

**T.C.  
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**İKİLİ BURGERS DENKLEMİNİN  
TRİGONOMETRİK B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE  
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ**



**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Mehmet Kerem YİĞİT**

**Matematik Anabilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf UÇAR**

**TEMMUZ 2021**

T.C.  
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

İKİLİ BURGERS DENKLEMİNİN  
TRİGONOMETRİK B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE  
NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Mehmet Kerem YİĞİT  
(36193614060)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Doç. Dr. Yusuf UÇAR  
Eş Danışman: Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU

TEMMUZ 2021

## TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu tez çalıőmasının her aőamasında yardım, öneri, bilgi, tecrübe ve desteklerini esirgemedenden beni her konuda yönlendiren danışman hocalarım Sayın Doç. Dr. Yusuf UÇAR'a ve Sayın Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU'ya, ayrıca tezin yazımı sürecinde yardımlarını esirgemeyen hocalarım Sayın Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a, Prof. Dr. Alaattin ESEN'e, Prof. Dr. Mustafa Kemal ÖZDEMİR'e, Doç. Dr. Berat KARAAĐAÇ'a ve tüm bölüm hocalarıma, hayatım boyunca olduğu gibi bu çalıőmalarım süresince de benden her türlü desteklerini esirgemeyen eőim TuĐba YİĞİT ve biricik kızım Elif Nevra'ya sonsuz teőekkürlerimi sunarım.

Ayrıca bu çalıőmaya, FYL-2020-2341 nolu proje ile katkıda bulunan İnönü Üniversitesi Bilimsel Araőtırma Projeleri Birimine teőekkürü bir borç bilirim.



## ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “İkili Burgers Denkleminin Trigonometrik B-Spline Kollokasyon Yöntemi ile Nümerik Çözümleri” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Mehmet Kerem YİĞİT



## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
<b>2. TEMEL KAVRAMLAR.....</b>	<b>5</b>
2.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi.....	5
2.1.1 Kollokasyon yöntemi.....	10
2.2 Trigonometrik B-Spline Fonksiyonlar.....	12
2.2.1 Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar.....	12
2.2.2 Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlar.....	16
<b>3. İKİLİ BURGERS DENKLEMİ VE MODEL PROBLEMLER.....</b>	<b>23</b>
3.1 Giriş.....	23
3.2 Model Problemler.....	26
3.2.1 Problem 1.....	26
3.2.2 Problem 2.....	27
3.2.3 Problem 3.....	27
<b>4. İKİLİ BURGERS DENKLEMİNİN TRİGONOMETRİK B-SPLINE KOLLOKAS- YON YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ.....</b>	<b>28</b>
4.1 Lineerleştirme-1 (LİN-1).....	28
4.1.1 Kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi (KBTBKY).....	29
4.1.1.1 Kararlılık analizi.....	38
4.1.2 Kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi (KNTBKY).....	40
4.1.3 Nümerik sonuçlar.....	67
4.1.3.1 Problem 1.....	67
4.1.3.2 Problem 2.....	69
4.1.3.3 Problem 3.....	72
4.2 Lineerleştirme-2 (LİN-2).....	74
4.2.1 Kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi (KBTBKY).....	77
4.2.1.1 Kararlılık analizi.....	83
4.2.2 Kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi (KNTBKY).....	84
4.2.3 Nümerik sonuçlar.....	103
4.2.3.1 Problem 1.....	103
4.2.3.2 Problem 2.....	105
4.2.3.3 Problem 3.....	108
<b>5. SONUÇ.....</b>	<b>112</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>118</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>121</b>

## ÇİZELGELER DİZİNİ

<b>Çizelge 4.1</b> : Problem 1'in $\Delta t = 0.01$ , $N = 50, 100$ ve $200$ için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları. ....	68
<b>Çizelge 4.2</b> : Problem 1'in $N = 100$ , $\Delta t = 0.01, 0.005$ ve $0.001$ için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları. ....	69
<b>Çizelge 4.3</b> : Problem 1'in $\Delta t = 0.01$ , $N = 50$ için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan $L_\infty$ hata normlarının Ref. [30, 34, 37, 40]'daki sonuçlarla karşılaştırılması.....	69
<b>Çizelge 4.4</b> : Problem 1'in $\Delta t = 0.001$ , $N = 200$ ve $400$ için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan $L_2$ ve $L_\infty$ hata normlarının Ref. [26] ve Ref. [30]'da verilenlerle karşılaştırılması. ....	70
<b>Çizelge 4.5</b> : Problem 2'nin $\Delta t = 0.01$ , $k_2 = 0.1$ , $k_3 = 0.3$ , $N = 50, 100$ ve $200$ için farklı zamanlarda KBTBKY ile hesaplanan $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları. ....	71
<b>Çizelge 4.6</b> : Problem 2'nin $\Delta t = 0.01$ , $k_2 = 0.1$ , $k_3 = 0.3$ , $N = 50, 100$ ve $200$ için farklı zamanlarda KNTBKY ile hesaplanan $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları. ....	72
<b>Çizelge 4.7</b> : Problem 2'nin $\Delta t = 0.001$ , $N = 100$ için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan $L_2$ ve $L_\infty$ hata normlarının Ref. [24–26, 30]'daki sonuçlarla karşılaştırılması.....	73
<b>Çizelge 4.8</b> : Problem 3'ün $N = 50$ , $k_2 = k_3 = 10$ ve $k_2 = k_3 = 100$ için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan $U_N$ ve $V_N$ değerleri.....	75
<b>Çizelge 4.9</b> : Problem 3'ün $\Delta t = 0.001$ , $k_2 = k_3 = 10$ ve $k_2 = k_3 = 100$ için KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan maksimum $U_N$ ve $V_N$ değerlerinin Ref. [30]'daki sonuçlarla karşılaştırılması.....	76
<b>Çizelge 4.10</b> : Problem 1'in $\Delta t = 0.01$ , $N = 50, 100$ ve $200$ için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları. ....	104
<b>Çizelge 4.11</b> : Problem 1'in $N = 100$ , $\Delta t = 0.01, 0.005$ ve $0.001$ için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları. ....	104
<b>Çizelge 4.12</b> : Problem 1'in $\Delta t = 0.01$ ve $N = 50$ için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan $L_\infty$ hata normlarının Ref. [30, 34, 37, 40]'daki sonuçlarla karşılaştırılması.....	104
<b>Çizelge 4.13</b> : Problem 1'in $\Delta t = 0.001$ , $N = 200$ ve $400$ için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan $L_2$ ve $L_\infty$ hata normlarının Ref. [26] ve Ref. [30] 'daki sonuçlarla karşılaştırılması.....	106
<b>Çizelge 4.14</b> : Problem 2'nin $\Delta t = 0.01$ , $k_2 = 0.1$ , $k_3 = 0.3$ , $N = 50, 100$ ve $200$ için farklı zamanlarda KBTBKY ile hesaplanan $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları. ....	107
<b>Çizelge 4.15</b> : Problem 2'nin $\Delta t = 0.01$ , $k_2 = 0.1$ , $k_3 = 0.3$ , $N = 50, 100$ ve $200$ için farklı zamanlarda KNTBKY ile hesaplanan $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları. ....	107
<b>Çizelge 4.16</b> : Problem 2'nin $\Delta t = 0.001$ , $N = 100$ için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan $L_2$ ve $L_\infty$ hata normlarının Ref. [24–26, 30]'daki sonuçlarla karşılaştırılması.....	109
<b>Çizelge 4.17</b> : Problem 3'ün $N = 50$ , $\Delta t = 0.001$ , $k_2 = k_3 = 10$ ve $k_2 = k_3 = 100$ için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan $U_N$ ve $V_N$ değerleri. ....	110
<b>Çizelge 4.18</b> : Problem 3'ün $\Delta t = 0.001$ , $k_2 = k_3 = 10$ ve $k_2 = k_3 = 100$ için KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan maksimum $U_N$ ve $V_N$ değerlerinin Ref. [30]'daki sonuçlarla karşılaştırılması.....	111

<b>Çizelge 5.1</b> : Problem 1'in $k_1 = -2, k_2 = k_3 = 1, \Delta t = 0.01, N = 50, 100$ ve $200$ değerleri için $t = 3.0$ zamanında hesaplanan $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları.....	112
<b>Çizelge 5.2</b> : Problem 1'in $k_1 = -2, k_2 = k_3 = 1, N = 100, \Delta t = 0.01, 0.05, 0.001$ değerleri için $t = 3.0$ zamanında hesaplanan $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları .....	113
<b>Çizelge 5.3</b> : Problem 2'nin $k_1 = 2, k_2 = 0.1, k_3 = 0.3, \Delta t = 0.01, N = 50, 100$ ve $200$ değerleri için $t = 3.0$ zamanında hesaplanan $U_N$ 'in $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları.	114
<b>Çizelge 5.4</b> : Problem 2'nin $k_1 = 2, k_2 = 0.1, k_3 = 0.3, \Delta t = 0.01, N = 50, 100$ ve $200$ değerleri için $t = 3.0$ zamanında hesaplanan $V_N$ 'in $L_2$ ve $L_\infty$ hata normları.	114
<b>Çizelge 5.5</b> : Problem 3'ün $k_1 = 2, k_2 = k_3 = 10, \Delta t = 0.001, N = 50$ değerleri için $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ noktalarında $t = 0.4$ zamanında hesaplanan $U_N$ ve $V_N$ çözümleri. ....	115
<b>Çizelge 5.6</b> : Problem 3'ün $k_1 = 2, k_2 = k_3 = 100, \Delta t = 0.001, N = 50$ değerleri için $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ noktalarında $t = 0.4$ zamanında hesaplanan $U_N$ ve $V_N$ çözümleri. ....	116



## ŞEKİLLER DİZİNİ

<b>Şekil 2.1</b> : Sonlu eleman örnekleri [13].	5
<b>Şekil 2.2</b> : Tek boyut için sonlu eleman yaklaşımı [13].	6
<b>Şekil 2.3</b> : Katı cisimler için ağ örnekleri [13].	10
<b>Şekil 2.4</b> : Kübik ve kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlar.	14
<b>Şekil 4.1</b> : Problem 1'in $N = 100$ ve $\Delta t = 0.001$ için $t = 1, 2$ ve $3$ zamanlarında KBTBKY ile hesaplanan $U_N$ ve tam çözümün grafikleri.	71
<b>Şekil 4.2</b> : Problem 3'ün $N = 50$ , $\Delta t = 0.001$ , $k_2 = k_3 = 10$ için $t = 0.1, 0.2, 0.3$ ve $0.4$ zamanlarında KBTBKY ile hesaplanan (a) $U_N$ ve (b) $V_N$ grafikleri.	74
<b>Şekil 4.3</b> : Problem 3'ün $N = 50$ , $\Delta t = 0.001$ , $k_2 = k_3 = 100$ için $t = 0.1, 0.2, 0.3$ ve $0.4$ zamanlarında KBTBKY ile hesaplanan (a) $U_N$ ve (b) $V_N$ grafikleri.	76



## SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\Delta t$	: Zaman Adım Uzunluğu
$h$	: Konum Adım Uzunluğu
<b>KBTBKY</b>	: Kùbik Trigonometrik B-spline Kollokasyon Yöntemi
<b>KNTBKY</b>	: Kuintik Trigonometrik B-spline Kollokasyon Yöntemi
<b>LİN – 1</b>	: Lineerleştirme-1
<b>LİN – 2</b>	: Lineerleştirme-2



# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## İKİLİ BURGERS DENKLEMİNİN TRİGONOMETRİK B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

MEHMET KEREM YİĞİT

İnönü Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Anabilim Dalı

121+ix sayfa

2021

Danışman: Doç. Dr. Yusuf UÇAR

Bu yüksek lisans tezi beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde, tezin temel amacından kısaca bahsedildi ve sonlu eleman yöntemi hakkında bilgi verildi. İkinci bölümde, bu tez çalışmasında kullandığımız temel kavramlar olan sonlu eleman yöntemi, kollokasyon yöntemi ve trigonometrik B-spline fonksiyonlar hakkında bilgi verildi. Ayrıca bu bölümde tezde göz önüne alınacak olan sonlu eleman yönteminin tarihsel gelişiminden bahsedildi. Üçüncü bölümde ikili (coupled) Burgers denklemi ile ilgili literatürdeki çalışmalar sunuldu ve nümerik çözümü yapılacak olan ikili Burgers denkleminin farklı başlangıç ve sınır şartları ile verilen üç model problemi tanıtıldı. Dördüncü bölümde, ikili Burgers denklemindeki lineer olmayan terimler yerine LİN-1 ve LİN-2 olmak üzere iki farklı lineerleştirme tekniği kullanılarak kübik ve kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile nümerik şemaları elde edildi. Bu nümerik şemaların önceki bölümde verilen üç model probleme uygulanmasıyla elde edilen nümerik sonuçlar mevcut tam çözümle ve/veya literatürdeki farklı çalışmalardaki sonuçlarla çizelgeler halinde karşılaştırıldı. Her iki lineerleştirme tekniğinde elde edilen nümerik şemaların kararlılık analizleri benzer olacağından LİN-1 ve LİN-2 için kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemleriyle elde edilen şemaların kararlılık analizi von Neumann yöntemiyle incelendi. Beşinci ve son bölümde, uygulanan her iki lineerleştirme tekniğinden elde edilen sonuçlar her bir model problem için kendi içerisinde çizelgeler halinde karşılaştırıldı.

**Anahtar Kelimeler:** İkili Burgers Denklemi, Sonlu Eleman Yöntemleri, Kollokasyon Yöntemi, Trigonometrik B-Spline Fonksiyonlar

## ABSTRACT

Master Thesis

### NUMERICAL SOLUTIONS OF COUPLED BURGERS EQUATION BY TRIGONOMETRIC B-SPLINE COLLOCATION METHOD

Mehmet Kerem YİĞİT

Inonu University  
Graduate School of Nature and Applied Sciences  
Department of Mathematics

121+ix pages

2021

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Yusuf UÇAR

This master thesis consists of five chapters. In the first chapter, the main purpose of the thesis was briefly mentioned and some information about the finite element method was given. In the second chapter, information was given about the basic concepts that we used in this thesis, the finite element method, the collocation method and trigonometric B-spline basis functions. In addition, in this chapter, the historical development of the finite element method, which is going to be considered in the thesis, is mentioned. In the third chapter, the studies related to the coupled Burgers equation in the literature are presented and three model problems of the coupled Burgers equation to be solved numerically with different boundary and initial conditions are introduced. In the fourth chapter, using two different linearization techniques, LIN-1 and LIN-2, instead of the non-linear terms in the coupled Burgers equation, numerical schemes were obtained by cubic and quintic trigonometric B-spline collocation finite element method. The numerical results obtained by applying these schemes to the three models given in the previous section were compared with the available exact solution and/or the results from different studies in the literature in tabular form. Since the stability analysis of the numerical schemes obtained in both linearization techniques are going to be similar, the stability analysis of the schemes obtained by the cubic trigonometric B-spline collocation methods for LIN-1 and LIN-2 was examined by the von Neumann method. In the fifth and last part, the results obtained from both applied linearization techniques were compared for each model problem in the form of tables.

**Keywords:** Coupled Burgers Equation, Finite Element Methods, Collocation Method, Trigonometric B-Spline Functions

## 1. GİRİŞ

Doğada karşılaşılan problemleri çözmek için bilim insanları temelde aşağıdaki üç yöntemden birini veya bunların kombinasyonunu kullanırlar:

1. Teorik yaklaşım
2. Deneysel yaklaşım
3. Nümerik yaklaşım

Bu yaklaşımlar içinden teorik yaklaşım tam çözümü vermesi gibi çok önemli bir avantaja sahiptir. Fakat tam çözümü elde edilebilen problem sayısı sınırlıdır. Deneysel yaklaşımda ise ele alınan probleme deney yapılarak yaklaşılır. Bu yaklaşımın en büyük dezavantajı deneylerin oluşturulmasının teknik olarak zor, zaman alıcı ve yüksek maliyetli olmasıdır. Nümerik yaklaşımda ise bir probleme genellikle diferansiyel veya integral denklemler kullanılarak yaklaşılır. Nümerik yaklaşım evrensel, esnek, hassas ve düşük maliyetli olması bakımından ilk iki yaklaşımın önüne geçer [1].

Bu üç yaklaşımdan hangisi kullanılırsa kullanılsın, doğa bilimlerinin temel görevi doğadaki olayları mümkün olduğunca doğru bir şekilde tanımlamaktır. Bu doğru tanımlama doğa olaylarını daha iyi anlamayı ve doğadaki nesnelerin belirli şartlar altında nasıl davrandıkları ile ilgili bilgi edinmeyi sağlar. Kuantum mekaniğindeki madde konusundan evrenin orijini incelemeye kadar geniş bir alanı kapsayan bu çalışmaları deneysel olarak gözlemlemek her zaman mümkün olmayabilir. Böyle durumlarda bilim insanları doğadaki fiziksel olayların nümerik simülasyonuna başvururlar. Doğadaki fiziksel olayların nümerik olarak simülasyonu doğa bilim insanlarının gözlem ve modellemelerine, mühendislerin teknik uzmanlıklarına, matematikçilerin nümerik yöntemlerine ve bilgisayar alanında çalışan bilim insanlarının modern teknik ve bilgisayar yazılımlarını gerektirir. Bu bilim dalları arasındaki işbirliği doğa olaylarını bilgisayarlarda simüle etmek kapasitemizi büyük ölçüde iyileştirecektir. Böylece pahalı deneylerin yerine bilgisayar simülasyonları geçecektir. Bununla birlikte, bilgisayar simülasyonu deneysel olarak test edilemeyecek işlemlerin de incelenmesine olanak verir [2]. Doğadaki olayları modelleyen bu bilgisayar simülasyonları için elde edilen denklemler genellikle diferansiyel ve integral denklemler olarak karşımıza çıkarlar. Bu diferansiyel denklemlerden bazıları adi diferansiyel denklem olsa da çoğunluğu kısmi diferansiyel denklemlerdir. Çünkü adi diferansiyel denklemler tellerdeki titreşim, sesin yayılımı, sıvılarda dalga oluşumu ve

yerçekimi gibi konuların incelenmesinde yetersiz kalırlar. Kısmi diferansiyel denklemler (KDD) uygulamalı matematiğin hemen hemen tüm dallarının temelini oluşturur. Bu tür denklemler birçok gerçek hayat şartlarının matematiksel modellerinde ortaya çıkarlar. Örneğin kuantum mekaniği Schrödinger denklemlerine, akışkanlar mekaniği Navier-Stokes denklemlerinin değişik formlarına ve elektromanyetik teori Maxwell denklemlerine dayanmaktadır. Kısmi diferansiyel denklemler matematiğin çok geniş bir çalışma alanını oluştururlar ve dolayısıyla hem analitik hem de nümerik çalışmalar için önemlidirler [3]. KDD fiziksel, kimyasal ve biyolojik olayların matematiksel temelini oluştururlar ve son zamanlarda ekonomi, finansal tahmin, görüntü işleme gibi bir çok alanda da yaygın bir şekilde kullanılmaya başlandı. Bu alanların tümünde KDD modellerinin tahminleri için elde edilen bu denklemlerin çözümlerine çoğunlukla nümerik olarak yaklaşmak gerekir [4]. Çünkü lineer ve lineer olmayan diferansiyel denklemler olarak modellenen bu sürekli sistemlerin nümerik analizi ile elde edilen sonuçlarla doğa olaylarına karşılık gelen modeller hakkında daha doğru bilgi edinmek mümkün olacaktır [5]. Son yıllarda bilgisayar teknolojisi ve nümerik yöntemlerde kaydedilen muazzam ilerlemeler nümerik simülasyon yöntemlerinin bir çok alanda her geçen gün biraz daha önem kazanmasına yol açmıştır. Bu durum özellikle tüm mühendislik dalları için geçerlidir. Bir çok durumda nümerik yöntemler ürün imalatı ve süreç yönetiminin optimizasyonu ve incelenmesi için maliyet yönünden düşük olduğu için cazip hale gelmiştir. Nümerik simülasyon araçlarını kompleks endüstriyel problemlere uygulayan güçlü yazılımların olması ve aynı zamanda bu yazılımların hızlı bir şekilde gelişmeye devam etmesi nümerik yöntemleri vazgeçilmez bir araç haline getirmektedir [6]. Nümerik yöntemler kısmi diferansiyel denklemleri bilgisayarları kullanarak çözümlerini çok daha kolay olan cebirsel denklemlerine dönüştürürler [7]. Diferansiyel denklemler mühendislik matematiğinde temel bir öneme sahiptirler çünkü bir çok fiziksel yasa ve bağıntı karşımıza diferansiyel denklemler olarak çıkar. Örneğin hız, ivme kavramları bir diferansiyel denklemler ile sonuçlanan model olarak karşımıza çıkarlar. Bu durumda bu model için bir çözüm bulmak, onun özelliklerini incelemek, grafiğini çizmek, bazı noktadaki değerlerini bulmak, fiziksel davranışını anlamak isteriz [8]. Bunun için genellikle nümerik yöntemlere başvurulur. Bu yöntemler arasında varyasyonel yöntemler, sonlu fark yöntemleri ve sonlu eleman yöntemleri (SEY) öne çıkarlar. Bu tez çalışmasında kullanılacak olan sonlu eleman yöntemi son yıllarda en çok kullanılanlar arasındadır. Sonlu eleman yöntemi mühendislik ve matematiksel fizikte ortaya çıkan problemlerin çözümü için kullanılan nümerik yöntemlerden biridir. Sonlu eleman yöntemi kullanılarak çözülebilen mühendislik ve matematiksel fizik problemlerinden bazıları yapısal analiz, ısı iletimi, akışkanlar mekaniği, toplu taşımacılık ve

elektromanyetik potansiyel olarak verilebilir [9]. SEY son zamanlarda konut, taşımacılık, telekomünikasyon ve benzeri bir çok alanda ileri mühendislik sistemlerinin modellenmesinde ve simülasyonunda vazgeçilmez bir teknoloji haline geldi [10]. Aslında karmaşık geometrik yapı, yük ve malzeme özelliklerini içeren fiziksel sistemler için bu fiziksel sisteme karşılık gelen analitik matematiksel çözümleri elde etmek genellikle mümkün değildir. Burada sözü edilen analitik çözümler bir çözüm bölgesinin herhangi bir noktasında bilinmeyenini değerini veren matematiksel ifade olup çözüm bölgesinin sonsuz sayıdaki noktasında geçerli olan çözümlerdir. Bu analitik çözümler genellikle mühendis, matematikçi ve fizikçiler tarafından oluşturulan adi veya kısmi diferansiyel denklemlerin çözümleri ile elde edilir. Bu çözümler oldukça maliyetli olan çok sayıda prototiplerin oluşturulması ve test edilmesi ihtiyacını ortadan kaldırır. Fakat karmaşık geometri, yük ve malzeme özelliklerinden dolayı bu diferansiyel denklemlerin analitik çözümleri genellikle elde edilemez. Dolayısıyla, bu denklemlerin çözümüne yaklaşan sonlu eleman yöntemi gibi sayısal yöntemlere güvenmek gerekir. Bir problemin sonlu eleman yöntemi ile ele alınması diferansiyel denklemlerin çözümünden ziyade cebirsel denklemlerin çözümünü gerektirir. Bu tür nümerik yöntemler bilinmeyenini yaklaşık değerini yalnızca sürekli çözüm bölgesinin belirli düğüm noktalarında verir. İşte bir model problemin çözüm bölgesinin daha küçük birimlere (sonlu elemanlar) ayrılması işlemi ayrıklaştırma (diskritizasyon) olarak adlandırılır [9]. Sonra her bir eleman üzerinde eleman denklemleri oluşturulur. Daha sonra sonlu elemanlar üzerinde elde edilen bu eleman denklemleri birleştirilerek tüm bölge üzerinde yaklaşık çözüm elde edilir. Elde edilen bu yaklaşık çözüm mevcut tam çözümle veya literatürdeki diğer nümerik sonuçlarla tablolar ve şekiller halinde karşılaştırılır.

Bu tezde,  $U(x, t)$  ve  $V(x, t)$  bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere,

$$U_t - U_{xx} + k_1 U U_x + k_2 (UV)_x = 0 \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T] \quad (1.0.1a)$$

$$V_t - V_{xx} + k_1 V V_x + k_3 (UV)_x = 0 \quad x \in [a, b], \quad t \in [0, T] \quad (1.0.1b)$$

biçiminde göz önüne alınan ikili Burgers denkleminin sonlu eleman yöntemiyle nümerik çözümleri elde edildi. Burada  $k_1$ ,  $k_2$  ve  $k_3$  reel sabitlerdir. Ayrıca  $x$  ve  $t$  ise sırasıyla konum ve zaman türevlerini gösterir. Denklemlerde  $U U_x$  ve  $V V_x$  lineer olmayan terimler,  $U_{xx}$  ve  $V_{xx}$  difüzyon terimleridir. Denklem

$$U(x, 0) = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

$$V(x, 0) = g(x), \quad a \leq x \leq b$$

başlangıç şartları ve

$$\begin{aligned}U(a,t) &= f_1(a,t), & U(b,t) &= f_2(b,t), \quad t \in [0,T] \\V(a,t) &= g_1(a,t), & V(b,t) &= g_2(b,t), \quad t \in [0,T]\end{aligned}$$

sınır şartları ile göz önüne alındı. Burada  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $f_1(a,t)$ ,  $f_2(b,t)$ ,  $g_1(a,t)$  ve  $g_2(b,t)$  ön tanımlı fonksiyonlardır [11]. Bu ikili sistem Esipov [12] tarafından ortaya atılmış olup yer çekimi etkisi altında sıvı süspansiyon veya kolloidler içinde iki çeşit partikülün hacim yoğunluklarının gelişimi veya çöktürmesini modellemek için kullanılan bir modeldir. Denklemdaki  $k_2$  ve  $k_3$  sabitleri Péclét sayısı, partiküllerin yer çekiminden kaynaklanan Stokes hızı ve Brownian difüzyon katsayısı gibi sistem parametrelerine bağlıdır [11]. Esipov [12] çalışmasında (1.0.1) denkleminin nümerik simülasyonunu sunmuş ve sonuçlarını deneysel verilerle karşılaştırmıştır.

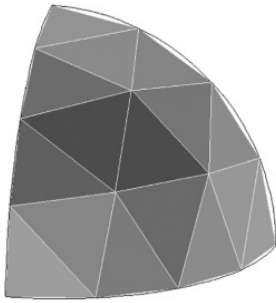
Bu yüksek lisans tez çalışmasında ikili Burgers denkleminin trigonometrik B-spline fonksiyonlar kullanarak kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle nümerik çözümleri bulundu.

## 2. TEMEL KAVRAMLAR

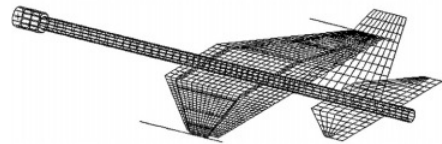
### 2.1 Sonlu Elemanlar Yöntemi

Doğa bilim insanlarının gözlem ve modellemeleri, mühendislerin teknik uzmanlıkları, matematikçilerin nümerik yöntemleri, bilgisayar uzmanlarının modern teknikleri ile birlikte fiziksel olayların nümerik simülasyonunun oluşturulmasına olanak sağlar [2]. Sonlu Eleman Yöntemi (SEY), ileri mühendislik sistemlerinin modellenmesinde ve simülasyonunda inşaat, taşımacılık, iletişim ve benzeri alanlarda vazgeçilmez bir yöntemdir. Mühendisler ve tasarımcılar ileri bir mühendislik sistemi oluştururken modelleme, simülasyon, görselleştirme, analiz, tasarım, prototipleme, test ve son olarak da imalat gibi kompleks bir süreci takip ederler. Bu nihai ürünün çalışılabilirliğini ve imalat sürecinin mali etkinliğini garanti etmek için takip edilen bir süreçtir. Bu süreç, doğası gereği iteratiftir, yani bazı prosedürlerin, inşa edilecek sistem için en düşük maliyetle en uygun performansı elde etmek için mevcut aşamada elde edilen sonuçlara dayalı olarak tekrarlandığı anlamına gelir. Bu nedenle, hızlı ve etkili bir şekilde modelleme ve simülasyonla ilgili teknikler giderek daha önemli bir rol oynamaktadır ve SEY, bir sistemin veya ürünün geliştirilmesi için standart bir araç haline geldi [13].

Öyleyse SEY nedir? SEY ilk olarak katı ve yapısal analiz problemlerini çözmek için kullanıldı ve o zamandan beri termal analiz, sıvı akış analizi, piezoelektrik analizi gibi birçok probleme uygulandı. Bazı analizciler yapısal mekanik analizinde yer değişim, termal analizde ısı akışı veya sıcaklık, elektriksel analizde elektrik yükü gibi bazı alan değişkenlerinin dağılımını belirlemeye çalışırlar. SEY, analitik olarak elde edilmesi genellikle zor olan problemlerde alan



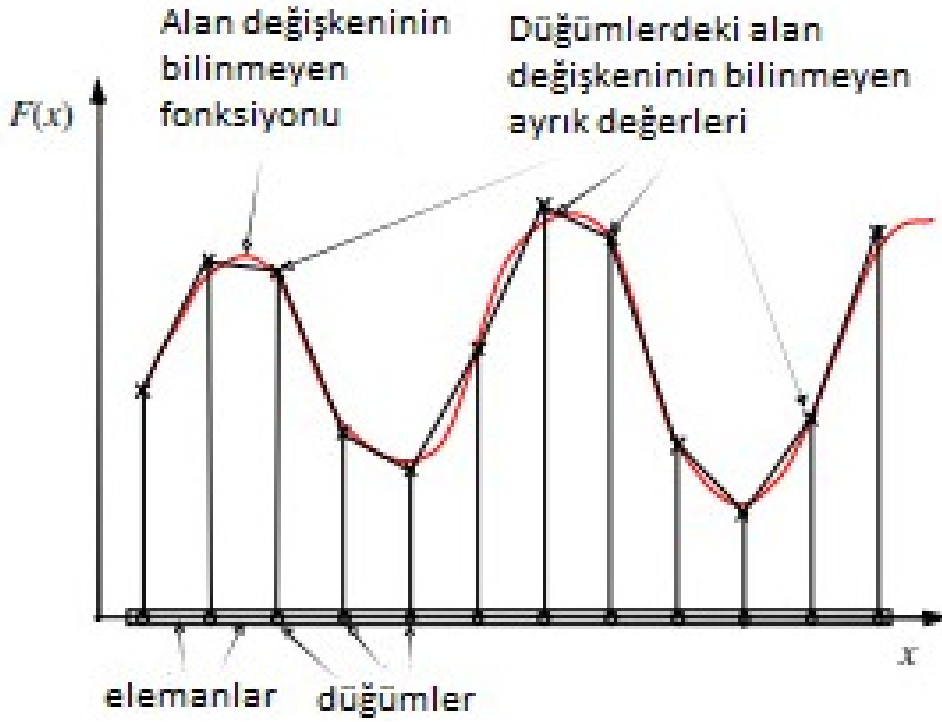
(a) Bir kaç kabuk elamanına parçalanmış yarı küre şekli.



(b) Laboratuvar ortamında dinamik test için ölçekli bir uçak modelinin tasarım ağı.

**Şekil 2.1** : Sonlu eleman örnekleri [13].





**Şekil 2.2 :** Tek boyut için sonlu eleman yaklaşımı [13].

değişkenlerinin dağılımının yaklaşık bir çözümünü arayan nümerik bir yöntemdir. SEY'in ilk adımı Şekil 2.1 'de gösterildiği gibi basit bir geometriye sahip problem bölgesinin elemanlar diye adlandırılan bir takım küçük parçalara bölünmesiyle başlar. Daha sonra fiziksel ilkeler/kanunlar her bir elemana uygulanır. Şekil 2.2, SEY ile yaklaşımı yapılan bir boyutta herhangi bir  $F(x)$  alanının dağılımını sistematik olarak göstermektedir. Bu durumda  $F(x)$ , kendisine lineer parçalı doğrusal fonksiyonlar kullanılarak yaklaşım yapılan sürekli bir fonksiyondur. Bir boyutlu durumda, her bir elemanın uçları düğüm olarak adlandırılır. SEY'deki bilinmeyen değişkenler düğümlerdeki alan değişkeninin ayrık değerleridir. Daha sonra, her bir eleman için eleman denklemlerini oluşturmak amacıyla fiziksel ve matematiksel ilkeler takip edilir, devamında tüm bölge üzerinde alanın dağılımını tanımlamak için elemanlar birbirine bağlanır. Bu süreç, istenilen alan değişkenini elde etmek için bütün sistem için kolayca çözülebilen bir dizi doğrusal cebirsel eşzamanlı denklemlere yol açar [13].

Bir mühendislik sisteminde çok sayıda fiziksel problem vardır. Bu problemlerin pahalı ve zaman alıcı deneylerin yerini her geçen gün bilgisayar simülasyonları almaktadır [2]. Bu simülasyonlarda karşımıza çıkan kısmi diferansiyel denklemler matematikte özel ve önemli bir yere sahiptirler. Kısmi diferansiyel denklemler bilinçli olarak bir çalışma alanı oluşturmak

için oluşturulmamış fakat adi diferansiyel denklemlerin tanımlamada başarısız kaldıkları fiziksel prensipleri tanımlamak üzere 18. yüzyılda ortaya çıkmışlardır [3]. Daha önce bahsedildiği gibi, SEY başlangıçta katı ve yapısal analiz için kullanılmış olmasına rağmen diğer birçok fiziksel problem de SEY kullanılarak çözülebilir. Mühendislik sistemlerinde meydana gelen birçok fiziksel olay için SEY'in matematiksel modeli formüle edilmiştir. Standart SEY kullanılarak çözülen yaygın fiziksel problemler:

- Katılar ve yapılar için mekanik
- Isı transferi
- Akustik
- Akışkanlar mekaniği
- Yukarıdakilerin kombinasyonları
- Diğerleri

dir.

SEY kullanarak hesaplamalı modelleme:

Diferansiyel denklemler mühendislik matematiğinde temel bir öneme sahiptirler, çünkü birçok fiziksel yasa ve bağıntı matematiksel olarak modellendiğinde karşımıza diferansiyel denklem olarak çıkarlar. Bilim insanları ilk önce fiziksel sistemi bir durumu matematiksel modele dönüştürürler. Eğer bir mühendislik problemi çözülecekse, problem ilk önce değişkenler, fonksiyonlar ve denklemler olarak matematiksel olarak ifade edilirler. Bu tür ifadeler verilen problem veya sistemin matematiksel modeli olarak bilinirler. İşte bu modelin oluşturulması, matematiksel olarak çözülmesi ve sonuçların fiziksel olarak yorumlanması matematiksel modelleme veya kısaca modelleme olarak adlandırılır [8]. Bir sistemdeki fiziksel bir olayın davranışı, sistemin çözüm bölgesine veya geometrisine, kullanılan malzeme veya ortamın özelliğine, sınır, başlangıç ve yük şartlarına bağlıdır. Bir mühendislik sistemi için, çözüm bölgesi veya geometrisi çok kompleks olabilir. Bunun ötesinde, sınır ve başlangıç şartları da çok karmaşık olabilir. Bu nedenle, genel olarak, diferansiyel denklemleri analitik yollarla çözmek çok zordur. Pratikte problemlerin çoğu nümerik yöntemler kullanılarak çözülür. Bu yöntemler arasında, başını SEY'in çektiği bölge ayrıklaştırma yöntemleri, güvenilirlikleri, pratiklikleri, çok yönlülükleri ve sağlamlıkları nedeniyle en popüler olanlardır [13].

SEY'i kullanan hesaplamalı modelleme prosedürü genel olarak dört adımdan oluşur:

- Geometrinin modellenmesi
- Ağ oluşturma (ayrıklaştırma)
- Malzeme özelliğinin belirlenmesi
- Sınır, başlangıç ve yükleme koşullarının belirlenmesi

Şimdi bu adımları kısaca ele alalım.

### *Geometrinin Modellenmesi*

Çoğu fiziksel yapı, bileşen veya bölge genel olarak çok karmaşıktır ve genellikle birden çok bileşenden oluşur. Otomobil, uçak ve gemi bunlara örnek olarak verilebilir. Bu nedenle, modellemenin daha yönetilebilir olması için geometriyi basit parçalara ayırmak yaygın ve iyi bir uygulamadır. Bir yapının geometrisi ve sınırı eğimli yüzeylerden/doğruların oluşabilir, ancak SEY tabanlı modelleme yaptığımızda, geometrinin sonunda bir dizi eleman ve yüzey/doğrular tarafından temsil edildiğini akılda tutmak önemlidir. Bu elemanların düz/düz parçalar/segmentler olduğu varsayılırsa (yani, doğrusallık varsayılırsa), parçalı düz çizgiler veya düz yüzeyler ile yaklaşılabilir. Şekil 2.1, bir üçgenel elemanın kenarlarının doğru parçalarıyla temsilini göstermektedir. Eğri parçanın temsilinin doğruluğu, Şekil 2.1'deki gibi, kullanılan eleman sayısı ile kontrol edilir. Daha fazla elemanla, kavisli parçaların düz kenarlarla temsilinin daha pürüzsüz ve daha doğru olacağı açıktır. Öte yandan, daha fazla eleman ile daha uzun hesaplama süresi gereklidir. Ne yazık ki, modelleyiciler genellikle mevcut hesaplama kaynakları açısından kısıtlamalarla karşılaşır ve genellikle modelde kullanılan elemanların sayısını sınırlamak gerekir. Bu nedenle, kullanılan optimum sayıda elemana karar vermek için tavizler verilir. Bu tavizler genellikle, bu bölgeler için çok doğru sonuçlar gerekmedikçe, geometrinin ince ayrıntılarının ihmal edilmesiyle sonuçlanır. Analizciler daha sonra simülasyonun sonuçlarını bu geometrik yaklaşımları akılda tutarak yorumlarlar [13].

Kullanılan yazılıma bağlı olarak, SEY ağı için bilgisayarda uygun bir geometri oluşturmanın birçok yolu vardır. Noktalar, koordinatların girilmesiyle oluşturulabilir. Noktalar veya düğümler birleştirilerek doğrular ve eğriler oluşturulabilir. Mevcut doğruları veya eğrileri birleştirerek, döndürerek veya çevirerek yüzeyler oluşturulabilir. Katılar, mevcut yüzeyleri bağlama, döndürme veya çevirme gibi çeşitli işlemlerle oluşturulabilir. Noktalar, doğrular ve eğriler, yüzeyler ve katılar yenilerini oluşturmak için çevrilebilir, döndürülebilir veya yansıtılabilir.

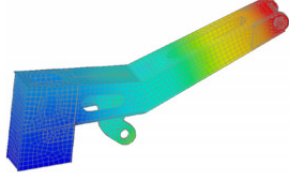
### *Ağ oluşturma*

Geometrik bölge veya çözüm bölgesi, elemanlar veya hücreler olarak adlandırdığımız küçük parçalara ayrıştırıldığında bu işlem *ağ oluşturma(meshing)* olarak adlandırılır. Neden bir ağ yapısı oluşturulur? Bunun arkasındaki gerekçe aslında çok mantıksal bir anlayışa dayanmaktadır. Bir mühendislik probleminin çözümünü çok kompleks olmasını ve problemin çözüm bölgesi boyunca fonksiyonlar kullanılarak yaklaşımda tahmin edilemez bir şekilde değişmesini bekleyebiliriz. Fakat çözüm bölgesi düğüm noktaları kullanılarak elemanlara bölünürse bir eleman üzerinde çözümün varyasyonu polinom gibi basit fonksiyonlar kullanılarak kolaylıkla yaklaşık olarak bulunabilir. Böylece tüm elemanlar için çözümdeki toplam varyasyon bütün problemin çözüm bölgesindeki varyasyonu oluşturur [13].

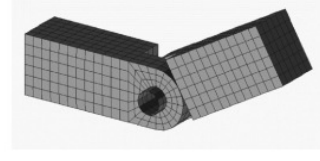
Ağ oluşturma, SEY'nin önemli bir adımıdır. Analizciler için çok zaman alan bir görev olabilir ve genellikle deneyimli bir analizci kompleks bir problem için daha güvenilir bir ağ oluşturur. Çözüm bölgesi, 2 boyutta üçgenler ve dörtgenler, 3 boyutta ise dört veya beş yüzlüler gibi belirli şekildedeki elemanlara uygun şekilde bölünmelidir. Eleman birleştirme gibi bilgiler, daha sonra SEY denklemlerinin oluşturulmasında kullanılmak üzere ağ oluşturma sırasında oluşturulmalıdır. Ticari SEY yazılım paketlerinin bir parçası olarak çoğu ön işlemcide yarı otomatik bir ağ oluşturucu mevcuttur. Ayrıca esas olarak ağ oluşturma için tasarlanmış paketler de vardır. Bu tür paketler, diğer modelleme ve simülasyon paketleri tarafından okunabilen bir ağın dosyalarını oluşturabilir. Üçgen şeklinde elemanlar kullanmak, üçgen elemanlarla ağlar oluşturmanın en esnek ve iyi bilinen yoludur. İki boyutlu düzlemler ve hatta üç boyutlu uzaylar için neredeyse tamamen otomatik hale getirilebilir. Bu nedenle, çoğu ön işlemcide yaygın olarak bulunur. Üçgen kullanmanın ek avantajı, karmaşık geometriyi ve sınırlarının adaptasyonunda esnekliktir. Üçgenleri keskin bir geometri köşesine sığdırmak kolayca görselleştirilebilir. Ancak dörtgenleri bozmadan bunun nasıl yapılacağı durumu açık değildir. Bununla birlikte, üçgen eleman kullanmanın dezavantajı, üçgen elemanlara dayanan simülasyon sonuçlarının doğruluğunun, dörtgen elemanlar kullanılarak elde edilenden önemli ölçüde daha düşük olmasıdır. Dörtgen eleman ağlarının otomatik bir şekilde üretilmesi genellikle daha zordur. Ayrıklaştırılmış katı ve yapıların bazı örneği Şekil 2.1 (b) ve Şekil 2.3'de verildi [13].

#### *Malzeme veya Ortam Özellikleri*

Birçok mühendislik sistemi çok sayıda parçadan oluşur ve her bir parça farklı malzemedan yapılmış olabilir. Aslında bir tek parça içinde bile çok sayıda malzeme olabilir. Kompozit malzemeler buna örnek olarak verilebilir. Bu yüzden malzeme özellikleri bir grup eleman



(a) Gerilim dağılımını gösteren bir simülasyon ağı.



(b) Bir menteşe bağlantısının ağı.

**Şekil 2.3 :** Katı cisimler için ağ örnekleri [13].

veya her bir eleman için tanımlanabilir. İşte bu yüzden SEY çok sayıda malzemeden oluşan sistemler için etkin bir şekilde işlev görür, bu SEY'in önemli avantajlarından biridir. Farklı fiziksel olayların simüle edilmesi için farklı malzeme özelliklerine ihtiyaç duyulur. Burada zor olan bu özelliklerin elde edilmesidir [13].

#### *Sınır, Başlangıç ve Yük Şartları*

Sınır, başlangıç ve yük şartları simülasyonda önemli bir rol oynar. Bu şartların tanımlanması genellikle önceden yapılır ve grafiksel olarak sunulur. Bu şartların belirlenmesi geometrik özelliklerle (Nokta, doğru veya eğri, yüzey ve katılar) veya ağ özellikleri (düğüm noktaları, elementler, elementlerin kenarları, elementlerin yüzeyleri) yardımıyla olur. Yine de bu şartların gerçek mühendislik sistemlerine uygulanması tecrübe, bilgi ve uygun mühendislik değerlendirmelerini gerektirir. Sınır, başlangıç ve yük şartları problemden probleme değişir ve her bir problem için özel olarak ele alınır [13].

### **2.1.1 Kollokasyon yöntemi**

Sonlu elemanlar yönteminin integral formları varyasyonel ve ağırlıklı kalan yöntemleri olmak üzere iki farklı yoldan elde edilir. Bir diferansiyel denklemin tam çözümü ile yaklaşık çözümü arasındaki farkın sıfırdan farklı bir ağırlık fonksiyonu ile çarpılıp toplamlarının minimum yapılması işlemine ağırlıklı kalan yaklaşımı ve bu yaklaşıma dayanan yöntemlere ise ağırlıklı kalan yöntemi denir. Ağırlıklı kalan yönteminde, ağırlık fonksiyonunun seçimine göre yöntem farklı isimler alır. Bunlardan bazıları Galerkin, Petrov-Galerkin, Kollokasyon, En Küçük Kareler yöntemleridir [14]. Bu çalışmada Kollokasyon yöntemi kullanılacaktır. Bu yöntemin temeli aşağıda verilen adımlara dayanır.

$L$  bir lineer diferansiyel operatör,  $f(x)$  bilinen bir fonsiyon ve  $U(x)$  aranan çözüm olmak üzere

$$LU(x) = f(x) \quad (2.1.1)$$

diferansiyel denkleminin nümerik çözümü için ağırlıklı kalan yöntemi kullanıldığında, aranan  $U(x)$  ifadesi yerine aşağıdaki formda  $U_N(x)$  sonlu yaklaşım serisi kullanılır.

$$U(x) \approx U_N(x) = \sum_{j=1}^N a_j \Phi_j(x) \quad (2.1.2)$$

Eşitlikte verilen  $\Phi_j(x)$ ,  $j = 1, \dots, N$  fonsiyonu diferansiyel denklemin tanım bölgesi üzerinde tanımlı ve  $a_j$ ,  $j = 1, \dots, N$  bilinmeyen katsayılarıdır.  $\Phi_j(x)$  fonsiyonları problem için verilen tüm sınır şartlarını sağlayacak şekilde seçilirler ama genelde diferansiyel denklemini sağlamazlar.

(2.1.2) yaklaşık çözümü (2.1.1) operatör denkleminde yerine yazılırsa

$$R(x) = LU_N(x) - f(x) = LU_N(x) - LU(x)$$

olarak tanımlanan  $R(x)$  kalanı elde edilir. Ağırlıklı kalan yöntemlerinde  $R(x)$  kalanı, seçilen  $\Phi_j(\cdot)$  fonsiyonları ve  $a_j$  bilinmeyen parametrelerinin bir fonsiyonudur. Bu yöntemler yardımı ile  $a_j$  parametrelerinin belirlenmesinde,  $R(x)$  kalanı ile bir  $W_j$  ağırlık fonsiyonunun çarpımının  $\Omega$  bölgesindeki integralinin sıfır olması istenir:

$$\int_{\Omega} W_j(x) R(x) dx = 0, \quad j = 1, \dots, N \quad (2.1.3)$$

Böylece (2.1.3) formundaki  $N$  bilinmeyenli  $N$  denklemden oluşan bir cebirsel denklem sistemi elde edilir [15].

Ağırlıklı kalan yönteminin bir uygulaması olan kollokasyon yönteminde  $W_i$  ağırlık fonsiyonları olarak

$$W_j = \delta(x - x_j)$$

Dirac Delta fonsiyonları olarak seçilirse  $R(x_j) = 0$ ,  $j = 1, \dots, N$  olduğunda, (2.1.3) integralinin sonucu özdeş olarak sıfır olacaktır. Dolayısıyla kollokasyon yöntemi için çözüm, (2.1.2)

eşitiliğinin sayısal çözümü aranan denklemde yerine yazılmasıyla

$$LU_N(x) - LU(x) = 0$$
$$L \left( \sum_{j=1}^N a_j \Phi_j(x) \right) - f(x) = 0$$

formunda elde edilir [15].

## 2.2 Trigonometrik B-Spline Fonksiyonlar

### 2.2.1 Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar

Spline keskin dönüşleri olmayan bir eğriyi çizmek için kullanılan basit bir mekanik araçtır. Genellikle tahta veya bazı diğer elastik maddelerden yapılan ince bir çubuktur. Matematikte ise reel değerli bir fonksiyon olup ard arda eklenmeleriyle istenilen bir poligon çizgisine yaklaşımda kullanılabilir. Trigonometrik spline fonksiyonlar Schoenberg [16] tarafından  $i = 2k + 1$  boyutlu

$$T_i = \text{span}\{1, \cos(x), \sin(x), \dots, \cos(ix), \sin(ix)\}$$

uzayında parçalı fonksiyonlar olarak sunulmuştur. Bunun yanı sıra, Schoenberg yerel destekli trigonometrik spline olan trigonometrik B-spline varlığını da ispatlamıştır. Bilinmeyen fonksiyonların yaklaşık çözümlerinde kullanılan spline fonksiyonlar parçalı polinomlar sınıfından olup, tanımlanan  $[a, b]$  aralığını sonlu sayıda homojen veya homojen olmayan alt aralıklara bölerek, birbirini örtmeyen her bir alt aralıkta düşük dereceden polinomlarla yaklaşım yapma esasına dayanır. Belirli bir derece ve düzgünlükteki her spline fonksiyon, aynı derece ve düzgünlükteki B-spline fonksiyonların bir lineer kombinasyonu ile temsil edilebilir. Dolayısıyla B-spline fonksiyonlar aynı dereceye sahip spline fonksiyonlar için bir tabandır. Bu nedenle bu fonksiyonlara B-spline (basis spline) denir [17].

Sıfırıncı dereceden trigonometrik B-spline fonksiyonu aşağıda verilen adım fonksiyonu

$$T_i^0(x) = \begin{cases} 1, & x_i \leq x < x_{i+1} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

ile tanımlanır ve  $k = 1, 2, 3, \dots$  olmak üzere

$$T_i^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{i+k}-x_i}{2}\right)} T_i^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x_i}{2}\right)} T_{i+1}^{k-1}(x)$$

iteratif bağıntısı kullanılarak yüksek dereceden trigonometrik B-spline fonksiyonlar elde edilir. Trigonometrik B-spline  $T_{i,k}$  bazı  $T_i$  uzayında parçalı bir fonksiyondur ve  $\{T_{i,k}\}_{k \in \mathbb{Z}}$  fonksiyonları

$i$ . mertebeden trigonometrik spline uzayını gererler.  $T_{i,k}$  B-spline bazının desteği  $[x_k, x_{k+i}]$  olup bu aralığın içinde tanımlı olan baz sıfırdan büyüktür [18–20]. Eğer  $[a, b]$  aralığındaki parçalanma düzgün ise o zaman indirgeme bağıntısı

$$T_i^k(x) = \frac{\sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)} T_i^{k-1}(x) + \frac{\sin\left(\frac{x_{i+k+1}-x}{2}\right)}{\sin\left(\frac{kh}{2}\right)} T_{i+1}^{k-1}(x), \quad k = 1, 2, 3... \quad (2.2.1)$$

şeklindedir.

(2.2.1) bağıntısında  $k = 3$  alınırsa  $T_i^3(x)$  kübik trigonometrik B-spline fonksiyonları

$$p(x_i) = \sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)$$

olmak üzere;

$$T_i^3(x) = \frac{p(x_i)}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_i^2(x) + \frac{p(x_{i+4})}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_{i+1}^2(x) \quad (2.2.2)$$

olarak bulunur.  $T_i^3(x)$  kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını elde edebilmek için gerekli olan kuadratik B-spline eşitlikleri

$$\theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right)$$

olmak üzere

$$\frac{p(x_i)}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_i^2(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} p^3(x_i), & x_i \leq x < x_{i+1} \\ p^2(x_i)p(x_{i+2}) \\ -p(x_i)p(x_{i+3})p(x_{i+1}), & x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ p(x_i)p^2(x_{i+3}), & x_{i+2} \leq x < x_{i+3} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

ve

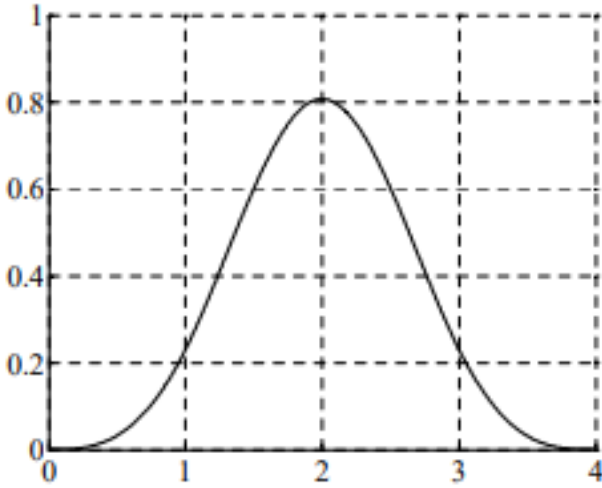
$$-\frac{p(x_{i+4})}{\sin\left(\frac{3h}{2}\right)} T_{i+1}^2(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} -p(x_{i+4})p^2(x_{i+1}), & x_i \leq x < x_{i+1} \\ p(x_{i+4})p(x_{i+1})p(x_{i+3}) \\ -p(x_i)p(x_{i+3})p(x_{i+1}), & x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ p^3(x_{i+4}), & x_{i+2} \leq x < x_{i+3} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde yazılabildiğinden (2.2.2) eşitliği

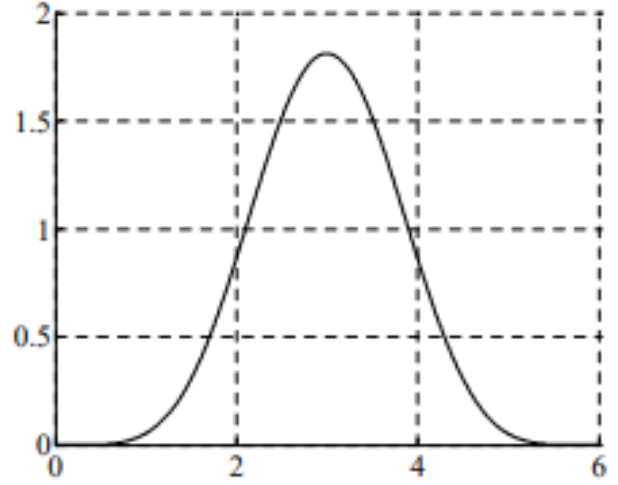
$$T_i^3(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} p^3(x_i), & x_i \leq x < x_{i+1} \\ -p^2(x_i)p(x_{i+2}) \\ -p(x_i)p(x_{i+3})p(x_{i+1}) \\ -p(x_{i+4})p^2(x_{i+1}), & x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ p(x_i)p^2(x_{i+3}) \\ +p(x_{i+4})p(x_{i+1})p(x_{i+3}) \\ +p^2(x_{i+4})p(x_{i+1}), & x_{i+2} \leq x < x_{i+3} \\ -p^3(x_{i+4}), & x_{i+3} \leq x < x_{i+4} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

olarak bulunur. Buradaki kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar





(a) Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar



(b) Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlar

**Şekil 2.4 :** Kübik ve kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlar.

$$p(x_i) = \sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right), \theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right), i = 0, \dots, N$$

olmak üzere

$$T_i^3(x) = \frac{1}{\theta} \begin{cases} p^3(x_{i-2}), & x_{i-2} \leq x < x_{i-1} \\ -p^2(x_{i-2})p(x_i) \\ -p(x_{i-2})p(x_{i+1})p(x_{i-1}) & x_{i-1} \leq x < x_i \\ -p(x_{i+2})p^2(x_{i-1}), \\ p(x_{i-2})p^2(x_{i+1}) \\ +p(x_{i+2})p(x_{i-1})p(x_{i+1}) & x_i \leq x < x_{i+1} \\ +p^2(x_{i+2})p(x_i), \\ -p^3(x_{i+2}), & x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ 0, & \text{diğer} \end{cases}$$

şeklinde elde edilir.

Kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlar kullanılarak problemin analitik çözümü için genel yaklaşım

$$U(x, t) \approx U_N(x, t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \delta_i(t) T_i^3(x)$$

olarak tanımlanabilir. Burada  $\delta_i$  katsayıları zamana bağlı parametreleri ve  $T_i^3(x)$  fonksiyonları kübik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını gösterir.

$T_i^3(x)$  fonksiyonları  $[x_{i-2}, x_{i+2}]$  aralığının dışında sıfırdır ve  $[x_{i-2}, x_{i+2}]$  aralığında dört elemanı örter. Her bir  $[x_i, x_{i+1}]$  sonlu elemanı  $T_{i-1}^3(x)$ ,  $T_i^3(x)$ ,  $T_{i+1}^3(x)$ ,  $T_{i+2}^3(x)$  şeklindeki dört

kübik trigonometrik B-spline tarafından örtüleceğinden

$$U(x,t) \approx U_N(x,t) = \sum_{j=i-1}^{i+2} \delta_j(t) T_j^3(x),$$

$$U(x,t) \approx \delta_{i-1}(t) T_{i-1}^3(x) + \delta_i(t) T_i^3(x) + \delta_{i+1}(t) T_{i+1}^3(x) + \delta_{i+2}(t) T_{i+2}^3(x)$$

elde edilir. Bu yaklaşım için kübik trigonometrik B-spline eşitlikleri kullanılarak  $x_i$  noktasındaki  $U(x_i,t)$  ve birinci ve ikinci türevi için yaklaşımlar

$$U_N(x_i,t) = U_i = \sum_{j=i-1}^{i+2} \delta_j T_j^3(x_i)$$

$$\frac{dU_N(x,t)}{dx} = U_i' = \sum_{j=i-1}^{i+2} \delta_j \frac{dT_j^3(x_i)}{dx}$$

$$\frac{d^2U_N(x,t)}{dx^2} = U_i'' = \sum_{j=i-1}^{i+2} \delta_j \frac{d^2T_j^3(x_i)}{dx^2}$$

olarak yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\alpha_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{1 + \cos(h)}$$

$$\beta_1 = -\frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\beta_2 = \frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\gamma_1 = \frac{3((1 + 3 \cos(h)) \csc^2\left(\frac{h}{2}\right))}{16(2 \cos\left(\frac{h}{2}\right) + \cos\left(\frac{3h}{2}\right))}$$

$$\gamma_2 = -\frac{3 \cot^2\left(\frac{h}{2}\right)}{2 + 4 \cos(h)}$$

olmak üzere

$$U_i = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

$$U_i' = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1} \tag{2.2.3}$$

$$U_i'' = \gamma_1 \delta_{i-1} + \gamma_2 \delta_i + \gamma_1 \delta_{i+1}$$

eşitlikleri bulunur [17].

## 2.2.2 Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlar

$T_i^5$  kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını hesaplamak için ise (2.2.1) bağıntısında  $k = 5$  alındığında

$$p(x_i) = \sin\left(\frac{x - x_i}{2}\right)$$

olmak üzere

$$T_i^5(x) = \frac{p(x_i)}{\sin\left(\frac{5h}{2}\right)} T_i^4(x) - \frac{p(x_{i+4})}{\sin\left(\frac{5h}{2}\right)} T_{i+1}^4(x) \quad (2.2.4)$$

elde edilir. Kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını bulabilmek için gerekli olan kuartik trigonometrik B-spline eşitlikleri

$$\theta = \sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right) \sin(2h) \sin\left(\frac{5h}{2}\right)$$

olmak üzere

$$\frac{p(x_i)}{\sin\left(\frac{5h}{2}\right)} T_i^4(x) = \frac{1}{\theta} \left\{ \begin{array}{ll} p^5(x_i) & , x_i \leq x < x_{i+1} \\ -p^4(x_i)p(x_{i+2}) - p^3(x_i)p(x_{i+3})p(x_{i+1}) & \\ -p^2(x_i)p(x_{i+4})p^2(x_{i+1}) - p(x_i)p(x_{i+5})p^3(x_{i+1}) & , x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ p^3(x_i)p^2(x_{i+3}) + p^2(x_i)p(x_{i+4})p(x_{i+1})p(x_{i+3}) & \\ + p^2(x_i)p^2(x_{i+4})p(x_{i+2}) & \\ + p(x_i)p(x_{i+5})p^2(x_{i+1})p(x_{i+3}) & , x_{i+2} \leq x < x_{i+3} \\ + p(x_i)p(x_{i+5})p(x_{i+1})p(x_{i+4})p(x_{i+2}) & \\ + p(x_i)p^2(x_{i+5})p^2(x_{i+2}) & \\ -p^2(x_i)p^3(x_{i+4}) - p(x_i)p(x_{i+5})p(x_{i+1})p^2(x_{i+4}) & \\ -p(x_i)p^2(x_{i+5})p(x_{i+2})p(x_{i+4}) & , x_{i+3} \leq x < x_{i+4} \\ -p(x_i)p^3(x_{i+5})p(x_{i+3}) & \\ p(x_i)p^4(x_{i+5}) & , x_{i+4} \leq x < x_{i+5} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{array} \right.$$

ve

$$\frac{p(x_{i+6})T_{i+1}^4(x)}{\sin\left(\frac{5h}{2}\right)} = \frac{1}{\theta} \left\{ \begin{array}{ll} -p(x_{i+6})p^4(x_{i+1}) & ,x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ p(x_{i+6})p^3(x_{i+1})p(x_{i+3}) & \\ +p(x_{i+6})p^2(x_{i+1})p(x_{i+4})p(x_{i+2}) & ,x_{i+2} \leq x < x_{i+3} \\ +p(x_{i+6})p(x_{i+1})p(x_{i+5})p^2(x_{i+2}) & \\ +p^2(x_{i+6})p^3(x_{i+2}) & \\ -p(x_{i+6})p^2(x_{i+1})p^2(x_{i+4}) & \\ -p(x_{i+6})p(x_{i+1})p(x_{i+5})p(x_{i+2})p(x_{i+4}) & \\ -p(x_{i+6})p(x_{i+1})p^2(x_{i+5})p(x_{i+3}) & ,x_{i+3} \leq x < x_{i+4} \\ -p^2(x_{i+6})p^2(x_{i+2})p(x_{i+4}) & \\ -p^2(x_{i+6})p(x_{i+2})p(x_{i+5})p(x_{i+3}) & \\ -p^3(x_{i+6})p^2(x_{i+3}) & \\ p(x_{i+6})p(x_{i+1})p^3(x_{i+5}) & \\ +p^2(x_{i+6})p(x_{i+2})p^2(x_{i+5}) & ,x_{i+4} \leq x < x_{i+5} \\ +p^3(x_{i+6})p(x_{i+3})p(x_{i+5}) & \\ p^4(x_{i+6})p(x_{i+4}) & \\ -p^5(x_{i+6}) & ,x_{i+5} \leq x < x_{i+6} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{array} \right.$$

olarak yazılabileceğinden (2.2.4) eşitliği

$$\frac{p(x_i)}{\sin\left(\frac{5h}{2}\right)} T_i^4(x) = \frac{1}{\theta} \left\{ \begin{array}{ll} p^5(x_i) & , x_i \leq x < x_{i+1} \\ -p^4(x_i)p(x_{i+2}) - p^3(x_i)p(x_{i+3})p(x_{i+1}) & \\ -p^2(x_i)p(x_{i+4})p^2(x_{i+1}) & , x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ -p(x_i)p(x_{i+5})p^3(x_{i+1}) & \\ -p(x_{i+6})p^4(x_{i+1}) & \\ p^3(x_i)p^2(x_{i+3}) & , x_{i+2} \leq x < x_{i+3} \\ +p^2(x_i)p(x_{i+4})p(x_{i+1})p(x_{i+3}) & \\ +p^2(x_i)p^2(x_{i+4})p(x_{i+2}) & \\ +p(x_i)p(x_{i+5})p^2(x_{i+1})p(x_{i+3}) & \\ +p(x_i)p(x_{i+5})p(x_{i+1})p(x_{i+4})p(x_{i+2}) & , x_{i+3} \leq x < x_{i+4} \\ +p(x_i)p^2(x_{i+5})p^2(x_{i+2}) & \\ +p(x_{i+6})p^3(x_{i+1})p(x_{i+3}) & \\ +p(x_{i+6})p^2(x_{i+1})p(x_{i+4})p(x_{i+2}) & \\ +p(x_{i+6})p(x_{i+1})p(x_{i+5})p^2(x_{i+2}) & \\ +p^2(x_{i+6})p^3(x_{i+2}) & \\ -p^2(x_i)p^3(x_{i+4}) & \\ -p(x_i)p(x_{i+5})p(x_{i+1})p^2(x_{i+4}) & \\ -p(x_i)p^2(x_{i+5})p(x_{i+2})p(x_{i+4}) & \\ -p(x_i)p^3(x_{i+5})p(x_{i+3}) & \\ -p(x_{i+6})p^2(x_{i+1})p^2(x_{i+4}) & , x_{i+3} \leq x < x_{i+4} \\ -p(x_{i+6})p(x_{i+1})p(x_{i+5})p(x_{i+2})p(x_{i+4}) & \\ -p(x_{i+6})p(x_{i+1})p^2(x_{i+5})p(x_{i+3}) & \\ -p^2(x_{i+6})p^2(x_{i+2})p(x_{i+4}) & \\ -p^2(x_{i+6})p^2(x_{i+2})p(x_{i+5})p(x_{i+3}) & \\ -p^3(x_{i+6})p^2(x_{i+3}) & \\ p(x_{i+1})p^4(x_{i+5}) + p(x_{i+6})p(x_{i+1})p^3(x_{i+5}) & \\ +p^2(x_{i+6})p(x_{i+2})p^2(x_{i+5}) & , x_{i+4} \leq x < x_{i+5} \\ p^3(x_{i+6})p(x_{i+3})p(x_{i+5}) + p^4(x_{i+6})p(x_{i+4}) & \\ -p^5(x_{i+6}) & , x_{i+5} \leq x < x_{i+6} \\ 0 & , \text{diğer durumlar} \end{array} \right.$$

şeklinde bulunur. Şekil 2.4' de kübik ve kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlar gösterildi.

Kuintik B-spline fonksiyonların yazımı ile uyumlu olması için düzenlemeler yapılırsa bölünme noktalarındaki  $T_i^5(x)$  kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlar  $p(x_i) = \sin\left(\frac{x-x_i}{2}\right)$ ,  $\theta =$

$\sin\left(\frac{h}{2}\right) \sin(h) \sin\left(\frac{3h}{2}\right) \sin(2h) \sin\left(\frac{5h}{2}\right)$ ,  $i = 0, \dots, N$  olmak üzere

$$T_i^5(x) = \frac{1}{\theta} \left\{ \begin{array}{l} p^5(x_{i-3}) \\ -p^4(x_{i-3})p(x_{i-1}) \\ -p^3(x_{i-3})p(x_i)p(x_{i-2}) \\ -p^2(x_{i-3})p(x_{i+1})p^2(x_{i-2}) \\ -p(x_{i-3})p(x_{i+2})p^3(x_{i-2}) - p(x_{i+3})p^4(x_{i-2}) \\ p^3(x_{i-3})p^2(x_i) \\ +p^2(x_{i-3})p(x_{i+1})p(x_{i-2})p(x_i) \\ +p^2(x_{i-3})p^2(x_{i+1})p(x_{i-1}) \\ +p(x_{i-3})p(x_{i+2})p^2(x_{i-2})p(x_i) \\ +p(x_{i-3})p(x_{i+2})p(x_{i-2})p(x_{i+1})p(x_{i-1}) \\ +p(x_{i-3})p^2(x_{i+2})p^2(x_{i-1}) \\ +p(x_{i-3})p^3(x_{i-2})p(x_i) \\ +p(x_{i+3})p^2(x_{i-2})p(x_{i+1})p(x_{i-1}) \\ +p(x_{i+3})p(x_{i-2})p(x_{i+2})p^2(x_{i-1}) \\ +p^2(x_{i+3})p^3(x_{i-1}) \\ -p^2(x_{i-3})p^3(x_{i+1}) \\ -p(x_{i-3})p(x_{i+2})p(x_{i-2})p^2(x_{i+1}) \\ -p(x_{i-3})p^2(x_{i+2})p(x_{i-1})p(x_{i+1}) \\ -p(x_{i-3})p^3(x_{i+2})p(x_i) \\ -p(x_{i+3})p^2(x_{i-2})p^2(x_{i+1}) \\ -p(x_{i+3})p(x_{i-2})p(x_{i+2})p(x_{i-1})p(x_{i+1}) \\ -p(x_{i+3})p(x_{i-2})p^2(x_{i+2})p(x_{i-1}) \\ -p^2(x_{i+3})p^2(x_{i-1})p(x_{i+1}) \\ -p^2(x_{i+3})p(x_{i-1})p(x_{i+2})p(x_i) \\ -p^3(x_{i+3})p^2(x_i) \\ p(x_{i-3})p^4(x_{i+2}) + p(x_{i+3})p(x_{i-2})p^3(x_{i+2}) \\ +p^2(x_{i+3})p(x_{i-1})p^2(x_{i+2}) \\ +p^3(x_{i+3})p(x_i)p(x_{i+2}) + p^4(x_{i+3})p(x_{i+1}) \\ -p^5(x_{i+3}) \\ 0 \end{array} \right. \begin{array}{l} , x_{i-3} \leq x < x_{i-2} \\ , x_{i-2} \leq x < x_{i-1} \\ , x_{i-1} \leq x < x_i \\ , x_i \leq x < x_{i+1} \\ , x_{i+1} \leq x < x_{i+2} \\ , x_{i+2} \leq x < x_{i+3} \\ , \text{diğer durumlar} \end{array}$$

(2.2.5)

formunda bulunur.

$j = i - 2, i - 1, i, i + 1, i + 2$  olmak üzere

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow x_j^+} T_i^5(x) &= \lim_{x \rightarrow x_j^-} T_i^5(x) \\ \lim_{x \rightarrow x_j^+} \frac{d}{dx}(T_i^5(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_j^-} \frac{d}{dx}(T_i^5(x)) \\ \lim_{x \rightarrow x_j^+} \frac{d^2}{dx^2}(T_i^5(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_j^-} \frac{d^2}{dx^2}(T_i^5(x)) \\ \lim_{x \rightarrow x_j^+} \frac{d^3}{dx^3}(T_i^5(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_j^-} \frac{d^3}{dx^3}(T_i^5(x)) \\ \lim_{x \rightarrow x_j^+} \frac{d^4}{dx^4}(T_i^5(x)) &= \lim_{x \rightarrow x_j^-} \frac{d^4}{dx^4}(T_i^5(x))\end{aligned}$$

olduğundan  $T_i^5(x)$  kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonunun, birinci, ikinci, üçüncü ve dördüncü türevinin  $x_{i-2}, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, x_{i+2}$  bölünme noktalarında dolayısıyla da konum aralığının iç noktalarında sürekli olduğu görülebilir.

Problemin analitik çözümü için ise genel yaklaşım kuintik trigonometrik B-spline kullanılarak

$$U(x, t) \approx U_N(x, t) = \sum_{i=-2}^{N+1} T_i^5(x) \delta_i(t) \quad (2.2.6)$$

şeklinde tanımlanabilir. Burada  $\delta_i$  katsayıları zamana bağlı değişkenler olmak üzere  $T_i^5(x)$  fonksiyonları kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlarını gösterir.

$T_i^5(x)$  kuintik trigonometrik B-spline fonksiyonlar  $[x_{i-3}, x_{i+3}]$  aralığının dışında sıfırdır ve  $T_i^5(x)$  trigonometrik B-spline fonksiyonları  $[x_{i-3}, x_{i+3}]$  aralığında ardışık altı elemanı örtmektedir. Bu durumda (2.2.6) yaklaşımı

$$\begin{aligned}U(x, t) \approx U_N(x, t) &= \sum_{j=i-2}^{i+3} T_j^5(x) \delta_j \\ U(x, t) \approx &T_{i-2}^5(x) \delta_{i-2} + T_{i-1}^5(x) \delta_{i-1} + T_i^5(x) \delta_i + \\ &T_{i+1}^5(x) \delta_{i+1} + T_{i+2}^5(x) \delta_{i+2} + T_{i+3}^5(x) \delta_{i+3}\end{aligned}$$

elde edilir. Elde edilen bu yaklaşım için (2.2.5) kuintik trigonometrik B-spline eşitliklerinin kullanılmasıyla  $x_i$  noktasındaki  $U(x, t)$  ve birinci-ikinci-üçüncü ve dördüncü türevi için

yaklaşımlar,

$$\begin{aligned}
U_N(x_i, t) &= U_i = \sum_{j=i-2}^{i+3} T_j^5(x) \delta_j \\
\frac{dU_N(x_i, t)}{dx} &= U_i' = \sum_{j=i-2}^{i+3} \frac{dT_j^5(x)}{dx} \delta_j \\
\frac{d^2U_N(x_i, t)}{dx^2} &= U_i'' = \sum_{j=i-2}^{i+3} \frac{d^2T_j^5(x)}{dx^2} \delta_j \\
\frac{d^3U_N(x_i, t)}{dx^3} &= U_i''' = \sum_{j=i-2}^{i+3} \frac{d^3T_j^5(x)}{dx^3} \delta_j \\
\frac{d^4U_N(x_i, t)}{dx^4} &= U_i'''' = \sum_{j=i-2}^{i+3} \frac{d^4T_j^5(x)}{dx^4} \delta_j
\end{aligned}$$

olarak yazılır ve gerekli hesaplamalar yapılırsa

$$\begin{aligned}
a_1 &= \frac{\sin^5\left(\frac{h}{2}\right)}{\theta} \\
a_2 &= \frac{2 \sin^5\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right) (16 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 3)}{\theta}, \\
a_3 &= \frac{2 (1 + 48 \cos^4\left(\frac{h}{2}\right) - 16 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right)) \sin^5\left(\frac{h}{2}\right)}{\theta}, \\
b_1 &= -\frac{5 \sin^4\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right)}{2\theta}, \\
b_2 &= -\frac{5 \sin^4\left(\frac{h}{2}\right) \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) (8 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 3)}{\theta}, \\
c_1 &= \frac{5 \sin^3\left(\frac{h}{2}\right) (5 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 1)}{4\theta}, \\
c_2 &= \frac{5 \sin^3\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right) (-15 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) + 3 + 16 \cos^4\left(\frac{h}{2}\right))}{2\theta}, \\
c_3 &= -\frac{5 \sin^3\left(\frac{h}{2}\right) (16 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 5 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) + 1)}{2\theta}, \\
d_1 &= -\frac{5 \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right) (25 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 13)}{8\theta}, \\
d_2 &= -\frac{5 \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) (8 \cos^4\left(\frac{h}{2}\right) - 35 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) + 15)}{4\theta}, \\
e_1 &= \frac{5 (125 \cos^4\left(\frac{h}{2}\right) - 114 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) + 13) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{16\theta}, \\
e_2 &= -\frac{5 \sin\left(\frac{h}{2}\right) \cos\left(\frac{h}{2}\right) (176 \cos^6\left(\frac{h}{2}\right) - 137 \cos^4\left(\frac{h}{2}\right) - 6 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) + 15)}{8\theta}, \\
e_3 &= \frac{5 (92 \cos^6\left(\frac{h}{2}\right) - 117 \cos^4\left(\frac{h}{2}\right) + 62 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right) - 13) (-1 + 4 \cos^2\left(\frac{h}{2}\right)) \sin\left(\frac{h}{2}\right)}{8\theta},
\end{aligned}$$



olmak üzere

$$\begin{aligned}U_i &= a_1 \delta_{i-2} + a_2 \delta_{i-1} + a_3 \delta_i + a_2 \delta_{i+1} + a_1 \delta_{i+2} \\U_i' &= b_1 \delta_{i-2} + b_2 \delta_{i-1} - b_2 \delta_{i+1} - b_1 \delta_{i+2} \\U_i'' &= c_1 \delta_{i-2} + c_2 \delta_{i-1} + c_3 \delta_i + c_2 \delta_{i+1} + c_1 \delta_{i+2} \\U_i''' &= d_1 \delta_{i-2} + d_2 \delta_{i-1} - d_2 \delta_{i+1} - d_1 \delta_{i+2} \\U_i^{(4)} &= e_1 \delta_{i-2} + e_2 \delta_{i-1} + e_3 \delta_i + e_2 \delta_{i+1} + e_1 \delta_{i+2}\end{aligned}\tag{2.2.7}$$

eşitlikleri bulunur [17].



### 3. İKİLİ BURGERS DENKLEMİ VE MODEL PROBLEMLER

#### 3.1 Giriş

Bir akışkan içindeki parçacıkların hareketinin araştırılması Einstein'a ve hatta ondan da Brown'a kadar uzanır. Esipov [12] çalışmalarını, yer çekiminin partiküller üzerindeki etkisi üzerine yapmıştır. Partiküllerin, kalan sıvıdan daha ağır olması durumunda ortaya çıkan harekete sedimentasyon adı verildiği sonucuna vardı ki buna 'creaming' dedi. Bu çerçevede ikili Burgers denklemi sedimentasyonun tanımlanmasında önemli bir rol oynar ve ayrıca iki farklı partikül çeşidinin ölçeklenmiş hacim konsantrasyonunun sıvı süspansyonları veya yerçekimi etkisi altındaki kolloidlerdeki değişiminde de önemli rol oynamaktadır [11]. İkili Burgers denklemi Esipov [12] tarafından türetilmiş olup önemli akış denklemlerinden biridir ve zengin dinamiklere sahiptir. Esipov sedimentasyon hızının, oluşturan partiküllerin hacim fraksiyonuna bağlı olduğunu ve konsantrasyon profilleri için Burgers benzeri denklemlere ihtiyaç olduğunu belirtti. Aslında ikili Burgers denklemi yaygın olarak hem doğrusal olmayan konveksiyon hem de viskozite terimleri içermesinden Navier-Stokes denkleminin basit şekli olarak bilinir.

$U(x,t)$  ve  $V(x,t)$  bilinmeyen fonksiyonlar olmak üzere, ikili Burgers Denklemi

$$U_t - U_{xx} + k_1 U U_x + k_2 (UV)_x = 0 \quad x \in [a,b], \quad t \in [0,T] \quad (3.1.1a)$$

$$V_t - V_{xx} + k_1 V V_x + k_3 (UV)_x = 0 \quad x \in [a,b], \quad t \in [0,T] \quad (3.1.1b)$$

biçiminde verilir. Burada  $k_1$ ,  $k_2$  ve  $k_3$  reel sabitlerdir. Ayrıca  $x$  ve  $t$  ise sırasıyla konum ve zaman açısından türevleri gösterir. Denklemlerde  $U U_x$  ve  $V V_x$  lineer olmayan terimler,  $U_{xx}$  ve  $V_{xx}$  difüzyon terimleridir. Denklem

$$U(x,0) = f(x), \quad a \leq x \leq b$$

$$V(x,0) = g(x), \quad a \leq x \leq b$$

başlangıç şartları ve

$$U(a,t) = f_1(a,t), \quad U(b,t) = f_2(b,t), \quad t \in [0,T]$$

$$V(a,t) = g_1(a,t), \quad V(b,t) = g_2(b,t), \quad t \in [0,T]$$

sınır şartları ile göz önüne alındı. Burada  $f(x)$ ,  $g(x)$ ,  $f_1(a,t)$ ,  $f_2(b,t)$ ,  $g_1(a,t)$  ve  $g_2(b,t)$  ön tanımlı fonksiyonlardır [11].

İkili Burgers denkleminin tam çözümü başlangıç ve sınır şartlarının geniş bir aralığı için mevcut değildir. Bu nedenle denklemin nümerik ve yaklaşık çözümünü bulmaya ihtiyaç vardır. İkili Burgers denkleminin daha fazla özelliğini bulmak amacıyla literatürde birçok çalışma bulunmaktadır. Bunların arasında, Kaya [21] ayrıştırma yöntemi kullanarak uygun başlangıç şartları ile birlikte verilen ikili viscous Burgers denklem sisteminin çözümünü göz önüne aldı. Kaya makalesinde çözümü kolay hesaplanabilir bileşenlere sahip yakınsak kuvvet serileri formunda elde etti. Abdou ve Soliman [22] Burgers ve ikili Burgers denklemlerinin çözümlerini varyasyonel iterasyon yöntemi ile tam olarak elde ettiler ve elde ettikleri sonuçları Adomian ayrıştırma yöntemiyle elde edilen sonuçlarla karşılaştırdılar. Sonuçta kendi yöntemleri ile elde ettikleri sonuçların daha iyi olduğunu gösterdiler. Yazarlar makalelerinde Adomian polinomların hesaplanmasında ortaya çıkan zorluğun üstesinden gelmek için He'nin varyasyonel iterasyon yöntemini sundular. Dehghan vd. [23] çalışmalarında, modifiye edilmiş domian ayrıştırma yöntemi ile Pade yaklaşımının bir kombinasyonu olan ADM-PADE (MADM-PADE) tekniğini uygulayarak homojen ve homojen olmayan iki boyutlu parabolik denklemi çözmeyi amaçladılar ve bu tekniği ikili Burgers denklemlerini çözmek için kullandılar. Khater vd. [24] bazı lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem türlerinin nümerik çözümlerini elde edebilmek için diferansiyel Chebyshev polinomlarına dayalı spektral kollokasyon yöntemini incelediler. Ele aldıkları problemi dördüncü mertebe Runge-Kutta yöntemiyle çözülen adi diferansiyel denklemler sistemine indirgediler. Yöntemlerini 1-boyutlu Burgers, KdV-Burgers, ikili Burgers, 2-boyutlu Burgers ve 2-boyutlu Burgers sistemlerine uyguladılar ve elde ettikleri nümerik sonuçların tam çözümle iyi bir uyum içinde olduğunu buldular. Rashid ve Ismail [25] bir boyutlu ikili Burgers denkleminin yaklaşık çözümlerini bulmak için Fourier pseudo-spectral yöntemini kullandılar. Bu çalışmaları için bilinen tam çözüme sahip iki test problemini ele aldılar. Mittal ve Arora [26] uygun başlangıç ve sınır şartları ile birlikte verilen ikili viscous Burgers denklem sisteminin nümerik çözümü için düzgün düğüm noktaları üzerinde verilen kübik B-spline kollokasyon şemasını kullanan nümerik bir yöntem önerdiler. Yazarların bu şeması zaman yönündeki integrasyon için Crank-Nicolson formülasyonuna ve konum yönündeki integrasyon içinde kübik B-spline fonksiyonlarına dayanıyordu. Sadek ve Kucuk [27] Burgers denklemlerinin ikili sisteminin en ideal kontrol noktasının çözümü için bir

metodoloji tanımladılar. Jia vd. [28] ikili Burgers denklemi için  $H^1$ -Galerkin sonlu eleman yöntemini ele aldılar ve ikili Burgers denkleminin yarı ayrık ve tam ayrık şemalarının uygun hata tahminlerini türettiler. Uçar [29] doktora tezinde ikili Burgers, ikili KdV ve ikili mKdV denklemlerinin farklı dereceden B-spline fonksiyonlar kullanarak Galerkin, Petrov-Galerkin, subdomain ve kollokasyon yöntemleri ile nümerik çözümlerini elde etti. Kutluay ve Uçar [30] Galerkin kuadratik B-spline sonlu eleman yöntemi ile ikili Burgers denklemini çözdüler. Çözümde kullandıkları yöntemin performansını üç test problemi üzerinde incelediler ve elde ettikleri nümerik sonuçları literatürde mevcut bazı diğer sonuçlarla karşılaştırdılar. Desai ve Pradhan [31] Homotopy pertürbasyon yöntemini kullanarak ikili Burgers denklemi ve Burgers denkleminin tam çözümünü elde ettiler. Yazarlar elde ettikleri çözümlerin Adomiyani ayrıştırma yöntemiyle elde edilen çözümlerle tamamen aynı olduğunu buldular. Srivastava vd. [32] düzgün düğüm noktaları üzerinde bir boyutlu ikili Burgers denkleminin çözümü için kapalı sonlu fark yöntemini önerdiler. Yazarlar önerdikleri yöntemin ürettiği lineer olmayan fark denklemleri sistemini her bir iterasyonda çözerek yaklaşık çözümleri ele ettiler. Kumar ve Pandit [33] sonlu fark yöntemi ve Haar dalgacıklar yöntemine dayalı kompozit bir nümerik şemayı zamana bağlı uygun başlangıç ve sınır şartları ile birlikte verilen ikili Burgers denklemini çözmek için önerdiler. Mittal ve Tripathi [34] ikili Burgers denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için kollokasyon temelli nümerik bir şema önerdiler. Yazarların kullandığı bu şema modifiye edilmiş kübik B-spline fonksiyonlarını kullanmıştır. Siraj-ul-Islam vd. [35] kuazi lineer olmayan hiperbolik denklemler ve ikili Burgers denklemleri, ikili Korteweg-de Vries (KdV) denklemlerinin çözümleri için radyal baz fonksiyonlara dayalı kollokasyon (Kansa) formülü geliştirdiler. Abdullah vd. [36] ikili viscous Burgers denklemleri (CVBE) için kübik B-spline ve hermit formüllerine dayalı nümerik bir prosedür geliştirdiler. Yazarlar konum boyutuna Hermit formülü ve kübik B-spline kombinasyonuna dayalı bir yöntemi uygularken zaman boyutuna yaklaşımda tipik sonlu fark yöntemini kullandılar. Mittal ve Jiwari [37] diferansiyel kuadratur yöntemini kullanarak ikili viscous Burgers denklemini çözdüler. Yazarlar sundukları yöntemin doğruluğunu ve kullanılabilirliğini göstermek için iki test problemini göz önüne aldılar. Bhatt ve Khaliq [38] hiçbir lineerleştirme veya dönüştürme tekniği kullanmadan, orjinal formlarında, lineer olmayan ikili viscous Burgers denkleminin doğrudan integrasyonu için dördüncü-mertebe sonlu farklar şemasıyla

birlikte iki modifiye edilmiş dördüncü-mertebeden üstel zaman farkı Runge-Kutta (ETDRK) yöntemini sundular. Raslan vd. [39] uygun başlangıç ve sınır şartlarıyla ile birlikte verilen Burgers denkleminin çözümü için kübik trigonometrik B-spline (CTB) fonksiyonlarını oluşturmuş ve kollokasyon yöntemini kullanmışlardır. Onarcan ve Hepson [40] yüksek dereceden trigonometrik B-spline fonksiyonlarının düşük dereceden olanlarına göre daha avantajlı olduğunu belirterek, ikili Burgers denkleminin çözümünde kuintik trigonometrik B-spline baz fonksiyonlarını kullanarak ele ettiler. Zhang vd. [41] kararsız lineer olmayan ikili Burgers denklemini çözmek için geliştirilmiş geriye dönük yerine yerleştirme yöntemini kullanarak bir ilk deneme gerçekleştirdiler. Kapoor [42] bir boyutlu lineer olmayan Burgers denkleminin analitik çözümüne ulaşmak için Homotopy perturbation yöntemini önerdi. Nazir vd. [43] sürekli stokastik süreçler, akustik transmisyonlar ve aerofoil akış teorisi ve akışkan dinamiği çalışmasında ortaya çıkan ikili viscous Burgers denkleminin nümerik davranışları için yeni bir kübik B-spline yaklaşım tekniğini tanıttılar. Yazarlar elde ettikleri kısmi diferansiyel denklemler sistemini zaman yönünde sonlu fark formülasyonunu kullanarak, konum yönünde ise yeni kübik B-spline baz yaklaşımını kullanarak ayırıklaştırmış ve yaklaşık çözümü elde etmişlerdir.

## 3.2 Model Problemler

### 3.2.1 Problem 1

İlk problem olarak, (3.1.1) ile verilen ikili Burgers denklemi,  $k_1 = -2$  ve  $k_2 = k_3 = 1$  olmak üzere

$$U_t - U_{xx} - 2UU_x + (UV)_x = 0$$

$$V_t - V_{xx} - 2VV_x + (UV)_x = 0$$

biçiminde ve

$$U(x, 0) = \sin(x), \quad V(x, 0) = \sin(x)$$

başlangıç şartları ile göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$U(x, t) = V(x, t) = e^{-t} \sin(x)$$

dir [21]. Bu problemin kübik ve kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile yaklaşık çözümlerinin bulunmasında gerekli olan sınır şartları tam çözümden alındı.

### 3.2.2 Problem 2

İkinci problem olarak, (3.1.1) ile verilen ikili Burgers denklemi,  $k_1 = 2$  olmak üzere

$$U_t - U_{xx} + 2UU_x + k_2(UV)_x = 0$$

$$V_t - V_{xx} + 2VV_x + k_3(UV)_x = 0$$

biçiminde göz önüne alındı. Bu problemin tam çözümü

$$a_0 = 0.05 \text{ ve } A = \frac{1}{2}a_0 \left( \frac{4k_2k_3 - 1}{2k_2 - 1} \right)$$

olmak üzere

$$U(x, t) = a_0 - 2A \left( \frac{2k_2 - 1}{4k_2k_3 - 1} \right) \tanh(A(x - 2At))$$

$$V(x, t) = a_0 \left( \frac{2k_3 - 1}{2k_2 - 1} \right) - 2A \left( \frac{2k_2 - 1}{4k_2k_3 - 1} \right) \tanh(A(x - 2At))$$

dir [44]. Bu problemin kübik ve kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile yaklaşık çözümlerinin bulunmasında gerekli olan başlangıç ve sınır şartları tam çözümden alındı.

### 3.2.3 Problem 3

Son olarak, (3.1.1) ile verilen ikili Burgers denklemi

$$U(x, 0) = \begin{cases} \sin(2\pi x), & x \in [0, 0.5] \\ 0, & x \in (0.5, 1] \end{cases}$$

$$V(x, 0) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 0.5] \\ -\sin(2\pi x), & x \in (0.5, 1] \end{cases}$$

başlangıç şartları ve sınır şartlarının tümü sıfır olarak alındı [26].

(3.1.1) ikili Burgers denklemi yukarıda verilen farklı başlangıç ve sınır şartlarına sahip üç model problem ile birlikte göz önüne alındı. Her bir problem için elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözüme ne ölçüde yaklaştığını incelemek için

$$L_2 = \sqrt{\frac{\sum_{j=0}^N |U_i - (U_N)_i|^2}{\sum_{j=0}^N |U_i|^2}}, \quad L_\infty = \max_{1 \leq i \leq N} |U_i - (U_N)_i|$$

şeklinde tanımlanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları hesaplandı.

#### 4. İKİLİ BURGERS DENKLEMİNİN TRİGONOMETRİK B-SPLINE KOLLOKASYON YÖNTEMİ İLE NÜMERİK ÇÖZÜMLERİ

Bu kısımda (3.1.1) ile verilen ikili Burgers denkleminin, denklemdeki lineer olmayan terimler için LİN-1 ve LİN-2 olmak üzere iki farklı lineerleştirme kullanılarak kübik ve kuintik trigonometrik B-spline Kollokasyon yöntemi ile nümerik şeması elde edildi. Daha sonra bu şema kullanılarak önceki bölümde tanıtilan üç model problemin nümerik çözümleri bulundu. Elde edilen bu nümerik çözümler problemlerin mevcut tam çözümü ve/veya literatürdeki diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlar ile çizelgeler halinde karşılaştırıldı.

##### 4.1 Lineerleştirme-1 (LİN-1)

(3.1.1) denkleminde lineer olmayan terimlerdeki  $U$  ve  $V$  yerine sırasıyla  $U = Z_i$  ve  $V = G_i$  alınır

$$U_t - U_{xx} + k_1 Z_i U_x + k_2 U_x G_i + k_2 Z_i V_x = 0$$

$$V_t - V_{xx} + k_1 G_i V_x + k_3 U_x G_i + k_3 Z_i V_x = 0$$

elde edilir. Denklemde görülen  $U_t$  ve  $V_t$  terimleri yerine ileri fark yaklaşımları ve  $U_x$ ,  $V_x$ ,  $U_{xx}$ ,  $V_{xx}$  terimleri yerine de Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımları yazılırsa

$$\begin{aligned} \frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{(U_{xx})^{n+1} + (U_{xx})^n}{2} + k_1 Z_i \frac{(U_x^{n+1} + U_x^n)}{2} + \\ k_2 G_i \frac{(U_x^{n+1} + U_x^n)}{2} + k_2 Z_i \frac{(V_x^{n+1} + V_x^n)}{2} = 0 \\ \frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} - \frac{(V_{xx})^{n+1} + (V_{xx})^n}{2} + k_1 G_i \frac{(V_x^{n+1} + V_x^n)}{2} + \\ k_3 G_i \frac{(U_x^{n+1} + U_x^n)}{2} + k_3 Z_i \frac{(V_x^{n+1} + V_x^n)}{2} = 0 \end{aligned}$$

bulunur ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \frac{2U^{n+1}}{\Delta t} - U_{xx}^{n+1} + k_1 Z_i U_x^{n+1} + k_2 G_i U_x^{n+1} + k_2 Z_i V_x^{n+1} = \frac{2U^n}{\Delta t} + \\ U_{xx}^n - k_1 Z_i U_x^n - k_2 G_i U_x^n - k_2 Z_i V_x^n \end{aligned} \quad (4.1.1a)$$

$$\begin{aligned} 2 \frac{V^{n+1}}{\Delta t} - V_{xx}^{n+1} + k_1 G_i V_x^{n+1} + k_3 G_i U_x^{n+1} + k_3 Z_i V_x^{n+1} = 2 \frac{V^n}{\Delta t} + \\ V_{xx}^n - k_1 G_i V_x^n - k_3 G_i U_x^n - k_3 Z_i V_x^n \end{aligned} \quad (4.1.1b)$$

elde edilir.

#### 4.1.1 Kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi (KBTBKY)

$U(x,t)$  ve  $V(x,t)$ 'ye bir yaklaşım sırasıyla  $U_N(x,t)$  ve  $V_N(x,t)$ , kübik trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak

$$U_N(x,t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \delta_i T_i^3(x) \text{ ve } V_N(x,t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \sigma_i T_i^3(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşımlarda,  $x = x_i$  kollokasyon noktasında kübik trigonometrik fonksiyonların kullanılmasıyla Bölüm 2'de de ayrıntılı olarak anlatılan ve (2.2.3) ile verilen  $U$  ve  $V$  ile  $U$  ve  $V$  nin birinci ve ikinci türevleri

$$U = Z_i = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

$$U_x = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1}$$

$$U_{xx} = \gamma_1 \delta_{i-1} + \gamma_2 \delta_i + \gamma_1 \delta_{i+1}$$

$$V = G_i = \alpha_1 \sigma_{i-1} + \alpha_2 \sigma_i + \alpha_1 \sigma_{i+1}$$

$$V_x = \beta_1 \sigma_{i-1} + \beta_2 \sigma_{i+1}$$

$$V_{xx} = \gamma_1 \sigma_{i-1} + \gamma_2 \sigma_i + \gamma_1 \sigma_{i+1}$$

biçiminde yazılır. Burada

$$\alpha_1 = \sin^2\left(\frac{h}{2}\right) \csc(h) \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{1 + \cos(h)}$$

$$\beta_1 = -\frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\beta_2 = \frac{3}{4} \csc\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$\gamma_1 = \frac{3((1 + 3 \cos(h) \csc^2\left(\frac{h}{2}\right)))}{16(2 \cos\left(\frac{h}{2}\right) + \cos\left(\frac{3h}{2}\right))}$$

$$\gamma_2 = -\frac{3 \cot^2\left(\frac{h}{2}\right)}{2 + 4 \cos(h)}$$

dir. (4.1.1) ile verilen sistemde bu yaklaşımlar yerlerine yazılır ve  $(n + 1)$ . zaman seviyesindeki bilinmeyenler sol tarafta,  $n$ . zaman seviyesindeki bilinmeyenler sağ tarafta toplanırsa



$$\begin{aligned}
& \frac{2(\alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1})}{\Delta t} - (\gamma_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \gamma_2 \delta_i^{n+1} + \gamma_1 \delta_{i+1}^{n+1}) + k_1 Z_i (\beta_1 \delta_{i-1}^{n+1} \\
& + \beta_2 \delta_{i+1}^{n+1}) + k_2 G_i (\beta_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_{i+1}^{n+1}) + k_2 Z_i (\beta_1 \sigma_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \sigma_{i+1}^{n+1}) \\
& = \frac{2}{\Delta t} (\alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n) + (\gamma_1 \delta_{i-1}^n + \gamma_2 \delta_i^n + \gamma_1 \delta_{i+1}^n) \\
& - k_1 Z_i (\beta_1 \delta_{i-1}^n + \beta_2 \delta_{i+1}^n) - k_2 G_i (\beta_1 \delta_{i-1}^n + \beta_2 \delta_{i+1}^n) - k_2 Z_i (\beta_1 \sigma_{i-1}^n + \beta_2 \sigma_{i+1}^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2(\alpha_1 \sigma_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \sigma_i^{n+1} + \alpha_1 \sigma_{i+1}^{n+1})}{\Delta t} - (\gamma_1 \sigma_{i-1}^{n+1} + \gamma_2 \sigma_i^{n+1} + \gamma_1 \sigma_{i+1}^{n+1}) + k_1 G_i (\beta_1 \sigma_{i-1}^{n+1} \\
& + \beta_2 \sigma_{i+1}^{n+1}) + k_3 G_i (\beta_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_{i+1}^{n+1}) + k_3 Z_i (\beta_1 \sigma_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \sigma_{i+1}^{n+1}) \\
& = \frac{2}{\Delta t} (\alpha_1 \sigma_{i-1}^n + \alpha_2 \sigma_i^n + \alpha_1 \sigma_{i+1}^n) + (\gamma_1 \sigma_{i-1}^n + \gamma_2 \sigma_i^n + \gamma_1 \sigma_{i+1}^n) \\
& - k_1 G_i (\beta_1 \sigma_{i-1}^n + \beta_2 \sigma_{i+1}^n) - k_3 G_i (\beta_1 \sigma_{i-1}^n + \beta_2 \sigma_{i+1}^n) - k_3 Z_i (\beta_1 \sigma_{i-1}^n + \beta_2 \sigma_{i+1}^n)
\end{aligned}$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \delta_{i-1}^{n+1} \left( \frac{2\alpha_1}{\Delta t} - \gamma_1 + k_1 Z_i \beta_1 + k_2 G_i \beta_1 \right) + \sigma_{i-1}^{n+1} (k_2 Z_i \beta_1) + \delta_i^{n+1} \left( \frac{2}{\Delta t} \alpha_2 - \gamma_2 \right) + \sigma_i^{n+1} (0) \\
& + \delta_{i+1}^{n+1} \left( \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 - \gamma_1 + k_1 Z_i \beta_2 + k_2 G_i \beta_2 \right) + \sigma_{i+1}^{n+1} (k_2 Z_i \beta_2) \\
& = \delta_{i-1}^n \left( \frac{2\alpha_1}{\Delta t} + \gamma_1 - k_1 Z_i \beta_1 - k_2 G_i \beta_1 \right) + \sigma_{i-1}^n (-k_2 Z_i \beta_1) + \delta_i^n \left( \frac{2}{\Delta t} \alpha_2 + \gamma_2 \right) + \sigma_i^n (0) \\
& + \delta_{i+1}^n \left( \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 + \gamma_1 - k_1 Z_i \beta_2 - k_2 G_i \beta_2 \right) + \sigma_{i+1}^n (-k_2 Z_i \beta_2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{i-1}^{n+1} (k_3 G_i \beta_1) + \sigma_{i-1}^{n+1} \left( \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 - \gamma_1 + k_1 G_i \beta_1 + k_3 Z_i \beta_1 \right) + \delta_i^{n+1} (0) \\
& + \sigma_i^{n+1} \left( \frac{2}{\Delta t} \alpha_2 - \gamma_2 \right) + \delta_{i+1}^{n+1} (k_3 G_i \beta_2) + \sigma_{i+1}^{n+1} \left( \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 - \gamma_1 + k_1 G_i \beta_2 + k_3 Z_i \beta_2 \right) \\
& = \delta_{i-1}^n (-k_3 G_i \beta_1) + \sigma_{i-1}^n \left( \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 + \gamma_1 - k_1 G_i \beta_1 - k_3 Z_i \beta_1 \right) + \delta_i^n (0) \\
& + \sigma_i^n \left( \frac{2}{\Delta t} \alpha_2 + \gamma_2 \right) + \delta_{i+1}^n (-k_3 G_i \beta_2) + \sigma_{i+1}^n \left( \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 + \gamma_1 - k_1 G_i \beta_2 - k_3 Z_i \beta_2 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistem

$$a1 = \frac{2\alpha_1}{\Delta t} - \gamma_1 + k_1 Z_i \beta_1 + k_2 G_i \beta_1$$

$$a2 = k_2 Z_i \beta_1$$

$$a3 = \frac{2}{\Delta t} \alpha_2 - \gamma_2$$

$$a4 = 0$$

$$a5 = \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 - \gamma_1 + k_1 Z_i \beta_2 + k_2 G_i \beta_2$$

$$a6 = k_2 Z_i \beta_2$$

$$a7 = k_3 G_i \beta_1$$

$$a8 = \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 - \gamma_1 + k_1 G_i \beta_1 + k_3 Z_i \beta_1$$

$$a9 = 0$$

$$a10 = \frac{2}{\Delta t} \alpha_2 + \gamma_2$$

$$a11 = k_3 G_i \beta_2$$

$$a12 = \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 - \gamma_1 + k_1 G_i \beta_2 + k_3 Z_i \beta_2$$

ve

$$b1 = \frac{2\alpha_1}{\Delta t} + \gamma_1 - k_1 Z_i \beta_1 - k_2 G_i \beta_1$$

$$b2 = -k_2 Z_i \beta_1$$

$$b3 = \frac{2}{\Delta t} \alpha_2 + \gamma_2$$

$$b4 = 0$$

$$b5 = \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 + \gamma_1 - k_1 Z_i \beta_2 - k_2 G_i \beta_2$$

$$b6 = -k_2 Z_i \beta_2$$

$$b7 = -k_3 G_i \beta_1$$

$$b8 = \frac{2}{\Delta t} \alpha_2 + \gamma_2$$

$$b9 = 0$$

$$b10 = \frac{2}{\Delta t} \alpha_2 + \gamma_2$$

$$b11 = -k_3 G_i \beta_2$$

$$b12 = \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 + \gamma_1 - k_1 G_i \beta_2 - k_3 Z_i \beta_2$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
& (a1)\delta_{i-1}^{n+1} + (a2)\sigma_{i-1}^{n+1} + (a3)\delta_i^{n+1} + (a4)\sigma_i^{n+1} + (a5)\delta_{i+1}^{n+1} + (a6)\sigma_{i+1}^{n+1} \\
& = (b1)\delta_{i-1}^n + (b2)\sigma_{i-1}^n + (b3)\delta_i^n + (b4)\sigma_i^n + (b5)\delta_{i+1}^n + (b6)\sigma_{i+1}^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (a7)\delta_{i-1}^{n+1} + (a8)\sigma_{i-1}^{n+1} + (a9)\delta_i^{n+1} + (a10)\sigma_i^{n+1} + (a11)\delta_{i+1}^{n+1} + (a12)\sigma_{i+1}^{n+1} \\
& = (b7)\delta_{i-1}^n + (b8)\sigma_{i-1}^n + (b9)\delta_i^n + (b10)\sigma_i^n + (b11)\delta_{i+1}^n + (b12)\sigma_{i+1}^n
\end{aligned}$$

biçiminde gösterilebilir. Bu sistemde  $(2N + 2)$  denklem ve  $(2N + 6)$  bilinmeyen vardır. Sınır şartları kullanılarak  $\delta_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\sigma_{-1}$ , ve  $\sigma_{N+1}$  sistemden yok edilir. Bu amaçla,  $x = x_i$  kollokasyon noktasındaki

$$U(x_i, t) = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

$$V(x_i, t) = \alpha_1 \sigma_{i-1} + \alpha_2 \sigma_i + \alpha_1 \sigma_{i+1}$$

yaklaşımları kullanılırsa  $\delta_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\sigma_{-1}$ , ve  $\sigma_{N+1}$  parametreleri;

$$U(x_0, t) = U_0 = \alpha_1 \delta_{-1} + \alpha_2 \delta_0 + \alpha_1 \delta_1$$

$$\delta_{-1} = \frac{U_0 - \alpha_2 \delta_0 - \alpha_1 \delta_1}{\alpha_1}$$

$$V(x_0, t) = V_0 = \alpha_1 \sigma_{-1} + \alpha_2 \sigma_0 + \alpha_1 \sigma_1$$

$$\sigma_{-1} = \frac{V_0 - \alpha_2 \sigma_0 - \alpha_1 \sigma_1}{\alpha_1}$$

$$U(x_N, t) = U_N = \alpha_1 \delta_{N-1} + \alpha_1 \delta_N + \alpha_2 \delta_{N+1}$$

$$\delta_{N+1} = \frac{U_N - \alpha_1 \delta_{N-1} - \alpha_1 \delta_N}{\alpha_1}$$

$$V(x_N, t) = V_N = \alpha_1 \sigma_{N-1} + \alpha_2 \sigma_N + \alpha_1 \sigma_{N+1}$$

$$\sigma_{N+1} = \frac{V_N - \alpha_1 \sigma_{N-1} - \alpha_2 \sigma_N}{\alpha_1}$$

biçiminde bulunur. Böylece  $i = 0$  için yerine yazılır

$$\begin{aligned}
& a1 \left( \frac{U_0^{n+1} - \alpha_2 \delta_0^{n+1} - \alpha_1 \delta_1^{n+1}}{\alpha_1} \right) + a2 \left( \frac{V_0^{n+1} - \alpha_2 \sigma_0^{n+1} - \alpha_1 \sigma_1^{n+1}}{\alpha_1} \right) \\
& + \delta_0^{n+1} (a3) + \sigma_0^{n+1} (a4) + \delta_1^{n+1} (a5) + \sigma_1^{n+1} (a6) \\
& = b1 \left( \frac{U_0^n - \alpha_2 \delta_0^n - \alpha_1 \delta_1^n}{\alpha_1} \right) + b2 \left( \frac{V_0^n - \alpha_2 \sigma_0^n - \alpha_1 \sigma_1^n}{\alpha_1} \right) \\
& + \delta_0^n (b3) + \sigma_0^n (b4) + \delta_1^n (b5) + \sigma_1^n (b6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& a7\left(\frac{U_0^{n+1} - \alpha_2\delta_0^{n+1} - \alpha_1\delta_1^{n+1}}{\alpha_1}\right) + a8\left(\frac{V_0^{n+1} - \alpha_2\sigma_0^{n+1} - \alpha_1\sigma_1^{n+1}}{\alpha_1}\right) \\
& + \delta_0^{n+1}(a9) + \sigma_0^{n+1}(a10) + \delta_1^{n+1}(a11) + \sigma_1^{n+1}(a12) \\
& = b7\left(\frac{U_0^n - \alpha_2\delta_0^n - \alpha_1\delta_1^n}{\alpha_1}\right) + b8\left(\frac{V_0^n - \alpha_2\sigma_0^n - \alpha_1\sigma_1^n}{\alpha_1}\right) \\
& + \delta_0^n(b9) + \sigma_0^n(b10) + \delta_1^n(b11) + \sigma_1^n(b12)
\end{aligned}$$

ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
& \delta_0^{n+1}\left(\frac{-a1\alpha_2}{\alpha_1} + a3\right) + \sigma_0^{n+1}\left(\frac{-a2\alpha_2}{\alpha_1} + a4\right) + \delta_1^{n+1}(a5 - a1) + \sigma_1^{n+1}(a6 - a2) \\
& = \delta_0^n\left(b3 - \frac{-b1\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \sigma_0^n\left(\frac{-b2\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \delta_1^n(b5 - b1) + \sigma_1^n(b6 - b2) + \frac{b1U_0^n}{\alpha_1} \\
& + \frac{b2V_0^n}{\alpha_1} - \frac{a1U_0^{n+1}}{\alpha_1} - \frac{a2V_0^{n+1}}{\alpha_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_0^{n+1}\left(a9 - \frac{a7\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \sigma_0^{n+1}\left(a10 - \frac{a8\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \delta_1^{n+1}(a11 - a7) + \sigma_1^{n+1}(a12 - a8) \\
& = \delta_0^n\left(\frac{-b7\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \sigma_0^n\left(b10 - \frac{b8\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \delta_1^n(b11 - b7) + \sigma_1^n(b12 - b8) \\
& + \frac{b7U_0^n}{\alpha_1} + \frac{b8V_0^n}{\alpha_1} - \frac{a7U_0^{n+1}}{\alpha_1} - \frac{a8V_0^{n+1}}{\alpha_1}
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler  $i = N$  için oluşan hayali noktalar için yapılırsa;

$$\begin{aligned}
& \delta_{N-1}^{n+1}(a1 - a5) + \sigma_{N-1}^{n+1}(a2 - a6) + \delta_N^{n+1}\left(a3 - \frac{a5\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \sigma_N^{n+1}\left(a4 - \frac{a6\alpha_2}{\alpha_1}\right) \\
& = \delta_{N-1}^n(b1 - b5) + \sigma_{N-1}^n(b2 - b6) + \delta_N^n\left(b3 - b5\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \sigma_N^n\left(b6\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) \\
& + b5\left(\frac{U_N^n}{\alpha_1}\right) + b6\left(\frac{V_N^n}{\alpha_1}\right) - a5\left(\frac{U_N^{n+1}}{\alpha_1}\right) - a6\left(\frac{V_N^{n+1}}{\alpha_1}\right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{N-1}^{n+1}(a7 - a11) + \sigma_{N-1}^{n+1}(a8 - a12) + \delta_N^{n+1}\left(a9 - \frac{a11\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \sigma_N^{n+1}\left(a10 - \frac{a12\alpha_2}{\alpha_1}\right) \\
& = \delta_{N-1}^n(b7 - b11) + \sigma_{N-1}^n(b8 - b12) + \delta_N^n\left(-b11\frac{\alpha_2}{\alpha_1}\right) + \sigma_N^n\left(b10 - \frac{b12\alpha_2}{\alpha_1}\right) \\
& + b11\left(\frac{U_N^n}{\alpha_1}\right) + b12\left(\frac{V_N^n}{\alpha_1}\right) - a11\left(\frac{U_N^{n+1}}{\alpha_1}\right) - a12\left(\frac{V_N^{n+1}}{\alpha_1}\right)
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$AX^{n+1} = BX^n + C \quad (4.1.2)$$

şeklinde bir kapalı sistem elde edilir. Burada  $A$  ve  $B$  matrisleri ile  $C$  ve  $X$  vektörlerinin elemanları

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{-a1\alpha_2}{\alpha_1} + a3, & A_{12} &= \frac{-a2\alpha_2}{\alpha_1} + a4, \\
A_{13} &= a5 - a1, & A_{14} &= a6 - a2 \\
A_{21} &= a9 - \frac{a7\alpha_2}{\alpha_1}, & A_{22} &= a10 - \frac{a8\alpha_2}{\alpha_1}, \\
A_{23} &= a11 - a7, & A_{24} &= a12 - a8 \\
A_{ij} &= a1, & A_{ij+1} &= a2, & A_{ij+2} &= a3, & A_{ij+3} &= a4, \\
A_{ij+4} &= a5, & A_{ij+5} &= a6, & i &= 3(2)2N - 1, & j &= i - 2 \\
A_{ij} &= a7, & A_{ij+1} &= a8, & A_{ij+2} &= a9, & A_{ij+3} &= a10, \\
A_{ij+4} &= a11, & A_{ij+5} &= a12, & i &= 4(2)2N, j = i - 3 \\
A_{2N+1,2N-1} &= a1 - a5, & A_{2N+1,2N} &= a2 - a6, \\
A_{2N+1,2N+1} &= a3 - \frac{a5\alpha_2}{\alpha_1}, & A_{2N+1,2N+2} &= a4 - \frac{a6\alpha_2}{\alpha_1}, \\
A_{2N+2,2N-1} &= a7 - a11, & A_{2N+2,2N} &= a8 - a12, \\
A_{2N+2,2N+1} &= a9 - \frac{a11\alpha_2}{\alpha_1}, & A_{2N+2,2N+2} &= a10 - \frac{a12\alpha_2}{\alpha_1}
\end{aligned}$$

$$B_{11} = b3 - \frac{-b1\alpha_2}{\alpha_1}, \quad B_{12} = \frac{-a2\alpha_2}{\alpha_1} + a4,$$

$$B_{13} = b5 - b1, \quad B_{14} = b6 - b2$$

$$B_{21} = \frac{-b7\alpha_2}{\alpha_1}, \quad B_{22} = b10 - \frac{b8\alpha_2}{\alpha_1},$$

$$B_{23} = b11 - b7, \quad B_{24} = b12 - b8$$

$$B_{ij} = b1, \quad B_{ij+1} = b2, \quad B_{ij+2} = b3, \quad B_{ij+3} = b4,$$

$$B_{ij+4} = b5, \quad B_{ij+5} = b6, \quad i = 3(2)2N - 1, \quad j = i - 2$$

$$B_{ij} = b7, \quad B_{ij+1} = b8, \quad B_{ij+2} = b9,$$

$$B_{ij+3} = b10, \quad B_{ij+4} = b11,$$

$$B_{ij+5} = b12, \quad i = 4(2)2N, \quad j = i - 3$$

$$B_{2N+1,2N-1} = b1 - b5, \quad B_{2N+1,2N} = b2 - b6,$$

$$B_{2N+1,2N+1} = b3 - b5\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad B_{2N+1,2N+2} = b6\frac{\alpha_2}{\alpha_1}$$

$$B_{2N+2,2N-1} = b7 - b11, \quad B_{2N+2,2N} = b8 - b12,$$

$$B_{2N+2,2N+1} = -b11\frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad B_{2N+2,2N+2} = b10 - \frac{b12\alpha_2}{\alpha_1}$$

$$C_1 = \frac{b1U_0^n}{\alpha_1} + \frac{b2V_0^n}{\alpha_1} - \frac{a1U_0^{n+1}}{\alpha_1} - \frac{a2V_0^{n+1}}{\alpha_1}$$

$$C_2 = \frac{b7U_0^n}{\alpha_1} + \frac{b8V_0^n}{\alpha_1} - \frac{a7U_0^{n+1}}{\alpha_1} - \frac{a8V_0^{n+1}}{\alpha_1}$$

$$C_i = 0, \quad i = 3(1)2N$$

$$C_{2N+1} = b5\left(\frac{U_N^n}{\alpha_1}\right) + b6\left(\frac{V_N^n}{\alpha_1}\right) - a5\left(\frac{U_N^{n+1}}{\alpha_1}\right) - a6\left(\frac{V_N^{n+1}}{\alpha_1}\right)$$

$$C_{2N+2} = b11\left(\frac{U_N^n}{\alpha_1}\right) + b12\left(\frac{V_N^n}{\alpha_1}\right) - a11\left(\frac{U_N^{n+1}}{\alpha_1}\right) - a12\left(\frac{V_N^{n+1}}{\alpha_1}\right)$$

$$X = [\delta_0, \sigma_0, \delta_1, \sigma_1, \dots, \delta_{N-1}, \sigma_{N-1}, \delta_N, \sigma_N]^T$$

biçimindedir. Böylece  $(2N+2) \times (2N+2)$  şeklindeki denklem sistemi çözülebilir. Bu sistemden  $\delta^{n+1}$  ve  $\sigma^{n+1}$  parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle  $\delta^0$  ve  $\sigma^0$  parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bu parametreler problemle verilen başlangıç ve sınır şartları kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$t = 0$  için

$$U_N(x, 0) = \sum_{i=-1}^{N+1} \delta_i^0 T_i^3(x), \quad V_N(x, 0) = \sum_{i=-1}^{N+1} \sigma_i^0 T_i^3(x)$$

olur. Başlangıç şartlarının  $x_i$  düğüm noktalarındaki

$$U_N(x_i, 0) = U(x_i, 0) = U_i$$

$$V_N(x_i, 0) = V(x_i, 0) = V_i$$

değerleri kullanılarak  $\delta_i^0$  parametreleri için

$$U(x_i, t) = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

ve  $\sigma_i^0$  parametreleri için

$$V(x_i, t) = \alpha_1 \sigma_{i-1} + \alpha_2 \sigma_i + \alpha_1 \sigma_{i+1}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-1} \\ \delta_0 \\ \vdots \\ \delta_N \\ \delta_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix} \quad (4.1.3)$$

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{-1} \\ \sigma_0 \\ \vdots \\ \sigma_N \\ \sigma_{N+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{N-1} \\ V_N \end{bmatrix} \quad (4.1.4)$$

matris formunda gösterilen  $(N+3) \times (N+1)$  tipinde denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemlerini  $(N+1) \times (N+1)$  şeklinde çözülebilir bir sistem haline getirmek için  $U$  ve  $V$ ' nin birinci türevleri sınırlarda kullanılarak  $\delta_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\sigma_{-1}$  ve  $\sigma_{N+1}$  parametreleri sistemlerden yok edilir. Burada  $x = x_i$  kollokasyon noktasındaki

$$U'_i = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1}$$

$$V'_i = \beta_1 \sigma_{i-1} + \beta_2 \sigma_{i+1}$$

yaklaşımı kullanılarak sırasıyla  $\delta_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\sigma_{-1}$  ve  $\sigma_{N+1}$  parametreleri;

$i = 0$  için

$$U'_0 = \beta_1 \delta_{-1} + \beta_2 \delta_1 \implies \delta_{-1} = \frac{U'_0 - \beta_2 \delta_1}{\beta_1}$$

$$V'_0 = \beta_1 \sigma_{-1} + \beta_2 \sigma_1 \implies \sigma_{-1} = \frac{V'_0 - \beta_2 \sigma_1}{\beta_1}$$

$$\alpha_1 \left( \frac{U'_0 - \beta_2 \delta_1}{\beta_1} \right) + \alpha_2 \delta_0 + \alpha_1 \delta_1 = \alpha_1 \frac{U'_0}{\beta_1} + \alpha_2 \delta_0 + \left[ \alpha_1 \left( 1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \right] \delta_1$$

$$\alpha_1 \left( \frac{V'_0 - \beta_2 \sigma_1}{\beta_1} \right) + \alpha_2 \sigma_0 + \alpha_1 \sigma_1 = \alpha_1 \frac{V'_0}{\beta_1} + \alpha_2 \sigma_0 + \left[ \alpha_1 \left( 1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) \right] \sigma_1$$

$i = N$  için

$$U'_N = \beta_1 \delta_{N-1} + \beta_2 \delta_{N+1} \implies \delta_{N+1} = \frac{U'_N - \beta_1 \delta_{N-1}}{\beta_2}$$

$$V'_N = \beta_1 \sigma_{N-1} + \beta_2 \sigma_{N+1} \implies \sigma_{N+1} = \frac{V'_N - \beta_1 \sigma_{N-1}}{\beta_2}$$

$$\alpha_1 \delta_{N-1} + \alpha_2 \delta_N + \alpha_1 \left( \frac{U'_N - \beta_1 \delta_{N-1}}{\beta_2} \right) = \left[ \alpha_1 \left( 1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \right] \delta_{N-1} + \alpha_2 \delta_N + \alpha_1 \frac{U'_N}{\beta_2}$$

$$\alpha_1 \sigma_{N-1} + \alpha_2 \sigma_N + \alpha_1 \left( \frac{V'_N - \beta_1 \sigma_{N-1}}{\beta_2} \right) = \left[ \alpha_1 \left( 1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) \right] \sigma_{N-1} + \alpha_2 \sigma_N + \alpha_1 \frac{V'_N}{\beta_2}$$

bulunur. Bulunan bu ifadeler (4.1.3) ve (4.1.4) denklem sisteminde tekrar yazıldığında

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \left( 1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) & & & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & \\ & & & \alpha_1 \left( 1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) & \alpha_2 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \vdots \\ \delta_{N-1} \\ \delta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \vdots \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_1 \frac{U'_0}{\beta_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\alpha_1 \frac{U'_N}{\beta_2} \end{bmatrix} \quad (4.1.5)$$

ve

$$\begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 \left( 1 - \frac{\beta_2}{\beta_1} \right) & & & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & \\ & & & \alpha_1 \left( 1 - \frac{\beta_1}{\beta_2} \right) & \alpha_2 & & & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \vdots \\ \sigma_{N-1} \\ \sigma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \vdots \\ V_{N-1} \\ V_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\alpha_1 \frac{V'_0}{\beta_1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ -\alpha_1 \frac{V'_N}{\beta_2} \end{bmatrix} \quad (4.1.6)$$

$(N + 1) \times (N + 1)$  şeklinde çözülebilir denklem sistemleri elde edilir ve bu denklem sistemlerinden başlangıç parametreleri bulunur. Böylece elde edilen  $\delta^0$  ve  $\sigma^0$  parametreleri (4.1.2) sistemde kullanılarak istenilen  $t$  zamanındaki nümerik çözümler bulunur.

Burada da  $U_N$  ve  $V_N$  yaklaşık çözümlerini iyileştirmek için denklem sistemindeki lineer olmayan terimler için her bir zaman adımında

$$\delta_i^* = \delta_i^n + \frac{1}{2} (\delta_i^{n+1} - \delta_i^n)$$

$$\sigma_i^* = \sigma_i^n + \frac{1}{2} (\sigma_i^{n+1} - \sigma_i^n)$$

biçiminde tanımlanan iç iterasyon formülleri birkaç defa uygulandı.



#### 4.1.1.1 Kararlılık analizi

Bu kısımda (3.1.1) ile verilen ikili Burgers sistemindeki ilk denklem olan (3.1.1a) ' ya KBTBKY uygulanmasıyla elde edilen ve  $Z_j = \widehat{U}$  ve  $G_j = \widehat{V}$  olmak üzere

$$\begin{aligned} & \delta_{j-1}^{n+1}(a1) + \sigma_{j-1}^{n+1}(a2) + \delta_j^{n+1}(a3) + \sigma_j^{n+1}(a4) + \delta_{j+1}^{n+1}(a5) + \sigma_{j+1}^{n+1}(a6) \\ & = \delta_{j-1}^n(b1) + \sigma_{j-1}^n(b2) + \delta_j^n(b3) + \sigma_j^n(b4) + \delta_{j+1}^n(b5) + \sigma_{j+1}^n(b6) \end{aligned} \quad (4.1.7)$$

şeklindeki şemanın kararlılık analizi von Neumann yöntemi kullanılarak incelendi. Burada

$$\begin{aligned} a1 &= \frac{2\alpha_1}{\Delta t} - \gamma_1 + k_1 \widehat{U} \beta_1 + k_2 \widehat{V} \beta_1 \\ a2 &= k_2 Z_j \beta_1 \\ a3 &= \frac{2}{\Delta t} \alpha_2 - \gamma_2 \\ a4 &= 0 \\ a5 &= \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 - \gamma_1 + k_1 \widehat{U} \beta_2 + k_2 \widehat{V} \beta_2 \\ a6 &= k_2 Z_i \beta_2 \\ a7 &= k_3 G_i \beta_1 \\ a8 &= \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 - \gamma_1 + k_1 \widehat{V} \beta_1 + k_3 \widehat{U} \beta_1 \\ a9 &= 0 \\ a10 &= \frac{2}{\Delta t} \alpha_2 + \gamma_2 \\ a11 &= k_3 G_i \beta_2 \\ a12 &= \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 - \gamma_1 + k_1 \widehat{V} \beta_2 + k_3 \widehat{U} \beta_2 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
b1 &= \frac{2\alpha_1}{\Delta t} + \gamma_1 - k_1 \hat{U} \beta_1 - k_2 \hat{V} \beta_1 \\
b2 &= -k_2 \hat{U} \beta_1 \\
b3 &= \frac{2}{\Delta t} \alpha_2 + \gamma_2 \\
b4 &= 0 \\
b5 &= \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 + \gamma_1 - k_1 \hat{U} \beta_2 - k_2 \hat{V} \beta_2 \\
b6 &= -k_2 \hat{U} \beta_2 \\
b7 &= -k_3 \hat{V} \beta_1 \\
b8 &= \frac{2}{\Delta t} \alpha_2 + \gamma_2 \\
b9 &= 0 \\
b10 &= \frac{2}{\Delta t} \alpha_2 + \gamma_2 \\
b11 &= -k_3 \hat{V} \beta_2 \\
b12 &= \frac{2}{\Delta t} \alpha_1 + \gamma_1 - k_1 \hat{V} \beta_2 - k_3 \hat{U} \beta_2
\end{aligned}$$

dir. Bu şemada,  $A$  ve  $B$  harmonik genlikler,  $\phi = kh$ ,  $k$  mod numarası,  $i = \sqrt{-1}$  ve  $g$  şemaların amplifikasyon faktörü olmak üzere,  $\delta_j^n$  ve  $\sigma_j^n$  yerine

$$\delta_j^n = A \zeta^n \exp(ij\phi)$$

$$\sigma_j^n = B \zeta^n \exp(ij\phi)$$

$$g = \frac{\zeta^{n+1}}{\zeta^n}$$

yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$g = \frac{X_2 + iY}{X_1 - iY}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
X_1 &= A \left[ 2 \left( \alpha_1 - \frac{\gamma_1 \Delta t}{2} \right) \cos \phi + \left( \alpha_2 - \frac{\gamma_2 \Delta t}{2} \right) \right], \\
X_2 &= A \left[ 2 \left( \alpha_1 + \frac{\gamma_1 \Delta t}{2} \right) \cos \phi + \left( \alpha_2 + \frac{\gamma_2 \Delta t}{2} \right) \right]
\end{aligned}$$

ve

$$Y = \left[ \sin \phi \left( A \left( \frac{\beta_2 k_2 \Delta t}{2} \hat{V} + \frac{\beta_2 k_1 \Delta t}{2} \hat{U} - \frac{\beta_1 k_2 \Delta t}{2} \hat{V} + \frac{\beta_1 k_1 \Delta t}{2} \hat{U} \right) + B \left( -\frac{\beta_1 k_2 \Delta t}{2} \hat{U} + \frac{\beta_2 k_2 \Delta t}{2} \hat{U} \right) \right) \right]$$

dir. İkili Burgers denklemi için Ref. [39] ile verilen çalışmada uygulanan lineerleştirme tekniğinin sonucunda elde edilen nümerik şema ile bu çalışmada (4.1.7) ile verilen nümerik şema benzer olduğundan Ref. [39]'da gösterildiği gibi benzer şekilde  $|g| \leq 1$  bulunur. Buradan şema şartsız kararlıdır.  $U$  ve  $V$  'nin simetrik olmasından dolayı (3.1.1) ile verilen ikili Burgers sistemindeki ikinci denklem olan (3.1.1b) içinde benzer sonuçlar elde edilir.

#### 4.1.2 Kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi (KNTBKY)

$U(x,t)$  ve  $V(x,t)$ 'ye bir yaklaşım sırasıyla  $U_N(x,t)$  ve  $V_N(x,t)$ , kuintik trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak

$$U_N(x,t) = \sum_{i=-2}^{N+2} \delta_i T_i^5(x) \text{ ve } V_N(x,t) = \sum_{i=-2}^{N+2} \sigma_i T_i^5(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşımlarda,  $x = x_i$  kollokasyon noktasında kuintik trigonometrik fonksiyonların kullanılmasıyla Bölüm 2'de de ayrıntılı olarak anlatılan ve (2.2.7) ile verilen  $U$  ve  $V$  ile  $U$  ve  $V$  nin birinci ve ikinci türevleri

$$U = a_1 \delta_{i-2} + a_2 \delta_{i-1} + a_3 \delta_i + a_2 \delta_{i+1} + a_1 \delta_{i+2}$$

$$U_x = b_1 \delta_{i-2} + b_2 \delta_{i-1} - b_2 \delta_{i+1} - b_1 \delta_{i+2}$$

$$U_{xx} = c_1 \delta_{i-2} + c_2 \delta_{i-1} + c_3 \delta_i + c_2 \delta_{i+1} + c_1 \delta_{i+2}$$

$$V = a_1 \sigma_{i-2} + a_2 \sigma_{i-1} + a_3 \sigma_i + a_2 \sigma_{i+1} + a_1 \sigma_{i+2}$$

$$V_x = b_1 \sigma_{i-2} + b_2 \sigma_{i-1} - b_2 \sigma_{i+1} - b_1 \sigma_{i+2}$$

$$V_{xx} = c_1 \sigma_{i-2} + c_2 \sigma_{i-1} + c_3 \sigma_i + c_2 \sigma_{i+1} + c_1 \sigma_{i+2}$$

biçiminde yazılır. Burada

$$\theta = \sin(h/2) \sin(h) \sin(3h/2) \sin(2h) \sin(5h/2)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sin(h/2)^5 / \theta \\
a_2 &= (4 \sin(2h) - 11 \sin(3h) + 4 \sin(4h) + 9 \sin(h)) / (16\theta) \\
a_3 &= (2 \sin(h/2)^5 (48 \sin(h/2)^4) - 80 \sin(h/2)^2 + 33) / \theta \\
b_1 &= -(5 \cos(h/2) \sin(h/2)^4) / (2\theta) \\
b_2 &= -(5 \sin((h/2)^4) 8 \sin(h/2)^4 - 13 \sin(h/2)^2 + 5) / \theta \\
c_1 &= 20 \sin(h/2)^3 - 25 * \sin(h/2)^5) / (4\theta) \\
c_2 &= -20(\sin(2h) - 35 \sin(3h) + 20 \sin(4h) - 15 \sin(h)) / (64\theta) \\
c_3 &= (5 \sin(h/2)^3 (43 \sin(h/2)^2 - 48 \sin(h/2)^4 + 16 \sin(h/2)^6 - 12)) / (2\theta)
\end{aligned}$$

dir. (4.1.1) ile verilen ikili Burgers denkleminde bu yaklaşımlar yerine yazılır ve  $(n + 1)$ . zaman seviyesindeki bilinmeyenler sol tarafta,  $n$ . zaman seviyesindeki bilinmeyenler sağ tarafta toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{2(a_1 \delta_{i-2}^{n+1} + a_2 \delta_{i-1}^{n+1} + a_3 \delta_i^{n+1} + a_2 \delta_{i+1}^{n+1} + a_1 \delta_{i+2}^{n+1})}{\Delta t} \\
& - (c_1 \delta_{i-2}^{n+1} + c_2 \delta_{i-1}^{n+1} + c_3 \delta_i^{n+1} + c_2 \delta_{i+1}^{n+1} + c_1 \delta_{i+2}^{n+1}) + k_1 Z_i (b_1 \delta_{i-2}^n + b_2 \delta_{i-1}^n - b_2 \delta_{i+1}^n - b_1 \delta_{i+2}^n) \\
& + k_2 G_i (b_1 \delta_{i-2}^{n+1} + b_2 \delta_{i-1}^{n+1} - b_2 \delta_{i+1}^{n+1} - b_1 \delta_{i+2}^{n+1}) + k_2 Z_i (b_1 \delta_{i-2}^n + b_2 \delta_{i-1}^n - b_2 \delta_{i+1}^n - b_1 \delta_{i+2}^n) \\
& = \frac{2(a_1 \delta_{i-2}^n + a_2 \delta_{i-1}^n + a_3 \delta_i^n + a_2 \delta_{i+1}^n + a_1 \delta_{i+2}^n)}{\Delta t} + (c_1 \delta_{i-2}^n + c_2 \delta_{i-1}^n + c_3 \delta_i^n + c_2 \delta_{i+1}^n + c_1 \delta_{i+2}^n) \\
& - k_1 Z_i (b_1 \delta_{i-2}^n + b_2 \delta_{i-1}^n - b_2 \delta_{i+1}^n - b_1 \delta_{i+2}^n) \\
& - k_2 G_i (b_1 \delta_{i-2}^n + b_2 \delta_{i-1}^n - b_2 \delta_{i+1}^n - b_1 \delta_{i+2}^n) \\
& - k_2 Z_i (b_1 \sigma_{i-2}^n + b_2 \sigma_{i-1}^n - b_2 \sigma_{i+1}^n - b_1 \sigma_{i+2}^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2(a_1 \sigma_{i-2}^{n+1} + a_2 \sigma_{i-1}^{n+1} + a_3 \sigma_i^{n+1} + a_2 \sigma_{i+1}^{n+1} + a_1 \sigma_{i+2}^{n+1})}{\Delta t} \\
& - (c_1 \sigma_{i-2}^{n+1} + c_2 \sigma_{i-1}^{n+1} + c_3 \sigma_i^{n+1} + c_2 \sigma_{i+1}^{n+1} + c_1 \sigma_{i+2}^{n+1}) \\
& + k_1 G_i (b_1 \delta_{i-2}^{n+1} + b_2 \delta_{i-1}^{n+1} - b_2 \delta_{i+1}^{n+1} - b_1 \delta_{i+2}^{n+1}) \\
& + k_3 G_i (b_1 \sigma_{i-2}^{n+1} + b_2 \sigma_{i-1}^{n+1} - b_2 \sigma_{i+1}^{n+1} - b_1 \sigma_{i+2}^{n+1}) + \\
& k_3 Z_i (b_1 \delta_{i-2}^{n+1} + b_2 \delta_{i-1}^{n+1} - b_2 \delta_{i+1}^{n+1} - b_1 \delta_{i+2}^{n+1}) = \frac{2(a_1 \sigma_{i-2}^n + a_2 \sigma_{i-1}^n + a_3 \sigma_i^n + a_2 \sigma_{i+1}^n + a_1 \sigma_{i+2}^n)}{\Delta t} \\
& + (c_1 \sigma_{i-2}^n + c_2 \sigma_{i-1}^n + c_3 \sigma_i^n + c_2 \sigma_{i+1}^n + c_1 \sigma_{i+2}^n) - k_1 G_i (b_1 \sigma_{i-2}^n + b_2 \sigma_{i-1}^n - b_2 \sigma_{i+1}^n - b_1 \sigma_{i+2}^n) \\
& - k_3 G_i (b_1 \sigma_{i-2}^n + b_2 \sigma_{i-1}^n - b_2 \sigma_{i+1}^n - b_1 \sigma_{i+2}^n) - k_3 Z_i (b_1 \sigma_{i-2}^n + b_2 \sigma_{i-1}^n - b_2 \sigma_{i+1}^n - b_1 \sigma_{i+2}^n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistem

$$m1 = \frac{2}{\Delta t}a_1 - c_1 + k_1Z_ib_1 + k_2G_ib_1$$

$$m2 = k_2b_1Z_i$$

$$m3 = \frac{2}{\Delta t}a_2 - c_2 + k_1Z_ib_2 + k_2G_ib_2$$

$$m4 = k_2Z_ib_2$$

$$m5 = \frac{2}{\Delta t}a_3 - c_3$$

$$m6 = 0$$

$$m7 = \frac{2}{\Delta t}a_2 - c_2 - k_1Z_ib_2 - k_2G_ib_2$$

$$m8 = -k_2Z_ib_2$$

$$m9 = \frac{2}{\Delta t}a_1 - c_1 - k_1Z_ib_1 - k_2G_ib_1$$

$$m10 = -k_2Z_ib_1$$

$$m11 = k_3G_ib_1$$

$$m12 = \frac{2}{\Delta t}a_1 - c_1 + k_1G_ib_1 + k_3Z_ib_1$$

$$m13 = k_3G_ib_2$$

$$m14 = \frac{2}{\Delta t}a_2 - c_2 + k_1G_ib_2 + k_3Z_ib_2$$

$$m15 = 0$$

$$m16 = \frac{2}{\Delta t}a_3 - c_3$$

$$m17 = -k_3G_ib_2$$

$$m18 = \frac{2}{\Delta t}a_2 - c_2 - k_1G_ib_2 - k_3Z_ib_2$$

$$m19 = -k_3G_ib_1$$

$$m20 = \frac{2}{\Delta t}a_1 - c_1 - k_1G_ib_1 - k_3Z_ib_1$$

ve

$$f1 = \frac{2}{\Delta t} a_1 + c_1 - k_1 Z_i b_1 - k_2 G_i b_1$$

$$f2 = -k_2 b_1 Z_i$$

$$f3 = \frac{2}{\Delta t} a_2 + c_2 - k_1 Z_i b_2 - k_2 G_i b_2$$

$$f4 = -k_2 b_2 Z_i$$

$$f5 = \frac{2}{\Delta t} a_3 + c_3$$

$$f6 = 0$$

$$f7 = \frac{2}{\Delta t} a_2 - c_2 + k_1 Z_i b_2 + k_2 G_i b_2$$

$$f8 = k_2 b_2 Z_i$$

$$f9 = \frac{2}{\Delta t} a_1 - c_1 + k_1 Z_i b_1 + k_2 G_i b_1$$

$$f10 = k_2 b_1 Z_i$$

$$f11 = -k_3 G_i b_1$$

$$f12 = \frac{2}{\Delta t} a_1 + c_1 - k_1 G_i b_1 - k_3 Z_i b_1$$

$$f13 = -k_3 G_i b_2$$

$$f14 = \frac{2}{\Delta t} a_2 + c_2 - k_1 G_i b_2 - k_3 Z_i b_2$$

$$f15 = 0$$

$$f16 = \frac{2}{\Delta t} a_3 + c_3$$

$$f17 = k_3 G_i b_2$$

$$f18 = \frac{2}{\Delta t} a_2 + c_2 + k_1 G_i b_2 + k_3 Z_i b_2$$

$$f19 = k_3 G_i b_1$$

$$f20 = \frac{2}{\Delta t} a_1 + c_1 + k_1 G_i b_1 + k_3 Z_i b_1$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} & \delta_{i-2}^{n+1}(m1) + \sigma_{i-2}^{n+1}(m2) + \delta_{i-1}^{n+1}(m3) + \sigma_{i-1}^{n+1}(m4) + \delta_i^{n+1}(m5) \\ & + \sigma_i^{n+1}(m6) + \delta_{i+1}^{n+1}(m7) + \sigma_{i+1}^{n+1}(m8) + \delta_{i+2}^{n+1}(m9) + \sigma_{i+2}^{n+1}(m10) \\ & = \delta_{i-2}^n(f1) + \sigma_{i-2}^n(f2) + \delta_{i-1}^n(f3) + \sigma_{i-1}^n(f4) + \delta_i^n(f5) + \sigma_i^n(f6) \\ & + \delta_{i+1}^n(f7) + \sigma_{i+1}^n(f8) + \delta_{i+2}^n(f9) + \sigma_{i+2}^n(f10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{i-2}^{n+1}(m11) + \sigma_{i-2}^{n+1}(m12) + \delta_{i-1}^{n+1}(m13) + \sigma_{i-1}^{n+1}(m14) + \delta_i^{n+1}(m15) \\
& + \sigma_i^{n+1}(m16) + \delta_{i+1}^{n+1}(m17) + \sigma_{i+1}^{n+1}(m18) + \delta_{i+2}^{n+1}(m19) + \sigma_{i+2}^{n+1}(m20) \\
& = \delta_{i-2}^n(f11) + \sigma_{i-2}^n(f12) + \delta_{i-1}^n(f13) + \sigma_{i-1}^n(f14) + \delta_i^n(f15) + \sigma_i^n(f16) \\
& + \delta_{i+1}^n(f17) + \sigma_{i+1}^n(f18) + \delta_{i+2}^n(f19) + \sigma_{i+2}^n(f20)
\end{aligned}$$

biçiminde gösterilebilir. Bu sistemde  $(2N + 2)$  denklem ve  $(2N + 10)$  bilinmeyen vardır. Sınır şartları kullanılarak bu sistemden  $\delta_{-2}$ ,  $\delta_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\delta_{N+2}$ ,  $\sigma_{-2}$ ,  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_{N+1}$ ,  $\sigma_{N+2}$  parametreleri yok edilir. Bu amaçla,  $x = x_i$  kollokasyon noktasındaki

$$\begin{aligned}
U_x(x_i, t) &= b_1 \delta_{i-2} + b_2 \delta_{i-1} - b_2 \delta_{i+1} - b_1 \delta_{i+2} \\
U_{xx}(x_i, t) &= c_1 \delta_{i-2} + c_2 \delta_{i-1} + c_3 \delta_i + c_2 \delta_{i+1} + c_1 \delta_{i+2} \\
V_x(x_i, t) &= b_1 \sigma_{i-2} + b_2 \sigma_{i-1} - b_2 \sigma_{i+1} - b_1 \sigma_{i+2} \\
V_{xx}(x_i, t) &= c_1 \sigma_{i-2} + c_2 \sigma_{i-1} + c_3 \sigma_i + c_2 \sigma_{i+1} + c_1 \sigma_{i+2}
\end{aligned}$$

yaklaşımları kullanılırsa  $\delta_{-2}$ ,  $\delta_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\delta_{N+2}$ ,  $\sigma_{-2}$ ,  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_{N+1}$ ,  $\sigma_{N+2}$  parametreleri

$$\begin{aligned}
\delta_{-1} &= \frac{b_1 U_{xx}(x_0, t) - c_1 U_x(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{b_1 c_3 \delta_0 + (b_1 c_2 + c_1 b_2 \delta_1) + 2b_1 c_1 \delta_2}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\
\delta_{-2} &= \frac{b_2 U_{xx}(x_0, t) - c_2 U_x(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{b_2 c_3 \delta_0 + 2b_2 c_2 \delta_1 + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \delta_2}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \\
\delta_{N+1} &= \frac{b_1 U_{xx}(x_N, t) - c_1 U_x(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{2c_1 b_1 \delta_{N-2} + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \delta_{N-1} + c_3 b_1 \delta_N}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\
\delta_{N+2} &= \frac{b_2 U_{xx}(x_N, t) - c_2 U_x(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) \delta_{N-2} + 2c_2 b_2 \delta_{N-1} + b_2 c_3 \delta_N}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \\
\sigma_{-1} &= \frac{b_1 V_{xx}(x_0, t) - c_1 V_x(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{b_1 c_3 \sigma_0 + (b_1 c_2 + c_1 b_2 \sigma_1) + 2b_1 c_1 \sigma_2}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\
\sigma_{-2} &= \frac{b_2 V_{xx}(x_0, t) - c_2 V_x(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{b_2 c_3 \sigma_0 + 2b_2 c_2 \sigma_1 + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \sigma_2}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \\
\sigma_{N+1} &= \frac{b_1 V_{xx}(x_N, t) - c_1 V_x(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{2c_1 b_1 \sigma_{N-2} + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \sigma_{N-1} + c_3 b_1 \sigma_N}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\
\sigma_{N+2} &= \frac{b_2 V_{xx}(x_N, t) - c_2 V_x(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) \sigma_{N-2} + 2c_2 b_2 \sigma_{N-1} + b_2 c_3 \sigma_N}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)}
\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Böylece  $i = 0$  için yerine yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}
& \delta_0^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_2) m_1}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_3 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_3 + m_5 \right) \\
& + \sigma_0^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_2) m_2}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_3 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_4 + m_6 \right) \\
& + \delta_1^{n+1} \left( \frac{2(c_2 b_2) m_1}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_2 b_1 + c_1 b_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_3 + m_7 \right) \\
& + \sigma_1^{n+1} \left( \frac{2(c_2 b_2) m_2}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_2 b_1 + c_1 b_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_4 + m_8 \right) \\
& + \delta_2^{n+1} \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) m_1}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2c_1 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_3 + m_9 \right) \\
& + \sigma_2^{n+1} \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) m_2}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2c_1 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_4 + m_{10} \right) \\
& + m_1 \left( \frac{b_2 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_2 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + m_2 \left( \frac{b_2 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_2 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + m_3 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + m_4 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& = \delta_0^n \left( \frac{(c_3 b_2) f_1}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{b_1 c_3}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_3 + f_5 \right) \\
& + \delta_1^n \left( \frac{(2c_2 b_2) f_1}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{b_1 c_2 + c_1 b_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_3 + f_7 \right) \\
& + \delta_2^n \left( \frac{(b_1 c_2 + c_1 b_2) f_1}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{(2c_1 b_1)}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_3 + f_9 \right) \\
& + \sigma_0^n \left( \frac{(c_3 b_2) f_2}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{b_1 c_3}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_4 + f_6 \right) \\
& + \sigma_1^n \left( \frac{(2c_2 b_2) f_2}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{b_1 c_2 + c_1 b_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_4 + f_8 \right) \\
& + \sigma_2^n \left( \frac{(b_1 c_2 + c_1 b_2) f_2}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{(2c_1 b_1)}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_4 + f_{10} \right) \\
& + f_1 \left( \frac{b_2 U_{xx}^n(x_0, t) - c_2 U_x^n(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + f_2 \left( \frac{b_2 V_{xx}^n(x_0, t) - c_2 V_x^n(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + f_3 \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_0, t) - c_1 U_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f_4 \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_0, t) - c_1 V_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \delta_0^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_2) m_{11}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_3 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{13} + m_{15} \right) \\
& + \sigma_0^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_2) m_{12}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_3 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{14} + m_{16} \right) \\
& + \delta_1^{n+1} \left( \frac{2(c_2 b_2) m_{11}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_2 b_1 + c_1 b_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{13} + m_{17} \right) \\
& + \sigma_1^{n+1} \left( \frac{2(c_2 b_2) m_{12}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_2 b_1 + c_1 b_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{14} + m_{18} \right) \\
& + \delta_2^{n+1} \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) m_{11}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2c_1 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{13} + m_{19} \right) \\
& + \sigma_2^{n+1} \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) m_{12}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2c_1 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{14} + m_{20} \right) \\
& + m_{11} \left( \frac{b_2 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_2 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + m_{12} \left( \frac{b_2 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_2 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + m_{13} \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + m_{14} \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& = \delta_0^n \left( \frac{(c_3 b_2) f_{11}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{b_1 c_3}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_{13} + f_{15} \right) \\
& + \sigma_0^n \left( \frac{(c_3 b_2) f_{12}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{b_1 c_3}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_{14} + f_{16} \right) \\
& + \delta_1^n \left( \frac{2(c_2 b_2) f_{11}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{b_1 c_2 + c_1 b_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_{13} + f_{17} \right) \\
& + \sigma_1^n \left( \frac{2(c_2 b_2) f_{12}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{b_1 c_2 + c_1 b_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_{14} + f_{18} \right) \\
& + \delta_2^n \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) f_{11}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2b_1 c_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_{13} + f_{19} \right) \\
& + \sigma_2^n \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) f_{12}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2b_1 c_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_{14} + f_{20} \right) \\
& + f_{11} \left( \frac{b_2 U_{xx}^n(x_0, t) - c_2 U_x^n(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + f_{12} \left( \frac{b_2 V_{xx}^n(x_0, t) - c_2 V_x^n(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + f_{13} \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_0, t) - c_1 U_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f_{14} \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_0, t) - c_1 V_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer işlemler  $i = 1$  için yapılırsa;

$$\begin{aligned}
& \delta_0^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_1) m_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_3 \right) + \sigma_0^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_1) m_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_4 \right) \\
& + \delta_1^{n+1} \left( \frac{(c_2 b_1 + c_1 b_2) m_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_5 \right) + \sigma_1^{n+1} \left( \frac{(c_2 b_1 + c_1 b_2) m_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_6 \right) + \\
& \delta_2^{n+1} \left( \frac{(2c_1 b_1) m_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_7 \right) + \sigma_2^{n+1} \left( \frac{(2c_1 b_1) m_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_8 \right) \\
& + \delta_3^{n+1}(m_9) + \sigma_3^{n+1}(m_{10}) \\
& + m_1 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + m_2 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& = \delta_0^n \left( \frac{(c_3 b_1) f_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_3 \right) + \delta_1^n \left( \frac{(b_1 c_2 + b_2 c_1) f_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_5 \right) \\
& + \delta_2^n \left( \frac{(2c_1 b_1) f_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_7 \right) + \delta_3^n(f_9) \\
& \sigma_0^n \left( \frac{(c_3 b_1) f_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_4 \right) + \sigma_1^n \left( \frac{(b_1 c_2 + b_2 c_1) f_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_6 \right) \\
& + \sigma_2^n \left( \frac{(2c_1 b_1) f_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_8 \right) + \sigma_3^n(f_{10}) \\
& + f_1 \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_0, t) - c_1 U_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f_2 \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_0, t) - c_1 V_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_0^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_1) m_{11}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_{13} \right) + \sigma_0^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_1) m_{12}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_{14} \right) \\
& + \delta_1^{n+1} \left( \frac{(c_2 b_1 + c_1 b_2) m_{11}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_{15} \right) + \left( \sigma_1^{n+1} \frac{(c_2 b_1 + c_1 b_2) m_{12}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_{16} \right) \\
& + \delta_2^{n+1} \left( \frac{(2c_1 b_1) m_{11}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_{17} \right) + \sigma_2^{n+1} \left( \frac{(2c_1 b_1) m_{12}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_{18} \right) \\
& + \delta_3^{n+1} (m_{19}) + \sigma_3^{n+1} (m_{20}) \\
& + m_{11} \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + m_{12} \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& = \delta_0^n \left( \frac{(c_3 b_1) f_{11}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_{13} \right) + \sigma_0^n \left( \frac{(c_3 b_1) f_{12}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_{14} \right) + \\
& \delta_1^n \left( \frac{(b_1 c_2 + b_2 c_1) f_{11}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_{15} \right) + \sigma_1^n \left( \frac{(b_1 c_2 + b_2 c_1) f_{12}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_{16} \right) \\
& \delta_2^n \left( \frac{(2c_1 b_1) f_{11}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_{17} \right) + \sigma_2^n \left( \frac{(2c_1 b_1) f_{12}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_{18} \right) \\
& + \delta_3^n (f_{19}) + \sigma_3^n (f_{20}) \\
& + f_{11} \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_0, t) - c_1 U_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f_{12} \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_0, t) - c_1 V_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

olur.  $i = N - 1$  için ise;

$$\begin{aligned}
& \delta_{N-3}^{n+1}(m1) + \sigma_{N-3}^{n+1}(m2) \\
& + \delta_{N-2}^{n+1} \left( \frac{(2c_1b_1)m9}{c_1b_2 - c_2b_1} + m3 \right) + \sigma_{N-2}^{n+1} \left( \frac{(2c_1b_1)m10}{c_1b_2 - c_2b_1} + m4 \right) \\
& + \delta_{N-1}^{n+1} \left( \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m9}{c_1b_2 - c_2b_1} + m5 \right) + \sigma_N^{n+1} \left( \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m10}{c_1b_2 - c_2b_1} + m6 \right) \\
& + \delta_N^{n+1} \left( \frac{(c_3b_1)m9}{c_1b_2 - c_2b_1} + m7 \right) + \sigma_N^{n+1} \left( \frac{(c_3b_1)m10}{c_1b_2 - c_2b_1} + m8 \right) \\
& + m9 \left( \frac{b_1U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) \\
& + m10 \left( \frac{b_1V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) \\
& = \delta_{N-3}^n(f1) + \sigma_{N-3}^n(f2) + \delta_{N-2}^n \left( \frac{(2c_1b_1)f9}{c_1b_2 - c_2b_1} + f3 \right) \\
& + \sigma_{N-2}^n \left( \frac{(2c_1b_1)f10}{c_1b_2 - c_2b_1} + f4 \right) + \delta_{N-1}^n \left( \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)f9}{c_1b_2 - c_2b_1} + f5 \right) + \\
& \sigma_{N-1}^n \left( \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)f10}{c_1b_2 - c_2b_1} + f6 \right) + \delta_N^n \left( \frac{(c_3b_1)f9}{c_1b_2 - c_2b_1} + f7 \right) + \\
& \sigma_N^n \left( \frac{(c_3b_1)f10}{c_1b_2 - c_2b_1} + f8 \right) + f9 \left( \frac{b_1U_{xx}^n(x_N, t) - c_1U_x^n(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) \\
& + f10 \left( \frac{b_1V_{xx}^n(x_N, t) - c_1V_x^n(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{N-3}^{n+1}(m11) + \sigma_{N-3}^{n+1}(m12) \\
& \delta_{N-2}^{n+1} \left( \frac{(2c_1b_1)m19}{c_1b_2 - c_2b_1} + m13 \right) + \sigma_{N-2}^{n+1} \left( \frac{(2c_1b_1)m20}{c_1b_2 - c_2b_1} + m14 \right) \\
& \delta_{N-1}^{n+1} \left( \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m19}{c_1b_2 - c_2b_1} + m15 \right) + \sigma_{N-1}^{n+1} \left( \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m20}{c_1b_2 - c_2b_1} + m16 \right) \\
& \delta_N^{n+1} \left( \frac{(c_3b_1)m19}{c_1b_2 - c_2b_1} + m17 \right) + \sigma_N^{n+1} \left( \frac{(c_3b_1)m20}{c_1b_2 - c_2b_1} + m18 \right) \\
& + m19 \left( \frac{b_1U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) \\
& + m20 \left( \frac{b_1V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) \\
& = \delta_{N-3}^n(f11) + \sigma_{N-3}^n(f12) + \\
& \delta_{N-2}^n \left( \frac{(2c_1b_1)f19}{c_1b_2 - c_2b_1} + f13 \right) + \sigma_{N-2}^n \left( \frac{(2c_1b_1)f20}{c_1b_2 - c_2b_1} + f14 \right) \\
& + \delta_{N-1}^n \left( \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)f19}{c_1b_2 - c_2b_1} + f15 \right) + \sigma_{N-1}^n \left( \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)f20}{c_1b_2 - c_2b_1} + f16 \right) \\
& + \delta_N^n \left( \frac{(c_3b_1)f19}{c_1b_2 - c_2b_1} + f17 \right) + \sigma_N^n \left( \frac{(c_3b_1)f20}{c_1b_2 - c_2b_1} + f18 \right) \\
& + f19 \left( \frac{b_1U_{xx}^n(x_N, t) - c_1U_x^n(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) \\
& + f20 \left( \frac{b_1V_{xx}^n(x_N, t) - c_1V_x^n(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir.  $i = N$  için ise sistem;

$$\begin{aligned}
& \delta_{N-2}^{n+1} \left( \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)m9}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2a_1b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m7 + m1 \right) \\
& + \sigma_{N-2}^{n+1} \left( \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)m10}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2a_1b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m8 + m2 \right) \\
& + \delta_{N-1}^{n+1} \left( \frac{(2a_2b_2)m9}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_2b_1 + a_1b_2)}{a_1b_2 - a_2b_1}m7 + m3 \right) \\
& + \sigma_{N-1}^{n+1} \left( \frac{(2a_2b_2)m10}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_2b_1 + a_1b_2)}{a_1b_2 - a_2b_1}m8 + m4 \right) \\
& \delta_N^{n+1} \left( \frac{a_3b_2m9}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m7 + m5 \right) \\
& + \sigma_N^{n+1} \left( \frac{a_3b_2m10}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m8 + m6 \right) \\
& + m7 \left( \frac{b_2U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_2U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_1b_2 - c_2b_1)} \right) \\
& + m8 \left( \frac{b_2V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_2V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_1b_2 - c_2b_1)} \right) \\
& + m9 \left( \frac{b_1U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) \\
& + m10 \left( \frac{b_1V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) \\
& = \delta_{N-2}^n \left( \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)f9}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2b_1a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}f7 + f1 \right) + \\
& \sigma_{N-2}^n \left( \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)f10}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2b_1a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}f8 + f2 \right) \\
& + \delta_{N-1}^n \left( \frac{(2a_2b_2)f9}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}f7 + f3 \right) + \\
& \sigma_{N-1}^n \left( \frac{(2a_2b_2)f10}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}f8 + f4 \right) + \\
& \delta_N^n \left( \frac{(a_3b_2)f9}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_3b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}f7 + f5 \right) + \\
& \sigma_N^n \left( \frac{(a_3b_2)f10}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_3b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}f8 + f6 \right) \\
& + f7 \left( \frac{b_2U_{xx}^n(x_N, t) - c_2U_x^n(x_N, t)}{(c_1b_2 - c_2b_1)} \right) \\
& + f8 \left( \frac{b_2V_{xx}^n(x_N, t) - c_2V_x^n(x_N, t)}{(c_1b_2 - c_2b_1)} \right) \\
& + f9 \left( \frac{b_1U_{xx}^n(x_N, t) - c_1U_x^n(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) \\
& + f10 \left( \frac{b_1V_{xx}^n(x_N, t) - c_1V_x^n(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{N-2}^{n+1} \left( \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)m19}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2a_1b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m17 + m11 \right) \\
& + \sigma_{N-2}^{n+1} \left( \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)m20}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2a_1b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m18 + m12 \right) \\
& + \delta_{N-1}^{n+1} \left( \frac{(2a_2b_2)m19}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_2b_1 + a_1b_2)}{a_1b_2 - a_2b_1}m17 + m13 \right) \\
& + \sigma_{N-1}^{n+1} \left( \frac{(2a_2b_2)m20}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_2b_1 + a_1b_2)}{a_1b_2 - a_2b_1}m18 + m14 \right) \\
& \delta_N^{n+1} \left( \frac{a_3b_2m19}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m17 + m15 \right) \\
& + \sigma_N^{n+1} \left( \frac{a_3b_2m20}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m18 + m16 \right) \\
& + m17 \left( \frac{b_2U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_2U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_1b_2 - c_2b_1)} \right) \\
& + m18 \left( \frac{b_2V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_2V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_1b_2 - c_2b_1)} \right) \\
& + m19 \left( \frac{b_1U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) \\
& + m20 \left( \frac{b_1V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) \\
& = \delta_{N-2}^n \left( \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)f19}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2b_1a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}f17 + f11 \right) \\
& + \sigma_{N-2}^n \left( \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)f20}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2b_1a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}f18 + f12 \right) + \\
& \delta_{N-1}^n \left( \frac{(2a_2b_2)f19}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}f17 + f13 \right) \\
& + \sigma_{N-1}^n \left( \frac{(2a_2b_2)f20}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}f18 + f14 \right) + \\
& \delta_N^n \left( \frac{(2a_3b_2)f19}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_3b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}f17 + f15 \right) \\
& + \sigma_N^n \left( \frac{(2a_3b_2)f20}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_3b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}f18 + f16 \right) \\
& + f17 \left( \frac{b_2U_{xx}^n(x_N, t) - c_2U_x^n(x_N, t)}{(c_1b_2 - c_2b_1)} \right) \\
& + f18 \left( \frac{b_2V_{xx}^n(x_N, t) - c_2V_x^n(x_N, t)}{(c_1b_2 - c_2b_1)} \right) \\
& + f19 \left( \frac{b_1U_{xx}^n(x_N, t) - c_1U_x^n(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) \\
& + f20 \left( \frac{b_1V_{xx}^n(x_N, t) - c_1V_x^n(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece

$$AX^{n+1} = BX^n + C \quad (4.1.8)$$

şeklinde bir kapalı sistem elde edilir. Burada  $A$  ve  $B$  matrisleri ile  $C$  ve  $X$  vektörlerinin elemanları

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{(c_3b_2)m1}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{c_3b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}m3 + m5, \\
A_{12} &= \frac{(c_3b_2)m2}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{c_3b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}m4 + m6, \\
A_{13} &= \frac{2(c_2b_2)m1}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{c_2b_1 + c_1b_2}{c_1b_2 - c_2b_1}m3 + m7, \\
A_{14} &= \frac{2(c_2b_2)m2}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{c_2b_1 + c_1b_2}{c_1b_2 - c_2b_1}m4 + m8 \\
A_{15} &= \frac{(c_1b_2 + c_2b_1)m1}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{2c_1b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}m3 + m9, \\
A_{16} &= \frac{(c_1b_2 + c_2b_1)m2}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{2c_1b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}m4 + m10 \\
A_{21} &= \frac{(c_3b_2)m11}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{c_3b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}m13 + m15, \\
A_{22} &= \frac{(c_3b_2)m12}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{c_3b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}m14 + m16, \\
A_{23} &= \frac{2(c_2b_2)m11}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{c_2b_1 + c_1b_2}{c_1b_2 - c_2b_1}m13 + m17, \\
A_{24} &= \frac{2(c_2b_2)m12}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{c_2b_1 + c_1b_2}{c_1b_2 - c_2b_1}m14 + m18 \\
A_{25} &= \frac{(c_1b_2 + c_2b_1)m11}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{2c_1b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}m13 + m19, \\
A_{26} &= \frac{(c_1b_2 + c_2b_1)m12}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{2c_1b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}m14 + m20 \\
A_{33} &= \frac{(c_3b_1)m1}{c_1b_2 - c_2b_1} + m3, A_{34} = \frac{(c_3b_1)m2}{c_1b_2 - c_2b_1} + m4 \\
A_{35} &= \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m1}{c_1b_2 - c_2b_1} + m5, A_{36} = \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m2}{c_1b_2 - c_2b_1} + m6 \\
A_{37} &= \frac{(2c_1b_1)m1}{c_1b_2 - c_2b_1} + m7, A_{38} = \frac{(2c_1b_1)m2}{c_1b_2 - c_2b_1} + m8 \\
A_{43} &= \frac{(c_3b_1)m11}{c_1b_2 - c_2b_1} + m13, A_{44} = \frac{(c_3b_1)m12}{c_1b_2 - c_2b_1} + m14 \\
A_{45} &= \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m11}{c_1b_2 - c_2b_1} + m15, A_{46} = \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m12}{c_1b_2 - c_2b_1} + m16 \\
A_{47} &= \frac{(2c_1b_1)m11}{c_1b_2 - c_2b_1} + m17, A_{48} = \frac{(2c_1b_1)m12}{c_1b_2 - c_2b_1} + m18
\end{aligned}$$



$$A_{ij} = m1, A_{ij+1} = m2, A_{ij+2} = m3, A_{ij+3} = m4,$$

$$A_{ij+4} = m5, A_{ij+5} = m6, A_{ij+6} = m7,$$

$$A_{ij+7} = m8, A_{ij+8} = m9, A_{ij+9} = m10$$

$$i = 5(2)2N - 3, j = i - 4$$

$$A_{ij} = m11, A_{ij+1} = m12, A_{ij+2} = m13, A_{ij+3} = m14,$$

$$A_{ij+4} = m15, A_{ij+5} = m16, A_{ij+6} = m17, A_{ij+7} = m18,$$

$$A_{ij+8} = m19, A_{ij+9} = m20$$

$$i = 6(2)2N - 2, j = i - 5$$

$$A_{2N-1,2N-5} = m1, \quad A_{2N-1,2N-4} = m2,$$

$$A_{2N-1,2N-3} = \frac{(2c_1b_1)m9}{c_1b_2 - c_2b_1} + m3, \quad A_{2N-1,2N-2} = \frac{(2c_1b_1)m10}{c_1b_2 - c_2b_1} + m4$$

$$A_{2N-1,2N-1} = \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m9}{c_1b_2 - c_2b_1} + m5, \quad A_{2N-1,2N} = \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m10}{c_1b_2 - c_2b_1} + m6$$

$$A_{2N-1,2N+1} = \frac{(c_3b_1)m9}{c_1b_2 - c_2b_1} + m7, \quad A_{2N-1,2N+2} = \frac{(c_3b_1)m10}{c_1b_2 - c_2b_1} + m8$$

$$A_{2N,2N-5} = m11, \quad A_{2N,2N-4} = m12,$$

$$A_{2N,2N-3} = \frac{(2c_1b_1)m19}{c_1b_2 - c_2b_1} + m13, \quad A_{2N,2N-2} = \frac{(2c_1b_1)m20}{c_1b_2 - c_2b_1} + m14$$

$$A_{2N,2N-1} = \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m19}{c_1b_2 - c_2b_1} + m15, \quad A_{2N,2N} = \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m20}{c_1b_2 - c_2b_1} + m16$$

$$A_{2N,2N+1} = \frac{(c_3b_1)m19}{c_1b_2 - c_2b_1} + m17, \quad A_{2N,2N+2} = \frac{(c_3b_1)m20}{c_1b_2 - c_2b_1} + m18$$

$$A_{2N+1,2N-3} = \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)m9}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2a_1b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m7 + m1,$$

$$A_{2N+1,2N-2} = \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)m10}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2a_1b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m8 + m2$$

$$A_{2N+1,2N-1} = \frac{(2a_2b_2)m9}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_2b_1 + a_1b_2)}{a_1b_2 - a_2b_1}m7 + m3,$$

$$\begin{aligned}
A_{2N+1,2N} &= \frac{(2a_2b_2)m_{10}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_2b_1 + a_1b_2)}{a_1b_2 - a_2b_1}m_8 + m_4, \\
A_{2N+1,2N+1} &= \frac{a_3b_2m_9}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m_7 + m_5, \\
A_{2N+1,2N+2} &= \frac{a_3b_2m_{10}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m_8 + m_6, \\
A_{2N+2,2N-3} &= \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)m_{19}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2a_1b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m_{17} + m_{11}, \\
A_{2N+2,2N-2} &= \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)m_{20}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2a_1b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m_{18} + m_{12}, \\
A_{2N+2,2N-1} &= \frac{(2a_2b_2)m_{19}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_2b_1 + a_1b_2)}{a_1b_2 - a_2b_1}m_{17} + m_{13}, \\
A_{2N+2,2N} &= \frac{(2a_2b_2)m_{20}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_2b_1 + a_1b_2)}{a_1b_2 - a_2b_1}m_{18} + m_{14}, \\
A_{2N+2,2N+1} &= \frac{a_3b_2m_{19}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m_{17} + m_{15}, \\
A_{2N+2,2N+2} &= \frac{a_3b_2m_{20}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m_{18} + m_{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{11} &= \frac{(c_3b_2)f_1}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{b_1c_3}{c_1b_2 - c_2b_1}f_3 + f_5, \\
B_{12} &= \frac{(c_3b_2)f_2}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{b_1c_3}{c_1b_2 - c_2b_1}f_4 + f_6, \\
B_{13} &= \frac{(2c_2b_2)f_1}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{b_1c_2 + c_1b_2}{c_1b_2 - c_2b_1}f_3 + f_7, \\
B_{14} &= \frac{(2c_2b_2)f_2}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{b_1c_2 + c_1b_2}{c_1b_2 - c_2b_1}f_4 + f_8, \\
B_{15} &= \frac{(b_1c_2 + c_1b_2)f_1}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{(2c_1b_1)}{c_1b_2 - c_2b_1}f_3 + f_9, \\
B_{16} &= \frac{(b_1c_2 + c_1b_2)f_2}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{(2c_1b_1)}{c_1b_2 - c_2b_1}f_4 + f_{10}, \\
B_{21} &= \frac{(c_3b_2)f_{11}}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{b_1c_3}{c_1b_2 - c_2b_1}f_{13} + f_{15}, \\
B_{22} &= \frac{(c_3b_2)f_{12}}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{b_1c_3}{c_1b_2 - c_2b_1}f_{14} + f_{16}, \\
B_{23} &= \frac{2(c_2b_2)f_{11}}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{b_1c_2 + c_1b_2}{c_1b_2 - c_2b_1}f_{13} + f_{17}, \\
B_{24} &= \frac{2(c_2b_2)f_{12}}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{b_1c_2 + c_1b_2}{c_1b_2 - c_2b_1}f_{14} + f_{18}, \\
B_{25} &= \frac{(c_1b_2 + c_2b_1)f_{11}}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{2b_1c_1}{c_1b_2 - c_2b_1}f_{13} + f_{19}, \\
B_{26} &= \frac{(c_1b_2 + c_2b_1)f_{12}}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{2b_1c_1}{c_1b_2 - c_2b_1}f_{14} + f_{20}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{33} &= \frac{(c_3b_1)f_1}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_3, B_{34} = \frac{(c_3b_1)f_2}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_4 \\
B_{35} &= \frac{(b_1c_2 + b_2c_1)f_1}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_5, B_{36} = \frac{(b_1c_2 + b_2c_1)f_2}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_6 \\
B_{37} &= \frac{(2c_1b_1)f_1}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_7, B_{38} = \frac{(2c_1b_1)f_2}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_8 \\
B_{43} &= \frac{(c_3b_1)f_{11}}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_{13}, B_{44} = \frac{(c_3b_1)f_{12}}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_{14} \\
B_{45} &= \frac{(b_1c_2 + b_2c_1)f_{11}}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_{15}, B_{46} = \frac{(b_1c_2 + b_2c_1)f_{12}}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_{16} \\
B_{47} &= \frac{(2c_1b_1)f_{11}}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_{17}, B_{48} = \frac{(2c_1b_1)f_{12}}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_{18}
\end{aligned}$$

$$B_{ij+4} = f_5, B_{ij+5} = f_6, B_{ij+6} = f_7, B_{ij+7} = f_8,$$

$$B_{ij+8} = f_9, B_{ij+9} = f_{10}$$

$$i = 5(2)2N - 3, j = i - 4$$

$$B_{ij} = f_{11}, B_{ij+1} = f_{12}, B_{ij+2} = f_{13}, B_{ij+3} = f_{14},$$

$$B_{ij+4} = f_{15}, B_{ij+5} = f_{16}, B_{ij+6} = f_{17}, B_{ij+7} = f_{18},$$

$$B_{ij+8} = f_{19}, B_{ij+9} = f_{20}$$

$$i = 6(2)2N - 2, j = i - 5$$

$$B_{2N-1, 2N-5} = f_1, \quad B_{2N-1, 2N-4} = f_2,$$

$$\begin{aligned}
B_{2N-1, 2N-3} &= \frac{(2c_1b_1)f_9}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_3, B_{2N-1, 2N-2} = \frac{(2c_1b_1)f_{10}}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_4 \\
B_{2N-1, 2N-1} &= \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)f_9}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_5, B_{2N-1, 2N} = \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)f_{10}}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_6 \\
B_{2N-1, 2N+1} &= \frac{(c_3b_1)f_9}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_7, B_{2N-1, 2N+2} = \frac{(c_3b_1)f_{10}}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_8 \\
B_{2N, 2N-5} &= f_{11}, \quad B_{2N, 2N-4} = f_{12}, \\
B_{2N, 2N-3} &= \frac{(2c_1b_1)f_{19}}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_{13}, B_{2N, 2N-2} = \frac{(2c_1b_1)f_{20}}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_{14} \\
B_{2N, 2N-1} &= \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)f_{19}}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_{15}, B_{2N, 2N} = \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)f_{20}}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_{16} \\
B_{2N, 2N+1} &= \frac{(c_3b_1)f_{19}}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_{17}, B_{2N, 2N+2} = \frac{(c_3b_1)f_{20}}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_{18} \\
B_{2N+1, 2N-3} &= \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)f_9}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2b_1a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}f_7 + f_1, \\
B_{2N+1, 2N-2} &= \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)f_{10}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2b_1a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}f_8 + f_2 \\
B_{2N+1, 2N-1} &= \frac{(2a_2b_2)f_9}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}f_7 + f_3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{2N+1,2N} &= \frac{(2a_2b_2)f_{10}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}f_8 + f_4 \\
B_{2N+1,2N+1} &= \frac{(a_3b_2)f_9}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_3b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}f_7 + f_5, \\
B_{2N+1,2N+2} &= \frac{(a_3b_2)f_{10}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_3b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}f_8 + f_6 \\
B_{2N+2,2N-3} &= \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)f_{19}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2b_1a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}f_{17} + f_{11}, \\
B_{2N+2,2N-2} &= \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)f_{20}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2b_1a_1}{a_1b_2 - a_2b_1}f_{18} + f_{12} \\
B_{2N+2,2N-1} &= \frac{(2a_2b_2)f_{19}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}f_{17} + f_{13}, \\
B_{2N+2,2N} &= \frac{(2a_2b_2)f_{20}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}f_{18} + f_{14} \\
B_{2N+2,2N+1} &= \frac{(2a_3b_2)f_{19}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_3b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}f_{17} + f_{15}, \\
B_{2N+2,2N+2} &= \frac{(2a_3b_2)f_{20}}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_3b_1)}{a_1b_2 - a_2b_1}f_{18} + f_{16}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 &= -m1 \left( \frac{b_2U_{xx}^{n+1}(x_0,t) - c_2U_x^{n+1}(x_0,t)}{(c_1b_2 - c_2b_1)} \right) \\
&\quad - m2 \left( \frac{b_2V_{xx}^{n+1}(x_0,t) - c_2V_x^{n+1}(x_0,t)}{(c_1b_2 - c_2b_1)} \right) \\
&\quad - m3 \left( \frac{b_1U_{xx}^{n+1}(x_0,t) - c_1U_x^{n+1}(x_0,t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) \\
&\quad - m4 \left( \frac{b_1V_{xx}^{n+1}(x_0,t) - c_1V_x^{n+1}(x_0,t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) \\
&\quad + f1 \left( \frac{b_2U_{xx}^n(x_0,t) - c_2U_x^n(x_0,t)}{(c_1b_2 - c_2b_1)} \right) \\
&\quad + f2 \left( \frac{b_2V_{xx}^n(x_0,t) - c_2V_x^n(x_0,t)}{(c_1b_2 - c_2b_1)} \right) \\
&\quad + f3 \left( \frac{b_1U_{xx}^n(x_0,t) - c_1U_x^n(x_0,t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) \\
&\quad + f4 \left( \frac{b_1V_{xx}^n(x_0,t) - c_1V_x^n(x_0,t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & -m11 \left( \frac{b_2 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_2 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& - m12 \left( \frac{b_2 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_2 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& - m13 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& - m14 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f11 \left( \frac{b_2 U_{xx}^n(x_0, t) - c_2 U_x^n(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + f12 \left( \frac{b_2 V_{xx}^n(x_0, t) - c_2 V_x^n(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + f13 \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_0, t) - c_1 U_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f14 \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_0, t) - c_1 V_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 = & -m1 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& - m2 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f1 \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_0, t) - c_1 U_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f2 \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_0, t) - c_1 V_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4 = & -m11 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& - m12 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f11 \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_0, t) - c_1 U_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f12 \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_0, t) - c_1 V_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$C_i = 0, \quad i = 5(1)2N - 2$$

$$\begin{aligned}
C_{2N-1} &= -m9 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad - m10 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad + f9 \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_N, t) - c_1 U_x^n(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad + f10 \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_N, t) - c_1 V_x^n(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
C_{2N} &= -m19 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad - m20 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad + f19 \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_N, t) - c_1 U_x^n(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad + f20 \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_N, t) - c_1 V_x^n(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
C_{2N+1} &= -m7 \left( \frac{b_2 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_2 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
&\quad - m8 \left( \frac{b_2 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_2 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
&\quad - m9 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad - m10 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad + f7 \left( \frac{b_2 U_{xx}^n(x_N, t) - c_2 U_x^n(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
&\quad + f8 \left( \frac{b_2 V_{xx}^n(x_N, t) - c_2 V_x^n(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
&\quad + f9 \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_N, t) - c_1 U_x^n(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad + f10 \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_N, t) - c_1 V_x^n(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2N+2} = & -m17 \left( \frac{b_2 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_2 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& - m18 \left( \frac{b_2 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_2 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& - m19 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& - m20 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f17 \left( \frac{b_2 U_{xx}^n(x_N, t) - c_2 U_x^n(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + f18 \left( \frac{b_2 V_{xx}^n(x_N, t) - c_2 V_x^n(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + f19 \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_N, t) - c_1 U_x^n(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f20 \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_N, t) - c_1 V_x^n(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$X = [\delta_0, \sigma_0, \delta_1, \sigma_1, \dots, \delta_{N-1}, \sigma_{N-1}, \delta_N, \sigma_N]^T$$

biçimindedir. Böylece  $(2N+2) \times (2N+2)$  şeklindeki denklem sistemi çözülebilir. Bu sistemden  $\delta^{n+1}$  ve  $\sigma^{n+1}$  parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle  $\delta^0$  ve  $\sigma^0$  parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bu parametreler problemle verilen başlangıç ve sınır şartları kullanılarak aşağıdaki gibi hesaplanabilir.

$t = 0$  için

$$U_N(x, 0) = \sum_{i=-2}^{N+2} \delta_i^0 T_i^5(x), \quad V_N(x, 0) = \sum_{i=-2}^{N+2} \sigma_i^0 T_i^5(x)$$

olur. Başlangıç şartlarının  $x_i$  düğüm noktalarındaki

$$U_N(x_i, 0) = U(x_i, 0) = U_i$$

$$V_N(x_i, 0) = V(x_i, 0) = V_i$$

değerleri kullanılarak  $\delta_i^0$  parametreleri için

$$U(x_i, t) = a_1 \delta_{i-2} + a_2 \delta_{i-1} + a_3 \delta_i + a_2 \delta_{i+1} + a_1 \delta_{i+2}$$

ve  $\sigma_i^0$  parametreleri için

$$V(x_i, t) = a_1 \sigma_{i-2} + a_2 \sigma_{i-1} + a_3 \sigma_i + a_2 \sigma_{i+1} + a_1 \sigma_{i+2}$$

olmak üzere

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_2 & a_1 & & & & \\ & a_1 & a_2 & a_3 & a_2 & a_1 & & & \\ & & a_1 & a_2 & a_3 & a_2 & a_1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_2 & a_1 \\ & & & & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta_{-2} \\ \delta_{-1} \\ \delta_0 \\ \vdots \\ \delta_N \\ \delta_{N+1} \\ \delta_{N+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{N-2} \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix} \quad (4.1.9)$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & a_2 & a_1 & & & & \\ & a_1 & a_2 & a_3 & a_2 & a_1 & & & \\ & & a_1 & a_2 & a_3 & a_2 & a_1 & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_2 & a_1 \\ & & & & & & a_1 & a_2 & a_3 & a_2 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{-2} \\ \sigma_{-1} \\ \sigma_0 \\ \vdots \\ \sigma_N \\ \sigma_{N+1} \\ \sigma_{N+2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_{N-2} \\ V_{N-1} \\ V_N \end{bmatrix} \quad (4.1.10)$$

matris formunda gösterilen  $(N+1) \times (N+5)$  tipinde denklem sistemleri elde edilir. Bu denklem sistemlerini  $(N+1) \times (N+1)$  şeklinde çözülebilir bir sistem haline getirmek için gibi  $U$  ve  $V$ ' nin birinci ve ikinci türevi kullanılarak  $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_{N+1}$  ve  $\sigma_{N+2}$  parametreleri sistemlerden yok edilir. Burada  $x = x_i$  kollokasyon noktasındaki

$$U_x(x_i, t) = b_1 \delta_{i-2} + b_2 \delta_{i-1} - b_2 \delta_{i+1} - b_1 \delta_{i+2}$$

$$U_{xx}(x_i, t) = c_1 \delta_{i-2} + c_2 \delta_{i-1} + c_3 \delta_i + c_2 \delta_{i+1} + c_1 \delta_{i+2}$$

$$V_x(x_i, t) = b_1 \sigma_{i-2} + b_2 \sigma_{i-1} - b_2 \sigma_{i+1} - b_1 \sigma_{i+2}$$

$$V_{xx}(x_i, t) = c_1 \sigma_{i-2} + c_2 \sigma_{i-1} + c_3 \sigma_i + c_2 \sigma_{i+1} + c_1 \sigma_{i+2}$$

yaklaşımı kullanılarak sırasıyla  $\delta_{-2}, \delta_{-1}, \delta_{N+1}, \delta_{N+2}, \sigma_{-2}, \sigma_{-1}, \sigma_{N+1}, \sigma_{N+2}$ , parametreleri;



$$\begin{aligned}
\delta_{-1} &= \frac{b_1 U_{xx}(x_0, t) - c_1 U_x(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{b_1 c_3 \delta_0 + (b_1 c_2 + c_1 b_2 \delta_1) + 2b_1 c_1 \delta_2}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\
\delta_{-2} &= \frac{b_2 U_{xx}(x_0, t) - c_2 U_x(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{b_2 c_3 \delta_0 + 2b_2 c_2 \delta_1 + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \delta_2}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \\
\delta_{N+1} &= \frac{b_1 U_{xx}(x_N, t) - c_1 U_x(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{2c_1 b_1 \delta_{N-2} + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \delta_{N-1} + c_3 b_1 \delta_N}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\
\delta_{N+2} &= \frac{b_2 U_{xx}(x_N, t) - c_2 U_x(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) \delta_{N-2} + 2c_2 b_2 \delta_{N-1} + b_2 c_3 \delta_N}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \\
\sigma_{-1} &= \frac{b_1 V_{xx}(x_0, t) - c_1 V_x(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{b_1 c_3 \sigma_0 + (b_1 c_2 + c_1 b_2 \sigma_1) + 2b_1 c_1 \sigma_2}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\
\sigma_{-2} &= \frac{b_2 V_{xx}(x_0, t) - c_2 V_x(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{b_2 c_3 \sigma_0 + 2b_2 c_2 \sigma_1 + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \sigma_2}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \\
\sigma_{N+1} &= \frac{b_1 V_{xx}(x_N, t) - c_1 V_x(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{2c_1 b_1 \sigma_{N-2} + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \sigma_{N-1} + c_3 b_1 \sigma_N}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\
\sigma_{N+2} &= \frac{b_2 V_{xx}(x_N, t) - c_2 V_x(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) \sigma_{N-2} + 2c_2 b_2 \sigma_{N-1} + b_2 c_3 \sigma_N}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)}
\end{aligned}$$

$i = 0$  için

$$\begin{aligned}
U(x_0, t) &= U_0 = a_1 \delta_{-2} + a_2 \delta_{-1} + a_3 \delta_0 + a_2 \delta_1 + a_1 \delta_2 \\
&= a_1 \left( \frac{b_2 U_{xx}(x_0, t) - c_2 U_x(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{b_2 c_3 \delta_0 + 2b_2 c_2 \delta_1 + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \delta_2}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) + \\
& a_2 \left( \frac{b_1 U_{xx}(x_0, t) - c_1 U_x(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{b_1 c_3 \delta_0 + (b_1 c_2 + c_1 b_2) \delta_1 + 2b_1 c_1 \delta_2}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + \\
& a_3 \delta_0 + a_2 \delta_1 + a_1 \delta_2
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(x_0, t) &= V_0 = a_1 \sigma_{-2} + a_2 \sigma_{-1} + a_3 \sigma_0 + a_2 \sigma_1 + a_1 \sigma_2 \\
&= a_1 \left( \frac{b_2 V_{xx}(x_0, t) - c_2 V_x(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{b_2 c_3 \sigma_0 + 2b_2 c_2 \sigma_1 + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \sigma_2}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) + \\
& a_2 \left( \frac{b_1 V_{xx}(x_0, t) - c_1 V_x(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{b_1 c_3 \sigma_0 + (b_1 c_2 + c_1 b_2) \sigma_1 + 2b_1 c_1 \sigma_2}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + \\
& a_3 \sigma_0 + a_2 \sigma_1 + a_1 \sigma_2
\end{aligned}$$

denklemlerinden

$$\begin{aligned}
& \delta_0 \left( a_3 + \frac{a_1 b_2 c_3}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{a_2 b_1 c_3}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + \delta_1 \left( a_2 + \frac{a_1 2b_2 c_2}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{a_2 (b_1 c_2 + c_1 b_2)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + \\
& \delta_2 \left( a_1 + \frac{a_1 (c_1 b_2 + c_2 b_1)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{a_2 2b_1 c_1}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + a_1 \frac{b_2 U_{xx}(x_0, t) - c_2 U_x(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\
& + a_2 \frac{b_1 U_{xx}(x_0, t) - c_1 U_x(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sigma_0 \left( a_3 + \frac{a_1 b_2 c_3}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{a_2 b_1 c_3}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + \sigma_1 \left( a_2 + \frac{a_1 2b_2 c_2}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{a_2 (b_1 c_2 + c_1 b_2)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + \\ & \sigma_2 \left( a_1 + \frac{a_1 (c_1 b_2 + c_2 b_1)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{a_2 2b_1 c_1}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + a_1 \frac{b_2 V_{xx}(x_0, t) - c_2 V_x(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\ & + a_2 \frac{b_1 V_{xx}(x_0, t) - c_1 V_x(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \end{aligned}$$

$i = 1$  için

$$\begin{aligned} U(x_1, t) &= U_1 = a_1 \delta_{-1} + a_2 \delta_0 + a_3 \delta_1 + a_2 \delta_2 + a_1 \delta_3 \\ &= a_1 \left( \frac{b_1 U_{xx}(x_0, t) - c_1 U_x(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{b_1 c_3 \delta_0 + (b_1 c_2 + c_1 b_2 \delta_1) + 2b_1 c_1 \delta_2}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + \\ &+ a_2 \delta_0 + a_3 \delta_1 + a_2 \delta_2 + a_1 \delta_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V(x_1, t) &= V_1 = a_1 \sigma_{-1} + a_2 \sigma_0 + a_3 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_1 \sigma_3 \\ &= a_1 \left( \frac{b_1 V_{xx}(x_0, t) - c_1 V_x(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{b_1 c_3 \sigma_0 + (b_1 c_2 + c_1 b_2 \sigma_1) + 2b_1 c_1 \sigma_2}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + \\ &+ a_2 \sigma_0 + a_3 \sigma_1 + a_2 \sigma_2 + a_1 \sigma_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \delta_0 \left( \frac{a_1 b_1 c_3}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + a_2 \right) + \delta_1 \left( a_3 + \frac{a_1 (b_1 c_2 + c_1 b_2)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + \\ & \delta_2 \left( a_2 + \frac{a_1 2b_1 c_1}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + a_1 \delta_3 + a_1 \frac{b_1 U_{xx}(x_0, t) - c_1 U_x(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \sigma_0 \left( \frac{a_1 b_1 c_3}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + a_2 \right) + \sigma_1 \left( a_3 + \frac{a_1 (b_1 c_2 + c_1 b_2)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + \\ & \sigma_2 \left( a_2 + \frac{a_1 2b_1 c_1}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + a_1 \sigma_3 + a_1 \frac{b_1 V_{xx}(x_0, t) - c_1 V_x(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \end{aligned}$$

$i = N - 1$  için

$$\begin{aligned} U(x_{N-1}, t) &= U_{N-1} = a_1 \delta_{N-3} + a_2 \delta_{N-2} + a_3 \delta_{N-1} + a_2 \delta_N + a_1 \delta_{N+1} \\ &= a_1 \delta_{N-3} + a_2 \delta_{N-2} + a_3 \delta_{N-1} + a_2 \delta_N \\ &+ a_1 \left( \frac{b_1 U_{xx}(x_N, t) - c_1 U_x(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{2c_1 b_1 \delta_{N-2} + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \delta_{N-1} + c_3 b_1 \delta_N}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(x_{N-1}, t) &= V_{N-1} = a_1 \sigma_{N-3} + a_2 \sigma_{N-2} + a_3 \sigma_{N-1} + a_2 \sigma_N + a_1 \sigma_{N+1} \\
&= a_1 \sigma_{N-3} + a_2 \sigma_{N-2} + a_3 \sigma_{N-1} + a_2 \sigma_N \\
&+ a_1 \left( \frac{b_1 V_{xx}(x_N, t) - c_1 V_x(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{2c_1 b_1 \sigma_{N-2} + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \sigma_{N-1} + c_3 b_1 \sigma_N}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_1 \delta_{N-3} + \delta_{N-2} \left( a_2 + \frac{a_1 2c_1 b_1}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + \delta_{N-1} \left( a_3 + \frac{a_1 (c_1 b_2 + c_2 b_1)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
&\delta_N \left( a_2 + \frac{a_1 c_3 b_1}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + a_1 \frac{b_1 U_{xx}(x_N, t) - c_1 U_x(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a_1 \sigma_{N-3} + \sigma_{N-2} \left( a_2 + \frac{a_1 2c_1 b_1}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + \sigma_{N-1} \left( a_3 + \frac{a_1 (c_1 b_2 + c_2 b_1)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
&\sigma_N \left( a_2 + \frac{a_1 c_3 b_1}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + a_1 \frac{b_1 V_{xx}(x, N-1) - c_1 V_x(x, N-1)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)}
\end{aligned}$$

$i = N$  için

$$\begin{aligned}
U(x_i, t) &= a_1 \delta_{N-2} + a_2 \delta_{N-1} + a_3 \delta_n + a_2 \delta_{n+1} + a_1 \delta_{n+2} \\
&= a_1 \delta_{N-2} + a_2 \delta_{N-1} + a_3 \delta_N + \\
&a_2 \left( \frac{b_1 U_{xx}(x_N, t) - c_1 U_x(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{2c_1 b_1 \delta_{N-2} + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \delta_{N-1} + c_3 b_1 \delta_N}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
&+ a_1 \left( \frac{b_2 U_{xx}(x_N, t) - c_2 U_x(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) \delta_{N-2} + 2c_2 b_2 \delta_{N-1} + b_2 c_3 \delta_N}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
V(x_i, t) &= a_1 \sigma_{N-2} + a_2 \sigma_{N-1} + a_3 \sigma_n + a_2 \sigma_{n+1} + a_1 \sigma_{n+2} \\
&= a_1 \sigma_{N-2} + a_2 \sigma_{N-1} + a_3 \sigma_N + \\
&a_2 \left( \frac{b_1 U_{xx}(x_N, t) - c_1 U_x(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{2c_1 b_1 \sigma_{N-2} + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \sigma_{N-1} + c_3 b_1 \sigma_N}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
&+ a_1 \left( \frac{b_2 U_{xx}(x_N, t) - c_2 U_x(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) \sigma_{N-2} + 2c_2 b_2 \sigma_{N-1} + b_2 c_3 \sigma_N}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{N-2} \left( a_1 + \frac{a_2 2c_1 b_1}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{a_1 (c_1 b_2 + c_2 b_1)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + \delta_{n-1} \left( a_2 + \frac{a_2 (c_1 b_2 + c_2 b_1)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{a_1 2c_2 b_2}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& \delta_N \left( a_3 + \frac{a_2 c_3 b_1}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{a_1 b_2 c_3}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) + a_2 \frac{b_1 U_{xx}(x_N, t) - c_1 U_x(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \\
& + a_1 \frac{b_2 U_{xx}(x_N, t) - c_2 U_x(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \sigma_{N-2} \left( a_1 + \frac{a_2 2c_1 b_1}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{a_1 (c_1 b_2 + c_2 b_1)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + \sigma_{N-1} \left( a_2 + \frac{a_2 (c_1 b_2 + c_2 b_1)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{a_1 2c_2 b_2}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& \sigma_N \left( a_3 + \frac{a_2 c_3 b_1}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{a_1 b_2 c_3}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + a_2 \frac{b_1 U_{xx}(x_N, t) - c_1 U_x(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + a_1 \frac{b_2 U_{xx}(x_N, t) - c_2 U_x(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)}
\end{aligned}$$

bulunur. Bulunan bu ifadelerde

$$s_1 = \frac{b_2 c_3}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)}$$

$$s_2 = \frac{b_1 c_3}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)}$$

$$s_3 = \frac{2b_2 c_2}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)}$$

$$s_4 = \frac{(b_1 c_2 + c_1 b_2)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)}$$

$$s_5 = \frac{2b_1 c_1}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)}$$

ve

$$\begin{aligned}
s_6 &= \frac{b_1 U_{xx}(x_0, t) - c_1 U_x(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \\
s_7 &= \frac{b_2 U_{xx}(x_0, t) - c_2 U_x(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\
s_8 &= \frac{b_1 U_{xx}(x_N, t) - c_1 U_x(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \\
s_9 &= \frac{b_2 U_{xx}(x_N, t) - c_2 U_x(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\
s_{10} &= \frac{b_1 V_{xx}(x_0, t) - c_1 V_x(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \\
s_{11} &= \frac{b_2 V_{xx}(x_0, t) - c_2 V_x(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\
s_{12} &= \frac{b_1 V_{xx}(x_N, t) - c_1 V_x(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \\
s_{13} &= \frac{b_2 V_{xx}(x_N, t) - c_2 V_x(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)}
\end{aligned}$$

olmak üzere, (4.1.9) ve (4.1.10) denklem sisteminde tekrar yazıldığında

$$\begin{aligned}
& \begin{bmatrix} a_3 + a_1 s_1 + a_2 s_2 & a_2 + a_1 s_3 + a_2 s_4 & a_1 + a_1 s_4 + a_2 s_5 & & & \\ a_2 + a_1 s_2 & a_3 + a_1 s_5 & a_2 + a_1 s_5 & a_1 & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_2 & & a_1 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & a_1 & a_2 + a_1 s_5 & a_3 + a_1 s_4 & & a_2 + a_1 s_2 \\ & & a_1 + a_2 s_5 + a_1 s_4 & a_2 + a_2 s_4 + a_1 s_3 & a_3 + a_2 s_2 + a_1 s_1 & \end{bmatrix} \\
& \times \begin{bmatrix} \delta_0 \\ \delta_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \delta_{N-1} \\ \delta_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_0 \\ U_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ U_{N-1} \\ U_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1 s_{10} - a_2 s_9 \\ -a_1 s_{10} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -a_1 s_{11} \\ -a_2 s_{11} - a_1 s_{12} \end{bmatrix} \tag{4.1.11}
\end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} a_3 + a_1s_1 + a_2s_2 & a_2 + a_1s_3 + a_2s_4 & a_1 + a_1s_4 + a_2s_5 & & & & \\ a_2 + a_1s_2 & a_3 + a_1s_4 & a_2 + a_1s_5 & a_1 & & & \\ a_1 & a_2 & a_3 & a_2 & & a_1 & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & a_1 & a_2 + a_1s_5 & a_3 + a_1s_4 & a_2 + a_1s_2 & & \\ & & a_1 + a_2s_5 + a_1s_4 & a_2 + a_2s_4 + a_1s_3 & a_3 + a_2s_2 + a_1s_1 & & \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \sigma_0 \\ \sigma_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \sigma_{N-1} \\ \sigma_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_0 \\ V_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ V_{N-1} \\ V_N \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -a_1s_{14} - a_2s_{13} \\ -a_1s_{14} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ -a_1s_{15} \\ -a_2s_{15} - a_1s_{16} \end{bmatrix} \quad (4.1.12)$$

$(N+1) \times (N+1)$  şeklinde çözülebilir bir denklem sistemi elde edilir ve bu denklem sisteminden başlangıç parametreleri bulunur. Böylece elde edilen  $\delta^0$  ve  $\sigma^0$  parametreleri (4.1.8) sisteminde kullanılarak istenilen  $t$  zamanındaki nümerik çözümler bulunur.

Burada da  $U_N$  ve  $V_N$  yaklaşık çözümlerini iyileştirmek için denklem sistemindeki lineer olmayan terimler için herbir zaman adımında

$$\begin{aligned} \delta_i^* &= \delta_i^n + \frac{1}{2} (\delta_i^{n+1} - \delta_i^n) \\ \sigma_i^* &= \sigma_i^n + \frac{1}{2} (\sigma_i^{n+1} - \sigma_i^n) \end{aligned}$$

biçiminde tanımlanan iç iterasyon formülleri birkaç defa uygulandı.

### 4.1.3 Nümerik sonuçlar

Bu kısımda, ikili Burgers denkleminde, denklemindeki lineer olmayan terimler yerine LİN-1 lineerleştirme tekniği kullanılarak kübik ve kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yönteminin uygulanması ile oluşan sistemlerin üç model probleme uygulanmasıyla elde edilen nümerik sonuçların mevcut tam çözümlerle ve/veya literatürdeki diğer çalışmalarındaki sonuçlarla karşılaştırılması ile hata normları çizelgeler halinde sunuldu.

#### 4.1.3.1 Problem 1

Problem 1 için tüm hesaplamalar  $[-\pi, \pi]$  aralığında yapıldı. Çizelge 4.1'de  $\Delta t = 0.01$  ve farklı bölüntü sayıları için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları sunuldu. Bu çizelgeden N bölüntü sayısı arttıkça hem KBTBKY hem de KNTBKY ile elde edilen hata normlarının kayda değer ölçüde azaldığı görülmektedir.

**Çizelge 4.1 :** Problem 1'in  $\Delta t = 0.01$ ,  $N = 50, 100$  ve  $200$  için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları.

$t$	KBTBKY						
	$N = 50$		$N = 100$		$N = 200$		
	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	
0.1	$1.22694e-04$	$1.10799e-04$	$3.00195e-05$	$2.71628e-05$	$6.87807e-06$	$6.22353e-06$	
0.5	$6.13619e-04$	$3.71445e-04$	$1.50107e-04$	$9.10443e-05$	$3.43908e-05$	$2.08591e-05$	
1.0	$1.22762e-03$	$4.50723e-04$	$3.00236e-04$	$1.10451e-04$	$6.87828e-05$	$2.53038e-05$	
1.5	$1.84199e-03$	$4.10192e-04$	$4.50388e-04$	$1.00495e-04$	$1.03176e-04$	$2.30217e-05$	
2.0	$2.45674e-03$	$3.31827e-04$	$6.00562e-04$	$8.12772e-05$	$1.37570e-04$	$1.86181e-05$	
2.5	$3.07186e-03$	$2.51656e-04$	$7.50759e-04$	$6.16260e-05$	$1.71966e-04$	$1.41158e-05$	
3.0	$3.68737e-03$	$1.83221e-04$	$9.00978e-04$	$4.48570e-05$	$2.06363e-04$	$1.02742e-05$	
$t$	KNTBKY						
	0.1	$1.00394e-06$	$9.07529e-07$	$8.43609e-07$	$7.63698e-07$	$8.33815e-07$	$7.54645e-07$
	0.5	$5.00073e-06$	$3.03764e-06$	$4.21016e-06$	$2.55768e-06$	$4.16519e-06$	$2.52833e-06$
	1.0	$9.95481e-06$	$3.67096e-06$	$8.40074e-06$	$3.09647e-06$	$8.32072e-06$	$3.06399e-06$
	1.5	$1.48628e-05$	$3.32544e-06$	$1.25719e-05$	$2.81095e-06$	$1.24666e-05$	$2.78454e-06$
	2.0	$1.97251e-05$	$2.67730e-06$	$1.67237e-05$	$2.26810e-06$	$1.66029e-05$	$2.24934e-06$
	2.5	$2.45423e-05$	$2.02065e-06$	$2.08562e-05$	$1.71566e-06$	$2.07296e-05$	$1.70342e-06$
	3.0	$2.93146e-05$	$1.46401e-06$	$2.49695e-05$	$1.24586e-06$	$2.48467e-05$	$1.23839e-06$

Çizelge 4.2'de ise bölüntü sayısı  $N = 100$  için zaman adım uzunluğu  $\Delta t = 0.01, 0.005$  ve  $0.001$  değerlerinde KBTBKY ve KNTBKY ile elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları sunuldu. Bu çizelgeden zaman adım uzunluğu azaldıkça KBTBKY ile elde edilen hata normlarında önemli bir değişiklik olmadığı KNTBKY ile elde edilen hata normlarının ise önemli ölçüde azaldığı açıktır. Bu çizelgeden zaman adım uzunluğu azaldıkça hata normlarında önemli bir değişiklik olmadığı görülmektedir. Çizelge 4.3'de bölüntü sayısı  $N = 50$  ve  $\Delta t = 0.01$  için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile elde edilen  $L_\infty$  hata normları literatürdeki diğer çalışmalarda sunulan sonuçlarla karşılaştırıldı. Çizelgeden kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemiyle elde edilen sonuçların Ref. [34, 37, 40]'da verilen sonuçlarla uyumlu olduğu ancak Ref. [30]'da verilen sonuçlardan az da olsa daha büyük hata normları elde edildiği açıktır. Kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemiyle elde edilen sonuçların ise tüm diğer çalışmalarda verilen sonuçlardan daha iyi olduğu anlaşılmaktadır. Çizelge 4.4'te ise  $N = 200$  ve  $400$ ,  $\Delta t = 0.001$  için sonuçlar [26, 30]'da verilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Yine kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemiyle elde edilen sonuçların her iki kaynakla uyumlu olduğu anlaşılırken, kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemiyle elde edilen sonuçların çok daha iyi olduğu açıktır. Problem 1'in  $N = 100$  ve  $\Delta t = 0.001$  için  $t = 1, 2$  ve  $3$  zamanlarında KBTBKY ile hesaplanan  $U_N$  ve tam çözümün grafikleri Şekil 4.1'de verildi. Şekilden görüldüğü gibi nümerik ve tam çözüm birbirlerine çok yakın olduğu için grafikleri ayırt edilememektedir.

**Çizelge 4.2 :** Problem 1'in  $N = 100$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $0.005$  ve  $0.001$  için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları.

KBTBKY						
$t$	$\Delta t = 0.01$		$\Delta t = 0.005$		$\Delta t = 0.001$	
	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	$3.00195e-05$	$2.71628e-05$	$3.06440e-05$	$2.77278e-05$	$3.08438e-05$	$2.79086e-05$
0.5	$1.50107e-04$	$9.10443e-05$	$1.53229e-04$	$9.29383e-05$	$1.54229e-04$	$9.35443e-05$
1.0	$3.00236e-04$	$1.10451e-04$	$3.06482e-04$	$1.12748e-04$	$3.08481e-04$	$1.13484e-04$
1.5	$4.50388e-04$	$1.00495e-04$	$4.59758e-04$	$1.02586e-04$	$4.62757e-04$	$1.03255e-04$
2.0	$6.00562e-04$	$8.12772e-05$	$6.13058e-04$	$8.29684e-05$	$6.17057e-04$	$8.35096e-05$
2.5	$7.50759e-04$	$6.16260e-05$	$7.66381e-04$	$6.29084e-05$	$7.71380e-04$	$6.33188e-05$
3.0	$9.00978e-04$	$4.48570e-05$	$9.19728e-04$	$4.57906e-05$	$9.25728e-04$	$4.60893e-05$
KNTBKY						
0.1	$8.43609e-07$	$7.63698e-07$	$2.18900e-07$	$1.98165e-07$	$1.89960e-08$	$1.71967e-08$
0.5	$4.21016e-06$	$2.55768e-06$	$1.09245e-06$	$6.63669e-07$	$9.48025e-08$	$5.75928e-08$
1.0	$8.40074e-06$	$3.09647e-06$	$2.17983e-06$	$8.03476e-07$	$1.89165e-07$	$6.97252e-08$
1.5	$1.25719e-05$	$2.81095e-06$	$3.26217e-06$	$7.29389e-07$	$2.83089e-07$	$6.32960e-08$
2.0	$1.67237e-05$	$2.26810e-06$	$4.33949e-06$	$5.88530e-07$	$3.76579e-07$	$5.10724e-08$
2.5	$2.08562e-05$	$1.71566e-06$	$5.41181e-06$	$4.45185e-07$	$4.69634e-07$	$3.86329e-08$
3.0	$2.49695e-05$	$1.24586e-06$	$6.47916e-06$	$3.23280e-07$	$5.62259e-07$	$2.80541e-08$

**Çizelge 4.3 :** Problem 1'in  $\Delta t = 0.01$ ,  $N = 50$  için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan  $L_\infty$  hata normlarının Ref. [30, 34, 37, 40]'daki sonuçlarla karşılaştırılması.

$t$	KBTBKY	KNTBKY	[30]	[34]	[37]	[40]
0.5	$3.71445 \times 10^{-4}$	$3.03764 \times 10^{-6}$	$2.2662 \times 10^{-5}$	$1.1030 \times 10^{-4}$	$1.51688 \times 10^{-4}$	$7.9881 \times 10^{-4}$
1.0	$4.50723 \times 10^{-4}$	$3.67096 \times 10^{-6}$	$1.4617 \times 10^{-5}$	$1.3368 \times 10^{-4}$	$1.83970 \times 10^{-4}$	$9.6837 \times 10^{-4}$
2.0	$3.31827 \times 10^{-4}$	$2.67730 \times 10^{-6}$	$7.3805 \times 10^{-6}$	$9.8182 \times 10^{-5}$	$1.35250 \times 10^{-4}$	$7.1154 \times 10^{-4}$
3.0	$1.83221 \times 10^{-4}$	$1.46401 \times 10^{-6}$	$4.0272 \times 10^{-6}$	$1.0298 \times 10^{-5}$	$7.46014 \times 10^{-5}$	$3.9213 \times 10^{-4}$

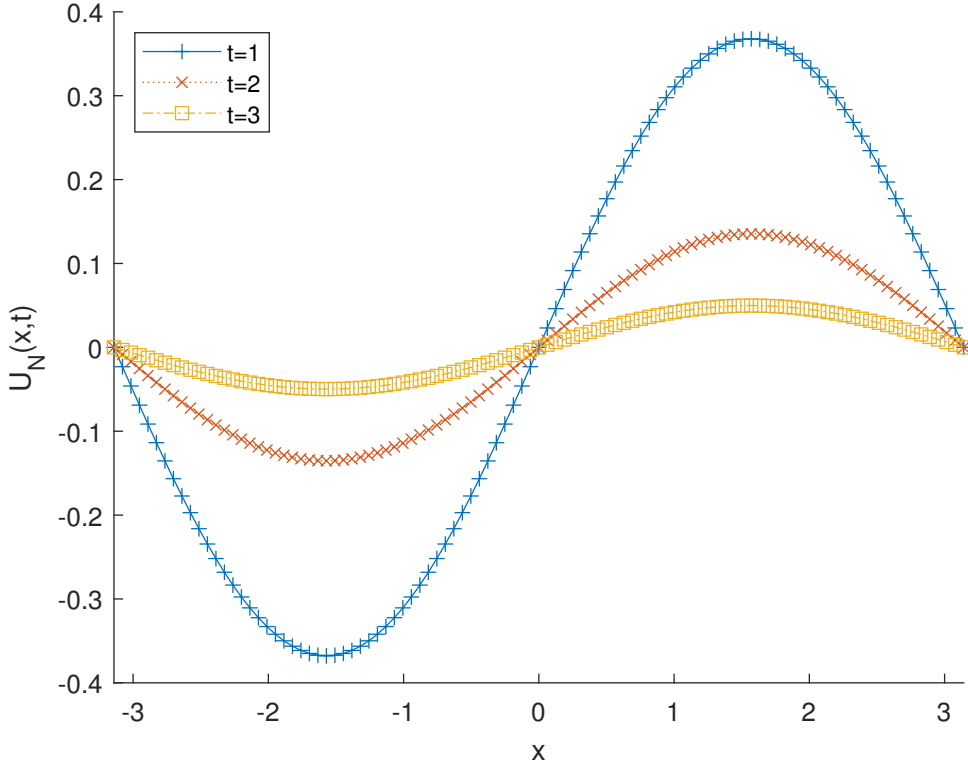
#### 4.1.3.2 Problem 2

Problem 2 için tüm hesaplamalar  $-10 \leq x \leq 10$  aralığında yapıldı. Çizelge 4.5 ve Çizelge 4.6'da Problem 2' nin zaman adımı uzunluğu  $\Delta t = 0.01$ ,  $k_2 = 0.1$  ve  $k_3 = 0.3$  için farklı  $t$  zamanlarında  $N$  bölüntü sayısının farklı değerleri için kübik ve kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi kullanılarak  $U_N$  ve  $V_N$  için elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları sunuldu. Çizelge 4.5'den bölüntü sayısı  $N = 50$  den  $N = 100$ 'e artırıldığında hata normlarında önemli bir azalmanın olduğu ancak  $N = 200$  alındığında KBTBKY ile elde edilen hata normlarında önemli bir değişiklik olmadığı açıktır. Çizelge 4.6'dan ise  $N$  bölüntü sayısı arttıkça KNTBKY ile elde edilen hata normlarında az da olsa bir azalma olduğu anlaşılmaktadır. Çizelge 4.7' de Problem 2'nin  $N = 100$  ve  $\Delta t = 0.001$  için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile elde edilen hata normları [24–26, 30]'da verilen sonuçlarla karşılaştırılmıştır. Çizelgeden sonuçların birbiriyle uyumlu olduğu görülmektedir.



**Çizelge 4.4 :** Problem 1'in  $\Delta t = 0.001$ ,  $N = 200$  ve 400 için farklı zamanlarda KBTBK Y ve KNTBK Y ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının Ref. [26] ve Ref. [30]'da verilenlerle karşılaştırılması.

$N$	$t$	KBTBK Y			KNTBK Y			[26]			[30]		
		$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$
200	0.1	$7.70290 \times 10^{-6}$	$6.96987 \times 10^{-6}$	$8.99738 \times 10^{-9}$	$8.14309 \times 10^{-9}$	$8.21 \times 10^{-6}$	$7.45 \times 10^{-6}$	$8.21 \times 10^{-6}$	$7.45 \times 10^{-6}$	$0.17 \times 10^{-6}$	$0.52 \times 10^{-6}$	$0.17 \times 10^{-6}$	$0.52 \times 10^{-6}$
	0.5	$3.85151 \times 10^{-5}$	$2.33606 \times 10^{-5}$	$4.49451 \times 10^{-8}$	$2.72823 \times 10^{-8}$	$2.49 \times 10^{-5}$	$4.10 \times 10^{-5}$	$2.49 \times 10^{-5}$	$4.10 \times 10^{-5}$	$0.27 \times 10^{-6}$	$0.36 \times 10^{-6}$	$0.27 \times 10^{-6}$	$0.36 \times 10^{-6}$
	1.0	$7.70316 \times 10^{-5}$	$2.83384 \times 10^{-5}$	$8.97861 \times 10^{-8}$	$3.30625 \times 10^{-8}$	$3.00 \times 10^{-5}$	$8.21 \times 10^{-5}$	$8.21 \times 10^{-5}$	$8.21 \times 10^{-5}$	$0.36 \times 10^{-6}$	$0.22 \times 10^{-6}$	$0.36 \times 10^{-6}$	$0.22 \times 10^{-6}$
400	0.1	$1.91936 \times 10^{-6}$	$1.73671 \times 10^{-6}$	$8.37395 \times 10^{-9}$	$7.57795 \times 10^{-9}$	$2.05 \times 10^{-6}$	$1.86 \times 10^{-6}$	$2.05 \times 10^{-6}$	$1.86 \times 10^{-6}$	$0.07 \times 10^{-6}$	$0.14 \times 10^{-6}$	$0.07 \times 10^{-6}$	$0.14 \times 10^{-6}$
	0.5	$9.59685 \times 10^{-6}$	$5.82078 \times 10^{-6}$	$4.18504 \times 10^{-8}$	$2.53936 \times 10^{-8}$	$1.02 \times 10^{-5}$	$6.22 \times 10^{-6}$	$1.02 \times 10^{-5}$	$6.22 \times 10^{-6}$	$0.16 \times 10^{-6}$	$0.14 \times 10^{-6}$	$0.16 \times 10^{-6}$	$0.14 \times 10^{-6}$
	1.0	$1.91938 \times 10^{-5}$	$7.06100 \times 10^{-6}$	$8.36523 \times 10^{-8}$	$3.07889 \times 10^{-8}$	$2.04 \times 10^{-5}$	$7.56 \times 10^{-6}$	$2.04 \times 10^{-5}$	$7.56 \times 10^{-6}$	$0.15 \times 10^{-6}$	$0.10 \times 10^{-6}$	$0.15 \times 10^{-6}$	$0.10 \times 10^{-6}$



**Şekil 4.1 :** Problem 1'in  $N = 100$  ve  $\Delta t = 0.001$  için  $t = 1, 2$  ve  $3$  zamanlarında KBTBKY ile hesaplanan  $U_N$  ve tam çözümün grafikleri.

**Çizelge 4.5 :** Problem 2'nin  $\Delta t = 0.01$ ,  $k_2 = 0.1$ ,  $k_3 = 0.3$ ,  $N = 50, 100$  ve  $200$  için farklı zamanlarda KBTBKY ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları.

$N$	$t$	$U_N$		$V_N$	
		$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$
50	0.1	$5.97533e-04$	$3.86270e-05$	$6.33197e-04$	$2.35912e-05$
	0.5	$2.91102e-03$	$1.85436e-04$	$3.07924e-03$	$1.11898e-04$
	1.0	$5.70536e-03$	$3.62583e-04$	$6.02668e-03$	$2.17005e-04$
	1.5	$8.42042e-03$	$5.34584e-04$	$8.88491e-03$	$3.18514e-04$
	2.0	$1.10693e-02$	$7.03179e-04$	$1.16689e-02$	$4.16985e-04$
	2.5	$1.36595e-02$	$8.68399e-04$	$1.43872e-02$	$5.12937e-04$
	3.0	$1.61963e-02$	$1.03062e-03$	$1.70459e-02$	$6.06530e-04$
100	0.1	$4.56627e-05$	$3.12521e-06$	$8.75203e-05$	$2.51865e-06$
	0.5	$2.21646e-04$	$1.47074e-05$	$4.26445e-04$	$1.24776e-05$
	1.0	$4.33522e-04$	$2.83167e-05$	$8.35758e-04$	$2.47485e-05$
	1.5	$6.39151e-04$	$4.13487e-05$	$1.23347e-03$	$3.68667e-05$
	2.0	$8.39763e-04$	$5.39726e-05$	$1.62153e-03$	$4.88525e-05$
	2.5	$1.03606e-03$	$6.62820e-05$	$2.00108e-03$	$6.07323e-05$
	3.0	$1.22850e-03$	$7.83245e-05$	$2.37286e-03$	$7.25176e-05$
200	0.1	$9.23657e-05$	$5.60410e-06$	$6.14491e-05$	$2.86617e-06$
	0.5	$4.52154e-04$	$2.78132e-05$	$2.95049e-04$	$1.35627e-05$
	1.0	$8.89323e-04$	$5.51797e-05$	$5.71858e-04$	$2.60320e-05$
	1.5	$1.31629e-03$	$8.21730e-05$	$8.36882e-04$	$3.78299e-05$
	2.0	$1.73475e-03$	$1.08833e-04$	$1.09248e-03$	$4.91045e-05$
	2.5	$2.14567e-03$	$1.35194e-04$	$1.34005e-03$	$5.99411e-05$
	3.0	$2.54973e-03$	$1.61277e-04$	$1.58055e-03$	$7.04021e-05$

**Çizelge 4.6 :** Problem 2'nin  $\Delta t = 0.01$ ,  $k_2 = 0.1$ ,  $k_3 = 0.3$ ,  $N = 50, 100$  ve  $200$  için farklı zamanlarda KNTBKY ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları.

$N$	$t$	$U_N$		$V_N$	
		$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$
50	0.1	$1.48899e-04$	$9.34184e-06$	$1.14452e-04$	$5.14174e-06$
	0.5	$7.28664e-04$	$4.57126e-05$	$5.54679e-04$	$2.40139e-05$
	1.0	$1.43245e-03$	$9.03097e-05$	$1.08243e-03$	$4.62982e-05$
	1.5	$2.11939e-03$	$1.34155e-04$	$1.59262e-03$	$6.75867e-05$
	2.0	$2.79237e-03$	$1.77405e-04$	$2.08869e-03$	$8.80182e-05$
	2.5	$3.45307e-03$	$2.20099e-04$	$2.57265e-03$	$1.07862e-04$
	3.0	$4.10259e-03$	$2.62290e-04$	$3.04587e-03$	$1.27149e-04$
100	0.1	$1.38311e-04$	$8.53910e-06$	$1.04253e-04$	$4.60873e-06$
	0.5	$6.76629e-04$	$4.20943e-05$	$5.04449e-04$	$2.19331e-05$
	1.0	$1.33020e-03$	$8.32189e-05$	$9.83626e-04$	$4.22821e-05$
	1.5	$1.96822e-03$	$1.23675e-04$	$1.44643e-03$	$6.16680e-05$
	2.0	$2.59334e-03$	$1.63564e-04$	$1.89609e-03$	$8.03133e-05$
	2.5	$3.20710e-03$	$2.02964e-04$	$2.33449e-03$	$9.83320e-05$
	3.0	$3.81053e-03$	$2.41934e-04$	$2.76291e-03$	$1.15801e-04$
200	0.1	$1.38134e-04$	$8.49587e-06$	$1.04076e-04$	$4.58839e-06$
	0.5	$6.75728e-04$	$4.18888e-05$	$5.03499e-04$	$2.18263e-05$
	1.0	$1.32847e-03$	$8.28176e-05$	$9.81729e-04$	$4.20787e-05$
	1.5	$1.96571e-03$	$1.23076e-04$	$1.44361e-03$	$6.13752e-05$
	2.0	$2.59011e-03$	$1.62783e-04$	$1.89236e-03$	$7.99252e-05$
	2.5	$3.20319e-03$	$2.02003e-04$	$2.32986e-03$	$9.78687e-05$
	3.0	$3.80599e-03$	$2.40782e-04$	$2.75740e-03$	$1.15278e-04$

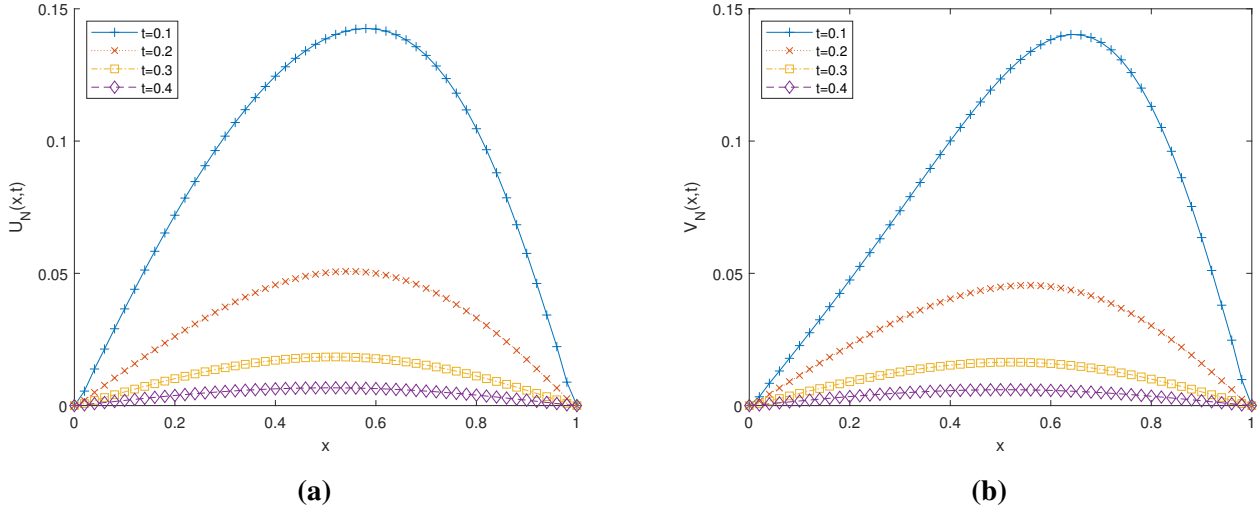
#### 4.1.3.3 Problem 3

Problem 3'ün çözümleri  $\Delta t = 0.001$  ve  $N = 50$  için  $0 \leq x \leq 1$  aralığında bulundu. Çizelge 4.8'de  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = k_3 = 10$  ve  $k_2 = k_3 = 100$  için Problem 3'ün farklı konum ve zamanlarda  $U_N$  ve  $V_N$  değerleri sunuldu. Çizelgeden her iki yöntemle elde edilen sonuçların birbiriyle uyumlu olduğu görülmektedir.

Çizelge 4.9'da  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = k_3 = 10$  ve  $k_2 = k_3 = 100$  için Problem 3'ün farklı zamanlarda  $U_N$  ve  $V_N$  çözümleri sunuldu. Problem 3 için kübik ve kuintik trigonometrik kollokasyon sonlu eleman yöntemiyle elde edilen  $U_N$  ve  $V_N$  çözümlerinin maksimum değerleri ile Ref. [30]'da verilen sonuçlar karşılaştırıldı. Çizelgeden  $U_N$  ve  $V_N$  nin hesaplanan maksimum değerlerinin Ref. [30] dakilerle uyumlu olduğu ve bu maksimum değerleri aynı  $x$  noktalarında aldıkları açıktır. Problem 3'ün nümerik çözümlerinin davranışlarını göstermek için  $N = 50$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $k_2 = k_3 = 10$  ve  $k_2 = k_3 = 100$  için  $t = 0.1, 0.2, 0.3$  ve  $0.4$  zamanında KBTBKY ile hesaplanan  $U_N$  ve  $V_N$  grafikleri Şekil 4.2 ve Şekil 4.3' de sunuldu.

**Çizelge 4.7 :** Problem 2'nin  $\Delta t = 0.001$ ,  $N = 100$  için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının Ref. [24–26, 30]'daki sonuçlarla karşılaştırılması.

			[24]	[25]	[26]	[30]		
			KBTBKY		KNTBKY			
$t$	$k_2$	$k_3$	$L_2$					
$U_N(x, t)$	0.5	0.1	2.21646e-04	6.76629e-04	1.44e-03	3.245e-05	6.736e-4	6.783e-4
		0.3	2.27815e-04	7.45551e-04	6.68e-04	2.733e-05	7.326e-4	7.609e-4
	1	0.1	4.33522e-04	1.33020e-03	1.27e-03	2.405e-05	1.325e-3	1.334e-3
		0.3	4.33368e-04	1.46927e-03	1.30e-03	2.832e-05	1.452e-3	1.500e-3
$V_N(x, t)$	0.5	0.1	4.26445e-04	5.04449e-04	5.42e-04	2.746e-05	9.057e-4	5.101e-4
		0.3	4.70374e-04	1.32205e-03	1.20e-03	2.454e-04	1.591e-3	1.327e-3
	1	0.1	8.35758e-04	9.83626e-04	1.29e-03	3.745e-05	1.251e-3	0.995e-3
		0.3	9.26878e-04	2.60682e-03	2.35e-03	4.525e-04	2.250e-3	2.617e-3
			$L_\infty$					
$U_N(x, t)$	0.5	0.1	1.47074e-05	4.20943e-05	4.38e-05	9.619e-05	4.167e-05	4.208e-05
		0.3	2.70943e-05	4.61427e-05	4.58e-05	4.310e-05	4.590e-05	4.703e-05
	1	0.1	2.83167e-05	8.32189e-05	8.66e-05	1.153e-03	8.258e-05	8.320e-05
		0.3	4.98805e-05	9.22995e-05	9.16e-05	1.268e-03	9.182e-05	9.409e-05
$V_N(x, t)$	0.5	0.1	1.24776e-05	2.19331e-05	4.99e-05	3.332e-04	1.480e-04	0.221e-04
		0.3	7.64233e-05	1.81391e-04	1.81e-04	1.148e-03	5.729e-04	1.818e-04
	1	0.1	2.47485e-05	4.22821e-04	9.92e-05	1.162e-03	4.770e-05	4.255e-05
		0.3	1.52359e-04	3.62676e-04	3.62e-04	1.638e-03	3.617e-04	3.636e-04



**Şekil 4.2 :** Problem 3'ün  $N = 50$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $k_2 = k_3 = 10$  için  $t = 0.1, 0.2, 0.3$  ve  $0.4$  zamanlarında KBTBKY ile hesaplanan (a)  $U_N$  ve (b)  $V_N$  grafikleri.

## 4.2 Lineerleştirme-2 (LİN-2)

(3.1.1) ikili Burgers denkleminin, denlemdaki lineer olmayan terimler yerine Rubin-Graves tipi yaklaşım kullanarak Raslan vd. [39]'daki çalışmalarında kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi ve Onarcan vd. [40]'daki çalışmalarında kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi ile nümerik şemalarını elde etmişlerdir. Tezin bu kısmında aynı şemalar aşağıdaki gibi benzer şekilde elde edilerek üç model problem için uygulandı.

Şimdi (3.1.1) denkleminde zaman türevi yerine ileri fark, konum türevi yerine ise Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı yazılırsa

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{\Delta t} - \frac{(U_{xx})^{n+1} + (U_{xx})^n}{2} + k_1 \frac{(UU_x)^{n+1} + (UU_x)^n}{2} + k_2 \frac{(UV)_x^{n+1} + (UV)_x^n}{2} = 0$$

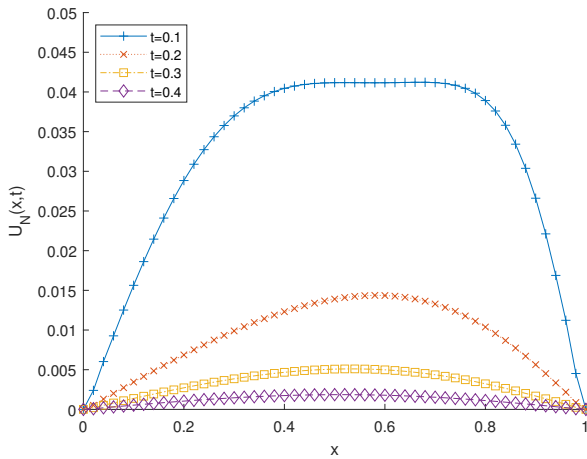
$$\frac{V^{n+1} - V^n}{\Delta t} - \frac{(V_{xx})^{n+1} + (V_{xx})^n}{2} + k_1 \frac{(VV_x)^{n+1} + (VV_x)^n}{2} + k_3 \frac{(UV)_x^{n+1} + (UV)_x^n}{2} = 0$$

**Çizelge 4.8 :** Problem 3'ün  $N = 50$ ,  $k_2 = k_3 = 10$  ve  $k_2 = k_3 = 100$  için farklı zamanlarda KBTBK Y ve KNTBK Y ile hesaplanan  $U_N$  ve  $V_N$  değerleri.

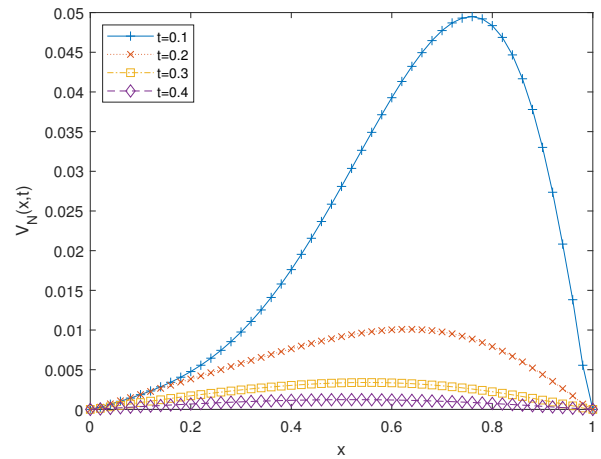
		$k_2 = k_3 = 10$				$k_2 = k_3 = 100$			
$x$	$t$	KBTBK Y		KNTBK Y		KBTBK Y		KNTBK Y	
		$U_N$	$V_N$	$U_N$	$V_N$	$U_N$	$V_N$	$U_N$	$V_N$
0.2	0.1	0.074267	0.048375	0.0719641890	0.0474892288	0.030210	0.004724	0.0288367733	0.0047680026
	0.2	0.027245	0.023688	0.0261168506	0.0227493146	0.007151	0.003946	0.0068652599	0.0038320439
	0.3	0.010838	0.009617	0.0101948274	0.0090512182	0.002879	0.001804	0.0027216248	0.0017134095
	0.4	0.004158	0.003703	0.0038363617	0.0034175562	0.001128	0.000729	0.0010453332	0.0006778649
0.4	0.1	0.126764	0.101431	0.1245321758	0.1000687491	0.041425	0.017768	0.0404528593	0.0176137196
	0.2	0.047173	0.041684	0.0456486418	0.0403685599	0.012684	0.007829	0.0123116586	0.0076375135
	0.3	0.018050	0.016070	0.0171470893	0.0152713046	0.004897	0.003162	0.0046718373	0.0030254617
	0.4	0.006803	0.006065	0.0063430151	0.0056564446	0.001862	0.001216	0.0017431576	0.0011416652
0.6	0.1	0.144605	0.140976	0.1423340920	0.1383630512	0.041598	0.040123	0.0411588121	0.0392758016
	0.2	0.051780	0.046621	0.0499850559	0.0449907464	0.014810	0.010363	0.0143471838	0.0100312169
	0.3	0.018732	0.016746	0.0177636932	0.0158819653	0.005240	0.003510	0.0049855965	0.0033432914
	0.4	0.006898	0.006159	0.0064262066	0.0057380484	0.001910	0.001265	0.0017859175	0.0011841840
0.8	0.1	0.107673	0.117144	0.1046578026	0.1131073648	0.039665	0.050149	0.0389162222	0.0483583228
	0.2	0.034822	0.031800	0.0331434188	0.0302316675	0.010889	0.008343	0.0103778649	0.0079157738
	0.3	0.011943	0.010713	0.0111807178	0.0100276092	0.003441	0.002374	0.0032272785	0.0022255451
	0.4	0.004312	0.003854	0.0039691447	0.0035478054	0.001206	0.000807	0.0011136547	0.0007458013

**Çizelge 4.9 :** Problem 3'ün  $\Delta t = 0.001$ ,  $k_2 = k_3 = 10$  ve  $k_2 = k_3 = 100$  için KBTBK Y ve KNTBK Y ile hesaplanan maksimum  $U_N$  ve  $V_N$  değerlerinin Ref. [30]'daki sonuçlarla karşılaştırılması.

		KBTBK Y		KNTBK Y		[30]	
		$U_{\max}^N$	$x$	$U_{\max}^N$	$x$	$U_{\max}^N$	$x$
$k_2 = k_3 = 10$	$t = 0.1$	0.1447978040	0.58	0.1425610202	0.58	0.14348	0.58
	$t = 0.2$	0.0524766472	0.54	0.0507393000	0.54	0.05252	0.54
	$t = 0.3$	0.0193651433	0.52	0.0183943334	0.52	0.01945	0.52
	$t = 0.4$	0.0072026546	0.50	0.0067193054	0.50	0.00724	0.50
$k_2 = k_3 = 100$	$t = 0.1$	0.0418585873	0.48	0.0412168637	0.68	0.04108	0.44
	$t = 0.2$	0.0148195468	0.58	0.0143659883	0.58	0.01475	0.58
	$t = 0.3$	0.0053533388	0.54	0.0051018910	0.54	0.00536	0.54
	$t = 0.4$	0.0019840063	0.52	0.0018576243	0.52	0.00199	0.52
		$V_{\max}^N$	$x$	$V_{\max}^N$	$x$	$V_{\max}^N$	$x$
$k_2 = k_3 = 10$	$t = 0.1$	0.1432282899	0.66	0.1402937919	0.64	0.14238	0.66
	$t = 0.2$	0.0470652748	0.56	0.0454810617	0.56	0.04723	0.56
	$t = 0.3$	0.0172840176	0.52	0.0164204036	0.52	0.01741	0.52
	$t = 0.4$	0.0064259079	0.50	0.0059958795	0.50	0.00648	0.50
$k_2 = k_3 = 100$	$t = 0.1$	0.0510727310	0.76	0.0494953948	0.76	0.04994	0.76
	$t = 0.2$	0.0104479504	0.64	0.0100867137	0.64	0.01049	0.64
	$t = 0.3$	0.0035493984	0.56	0.0033862245	0.56	0.00360	0.56
	$t = 0.4$	0.0013064330	0.52	0.0012256940	0.52	0.00133	0.52



(a)



(b)

**Şekil 4.3 :** Problem 3'ün  $N = 50$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $k_2 = k_3 = 100$  için  $t = 0.1, 0.2, 0.3$  ve  $0.4$  zamanlarında KBTBK Y ile hesaplanan (a)  $U_N$  ve (b)  $V_N$  grafikleri.

bulunur. Burada

$$\begin{aligned}
(UU_x)^{n+1} &= U^{n+1}U_x^n + U^nU_x^{n+1} - U^nU_x^n \\
(VV_x)^{n+1} &= V^{n+1}V_x^n + V^nV_x^{n+1} - V^nV_x^n \\
(UV)_x^{n+1} &= U_xV^{n+1} + (UV_x)^{n+1} \\
&= U_x^{n+1}V^n + U_x^nV^{n+1} - U_x^nV^n + U^{n+1}V_x^n + U^nV_x^{n+1} - U^nV_x^n
\end{aligned}$$

şeklinde verilen Rubin-Graves [45] tipi lineerleştirme kullanılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}
\frac{2(U^{n+1})}{\Delta t} - \frac{2(U^n)}{\Delta t} - U_{xx}^{n+1} - U_{xx}^n + k_1U^{n+1}U_x^n + k_1U^nU_x^{n+1} + k_2U^{n+1}V^n + k_2U_x^nV^{n+1} \\
+ k_2U^{n+1}V_x^n + k_2U^nV_x^{n+1} = 0
\end{aligned} \tag{4.2.1a}$$

$$\begin{aligned}
\frac{2(V^{n+1})}{\Delta t} - V_{xx}^{n+1} + k_1V^{n+1}V_x^n + k_1V^nV_x^{n+1} + k_3U_x^{n+1}V^n + k_3U_x^nV^{n+1} + k_3U^{n+1}V_x^n + k_3U^nV_x^{n+1} \\
= \frac{2(V^n)}{\Delta t} + V_{xx}^n
\end{aligned} \tag{4.2.1b}$$

elde edilir.

#### 4.2.1 Kübik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi (KBTBKY)

$U(x,t)$  ve  $V(x,t)$ 'ye bir yaklaşım sırasıyla  $U_N(x,t)$  ve  $V_N(x,t)$ , kübik trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak

$$U_N(x,t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \delta_i T_i^3(x) \text{ ve } V_N(x,t) = \sum_{i=-1}^{N+1} \sigma_i T_i^3(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşımlarda,  $x = x_i$  kollokasyon noktasında kübik trigonometrik fonksiyonların kullanılmasıyla Bölüm 2'de de ayrıntılı olarak anlatılan ve (2.2.3) ile verilen  $U$  ve  $V$  ile  $U$  ve  $V$  nin birinci ve ikinci türevleri



$$U = \alpha_1 \delta_{i-1} + \alpha_2 \delta_i + \alpha_1 \delta_{i+1}$$

$$U_x = \beta_1 \delta_{i-1} + \beta_2 \delta_{i+1}$$

$$U_{xx} = \gamma_1 \delta_{i-1} + \gamma_2 \delta_i + \gamma_1 \delta_{i+1}$$

$$V = \alpha_1 \sigma_{i-1} + \alpha_2 \sigma_i + \alpha_1 \sigma_{i+1}$$

$$V_x = \beta_1 \sigma_{i-1} + \beta_2 \sigma_{i+1}$$

$$V_{xx} = \gamma_1 \sigma_{i-1} + \gamma_2 \sigma_i + \gamma_1 \sigma_{i+1}$$

biçiminde yazılır. Burada

$$\alpha_1 = \sin^2 \left( \frac{h}{2} \right) \csc(h) \csc \left( \frac{3h}{2} \right)$$

$$\alpha_2 = \frac{2}{1 + \cos(h)}$$

$$\beta_1 = -\frac{3}{4} \csc \left( \frac{3h}{2} \right)$$

$$\beta_2 = \frac{3}{4} \csc \left( \frac{3h}{2} \right)$$

$$\gamma_1 = \frac{3((1 + 3 \cos(h)) \csc^2 \left( \frac{h}{2} \right))}{16(2 \cos \left( \frac{h}{2} \right) + \cos \left( \frac{3h}{2} \right))}$$

$$\gamma_2 = -\frac{3 \cot^2 \left( \frac{h}{2} \right)}{2 + 4 \cos(h)}$$

dir.

(4.2.1) ile verilen ikili Burgers denkleminde bu yaklaşımlar yerine yazılır ve  $(n + 1)$ . zaman seviyesindeki bilinmeyenler sol tarafta,  $n$ . zaman seviyesindeki bilinmeyenler sağ tarafta toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{2(\alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1})}{\Delta t} - (\gamma_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \gamma_2 \delta_i^{n+1} + \gamma_1 \delta_{i+1}^{n+1}) \\
& + k_1(\alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1})(\beta_1 \delta_{i-1}^n + \beta_2 \delta_{i+1}^n) \\
& + k_1(\alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n)(\beta_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_{i+1}^{n+1}) \\
& + k_2(\alpha_1 \sigma_{i-1}^n + \alpha_2 \sigma_i^n + \alpha_1 \sigma_{i+1}^n)(\beta_1 \sigma_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \sigma_{i+1}^{n+1}) \\
& + k_2(\alpha_1 \sigma_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \sigma_i^{n+1} + \alpha_1 \sigma_{i+1}^{n+1})(\beta_1 \sigma_{i-1}^n + \beta_2 \sigma_{i+1}^n) \\
& + k_2(\alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1})(\beta_1 \sigma_{i-1}^n + \beta_2 \sigma_{i+1}^n) \\
& + k_2(\alpha_1 \sigma_{i-1}^n + \alpha_2 \sigma_i^n + \alpha_1 \sigma_{i+1}^n)(\beta_1 \sigma_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \sigma_{i+1}^{n+1}) \\
& = \frac{2}{\Delta t}(\alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n) + (\gamma_1 \delta_{i-1}^n + \gamma_2 \delta_i^n + \gamma_1 \delta_{i+1}^n)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{2(\alpha_1 \sigma_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \sigma_i^{n+1} + \alpha_1 \sigma_{i+1}^{n+1})}{\Delta t} - (\gamma_1 \sigma_{i-1}^{n+1} + \gamma_2 \sigma_i^{n+1} + \gamma_1 \sigma_{i+1}^{n+1}) \\
& + k_1(\alpha_1 \sigma_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \sigma_i^{n+1} + \alpha_1 \sigma_{i+1}^{n+1})(\beta_1 \sigma_{i-1}^n + \beta_2 \sigma_{i+1}^n) \\
& + k_1(\alpha_1 \sigma_{i-1}^n + \alpha_2 \sigma_i^n + \alpha_1 \sigma_{i+1}^n)(\beta_1 \sigma_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \sigma_{i+1}^{n+1}) \\
& + k_3(\alpha_1 \sigma_{i-1}^n + \alpha_2 \sigma_i^n + \alpha_1 \sigma_{i+1}^n)(\beta_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \delta_{i+1}^{n+1}) \\
& + k_3(\alpha_1 \sigma_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \sigma_i^{n+1} + \alpha_1 \sigma_{i+1}^{n+1})(\beta_1 \delta_{i-1}^n + \beta_2 \delta_{i+1}^n) \\
& + k_3(\alpha_1 \delta_{i-1}^{n+1} + \alpha_2 \delta_i^{n+1} + \alpha_1 \delta_{i+1}^{n+1})(\beta_1 \sigma_{i-1}^n + \beta_2 \sigma_{i+1}^n) \\
& + k_3(\alpha_1 \delta_{i-1}^n + \alpha_2 \delta_i^n + \alpha_1 \delta_{i+1}^n)(\beta_1 \sigma_{i-1}^{n+1} + \beta_2 \sigma_{i+1}^{n+1}) \\
& = \frac{2}{\Delta t}(\alpha_1 \sigma_{i-1}^n + \alpha_2 \sigma_i^n + \alpha_1 \sigma_{i+1}^n) + (\gamma_1 \sigma_{i-1}^n + \gamma_2 \sigma_i^n + \gamma_1 \sigma_{i+1}^n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistem

$$\begin{aligned}
a1 &= \frac{2\alpha_1}{\Delta t} - \gamma_1 + k_1\alpha_1K_1 + k_1\beta_1K_1 + k_2\beta_1L_1 + k_2\alpha_1L_2 \\
a2 &= k_2\alpha_1K_2 + k_2\beta_1K_1 \\
a3 &= \frac{2\alpha_2}{\Delta t} - \gamma_2 + k_1\alpha_2K_2 + k_2\alpha_2L_2 \\
a4 &= k_2\alpha_2K_2 \\
a5 &= \frac{2\alpha_1}{\Delta t} - \gamma_1 + k_1\alpha_1K_2 + k_1\beta_2K_1 + k_2\beta_2L_1 + k_2\alpha_1L_2 \\
a6 &= k_2\alpha_1K_2 + k_2\beta_2K_1 \\
a7 &= \frac{2\alpha_1}{\Delta t} + \gamma_1 \\
a8 &= \frac{2\alpha_1}{\Delta t} + \gamma_2 \\
a9 &= \frac{2\alpha_1}{\Delta t} + \gamma_1 \\
a10 &= k_3\beta_1L_1 + k_3\alpha_1L_2 \\
a11 &= \frac{2\alpha_1}{\Delta t} - \gamma_1 + k_1\alpha_1L_2 + k_1\beta_1L_1 + k_3\beta_1K_2 + k_3\alpha_1K_2 \\
a12 &= k_3\alpha_2L_2 \\
a13 &= \frac{2\alpha_2}{\Delta t} - \gamma_2 + k_1\alpha_2L_2 + k_3\alpha_2K_2 \\
a14 &= k_3\beta_2L_1 + k_3\alpha_1L_2 \\
a15 &= \frac{2\alpha_1}{\Delta t} - \gamma_1 + k_1\alpha_1L_2 + k_1\beta_2L_1 + k_3\alpha_1K_2 + k_3\beta_2K_1
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&a1\delta_{i-1}^{n+1} + a2\sigma_{i-1}^{n+1} + a3\delta_i^{n+1} + a4\sigma_i^{n+1} + a5\delta_{i+1}^{n+1} + a6\sigma_{i+1}^{n+1} \\
&= a7\delta_{i-1}^n + a8\delta_i^n + a9\delta_{i+1}^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&a10\delta_{i-1}^{n+1} + a11\sigma_{i-1}^{n+1} + a12\delta_i^{n+1} + a13\sigma_i^{n+1} + a14\delta_{i+1}^{n+1} + a15\sigma_{i+1}^{n+1} \\
&= a7\sigma_{i-1}^n + a8\sigma_i^n + a9\sigma_{i+1}^n
\end{aligned}$$

biçiminde gösterilebilir. Bu sistemde  $(2N + 2)$  denklem ve  $(2N + 6)$  bilinmeyen vardır. Sınır şartları kullanılarak bu sistemden  $\delta_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\sigma_{-1}$ , ve  $\sigma_{N+1}$  parametreleri yok edilir. Bu amaçla,  $x = x_i$  kollokasyon noktasındaki

$$U(x_i, t) = \alpha_1\delta_{i-1} + \alpha_2\delta_i + \alpha_1\delta_{i+1}$$

$$V(x_i, t) = \alpha_1\sigma_{i-1} + \alpha_2\sigma_i + \alpha_1\sigma_{i+1}$$

yaklaşımları kullanılırsa  $\delta_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\sigma_{-1}$ , ve  $\sigma_{N+1}$  parametreleri;

$$U(x_0, t) = U_0 = \alpha_1 \delta_{-1} + \alpha_2 \delta_0 + \alpha_1 \delta_1$$

$$\delta_{-1} = \frac{U_0 - \alpha_2 \delta_0 - \alpha_1 \delta_1}{\alpha_1}$$

$$V(x_0, t) = V_0 = \alpha_1 \sigma_{-1} + \alpha_2 \sigma_0 + \alpha_1 \sigma_1$$

$$\sigma_{-1} = \frac{V_0 - \alpha_2 \sigma_0 - \alpha_1 \sigma_1}{\alpha_1}$$

$$U(x_N, t) = U_N = \alpha_1 \delta_{N-1} + \alpha_2 \delta_N + \alpha_1 \delta_{N+1}$$

$$\delta_{N+1} = \frac{U_N - \alpha_1 \delta_{N-1} - \alpha_2 \delta_N}{\alpha_1}$$

$$V(x_N, t) = V_N = \alpha_1 \sigma_{N-1} + \alpha_2 \sigma_N + \alpha_1 \sigma_{N+1}$$

$$\sigma_{N+1} = \frac{V_N - \alpha_1 \sigma_{N-1} - \alpha_2 \sigma_N}{\alpha_1}$$

biçiminde bulunur.

Sistemde  $i = 0$  için  $\delta_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\sigma_{-1}$ , ve  $\sigma_{N+1}$  parametreleri yerine yukarıda verilen eşitlikleri yazılırsa

$$\delta_0^{n+1} \left( a3 - a1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \sigma_0^{n+1} \left( a4 - a2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)$$

$$\delta_1^{n+1} (a5 - a1) + \sigma_1^{n+1} (a6 - a2)$$

$$= \delta_0^n \left( a8 - a7 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \delta_1^n (a9 - a7) - a1 \frac{U_0^{n+1}}{\alpha_1} - a2 \frac{V_0^{n+1}}{\alpha_1} + a7 \frac{U_0^n}{\alpha_1}$$

$$\delta_0^{n+1} \left( a12 - a10 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \sigma_0^{n+1} \left( a13 - a11 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)$$

$$\delta_1^{n+1} (a14 - a10) + \sigma_1^{n+1} (a15 - a11)$$

$$= \sigma_0^n \left( a8 - a7 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \sigma_1^n (a9 - a7) - a10 \frac{U_0^{n+1}}{\alpha_1} - a11 \frac{V_0^{n+1}}{\alpha_1} + a7 \frac{V_0^n}{\alpha_1}$$

$i = N$  için

$$\delta_{N-1}^{n+1} (a1 - a5) + \sigma_{N-1}^{n+1} (a2 - a6)$$

$$\delta_N^{n+1} \left( a3 - a5 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \sigma_N^{n+1} \left( a4 - a6 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right)$$

$$= \delta_N^n (a7 - a9) + \delta_N^n \left( a8 - a9 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + a9 \frac{U_N^n}{\alpha_1} - a5 \frac{U_N^{n+1}}{\alpha_1} - a6 \frac{V_N^{n+1}}{\alpha_1}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{N-1}^{n+1}(a10 - a14) + \sigma_{N-1}^{n+1}(a11 - a15) \\
& \delta_N^{n+1} \left( a12 - a14 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) + \sigma_N^{n+1} \left( a13 - a15 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) \\
& = \sigma_{N-1}^n(a7 - a9) + \sigma_N^n \left( a8 - a9 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \right) - a15 \frac{V_N^{n+1}}{\alpha_1} - a14 \frac{U_N^{n+1}}{\alpha_1} + a9 \frac{V_N^n}{\alpha_1}
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$AX^{n+1} = BX^n + C \quad (4.2.2)$$

şeklinde bir kapalı sistem elde edilir. Burada  $A$  ve  $B$  matrisleri ile  $C$  ve  $X$  vektörlerinin elemanları

$$\begin{aligned}
A_{11} &= a3 - a1 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, & A_{12} &= a4 - a2 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \\
A_{13} &= a5 - a1, & A_{14} &= a6 - a2 \\
A_{21} &= a12 - a10 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, & A_{22} &= a13 - a11 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \\
A_{23} &= a14 - a10, & A_{24} &= a15 - a11 \\
A_{ij} &= a1, A_{ij+1} = a2, A_{ij+2} = a3, A_{ij+3} = a4, \\
A_{ij+4} &= a5, A_{ij+5} = a6, i = 3(2)2N - 1, j = i - 2 \\
A_{ij} &= a10, A_{ij+1} = a11, A_{ij+2} = a12, A_{ij+3} = a13, A_{ij+4} = a14, \\
A_{ij+5} &= a15, i = 4(2)2N, j = i - 3 \\
A_{2N+1,2N-1} &= a1 - a5, & A_{2N+1,2N} &= a2 - a6, \\
A_{2N+1,2N+1} &= a3 - a5 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, & A_{2N+1,2N+2} &= a4 - \frac{a6\alpha_2}{\alpha_1} \\
A_{2N+2,2N-1} &= a10 - a14, & A_{2N+2,2N} &= a11 - a15, \\
A_{2N+2,2N+1} &= a12 - a14 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, & A_{2N+2,2N+2} &= a13 - a15 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B_{11} &= a8 - a7 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad B_{12} = 0, \\
B_{13} &= a9 - a7, \quad B_{14} = 0, \\
B_{21} &= 0, \quad B_{22} = a8 - a7 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \\
B_{23} &= 0, \quad B_{24} = a9 - a7, \\
B_{ij} &= a7, B_{ij+1} = 0, B_{ij+2} = a8, B_{ij+3} = 0, \\
B_{ij+4} &= a9, B_{ij+5} = 0, i = 3(2)2N - 1, j = i - 2 \\
B_{ij} &= 0, B_{ij+1} = a7, B_{ij+2} = 0, B_{ij+3} = a8, B_{ij+4} = 0, \\
B_{ij+5} &= a9, i = 4(2)2N, j = i - 3 \\
B_{2N+1,2N-1} &= a7 - a9, \quad B_{2N+1,2N} = 0, \\
B_{2N+1,2N+1} &= a8 - a9 \frac{\alpha_2}{\alpha_1}, \quad B_{2N+1,2N+2} = 0, \\
B_{2N+2,2N-1} &= 0, \quad B_{2N+2,2N} = a7 - a9, \\
B_{2N+2,2N+1} &= 0, \quad B_{2N+2,2N+2} = a8 - a9 \frac{\alpha_2}{\alpha_1} \\
C_1 &= -a1 \frac{U_0^{n+1}}{\alpha_1} - a2 \frac{V_0^{n+1}}{\alpha_1} + a7 \frac{U_0^n}{\alpha_1} \\
C_2 &= -a10 \frac{U_0^{n+1}}{\alpha_1} - a11 \frac{V_0^{n+1}}{\alpha_1} + a7 \frac{V_0^n}{\alpha_1} \\
C_i &= 0, \quad i = 2(1)2N \\
C_{2N+1} &= a9 \frac{U_N^n}{\alpha_1} - a5 \frac{U_N^{n+1}}{\alpha_1} - a6 \frac{V_N^{n+1}}{\alpha_1} \\
C_{2N+2} &= -a15 \frac{V_N^{n+1}}{\alpha_1} - a14 \frac{U_N^{n+1}}{\alpha_1} + a9 \frac{V_N^n}{\alpha_1} \\
X &= [\delta_0, \sigma_0, \delta_1, \sigma_1, \dots, \delta_{N-1}, \sigma_{N-1}, \delta_N, \sigma_N]^T
\end{aligned}$$

biçimindedir. Sonuç olarak  $(2N + 2)$  denklem ve  $(2N + 2)$  bilinmeyenden oluşan çözülebilir denklem sistemi elde edilir. (4.2.2) ile verilen sistemden  $\delta^{n+1}$  ve  $\sigma^{n+1}$  parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle  $\delta^0$  ve  $\sigma^0$  parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bu  $\delta^0$  ve  $\sigma^0$  parametrelerinin hesaplanması (4.1.5) ve (4.1.6) ile verilen ve LİN-1’de KBTBK Y’inde ayrıntılı bir biçimde anlatılan sistemlerin çözülmesiyle kolay bir şekilde elde edilir.

#### 4.2.1.1 Kararlılık analizi

Bu kısımda (3.1.1) ile verilen ikili Burgers sistemindeki birinci denkleme LİN-2 lineerleştirme tekniği ile birlikte KBTBK Y uygulandığında LİN-1 KBTBK Y ile elde edilen şema ve Ref. [39] ile verilen çalışmada uygulanan lineerleştirme tekniğinin sonucunda elde edilen nümerik şema ile benzer olduğundan LİN-1 KBTBK Y’de ve Ref. [39]’da gösterildiği

gibi benzer şekilde  $|g| \leq 1$  olduğu gösterilebilir. Buradan şema şartsız kararlıdır.  $U$  ve  $V$  'nin simetrik olmasından dolayı (3.1.1) ile verilen ikili Burgers sistemindeki ikinci denklem olan (3.1.1b) içinde benzer sonuçlar elde edilir.

#### 4.2.2 Kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemi (KNTBKY)

$U(x,t)$  ve  $V(x,t)$ 'ye bir yaklaşım sırasıyla  $U_N(x,t)$  ve  $V_N(x,t)$ , kuintik trigonometrik fonksiyonlar kullanılarak

$$U_N(x,t) = \sum_{i=-2}^{N+2} \delta_i T_i^5(x) \text{ ve } V_N(x,t) = \sum_{i=-2}^{N+2} \sigma_i T_i^5(x)$$

şeklinde yazılabilir. Bu yaklaşımlarda,  $x = x_i$  kollokasyon noktasında kuintik trigonometrik fonksiyonların kullanılmasıyla Bölüm 2'de de ayrıntılı olarak anlatılan ve (2.2.7) ile verilen  $U$  ve  $V$  ile  $U$  ve  $V$  nin birinci ve ikinci türevleri

$$\begin{aligned} U &= a_1 \delta_{i-2} + a_2 \delta_{i-1} + a_3 \delta_i + a_2 \delta_{i+1} + a_1 \delta_{i+2} \\ U_x &= b_1 \delta_{i-2} + b_2 \delta_{i-1} - b_2 \delta_{i+1} - b_1 \delta_{i+2} \\ U_{xx} &= c_1 \delta_{i-2} + c_2 \delta_{i-1} + c_3 \delta_i + c_2 \delta_{i+1} + c_1 \delta_{i+2} \\ V &= a_1 \sigma_{i-2} + a_2 \sigma_{i-1} + a_3 \sigma_i + a_2 \sigma_{i+1} + a_1 \sigma_{i+2} \\ V_x &= b_1 \sigma_{i-2} + b_2 \sigma_{i-1} - b_2 \sigma_{i+1} - b_1 \sigma_{i+2} \\ V_{xx} &= c_1 \sigma_{i-2} + c_2 \sigma_{i-1} + c_3 \sigma_i + c_2 \sigma_{i+1} + c_1 \sigma_{i+2} \end{aligned}$$

biçiminde yazılır. Burada

$$\theta = \sin(h/2) \sin(h) \sin(3h/2) \sin(2h) \sin(5h/2)$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
a_1 &= \sin(h/2)^5 / \theta \\
a_2 &= (4 \sin(2h) - 11 \sin(3h) + 4 \sin(4h) + 9 \sin(h)) / (16\theta) \\
a_3 &= (2 \sin(h/2)^5 (48 \sin(h/2)^4) - 80 \sin(h/2)^2 + 33) / \theta \\
b_1 &= -(5 \cos(h/2) \sin(h/2)^4) / (2\theta) \\
b_2 &= -(5 \sin((h/2)^4) 8 \sin(h/2)^4 - 13 \sin(h/2)^2 + 5) / \theta \\
c_1 &= 20 \sin(h/2)^3 - 25 * \sin(h/2)^5) / (4\theta) \\
c_2 &= -20(\sin(2h) - 35 \sin(3h) + 20 \sin(4h) - 15 \sin(h)) / (64\theta) \\
c_3 &= (5 \sin(h/2)^3 (43 \sin(h/2)^2 - 48 \sin(h/2)^4 + 16 \sin(h/2)^6 - 12)) / (2\theta)
\end{aligned}$$

dir. (4.2.1) ile verilen sistemde bu yaklaşımlar yerine yazılır ve  $(n + 1)$ . zaman seviyesindeki bilinmeyenler sol tarafta,  $n$ . zaman seviyesindeki bilinmeyenler sağ tarafta toplanırsa

$$\begin{aligned}
& \frac{2(a_1 \delta_{i-2}^{n+1} + a_2 \delta_{i-1}^{n+1} + a_3 \delta_i^{n+1} + a_2 \delta_{i+1}^{n+1} + a_1 \delta_{i+2}^{n+1})}{\Delta t} \\
& - (c_1 \delta_{i-2}^{n+1} + c_2 \delta_{i-1}^{n+1} + c_3 \delta_i^{n+1} + c_2 \delta_{i+1}^{n+1} + c_1 \delta_{i+2}^{n+1}) \\
& + k_1(a_1 \delta_{i-2}^{n+1} + a_2 \delta_{i-1}^{n+1} + a_3 \delta_i^{n+1} + a_2 \delta_{i+1}^{n+1} + a_1 \delta_{i+2}^{n+1})(b_1 \delta_{i-2}^n + b_2 \delta_{i-1}^n - b_2 \delta_{i+1}^n - b_1 \delta_{i+2}^n) \\
& + k_1(a_1 \delta_{i-2}^n + a_2 \delta_{i-1}^n + a_3 \delta_i^n + a_2 \delta_{i+1}^n + a_1 \delta_{i+2}^n)(b_1 \delta_{i-2}^{n+1} + b_2 \delta_{i-1}^{n+1} - b_2 \delta_{i+1}^{n+1} - b_1 \delta_{i+2}^{n+1}) \\
& + k_2(b_1 \delta_{i-2}^{n+1} + b_2 \delta_{i-1}^{n+1} - b_2 \delta_{i+1}^{n+1} - b_1 \delta_{i+2}^{n+1})(a_1 \sigma_{i-2}^n + a_2 \sigma_{i-1}^n + a_3 \sigma_i^n + a_2 \sigma_{i+1}^n + a_1 \sigma_{i+2}^n) \\
& + k_2(b_1 \delta_{i-2}^n + b_2 \delta_{i-1}^n - b_2 \delta_{i+1}^n - b_1 \delta_{i+2}^n)(a_1 \sigma_{i-2}^{n+1} + a_2 \sigma_{i-1}^{n+1} + a_3 \sigma_i^{n+1} + a_2 \sigma_{i+1}^{n+1} + a_1 \sigma_{i+2}^{n+1}) \\
& + k_2(a_1 \delta_{i-2}^{n+1} + a_2 \delta_{i-1}^{n+1} + a_3 \delta_i^{n+1} + a_2 \delta_{i+1}^{n+1} + a_1 \delta_{i+2}^{n+1})(b_1 \sigma_{i-2}^n + b_2 \sigma_{i-1}^n - b_2 \sigma_{i+1}^n - b_1 \sigma_{i+2}^n) \\
& + k_2(a_1 \delta_{i-2}^n + a_2 \delta_{i-1}^n + a_3 \delta_i^n + a_2 \delta_{i+1}^n + a_1 \delta_{i+2}^n)(b_1 \sigma_{i-2}^{n+1} + b_2 \sigma_{i-1}^{n+1} - b_2 \sigma_{i+1}^{n+1} - b_1 \sigma_{i+2}^{n+1}) \\
& = \frac{2(a_1 \delta_{i-2}^n + a_2 \delta_{i-1}^n + a_3 \delta_i^n + a_2 \delta_{i+1}^n + a_1 \delta_{i+2}^n)}{\Delta t} + (c_1 \delta_{i-2}^n + c_2 \delta_{i-1}^n + c_3 \delta_i^n + c_2 \delta_{i+1}^n + c_1 \delta_{i+2}^n)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \frac{2(a_1\sigma_{i-2}^{n+1} + a_2\sigma_{i-1}^{n+1} + a_3\sigma_i^{n+1} + a_2\sigma_{i+1}^{n+1} + a_1\sigma_{i+2}^{n+1})}{\Delta t} \\
& - (c_1\sigma_{i-2}^{n+1} + c_2\sigma_{i-1}^{n+1} + c_3\sigma_i^{n+1} + c_2\sigma_{i+1}^{n+1} + c_1\sigma_{i+2}^{n+1}) \\
& + k_1(a_1\sigma_{i-2}^{n+1} + a_2\sigma_{i-1}^{n+1} + a_3\sigma_i^{n+1} + a_2\sigma_{i+1}^{n+1} + a_1\sigma_{i+2}^{n+1})(b_1\sigma_{i-2}^n + b_2\sigma_{i-1}^n - b_2\sigma_{i+1}^n - b_1\sigma_{i+2}^n) \\
& + k_1(a_1\sigma_{i-2}^n + a_2\sigma_{i-1}^n + a_3\sigma_i^n + a_2\sigma_{i+1}^n + a_1\sigma_{i+2}^n)(b_1\sigma_{i-2}^{n+1} + b_2\sigma_{i-1}^{n+1} - b_2\sigma_{i+1}^{n+1} - b_1\sigma_{i+2}^{n+1}) \\
& + k_3(b_1\delta_{i-2}^{n+1} + b_2\delta_{i-1}^{n+1} - b_2\delta_{i+1}^{n+1} - b_1\delta_{i+2}^{n+1})(a_1\sigma_{i-2}^n + a_2\sigma_{i-1}^n + a_3\sigma_i^n + a_2\sigma_{i+1}^n + a_1\sigma_{i+2}^n) \\
& + k_3(b_1\delta_{i-2}^n + b_2\delta_{i-1}^n - b_2\delta_{i+1}^n - b_1\delta_{i+2}^n)(a_1\sigma_{i-2}^{n+1} + a_2\sigma_{i-1}^{n+1} + a_3\sigma_i^{n+1} + a_2\sigma_{i+1}^{n+1} + a_1\sigma_{i+2}^{n+1}) \\
& + k_3(a_1\delta_{i-2}^{n+1} + a_2\delta_{i-1}^{n+1} + a_3\delta_i^{n+1} + a_2\delta_{i+1}^{n+1} + a_1\delta_{i+2}^{n+1})(b_1\sigma_{i-2}^n + b_2\sigma_{i-1}^n - b_2\sigma_{i+1}^n - b_1\sigma_{i+2}^n) \\
& + k_3(a_1\delta_{i-2}^n + a_2\delta_{i-1}^n + a_3\delta_i^n + a_2\delta_{i+1}^n + a_1\delta_{i+2}^n)(b_1\sigma_{i-2}^{n+1} + b_2\sigma_{i-1}^{n+1} - b_2\sigma_{i+1}^{n+1} - b_1\sigma_{i+2}^{n+1}) \\
& = \frac{2(a_1\sigma_{i-2}^n + a_2\sigma_{i-1}^n + a_3\sigma_i^n + a_2\sigma_{i+1}^n + a_1\sigma_{i+2}^n)}{\Delta t} + (c_1\sigma_{i-2}^n + c_2\sigma_{i-1}^n + c_3\sigma_i^n + c_2\sigma_{i+1}^n + c_1\sigma_{i+2}^n)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu sistem

$$K_1 = a_1\delta_{i-2}^n + a_2\delta_{i-1}^n + a_3\delta_i^n + a_2\delta_{i+1}^n + a_1\delta_{i+2}^n$$

$$K_2 = b_1\delta_{i-2}^n + b_2\delta_{i-1}^n - b_2\delta_{i+1}^n - b_1\delta_{i+2}^n$$

$$L_1 = a_1\sigma_{i-2}^n + a_2\sigma_{i-1}^n + a_3\sigma_i^n + a_2\sigma_{i+1}^n + a_1\sigma_{i+2}^n$$

$$L_2 = b_1\sigma_{i-2}^n + b_2\sigma_{i-1}^n - b_2\sigma_{i+1}^n - b_1\sigma_{i+2}^n$$

ve

$$\begin{aligned}
m1 &= \frac{2}{\Delta t} a_1 - c_1 + k_1 a_1 K_2 + k_1 b_1 K_1 + k_2 b_1 L_1 + k_2 a_1 L_2 \\
m2 &= k_2 a_1 K_2 + k_2 b_1 K_1 \\
m3 &= \frac{2}{\Delta t} a_2 - c_2 + k_1 a_2 K_2 + k_1 b_2 K_1 + k_2 b_2 L_1 + k_2 a_2 L_2 \\
m4 &= k_2 a_2 K_2 + k_2 b_2 K_1 \\
m5 &= \frac{2}{\Delta t} a_3 - c_3 + k_1 a_3 K_2 + k_2 a_3 L_2 \\
m6 &= k_2 a_3 K_2 \\
m7 &= \frac{2}{\Delta t} a_2 - c_2 + k_1 a_2 K_2 - k_1 b_2 K_1 - k_2 b_2 L_1 + k_2 a_2 L_2 \\
m8 &= k_2 a_2 K_2 - k_2 b_2 K_1 \\
m9 &= \frac{2}{\Delta t} a_1 - c_1 + k_1 a_1 K_2 - k_1 b_1 K_1 - k_2 b_1 L_1 + k_2 a_1 L_2 \\
m10 &= k_2 a_1 K_2 - k_2 b_1 K_1 \\
m11 &= k_3 b_1 L_1 + k_3 a_1 L_2 \\
m12 &= \frac{2}{\Delta t} a_1 - c_1 + k_1 a_1 L_2 + k_1 b_1 L_1 + k_3 a_1 K_2 + k_3 b_1 K_1 \\
m13 &= k_3 b_2 L_1 + k_3 a_2 L_2 \\
m14 &= \frac{2}{\Delta t} a_2 - c_2 + k_1 a_2 L_2 + k_1 b_2 L_1 + k_3 a_2 K_2 + k_3 b_2 K_1 \\
m15 &= k_3 a_3 L_2 \\
m16 &= \frac{2}{\Delta t} a_3 - c_3 + k_1 a_3 L_2 + k_3 a_3 K_2 \\
m17 &= -k_3 b_2 L_1 + k_3 a_2 L_2 \\
m18 &= \frac{2}{\Delta t} a_2 - c_2 + k_1 a_2 L_2 - k_1 b_2 L_1 + k_3 a_2 K_2 - k_3 b_2 K_1 \\
m19 &= -k_3 b_1 L_1 + k_3 a_1 L_2 \\
m20 &= \frac{2}{\Delta t} a_1 - c_3 + k_1 a_1 L_2 - k_1 b_1 L_1 + k_3 a_1 K_2 - k_3 b_1 K_1
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
f1 &= \frac{2}{\Delta t} a_1 + c_1 \\
f2 &= \frac{2}{\Delta t} a_2 + c_2 \\
f3 &= \frac{2}{\Delta t} a_3 + c_3 \\
f4 &= \frac{2}{\Delta t} a_2 + c_2 \\
f5 &= \frac{2}{\Delta t} a_1 + c_1 \\
f6 &= \frac{2}{\Delta t} a_1 + c_1 \\
f7 &= \frac{2}{\Delta t} a_2 + c_2 \\
f8 &= \frac{2}{\Delta t} a_3 + c_3 \\
f9 &= \frac{2}{\Delta t} a_2 + c_2 \\
f10 &= \frac{2}{\Delta t} a_1 + c_1
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
&m1\delta_{i-2}^{n+1} + m2\sigma_{i-2}^{n+1} + m3\delta_{i-1}^{n+1} + m4\sigma_{i-1}^{n+1} + m5\delta_i^{n+1} + m6\sigma_i^{n+1} + m7\delta_{i+1}^{n+1} + m8\sigma_{i+1}^{n+1} \\
&+ m9\delta_{i+2}^{n+1} + m10\sigma_{i+2}^{n+1} = f1\delta_{i-2}^n + f2\delta_{i-1}^n + f3\delta_i^n + f4\delta_{i+1}^n + f5\delta_{i+2}^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&m11\delta_{i-2}^{n+1} + m12\sigma_{i-2}^{n+1} + m13\delta_{i-1}^{n+1} + m14\sigma_{i-1}^{n+1} + m15\delta_i^{n+1} + m16\sigma_i^{n+1} + m17\delta_{i+1}^{n+1} \\
&+ m18\sigma_{i+1}^{n+1} + m19\delta_{i+2}^{n+1} + m20\sigma_{i+2}^{n+1} \\
&= f6\sigma_{i-2}^n + f7\sigma_{i-1}^n + f8\sigma_i^n + f9\sigma_{i+1}^n + f10\sigma_{i+2}^n
\end{aligned}$$

biçiminde gösterilebilir. Bu sistemde  $(2N + 2)$  denklem ve  $(2N + 10)$  bilinmeyen vardır. Sınır şartları kullanılarak bu sistemden  $\delta_{-2}$ ,  $\delta_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\delta_{N+2}$ ,  $\sigma_{-2}$ ,  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_{N+1}$ ,  $\sigma_{N+2}$  parametreleri yok edilir. Bu amaçla,  $x = x_i$  kollokasyon noktasındaki

$$U_x(x_i, t) = b_1 \delta_{i-2} + b_2 \delta_{i-1} - b_2 \delta_{i+1} - b_1 \delta_{i+2}$$

$$U_{xx}(x_i, t) = c_1 \delta_{i-2} + c_2 \delta_{i-1} + c_3 \delta_i + c_2 \delta_{i+1} + c_1 \delta_{i+2}$$

$$V_x(x_i, t) = b_1 \sigma_{i-2} + b_2 \sigma_{i-1} - b_2 \sigma_{i+1} - b_1 \sigma_{i+2}$$

$$V_{xx}(x_i, t) = c_1 \sigma_{i-2} + c_2 \sigma_{i-1} + c_3 \sigma_i + c_2 \sigma_{i+1} + c_1 \sigma_{i+2}$$

yaklaşımları kullanılırsa  $\delta_{-2}$ ,  $\delta_{-1}$ ,  $\delta_{N+1}$ ,  $\delta_{N+2}$ ,  $\sigma_{-2}$ ,  $\sigma_{-1}$ ,  $\sigma_{N+1}$ ,  $\sigma_{N+2}$  parametreleri

$$\begin{aligned}\delta_{-1} &= \frac{b_1 U_{xx}(x_0, t) - c_1 U_x(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{b_1 c_3 \delta_0 + (b_1 c_2 + c_1 b_2 \delta_1) + 2b_1 c_1 \delta_2}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\ \delta_{-2} &= \frac{b_2 U_{xx}(x_0, t) - c_2 U_x(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{b_2 c_3 \delta_0 + 2b_2 c_2 \delta_1 + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \delta_2}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \\ \delta_{N+1} &= \frac{b_1 U_{xx}(x_N, t) - c_1 U_x(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{2c_1 b_1 \delta_{N-2} + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \delta_{N-1} + c_3 b_1 \delta_N}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\ \delta_{N+2} &= \frac{b_2 U_{xx}(x_N, t) - c_2 U_x(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) \delta_{N-2} + 2c_2 b_2 \delta_{N-1} + b_2 c_3 \delta_N}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \\ \sigma_{-1} &= \frac{b_1 V_{xx}(x_0, t) - c_1 V_x(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{b_1 c_3 \sigma_0 + (b_1 c_2 + c_1 b_2 \sigma_1) + 2b_1 c_1 \sigma_2}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\ \sigma_{-2} &= \frac{b_2 V_{xx}(x_0, t) - c_2 V_x(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{b_2 c_3 \sigma_0 + 2b_2 c_2 \sigma_1 + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \sigma_2}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \\ \sigma_{N+1} &= \frac{b_1 V_{xx}(x_N, t) - c_1 V_x(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} + \frac{2c_1 b_1 \sigma_{N-2} + (c_1 b_2 + c_2 b_1) \sigma_{N-1} + c_3 b_1 \sigma_N}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \\ \sigma_{N+2} &= \frac{b_2 V_{xx}(x_N, t) - c_2 V_x(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} + \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) \sigma_{N-2} + 2c_2 b_2 \sigma_{N-1} + b_2 c_3 \sigma_N}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)}\end{aligned}$$

biçiminde bulunur. Böylece  $i = 0$  için oluşan hayali noktaları yok etmek için yukarıdaki eşitlikler kullanılır gerekli düzenlemeler yapılırsa;

$$\begin{aligned}& \delta_0^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_2) m_1}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_3 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_3 + m_5 \right) + \sigma_0^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_2) m_2}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_3 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_4 + m_6 \right) \\ & + \delta_1^{n+1} \left( \frac{2(c_2 b_2) m_1}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_2 b_1 + c_1 b_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_3 + m_7 \right) + \sigma_{i-1}^{n+1} \left( \frac{2(c_2 b_2) m_2}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_2 b_1 + c_1 b_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_4 + m_8 \right) + \\ & \delta_2^{n+1} \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) m_1}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2c_1 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_3 + m_9 \right) \\ & + \sigma_2^{n+1} \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) m_2}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2c_1 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_4 + m_{10} \right) \\ & + m_1 \left( \frac{b_2 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_2 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + m_2 \left( \frac{b_2 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_2 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\ & + m_3 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) + m_4 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\ & = \delta_0^n \left( \frac{(c_3 b_2) f_1}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{b_1 c_3}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_2 + f_3 \right) + \delta_1^n \left( \frac{2(c_2 b_2) f_1}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{b_1 c_2 + c_1 b_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_2 + f_4 \right) \\ & + \delta_2^n \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) f_1}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2b_1 c_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_2 + f_5 \right) \\ & + f_1 \left( \frac{b_2 U_{xx}^n(x_0, t) - c_2 U_x^n(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + f_2 \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_0, t) - c_1 U_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_0^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_2) m_{11}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_3 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{13} + m_{15} \right) \\
& + \sigma_0^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_2) m_{12}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_3 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{14} + m_{16} \right) \\
& + \delta_1^{n+1} \left( \frac{2(c_2 b_2) m_{11}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_2 b_1 + c_1 b_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{13} + m_{17} \right) \\
& + \sigma_1^{n+1} \left( \frac{2(c_2 b_2) m_{12}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_2 b_1 + c_1 b_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{14} + m_{18} \right) \\
& + \delta_2^{n+1} \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) m_{11}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2c_1 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{13} + m_{19} \right) \\
& + \sigma_2^{n+1} \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) m_{12}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2c_1 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{14} + m_{20} \right) \\
& + m_{11} \left( \frac{b_2 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_2 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + m_{12} \left( \frac{b_2 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_2 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + m_{13} \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) + m_{14} \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& = \sigma_0^n \left( \frac{(c_3 b_2) f_6}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{b_1 c_3}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_7 + f_8 \right) + \sigma_1^n \left( \frac{2(c_2 b_2) f_6}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{b_1 c_2 + c_1 b_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_7 + f_9 \right) \\
& + \sigma_2^n \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) f_6}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2b_1 c_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_7 + f_{10} \right) \\
& + f_6 \left( \frac{b_2 V_{xx}^n(x_0, t) - c_2 V_x^n(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) + f_7 \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_0, t) - c_1 V_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde  $i = 1$  için;

$$\begin{aligned}
& \delta_0^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_1) m_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_3 \right) + \sigma_0^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_1) m_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_4 \right) \\
& + \delta_1^{n+1} \left( \frac{(c_2 b_1 + c_1 b_2) m_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_5 \right) + \sigma_1^{n+1} \left( \frac{(c_2 b_1 + c_1 b_2) m_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_6 \right) + \\
& \delta_2^{n+1} \left( \frac{(2c_1 b_1) m_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_7 \right) + \sigma_2^{n+1} \left( \frac{(2c_1 b_1) m_2}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_8 \right) + \delta_3^{n+1} (m_9) + \sigma_3^{n+1} (m_{10}) \\
& + m_1 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) + m_2 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& = \delta_0^n \left( \frac{(c_3 b_1) f_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_2 \right) + \delta_1^n \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) f_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_3 \right) \\
& + \delta_2^n \left( \frac{(2c_1 b_1) f_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_4 \right) + \delta_3^n (f_5) \\
& + f_1 \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_0, t) - c_1 U_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_0^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_1) m_{11}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_{13} \right) + \sigma_0^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_1) m_{12}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_{14} \right) \\
& + \delta_1^{n+1} \left( \frac{(c_2 b_1 + c_1 b_2) m_{11}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_{15} \right) + \sigma_1^{n+1} \left( \frac{(c_2 b_1 + c_1 b_2) m_{12}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_{16} \right) + \\
& \delta_2^{n+1} \left( \frac{(2c_1 b_1) m_{11}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_{17} \right) + \sigma_2^{n+1} \left( \frac{(2c_1 b_1) m_{12}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_{18} \right) + \delta_3^{n+1} (m_{19}) + \sigma_3^{n+1} (m_{20}) \\
& + m_{11} \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) + m_{12} \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& = \sigma_0^n \left( \frac{(c_3 b_1) f_6}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_7 \right) + \sigma_1^n \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) f_6}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_8 \right) + \sigma_2^n \left( \frac{(2c_1 b_1) f_6}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_9 \right) + \sigma_3^n (f_{10}) \\
& + f_6 \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_0, t) - c_1 V_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

ve  $i = N - 1$  için;

$$\begin{aligned}
& \delta_{N-3}^{n+1} (m_1) + \sigma_{N-3}^{n+1} (m_2) \\
& \delta_{N-2}^{n+1} \left( \frac{(2c_1 b_1) m_9}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_3 \right) + \sigma_{N-2}^{n+1} \left( \frac{(2c_1 b_1) m_{10}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_4 \right) \\
& \delta_{N-1}^{n+1} \left( \frac{(c_2 b_1 + c_1 b_2) m_9}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_5 \right) + \sigma_{N-1}^{n+1} \left( \frac{(c_2 b_1 + c_1 b_2) m_{10}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_6 \right) \\
& \delta_N^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_1) m_9}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_7 \right) + \sigma_N^{n+1} \left( \frac{(c_3 b_1) m_{10}}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + m_8 \right) \\
& + m_9 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) + m_{10} \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& = \delta_{N-3}^n (f_1) + \delta_{N-2}^n \left( \frac{(2c_1 b_1) f_5}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_2 \right) \\
& + \delta_{N-1}^n \left( \frac{(c_2 b_1 + c_1 b_2) f_5}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_3 \right) \\
& + \delta_N^n \left( \frac{(c_3 b_1) f_5}{c_1 b_2 - c_2 b_1} + f_4 \right) \\
& + f_5 \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_N, t) - c_1 U_x^n(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \delta_{N-3}^{n+1}(m11) + \sigma_{N-3}^{n+1}(m12) \\
& \delta_{N-2}^{n+1} \left( \frac{(2c_1b_1)m19}{c_1b_2 - c_2b_1} + m13 \right) + \sigma_{N-2}^{n+1} \left( \frac{(2c_1b_1)m20}{c_1b_2 - c_2b_1} + m14 \right) \\
& \delta_{N-1}^{n+1} \left( \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m19}{c_1b_2 - c_2b_1} + m15 \right) + \sigma_N^{n+1} \left( \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m20}{c_1b_2 - c_2b_1} + m16 \right) \\
& \delta_N^{n+1} \left( \frac{(c_3b_1)m19}{c_1b_2 - c_2b_1} + m17 \right) + \sigma_N^{n+1} \left( \frac{(c_3b_1)m20}{c_1b_2 - c_2b_1} + m18 \right) \\
& + m19 \left( \frac{b_1U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) + m20 \left( \frac{b_1V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right) \\
& = \sigma_{N-3}^n(f6) + \delta_{N-2}^n \left( \frac{(2c_1b_1)f10}{c_1b_2 - c_2b_1} + f7 \right) \\
& + \sigma_{N-1}^n \left( \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)f10}{c_1b_2 - c_2b_1} + f8 \right) \\
& + \sigma_N^n \left( \frac{(c_3b_1)f10}{c_1b_2 - c_2b_1} + f9 \right) \\
& + f10 \left( \frac{b_1V_{xx}^n(x_N, t) - c_1V_x^n(x_N, t)}{(c_2b_1 - c_1b_2)} \right)
\end{aligned}$$

ve son olarak  $i = N$  için;

$$\begin{aligned}
& \delta_{N-2}^{n+1} \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) m_9}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2c_1 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_7 + m_1 \right) \\
& + \sigma_{N-2}^{n+1} \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) m_{10}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2c_1 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_8 + m_2 \right) \\
& + \delta_{N-1}^{n+1} \left( \frac{(2c_2 b_2) m_9}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{(c_2 b_1 + c_1 b_2)}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_7 + m_3 \right) \\
& + \sigma_{N-1}^{n+1} \left( \frac{(2c_2 b_2) m_{10}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{(c_2 b_1 + c_1 b_2)}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_8 + m_4 \right) \\
& \delta_N^{n+1} \left( \frac{c_3 b_2 m_9}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_3 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_7 + m_5 \right) \\
& + \sigma_N^{n+1} \left( \frac{c_3 b_2 m_{10}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_3 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_8 + m_6 \right) \\
& + m_7 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + m_8 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + m_9 \left( \frac{b_2 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_2 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + m_{10} \left( \frac{b_2 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_2 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& = \delta_{N-2}^n \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) f_5}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2b_1 c_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_4 + f_1 \right) \\
& + \delta_{N-1}^n \left( \frac{(2c_2 b_2) f_5}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1)}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_4 + f_2 \right) \\
& + \delta_N^n \left( \frac{(2c_3 b_2) f_5}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{(c_3 b_1)}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_4 + f_3 \right) \\
& + f_4 \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_N, t) - c_1 U_x^n(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f_5 \left( \frac{b_2 U_{xx}^n(x_N, t) - c_2 U_x^n(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \delta_{N-2}^{n+1} \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) m_{19}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2c_1 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{17} + m_{11} \right) \\
& + \sigma_{N-2}^{n+1} \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) m_{20}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2c_1 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{18} + m_{12} \right) \\
& + \delta_{N-1}^{n+1} \left( \frac{(2c_2 b_2) m_{19}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{(c_2 b_1 + c_1 b_2)}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{17} + m_{13} \right) \\
& + \sigma_{N-1}^{n+1} \left( \frac{(2c_2 b_2) m_{20}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{(c_2 b_1 + c_1 b_2)}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{18} + m_{14} \right) \\
& + \delta_N^{n+1} \left( \frac{c_3 b_2 m_{19}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_3 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{17} + m_{15} \right) \\
& + \sigma_N^{n+1} \left( \frac{c_3 b_2 m_{20}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{c_3 b_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} m_{18} + m_{16} \right) \\
& + m_{17} \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + m_{18} \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + m_{19} \left( \frac{b_2 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_2 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + m_{20} \left( \frac{b_2 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_2 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& = \sigma_{N-2}^n \left( \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1) f_{10}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{2b_1 c_1}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_9 + f_6 \right) \\
& + \sigma_{N-1}^n \left( \frac{(2c_2 b_2) f_{10}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{(c_1 b_2 + c_2 b_1)}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_9 + f_7 \right) \\
& + \sigma_N^n \left( \frac{c_3 b_2 f_{10}}{c_2 b_1 - c_1 b_2} + \frac{(c_3 b_1)}{c_1 b_2 - c_2 b_1} f_9 + f_8 \right) \\
& + f_9 \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_N, t) - c_1 V_x^n(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) + f_{10} \left( \frac{b_2 V_{xx}^n(x_N, t) - c_2 V_x^n(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right)
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Böylece

$$AX^{n+1} = BX^n + C \quad (4.2.3)$$

şeklinde bir kapalı sistem elde edilir. Burada  $A$  ve  $B$  matrisleri ile  $C$  ve  $X$  vektörlerinin elemanları

$$\begin{aligned}
A_{11} &= \frac{(c_3b_2)m1}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{c_3b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}m3 + m5, \\
A_{12} &= \frac{(c_3b_2)m2}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{c_3b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}m4 + m6, \\
A_{13} &= \frac{2(c_2b_2)m1}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{c_2b_1 + c_1b_2}{c_1b_2 - c_2b_1}m3 + m7, \\
A_{14} &= \frac{2(c_2b_2)m2}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{c_2b_1 + c_1b_2}{c_1b_2 - c_2b_1}m4 + m8 \\
A_{15} &= \frac{(c_1b_2 + c_2b_1)m1}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{2c_1b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}m3 + m9, \\
A_{16} &= \frac{(c_1b_2 + c_2b_1)m2}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{2c_1b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}m4 + m10 \\
A_{21} &= \frac{(c_3b_2)m11}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{c_3b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}m13 + m15, \\
A_{22} &= \frac{(c_3b_2)m12}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{c_3b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}m14 + m16, \\
A_{23} &= \frac{2(c_2b_2)m11}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{c_2b_1 + c_1b_2}{c_1b_2 - c_2b_1}m13 + m17, \\
A_{24} &= \frac{2(c_2b_2)m12}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{c_2b_1 + c_1b_2}{c_1b_2 - c_2b_1}m14 + m18, \\
A_{25} &= \frac{(c_1b_2 + c_2b_1)m11}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{2c_1b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}m13 + m19
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{26} &= \frac{(c_1b_2 + c_2b_1)m12}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{2c_1b_1}{c_1b_2 - c_2b_1}m14 + m20 \\
A_{33} &= \frac{(c_3b_1)m1}{c_1b_2 - c_2b_1} + m3, \quad A_{34} = \frac{(c_3b_1)m2}{c_1b_2 - c_2b_1} + m4 \\
A_{35} &= \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m1}{c_1b_2 - c_2b_1} + m5, \quad A_{36} = \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m2}{c_1b_2 - c_2b_1} + m6 \\
A_{37} &= \frac{(2c_1b_1)m1}{c_1b_2 - c_2b_1} + m7, \quad A_{38} = \frac{(2c_1b_1)m2}{c_1b_2 - c_2b_1} + m8 \\
A_{43} &= \frac{(c_3b_1)m11}{c_1b_2 - c_2b_1} + m13, \quad A_{44} = \frac{(c_3b_1)m12}{c_1b_2 - c_2b_1} + m14 \\
A_{45} &= \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m11}{c_1b_2 - c_2b_1} + m15, \quad A_{46} = \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m12}{c_1b_2 - c_2b_1} + m16 \\
A_{47} &= \frac{(2c_1b_1)m11}{c_1b_2 - c_2b_1} + m17, \quad A_{48} = \frac{(2c_1b_1)m12}{c_1b_2 - c_2b_1} + m18
\end{aligned}$$

$$A_{ij} = m1, A_{ij+1} = m2, A_{ij+2} = m3, A_{ij+3} = m4,$$

$$A_{ij+4} = m5, A_{ij+5} = m6, A_{ij+6} = m7,$$

$$A_{ij+7} = m8, A_{ij+8} = m9, A_{ij+9} = m10$$

$$i = 5(2)2N - 3, j = i - 4$$

$$A_{ij} = m11, A_{ij+1} = m12, A_{ij+2} = m13, A_{ij+3} = m14,$$

$$A_{ij+4} = m15, A_{ij+5} = m16, A_{ij+6} = m17, A_{ij+7} = m18,$$

$$A_{ij+8} = m19, A_{ij+9} = m20$$

$$i = 6(2)2N - 2, j = i - 5$$

$$A_{2N-1,2N-5} = m1, \quad A_{2N-1,2N-4} = m2,$$

$$\begin{aligned} A_{2N-1,2N-3} &= \frac{(2c_1b_1)m9}{c_1b_2 - c_2b_1} + m3, & A_{2N-1,2N-2} &= \frac{(2c_1b_1)m10}{c_1b_2 - c_2b_1} + m4 \\ A_{2N-1,2N-1} &= \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m9}{c_1b_2 - c_2b_1} + m5, & A_{2N-1,2N} &= \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m10}{c_1b_2 - c_2b_1} + m6 \\ A_{2N-1,2N+1} &= \frac{(c_3b_1)m9}{c_1b_2 - c_2b_1} + m7, & A_{2N-1,2N+2} &= \frac{(c_3b_1)m10}{c_1b_2 - c_2b_1} + m8 \\ A_{2N,2N-5} &= m11, & A_{2N,2N-4} &= m12, \\ A_{2N,2N-3} &= \frac{(2c_1b_1)m19}{c_1b_2 - c_2b_1} + m13, & A_{2N,2N-2} &= \frac{(2c_1b_1)m20}{c_1b_2 - c_2b_1} + m14 \\ A_{2N,2N-1} &= \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m19}{c_1b_2 - c_2b_1} + m15, & A_{2N,2N} &= \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)m20}{c_1b_2 - c_2b_1} + m16 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A_{2N,2N+1} &= \frac{(c_3b_1)m19}{c_1b_2 - c_2b_1} + m17, & A_{2N,2N+2} &= \frac{(c_3b_1)m20}{c_1b_2 - c_2b_1} + m18 \\ A_{2N+1,2N-3} &= \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)m9}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2a_1b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m7 + m1, \\ A_{2N+1,2N-2} &= \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)m10}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2a_1b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m8 + m2 \\ A_{2N+1,2N-1} &= \frac{(2a_2b_2)m9}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_2b_1 + a_1b_2)}{a_1b_2 - a_2b_1}m7 + m3, \\ A_{2N+1,2N} &= \frac{(2a_2b_2)m10}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_2b_1 + a_1b_2)}{a_1b_2 - a_2b_1}m8 + m4 \\ A_{2N+1,2N+1} &= \frac{a_3b_2m9}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m7 + m5, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_{2N+1,2N+2} &= \frac{a_3b_2m10}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m8 + m6 \\
A_{2N+2,2N-3} &= \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)m19}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2a_1b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m17 + m11, \\
A_{2N+2,2N-2} &= \frac{(a_1b_2 + a_2b_1)m20}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{2a_1b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m18 + m12 \\
A_{2N+2,2N-1} &= \frac{(2a_2b_2)m19}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_2b_1 + a_1b_2)}{a_1b_2 - a_2b_1}m17 + m13, \\
A_{2N+2,2N} &= \frac{(2a_2b_2)m20}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{(a_2b_1 + a_1b_2)}{a_1b_2 - a_2b_1}m18 + m14 \\
A_{2N+2,2N+1} &= \frac{a_3b_2m19}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m17 + m15, \\
A_{2N+2,2N+2} &= \frac{a_3b_2m20}{a_2b_1 - a_1b_2} + \frac{a_3b_1}{a_1b_2 - a_2b_1}m18 + m16
\end{aligned}$$

$$B_{11} = \frac{(c_3b_2)f1}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{b_1c_3}{c_1b_2 - c_2b_1}f2 + f3,$$

$$B_{12} = 0,$$

$$B_{13} = \frac{(2c_2b_2)f1}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{b_1c_2 + c_1b_2}{c_1b_2 - c_2b_1}f2 + f4,$$

$$B_{14} = 0$$

$$B_{15} = \frac{(b_1c_2 + c_1b_2)f1}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{(2c_1b_1)}{c_1b_2 - c_2b_1}f2 + f5,$$

$$B_{16} = 0,$$

$$B_{21} = 0,$$

$$B_{22} = \frac{(c_3b_2)f6}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{b_1c_3}{c_1b_2 - c_2b_1}f7 + f8,$$

$$B_{23} = 0,$$

$$B_{24} = \frac{2(c_2b_2)f6}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{b_1c_2 + c_1b_2}{c_1b_2 - c_2b_1}f7 + f9$$

$$B_{25} = 0,$$

$$B_{26} = \frac{(c_1b_2 + c_2b_1)f_6}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{2b_1c_1}{c_1b_2 - c_2b_1}f_7 + f_{10}$$

$$B_{31} = \frac{(c_3b_1)f_1}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_2, \quad B_{32} = 0,$$

$$B_{33} = \frac{(b_1c_2 + b_2c_1)f_1}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_3, \quad B_{34} = 0,$$

$$B_{35} = \frac{(2c_1b_1)f_1}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_4, \quad B_{36} = 0,$$

$$B_{37} = f_5, \quad B_{38} = 0,$$

$$B_{41} = 0, \quad B_{42} = \frac{(c_3b_1)f_6}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_7,$$

$$B_{43} = 0, \quad B_{44} = \frac{(b_1c_2 + b_2c_1)f_6}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_8$$

$$B_{45} = 0, \quad B_{46} = \frac{(2c_1b_1)f_6}{c_1b_2 - c_2b_1} + f_9,$$

$$B_{47} = 0, \quad B_{48} = f_{10},$$

$$B_{ij} = f_1, B_{ij+1} = 0, B_{ij+2} = f_2, B_{ij+3} = 0,$$

$$B_{ij+4} = f_3, B_{ij+5} = 0, B_{ij+6} = f_4, B_{ij+7} = 0,$$

$$B_{ij+8} = f_5, B_{ij+9} = 0,$$

$$i = 5(2)2N - 3, j = i - 4$$

$$B_{ij} = 0, B_{ij+1} = f_6, B_{ij+2} = 0, B_{ij+3} = f_7,$$

$$B_{ij+4} = 0, B_{ij+5} = f_8, B_{ij+6} = 0, B_{ij+7} = f_9,$$

$$B_{ij+8} = 0, B_{ij+9} = f_{10},$$

$$i = 6(2)2N - 2, j = i - 5$$

$$B_{2N-1, 2N-5} = f_1, \quad B_{2N-1, 2N-4} = 0,$$

$$\begin{aligned}
B_{2N-1,2N-3} &= \frac{(2c_1b_1)f5}{c_1b_2 - c_2b_1} + f2, \quad B_{2N-1,2N-2} = 0, \\
B_{2N-1,2N-1} &= \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)f5}{c_1b_2 - c_2b_1} + f3, \quad B_{2N-1,2N} = 0, \\
B_{2N-1,2N+1} &= \frac{(c_3b_1)f5}{c_1b_2 - c_2b_1} + f4, \quad B_{2N-1,2N+2} = 0, \\
B_{2N,2N-5} &= 0, \quad B_{2N,2N-4} = f6, \\
B_{2N,2N-3} &= 0, \quad B_{2N,2N-2} = \frac{(2c_1b_1)f10}{c_1b_2 - c_2b_1} + f7, \\
B_{2N,2N-1} &= 0, \quad B_{2N,2N} = \frac{(c_2b_1 + c_1b_2)f10}{c_1b_2 - c_2b_1} + f8, \\
B_{2N,2N+1} &= 0, \quad B_{N-2N} = \frac{(c_3b_1)f10}{c_1b_2 - c_2b_1} + f9, \\
B_{2N+1,2N-3} &= \frac{(c_1b_2 + c_2b_1)f5}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{2b_1c_1}{c_1b_2 - c_2b_1}f4 + f1, \\
B_{2N+1,2N-2} &= 0, \\
B_{2N+1,2N-1} &= \frac{(2c_2b_2)f5}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{(c_1b_2 + c_2b_1)}{c_1b_2 - c_2b_1}f4 + f2, \\
B_{2N+1,2N} &= 0, \\
B_{2N+1,2N+1} &= \frac{(2c_3b_2)f5}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{(c_3b_1)}{c_1b_2 - c_2b_1}f4 + f3, \\
B_{2N+2,2N-3} &= 0, \\
B_{2N+2,2N-2} &= \frac{(c_1b_2 + c_2b_1)f10}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{2b_1c_1}{c_1b_2 - c_2b_1}f9 + f6, \\
B_{2N+2,2N-1} &= 0, \\
B_{2N+2,2N} &= \frac{(2c_2b_2)f10}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{(c_1b_2 + c_2b_1)}{c_1b_2 - c_2b_1}f9 + f7, \\
B_{2N+2,2N+1} &= 0, \\
B_{2N+2,2N+2} &= \frac{c_3b_2f10}{c_2b_1 - c_1b_2} + \frac{(c_3b_1)}{c_1b_2 - c_2b_1}f9 + f8,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_1 = & -m1 \left( \frac{b_2 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_2 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& - m2 \left( \frac{b_2 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_2 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& - m3 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& - m4 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f1 \left( \frac{b_2 U_{xx}^n(x_0, t) - c_2 U_x^n(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + f2 \left( \frac{b_2 V_{xx}^n(x_0, t) - c_2 V_x^n(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_2 = & -m11 \left( \frac{b_2 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_2 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& - m12 \left( \frac{b_2 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_2 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& - m13 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& - m14 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f6 \left( \frac{b_2 V_{xx}^n(x_0, t) - c_2 V_x^n(x_0, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
& + f7 \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_0, t) - c_1 V_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_3 = & -m1 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& - m2 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f1 \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_0, t) - c_1 U_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_4 = & -m11 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& - m12 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_0, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
& + f6 \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_0, t) - c_1 V_x^n(x_0, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$C_i = 0, \quad i = 5(1)2N - 2$$



$$\begin{aligned}
C_{2N-1} &= -m9 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad - m10 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad + f5 \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_N, t) - c_1 U_x^n(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2N} &= -m19 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad - m20 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad + f10 \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_N, t) - c_1 V_x^n(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2N+1} &= -m7 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad - m8 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad - m9 \left( \frac{b_2 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_2 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
&\quad - m10 \left( \frac{b_2 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_2 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
&\quad + f4 \left( \frac{b_1 U_{xx}^n(x_N, t) - c_1 U_x^n(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad + f5 \left( \frac{b_2 U_{xx}^n(x_N, t) - c_2 U_x^n(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
C_{2N+2} &= -m17 \left( \frac{b_1 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad - m18 \left( \frac{b_1 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_1 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad - m19 \left( \frac{b_2 U_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_2 U_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
&\quad - m20 \left( \frac{b_2 V_{xx}^{n+1}(x_N, t) - c_2 V_x^{n+1}(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right) \\
&\quad + f9 \left( \frac{b_1 V_{xx}^n(x_N, t) - c_1 V_x^n(x_N, t)}{(c_2 b_1 - c_1 b_2)} \right) \\
&\quad + f10 \left( \frac{b_2 V_{xx}^n(x_N, t) - c_2 V_x^n(x_N, t)}{(c_1 b_2 - c_2 b_1)} \right)
\end{aligned}$$

$$X = [\delta_0, \sigma_0, \delta_1, \sigma_1, \dots, \delta_{N-1}, \sigma_{N-1}, \delta_N, \sigma_N]^T$$

biçimindedir. Böylece  $(2N+2) \times (2N+2)$  tipinde çözülebilir denklem sistemi elde edilir. (4.2.3) ile verilen sistemden  $\delta^{n+1}$  ve  $\sigma^{n+1}$  parametrelerinin hesaplanabilmesi için öncelikle  $\delta^0$  ve  $\sigma^0$  parametrelerinin hesaplanması gerekir. Bu  $\delta^0$  ve  $\sigma^0$  parametrelerinin hesaplanması (4.1.11) ve (4.1.12) ile verilen ve LİN-1'de KNTBKY'inde ayrıntılı bir biçimde anlatılan sistemlerin çözülmesiyle kolay bir şekilde elde edilir.

### 4.2.3 Nümerik sonuçlar

Bu kısımda, ikili Burgers denklemine, denklemdeki lineer olmayan terimler yerine LİN-2 lineerleştirme tekniği kullanılarak KBTBKY ve KNTBKY kullanarak oluşturduğumuz sistemlerin üç model probleme uygulanmasıyla elde edilen nümerik sonuçların mevcut tam çözümle ve/veya literatürdeki diğer çalışmalardaki sonuçlarla karşılaştırılması ile hata normları çizelgeler halinde verildi.

#### 4.2.3.1 Problem 1

Problem 1 için  $[-\pi, \pi]$  aralığında yapılan hesaplamalarda: Çizelge 4.10'da  $\Delta t = 0.01$  ve farklı  $N$  konum adım uzunlukları için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları gösterildi. Bu çizelgeden  $N$  bölüntü sayısı arttıkça yani konum adım uzunluğu azaldıkça her iki yöntem ile elde edilen hata normlarında azalma olduğu görülmektedir.  $N = 100$  ve zaman adım uzunluğunun  $\Delta t = 0.01, 0.005$  ve  $0.001$  farklı değerleri için KBTBKY ve KNTBKY ile elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları Çizelge 4.11'de verildi. Çizelgeden  $\Delta t$  zaman adım uzunluğunun azalan değerleri için KBTBKY ile elde edilen hata normlarında önemli bir değişiklik olmadığı ancak KNTBKY ile elde edilen hata normlarında ise önemli ölçüde azalma olduğu açıktır. Çizelge 4.12'de bölüntü sayısı  $N = 50$  ve  $\Delta t = 0.01$  için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile elde edilen  $L_\infty$  hata normları Ref. [30, 34, 37, 40]'daki sonuçlarla karşılaştırıldı. Çizelgeden KBTBKY ile elde edilen sonuçların Ref. [34, 37, 40]'da verilen sonuçlarla uyumlu veya yakın olduğu ancak Ref. [30] ile verilen ve Galerkin sonlu eleman yöntemi kullanılarak elde edilen sonuçlardan az da olsa daha büyük hata normları elde edildiği, KNTBKY ile elde edilen sonuçların ise çizelgede verilen tüm çalışmalardaki sonuçlardan daha iyi sonuçlar verdiği anlaşılmaktadır. Problem 1'in  $N = 200$  ve  $400$ ,  $\Delta t = 0.001$  için elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının Ref. [26, 30]'da verilen sonuçlarla karşılaştırılması Çizelge 4.13'te verildi. KBTBKY ile elde edilen hata normlarının Ref. [26]'daki

**Çizelge 4.10 :** Problem 1'in  $\Delta t = 0.01$ ,  $N = 50, 100$  ve  $200$  için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları.

KBTBKY						
$t$	$N = 50$		$N = 100$		$N = 200$	
	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	1.22694e-04	1.10799e-04	3.00195e-05	2.71628e-05	6.87807e-06	6.22353e-06
0.5	6.13619e-04	3.71445e-04	1.50107e-04	9.10443e-05	3.43908e-05	2.08591e-05
1.0	1.22762e-03	4.50723e-04	3.00236e-04	1.10451e-04	6.87828e-05	2.53038e-05
1.5	1.84199e-03	4.10192e-04	4.50388e-04	1.00495e-04	1.03176e-04	2.30217e-05
2.0	2.45674e-03	3.31827e-04	6.00562e-04	8.12772e-05	1.37570e-04	1.86181e-05
2.5	3.07186e-03	2.51656e-04	7.50759e-04	6.16260e-05	1.71966e-04	1.41158e-05
3.0	3.68737e-03	1.83221e-04	9.00978e-04	4.48570e-05	2.06363e-04	1.02742e-05
KNTBKY						
0.1	1.00394e-06	9.07529e-07	8.43609e-07	7.63698e-07	8.33815e-07	7.54645e-07
0.5	5.00073e-06	3.03764e-06	4.21016e-06	2.55768e-06	4.16519e-06	2.52833e-06
1.0	9.95481e-06	3.67096e-06	8.40074e-06	3.09647e-06	8.32072e-06	3.06399e-06
1.5	1.48628e-05	3.32544e-06	1.25719e-05	2.81095e-06	1.24666e-05	2.78454e-06
2.0	1.97251e-05	2.67730e-06	1.67237e-05	2.26810e-06	1.66029e-05	2.24934e-06
2.5	2.45423e-05	2.02065e-06	2.08562e-05	1.71566e-06	2.07296e-05	1.70342e-06
3.0	2.93146e-05	1.46401e-06	2.49695e-05	1.24586e-06	2.48467e-05	1.23839e-06

**Çizelge 4.11 :** Problem 1'in  $N = 100$ ,  $\Delta t = 0.01, 0.005$  ve  $0.001$  için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları.

KBTBKY						
$t$	$\Delta t = 0.01$		$\Delta t = 0.005$		$\Delta t = 0.001$	
	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$
0.1	3.00195e-05	2.71628e-05	3.06440e-05	2.77278e-05	3.08438e-05	2.79086e-05
0.5	1.50107e-04	9.10443e-05	1.53229e-04	9.29383e-05	1.54229e-04	9.35443e-05
1.0	3.00236e-04	1.10451e-04	3.06482e-04	1.12748e-04	3.08481e-04	1.13484e-04
1.5	4.50388e-04	1.00495e-04	4.59758e-04	1.02586e-04	4.62757e-04	1.03255e-04
2.0	6.00562e-04	8.12772e-05	6.13058e-04	8.29684e-05	6.17057e-04	8.35096e-05
2.5	7.50759e-04	6.16260e-05	7.66381e-04	6.29084e-05	7.71380e-04	6.33188e-05
3.0	9.00978e-04	4.48570e-05	9.19728e-04	4.57906e-05	9.25728e-04	4.60893e-05
KNTBKY						
0.1	8.43609e-07	7.63698e-07	2.18900e-07	1.98165e-07	1.89960e-08	1.71967e-08
0.5	4.21016e-06	2.55768e-06	1.09245e-06	6.63669e-07	9.48025e-08	5.75928e-08
1.0	8.40074e-06	3.09647e-06	2.17983e-06	8.03476e-07	1.89165e-07	6.97252e-08
1.5	1.25719e-05	2.81095e-06	3.26217e-06	7.29389e-07	2.83089e-07	6.32960e-08
2.0	1.67237e-05	2.26810e-06	4.33949e-06	5.88530e-07	3.76579e-07	5.10724e-08
2.5	2.08562e-05	1.71566e-06	5.41181e-06	4.45185e-07	4.69634e-07	3.86329e-08
3.0	2.49695e-05	1.24586e-06	6.47916e-06	3.23280e-07	5.62259e-07	2.80541e-08

sonuçlarla uyumlu ancak Ref. [30]'daki hata normlarından daha büyük olduğu görülmektedir. Ayrıca çizelgeden KNTBKY ile elde edilen hata normlarının her iki çalışmadaki sonuçlardan da çok daha iyi olduğu açıktır.

**Çizelge 4.12 :** Problem 1'in  $\Delta t = 0.01$  ve  $N = 50$  için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan  $L_\infty$  hata normlarının Ref. [30, 34, 37, 40]'daki sonuçlarla karşılaştırılması.

$t$	KBTBKY	KNTBKY	[30]	[34]	[37]	[40]
0.5	$3.739338645 \times 10^{-4}$	$3.037638625 \times 10^{-6}$	$2.2662 \times 10^{-5}$	$1.1030 \times 10^{-4}$	$1.51688 \times 10^{-4}$	$7.9881 \times 10^{-4}$
1.0	$4.537448100 \times 10^{-4}$	$3.670955626 \times 10^{-6}$	$1.4617 \times 10^{-5}$	$1.3368 \times 10^{-4}$	$1.83970 \times 10^{-4}$	$9.6837 \times 10^{-4}$
2.0	$3.340530657 \times 10^{-4}$	$2.677302640 \times 10^{-6}$	$7.3805 \times 10^{-6}$	$9.8182 \times 10^{-5}$	$1.35250 \times 10^{-4}$	$7.1154 \times 10^{-4}$
3.0	$1.844508121 \times 10^{-4}$	$1.464007635 \times 10^{-6}$	$4.0272 \times 10^{-6}$	$1.0298 \times 10^{-5}$	$7.46014 \times 10^{-5}$	$3.9213 \times 10^{-4}$

#### 4.2.3.2 Problem 2

Problem 2 için  $-10 \leq x \leq 10$  aralığında yapılan hesaplamalarda: Çizelge 4.14 ve Çizelge 4.15'te zaman adımı uzunluğu  $\Delta t = 0.01$ ,  $k_2 = 0.1$  ve  $k_3 = 0.3$  için farklı  $t$  zamanlarında  $N$  bölüntü sayısının farklı değerleri için sırasıyla KBTBKY ve KNTBKY ile  $U_N$  ve  $V_N$  için elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları sunuldu. Çizelge 4.14'den bölüntü sayısı  $N = 50$ 'den  $N = 100$ 'e artırıldığında KBTBKY ile elde edilen hata normlarında önemli bir düşüşün olduğu ancak  $N = 200$  alındığında ise önemli bir değişiklik olmadığı görülmektedir. Çizelge 4.15'den ise bölüntü sayısının artmasıyla KNTBKY ile elde edilen hata normlarında az da olsa azalmanın olduğu açıktır. Çizelge 4.16'da  $N = 100$  ve  $\Delta t = 0.001$  için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile elde edilen hata normları Ref. [24–26, 30]'daki verilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Çizelgeden her iki yöntemle elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının karşılaştırılan diğer çalışmalardaki sonuçlarla uyumlu veya yakın olduğu görülmektedir.

**Çizelge 4.13 :** Problem 1'in  $\Delta t = 0.001$ ,  $N = 200$  ve 400 için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının Ref. [26] ve Ref. [30] 'daki sonuçlarla karşılaştırılması.

$N$	$t$	KBTBKY			KNTBKY			[30]		
		$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	
200	0.1	$7.70289 \times 10^{-6}$	$6.96986 \times 10^{-6}$	$8.99737 \times 10^{-9}$	$8.14308 \times 10^{-9}$	$8.21 \times 10^{-6}$	$7.45 \times 10^{-6}$	$0.17 \times 10^{-6}$	$0.52 \times 10^{-6}$	
	0.5	$3.85150 \times 10^{-5}$	$2.33605 \times 10^{-5}$	$4.49450 \times 10^{-8}$	$2.72822 \times 10^{-8}$	$2.49 \times 10^{-5}$	$4.10 \times 10^{-5}$	$0.27 \times 10^{-6}$	$0.36 \times 10^{-6}$	
	1.0	$7.70316 \times 10^{-5}$	$2.83383 \times 10^{-5}$	$8.97860 \times 10^{-8}$	$3.30625 \times 10^{-8}$	$3.00 \times 10^{-5}$	$8.21 \times 10^{-5}$	$0.36 \times 10^{-6}$	$0.22 \times 10^{-6}$	
400	0.1	$1.919361 \times 10^{-6}$	$1.736710 \times 10^{-6}$	$8.37395 \times 10^{-9}$	$7.57795 \times 10^{-9}$	$2.05 \times 10^{-6}$	$1.86 \times 10^{-6}$	$0.07 \times 10^{-6}$	$0.14 \times 10^{-6}$	
	0.5	$9.59684 \times 10^{-6}$	$5.82078 \times 10^{-6}$	$4.18503 \times 10^{-8}$	$2.53935 \times 10^{-8}$	$1.02 \times 10^{-5}$	$6.22 \times 10^{-6}$	$0.16 \times 10^{-6}$	$0.14 \times 10^{-6}$	
	1.0	$1.91937 \times 10^{-5}$	$7.06099 \times 10^{-6}$	$8.36523 \times 10^{-8}$	$3.07888 \times 10^{-8}$	$2.04 \times 10^{-5}$	$7.56 \times 10^{-6}$	$0.15 \times 10^{-6}$	$0.10 \times 10^{-6}$	

**Çizelge 4.14 :** Problem 2'nin  $\Delta t = 0.01$ ,  $k_2 = 0.1$ ,  $k_3 = 0.3$ ,  $N = 50, 100$  ve  $200$  için farklı zamanlarda KBTBKY ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları.

$N$	$t$	$U_N$		$V_N$	
		$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$
50	0.1	5.97526e-04	3.86266e-05	6.33190e-04	2.35910e-05
	0.5	2.91099e-03	1.85434e-04	3.07920e-03	1.11897e-04
	1.0	5.70530e-03	3.62579e-04	6.02662e-03	2.17003e-04
	1.5	8.42034e-03	5.34578e-04	8.88482e-03	3.18510e-04
	2.0	1.10692e-02	7.03171e-04	1.16687e-02	4.16981e-04
	2.5	1.36594e-02	8.68389e-04	1.43871e-02	5.12931e-04
	3.0	1.61961e-02	1.03061e-03	1.70457e-02	6.06523e-04
100	0.1	4.56641e-05	3.12527e-06	8.75236e-05	2.51873e-06
	0.5	2.21653e-04	1.47077e-05	4.26461e-04	1.24780e-05
	1.0	4.33536e-04	2.83174e-05	8.35790e-04	2.47493e-05
	1.5	6.39172e-04	4.13497e-05	1.23352e-03	3.68680e-05
	2.0	8.39790e-04	5.39740e-05	1.62159e-03	4.88543e-05
	2.5	1.03609e-03	6.62837e-05	2.00115e-03	6.07345e-05
	3.0	1.22854e-03	7.83266e-05	2.37295e-03	7.25202e-05
200	0.1	9.23623e-05	5.60392e-06	6.14444e-05	2.86600e-06
	0.5	4.52137e-04	2.78123e-05	2.95026e-04	1.35619e-05
	1.0	8.89291e-04	5.51779e-05	5.71812e-04	2.60304e-05
	1.5	1.31624e-03	8.21702e-05	8.36813e-04	3.78274e-05
	2.0	1.73468e-03	1.08829e-04	1.09239e-03	4.91012e-05
	2.5	2.14560e-03	1.35189e-04	1.33994e-03	5.99370e-05
	3.0	2.54963e-03	1.61272e-04	1.58041e-03	7.03972e-05

**Çizelge 4.15 :** Problem 2'nin  $\Delta t = 0.01$ ,  $k_2 = 0.1$ ,  $k_3 = 0.3$ ,  $N = 50, 100$  ve  $200$  için farklı zamanlarda KNTBKY ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları.

$N$	$t$	$U_N$		$V_N$	
		$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$
50	0.1	1.48895e-04	9.34163e-06	1.14446e-04	5.14154e-06
	0.5	7.28643e-04	4.57115e-05	5.54648e-04	2.40128e-05
	1.0	1.43241e-03	9.03074e-05	1.08236e-03	4.62961e-05
	1.5	2.11933e-03	1.34151e-04	1.59252e-03	6.75837e-05
	2.0	2.79229e-03	1.77401e-04	2.08857e-03	8.80142e-05
	2.5	3.45297e-03	2.20094e-04	2.57250e-03	1.07857e-04
	3.0	4.10248e-03	2.62284e-04	3.04570e-03	1.27143e-04
100	0.1	1.38307e-04	8.53888e-06	1.04247e-04	4.60853e-06
	0.5	6.76609e-04	4.20932e-05	5.04419e-04	2.19321e-05
	1.0	1.33016e-03	8.32167e-05	9.83567e-04	4.22801e-05
	1.5	1.96816e-03	1.23671e-04	1.44634e-03	6.16650e-05
	2.0	2.59327e-03	1.63559e-04	1.89598e-03	8.03095e-05
	2.5	3.20701e-03	2.02959e-04	2.33435e-03	9.83272e-05
	3.0	3.81042e-03	2.41927e-04	2.76274e-03	1.15795e-04
200	0.1	1.38130e-04	8.49565e-06	1.04070e-04	4.58819e-06
	0.5	6.75708e-04	4.18877e-05	5.03469e-04	2.18253e-05
	1.0	1.32843e-03	8.28153e-05	9.81669e-04	4.20767e-05
	1.5	1.96565e-03	1.23073e-04	1.44352e-03	6.13723e-05
	2.0	2.59003e-03	1.62779e-04	1.89224e-03	7.99214e-05
	2.5	3.20310e-03	2.01998e-04	2.32972e-03	9.78640e-05
	3.0	3.80588e-03	2.40776e-04	2.75723e-03	1.15272e-04

### 4.2.3.3 Problem 3

Problem 3 için tüm hesaplamalar  $0 \leq x \leq 1$  aralığında  $\Delta t = 0.001$  ve  $N = 50$  için yapıldı. Çizelge 4.17'de  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = k_3 = 10$  ve  $k_2 = k_3 = 100$  için farklı konum ve zamanlarda  $U_N$  ve  $V_N$  değerleri verildi. Çizelgeden, KBTBKY ve KNTBKY ile elde edilen  $U_N$  ve  $V_N$  çözümlerinin farklı  $t$  zamanları için verilen  $x$  noktasal değerlerinin birbirine oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Problem 3'ün  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = k_3 = 10$  ve  $k_2 = k_3 = 100$  için farklı zamanlarda  $U_N$  ve  $V_N$  çözümlerinin maksimum değerleri ile bunları aldığı  $x$  noktaları ve Ref. [30]'daki sonuçların karşılaştırılması Çizelge 4.18'de sunuldu. Çizelgeden  $U_N$  ve  $V_N$  nin hesaplanan maksimum değerlerinin Ref. [30] dakilerle uyumlu olduğu ve bu maksimum değerleri hemen hemen aynı  $x$  noktalarında aldıkları açıktır.

**Çizelge 4.16 :** Problem 2'nin  $\Delta t = 0.001$ ,  $N = 100$  için farklı zamanlarda KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarının Ref. [24–26, 30]'daki sonuçlarla karşılaştırılması.

			[24]	[25]	[26]	[30]		
			KBTBKY		KNTBKY			
$t$	$k_2$	$k_3$	$L_2$					
$U_N(x, t)$	0.5	0.1	2.21653e-04	6.76609e-04	1.44e-03	3.245e-05	6.736e-4	6.783e-4
		0.3	2.27858e-04	7.45408e-04	6.68e-04	2.733e-05	7.326e-4	7.609e-4
	1	0.1	4.33536e-04	1.33016e-03	1.27e-03	2.405e-05	1.325e-3	1.334e-3
		0.3	4.33457e-04	1.46899e-03	1.30e-03	2.832e-05	1.452e-3	1.500e-3
$V_N(x, t)$	0.5	0.1	4.26461e-04	5.04419e-04	5.42e-04	2.746e-05	9.057e-4	5.101e-4
		0.3	4.70325e-04	1.32197e-03	1.20e-03	2.454e-04	1.591e-3	1.327e-3
	1	0.1	8.35790e-04	9.83567e-04	1.29e-03	3.745e-05	1.251e-3	0.995e-3
		0.3	9.26781e-04	2.60667e-03	2.35e-03	4.525e-04	2.250e-3	2.617e-3
			$L_\infty$					
$U_N(x, t)$	0.5	0.1	2.21653e-04	6.76609e-04	4.38e-05	9.619e-05	4.167e-05	4.208e-05
		0.3	2.27858e-04	7.45408e-04	4.58e-05	4.310e-05	4.590e-05	4.703e-05
	1	0.1	4.33536e-04	1.33016e-03	8.66e-05	1.153e-03	8.258e-05	8.320e-05
		0.3	4.33457e-04	1.46899e-03	9.16e-05	1.268e-03	9.182e-05	9.409e-05
$V_N(x, t)$	0.5	0.1	4.26461e-04	5.04419e-04	4.99e-05	3.332e-04	1.480e-04	0.221e-04
		0.3	4.70325e-04	1.32197e-03	1.81e-04	1.148e-03	5.729e-04	1.818e-04
	1	0.1	8.35790e-04	9.83567e-04	9.92e-05	1.162e-03	4.770e-05	4.255e-05
		0.3	9.26781e-04	2.60667e-03	3.62e-04	1.638e-03	3.617e-04	3.636e-04



**Çizelge 4.17 :** Problem 3'ün  $N = 50$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $k_2 = k_3 = 10$  ve  $k_2 = k_3 = 100$  için farklı zamanlarda KBTBK Y ve KNTBK Y ile hesaplanan  $U_N$  ve  $V_N$  değerleri.

$x$	$t$	$k_2 = k_3 = 10$				$k_2 = k_3 = 100$			
		KBTBK Y	$V_N$	$U_N$	KNTBK Y	KBTBK Y	$V_N$	$U_N$	KNTBK Y
0.2	0.1	0.0740406931	0.0482456705	0.0717412198	0.0473640339	0.0301731808	0.0046267460	0.0287970941	0.0046717178
	0.2	0.0271731133	0.0236509444	0.0260468411	0.0227137887	0.0071359087	0.0039054082	0.0068492611	0.0037925842
	0.3	0.0108117262	0.0096040043	0.0101702862	0.0090393958	0.0028720390	0.0017871233	0.0027142896	0.0016974221
	0.4	0.0041483594	0.0036981552	0.0038275348	0.0034134006	0.0011246537	0.0007222216	0.0010423133	0.0006716748
0.4	0.1	0.1264172612	0.1012344660	0.1241872041	0.0998760025	0.0412920242	0.0175254051	0.0403169544	0.0173750511
	0.2	0.0470585788	0.0416269659	0.0455368522	0.0403136610	0.0126500885	0.0077531920	0.0122764484	0.0075636728
	0.3	0.0180088122	0.0160504165	0.0171075043	0.0152526102	0.0048836090	0.0031325616	0.0046583061	0.0029977531
	0.4	0.0067875377	0.0060576661	0.0063286633	0.0056497473	0.0018565852	0.0012052354	0.0017379990	0.0011313165
0.6	0.1	0.1443420311	0.1408612308	0.1420715133	0.1382524686	0.0413794116	0.0397854833	0.0409377452	0.0389428750
	0.2	0.0516733536	0.0465727232	0.0498810079	0.0444010398	0.0147604366	0.0102708431	0.0142969450	0.0099420341
	0.3	0.0186916475	0.0167274980	0.0177250651	0.0158643272	0.0052244642	0.0034786420	0.0049699009	0.0033133933
	0.4	0.0068831543	0.0061514906	0.0064119807	0.0057314904	0.0019048483	0.0012532385	0.0017804665	0.0011735397
0.8	0.1	0.1076426616	0.1172155192	0.1046263739	0.1131778886	0.0394428988	0.0498505358	0.0386956325	0.0480665950
	0.2	0.0347645313	0.0317777220	0.0330871558	0.0302109715	0.0108474983	0.0082755825	0.0103370871	0.0078510286
	0.3	0.0119190665	0.0107020152	0.0111577299	0.0100174985	0.0034295947	0.0023531171	0.0032164810	0.0022060549
	0.4	0.0043031185	0.0038500142	0.0039605198	0.0035438731	0.0012028607	0.0008000076	0.0011101720	0.0007391433

**Çizelge 4.18 :** Problem 3'ün  $\Delta t = 0.001$ ,  $k_2 = k_3 = 10$  ve  $k_2 = k_3 = 100$  için KBTBKY ve KNTBKY ile hesaplanan maksimum  $U_N$  ve  $V_N$  değerlerinin Ref. [30]'daki sonuçlarla karşılaştırılması.

	$t$	KBTBKY		KNTBKY		[30]	
		$U_{\max}^N$	$x$	$U_{\max}^N$	$x$	$U_{\max}^N$	$x$
$k_2 = k_3 = 10$	0.1	0.1445158820	0.58	0.1422799981	0.58	0.14348	0.58
	0.2	0.0523625352	0.54	0.0506275878	0.54	0.05252	0.54
	0.3	0.0193225256	0.52	0.0183533217	0.52	0.01945	0.52
	0.4	0.0071867412	0.50	0.0067042649	0.50	0.00724	0.50
$k_2 = k_3 = 100$	0.1	0.0416862849	0.46	0.0409850452	0.50	0.04108	0.44
	0.2	0.0147706343	0.58	0.0143165413	0.58	0.01475	0.58
	0.3	0.0053377348	0.54	0.0050862087	0.54	0.00536	0.54
	0.4	0.0019783531	0.52	0.0018520234	0.52	0.00199	0.52
$k_2 = k_3 = 10$		$V_{\max}^N$		$V_{\max}^N$		$V_{\max}^N$	
	0.1	0.1431711013	0.66	0.1402198122	0.64	0.14238	0.66
	0.2	0.0470127453	0.56	0.0454307790	0.56	0.04723	0.56
	0.3	0.0172638480	0.52	0.0164013969	0.52	0.01741	0.52
$k_2 = k_3 = 100$	0.1	0.0507466956	0.76	0.0491751509	0.76	0.04994	0.76
	0.2	0.0103570010	0.64	0.0099985966	0.64	0.01049	0.64
	0.3	0.0035175568	0.56	0.0033557953	0.56	0.00360	0.56
	0.4	0.0012946724	0.52	0.0012146396	0.52	0.00133	0.52

## 5. SONUÇ

Bu çalışmada kübik ve kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile ikili Burgers denkleminin nümerik çözümleri sunuldu. Denklemin çözümlerini elde etmek için denklemdaki lineer olmayan terimler yerine LİN-1 Lineerleştirme tekniğinde  $U$  ve  $V$  yerine sırasıyla  $U = Z_i$  ve  $V = G_i$  olarak alındı. LİN-2 lineerleştirme tekniğinde ise lineer olmayan terimler yerine Rubin-Graves tipi lineerleştirme kullanıldı. Her iki lineerleştirme tekniği uygulandıktan sonra hem kübik hem de kuintik B-spline kollokasyon yöntemi ile elde edilen sistemler ile üç model problem çözüldü. Bölüntü sayısı  $N$  ve zaman adım uzunluğu  $\Delta t$  nin farklı değerleri için elde edilen sonuçlar çizelgeler halinde verildi. Aynı zamanda literatürdeki benzer çalışmalardan elde edilen sonuçlar ile karşılaştırmalar çizelgeler halinde sunuldu. Çizelgelerden beklendiği gibi uygulanan kübik ve kuintik trigonometrik kollokasyon sonlu eleman yönteminin yeterince iyi sonuçlar verdiği anlaşılmaktadır.

Şimdi LİN-1 ve LİN-2 lineerleştirme teknikleri için kübik ve kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon yöntemleri ile her bir problem için elde edilen sonuçları kendi içerisinde karşılaştıralım:

**Çizelge 5.1 :** Problem 1'in  $k_1 = -2$ ,  $k_2 = k_3 = 1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $N = 50, 100$  ve  $200$  değerleri için  $t = 3.0$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları.

	$N = 50$		$N = 200$	
	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$
LİN-1-KBTBKY	$3.687368608202e-03$	$1.832210133406e-04$	$2.063626743214e-04$	$1.027419257515e-05$
LİN-2-KBTBKY	$3.687368608157e-03$	$1.832210133382e-04$	$2.063626746183e-04$	$1.027419258983e-05$
LİN-1-KNTBKY	$2.931456119347e-05$	$1.464007634948e-06$	$2.484670228531e-05$	$1.238393122591e-06$
LİN-2-KNTBKY	$2.931456119300e-05$	$1.464007634691e-06$	$2.484670228572e-05$	$1.238393122653e-06$

Problem 1'in  $k_1 = -2$ ,  $k_2 = k_3 = 1$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $N = 50, 100$  ve  $200$  değerleri için  $t = 3.0$  zamanında LİN-1 ve LİN-2 lineerleştirmeleri kullanılarak KBTBKY ve KNTBKY ile elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları Çizelge 5.1'de verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere hem LİN-1 hem de LİN-2 lineerleştirme tekniği için KNTBKY ile elde edilen sonuçların KBTBKY ile elde edilen sonuçlara göre daha iyi olduğu anlaşılmaktadır.

Problem 1'in  $k_1 = -2$ ,  $k_2 = k_3 = 1$ ,  $N = 100$ ,  $\Delta t = 0.01, 0.005, 0.001$  değerleri için  $t = 3.0$  zamanında LİN-1 ve LİN-2 lineerleştirmeleri kullanılarak KBTBKY ve KNTBKY ile elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları Çizelge 5.2'de verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere zaman adım uzunluğunun azalan bütün değerleri için hem LİN-1 hem de LİN-2 lineerleştirme tekniği için KNTBKY ile elde edilen sonuçların KBTBKY ile elde edilen sonuçlara göre daha iyi olduğu açıkça görülmektedir. Her iki çizelgeden de LİN-1 ve LİN-2 için KBTBKY ile elde edilen

**Çizelge 5.2 :** Problem 1'in  $k1 = -2, k2 = k3 = 1, N = 100, \Delta t = 0.01, 0.05, 0.001$  değerleri için  $t = 3.0$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları

	$\Delta t = 0.01$		$\Delta t = 0.005$		$\Delta t = 0.001$	
	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$
LIN-1-KBTBKY	9.0097792153e-04	4.4857049377e-05	9.1972797742e-04	4.5790559692e-05	9.2572798021e-04	4.6089282241e-05
LIN-2-KBTBKY	9.0097792147e-04	4.4857049374e-05	9.1972797747e-04	4.5790559694e-05	9.2572798027e-04	4.6089282244e-05
LIN-1-KNTBKY	2.4969502199e-05	1.2458634783e-06	6.4791552516e-06	3.2328009391e-07	5.6225851315e-07	2.8054124183e-08
LIN-2-KNTBKY	2.4969502200e-05	1.2458634784e-06	6.4791552524e-06	3.2328009388e-07	5.6225851402e-07	2.8054124128e-08

hata normlarının kendi içerisinde, KNTBKY ile elde edilen hata normlarında kendi içerisinde birbirine çok yakın olduğu ve yeterince küçük olduğu açıktır.

**Çizelge 5.3 :** Problem 2'nin  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 0.1$ ,  $k_3 = 0.3$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $N = 50$ , 100 ve 200 değerleri için  $t = 3.0$  zamanında hesaplanan  $U_N$ 'in  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları.

	$N = 50$		$N = 100$		$N = 200$	
	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$
LİN-1-KBTBKY	$1.61963e-02$	$1.03062e-03$	$1.22850e-03$	$7.83245e-05$	$2.54973e-03$	$1.61277e-04$
LİN-2-KBTBKY	$1.61961e-02$	$1.03061e-03$	$1.22854e-03$	$7.83266e-05$	$2.54963e-03$	$1.61272e-04$
LİN-1-KNTBKY	$4.10259e-03$	$2.62290e-04$	$3.81053e-03$	$2.41934e-04$	$3.80599e-03$	$2.40782e-04$
LİN-2-KNTBKY	$4.10248e-03$	$2.62284e-04$	$3.81042e-03$	$2.41927e-04$	$3.80588e-03$	$2.40776e-04$

**Çizelge 5.4 :** Problem 2'nin  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 0.1$ ,  $k_3 = 0.3$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $N = 50$ , 100 ve 200 değerleri için  $t = 3.0$  zamanında hesaplanan  $V_N$ 'in  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları.

	$N = 50$		$N = 100$		$N = 200$	
	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$	$L_2$	$L_\infty$
LİN-1-KBTBKY	$1.70459e-02$	$6.06530e-04$	$2.37286e-03$	$7.25176e-05$	$1.58055e-03$	$7.04021e-05$
LİN-2-KBTBKY	$1.70457e-02$	$6.06523e-04$	$2.37295e-03$	$7.25202e-05$	$1.58041e-03$	$7.03972e-05$
LİN-1-KNTBKY	$3.04587e-03$	$1.27149e-04$	$2.76291e-03$	$1.15801e-04$	$2.75740e-03$	$1.15278e-04$
LİN-2-KNTBKY	$3.04570e-03$	$1.27143e-04$	$2.76274e-03$	$1.15795e-04$	$2.75723e-03$	$1.15272e-04$

Problem 2'nin  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = 0.1$ ,  $k_3 = 0.3$ ,  $\Delta t = 0.01$ ,  $N = 50$ , 100, 200 değerleri için  $t = 3.0$  zamanında  $U$  ve  $V$  için hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları sırasıyla Çizelge 5.3 ve Çizelge 5.4'te verildi. Çizelgelerden görüldüğü üzere hem LİN-1 hem de LİN-2 kullanılarak elde edilen sonuçların kendi içinde uyumlu olduğu görülmektedir.

**Çizelge 5.5 :** Problem 3'ün  $k1 = 2$ ,  $k2 = k3 = 10$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $N = 50$  değerleri için  $x = 0.2$ ,  $0.4$ ,  $0.6$ ,  $0.8$  noktalarında  $t = 0.4$  zamanında hesaplanan  $U_N$  ve  $V_N$  çözümleri.

	$x = 0.2$		$x = 0.4$		$x = 0.6$		$x = 0.8$	
	$U_N$	$V_N$	$U_N$	$V_N$	$U_N$	$V_N$	$U_N$	$V_N$
LIN-1-KBTBK	0.0041578155	0.0037026999	0.0068027389	0.0060649083	0.0068982176	0.0061585800	0.0043123509	0.0038543110
LIN-2-KBTBK	0.0041483594	0.0036981552	0.0067875377	0.0060576661	0.0068831543	0.0061514906	0.0043031185	0.0038500142
LIN-1-KNTBK	0.0038363617	0.0034175562	0.0063430151	0.0056564446	0.0064262066	0.0057380484	0.0039691447	0.0035478054
LIN-2-KNTBK	0.0038275348	0.0034134006	0.0063286633	0.0056497473	0.0064119807	0.0057314904	0.0039605198	0.0035438731

**Çizelge 5.6 :** Problem 3'ün  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = k_3 = 10$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $N = 50$  değerleri için  $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  noktalarında  $t = 0.4$  zamanında hesaplanan  $U_N$  ve  $V_N$  çözümleri.

	$x = 0.2$		$x = 0.4$		$x = 0.6$		$x = 0.8$	
	$U_N$	$V_N$	$U_N$	$V_N$	$U_N$	$V_N$	$U_N$	$V_N$
LİN-1-KBTBK	0.0011277017	0.0007288635	0.0018617738	0.0012162418	0.0019103707	0.0012645824	0.0012064509	0.0008071976
LİN-2-KBTBK	0.0011246537	0.0007222216	0.0018565852	0.0012052354	0.0019048483	0.0012532385	0.0012028607	0.0008000076
LİN-1-KNTBK	0.0010453332	0.0006778649	0.0017431576	0.0011416652	0.0017859175	0.0011841840	0.0011136547	0.0007458013
LİN-2-KNTBK	0.0010423133	0.0006716748	0.0017379990	0.0011313165	0.0017804665	0.0011735397	0.0011101720	0.0007391433

Problem 3'ün  $k_1 = 2$ ,  $k_2 = k_3 = 10$ ,  $\Delta t = 0.001$ ,  $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$  değerleri için  $t = 0.4$  zamanındaki  $U_N$  ve  $V_N$  çözümleri Çizelge 5.5 ve Çizelge 5.6'da verildi. Çizelgelerden verilen  $x$

noktalarında LİN-1 ve LİN-2 için KBTBKY ve KNTBKY ile elde edilen  $U_N$  ve  $V_N$  çözümlerinin birbiriyle uyumlu olduğu görülmektedir.

Sonuç olarak, bu tez çalışması içerisinde, iki farklı lineerleştirme tekniği kullanılarak ikili Burgers denkleminin kübik ve kuintik trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi uygulandı. Bu bölümde verilen karşılaştırma çizelgelerinden her iki lineerleştirme içinde kuintik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile elde edilen sonuçların kübik B-spline kollokasyon sonlu eleman yöntemi ile elde edilen sonuçlara göre daha iyi olduğu açıktır. Bu çalışmada ikili Burgers denkleminin nümerik çözümlerinin elde edilmesi için kullanılan bu lineerleştirme teknikleri ile trigonometrik B-spline kollokasyon sonlu eleman yönteminin literatürde önemli yere sahip bazı diğer ikili denklemlerinin nümerik çözümlerinde de kullanılabileceği anlaşılmaktadır.



## KAYNAKLAR

- [1] **Zikanov, O.** (2010). *Essential computational fluid dynamics*, Wiley, Hoboken, N.J.
- [2] **Griebel, M.** (1998). *Numerical simulation in fluid dynamics: a practical introduction*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia.
- [3] **Blackledge, J., Evans, G. ve Yardley, P.** (1999). *Analytic Methods for Partial Differential Equations*, Springer London.
- [4] **Morton, K.W., Mayers, D.F. ve Morton K., W.** (2013). *Numerical Solution of Partial Differential Equations*, Cambridge University Press.
- [5] **Olver, P.J.** (2003). *Applied Mathematic*, 1–995.
- [6] **Schäfer, M.** (2006). *Computational Engineering - Intrduction to Numerical Methods*, Springer-Verlag GmbH.
- [7] **Sayma, A.** (2009). *Computational Fluid Dynamics*, Abdalnaser Sayma and Ventus Publishing ApS.
- [8] **Kreyszig, E.** (2006). *Advanced engineering mathematics*, John Wiley, Hoboken, NJ.
- [9] **Logan, D.L.** (2016). *A First Course in the Finite Elemenet Method*.
- [10] **Liu, G. ve Quek, S.**, (2014). *Computational Modeling, The Finite Element Method*, Elsevier, s.1–11.
- [11] **Nee, J. ve Duan, J.** (1998). Limit set of trajectories of the coupled viscous Burgers' equations, *Applied Mathematics Letters*, 11(1), 57–61.
- [12] **Esipov, S.E.** (1995). Coupled Burgers equation: A model of Polydispersive sedimentation, *Phys. Rev. E*, 3711–3718.
- [13] **Liu, G. ve Quek, S.S.** (2014). *The Finite Element Method. A Practical Course*, 1–433.
- [14] **Keskin, P.** (2010). Solitary dalga çözümlerine sahip bazı KTD'lere sonlu farklar yöntemlerinin uygulanması (Yüksek Lisans Tezi).
- [15] **YILMAZ, E.** (2012). Solitary Dalga Çözümlerine Sahip Bazı KTD'lere Sonlu Elemanlar Yöntemlerinin Uygulanması (Yüksek Lisans Tezi).
- [16] **Schoenberg, I.J.** (1945). Contributions to the Problem of Approximation of Equidistant Data by Analytic Functions-Part a.—on the Problem of Smoothing or Graduation. A First Class of Analytic Approximation Formulae.
- [17] **Keskin, P.** (2016). *RLW denkleminin trigonometrik B-spline çözümleri* (Doktora Tezi). Eskişehir Osmangazi Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- [18] **Hamid, N.N.A., Majid, A.A. ve Ahmad Izani Md. Ismail** (2010). Cubic Trigonometric B-Spline Applied To Linear Two-Point Boundary Value Problems Of Order Two, *International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, 4(10), 1377–1382.

- [19] **Abbas, M., Majid, A.A., Ismail, A.I.M. ve Rashid, A.** (2014). The application of cubic trigonometric B-spline to the numerical solution of the hyperbolic problems, *Applied Mathematics and Computation*, 239, 74–88.
- [20] **Walz, G.** (1997). Identities for trigonometric B-splines with an application to curve design, *BIT Numerical Mathematics*, 37(1), 189–201.
- [21] **KAYA, D.** (2000). An explicit Solution of Coupled Viscous Burgers' equation by the Decomposition Method, 675–680.
- [22] **Abdou, M. ve Soliman, A.** (2005). Variational iteration method for solving Burger's and coupled Burger's equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 181(2), 245–251.
- [23] **Dehghan, M., Hamidi, A. ve Shakourifar, M.** (2007). The solution of coupled Burgers' equations using Adomian–Pade technique, *Applied Mathematics and Computation*, 189(2), 1034–1047.
- [24] **Khater, A., Temsah, R. ve Hassan, M.** (2008). A Chebyshev spectral collocation method for solving Burgers'-type equations, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 222(2), 333–350.
- [25] **RASHID, A. ve ISMAIL, A.I.B.M.** (2009). A Fourier Pseudospectral Method for Solving Coupled Viscous Burgers Equations, *2009 Editorial Board of the Journal "Computational Methods in Applied Mathematics"*, 412–420.
- [26] **Mittal, R. ve Arora, G.** (2011). Numerical solution of the coupled viscous Burgers' equation, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 16(3), 1304–1313.
- [27] **Sadek, I. ve Kucuk, I.** (2011). A robust technique for solving optimal control of coupled Burgers' equations, *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 28(3), 239–250.
- [28] **Xianbiao Jia, Hong Li, Y.L. ve Fang, Z.** (2012). An H1-Galerkin mixed method for the coupled Burgers equation, *World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, 948–951.
- [29] **UÇAR, Y.** (2011). B-spline Sonlu Eleman Yöntemleri ile Coupled Diferansiyel Denklemlerin Nümerik Çözümleri.
- [30] **Kutluay, S. ve Ucar, Y.** (2013). Numerical solutions of the coupled Burgers' equation by the Galerkin quadratic B-spline finite element method, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 36(17), 2403–2415.
- [31] **Khyati R. Desai, V.H.P.** (2012). Solution of Burger's equation and coupled Burger's equations by Homotopy perturbation method, *International Journal of Engineering Research and Applications(IJERA)*, 2040.
- [32] **Vineet K. Srivastava, M.K.A. ve Tamsir, M.** (2013). A fully implicit Finite-difference solution to onedimensional Coupled Nonlinear Burgers' equations, *World Academy of Science, Engineering and Technology International Journal of Mathematical and Computational Sciences*, 682–687.

- [33] **Kumar, M. ve Pandit, S.** (2014). A composite numerical scheme for the numerical simulation of coupled Burgers' equation, *Computer Physics Communications*, 185(3), 809–817.
- [34] **Mittal, R.C. ve Tripathi, A.** (2014). A Collocation Method for Numerical Solutions of Coupled Burgers' Equations, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 15(5), 457–471.
- [35] **ul Islam, S., Haq, S. ve Uddin, M.** (2009). A meshfree interpolation method for the numerical solution of the coupled nonlinear partial differential equations, *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 33(3), 399–409.
- [36] **Abdullah, M., Yaseen, M. ve de la Sen, M.** (2020). Numerical simulation of the coupled viscous Burgers equation using the Hermite formula and cubic B-spline basis functions, *Physica Scripta*, 95(11), 115216.
- [37] **Mittal, R.C. ve Jiwari, R.** (2012). Differential Quadrature Method for Numerical Solution of Coupled Viscous Burgers' Equations, *International Journal for Computational Methods in Engineering Science and Mechanics*, 13(2), 88–92.
- [38] **Bhatt, H. ve Khaliq, A.** (2016). Fourth-order compact schemes for the numerical simulation of coupled Burgers' equation, *Computer Physics Communications*, 200, 117–138.
- [39] **Raslan, K.R., El-Danaf, T.S. ve Ali, K.K.** (2016). Collocation Method with Cubic Trigonometric B-spline Algorithm for Solving Coupled Burgers' Equations, *Far East Journal of Applied Mathematics*, 95(2), 109–123.
- [40] **Onarcan, A.T. ve Hepson, O.E.** (2018). Higher order trigonometric B-spline algorithms to the solution of coupled Burgers' equation, Author(s).
- [41] **Zhang, Y., Lin, J., Reutskiy, S., Sun, H. ve Feng, W.** (2020). The improved backward substitution method for the simulation of time-dependent nonlinear coupled Burgers' equations, *Results in Physics*, 18, 103231.
- [42] **Kapoor, M.** (2020). Exact solution of coupled 1D non-linear Burgers' equation by using Homotopy Perturbation Method (HPM): A review, *Journal of Physics Communications*, 4(9), 095017.
- [43] **Nazir, T., Abbas, M. ve Iqbal, M.K.** (2020). New cubic B-spline approximation technique for numerical solutions of coupled viscous Burgers equations, *Engineering Computations*, 38(1), 83–106.
- [44] **Soliman, A.** (2006). The modified extended tanh-function method for solving Burgers-type equations, *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 361(2), 394–404.
- [45] **Rubin, S.G. ve Graves, R.A.** (1975). Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics, *Washington: Nasa, TR R-436*.

## ÖZGEÇMİŞ

**Ad-Soyad** : Mehmet Kerem YİĞİT

### ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2010, Kocaeli Üniversitesi Mühendislik Fakültesi Bilgisayar Mühendisliği Bölümü
- **Lisans:** 2015, Kocaeli Üniversitesi Teknik Eğitim Fakültesi Bilgisayar Öğretmenliği Bölümü

### YÜKSEK LİSANS TEZİNDEN TÜRETİLEN ÇALIŞMALAR:

- **Uçar, Y., Yağmurlu, N.M., Yiğit M.K. (2021 June).** Numerical Solution of the Coupled Burgers Equation by Trigonometric B-spline Collocation Method, 5.th International Conference on Computational Mathematics and Engineering Sciences, CMES-2021, 08-10 June 2021, VAN-TURKEY (pp. 117-117)