlu Fark Yöntemi:  $k = 0.00001$  ve  $h$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 2'nin nümerik tam çözümleri

		Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
$t$	$x$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.0	10.1271527475	10.1203930819	10.1186908714	10.1182653951	10.1181241933
	0.1	10.0720373225	10.0655571414	10.0639382429	10.0635335909	10.0633988534
	0.2	9.9119294149	9.9064170436	9.9050399264	9.9046957088	9.9045803464
	0.3	9.6625555025	9.6585505303	9.6575499961	9.6572999074	9.6572159301
	0.4	9.3483260412	9.3462205027	9.3456944907	9.3455630113	9.3455193576
	0.5	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000006670
	0.6	8.6516739588	8.6537794973	8.6543055093	8.6544369887	8.6544810210
	0.7	8.3374444975	8.3414494697	8.3424500039	8.3427000926	8.3427829059
	0.8	8.0880705851	8.0935829564	8.0949600736	8.0953042912	8.0954185012
	0.9	7.9279626775	7.9344428586	7.9360617571	7.9364664091	7.9366015588
	1.0	7.8727932525	7.8796069181	7.8813091286	7.8817346049	7.8818771931
$L_2 \times 10^3$		6.4229182531	1.6048799336	0.4012109842	0.1003424472	
$L_\infty \times 10^3$		9.0839406348	2.2702749984	0.5680644500	0.1425881506	
$t$	$x$					
0.5	0.0	9.0224663686	9.0217955119	9.0216304449	9.0215893422	9.0215756501
	0.1	9.0213667863	9.0207287636	9.0205717756	9.0205326846	9.0205196626
	0.2	9.0181756740	9.0176329395	9.0174993975	9.0174661447	9.0174550675
	0.3	9.0132054001	9.0128110805	9.0127140565	9.0126898969	9.0126818487
	0.4	9.0069424897	9.0067351836	9.0066841751	9.0066714736	9.0066672422
	0.5	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	8.9999999995
	0.6	8.9930575103	8.9932648164	8.9933158249	8.9933285264	8.9933327569
	0.7	8.9867945999	8.9871889195	8.9872859435	8.9873101031	8.9873181505
	0.8	8.9818243260	8.9823670605	8.9825006025	8.9825338553	8.9825449320
	0.9	8.9786332137	8.9792712364	8.9794282244	8.9794673154	8.9794803371
	1.0	8.9775336314	8.9782044881	8.9783695551	8.9784106578	8.9784243499
$L_2 \times 10^3$		0.6298330198	0.154656879	0.0387456822	0.0096816819	
$L_\infty \times 10^3$		0.8907185474	0.2198618422	0.0547948292	0.0136921263	

Tablo 3.15 ve 3.16 de Problem 2'nin  $h = 0.05$  ve  $k$  zaman adım uzunluğunun 0.001 ile 0.0005 ve  $h = 0.0125$  ile  $k$  zaman adım uzunluğunun 0.00005 ve 0.00001 değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında ASFY ve T-ASFY ile elde edilen noktasal değerleri ve hata normlarına bakıldı. Tablo 3.15 e bakıldığında  $k$  zaman adım uzunluğunun küçülmesiyle hata normlarında da küçülme görülmektedir. Bu durum Tablo 3.16 incelendiğinde de aynıdır.

Tablo 3.15: Açık Sonlu Fark Yöntemi:  $h = 0.05$  ve  $h = 0.0125$  değerleri için  $k$ 'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri

		Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$h = 0.05$		$h = 0.0125$		
$t$	$x$	$k = 0.001$	$k = 0.0005$	$k = 0.00005$	$k = 0.00001$	
0.1	0.0	10.1149362591	10.1176707585	10.1179937425	10.1182116335	10.1181241933
	0.1	10.0603671930	10.0629676570	10.0632748028	10.0634820074	10.0633988534
	0.2	9.9020018748	9.9042136284	9.9044748522	9.9046510740	9.9045803464
	0.3	9.6553426580	9.6569495223	9.6571393026	9.6572673276	9.6572159301
	0.4	9.3445342661	9.3453792727	9.3454790817	9.3455464137	9.3455193576
	0.5	9.0000003383	9.0000006489	9.0000006980	9.0000007325	9.0000006670
	0.6	8.6554659768	8.6546211619	8.6545213863	8.6544540756	8.6544810210
	0.7	8.3446568846	8.3430495175	8.3428596654	8.3427315847	8.3427829059
	0.8	8.0979976730	8.0957854166	8.0955241213	8.0953478437	8.0954185012
	0.9	7.9396330632	7.9370327916	7.9367256794	7.9365184961	7.9366015588
	1.0	7.8850644340	7.8823305564	7.8820076711	7.8817898491	7.8818771931
	$L_2 \times 10^3$	2.2539461156	0.3206048371	0.0922584127	0.0617888766	
	$L_\infty \times 10^3$	3.1872408645	0.4533632994	0.1304780437	0.0873726637	
	$t$	$x$				
0.5	0.0	9.0212698849	9.0215319705	9.0215630976	9.0215841151	9.0215756501
	0.1	9.0202288640	9.0204781222	9.0205077259	9.0205277148	9.0205196626
	0.2	9.0172077036	9.0174197353	9.0174449181	9.0174619216	9.0174550675
	0.3	9.0125021360	9.0126561860	9.0126744830	9.0126868368	9.0126818487
	0.4	9.0065727749	9.0066537638	9.0066633841	9.0066698789	9.0066672422
	0.5	9.0000000274	9.0000000274	9.0000000297	9.0000000297	8.9999999995
	0.6	8.9934272800	8.9933462911	8.9933366752	8.9933301805	8.9933327569
	0.7	8.9874979189	8.9873438688	8.9873255763	8.9873132226	8.9873181505
	0.8	8.9827923513	8.9825803195	8.9825551412	8.9825381377	8.9825449320
	0.9	8.9797711909	8.9795219326	8.9794923334	8.9794723446	8.9794803371
	1.0	8.9787301699	8.9784680843	8.9784369617	8.9784159442	8.9784243499
	$L_2 \times 10^3$	0.2162300643	0.0309075523	0.0088976008	0.0059641535	
	$L_\infty \times 10^3$	0.3058200094	0.0437343865	0.0126117890	0.0084585468	



Tablo 3.16: Tam-Açık Sonlu Fark Yöntemi  $h = 0.05$  ve  $h = 0.0125$  değerleri için  $k$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri

		Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$h = 0.05$		$h = 0.0125$		
$t$	$x$	$k = 0.001$	$k = 0.0005$	$k = 0.00005$	$k = 0.00001$	
0.1	0.0	10.1149359616	10.1176701502	10.1179930865	10.1182109431	10.1181241933
	0.1	10.0603671115	10.0629674794	10.0632746101	10.0634818040	10.0633988534
	0.2	9.9020021406	9.9042141456	9.9044754066	9.9046516563	9.9045803464
	0.3	9.6553429155	9.6569500312	9.6571398484	9.6572679013	9.6572159301
	0.4	9.3445341598	9.3453790705	9.3454788633	9.3455461847	9.3455193576
	0.5	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000006670
	0.6	8.6554658402	8.6546209295	8.6545211367	8.6544538153	8.6544810210
	0.7	8.3446570845	8.3430499688	8.3428601516	8.3427320987	8.3427829059
	0.8	8.0979978594	8.0957858544	8.0955245934	8.0953483437	8.0954185012
	0.9	7.9396328885	7.9370325206	7.9367253899	7.9365181960	7.9366015588
	1.0	7.8850640384	7.8823298498	7.8820069135	7.8817890569	7.8818771931
	$L_2 \times 10^3$	2.2538870045	0.3205239852	0.0922113014	0.0618398448	
	$L_\infty \times 10^3$	3.1868453175	0.4526566801	0.1309977270	0.0881361860	
	$t$					
0.5	0.0	9.0212698584	9.0215319441	9.0215630689	9.0215840864	9.0215756501
	0.1	9.0202288375	9.0204780957	9.0205076972	9.0205276860	9.0205196626
	0.2	9.0172076769	9.0174197087	9.0174448892	9.0174618927	9.0174550675
	0.3	9.0125021091	9.0126561592	9.0126744539	9.0126868077	9.0126818487
	0.4	9.0065727477	9.0066537366	9.0066633547	9.0066698495	9.0066672422
	0.5	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	8.9999999995
	0.6	8.9934272523	8.9933462634	8.9933366453	8.9933301505	8.9933327569
	0.7	8.9874978909	8.9873438408	8.9873255461	8.9873131923	8.9873181505
	0.8	8.9827923231	8.9825802913	8.9825551108	8.9825381073	8.9825449320
	0.9	8.9797711625	8.9795219043	8.9794923028	8.9794723140	8.9794803371
	1.0	8.9787301416	8.9784680559	8.9784369311	8.9784159136	8.9784243499
	$L_2 \times 10^3$	0.2162274622	0.0309049314	0.0088963333	0.0059652960	
	$L_\infty \times 10^3$	0.3057916479	0.0437060134	0.0125811545	0.0084363632	

İkinci olarak, Problem 2' nin KSFY ve T-KSFY yöntemleri için farklı konum ve zaman adımlarındaki noktasal değerleri,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları Tablo 3.17-3.20 de sunuldu.

Tablo 3.17 ve 3.18 de, Problem 2'nin  $k = 0.00001$  ve  $h$  konum adım uzunluğunun 0.1, 0.05, 0.025 ve 0.0125 değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında KSFY ve T-KSFY

ile elde edilen noktasal değerleri ve hata normları verildi. Her iki tabloda incelendiğinde, hem KSFY hem de T-KSFY ile edilen sonuçların  $h$  konum adım uzunluğu küçüldükçe tam çözüme yaklaştığı ve hata normlarının kayda değer ölçüde küçüldüğü açıktır. Tablo 3.17 ve 3.18 kendi içinde karşılaştırıldığında ise; Tablo 3.17 de sunulan KSFY ile elde edilen sonuçların Tablo 3.18 de sunulan T-KSFY ile elde edilen sonuçlara göre daha iyi olduğu noktasal değerlerden ve  $L_2$  ile  $L_\infty$  hata normlarından görölmektedir. Tablolardan, T-KSFY ile elde edilen hata normlarının bütün  $h$  değerleri için KSFY ile elde edilen hata normlarıyla uyumlu olduğu açıktır.



Tablo 3.17: Kapalı Sonlu Fark Yöntemi:  $k = 0.00001$  ve  $h$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri

$t$	$x$	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.0	10.1272657575	10.1204485785	10.1187460812	10.1183205525	10.1181241933
	0.1	10.0720902171	10.0656091706	10.0639902386	10.0635855841	10.0633988534
	0.2	9.9119690227	9.9064600495	9.9050833031	9.9047391626	9.9045803464
	0.3	9.6625831702	9.6585815220	9.6575813400	9.6573313238	9.6572159301
	0.4	9.3483442851	9.3462376661	9.3457115668	9.3455800715	9.3455193576
	0.5	9.0000050425	9.0000011941	9.0000008235	9.0000007502	9.0000006670
	0.6	8.6516588546	8.6537631053	8.6542889782	8.6544204287	8.6544810210
	0.7	8.3374087332	8.3414166352	8.3424174233	8.3426675597	8.3427829059
	0.8	8.0880228864	8.0935381132	8.0949154657	8.0952697264	8.0954185012
	0.9	7.9279129374	7.9343916153	7.9360103207	7.9364149304	7.9366015588
	1.0	7.8727443459	7.8795538275	7.881255836	7.8816809656	7.8818771931
$L_2 \times 10^3$		6.4603588107	1.6431862329	0.4396319440	0.1387933337	
$L_\infty \times 10^3$		9.1328471715	2.3233655652	0.6216094904	0.1962274567	
$t$	$x$					
0.5	0.0	9.0224717699	9.0218008247	9.0216357356	9.0215946274	9.0215756501
	0.1	9.0213719242	9.0207338177	9.0205768088	9.0205377125	9.0205196626
	0.2	9.0181800476	9.0176372429	9.0175036834	9.0174704262	9.0174550675
	0.3	9.0132085832	9.0128142146	9.0127171784	9.0126930157	9.0126818487
	0.4	9.0069441727	9.0067368443	9.0066858302	9.0066731273	9.0066672422
	0.5	9.0000000201	9.0000000274	9.0000000292	9.0000000297	8.9999999995
	0.6	8.9930558675	8.9932632106	8.9933142283	8.9933269320	8.9933327569
	0.7	8.9867914569	8.9871858403	8.9872828801	8.9873070436	8.9873181505
	0.8	8.9818199925	8.9823628120	8.9824963751	8.9825296331	8.9825449320
	0.9	8.9786281159	8.9792662372	8.9794232497	8.9794623468	8.9794803371
	1.0	8.9775282702	8.9781992302	8.9783643228	8.9784054319	8.9784243499
$L_2 \times 10^3$		0.6336352922	0.1592010488	0.0424650977	0.0133974204	
$L_\infty \times 10^3$		0.8960797194	0.2251197326	0.0600270976	0.0189627150	

Tablo 3.18: Tam-Kapalı Sonlu Fark Yöntemi:  $k = 0.00001$  ve  $h$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri

		Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
$t$	$x$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.0	10.1272607499	10.1204474248	10.1187452993	10.1183198443	10.1181241933
	0.1	10.0720886817	10.0656088245	10.0639900070	10.0635853752	10.0633988534
	0.2	9.9119731037	9.9064610080	9.9050839595	9.9047397592	9.9045803464
	0.3	9.6625872448	9.6585824723	9.6575819880	9.6573319118	9.6572159301
	0.4	9.3483427288	9.3462372956	9.3457113099	9.3455798370	9.3455193576
	0.5	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000006670
	0.6	8.6516572712	8.6537627044	8.6542886901	8.6544201630	8.6544810210
	0.7	8.3374127557	8.3414175277	8.3424180120	8.3426680882	8.3427829059
	0.8	8.0880268963	8.0935389920	8.0949160405	8.0952602408	8.0954185012
	0.9	7.9279113183	7.9343911755	7.9360099930	7.9364146248	7.9366015588
	1.0	7.8727392501	7.8795525752	7.8812547007	7.8816801557	7.8818771931
$L_2 \times 10^3$		6.4610455226	1.6432480159	0.4396392092	0.1387854050	
$L_\infty \times 10^3$		9.1378607369	2.3245356636	0.6224102047	0.1969551760	
$t$	$x$					
0.5	0.0	9.0224717507	9.0218007982	9.0216357074	9.0215945987	9.0215756501
	0.1	9.0213719050	9.0207337912	9.0205767805	9.0205376838	9.0205196626
	0.2	9.0181800282	9.0176372162	9.0175036549	9.0174703973	9.0174550675
	0.3	9.0132085637	9.0128141877	9.0127171497	9.0126929867	9.0126818487
	0.4	9.0069441529	9.0067368171	9.0066858013	9.0066730980	9.0066672422
	0.5	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	8.9999999995
	0.6	8.9930558471	8.9932631829	8.9933141987	8.9933269020	8.9933327569
	0.7	8.9867914363	8.9871858123	8.9872828503	8.9873070133	8.9873181505
	0.8	8.9818199718	8.9823627838	8.9824963451	8.9825296027	8.9825449320
	0.9	8.9786280950	8.9792662088	8.9794232195	8.9794623162	8.9794803371
	1.0	8.9775282493	8.9781992018	8.9783642926	8.9784054013	8.9784243499
$L_2 \times 10^3$		0.6336387531	0.1592036637	0.0424668118	0.0133986059	
$L_\infty \times 10^3$		0.8961006670	0.2251481382	0.0600573011	0.0189486507	

Problem 2' nin  $h = 0.025$  ve  $k$  zaman adım uzunluğunun 0.01, 0.001, 0.0001 ve 0.00005 değerleri için Tablo 3.19 ve 3.20 de  $t = 0.1, 0.5$  zamanında KSFY ve T-KSFY ile elde edilen noktasal değerleri ve hata normları sunuldu. Tablo 3.19 incelendiğinde  $k$  zaman adım uzunluğunun küçüldükçe tam çözüme yaklaştığı ve hata normlarının büyük ölçüde küçüldüğü görülmektedir. Benzer durum Tablo 3.20 de de görülmektedir. Her iki tablo kendi içinde karşılaştırıldığında Tablo 3.19

da verilen KSFY ile elde edilen sonuçlar Tablo 3.20 de verilen T-KSFY ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldığında noktasal değerlerin ve hata normlarının daha iyi sonuç verdiği görülmektedir.

Tablo 3.19: Kapalı Sonlu Fark Yöntemi:  $h = 0.025$  ve  $k$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri

$t$	$x$	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$k = 0.01$	$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00005$	
0.1	0.0	10.1713747919	10.1241136655	10.1192358141	10.1189637843	10.1181241933
	0.1	10.1137844255	10.0690940875	10.0644559431	10.0641972609	10.0633988534
	0.2	9.9470088839	9.9094231815	9.9054793563	9.9052593640	9.9045803464
	0.3	9.6879529171	9.6607340922	9.6578690692	9.6577092470	9.6572159301
	0.4	9.3619747292	9.3473702412	9.3458629025	9.3457788407	9.3455193576
	0.5	9.0004037404	9.0000024229	9.0000009156	9.0000008634	9.0000006670
	0.6	8.6382748282	8.6526312919	8.6541376992	8.6542217288	8.6544810210
	0.7	8.3113939046	8.3392620825	8.3421295451	8.3422894517	8.3427829059
	0.8	8.0523379479	8.0905729991	8.0945192634	8.0947393402	8.0954185012
	0.9	7.8864651584	7.9309074610	7.9355446731	7.9358033230	7.9366015588
	1.0	7.8294327217	7.8758911994	7.8807660349	7.8810379603	7.8818771931
	$L_2 \times 10^3$	37.3556790816	4.2338994470	0.7858570419	0.5935416714	
	$L_\infty \times 10^3$	53.0679617359	5.9859937085	1.1111581840	0.8392327848	
$t$	$x$					
0.5	0.0	9.0271798021	9.0221596078	9.0216831235	9.0216567910	9.0215756501
	0.1	9.0258495293	9.0210750409	9.0206218774	9.0205968337	9.0205196626
	0.2	9.0219889274	9.0179275049	9.0175420210	9.0175207176	9.0174550675
	0.3	9.0159758989	9.0130251027	9.0127450323	9.0127295544	9.0126818487
	0.4	9.0083990409	9.0068477156	9.0067004738	9.0066923367	9.0066672422
	0.5	9.0000000292	9.0000000292	9.0000000292	9.0000000292	8.9999999995
	0.6	8.9916010175	8.9931523428	8.9932995846	8.9933077218	8.9933327569
	0.7	8.9840241595	8.9869749557	8.9872550261	8.9872705040	8.9873181505
	0.8	8.9780111310	8.9820725535	8.9824580374	8.9824793409	8.9825449320
	0.9	8.9741505291	8.9789250176	8.9793781811	8.9794032248	8.9794803371
	1.0	8.9728202563	8.9778404506	8.9783169349	8.9783432674	8.9784243499
	$L_2 \times 10^3$	3.9627121383	0.4128987073	0.0759734147	0.0573535256	
	$L_\infty \times 10^3$	5.6040936174	0.5838993554	0.1074150346	0.0810825190	

Tablo 3.20: Tam-Kapalı Sonlu Fark Yöntemi:  $h = 0.025$  ve  $k$ 'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri

$t$	$x$	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$k = 0.01$	$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00005$	
0.1	0.0	10.1709710886	10.1241112839	10.1192349402	10.1189629626	10.1181241933
	0.1	10.1136596842	10.0690933616	10.0644556831	10.0641970170	10.0633988534
	0.2	9.9473355106	9.9094251322	9.9054800873	9.9052600528	9.9045803464
	0.3	9.6882795367	9.6607360346	9.6578697917	9.6577099272	9.6572159301
	0.4	9.3618499663	9.3473694903	9.3458626172	9.3457785715	9.3455193576
	0.5	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000006670
	0.6	8.6381500337	8.6526305097	8.6541373828	8.6542214285	8.6544810210
	0.7	8.3117204633	8.3392639654	8.3421302083	8.3422900728	8.3427829059
	0.8	8.0526644894	8.0905748678	8.0945199127	8.0947399472	8.0954185012
	0.9	7.8863403158	7.9309066384	7.9355443169	7.9358029830	7.9366015588
	1.0	7.8290289114	7.8758887161	7.8807650598	7.8810370374	7.8818771931
$L_2 \times 10^3$		37.3689070818	4.2340211825	0.7859255913	0.5936084194	
$L_\infty \times 10^3$		52.8482816731	5.9884769600	1.1121332697	0.8401556484	
$t$	$x$					
0.5	0.0	9.0271797741	9.0221595796	9.0216830953	9.0216567628	9.0215756501
	0.1	9.0258495013	9.0210750126	9.0206218491	9.0205968054	9.0205196626
	0.2	9.0219888992	9.0179274765	9.0175419926	9.0175206891	9.0174550675
	0.3	9.0159758704	9.0130250741	9.0127450036	9.0127295258	9.0126818487
	0.4	9.0083990121	9.0068476867	9.0067004449	9.0066923077	9.0066672422
	0.5	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	8.9999999995
	0.6	8.9916009879	8.9931523133	8.9932995551	8.9933076923	8.9933327569
	0.7	8.9840241296	8.9869749259	8.9872549964	8.9872704742	8.9873181505
	0.8	8.9780111008	8.9820725235	8.9824580074	8.9824793109	8.9825449320
	0.9	8.9741504987	8.9789249874	8.9793781509	8.9794031946	8.9794803371
	1.0	8.9728202259	8.9778404204	8.9783169047	8.9783432372	8.9784243499
$L_2 \times 10^3$		3.9627140385	0.4129004463	0.0759751337	0.0573552429	
$L_\infty \times 10^3$		5.6041240557	0.5839295672	0.1074452241	0.0811127222	

Son olarak, Problem 2' nin CNSFY ve T-CNSFY yöntemleri için farklı konum ve zaman adımlarındaki noktasal değerleri ile  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normaları Tablo 3.21-3.24 de verildi.

Problem 2' nin  $k = 0.00001$  ve  $h$  konum adım uzunluğunun 0.1, 0.05, 0.025 ve 0.0125 değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında CNSFY ve T-CNSFY ile elde edilen noktasal değerleri,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları sırasıyla Tablo 3.21 ve 3.22 verildi. Tablo 3.21 ve 3.22 incelendiğinde hem CNSFY hem de T-CNSFY ile edilen sonuçların  $h$  konum adım uzunluğu küçüldükçe tam çözüme yaklaştığı ve hata normlarının kayda değer ölçüde küçüldüğü açıktır. Tablo 3.21 ve 3.22 kendi içinde karşılaştırıldığında ise Tablo 3.22 de verilen T-CNSFY ile elde edilen sonuçların Tablo 3.21 de verilen CNSFY ile elde edilen sonuçlarla iyi uyum sağladığı noktasal değerlerden ve hata normlarından görülmektedir.

Tablo 3.21: Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi:  $k = 0.00001$  ve  $h$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri

$t$	$x$	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.0	10.1272117074	10.1203942221	10.1186916435	10.1182660943	10.1181241933
	0.1	10.0720388431	10.0655574832	10.0639384715	10.0635337971	10.0633988534
	0.2	9.9119253736	9.9064160962	9.9050392778	9.9046951194	9.9045803464
	0.3	9.6625514671	9.6585505910	9.6575493560	9.6572993265	9.6572159301
	0.4	9.3483275827	9.3462208691	9.345694446	9.3455632430	9.3455193576
	0.5	9.0000049948	9.0000011805	9.0000008138	9.0000007413	9.0000006670
	0.6	8.6516755274	8.6537898940	8.6543057943	8.6544372517	8.6544810210
	0.7	8.3374405136	8.3414485882	8.3424494231	8.3426995714	8.3427829059
	0.8	8.0880666138	8.0935820885	8.0949595067	8.0953037840	8.0954185012
	0.9	7.9279642819	7.9344432942	7.9360620818	7.9364667119	7.9366015588
1.0	7.8727983005	7.8796081568	7.8813100019	7.8817354059	7.8818771931	
$L_2 \times 10^3$		6.4221801451	1.6047609707	0.4011458998	0.1002920662	
$L_\infty \times 10^3$		9.0788925876	2.2690362617	0.5671912401	0.1417913701	
$t$	$x$					
0.5	0.0	9.0224663879	9.0217955384	9.0216304732	9.0215893708	9.0215756501
	0.1	9.0213668056	9.0207287902	9.0205718039	9.0205327132	9.0205196626
	0.2	9.0181756934	9.0176329662	9.0174994260	9.0174661735	9.0174550675
	0.3	9.0132054198	9.0128111074	9.0127140852	9.0126899260	9.0126818487
	0.4	9.0069425096	9.0067352108	9.0066842041	9.0066715029	9.0066672422
	0.5	9.0000000201	9.0000000275	9.0000000293	9.0000000296	8.9999999995
	0.6	8.9930575307	8.9932648442	8.9933158545	8.9933285563	8.9933327569
	0.7	8.9867946205	8.9871889476	8.9872859734	8.9873101332	8.9873181505
	0.8	8.9818243468	8.9823670887	8.9825006326	8.9825338857	8.9825449320
	0.9	8.9786332347	8.9792712648	8.9794282546	8.9794673460	8.9794803371
1.0	8.9775336524	8.9782045165	8.9783695854	8.9784106884	8.9784243599	
$L_2 \times 10^3$		0.6298295507	0.1554630695	0.0387439670	0.0096805114	
$L_\infty \times 10^3$		0.8906975343	0.2198334127	0.0547645644	0.0137101915	



Tablo 3.22: Tam-Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi:  $k = 0.00001$  ve  $h$ 'nin farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri

		Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
$t$	$x$	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	
0.1	0.0	10.1272067475	10.1203930819	10.1186908714	10.1182653951	10.1181241933
	0.1	10.0720373225	10.0655571414	10.0639382429	10.0635335909	10.0633988534
	0.2	9.9119294149	9.9064170436	9.9050399264	9.9046957088	9.9045803464
	0.3	9.6625555025	9.6585505303	9.6575499961	9.6572999074	9.6572159301
	0.4	9.3483260412	9.3462205027	9.3456944907	9.3455630113	9.3455193576
	0.5	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000006670
	0.6	8.6516739588	8.6537794973	8.6543055093	8.6544369887	8.6544810210
	0.7	8.3374444975	8.3414494797	8.3424500039	8.3427000926	8.3427829059
	0.8	8.0880705851	8.0935829564	8.0949600736	8.0953042912	8.0954185012
	0.9	7.9279626775	7.9344428586	7.9360617571	7.9364664091	7.9366015588
	1.0	7.8727932525	7.8796069181	7.8813091286	7.8817346049	7.8818771931
$L_2 \times 10^3$		6.4229182531	1.6048799336	0.4012109842	0.1003424472	
$L_\infty \times 10^3$		9.0839406348	2.2702749984	0.5680644500	0.1425881506	
$t$	$x$					
0.5	0.0	9.0224663686	9.0217955119	9.0216304449	9.0215893422	9.0215756501
	0.1	9.0213667863	9.0207287636	9.0205717756	9.0205326846	9.0205196626
	0.2	9.0181756740	9.0176329495	9.0174993975	9.0174661447	9.0174550675
	0.3	9.0132054001	9.0128110805	9.0127140565	9.0126898969	9.0126818487
	0.4	9.0069424897	9.0067351836	9.0066841751	9.0066714736	9.0066672422
	0.5	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	8.9999999995
	0.6	8.9930575103	8.9932648164	8.9933158249	8.9933285264	8.9933327569
	0.7	8.9867946999	8.9871889195	8.9872859435	8.9873101031	8.9873181505
	0.8	8.9818243260	8.9823670605	8.9825006025	8.9825338553	8.9825449320
	0.9	8.9786332137	8.9792712364	8.9794282244	8.9794673154	8.9794803371
	1.0	8.9775336314	8.9782044881	8.9783695551	8.9784106578	8.9784243599
$L_2 \times 10^3$		0.6298330198	0.154656879	0.0387456822	0.0096816819	
$L_\infty \times 10^3$		0.8907185474	0.2198618422	0.0547948292	0.0136921263	

Tablo 3.23 ve 3.24 de, Problem 2' nin  $h = 0.025$  ve  $k$  zaman adım uzunluğunun 0.01, 0.001, 0.0001 ve 0.00005 değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında CNSFY ve T-CNSFY ile elde edilen noktasal değerleri sunuldu. Tablo 3.23 incelendiğinde  $k$  zaman adım uzunluğunun küçüldükçe tam çözüme yaklaşma çok az da olsa görülmektedir. Benzer durum Tablo 3.24 içinde geçerlidir. Yani,  $k$  zaman adımı küçüldükçe noktasal değerler tam çözüme yaklaşmaktadır.

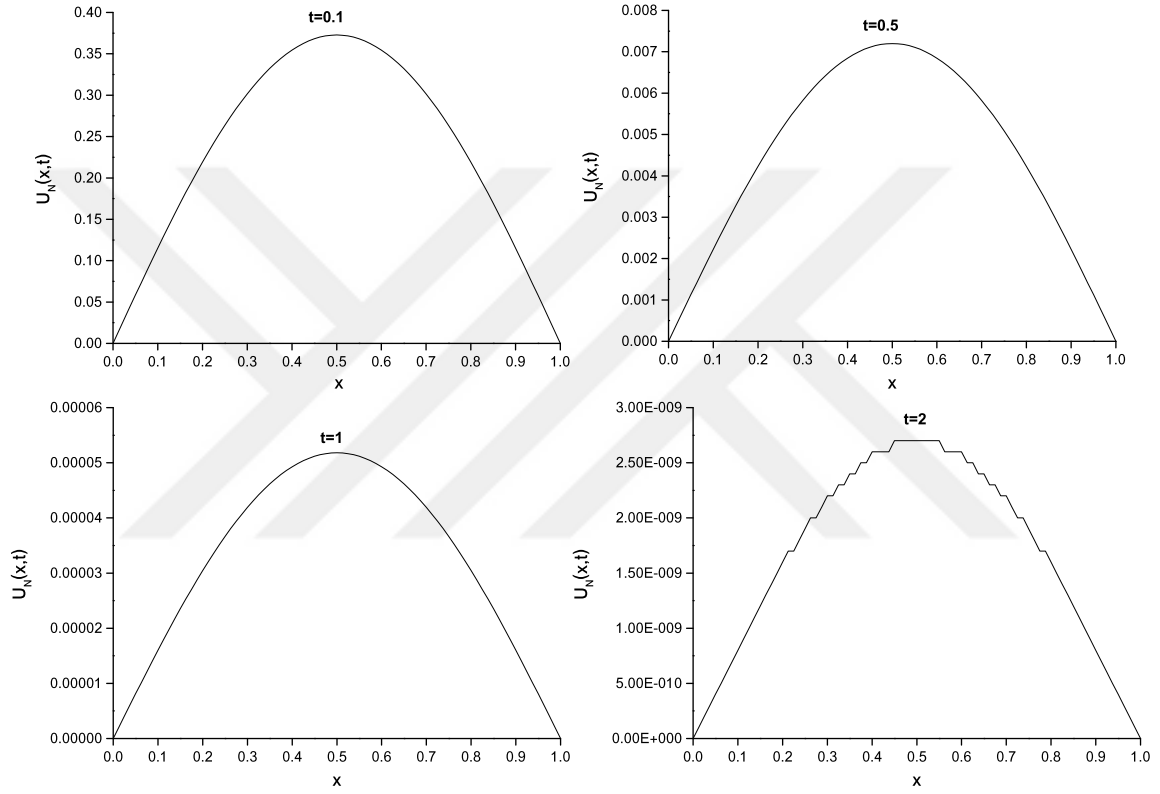
Tablo 3.23: Crank-Nicolson Sonlu Fark Yöntemi:  $h = 0.025$  ve  $k$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri

$t$	$x$	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$k = 0.01$	$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00005$	
0.1	0.0	10.1177950394	10.1186825903	10.1186915546	10.1186916219	10.1181241933
	0.1	10.0630862547	10.0639298775	10.0639383871	10.0639384510	10.0633988534
	0.2	9.9043151809	9.9050319940	9.9050392063	9.9050392605	9.9045803464
	0.3	9.6570234426	9.6575440695	9.6575493041	9.6575493434	9.6572159301
	0.4	9.3454176789	9.3456919470	9.3456947171	9.3456947379	9.3455193576
	0.5	9.0000000286	9.0000007889	9.0000008136	9.0000008137	9.0000006670
	0.6	8.6545823749	8.6543085765	8.6543058216	8.6543058009	8.6544810210
	0.7	8.3429766074	8.3424547499	8.3424494754	8.3424494358	8.3427829059
	0.8	8.0956848749	8.0949668308	8.0949595786	8.0949595241	8.0954185012
	0.9	7.9369138095	7.9360706603	7.9360621659	7.9360621021	7.9366015588
1.0	7.8822049789	7.8813190050	7.8813100902	7.8813100233	7.8818771931	
$t$	$x$					
0.5	0.0	9.0215440063	9.0216296003	9.0216304646	9.0216304711	9.0215756501
	0.1	9.0204895690	9.0205709738	9.0205717957	9.0205718019	9.0205196626
	0.2	9.0174294728	9.0174987198	9.0174994190	9.0174994243	9.0174550675
	0.3	9.0126632612	9.0127135721	9.0127140801	9.0127140839	9.0126818487
	0.4	9.0066574842	9.0066839343	9.0066842013	9.0066842033	9.0066672422
	0.5	9.0000000292	9.0000000292	9.0000000292	9.0000000292	8.9999999995
	0.6	8.9933425742	8.9933161242	8.9933158571	8.9933158551	8.9933327569
	0.7	8.9873367972	8.9872864863	8.9872859783	8.9872859745	8.9873181505
	0.8	8.9825705857	8.9825013386	8.9825006394	8.9825006342	8.9825449320
	0.9	8.9795104895	8.9794290847	8.9794282627	8.9794282566	8.9794803371
1.0	8.9784560502	8.9783704581	8.9783695939	8.9783695874	8.9784243499	

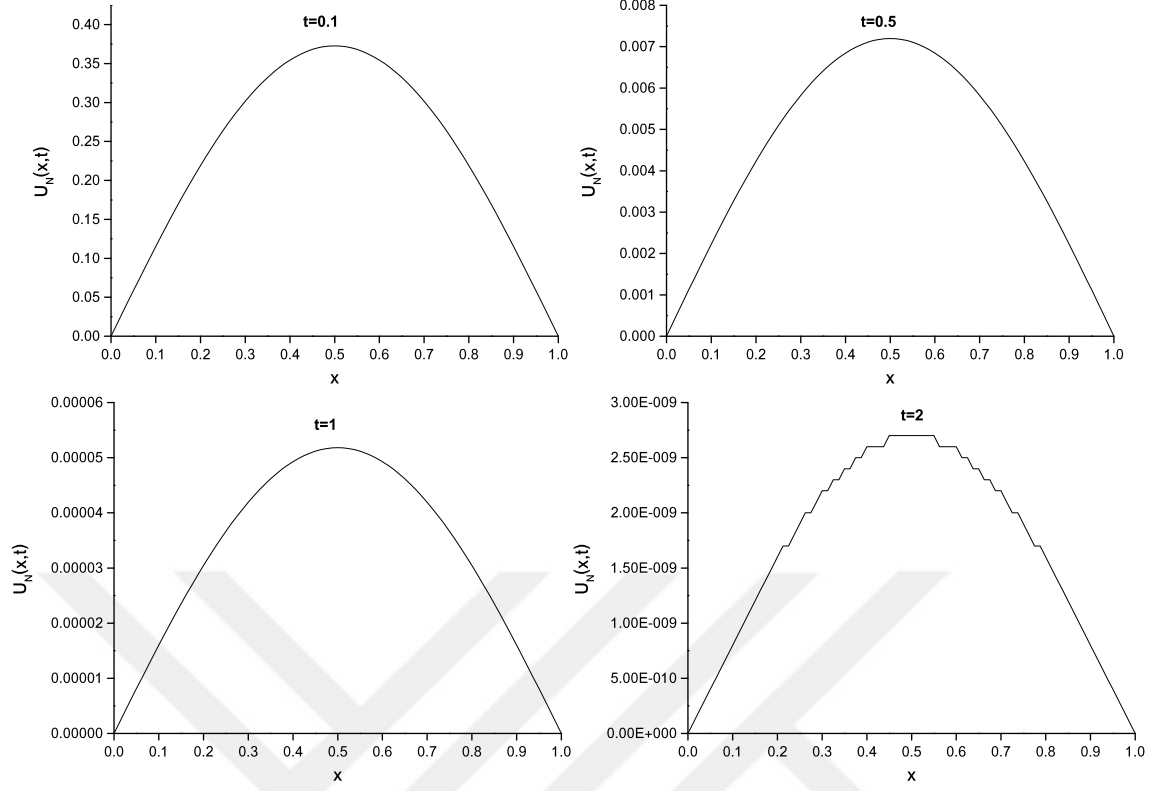
Tablo 3.24: Tam-Crank Nicolson Sonlu Fark Yöntemi:  $h = 0.025$  ve  $k$  'nın farklı değerleri için  $t = 0.1, 0.5$  zamanlarında Problem 2'nin nümerik ve tam çözümleri

$t$	$x$	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
		$k = 0.01$	$k = 0.001$	$k = 0.0001$	$k = 0.00005$	
0.1	0.0	10.1177950530	10.1186818432	10.1186907828	10.1186908499	10.1181241933
	0.1	10.0630862690	10.0639296566	10.0639381587	10.0639382225	10.0633988534
	0.2	9.9043151941	9.9050326224	9.9050398547	9.9050399090	9.9045803464
	0.3	9.6570234472	9.6575446894	9.6575499440	9.6575499834	9.6572159301
	0.4	9.3454176676	9.3456917008	9.3456944633	9.3456944841	9.3455193576
	0.5	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000006670
	0.6	8.6545823324	8.6543082992	8.6543055367	8.6543055159	8.6544810210
	0.7	8.3429765528	8.3424553106	8.3424500560	8.3424500166	8.3427829059
	0.8	8.0956848059	8.0949673776	8.0949601453	8.0949600910	8.0954185012
	0.9	7.9369137310	7.9360703434	7.9360618413	7.9360617775	7.9366015588
1.0	7.8822049470	7.8813181568	7.8813092172	7.8813091501	7.8818771931	
0.5	0.0	9.0215439780	9.0216295721	9.0216304363	9.0216304428	9.0215756501
	0.1	9.0204895407	9.0205709455	9.0205717674	9.0205717736	9.0205196626
	0.2	9.0174294443	9.0174986914	9.0174993906	9.0174993958	9.0174550675
	0.3	9.0126632326	9.0127135435	9.0127140515	9.0127140553	9.0126818487
	0.4	9.0066574553	9.0066839054	9.0066841724	9.0066841744	9.0066672422
	0.5	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	9.0000000000	8.9999999995
	0.6	8.9933425447	8.9933160946	8.9933158276	8.9933158256	8.9933327569
	0.7	8.9873367674	8.9872864565	8.9872859485	8.9872859447	8.9873181505
	0.8	8.9825705557	8.9825013086	8.9825006094	8.9825006042	8.9825449320
	0.9	8.9795104593	8.9794290545	8.9794282326	8.9794282264	8.9794803371
1.0	8.9784560220	8.9783704279	8.9783695637	8.9783695572	8.9784243499	

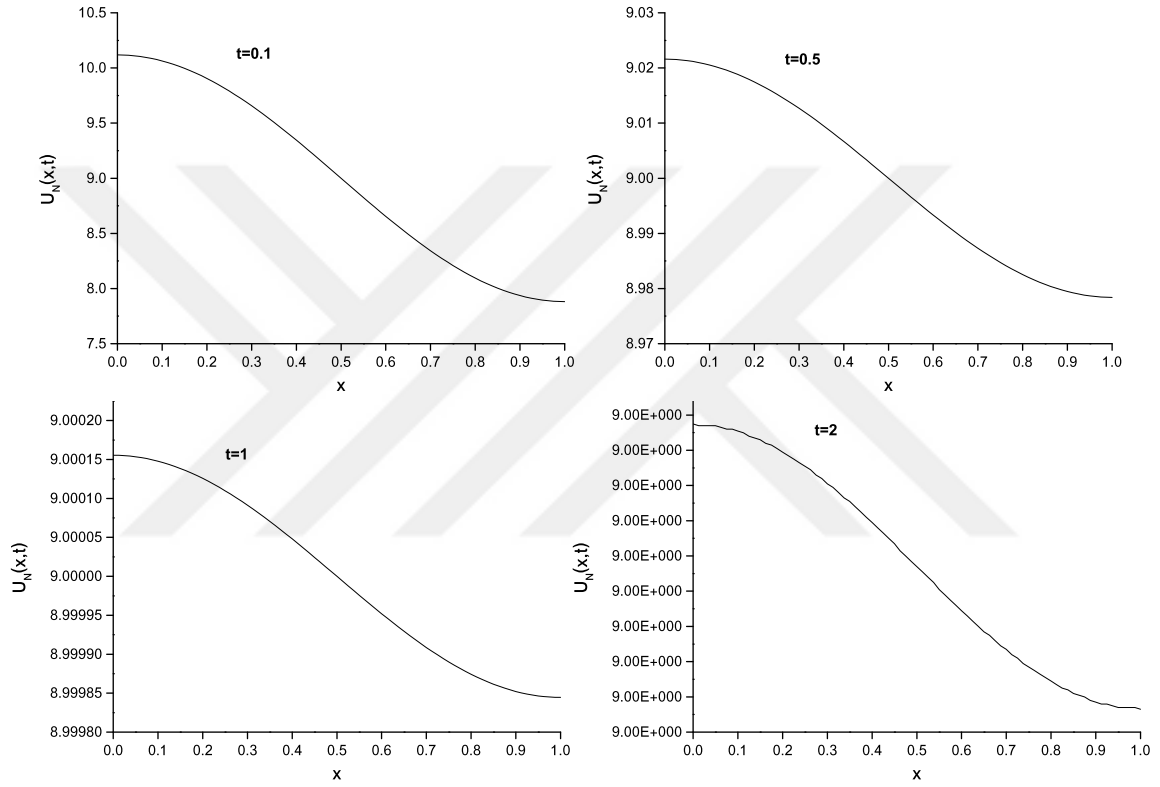
Nümerik çözümlerin sürekliliğini ve problemin doğru fiziksel davranışını sergilediğini göstermek için tam çözümle birlikte aşağıdaki grafikler verildi. Elde edilen nümerik çözümler tam çözüme oldukça yakın olduğundan her iki çözümde aynı grafik üzerinde olup ayırt edilememektedir.



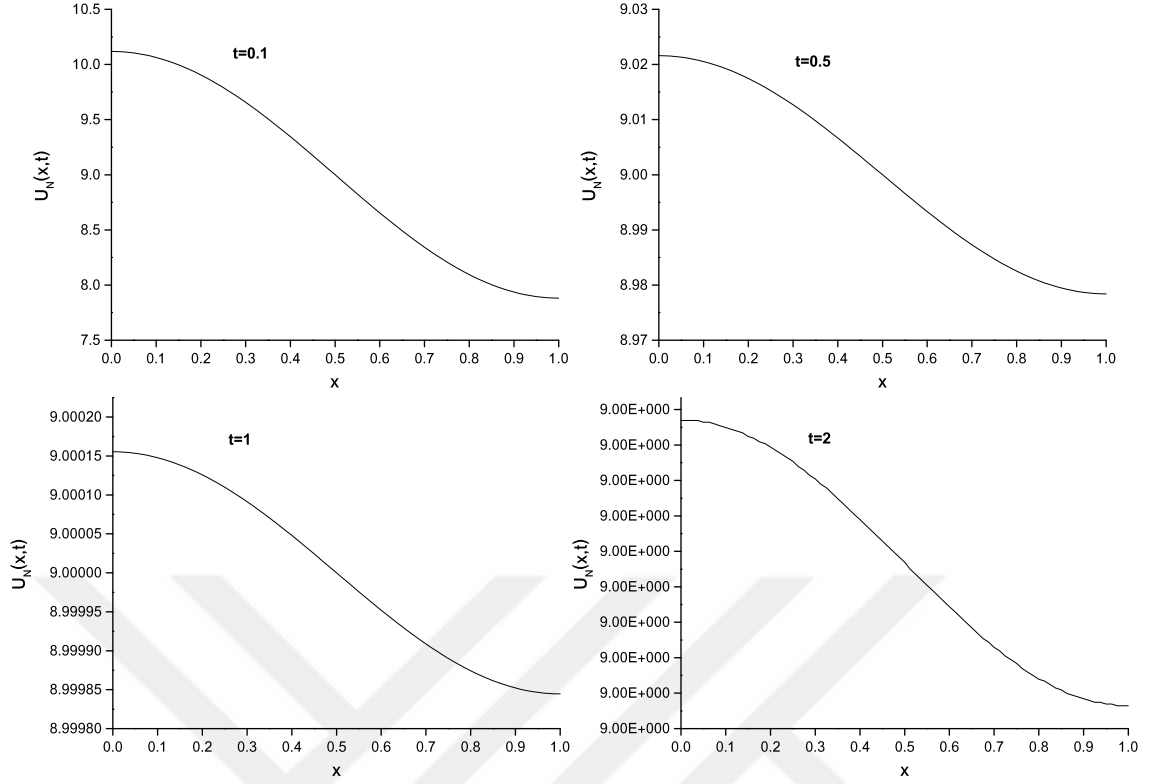
Şekil 3.1: Problem 1'in tam ve  $h = 0.0125$ ,  $k = 0.00001$  için  $t = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0$  zamanlarında T-KSFY ile elde edilen nümerik çözümleri



Şekil 3.2: Problem 1'in tam ve  $h = 0.0125$ ,  $k = 0.00001$  için  $t = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0$  zamanlarında KSFY ile elde edilen nümerik çözümleri



Şekil 3.3: Problem 2'nin tam ve  $h = 0.0125$ ,  $k = 0.00001$  için  $t = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0$  zamanlarında T-KSFY ile elde edilen nümerik çözümleri



Şekil 3.4: Problem 2'nin tam ve  $h = 0.0125$ ,  $k = 0.00001$  için  $t = 0.1, 0.5, 1.0, 2.0$  zamanlarında KSFY ile elde edilen nümerik çözümleri

**Sonuç:** Bu tezde göz önüne alınan başlangıç ve sınır değer problemlerinin sonlu fark yöntemleriyle elde edilen nümerik şemalarını çözmek için sunulan değişkenlerine ayırma tekniği, uygulamalı matematik ve mühendislikte karşılaşılan homojen ve lineer olan birçok başlangıç ve sınır değer problemine rahatlıkla uygulanabilir.

## KAYNAKLAR

- [1] G.D. Smith, *Numerical solution of partial differential equations, Finite Difference Method*, Third Edition, Oxford University Press, New York, 1985, 11-100.
- [2] S. Kutluay, *Klasik Sonlu Fark Yöntemlerine Giriş Ders Notları*, İnönü University, Turkey.
- [3] A. Tveito and R. Winther, *Introduction to Partial Differential Equations : A computational Approach*, Springer-Verlag, Newyork, 1998, 87-148.
- [4] A. Altm, *Fourier Analizi*, Gazi Kitabevi, Ankara, 2011, 10-20.
- [5] Y. Pichover and J. Rubinstein, *An Introduction to Partical Diferential Equations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2005, 98-124.
- [6] S. Kutluay, A.R. Bahadır ve A. Özdeş, *Numerical solution of one-dimensional Burgers equation:explicit and exact-explicit finite difference methods*, **J. Comput. Appl. Math**, 103 (1999) 251-261.
- [7] Shepley L. Ross, *Differential Equations*, John Wiley & Sons, India Delhi, 2004, 715-757.
- [8] R.L.Burden and J.D.Faires, *Numerical Analysis*, Brooks/Cole, Boston, 2011, 716-760.
- [9] N.Özışık, *Heat Conduction*, A Wiley-Interscience Publication, Canada,1980, 492-493.



## ÖZGEÇMİŞ

Selin Ertaş Doğan, 06/01/1989 tarihinde Almanya' da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Malatya 'da tamamladı. 2008 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' ne girdi. 2013 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Uygulamalı Matematik Anabilim Dalı' nda yüksek lisans öğrenimine başladı. 2015 yılında İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Okul Öncesi Öğretmenliği Bölümünü bitirdi. MEB'e bağlı bir eğitim kurumunda öğretmenlik yapmaktadır.

