

**T.C.  
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ROSENAU-KAWAHARA DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ  
ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**



**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Heval ÖZDEMİR EKİCİ**

**Matematik Ana Bilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY**

**AĞUSTOS 2021**

**T.C.  
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ROSENAU-KAWAHARA DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ  
ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA**



**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**Heval ÖZDEMİR EKİCİ  
(36183614021)**

**Matematik Ana Bilim Dalı**

**Tez Danışmanı: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY  
Eş Danışman: Doç. Dr. Berat KARAAĞAÇ**

**AĞUSTOS 2021**

## TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Yüksek lisans tez çalışmamı yöneten, engin tecrübe ve deneyimleriyle yüksek lisans tezimin hazırlanmasının her aşamasında desteğini esirgemeyen başta çok değerli sayın hocam Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY ve ikinci tez danışmanım sayın Doç. Dr. Berat KARAAĞAÇ olmak üzere tezimin her aşamasında destek olan, bilgi ve görüşlerini benimle paylaşan ayrıca nümerik şemaların programlarının yazılması ve çalıştırılmasında büyük katkılarda bulunan saygıdeğer hocalarım Doç. Dr. Yusuf UÇAR'a, Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU'ya ve Dr. Öğr. Üyesi Sibel ÖZER'e, tezin yazım aşamasında yardımlarını esirgemeyen saygıdeğer hocam Prof. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e ve diğer bölüm hocalarıma, eğitim-öğretim sürecim boyunca sabır ve sevgiyle her zaman yanımda olan AİLEME ve eşim Cihan EKİCİ'ye sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



## ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Rosenau-Kawahara Denkleminin Sayısal Çözümü Üzerine Bir Çalışma” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığıın bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Heval ÖZDEMİR EKİCİ



## İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	v
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	vi
ÖZET.....	vii
ABSTRACT.....	viii
<b>1. GİRİŞ.....</b>	<b>1</b>
1.1 Model Problemler.....	5
1.1.1 Problem 1.....	5
1.1.2 Problem 2.....	5
<b>2. ROSENAU-KAWAHARA DENKLEMİNİN KORUNUMLU SONLU FARK YÖN- TEMİ İLE ÇÖZÜMÜ.....</b>	<b>6</b>
2.1 Lineerleştirme-I (Lin-I).....	7
2.1.1 Kararlılık Analizi.....	13
2.2 Lineerleştirme -II (Lin-II).....	17
2.3 Lineerleştirme -III (Lin-III).....	20
2.4 Nümerik Sonuçlar.....	24
<b>3. KONUMA GÖRE PARÇALANMIŞ ROSENAU-KAWAHARA DENKLEMİNİN KORUNUMLU SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ.....</b>	<b>32</b>
3.1 Lineerleştirme-I (Lin-I).....	32
3.1.1 Kararlılık Analizi.....	37
3.2 Lineerleştirme - II (Lin-II).....	39
3.3 Lineerleştirme - III (Lin-III).....	43
3.4 Nümerik Sonuçlar.....	46
<b>4. SONUÇ VE ÖNERİLER.....</b>	<b>54</b>
<b>KAYNAKLAR.....</b>	<b>55</b>
<b>ÖZGEÇMİŞ.....</b>	<b>59</b>

## ÇİZELGELER DİZİNİ

<b>Çizelge 2.1</b> : Problem 1'in Lin-II ve Lin-III ile $h$ ve $k$ nın farklı değerleri için $T = 40$ 'da hesaplanan hata normları. ....	25
<b>Çizelge 2.2</b> : Problem 1'in Lin-II ile $h$ ve $k$ 'nın farklı değerleri için $T=10,20,30,40$ 'da hesaplanan hata normları ve doğruluk mertebeleri. ....	26
<b>Çizelge 2.3</b> : Problem 1'in Lin-III ile $h$ ve $k$ 'nın farklı değerleri için $T=10,20,30,40$ 'da hesaplanan hata normları ve doğruluk mertebeleri. ....	27
<b>Çizelge 2.4</b> : Problem 1'in Lin-I, Lin-II ve Lin-III ile in $h = k=0.1,0.05$ ve $0.025$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri .....	28
<b>Çizelge 2.5</b> : Problem 1'in Lin-I, Lin-II ve Lin-III ile farklı $T$ zamanlarında hesaplanan maksimum genlik değerleri ve konumları. ....	30
<b>Çizelge 3.1</b> : Problem 2'nin Lin-I, Lin-II ve Lin-III ile $h$ ve $k$ nın farklı değerleri için $T = 40$ 'da hesaplanan $L_2$ hata normları. ....	47
<b>Çizelge 3.2</b> : Problem 2'nin Lin-I, Lin-II ve Lin-III ile $h$ ve $k$ nın farklı değerleri için $T = 40$ 'da hesaplanan $L_\infty$ hata normları. ....	48
<b>Çizelge 3.3</b> : Problem 2'nin Lin-I ile $h$ ve $k$ 'nın farklı değerleri için $T = 10, 20, 30, 40$ 'da hesaplanan hata normları ve doğruluk mertebeleri. ....	49
<b>Çizelge 3.4</b> : Problem 2'nin Lin-II ile $h$ ve $k$ 'nın farklı değerleri için $T=10,20,30,40$ 'da hesaplanan hata normları ve doğruluk mertebeleri. ....	50
<b>Çizelge 3.5</b> : Problem 2'nin Lin-III ile $h$ ve $k$ 'nın farklı değerleri için $T=10,20,30,40$ 'da hesaplanan hata normları ve doğruluk mertebeleri. ....	51
<b>Çizelge 3.6</b> : Problem 2'nin Lin-I Lin-II ve Lin-III ile $h = k =0.1,0.05$ ve $0.025$ değerleri için hesaplanan korunum sabitleri .....	52
<b>Çizelge 3.7</b> : Problem 2'nin Lin-I, Lin-II ve Lin-III ile farklı $T$ zamanlarında hesaplanan maksimum genlik değerleri ve konumları. ....	53

## ŞEKİLLER DİZİNİ

<b>Şekil 2.1</b> : Problem 1'in Lin-I şemasından elde edilen $h = 0.1$ ve $k = 0.1$ için farklı $T$ zamanlarında çözüm grafikleri.....	29
<b>Şekil 2.2</b> : Problem 1'in Lin-I şemasından elde edilen $h = 0.1$ ve $k = 0.1$ için farklı $T$ zamanlarında hata grafikleri.....	30
<b>Şekil 3.1</b> : Problem 2'nin Lin-I şemasından elde edilen $h = 0.1$ ve $k = 0.1$ için farklı $T$ zamanlarında çözüm grafikleri.....	50
<b>Şekil 3.2</b> : Problem 2'nin Lin-I şemasından elde edilen $h = 0.1$ ve $k = 0.1$ için farklı $T$ zamanlarında hata grafikleri.....	51



## SEMOLLER VE KISALTMALAR

- $h$  : Konum Adım Uzunluğu  
 $k$  : Zaman Adım Uzunluğu  
**RLW** : Regularized Long-Wave  
**KdV** : Korteweg-De Vries Equation  
**Lin-I** : Lineerleştirme-I  
**Lin-II** : Lineerleştirme-II  
**Lin-III** : Lineerleştirme-III





# ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

## ROSENAU-KAWAHARA DENKLEMİNİN SAYISAL ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE BİR ÇALIŞMA

HEVAL ÖZDEMİR EKİCİ

İnönü Üniversitesi  
Fen Bilimleri Enstitüsü  
Matematik Ana Bilim Dalı

59+viii sayfa

2021

Danışman: Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

Dört bölümden oluşan bu yüksek lisans tezinin birinci bölümünde, tezde göz önüne alınan Rosenau-Kawahara denklemi hakkında kısa bir literatür taraması verildikten sonra yaklaşık çözümleri bulunacak olan Problem 1 ve Problem 2 olarak isimlendirilen iki model problem tanıtıldı.

İkinci bölümde ise öncelikle bu tez çalışmasında kullanılacak olan Crank-Nicolson korunumlu kapalı sonlu fark yönteminden bahsedildi. Sonra Rosenau-Kawahara denklemindeki lineer olmayan terim yerine Lin-I, Lin-II ve Lin-III ile verilen üç farklı lineerleştirme tekniği kullanılarak Problem 1'in Crank-Nicolson korunumlu kapalı sonlu fark yöntemi yardımıyla nümerik şemaları elde edildi. Ayrıca Lin-I ile elde edilen nümerik şemanın kararlılık analizi von-Neumann yöntemi ile incelendi. Daha sonra şemalardan hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları, doğruluk mertebesi ve korunum sabitleri çizelgeler halinde sunuldu ve aynı zamanda elde edilen ayrık çözümlerin sürekliliği ile birlikte problemin fiziksel davranışını ne kadar iyi sergilediğini göstermek için dalga grafikleri verildi.

Üçüncü bölümde, Rosenau-Kawahara denklemi önce konuma göre parçalanarak Problem 2 olarak adlandırılan ikili (coupled) diferansiyel denklem sistemine dönüştürüldü. Sonra ikili denklem sistemindeki lineer olmayan terim yerine ikinci bölümde göz önüne alınan üç farklı lineerleştirme tekniği kullanılarak Problem 2'nin Crank-Nicolson korunumlu kapalı sonlu fark yöntemi ile nümerik şemaları verildi. Ayrıca Lin-I için elde edilen nümerik şemanın kararlılık analizi yine ikinci bölümde olduğu gibi von-Neumann yöntemi ile incelendi. Daha sonra nümerik şemalardan elde edilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları, doğruluk mertebesi ve korunum sabitleri çizelgeler ve grafikler halinde sunuldu.

Tezin son bölümü olan dördüncü bölümde ise önerilen şemalarla birlikte gelecekteki araştırmalar için bir sonuç verildi.

**Anahtar Kelimeler:** Rosenau-Kawahara Denklemi, Korunumlu Sonlu Farklar, Lineerleştirme Teknikleri, Ayırma Tekniği, Kararlılık Analizi

## ABSTRACT

Master Thesis

### A STUDY ON THE NUMERICAL SOLUTION OF THE ROSENAU-KAWAHARA EQUATION

Heval ÖZDEMİR EKİCİ

Inonu University  
Graduate School of Nature and Applied Sciences  
Department of Mathematics

59+viii pages

2021

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY

In the first chapter of this thesis, consisting of four chapters, after a brief literature survey about the Rosenau-Kawahara equation considered in the thesis, two model problems called Problem 1 and Problem 2, of which approximate solutions are going to be found, are introduced.

In the second chapter, first of all, the Crank-Nicolson conservative implicit finite difference method, which is going to be used in this thesis, is mentioned. Then, instead of the nonlinear term in the Rosenau-Kawahara equation, using three different linearization techniques represented by Lin-I, Lin-II and Lin-III, numerical schemes of Problem 1 are obtained with the help of Crank-Nicolson conservative implicit finite difference method. In addition, the stability analysis of the numerical scheme obtained with Lin-I is examined by the von-Neumann method. Then the error norms  $L_2$  and  $L_\infty$  calculated from the schemes, the order of accuracy and the conservation constants are presented in graphs, and at the same time, wave graphs are given to show how well the problem exhibits the physical behavior with the continuity of the discrete solutions obtained.

In the third chapter, the Rosenau-Kawahara equation is first split with respect to the spatial variable and converted into a coupled differential equation system called as Problem 2. Then, instead of the non-linear term in the coupled equation system, numerical schemes of Problem 2 are given using the Crank-Nicolson conservative implicit finite difference method using three different linearization techniques considered in the second chapter. In addition, the stability analysis of the numerical scheme obtained for Lin-I is examined by the von-Neumann method, as in the second chapter. Then, error norms  $L_2$  and  $L_\infty$ , the order of accuracy and conservation constants obtained from the numerical schemes are presented in tables and graphs.

In the fourth chapter, which is the last chapter of the thesis, a brief conclusion for future researcies is given along with the proposed schemes.

**Keywords:** Rosenau-Kawahara Equation, Conservative Finite Differences, Linearization Techniques, Splitting Technique, Stability Analysis

# 1. GİRİŞ

Lineer olmayan fenomenler uygulamalı matematik, fizik ve ayrıca mühendislik problemlerinde önemli role sahiptirler. Mühendislik ve uygulamalı bilimlerdeki birçok fenomen lineer olmayan oluşum (evolution) denklemleriyle modellenir. Bu tip denklemlerin çözümleri fenomenlerin fiziksel mekanizmasının daha iyi anlaşılmasını sağlar. Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin kapalı form çözümlerinin bilinmesi kullanılan sayısal yöntem ve tekniklerin test edilmesini kolaylaştırmakla birlikte lineer olmayan fenomenlerin daha iyi anlaşılmasına yardımcı olur.

Bilindiği üzere lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemler için tam çözüm aramak çoğu zaman kolay olmayabilir. Genel olarak bu tür denklemlerin tümü için iyi çalışan bir yöntem veya teknik de yoktur. Dolayısıyla her bir denklem ayrı bir problem olarak ele alınır. Denklemlerde lineer olmayan terimlerin varlığı nedeniyle bazı sabit şartlar, parametreler ve özel durumlar için bu tip denklemlerin tam çözümleri mevcuttur. Bu tür durumlarda, böyle denklemlerin yaklaşık çözümleriyle ilgilenmek çok önemli hale gelmiştir. Bu nedenle bu tip denklemlerin tam çözümleri yerine kabul edilebilir seviyede yaklaşık çözümlerini bulmak için birçok nümerik yöntem geliştirilmiştir. Bunlar içerisinde en sıklıkla kullanılanları; sonlu fark yöntemleri, sonlu eleman yöntemleri ve sonlu hacim yöntemleri olup ayrıca ağsız (meshless) yöntemler olarak bilinen diğer yöntem türleri de literatürde yer almaktadır.

Lineer olmayan denklemlerin çözümleri en önemli bilimsel araştırma alanlarından biri olup genellikle dalga formundadır. Geçtiğimiz birkaç on yıl boyunca birçok bilim insanı dalganın davranışını açıklamak için KdV denklemi, RLW denklemi, Rosenau denklemi gibi farklı matematiksel modeller geliştirdi. Aşağıda bu önemli dalga modellerinden kısaca bahsedilecektir. Literatürde sıklıkla karşılaşılan

$$u_t + u_{xxx} + 6uu_x = 0 \quad (1.0.1)$$

KdV denklemi ilk olarak 1877 de Boussinesq tarafından tanıtıldı ve 1895'te Diederik Korteweg ve Gustav de Vries [1] tarafından yeniden keşfedildi. O zamandan beri bu denklem ve onun değişik formu üzerine birçok çalışma yapılmıştır. Burada sadece son çalışmalardan bazılarına değinilecektir. Biswas [2], doğrusal olmayan güç yasalı ve zamana bağlı katsayılı KdV denkleminin soliteri dalga çözümünü inceledi. Wang vd. [3] potansiyel KdV denklemi için şok dalgalarla birlikte soliton dalga çözümlerini araştırırken, Ma vd. [4] genelleştirilmiş KdV denkleminin soliteri dalga çözümlerini araştırdı. Teorik çalışmalara ek olarak, okuyucular KdV

denkleminin ve genelleştirilmiş KdV denkleminin sayısal simülasyonları için [5, 6] referanslı çalışmalara başvurabilirler.

Benjamin-Bona-Mahony denklemi olarak da bilinen Düzenlenmiş Uzun Dalga (RLW) denklemi

$$u_t + u_x + (u^2)_x - u_{xxt} = 0 \quad (1.0.2)$$

ilk olarak Peregrine [7] tarafından bir kanaldaki küçük genlikli uzun su dalgası için bir model olarak önerildi. (1.0.2) ile verilen RLW denklemi ve

$$u_t + u_x + (u^p)_x - u_{xxt} = 0$$

olarak verilen GRLW denklemi için literatürde hem teorik hem de sayısal olarak birçok çalışma mevcuttur. Okuyucular teorik çalışmalar için [8–11] referanslara ve sayısal çalışmalar için de [12–14] referanslara bakabilirler.

İyi bilinen KdV denklemi (KdV), kompakt ayırık sistemler çalışılırken dalga-dalga ve dalga-duvar etkileşimlerini tanımlayamadığından Rosenau [15, 16] KdV denkleminin bu eksikliğini gidermek için

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + 0.5(u^2)_x = 0 \quad (1.0.3)$$

olarak verilen ve kendi ismi ile bilinen Rosenau denklemini önerdi. Rosenau denklemi için çözümün varlığı ve tekliği, Park [17] tarafından teorik olarak kanıtlandı. Teorik analizin yanı sıra denklemin sayısal çalışmaları için okuyucular [18–22] referanslara ve bunların içindeki çalışmalara bakabilirler.

Rosenau denklemine  $-u_{xxt}$  terimi eklenerek aşağıdaki Rosenau-RLW denklemi elde edilebilir:

$$u_t - u_{xxt} + u_{xxxxt} + u_x + 0.5(u^2)_x = 0. \quad (1.0.4)$$

Rosenau-RLW denklemi için başlangıç ve sınır değeri problemi üzerine son yıllarda sayısal olarak birçok çalışma yapılmıştır [23–27]. Örneğin, Pan ve Zhang [23, 24] sırasıyla Rosenau-RLW denklemi ve genelleştirilmiş Rosenau-RLW denkleminin sayısal çözümlerini elde etmek için üç seviyeli doğrusal kapalı korunumlu şemalar geliştirmişlerdir.

Lineer olmayan dalga hakkında daha ileri bir değerlendirmenin yapılabilmesi için,  $u_{xxx}$  viskoz teriminin Rosenau denklemine dahil edilmesi gerekir. Bu şekilde elde edilen

$$u_t + u_{xxxxt} + u_{xxx} + u_x + 0.5(u^2)_x = 0 \quad (1.0.5)$$

denklemini genellikle Rosenau-KdV denkleminin olarak adlandırılır. Teorik çalışmalar için, Saha [28] genelleştirilmiş Rosenau-KdV denkleminin tek soliton çözümünü, Triki ve Biswas [29] ismini (1.0.5) denkleminin sol tarafındaki son terimden alan doğrusal olmayan güç yasalı Rosenau-KdV denkleminin soliteri dalga çözümünü ve asimptotik davranışını incelediler. Sayısal olarak, Hu vd. [30] Rosenau-KdV denkleminin için ikinci mertebeden korunumlu sonlu farklar yöntemi önerdiler.

Yukarıda verilen Rosenau-RLW denkleminin ve Rosenau-KdV denkleminin birleştirilerek aşağıdaki Rosenau-KdV-RLW denkleminin [31–35] elde edilebilir:

$$u_t - u_{xxt} + u_{xxxxt} + u_{xxx} + u_x + 0.5 (u^2)_x = 0. \quad (1.0.6)$$

Yukarıdaki denklemlere ek olarak,  $p \geq 2$  pozitif bir tam sayı olmak üzere, yüzey gerilimli sıg su dalgaları teorisinde ortaya çıkan

$$u_t + u_x + u_{xxx} + u_{xxxxx} + \frac{1}{p} (u^p)_x = 0 \quad (1.0.7)$$

genelleştirilmiş Kawahara denkleminin de bilim insanlarının ilgisini çeken önemli lineer olmayan denklemler arasında yer almaktadır [36].  $p = 2$  olduğunda, (1.0.7) denkleminin alışılmış Kawahara denkleminin olarak adlandırılırken,  $p = 3$  olduğunda modifiye edilmiş Kawahara denkleminin olarak adlandırılır. Alışılmış Kawahara denkleminin ve modifiye edilmiş Kawahara denkleminin için sayısal ve teorik yöntemler ile ilgili yapılan çalışmalar literatürde geniş bir yere sahiptir. Teorik çalışmalar için, [37–41] referanslarında yazarlar hem Kawahara denkleminin hem de modifiye edilmiş Kawahara denkleminin bazı periyodik ve soliteri dalga çözümlerini sundular. Bridges ve Derks [42] Kawahara denkleminin soliteri dalga çözümlerinin doğrusal kararlılığını incelediler. Shuangping ve Shuangping [43] doğrusal olmayan Kawahara denklemlerinin çözümlerinin varlığını ve tekliğini kanıtladılar. Sayısal çalışmalar için, Korkmaz ve Dağ [44] Kawahara denkleminin hem Lagrange interpolasyon polinomu tabanlı diferansiyel kareleme yöntemini hem de kosinüs genişlemeye dayalı diferansiyel kareleme yöntemini kullanarak sayısal olarak çözdüler. Jin [44] modifiye edilmiş Kawahara denkleminin çözümlerini elde etmek için varyasyonel iterasyon ve homotopi pertürbasyon yöntemlerini, Polat vd. [45] modifiye edilmiş Kawahara denkleminin hareketli dalga çözümlerini sayısal olarak incelemek için Adomian ayrıştırma yöntemini, Kaya ve Al-Khaled [46] ise Kawahara denkleminin hareketli dalga çözümlerini elde etmek için Adomian ayrıştırma yöntemini ve Sinc-Galerkin yöntemini kullandılar.

Lineer olmayan dalgaların davranışlarının daha fazla incelenmesi için Zuo [47], (1.0.5) ile verilen Rosenau-KdV denkleminin başka bir viskoz terim olan  $-u_{xxxxx}$  ekleyerek

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + \alpha u_{xxx} - \beta u_{xxxxx} + \gamma(u^p)_x = 0$$

Rosenau-Kawahara denklemini elde etti ve denklemin soliteri çözümleri ile birlikte periyodik çözümlerini de inceledi. Son zamanlarda, Hu vd. [48] Rosenau-Kawahara denklemi için iki farklı korunumlu sonlu fark şeması önerdiler. Labidi ve Biswas [49] Rosenau-Kawahara denkleminin yaklaşık çözümünü elde etmek için He'nin ilkesini uyguladılar. Biswas [50] doğrusal olmayan güç yasalı Rosenau-Kawahara denkleminin soliteri çözümünü ve iki korunum değişmezliğini inceledi. He [51], Rosenau-Kawahara denkleminin soliteri çözümlerini elde etmek için üç seviyeli ikinci mertebeden korunumlu bir sonlu farklar tekniği sundu. Ayrıca, Hu vd. [48] referanslı çalışmada verilen alışılmış Rosenau-Kawahara denklemini çözmek için basitleştirilmiş üç seviyeli kapalı lineer korunumlu sonlu fark şeması ve iki seviyeli lineer olmayan Crank-Nicolson fark şeması kullanarak, iki korunumlu sonlu fark şemasının ikinci mertebeden yakınsak şartsız ve kararlı olduğunu gösterdi. Chen vd. [52] genelleştirilmiş Rosenau-Kawahara denkleminin yaklaşık bir çözümünü vermek için ikinci mertebeden yakınsama oranına sahip yarı-açık lineerleştirilmiş Crank-Nicolson sonlu farklar yöntemini teorik olarak araştırdılar. Daha yakın zamanda Wongsajjai vd. [53], sığ su dalgasının Rosenau-Kawahara modeline yapıyı koruyan bir kompakt sonlu fark şeması önerdiler ve yöntemin büyük  $t$  zamanlarında da soliteri dalgayı simüle etmek için kullanılabileceğini gösterdiler.

Bu tez çalışmasında, lineer olmayan güç yasalı Rosenau-Kawahara denklemi için aşağıda verilen başlangıç ve sınır değer problemi göz önüne alınacak ve problemin sayısal çözümleri ile birlikte simülasyonları verilecektir.

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + \alpha u_{xxx} - \beta u_{xxxxx} + \gamma(u^p)_x = 0, \quad x \in [x_L, x_R], \quad t \in [0, T] \quad (1.0.8)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [x_L, x_R],$$

$$u(x_L, t) = u(x_R, t) = 0, \quad (1.0.9)$$

$$u_x(x_L, t) = u_x(x_R, t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

$$u_{xx}(x_L, t) = u_{xx}(x_R, t) = 0$$

Burada  $p$  pozitif bir tamsayı,  $u_0(x)$  düzgün bir fonksiyon,  $\alpha, \beta$  ve  $\gamma$  reel sabitler,  $x_L$  yeterince büyük bir negatif sayı ve  $x_R$  yeterince büyük bir pozitif sayıdır. [30, 31] referanslarındaki

çalışmalarda olduğu gibi bu çalışmada da dalganın tepe noktasının başlangıçta  $x = 0$ 'da konumlandığını ve soliteri dalganın tepe noktasının  $[0, T]$  zaman aralığı boyunca daima problemin  $[x_L, x_R]$  çözüm bölgesinin içinde konumlandığından emin olmak için  $x_L$  ve  $x_R$  sayıları yeterince büyük seçildi.

## 1.1 Model Problemler

Bu tez çalışmasında,  $\alpha = \beta = 1$ ,  $\gamma = \frac{1}{2}$  ve  $p = 2$  seçilerek (1.0.8) ile verilen Rosenau-Kawahara denklemi için aşağıdaki iki model problem ele alınacaktır.

### 1.1.1 Problem 1

Birinci problem olarak

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + u_{xxx} - u_{xxxx} + \frac{1}{2} (u^2)_x = 0 \quad x \in [x_L, x_R], t \in [0, T] \quad (1.1.1)$$

ile verilen Rosenau-Kawahara denklemi

$$u(x, 0) = \left( -\frac{35}{12} + \frac{35}{156} \sqrt{205} \right) \operatorname{sech}^4 \left( \frac{1}{12} \sqrt{-13 + \sqrt{205}x} \right), \quad \begin{array}{l} x \in [x_L, x_R] \\ t \in [0, T] \end{array} \quad (1.1.2)$$

başlangıç ve

$$\begin{aligned} u(x_L, t) &= u(x_R, t) = 0, \\ u_x(x_L, t) &= u_x(x_R, t) = 0, \quad t \in [0, T], \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

$$u_{xx}(x_L, t) = u_{xx}(x_R, t) = 0$$

sınır şartlarıyla ele alındı. Problemin soliteri tam çözümü [48]

$$u(x, t) = \left( -\frac{35}{12} + \frac{35}{156} \sqrt{205} \right) \operatorname{sech}^4 \left[ \frac{1}{12} \sqrt{-13 + \sqrt{205}x} \left( x - \frac{1}{13} \sqrt{205}t \right) \right]$$

dir.

### 1.1.2 Problem 2

İkinci problem olarak (1.1.1) ile verilen Rosenau-Kawahara denklemi için  $v(x, t) = u_{xxx}(x, t)$  dönüşümü kullanılarak konum yönünde

$$\begin{cases} u_t + v_{xt} + u_x + v - v_{xx} + \frac{1}{2} (u^2)_x = 0 \\ v - u_{xxx} = 0 \end{cases}$$

olarak ayrıklaştırılmış ikili (coupled) denklemi (1.1.2)-(1.1.3) başlangıç ve sınır şartları ile göz önüne alındı.

## 2. ROSENAU-KAWAHARA DENKLEMİNİN KORUNUMLU SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Tezin bu bölümünde, bir önceki bölümde (1.1.1)-(1.1.3) ile verilen Problem 1 yani

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + u_{xxx} - u_{xxxxx} + \frac{1}{2} (u^2)_x = 0 \quad x \in [x_L, x_R], \quad t \in [0, T]$$

Rosenau-Kawahara denklemi sırasıyla

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [x_L, x_R],$$

başlangıç koşulu ve

$$u(x_L, t) = u(x_R, t) = 0,$$

$$u_x(x_L, t) = u_x(x_R, t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

$$u_{xx}(x_L, t) = u_{xx}(x_R, t) = 0,$$

sınır koşullarıyla ele alındı.

Bu problem Rosenau-Kawahara denkleminde görülen lineer olmayan  $\frac{1}{2} (u^2)_x$  terimi için aşağıda verilecek olan üç farklı yaklaşım tekniği kullanılarak Hu vd. [48] tarafından önerilen Crank-Nicolson korunumlu kapalı sonlu fark yöntemi ile çözüldü. Kullanılan lineerleştirme teknikleri ile elde edilen her bir şemanın kararlılık analizleri von-Neumann yöntemi ile incelendi. Nümerik şemalardan elde edilen ayrık çözümler literatürde mevcut diğer araştırmacıların verdikleri çözümler ile karşılaştırılarak çizelgeler ve grafikler halinde sunuldu.

Bu tez boyunca kullanılacak olan lineerleştirme tekniklerine ve Crank-Nicolson korunumlu kapalı sonlu fark yöntemine geçmeden önce genel olarak sonlu fark yönteminin temel prensiplerinden kısaca bahsedilecektir. Bilindiği üzere, sonlu fark yöntemi başlangıç ve sınır şartları ile verilen kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin bulunmasında sıklıkla kullanılan en temel ve oldukça etkili nümerik yöntemlerden biridir. Yöntemin bir başlangıç-sınır değer problemine uygulanmasında aşağıdaki adımlar takip edilir: İlk olarak, göz önüne alınan problemin çözüm bölgesi çoğunlukla karesel veya dikdörtgensel geometrik şekiller içeren kafeslere yani ağlara bölünür. Her bir kafesin kesişim noktasına grid, mesh veya düğüm noktası adı verilir. Sonra, problemin yaklaşık çözümü her bir kafesin düğüm noktası üzerinde hesaplanacağından diferansiyel denklemde ve sınır şartlarında görülen türevler yerine Taylor seri açılımı kullanılarak elde edilen uygun sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece ele alınan başlangıç ve sınır değer problemi fark denklemlerinden oluşan bir cebirsel denklem sistemine dönüşür. Son olarak, cebirsel denklem sisteminin çözümlerinin esas problemin çözümüne



istenilen düzeyde yaklaşık sonuç vermesi için kullanılan sonlu fark yönteminden elde edilen nümerik şemanın yakınsaklığı incelenir. Bunun için genellikle Lax [54] 'ın denklik teoreminden yararlanır. Lax'ın denklik teoremine göre bir sonlu fark şemasının yakınsak olması için gerek ve yeter şart şemanın tutarlı ve kararlı olmasıdır. Sonlu fark yöntemleri Taylor serisi yöntemi ile elde edildiğinden çıkış noktası itibari ile genellikle tutarlıdır. Bundan dolayı, kullanılan yöntemin yakınsaklığı için sadece kararlılığının incelenmesi yeterli olacaktır. Sonlu fark yöntemleri hakkında daha detaylı bilgi için okuyucuların [55] referanslı kitabı incelemeleri önerilir.

Şimdi de korunumlu sonlu fark yöntemlerinin uygulama aşamasında kullanılacak olan notasyonlarla birlikte türevler için sonlu fark yaklaşımlarından kısaca bahsedilecektir. Problemin çözüm bölgesi,  $x$  konumu ve  $t$  zamanı göstermek üzere,  $(x, t) \in [x_L, x_R] \times [0, T]$  olsun.  $J$  ve  $N$  bölüntü sayılarını temsil eden tamsayılar olmak üzere konum adım uzunluğu  $\Delta x = h = (x_R - x_L)/J$ , zaman adım uzunluğu  $\Delta t = k = T/N$  ve kafes üzerindeki  $(x_j, t_n)$  ( $j = 0(1)J, n = 0(1)N$ ) kesişim noktaları basitçe  $(j, n)$  ile gösterilsin.  $(x_j, t_n)$  düğüm noktaları için  $x_j = x_L + jh$ , ve  $t_n = nk$  olup problemin herhangi bir  $(j, n)$  düğüm noktasındaki yaklaşık çözümü  $u_j^n$  olsun. Böylece  $u_j^n$ ,  $(x_j, t_n)$  noktasında problemin  $u(x, t)$  tam çözümüne bir yaklaşımdır yani  $u_j^n \approx u(x_j, t_n)$  dır.

Bu tez çalışmasında Hu vd. [48] tarafından verilen alışılmış sonlu fark yöntemlerinin bir ailesi olan Crank-Nicolson korunumlu kapalı sonlu fark yöntemi temel alındı. Yöntemin kendine özgü avantajlarından başlıcaları kapalı ve simetrik bir cebirsel denklem sistemi üretmesi, problemin korunum sabitlerini sağlaması ve öne çıkan en önemli avantajı özellikle yüksek mertebeden türevler içeren problemler için çözüm bölgesi içerisine düşmeyen hayali değerlerin alışılmış sonlu fark yöntemindekilerine göre daha az sayıda olmasıdır [56].

## 2.1 Lineerleştirme-I (Lin-I)

Bu kısım, Hu vd. [48] tarafından önerilen Crank-Nicolson korunumlu kapalı sonlu fark yöntemi temel alınarak hazırlandı. (1.1.1) ile verilen Rosenau-Kawahara denkleminin  $\frac{1}{2}(u^2)_x$  lineer olmayan terimi hariç Crank-Nicolson korunumlu kapalı sonlu fark yaklaşımı

$$\left(u_j^n\right)_t + \left(u_j^n\right)_{xx\bar{x}\bar{t}} + \left(u_j^{n+1/2}\right)_{\hat{x}} + \left(u_j^{n+1/2}\right)_{xx\hat{x}} - \left(u_j^{n+1/2}\right)_{xx\bar{x}\hat{x}} + \frac{1}{2}(u^2)_x = 0 \quad (2.1.1)$$

dir. Yukarıdaki denklemde görülen operatörler hatalar ihmal edilmek üzere

$$\begin{aligned}
\left(u_j^n\right)_x &= \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h}, & \text{"konuma göre ileri fark yaklaşımı"} \\
\left(u_j^n\right)_{\hat{x}} &= \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}, & \text{"konuma göre merkezi fark yaklaşımı"} \\
\left(u_j^n\right)_{\bar{x}} &= \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h}, & \text{"konuma göre geri fark yaklaşımı"} \\
\left(u_j^n\right)_t &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k}, & \text{"zamana göre ileri fark yaklaşımı"} \\
u_j^{n+1/2} &= \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}. & \text{"Crank Nicolson tipi fark yaklaşımı"}
\end{aligned} \tag{2.1.2}$$

olarak tanımlanan sonlu fark yaklaşımları olup tez boyunca kullanılacaktır.

Şimdi Rosenau-Kawahara denkleminin güç yasalı lineer olmayan terim olarak bilinen son terimi  $\frac{1}{2} (u^2)_x$  yerine

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} (u^2)_x &= \frac{1}{2} \left[ \frac{1+2}{3} (u^2)_x \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{3} (u^2)_x + \frac{2}{3} (u^2)_x \right] \\
&= \frac{1}{3} uu_x + \frac{1}{3} (u^2)_x \\
&= \frac{1}{3} [uu_x + (u^2)_x] \\
&= \frac{1}{3} [uu_x + (uu)_x] \\
&= \frac{1}{3} \left\{ (u^{n+1/2}) (u^{n+1/2})_{\hat{x}} + [(u^{n+1/2}) (u^{n+1/2})]_{\hat{x}} \right\} \\
&= \frac{1}{3} \left\{ (u_j^{n+1/2}) \left[ \frac{(u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n)}{4h} - \frac{(u_{j-1}^{n+1} + u_{j-1}^n)}{4h} \right] \right. \\
&\quad \left. + \left[ (u_{j+1}^{n+1/2}) \frac{(u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n)}{4h} - (u_{j-1}^{n+1/2}) \frac{(u_{j-1}^{n+1} + u_{j-1}^n)}{4h} \right] \right\}
\end{aligned} \tag{2.1.3}$$

ayrıklaştırılmış formu yazılırsa, (1.1.1)-(1.1.3) denklemleriyle verilen başlangıç ve sınır değer probleminin Crank-Nicolson korunumlu sonlu fark şeması

$$\begin{aligned}
& \left(u_j^n\right)_t + \left(u_j^n\right)_{xx\bar{x}\bar{t}} + \left(u_j^{n+1/2}\right)_{\hat{x}} + \left(u_j^{n+1/2}\right)_{x\bar{x}\hat{x}} - \left(u_j^{n+1/2}\right)_{xx\bar{x}\hat{x}} \\
& + \frac{1}{3} \left\{ u_j^{n+1/2} \left(u_j^{n+1/2}\right)_{\hat{x}} + \left[ \left(u_j^{n+1/2}\right)^2 \right]_{\hat{x}} \right\} = 0 \quad \begin{array}{l} n = 0(1)N-1 \\ j = 1(1)J-1 \end{array} \quad (2.1.4) \\
& u_j^0 = u_j^0(x_j), \quad j = 0(1)J \\
& \left(u_0^n\right)_{\hat{x}} = \left(u_j^n\right)_{\hat{x}} = 0, \\
& \left(u_0^n\right)_{\hat{x}\bar{x}} = 0, \quad n = 0(1)N \\
& \left(u_0^n\right)_{\hat{x}x} = 0,
\end{aligned}$$

olur [48]. (2.1.2) ile verilen fark operatörlerin kullanılması ile (2.1.4) denkleminde görülen türevler

$$\begin{aligned}
\left(u_j^n\right)_t &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k}, \quad (2.1.5) \\
\left(u_j^n\right)_{xx\bar{x}\bar{t}} &= \frac{(u_{j-2}^{n+1} - u_{j-2}^n)}{kh^4} - \frac{4(u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n)}{kh^4} + \frac{6(u_j^{n+1} - u_j^n)}{kh^4} \\
& - \frac{4(u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n)}{kh^4} + \frac{(u_{j+2}^{n+1} - u_{j+2}^n)}{kh^4}, \\
\left(u_j^{n+1/2}\right)_{\hat{x}} &= \frac{(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})}{4h} + \frac{(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h} \\
\left(u_j^{n+1/2}\right)_{x\bar{x}\hat{x}} &= \frac{(u_{j+2}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1})}{4h^3} - \frac{2(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})}{4h^3} + \frac{(u_{j+2}^n - u_{j-2}^n)}{4h^3} - \frac{2(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h^3} \\
\left(u_j^{n+1/2}\right)_{xx\bar{x}\hat{x}} &= \frac{(u_{j+3}^{n+1} - u_{j-3}^{n+1})}{4h^5} - \frac{4(u_{j+2}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1})}{4h^5} + \frac{5(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})}{4h^5} \\
& + \frac{(u_{j+3}^n - u_{j-3}^n)}{4h^5} - \frac{4(u_{j+2}^n - u_{j-2}^n)}{4h^5} + \frac{5(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h^5}
\end{aligned}$$

olup bunların (2.1.4) de yerine yazılmasıyla,  $n = 0(1)N - 1$  ve  $j = 1(1)J - 1$  olmak üzere

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4h^5} u_{j-3}^{n+1} + \left( \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} - \frac{1}{h^5} \right) u_{j-2}^{n+1} + \left( -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{2}{4h^3} + \frac{5}{4h^5} - \frac{\phi_1}{4h} - \frac{\phi_3}{4h} \right) u_{j-1}^{n+1} + \left( \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} \right) u_j^{n+1} \\
& + \left( -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{2}{4h^3} - \frac{5}{4h^5} + \frac{\phi_1}{4h} + \frac{\phi_2}{4h} \right) u_{j+1}^{n+1} + \left( \frac{1}{kh^4} + \frac{\alpha}{4h^3} + \frac{\beta}{h^5} \right) u_{j+2}^{n+1} - \frac{1}{4h^5} u_{j+3}^{n+1} \\
& = -\frac{1}{4h^5} u_{j-3}^n + \left( \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} + \frac{1}{h^5} \right) u_{j-2}^n + \left( -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{2}{4h^3} - \frac{5}{4h^5} + \frac{\phi_1}{4h} + \frac{\phi_3}{4h} \right) u_{j-1}^n + \left( \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} \right) u_j^n \\
& + \left( -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{2}{4h^3} + \frac{5}{4h^5} - \frac{\phi_1}{4h} - \frac{\phi_2}{4h} \right) u_{j+1}^n + \left( \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} - \frac{1}{h^5} \right) u_{j+2}^n + \frac{1}{4h^5} u_{j+3}^n
\end{aligned} \tag{2.1.6}$$

$(J+5)$  bilinmeyenli  $(J-1)$  tane denklemden oluşan lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Burada

$$\begin{aligned}
\phi_1 &= \frac{1}{3} \left( u_j^{n+1/2} \right) \\
\phi_2 &= \frac{1}{3} \left( u_{j+1}^{n+1/2} \right) \\
\phi_3 &= \frac{1}{3} \left( u_{j-1}^{n+1/2} \right)
\end{aligned} \tag{2.1.7}$$

dir.

(2.1.6) şeması iki zaman seviyeli Crank-Nicolson korunumlu kapalı sonlu fark şemasıdır. Hu vd. [48] şemanın lokal kesme hatasının  $O(h^2 + k^2)$  ve doğruluk mertebesinin ikinci mertebeden olduğunu kanıtladı.

(2.1.6) cebirsel denklem sisteminin çözülebilmesi için  $j = 1, 2, j-2, j-1$  konum noktalarında (2.1.6) da ortaya çıkan problemin çözüm bölgesi içerisine düşmeyen  $n$ -inci ve  $(n+1)$ -inci zaman adımlarındaki  $u$ 'nun  $u_{-2}, u_{-1}, u_{J+1}$  ve  $u_{J+2}$  hayali değerlerinin yok edilmesi gerekir. Bunun için

$$u_{\hat{x}}(x_L, t) = u_{\hat{x}}(x_R, t) = 0$$

sınır şartları kullanılırsa

$$(u_j^n)_{\hat{x}} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}$$

olmak üzere

$$j = 0 \text{ için } (u_0^n)_{\hat{x}} = \frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2h} = 0 \text{ olup buradan } u_{-1}^n = u_1^n$$

ve

$$j = J \text{ için } (u_J^n)_{\hat{x}} = \frac{u_{J+1}^n - u_{J-1}^n}{2h} = 0 \text{ olup buradan } u_{J+1}^n = u_{J-1}^n \text{ olarak bulunur.}$$

$$(u_0^n)_{\hat{x}\bar{x}} = 0, \quad n = 0(1)N$$

$$(u_0^n)_{\hat{x}x} = 0 \quad n = 0(1)N$$

sınır şartlarından ise

$$(u_j^n)_{\hat{x}\bar{x}} = \frac{u_{j+1}^n - u_j^n - u_{j-1}^n + u_{j-2}^n}{2h^2}$$

olmak üzere sol sınır şartından

$$j = 0 \text{ için } (u_0^n)_{\hat{x}\bar{x}} = \frac{u_1^n - u_0^n - u_{-1}^n + u_{-2}^n}{2h^2} = 0 \text{ olup buradan } u_0 = u_{-2} = 0$$

ve

$$(u_j^n)_{\hat{x}x} = \frac{u_{j+2}^n - u_{j+1}^n - u_j^n + u_{j-1}^n}{2h^2}$$

olmak üzere sağ sınır şartından

$$j = J \text{ için } (u_J^n)_{\hat{x}x} = \frac{u_{J+2}^n - u_{J+1}^n - u_J^n + u_{J-1}^n}{2h^2} = 0 \text{ olup buradan } u_0 = u_{J+2} = 0 \text{ olarak bulunur.}$$

$u$ 'nun yukarıda elde edilen hayali değerleri  $u_0$  ve  $u_J$  nin problemde verilen değerleri ile birlikte (2.1.6) de yerlerine yazılırsa  $n = 0(1)N - 1$  olmak üzere  $(J - 1)$  bilinmeyenli  $(J - 1)$  tane denklemden oluşan

$$\begin{aligned}
 j = 1 \text{ için} \quad & (\alpha_2 + \alpha_4)u_j^{n+1} + \alpha_5u_{j+1}^{n+1} + \alpha_6u_{j+2}^{n+1} + \alpha_7u_{j+3}^{n+1} \\
 & = (\beta_2 + \beta_4)u_j^n + \beta_5u_{j+1}^n + \beta_6u_{j+2}^n + \beta_7u_{j+3}^n \\
 j = 2 \text{ için} \quad & (\alpha_1 + \alpha_3)u_{j-1}^{n+1} + \alpha_4u_j^{n+1} + \alpha_5u_{j+1}^{n+1} + \alpha_6u_{j+2}^{n+1} + \alpha_7u_{j+3}^{n+1} \\
 & = (\beta_1 + \beta_3)u_{j-1}^n + \beta_4u_j^n + \beta_5u_{j+1}^n + \beta_6u_{j+2}^n + \beta_7u_{j+3}^n \\
 j = 3(1)J - 3 \quad & \alpha_1u_{j-3}^{n+1} + \alpha_2u_{j-2}^{n+1} + \alpha_3u_{j-1}^{n+1} + \alpha_4u_j^{n+1} + \alpha_5u_{j+1}^{n+1} + \alpha_6u_{j+2}^{n+1} + \alpha_7u_{j+3}^{n+1} \\
 & = \beta_1u_{j-3}^n + \beta_2u_{j-2}^n + \beta_3u_{j-1}^n + \beta_4u_j^n + \beta_5u_{j+1}^n + \beta_6u_{j+2}^n + \beta_7u_{j+3}^n \\
 j = J - 2 \text{ için} \quad & \alpha_1u_{j-3}^{n+1} + \alpha_2u_{j-2}^{n+1} + \alpha_3u_{j-1}^{n+1} + \alpha_4u_j^{n+1} + (\alpha_5 + \alpha_7)u_{j+1}^{n+1} \\
 & = \beta_1u_{j-3}^n + \beta_2u_{j-2}^n + \beta_3u_{j-1}^n + \beta_4u_j^n + (\beta_5 + \beta_7)u_{j+1}^n \\
 j = J - 1 \text{ için} \quad & \alpha_1u_{j-3}^{n+1} + \alpha_2u_{j-2}^{n+1} + \alpha_3u_{j-1}^{n+1} + (\alpha_4 + \alpha_6)u_j^{n+1} \\
 & = \beta_1u_{j-3}^n + \beta_2u_{j-2}^n + \beta_3u_{j-1}^n + (\beta_4 + \beta_6)u_j^n
 \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

karesel lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. Burada



Bu vektör (1.1.2) ile verilen başlangıç şartından

$$U^0 = \begin{bmatrix} u(x_0, 0) \\ u(x_1, 0) \\ u(x_2, 0) \\ \vdots \\ u(x_{J-1}, 0) \\ u(x_J, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^0 \\ u_1^0 \\ u \\ \vdots \\ u_{J-1}^0 \\ u_J^0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece, (2.1.9)'dan  $n = 0$  için ilk zaman adımında  $U^1$  değerleri  $U^0$  değerleri kullanılarak,  $n = 1$  için ikinci zaman adımında  $U^2$  değerleri  $U^1$  değerleri kullanılarak ve benzer şekilde devam edilerek istenilen  $T$  zamanındaki  $U^{n+1}$  değerleri hesaplanır.

Burada (2.1.9) sistemini bir direkt yöntem yardımıyla çözüldüğünden (2.1.7) denklemi ile verilen  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  ve  $\phi_3$  eşitliklerinde görülen lineer olmayan terimler için her bir zaman adımında

$$U^{(n+\frac{1}{2})^*} = (U^*)^n = \frac{U^{n+1} + U^n}{2}$$

olarak tanımlanan iç iterasyon birkaç defa uygulandı. Başlangıçta sadece iterasyonun ilk zaman adımında  $U^{n+1} = U^n$  alındı ve sonra (2.1.9) sistemi bir direkt yöntem yardımıyla çözüldü. Buradan elde edilen değerler iç iterasyonda  $U^{n+1}$  yerine yazıldı ve tekrar (2.1.9) sistemi çözüldü. Bu şekilde iç iterasyon işlemin birkaç defa tekrar edilerek her bir zaman adımındaki yaklaşık çözümler elde edildi.

### 2.1.1 Kararlılık Analizi

Başlangıç ve sınır şartlarıyla verilen bir kısmi diferansiyel denkleme uygun sonlu fark yaklaşımları uygulandığında göz önüne alınan problem cebirsel denklem sistemine dönüşür. Cebirsel denklem sisteminden yani sayısal şemadan elde edilecek olan ayrık çözümlerin başlangıç ve sınır değer probleminin çözümüne kabul edilebilir seviyede yakın olması gerekir. Bu konu matematikte yakınsaklık olarak bilinir. Yakınsaklık için genellikle Lax [54]'in denklik teoreminden yararlanır. Lax'ın denklik teoremine göre bir sayısal şemanın yakınsak olması için gerek ve yeter şart şemanın tutarlı ve kararlı olmasıdır. Sonlu fark şemaları Taylor serisi kullanılarak elde edildiğinden çıkış noktaları itibarı ile genellikle tutarlıdır. Bundan ötürü sayısal şemanın yakınsaklığı için sadece kararlılığının incelenmesi yeterli olacaktır.

Diferansiyel denklemlere nümerik yaklaşımlar uygulandıktan hemen sonra direkt olarak elde edilen nümerik çözümler genellikle dengesiz davranışlar sergileyebilir. Yani, nümerik çözümler orijinal denklemin çözümüne yakın olmayan, katlanarak büyüyen veya salınım yapan özellikler

içerebilirler. Bu durumdaki çözümlere kararsızdır denir. Bu kararsız çözümlerden kaçınmak için kullanılacak bazı analiz teknikleri vardır. Bu kısımda en çok kullanılan ve uygulaması kolay olan von-Neumann kararlılık analizi üzerinde ve (1.1.1) ile verilen Rosenau-Kawahara denkleminin uygulanması için sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik şemanın kararlılık analizi üzerinde durulacaktır.

Bu kısımda lineer sonlu fark şemalarının kararlılığını incelemek için matematiksel açıdan uygulanması pek zor olmayan ve literatürde sıklıkla kullanılan aynı zamanda Fourier kararlılık analizi olarak da bilinen von-Neumann yönteminden kısaca bahsedilecektir.

### Fourier Seri Yöntemi ile Kararlılık (von-Neumann Yöntemi)

$T$  sonlu olmak üzere  $0 \leq t \leq T = jk$  zaman aralığında,  $\delta x = h \geq 0$  iken  $\delta t = k \geq 0$  yani  $J \geq \infty$  iken  $u(x, t)$ 'nin lineer iki seviyeli fark denkleminin kararlılığı ile ilgilenildiğini varsayalım. Fourier veya von-Neumann yöntemi verilen model problemin  $t = 0$  zamanındaki başlangıç değerlerini düğüm noktalarında Fourier seri cinsinden ifade eder. Yöntem, kısmi diferansiyel denklemlerin çözümünde yaygın olarak kullanılan 'değişkenlere ayırma' yöntemine benzer bir yöntemle  $t = 0$  zamanında Fourier serisine indirgenen bir fonksiyonun artışını göz önüne alır.

Fourier serisi sinüs ve cosinüsler cinsinden formüle edilebilir fakat kompleks üstel formda yani  $\sum a_m \cos(m\pi x/l)$  veya  $\sum b_m \sin(m\pi x/l)$  yerine  $\sum A_m e^{im\pi x/l}$  biçiminde formüle edilirse cebirsel işlemler daha kolay olur. Burada  $i = \sqrt{-1}$  ve  $l$  ise fonksiyonun tanımlı olduğu  $x$ -aralığıdır.  $u(jh, nk) = u_{j,n}$ ,  $\eta_m = m\pi/Jh$  ve  $Jh = l$  olmak üzere

$$A_m e^{im\pi x/l} = A_n e^{in\pi jh/Jh} = A_n e^{i\eta_m jh}$$

olarak yazılabilir.  $t = 0$  zamanında düğüm noktaları boyunca başlangıç değerleri  $j = 0(1)J$  için  $u(jh, 0) = u_{j,0}$  olsun. O zaman

$$u_{j,0} = \sum_{m=0}^J A_m e^{i\eta_m jh} \quad j = 0(1)J$$

$J + 1$  denklem  $A_0, A_1, \dots, A_J$  şeklinde verilen  $(J + 1)$  adet bilinmeyen tek olarak belirtmek için yeterlidir. Bu durum başlangıç düğüm değerlerinin yukarıdaki kompleks üstel formda ifade edilebileceğini göstermektedir. Sadece lineer fark denklemleri göz önüne alınacağından süperpozisyon ilkesinden çözümlerin lineer birleşimi de yine denklemin çözümü olacaktır. Bu yüzden, sadece bir başlangıç değerinin mesela  $e^{i\eta_m jh}$  gibi bir değer ile ilerlemesini incelemek yeterli olacaktır.  $A_m$  katsayısı bir sabittir ve ihmal edilebilir olduğundan  $t$  zamanı arttıkça  $e^{i\eta_m jh}$



teriminin ilerlemesini incelemek için

$$u_{j,n} = e^{i\eta x} e^{\alpha t} = e^{i\eta jh} e^{\alpha nk} = e^{i\eta jh} \xi^n$$

yazılır. Burada  $\xi = e^{\alpha k}$  dır ve  $\alpha$  genelde bir kompleks sabittir.  $\xi$ , genellikle güçlendirme faktörü olarak adlandırılır.

Lax-Richtmyer tanımına göre sonlu fark denklemleri  $|u_{j,n}|$  değeri  $h \geq 0$  ve  $k \geq 0$  iken tüm  $n \leq J$  için ve başlangıç şartlarını sağlamak durumunda olan tüm  $\eta$  değerleri için sınırlı kalıyorsa kararlı olacaktır.

Eğer fark denklemlerinin tam çözümü zamanla birlikte üstel olarak artmıyorsa, o zaman kararlılık için gerek ve yeter şart

yani

$$|\xi| \leq 1$$

olmasıdır.

$$-1 \leq \xi \leq 1$$

Eğer  $u_{j,n}$  çözümü  $t$  zamanıyla birlikte artıyorsa o zaman kararlılık için gerek ve yeter şart

$$|\xi| \leq 1 + Kk = 1 + O(k)$$

olmasıdır. Burada  $K$  sayısı,  $h, k$  ve  $\eta$ 'dan bağımsız bir pozitif sayıdır.

Bu yöntemin sadece sabit katsayılı lineer denklemlerde uygulandığını ve daha sıkı konuşmak gerekirse sadece  $l$  periyotlu periyodik başlangıç verilerine sahip başlangıç değer problemlerine uygulandığını not etmek gerekir. Üç veya daha fazla zaman seviyeli ya da iki veya daha fazla bağımlı değişken içeren fark denklemler için yukarıda verilen  $|\xi| \leq 1 + Kk = 1 + O(k)$  von-Neumann şartları her zaman gereklidir fakat yeterli olmayabilir. Bu yöntem pratikte sıklıkla kullanılır ve genellikle kararlılıkla ilgili önemli bilgi verir [54].

Yukarıdaki hazırlıklardan sonra Rosenau-Kawahara denklemi için elde edilen (2.1.6) ile verilen nümerik şemanın kararlılığı von-Neumann yöntemi yardımıyla incelenebilir. Bunun için, (2.1.6) ile verilen şemada  $(j, n)$  düğüm noktalarındaki yaklaşık  $u_j^n$ 'ler yerine

$$u_j^n = \xi^n e^{ij\theta}$$

yazılırsa

$$\begin{aligned}
& \xi^{n+1} e^{ij\theta} \left[ \frac{1}{4h^5} e^{-3i\theta} + \left( \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} - \frac{1}{h^5} \right) e^{-2i\theta} + \left( -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{2}{4h^3} + \frac{5}{4h^5} - \frac{\phi_1}{4h} - \frac{\phi_3}{4h} \right) e^{-i\theta} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \left( -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{2}{4h^3} - \frac{5}{4h^5} + \frac{\phi_1}{4h} + \frac{\phi_2}{4h} \right) e^{i\theta} + \left( \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} + \frac{1}{h^5} \right) e^{2i\theta} - \frac{1}{4h^5} e^{3i\theta} \right] \\
& = \xi^n e^{ij\theta} \left[ -\frac{1}{4h^5} e^{-3i\theta} + \left( \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} + \frac{1}{h^5} \right) e^{-2i\theta} + \left( -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{2}{4h^3} - \frac{5}{4h^5} + \frac{\phi_1}{4h} + \frac{\phi_2}{4h} \right) e^{-i\theta} \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \left( -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{2}{4h^3} + \frac{5}{4h^5} - \frac{\phi_1}{4h} - \frac{\phi_2}{4h} \right) e^{i\theta} + \left( \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} - \frac{1}{h^5} \right) e^{2i\theta} + \frac{1}{4h^5} e^{3i\theta} \right]
\end{aligned}$$

bulunur. (2.1.7) eşitliğinde görülen peş peşe gelen ardışık  $(j-1, n+1/2)$ ,  $(j, n+1/2)$  ve  $(j+1, n+1/2)$  grid noktalarındaki  $u$ 'nun değerleri için

$$\max_j \left| \left( u_j^{n+1/2} \right) \right| = \mu$$

olduğu kabul edilir ve yukarıdaki eşitlikte kullanılırsa, gerekli düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned}
& \xi \left[ -\frac{1}{4h^5} (e^{3i\theta} - e^{-3i\theta}) + \frac{1}{kh^4} (e^{-2i\theta} + e^{2i\theta}) + \frac{1}{4h^3} (e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}) + \frac{1}{h^5} (e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}) - \frac{4}{kh^4} (e^{-i\theta} + e^{i\theta}) \right. \\
& \quad \left. + \frac{1}{4h} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) - \frac{2}{4h^3} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) - \frac{5}{4h^5} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{2\mu}{4h} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) + \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} \right] \\
& = \frac{1}{4h^5} (e^{-3i\theta} - e^{3i\theta}) + \frac{1}{kh^4} (e^{-2i\theta} + e^{2i\theta}) - \frac{1}{4h^3} (e^{-2i\theta} - e^{2i\theta}) - \frac{1}{h^5} (e^{-2i\theta} - e^{2i\theta}) - \frac{4}{kh^4} (e^{-i\theta} + e^{i\theta}) \\
& \quad - \frac{1}{4h} (e^{-i\theta} - e^{i\theta}) + \frac{2}{4h^3} (e^{-i\theta} - e^{i\theta}) + \frac{5}{4h^5} (e^{-i\theta} - e^{i\theta}) - \frac{2\mu}{4h} (e^{-i\theta} - e^{i\theta}) + \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4}
\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Euler formülünün kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
& \xi \left\{ \frac{2}{kh^4} \cos 2\theta - \frac{8}{kh^4} \cos \theta + \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} \right. \\
& \quad \left. + i \left[ \frac{2}{4h^5} \sin 3\theta - \frac{2}{4h^3} \sin 2\theta - \frac{2}{h^5} \sin 2\theta - \frac{2}{4h} \sin \theta + \frac{4}{4h^3} \sin \theta + \frac{10\beta}{4h^5} \sin \theta - \frac{4\mu}{2h} \sin \theta \right] \right\} \\
& = \frac{2}{kh^4} \cos 2\theta - \frac{8}{kh^4} \cos \theta + \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} \\
& \quad - i \left[ \frac{2}{4h^5} \sin 3\theta - \frac{2}{4h^3} \sin 2\theta - \frac{2}{h^5} \sin 2\theta - \frac{2}{4h} \sin \theta + \frac{4}{4h^3} \sin \theta + \frac{10}{4h^5} \sin \theta - \frac{4\mu}{2h} \sin \theta \right]
\end{aligned}$$

eşitliği bulunur. Bu eşitlikten,

$$P_1 = \frac{2}{kh^4} \cos 2\theta - \frac{8}{kh^4} \cos \theta + \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4}$$

$$P_2 = \frac{2}{4h^5} \sin 3\theta - \frac{2}{4h^3} \sin 2\theta - \frac{2}{h^5} \sin 2\theta - \frac{2}{4h} \sin \theta + \frac{4}{4h^3} \sin \theta + \frac{10}{4h^5} \sin \theta - \frac{4\mu}{2h} \sin \theta$$

olmak üzere

$$\xi = \frac{P_1 - iP_2}{P_1 + iP_2} \quad (2.1.10)$$

olarak yazılabilir. von-Neumann kararlılık analizine göre şemanın kararlı olması için  $|\xi| \leq 1$  olması gerekir. Açıkça, (2.1.10)'den

$$|\xi| = \left| \frac{P_1 - iP_2}{P_1 + iP_2} \right| = 1$$

olup şema şartsız kararlıdır.

## 2.2 Lineerleştirme -II (Lin-II)

Bu lineerleştirmede (2.1.1) ile verilen Crank-Nicolson korunumlu sonlu fark yaklaşımındaki lineer olmayan  $\frac{1}{2} (u^2)_x$  terimi yerine,  $z_m = u_j^n$  bir lokal sabit olmak üzere,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (u^2)_x &= \frac{1}{2} 2uu_x \\ &= z_m u_x \\ &= z_m \left( u_j^{n+1/2} \right)_{\hat{x}} \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

yazılırsa (1.1.1)-(1.1.3) denklemleri ile verilen başlangıç ve sınır değer probleminin korunumlu sonlu fark şeması

$$\left( u_j^n \right)_t + \left( u_j^n \right)_{xx\bar{x}\bar{t}} + \left( u_j^{n+1/2} \right)_{\hat{x}} + \left( u_j^{n+1/2} \right)_{x\bar{x}\hat{x}} - \left( u_j^{n+1/2} \right)_{xx\bar{x}\hat{x}} + z_m \left( u_j^{n+1/2} \right)_{\hat{x}} = 0, \quad \begin{array}{l} n = 0(1)N - 1 \\ j = 1(1)J - 1 \end{array}$$

$$u_j^0 = u_j^0(x_j), \quad j = 0(1)J$$

$$\left( u_0^n \right)_{\hat{x}} = \left( u_j^n \right)_{\hat{x}} = 0,$$

$$\left( u_0^n \right)_{\hat{x}\bar{x}} = 0, \quad n = 0(1)N$$

$$\left( u_0^n \right)_{\hat{x}x} = 0,$$

dır. Denklemden görülen  $\left( u_j^n \right)_t$ ,  $\left( u_j^n \right)_{xx\bar{x}\bar{t}}$ ,  $\left( u_j^{n+1/2} \right)_{\hat{x}}$ ,  $\left( u_j^{n+1/2} \right)_{x\bar{x}\hat{x}}$  ve  $\left( u_j^{n+1/2} \right)_{xx\bar{x}\hat{x}}$  terimleri yerine (2.1.5) ile verilen fark yaklaşımları yazılır ve sonra gerekli düzenlemeler yapılırsa,  $n = 0(1)N - 1$

ve  $j = 1(1)J - 1$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{4h^5}u_{j-3}^{n+1} + \left(\frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} - \frac{1}{h^5}\right)u_{j-2}^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{2}{4h^3} + \frac{5}{4h^5} - \frac{1}{4h}z_m\right)u_{j-1}^{n+1} \\
& + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4}\right)u_j^{n+1} + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{2}{4h^3} - \frac{5}{4h^5} + \frac{1}{4h}z_m\right)u_{j+1}^{n+1} \\
& + \left(\frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} + \frac{1}{h^5}\right)u_{j+2}^{n+1} - \frac{1}{4h^5}u_{j+3}^{n+1} \\
& = -\frac{1}{4h^5}u_{j-3}^n + \left(\frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} + \frac{1}{h^5}\right)u_{j-2}^n + \left(-\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{2}{4h^3} - \frac{5}{4h^5} + \frac{1}{4h}z_m\right)u_{j-1}^n \\
& + \left(\frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4}\right)u_j^n + \left(-\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{2}{4h^3} + \frac{5}{4h^5} - \frac{1}{4h}z_m\right)u_{j+1}^n \\
& + \left(\frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} - \frac{1}{h^5}\right)u_{j+2}^n + \frac{1}{4h^5}u_{j+3}^n
\end{aligned} \tag{2.2.2}$$

bulunur.

(2.2.2) cebirsel denklem sisteminin çözülebilmesi için  $j = 1, 2, J - 2, J - 1$  konum noktalarında (2.2.2) şemasında problemin çözüm bölgesi içerisine düşmeyen  $n$ -inci ve  $(n + 1)$ -inci zaman adımlarındaki  $u$ 'nun  $u_{-2}, u_{-1}, u_{J+1}$  ve  $u_{J+2}$  hayali değerleri Lin-I'dekine benzer şekilde yok edilir ve sonra (2.2.2)'de yerlerine yazılırsa,  $n = 1(1)N - 1$  olmak üzere,

$$\begin{aligned}
& j = 1 \text{ için} \\
& (\alpha_2 + \alpha_4)u_j^{n+1} + \alpha_5u_{j+1}^{n+1} + \alpha_6u_{j+2}^{n+1} + \alpha_7u_{j+3}^{n+1} \\
& = (\beta_2 + \beta_4)u_j^n + \beta_5u_{j+1}^n + \beta_6u_{j+2}^n + \beta_7u_{j+3}^n \\
& j = 2 \text{ için} \\
& (\alpha_1 + \alpha_3)u_{j-1}^{n+1} + \alpha_4u_j^{n+1} + \alpha_5u_{j+1}^{n+1} + \alpha_6u_{j+2}^{n+1} + \alpha_7u_{j+3}^{n+1} \\
& = (\beta_1 + \beta_3)u_{j-1}^n + \beta_4u_j^n + \beta_5u_{j+1}^n + \beta_6u_{j+2}^n + \beta_7u_{j+3}^n \\
& j = 3(1)J - 3 \\
& \alpha_1u_{j-3}^{n+1} + \alpha_2u_{j-2}^{n+1} + \alpha_3u_{j-1}^{n+1} + \alpha_4u_j^{n+1} + \alpha_5u_{j+1}^{n+1} + \alpha_6u_{j+2}^{n+1} + \alpha_7u_{j+3}^{n+1} \\
& = \beta_1u_{j-3}^n + \beta_2u_{j-2}^n + \beta_3u_{j-1}^n + \beta_4u_j^n + \beta_5u_{j+1}^n + \beta_6u_{j+2}^n + \beta_7u_{j+3}^n \\
& j = J - 2 \text{ için} \\
& \alpha_1u_{j-3}^{n+1} + \alpha_2u_{j-2}^{n+1} + \alpha_3u_{j-1}^{n+1} + \alpha_4u_j^{n+1} + (\alpha_5 + \alpha_7)u_{j+1}^{n+1} \\
& = \beta_1u_{j-3}^n + \beta_2u_{j-2}^n + \beta_3u_{j-1}^n + \beta_4u_j^n + (\beta_5 + \beta_7)u_{j+1}^n \\
& j = J - 1 \text{ için} \\
& \alpha_1u_{j-3}^{n+1} + \alpha_2u_{j-2}^{n+1} + \alpha_3u_{j-1}^{n+1} + (\alpha_4 + \alpha_6)u_j^{n+1} \\
& = \beta_1u_{j-3}^n + \beta_2u_{j-2}^n + \beta_3u_{j-1}^n + (\beta_4 + \beta_6)u_j^n
\end{aligned} \tag{2.2.3}$$

$(J - 1)$  bilinmeyenli  $(J - 1)$  tane lineer cebirsel denklemden oluşan karesel denklem sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{1}{4h^5}, & \beta_1 &= -\frac{1}{4h^5}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} - \frac{1}{h^5}, & \beta_2 &= \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} + \frac{1}{h^5}, \\ \alpha_3 &= -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{2}{4h^3} + \frac{5}{4h^5} - \frac{z_m}{4h}, & \beta_3 &= -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{2}{4h^3} - \frac{5}{4h^5} + \frac{z_m}{4h}, \\ \alpha_4 &= \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4}, & \beta_4 &= \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4}, \\ \alpha_5 &= -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{2}{4h^3} - \frac{5}{4h^5} + \frac{z_m}{4h}, & \beta_5 &= -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{2}{4h^3} + \frac{5}{4h^5} - \frac{z_m}{4h}, \\ \alpha_6 &= \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} + \frac{1}{h^5}, & \beta_6 &= \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} - \frac{1}{h^5}, \\ \alpha_7 &= -\frac{1}{4h^5}, & \beta_7 &= \frac{1}{4h^5}\end{aligned}$$

dir. Bu sistem matris formunda açık biçimde

$$\begin{aligned}& \left[ \begin{array}{cccccccc} \alpha_2 + \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & & & & \\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & & & \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 + \alpha_7 \\ & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 + \alpha_6 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \\ \vdots \\ u_{j-4}^{n+1} \\ u_{j-3}^{n+1} \\ u_{j-2}^{n+1} \\ u_{j-1}^{n+1} \end{bmatrix} \\ & \underbrace{\hspace{12cm}}_A \underbrace{\hspace{2cm}}_{U^{n+1}} \\ & = \left[ \begin{array}{cccccccc} \beta_2 + \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & & & & \\ \beta_1 + \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & & & \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 & \\ & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 \\ & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 + \beta_7 \\ & & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 + \beta_6 \end{array} \right] \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ u_4^n \\ \vdots \\ u_{j-4}^n \\ u_{j-3}^n \\ u_{j-2}^n \\ u_{j-1}^n \end{bmatrix} \\ & \underbrace{\hspace{12cm}}_B \underbrace{\hspace{2cm}}_{U^n}\end{aligned}$$

veya kısaca

$$AU^{n+1} = BU^n \quad (2.2.4)$$

olarak yazılabilir. Yukarıdaki cebirsel denklem sistemi Lin-I’de olduğu gibi direkt yöntemlerden biri yardımıyla kolayca çözülür. Çözümeye başlamak için bir başlangıç vektörüne ihtiyaç duyulur. Başlangıç vektörü  $U^0$ , (1.1.2) ile verilen başlangıç şartından

$$U^0 = \begin{bmatrix} u(x_0, 0) \\ u(x_1, 0) \\ u(x_2, 0) \\ \vdots \\ u(x_{J-1}, 0) \\ u(x_J, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^0 \\ u_1^0 \\ u \\ \vdots \\ u_{J-1}^0 \\ u_J^0 \end{bmatrix}$$

dir. Böylece, (2.2.4)'dan  $n = 0$  için ilk zaman adımında  $U^1$  değerleri  $U^0$  değerleri kullanılarak,  $n = 1$  için ikinci zaman adımında  $U^2$  değerleri  $U^1$  değerleri kullanılarak ve benzer şekilde devam edilerek istenilen  $T$  zamanındaki  $U^{n+1}$  değerleri hesaplanır.

Yine burada da belirtmek gerekir ki Lin-I yaklaşımında olduğu gibi (2.2.4) sistemi bir direkt yöntem yardımıyla çözüleceğinden  $\frac{1}{2}(u^2)_x$  lineer olmayan teriminde

$$z_m = u$$

olarak alındığından bu eşitlikte  $U$  yerine her bir  $n$ . zaman adımında

$$U^* = \frac{U^{n+1} + U^n}{2}$$

olarak tanımlanan iç iterasyon birkaç defa uygulandı. Başlangıçta, İterasyonun ilk adımı için  $U^{n+1} = U^n$  alındı ve (2.2.4) sistemi çözüldü. Elde edilen yeni  $U$  değerler iç iterasyonda  $U^{n+1}$  de yerine yazıldı ve elde edilen sistem tekrar çözüldü. Bu şekilde iç iterasyon işlemi bir kaç defa tekrarlanarak herbir zaman adımındaki yaklaşık çözümler iyileştirilerek elde edildi.

Bu şemanın da kararlılık analizi Lin-I şemasına benzer biçimde incelendiğinde şemanın şartsız kararlı olduğu kolayca görülür. Bu sebeple benzer işlemleri bir kez daha yapmaya gerek yoktur.

### 2.3 Lineerleştirme -III (Lin-III)

Bu lineerleştirmede ise (2.1.1) ile verilen Crank-Nicolson korunumlu sonlu fark yaklaşımındaki lineer olmayan  $\frac{1}{2}(u^2)_x$  terimi

$$\frac{1}{2}(u^2)_x = uu_x$$

şeklinde yazılır ve buradaki  $uu_x$  terimi için Crank-Nicolson yaklaşımı uygulanırsa

$$uu_x = \frac{(uu_x)^{n+1} + (uu_x)^n}{2}$$

elde edilir.  $(uu_x)^{n+1}$  terimi yerine  $u^{n+1}u_x^n + u^n u_x^{n+1} - (uu_x)^n$  Rubin-Graves [57] yaklaşımı yazılırsa yukarıdaki eşitlik

$$\begin{aligned} uu_x &= \frac{1}{2} [u^{n+1}u_x^n + u^n u_x^{n+1} - (uu_x)^n + (uu_x)^n] \\ &= \frac{1}{2} [u^{n+1}u_x^n + u^n u_x^{n+1}] \\ &= \frac{1}{2} \left[ (u_j^{n+1}) (u_j^n)_{\hat{x}} + (u_j^n) (u_j^{n+1})_{\hat{x}} \right] \end{aligned} \quad (2.3.1)$$

olur. (2.1.1) denkleminde  $\frac{1}{2} (u^2)_x$  terimi yerine (2.3.1) olarak tanımlanan yaklaşım yazılırsa (1.1.1)-(1.1.3) denklemleri ile verilen başlangıç sınır değer probleminin Crank-Nicolson korunumlu sonlu fark şeması

$$\begin{aligned} & (u_j^n)_t + (u_j^n)_{xx\bar{x}\bar{t}} + (u_j^{n+1/2})_{\hat{x}} + (u_j^{n+1/2})_{xx\hat{x}} - (u_j^{n+1/2})_{xx\bar{x}\bar{t}} \\ & + \frac{1}{2} \left[ (u_j^{n+1}) (u_j^n)_{\hat{x}} + (u_j^n) (u_j^{n+1})_{\hat{x}} \right] = 0, \quad \begin{array}{l} n = 0(1)N - 1 \\ j = 1(1)J - 1 \end{array} \\ & u_j^0 = u_j^0(x_j), \quad j = 0(1)J \\ & (u_0^n)_{\hat{x}} = (u_j^n)_{\hat{x}} = 0, \\ & (u_0^n)_{\hat{x}\bar{x}} = 0, \quad n = 0(1)N \\ & (u_0^n)_{\hat{x}x} = 0, \end{aligned}$$

olarak yazılır. Şemadaki  $(u_j^n)_t$ ,  $(u_j^n)_{xx\bar{x}\bar{t}}$ ,  $(u_j^{n+1/2})_{\hat{x}}$ ,  $(u_j^{n+1/2})_{xx\hat{x}}$  ve  $(u_j^{n+1/2})_{xx\bar{x}\bar{t}}$  terimler yerine (2.1.5) de verilen yaklaşımlar yazılır ve sonra gerekli düzenlemeler yapılırsa,  $n = 0(1)N$  ve  $j = 1(1)J - 1$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4h^5} u_{j-3}^{n+1} + \left( \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} - \frac{1}{h^5} \right) u_{j-2}^{n+1} + \left( -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{2}{4h^3} + \frac{5}{4h^5} - \frac{1}{4h} u_j^n \right) u_{j-1}^{n+1} \\ & + \left( \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{4h} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \right) u_j^{n+1} + \left( -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{2}{4h^3} - \frac{5}{4h^5} + \frac{1}{4h} u_j^n \right) u_{j+1}^{n+1} \\ & + \left( \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} + \frac{1}{h^5} \right) u_{j+2}^{n+1} - \frac{\beta}{4h^5} u_{j+3}^{n+1} \\ & = -\frac{1}{4h^5} u_{j-3}^n + \left( \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} + \frac{1}{h^5} \right) u_{j-2}^n + \left( -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{2}{4h^3} - \frac{5}{4h^5} \right) u_{j-1}^n + \left( \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} \right) u_j^n \\ & + \left( -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{2}{4h^3} + \frac{5}{4h^5} \right) u_{j+1}^n + \left( \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} - \frac{1}{h^5} \right) u_{j+2}^n + \frac{1}{4h^5} u_{j+3}^n \end{aligned} \quad (2.3.2)$$

elde edilir. (2.3.2)'de problemin çözüm bölgesi içerisine düşmeyen  $n$ -inci ve  $(n + 1)$ -inci zaman adımlarındaki  $u$  'nun  $u_{-2}, u_{-1}, u_{J+1}$  ve  $u_{J+2}$  hayali değerleri bir önceki lineerleştirmelerde olduğu gibi yok edilir ve sonra (2.3.2)'de yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
j = 1 \text{ için} \quad & (\alpha_2 + \alpha_4)u_j^{n+1} + \alpha_5u_{j+1}^{n+1} + \alpha_6u_{j+2}^{n+1} + \alpha_7u_{j+3}^{n+1} \\
& = (\beta_2 + \beta_4)u_j^n + \beta_5u_{j+1}^n + \beta_6u_{j+2}^n + \beta_7u_{j+3}^n \\
j = 2 \text{ için} \quad & (\alpha_1 + \alpha_3)u_{j-1}^{n+1} + \alpha_4u_j^{n+1} + \alpha_5u_{j+1}^{n+1} + \alpha_6u_{j+2}^{n+1} + \alpha_7u_{j+3}^{n+1} \\
& = (\beta_1 + \beta_3)u_{j-1}^n + \beta_4u_j^n + \beta_5u_{j+1}^n + \beta_6u_{j+2}^n + \beta_7u_{j+3}^n \\
j = 3(1)J - 3 \quad & \alpha_1u_{j-3}^{n+1} + \alpha_2u_{j-2}^{n+1} + \alpha_3u_{j-1}^{n+1} + \alpha_4u_j^{n+1} + \alpha_5u_{j+1}^{n+1} + \alpha_6u_{j+2}^{n+1} + \alpha_7u_{j+3}^{n+1} \\
& = \beta_1u_{j-3}^n + \beta_2u_{j-2}^n + \beta_3u_{j-1}^n + \beta_4u_j^n + \beta_5u_{j+1}^n + \beta_6u_{j+2}^n + \beta_7u_{j+3}^n \\
j = J - 2 \text{ için} \quad & \alpha_1u_{j-3}^{n+1} + \alpha_2u_{j-2}^{n+1} + \alpha_3u_{j-1}^{n+1} + \alpha_4u_j^{n+1} + (\alpha_5 + \alpha_7)u_{j+1}^{n+1} \\
& = \beta_1u_{j-3}^n + \beta_2u_{j-2}^n + \beta_3u_{j-1}^n + \beta_4u_j^n + (\beta_5 + \beta_7)u_{j+1}^n \\
j = J - 1 \text{ için} \quad & \alpha_1u_{j-3}^{n+1} + \alpha_2u_{j-2}^{n+1} + \alpha_3u_{j-1}^{n+1} + (\alpha_4 + \alpha_6)u_j^{n+1} \\
& = \beta_1u_{j-3}^n + \beta_2u_{j-2}^n + \beta_3u_{j-1}^n + (\beta_4 + \beta_6)u_j^n
\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

$(J - 1)$  bilinmeyenli  $(J - 1)$  tane lineer cebirsel denklemden oluşan karesel denklem sistemi elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= \frac{1}{4h^5}, & \beta_1 &= -\frac{1}{4h^5}, \\
\alpha_2 &= \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} - \frac{1}{h^5}, & \beta_2 &= \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} + \frac{1}{h^5}, \\
\alpha_3 &= -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{2}{4h^3} + \frac{5}{4h^5} - \frac{1}{4h}(u_j^n), & \beta_3 &= -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{2}{4h^3} - \frac{5}{4h^5}, \\
\alpha_4 &= \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{4h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), & \beta_4 &= \frac{1}{k} + \frac{6}{kh^4}, \\
\alpha_5 &= -\frac{4}{kh^4} + \frac{1}{4h} - \frac{2}{4h^3} - \frac{5}{4h^5} + \frac{1}{4h}(u_j^n), & \beta_5 &= -\frac{4}{kh^4} - \frac{1}{4h} + \frac{2}{4h^3} + \frac{5}{4h^5}, \\
\alpha_6 &= \frac{1}{kh^4} + \frac{1}{4h^3} + \frac{1}{h^5}, & \beta_6 &= \frac{1}{kh^4} - \frac{1}{4h^3} - \frac{1}{h^5}, \\
\alpha_7 &= -\frac{1}{4h^5}, & \beta_7 &= \frac{1}{4h^5}
\end{aligned}$$

dir. (2.3.3) lineer denklem sistemi matris formunda açık biçimde



$$\begin{aligned}
& \underbrace{\begin{bmatrix} \alpha_2 + \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ \alpha_1 + \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 & \alpha_7 \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & \alpha_6 \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 + \alpha_7 \\ & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 + \alpha_6 \end{bmatrix}}_A \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ u_4^{n+1} \\ \vdots \\ u_{J-4}^{n+1} \\ u_{J-3}^{n+1} \\ u_{J-2}^{n+1} \\ u_{J-1}^{n+1} \end{bmatrix}}_{U^{n+1}} \\
= & \underbrace{\begin{bmatrix} \beta_2 + \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 \\ \beta_1 + \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots \\ & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 & \beta_7 \\ & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & \beta_6 \\ & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 + \beta_7 \\ & & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 + \beta_6 \end{bmatrix}}_B \underbrace{\begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ u_4^n \\ \vdots \\ u_{J-4}^n \\ u_{J-3}^n \\ u_{J-2}^n \\ u_{J-1}^n \end{bmatrix}}_{U^n}
\end{aligned}$$

veya kısaca

$$AU^{n+1} = BU^n \quad (2.3.4)$$

olarak yazılabilir. Bu sistemin çözümüne başlamak için bir başlangıç vektörüne ihtiyaç duyulur. Başlangıç vektörü  $U^0$ , (1.1.2) ile verilen başlangıç koşulundan

$$U^0 = \begin{bmatrix} u(x_0, 0) \\ u(x_1, 0) \\ u(x_2, 0) \\ \vdots \\ u(x_{J-1}, 0) \\ u(x_J, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^0 \\ u_1^0 \\ u \\ \vdots \\ u_{J-1}^0 \\ u_J^0 \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Böylece (2.3.4)'dan  $n = 0$  için ilk zaman adımında  $U^1$  değerleri  $U^0$  değerleri kullanılarak,  $n = 1$  için ikinci zaman adımında  $U^2$  değerleri  $U^1$  değerleri kullanılarak ve benzer şekilde devam edilerek istenilen  $T$  zamanındaki  $U^{n+1}$  değerleri hesaplanır.

Bu şemanın da kararlılık analizi Lin-I şemasına benzer biçimde incelendiğinde şemanın şartsız kararlı olduğu kolayca görülür. Bu sebeple benzer işlemleri bir kez daha yapmaya gerek yoktur.

## 2.4 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, yukarıda (1.1.1)-(1.1.3) denklemleri ile verilen problemin üç farklı lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson korunumlu sonlu fark yöntemi ile elde edilen nümerik şemaları çözüldü. Problemin tam çözümü bilindiği için yöntemin etkisini, doğruluğunu ve ne kadar yakın çözümler ürettiğini ölçmek ve göstermek için

$$L_2 = \left[ h \sum \left| u_j^{tam} - u_j^{num} \right|^2 \right]^{1/2}$$

$$L_\infty = \max \left| u_j^{tam} - u_j^{num} \right|$$

olarak verilen  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları,

$$E(t) = \int_{x_L}^{x_R} [u^2 + u_{xx}^2] dx [= E(0)] \approx h \sum_{j=0}^J \left( u_j^2 + (u_{xx})_j^2 \right)$$

$$Q(t) = \int_{x_L}^{x_R} u(x,t) dx [= Q(0)] \approx h \sum_{j=0}^J u_j$$

olarak verilen sırasıyla enerji ve kütleye karşılık gelen korunum sabitleri ile birlikte her bir şemanın

$$\text{Mertebe} = \log_2(L(2h, 2\Delta t) / L(h, \Delta t))$$

olarak tanımlanan doğruluk (accuracy order) mertebesi hesaplandı. Burada  $L$ ,  $L_2$  veya  $L_\infty$  normlarını temsil eder.

Bu tez çalışmasında tüm hesaplamalar Intel(R) Core(TM) i5 CPU@2.50 GHz 4GB bilgisayar ile MATLAB R2012a sembolik programla dili kullanılarak yapıldı. Nümerik sonuçlar elde edilirken çözüm bölgesi  $[-40, 100]$  aralığı ve son zaman adımı  $T = 40$  seçildi. Ayrıca, elde edilen nümerik sonuçların literatürde mevcut diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlarla karşılaştırılması için aynı parametre değerleri kullanıldı.

İlk olarak Çizelge 2.1'de konum adım uzunluğu  $h = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$  ve zaman adımı uzunluğu  $k = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$  seçilerek Lin-I [48], Lin-II ve Lin-III şemalarından  $T = 40$  zamanında hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları karşılaştırıldı. Çizelge incelendiğinde,  $k = 0.2$  sabit tutulup  $h$  nın  $1/2$  oranında azalan değerleri için,  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları da gittikçe küçülmektedir.  $k$  zaman adım uzunluğunun  $k = 0.1, 0.05, 0.025$  değerleri için de hata normlarının  $k = 0.2$  ile benzer davranış sergilediği, birbirleri ile iyi uyum içinde olduğu ve

**Çizelge 2.1 :** Problem 1'in Lin-II ve Lin-III ile  $h$  ve  $k$  nın farklı değerleri için  $T = 40$ 'da hesaplanan hata normları.

$k$	$h$	Lin-I [48]		Lin-II		Lin-III	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
0.2	0.4	8.58300	2.80564	8.47407	2.75016	8.45163	2.73748
	0.2	3.04774	0.99881	3.01984	0.98464	2.99728	0.97174
	0.1	1.65849	0.54465	1.65139	0.54109	1.62875	0.52816
	0.05	1.31087	0.43096	1.30908	0.43007	1.28641	0.41718
	0.025	1.22397	0.40254	1.22351	0.40231	1.20084	0.38942
0.1	0.4	7.69954	2.51588	7.59102	2.46025	7.58540	2.45707
	0.2	2.15499	0.70534	2.12739	0.69113	2.12175	0.68789
	0.1	0.76333	0.25026	0.75635	0.24669	0.75069	0.24344
	0.05	0.41513	0.13634	0.41335	0.13545	0.40768	0.13222
	0.025	0.32808	0.13634	0.32763	0.10764	0.32195	0.10441
0.05	0.4	7.47845	2.44334	7.37004	2.38768	7.36863	2.38688
	0.2	1.93157	0.63187	1.90410	0.61765	1.90269	0.61684
	0.1	0.53935	0.17657	0.53243	0.17300	0.53101	0.17218
	0.05	0.19092	0.06260	0.18923	0.06170	0.18782	0.06090
	0.025	0.10392	0.03410	0.10348	0.03387	0.10207	0.03307
0.025	0.4	7.42316	2.42520	7.31478	2.36953	7.31443	2.36933
	0.2	1.87571	0.61350	1.84827	0.59928	1.84792	0.59908
	0.1	0.48334	0.15814	0.47645	0.15457	0.47610	0.15436
	0.05	0.13496	0.04415	0.13323	0.04326	0.13288	0.04306
	0.025	0.04778	0.01565	0.04755	0.01543	0.04721	0.01521

zaman adım uzunluğunun küçülmeye devam ederken hata normlarının da gittikçe azaldığı açıkça görülür. Yine çizelgeden, bu çalışmada sunulan Lin-II ve Lin-III lineerleştirilmesi ile elde edilen nümerik sonuçların  $H_u$  [48]'nin verdiği Lin-I'den elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu ve en iyi sonuçların Rubin-Graves lineerleştirme tekniği kullanılması ile elde edilen Lin-III nümerik şemasından hesaplandığı kolayca görülür.

Çizelge 2.2 ve 2.3 de sırasıyla Problem 1'in  $h = k$  nın farklı değerleri için  $T = 10, 20, 30$  ve 40 zamanlarında, Lin-II ve Lin-III şemalarından hesaplanan hata normlarıyla birlikte doğruluk mertebesi verildi ve  $H_u$  vd. [48] tarafından önerilen Lin-I şeması ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Hesaplanan doğruluk mertebesinin  $p = 2$  analitik değerine oldukça yakın değerler olduğu görülmektedir. Her iki çizelgeden Lin-II ve Lin-III şemalarından elde edilen sonuçların Lin-I den daha iyi olduğu ve en iyi sonuçların Lin-III'den elde edildiği açıkça görülmektedir.

**Çizelge 2.2 :** Problem 1'in Lin-II ile  $h$  ve  $k$ 'nin farklı değerleri için  $T=10,20,30,40$ 'da hesaplanan hata normları ve doğruluk mertebeleri.

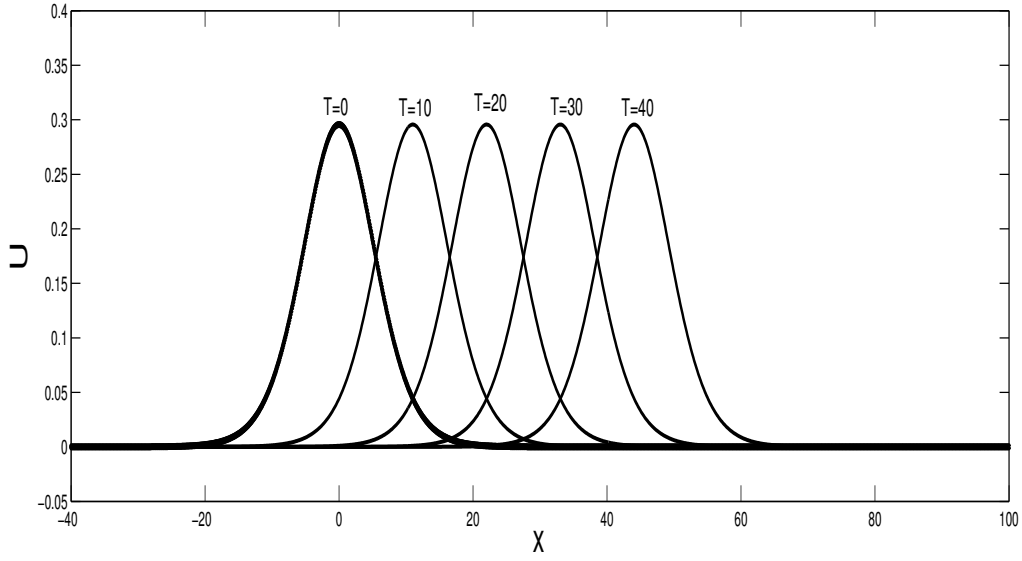
$T$	$h = k$	Lin-II				[48]	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe( $L_2$ )	Mertebe( $L_\infty$ )	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
10	0.4	3.35863	1.14845			3.43837	1.19757
	0.2	0.84294	0.28821	1.9944	1.9945	0.86302	0.30054
	0.1	0.21095	0.07212	1.9985	1.9986	0.21597	0.07520
	0.05	0.05279	0.01804	1.9986	1.9992	0.05401	0.01880
	0.025	0.01335	0.00452	1.9834	1.9968	0.01354	0.00470
20	0.4	6.49752	2.19606			6.61452	2.25734
	0.2	1.63249	0.55209	1.9928	1.9919	1.66202	0.56742
	0.1	0.40864	0.13824	1.9982	1.9977	0.41603	0.14211
	0.05	0.10224	0.03457	1.9989	1.9996	0.10404	0.03554
	0.025	0.02576	0.00865	1.9888	1.9987	0.02603	0.00888
30	0.4	9.36641	3.10440			9.48958	3.16505
	0.2	2.35608	0.78176	1.9911	1.9895	2.38726	0.79726
	0.1	0.58994	0.19578	1.9977	1.9975	0.59774	0.19968
	0.05	0.14760	0.04897	1.9989	1.9993	0.14948	0.04994
	0.025	0.03712	0.01225	1.9914	1.9991	0.03739	0.01248
40	0.4	11.99174	3.90361			12.10156	3.95849
	0.2	3.01984	0.98464	1.9895	1.9871	3.04774	0.99881
	0.1	0.75635	0.24669	1.9973	1.9969	0.76333	0.25026
	0.05	0.18923	0.06170	1.9989	1.9994	0.19092	0.06260
	0.025	0.04755	0.01543	1.9926	1.9995	0.04774	0.01565

**Çizelge 2.3 :** Problem 1'in Lin-III ile  $h$  ve  $k$ 'nın farklı değerleri için  $T=10,20,30,40$ 'da hesaplanan hata normları ve doğruluk mertebeleri.

$T$	$h = k$	Lin-III				[48]	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe( $L_2$ )	Mertebe( $L_\infty$ )	$L_2$	$L_\infty$
10	0.4	3.29269	1.10379			3.43837	1.19757
	0.2	0.82637	0.27699	1.9944	1.9946	0.86302	0.30054
	0.1	0.20680	0.06931	1.9986	1.9987	0.21597	0.07520
	0.05	0.05175	0.01733	1.9986	1.9998	0.05401	0.01880
	0.025	0.01310	0.00433	1.9820	2.0008	0.01354	0.00470
20	0.4	6.39993	2.14032			6.61452	2.25734
	0.2	1.60788	0.53814	1.9929	1.9918	1.66202	0.56742
	0.1	0.40248	0.13472	1.9982	1.9980	0.41603	0.14211
	0.05	0.10070	0.03369	1.9989	1.9996	0.10404	0.03554
	0.025	0.02539	0.00843	1.9877	1.9987	0.02603	0.00888
30	0.4	9.26445	3.04919			9.48958	3.16505
	0.2	2.33029	0.76766	1.9912	1.9899	2.38726	0.79726
	0.1	0.58348	0.19224	1.9978	1.9976	0.59774	0.19968
	0.05	0.14599	0.04808	1.9988	1.9994	0.14949	0.04994
	0.025	0.03673	0.01202	1.9908	2.0000	0.03739	0.01248
40	0.4	11.90286	3.85363			12.10156	3.95849
	0.2	2.99728	0.97174	1.9896	1.9876	3.04774	0.99881
	0.1	0.75069	0.24344	1.9974	1.9970	0.76333	0.25026
	0.05	0.18782	0.06090	1.9989	1.9991	0.19092	0.06260
	0.025	0.04721	0.01523	1.9922	1.9995	0.04774	0.01565

**Çizelge 2.4 :** Problem 1'in Lin-I, Lin-II ve Lin-III ile  $h = k=0.1, 0.05$  ve  $0.025$  değerleri için hesaplanan korunum sabitleri

Yöntem	T	$h = k = 0.1$			$h = k = 0.05$			$h = k = 0.025$		
		$Q^n$	$E^n$	$Q^n$	$E^n$	$Q^n$	$E^n$	$Q^n$	$E^n$	
Lin-I [48]	0	4.12089324	0.83620109	4.12089321	0.83620118	4.12089320	0.83620120	4.12089320	0.83620120	
	10	4.12089231	0.83620109	4.12089220	0.83620119	4.12089212	0.83620131	4.12089212	0.83620131	
	20	4.12089303	0.83620109	4.12089236	0.83620119	4.12089216	0.83620130	4.12089216	0.83620130	
	30	4.12089310	0.83620109	4.12089237	0.83620119	4.12089214	0.83620130	4.12089214	0.83620130	
	40	4.12089299	0.83620109	4.12089234	0.83620119	4.12089215	0.83620130	4.12089215	0.83620130	
Lin-II	0	4.12089324	0.83620109	4.12089321	0.83620118	4.12089320	0.83620120	4.12089320	0.83620120	
	10	4.12089939	0.83620174	4.12089871	0.83621008	4.12089836	0.83633045	4.12089836	0.83633045	
	20	4.12090702	0.83620239	4.12090496	0.83621896	4.12090410	0.83645936	4.12090410	0.83645936	
	30	4.12091526	0.83620311	4.12091122	0.83622796	4.12090975	0.83658848	4.12090975	0.83658848	
	40	4.12092154	0.83620379	4.12091708	0.83623690	4.12091537	0.83671755	4.12091537	0.83671755	
Lin-III	0	4.12089324	0.83620109	4.12089321	0.83620118	4.12089320	0.83620120	4.12089320	0.83620120	
	10	4.12089940	0.83620174	4.12089871	0.83621008	4.12089835	0.83633045	4.12089835	0.83633045	
	20	4.12090742	0.83620239	4.12090505	0.83621898	4.12090413	0.83645940	4.12090413	0.83645940	
	30	4.12091735	0.83620318	4.12091170	0.83622811	4.12090987	0.83658878	4.12090987	0.83658878	
	40	4.12092355	0.83620387	4.12091754	0.83623711	4.12091549	0.83671793	4.12091549	0.83671793	

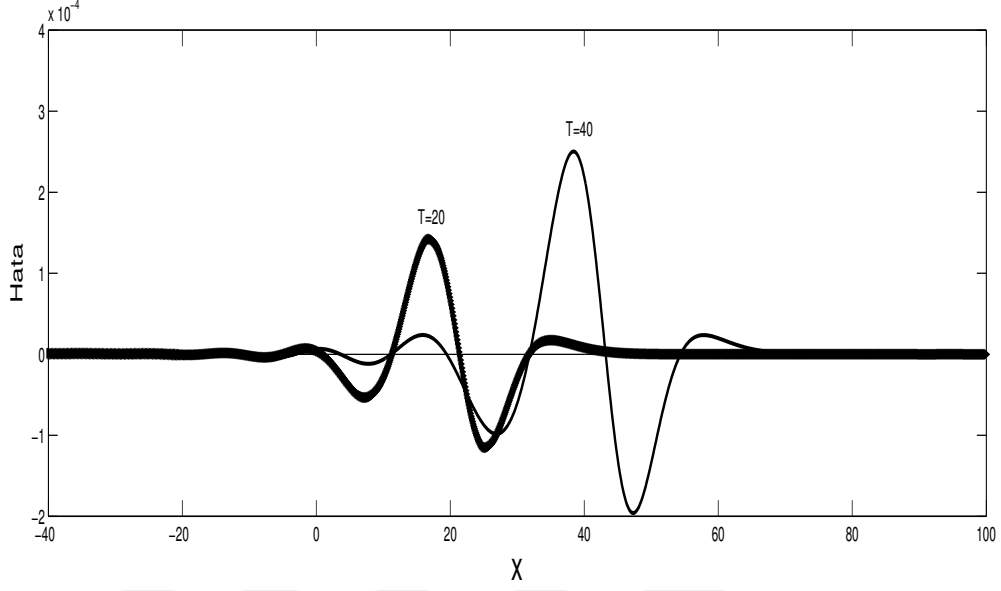


**Şekil 2.1 :** Problem 1'in Lin-I şemasından elde edilen  $h = 0.1$  ve  $k = 0.1$  için farklı  $T$  zamanlarında çözüm grafikleri

Çizelge 2.4'de problem 1'in  $h$  ve  $k$  nin farklı değerleri için  $T = 0, 10, 20, 30, 40$  zamanlarında Lin-I, Lin-II ve Lin-III şemalarından elde edilen ayrık korunum sabitlerinin değerleri listelendi. Çizelgeden  $Q^n$  kütle ve  $E^n$  enerji değişmezlerinin iyi korunduğu ve her üç yöntemle elde edilen sonuçların birbirleri ile oldukça iyi uyum içerisinde olduğu görülmektedir. Değişmezlerin artan zamanla korunuyor olması yani neredeyse değişmeden sabit kalması yaklaşık çözümlerin analitik çözümlere yeterince yakın olduğunun bir garantisidir.

Her üç lineerleştirme tekniği ile elde edilen nümerik çözümler birbirlerine oldukça yakın değerlere sahip olduğundan grafik üzerinde ayırt edilemeyeceğinden ayrık çözümlerin sürekliliğini ve göz önüne alınan problemin fiziksel davranışını ne kadar doğru sergilediğini göstermek amacıyla sadece Lin-I tekniği ile elde edilen nümerik sonuçların dalga grafikleri  $h = k = 0.1$  için  $T = 0(10)40$  zamanlarında Şekil 2.1'de sunuldu. Şekilden, tek soliteri dalganın artan zamanla eksenin sağ tarafına doğru şeklini ve hemen hemen genliğini koruyarak hareket ettiği görülmektedir.

Çizelge 2.5'de, her üç yöntemle elde edilen soliteri dalgaların genlikleri ve konumları verilmektedir. Çizelge 2.5'den Lin-I, Lin-II ve Lin-III şemalarından elde edilen soliteri dalgaların genliklerinin birbirleri ile iyi uyum içinde olduğu ve  $(x,t) = (0,0)$  noktasındaki dalganın genliğin 0.29566 olan analitik değeri ile oldukça yakın olduğu görülmektedir.



**Şekil 2.2 :** Problem 1'in Lin-I şemasından elde edilen  $h = 0.1$  ve  $k = 0.1$  için farklı  $T$  zamanlarında hata grafikleri

**Çizelge 2.5 :** Problem 1'in Lin-I, Lin-II ve Lin-III ile farklı  $T$  zamanlarında hesaplanan maksimum genlik değerleri ve konumları.

$T$	$x$	Genlik		
		Lin-I	Lin-II	Lin-III
0	0.00	0.29566	0.29566	0.29566
10	11.00	0.29565	0.29565	0.29566
20	22.00	0.29563	0.29563	0.29564
30	33.00	0.29561	0.29561	0.29562
40	44.00	0.29559	0.29559	0.29560



Şekil 2.2’de ise  $h = k = 0.1$  için hata grafiği sunuldu. Şekilden görüldüğü üzere,  $T = 20$  zamanında hata yaklaşık olarak  $1.5 \times 10^{-4}$  iken,  $T = 40$  zamanında  $2.4 \times 10^{-4}$  olacak şekilde artmıştır. Zamanın ilerlemesi ve yuvarlama hataları ile birlikte hatanın minimal seviyede artması bazı nümerik yöntemler için beklenen bir sonuçtur.



### 3. KONUMA GÖRE PARÇALANMIŞ ROSENAU-KAWAHARA DENKLEMİNİN KORUNUMLU SONLU FARK YÖNTEMİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde (1.1.1) ile verilen Rosenau-Kawahara denklemi,  $v(x,t) = u_{xxx}(x,t)$  değişken değişimi kullanılarak konuma göre ayrıklaştırılmış

$$\begin{cases} u_t + v_{xt} + u_x + v - v_{xx} + \frac{1}{2} (u^2)_x = 0 \\ v - u_{xxx} = 0 \end{cases} \quad (3.0.1)$$

ikili (coupled) diferansiyel denklem sistemine dönüştürüldükten sonra ele alındı. Bu sistemin başlangıç ve sınır şartları (1.0.9) dan

$$\begin{cases} u(x,0) = u_0(x), \\ v(x,0) = v_0(x), \\ u(x_L,t) = u(x_R,t) = 0, \\ u_x(x_L,t) = u_x(x_R,t) = 0 \\ u_{xx}(x_L,t) = u_{xx}(x_R,t) = 0, \\ v(x_L,t) = v(x_R,t) = 0 \\ v_x(x_L,t) = v_x(x_R,t) = 0 \end{cases} \quad \begin{matrix} x \in [x_L, x_R], \\ t \in [0, T] \end{matrix} \quad (3.0.2)$$

dir. Burada  $v(x,0)$  değeri  $v(x,0) = u_{xxx}(x,0)$ 'dan,  $c_1 = -\frac{35}{12} + \frac{35}{156}\sqrt{205}$ ,  $c_2 = \frac{1}{12}\sqrt{-13 + \sqrt{205}}$ , ve  $c_3 = \frac{1}{13}\sqrt{205}$  olmak üzere,

$$v(x,0) = \frac{56c_1c_2^2 \sinh(c_2x)}{\cosh^5(c_2x)} - \frac{120c_1c_2^3 \sinh^3(c_2x)}{\cosh^7(c_2x)}$$

dir. Sistemde görülen  $\frac{1}{2} (u^2)_x$  lineer olmayan terimi yerine yine bir önceki bölümde göz önüne alınan üç farklı lineerleştirme tekniği kullanıldı ve kararlılık analizi von-Neumann yöntemi ile incelendi. Ayrıca, şemalardan elde edilen ayrık çözümler daha önceki araştırmacıların verdikleri sonuçlarla birlikte kendi içerisinde karşılaştırılarak çizelgeler ve grafikler halinde sunuldu.

#### 3.1 Lineerleştirme-I (Lin-I)

Bu lineerleştirmede, (3.0.1) ile verilen konuma göre parçalanmış Rosenau-Kawahara denkleminin birinci denkleminde görülen  $\frac{1}{2} (u^2)_x$  lineer olmayan terimi yerine Hu vd. [48] tarafından önerilen (2.1.3) yaklaşımı ve korunumlu sonlu fark yöntemi kullanılırsa ikili sistemin

Crank-Nicolson korunumlu kapalı sonlu fark yaklaşımı,  $n = 1(1)N - 1$  ve  $j = 1(1)J - 1$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \left(u_j^n\right)_t + \left(v_j^n\right)_{\hat{x}t} + \left(u_j^{n+1/2}\right)_{\hat{x}} + v_j^{n+1/2} - \left(v_j^{n+1/2}\right)_{\bar{x}\hat{x}} \\ & + \frac{1}{3} \left\{ u_j^{n+1/2} \left(u_j^{n+1/2}\right)_{\hat{x}} + \left[ \left(u_j^{n+1/2}\right)^2 \right]_{\hat{x}} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

$$v_j^{n+1/2} - \left(u_j^{n+1/2}\right)_{\bar{x}\hat{x}} = 0$$

olarak yazılabilir. (2.1.2) ile verilen sonlu fark operatörleri kullanılırsa (3.1.1) denklem sisteminde görülen  $\left(u_j^n\right)_t$ ,  $\left(v_j^n\right)_{\hat{x}t}$ ,  $\left(u_j^{n+1/2}\right)_{\hat{x}}$ ,  $v_j^{n+1/2}$ ,  $\left(v_j^{n+1/2}\right)_{\bar{x}\hat{x}}$  ve  $\left(u_j^{n+1/2}\right)_{\bar{x}\hat{x}}$  terimleri yerine

$$\begin{aligned} \left(u_j^n\right)_t &= \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k}, \\ \left(v_j^n\right)_{\hat{x}t} &= \frac{1}{2kh} \left( v_{j+1}^{n+1} - v_{j-1}^{n+1} - v_{j+1}^n + v_{j-1}^n \right), \\ \left(u_j^{n+1/2}\right)_{\hat{x}} &= \frac{1}{4h} \left( u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1} + u_{j+1}^n - u_{j-1}^n \right), \\ \left(v_j^{n+1/2}\right) &= \frac{v_j^{n+1} + v_j^n}{2}, \\ \left(v_j^{n+1/2}\right)_{\bar{x}\hat{x}} &= \frac{1}{2h^2} \left( v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1} + v_{j+1}^n - 2v_j^n + v_{j-1}^n \right), \\ \left(u_j^{n+1/2}\right)_{\bar{x}\hat{x}} &= \frac{(u_{j+2}^{n+1} - u_{j-2}^{n+1})}{4h^3} - \frac{2(u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1})}{4h^3} + \frac{(u_{j+2}^n - u_{j-2}^n)}{4h^3} - \frac{2(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n)}{4h^3} \end{aligned} \quad (3.1.2)$$

yaklaşımları yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,  $n = 1(1)N - 1$  ve  $j = 1(1)J - 1$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{1}{4h} - \frac{\phi_1}{4h} - \frac{\phi_3}{4h} \right) u_{j-1}^{n+1} + \frac{1}{k} u_j^{n+1} + \left( \frac{1}{4h} + \frac{\phi_1}{4h} + \frac{\phi_2}{4h} \right) u_{j+1}^{n+1} \\ & + \left( -\frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2} \right) v_{j-1}^{n+1} + \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{2h^2} \right) v_j^{n+1} + \left( \frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2} \right) v_{j+1}^{n+1} \\ & = \left( \frac{1}{4h} + \frac{\phi_1}{4h} + \frac{\phi_3}{4h} \right) u_{j-1}^n + \frac{1}{k} u_j^n + \left( -\frac{1}{4h} - \frac{\phi_1}{4h} - \frac{\phi_2}{4h} \right) u_{j+1}^n \\ & + \left( -\frac{1}{2kh} + \frac{1}{2h^2} \right) v_{j-1}^n + \left( -\frac{1}{2} - \frac{2}{2h^2} \right) v_j^n + \left( \frac{1}{2kh} + \frac{1}{2h^2} \right) v_{j+1}^n \end{aligned} \quad (3.1.3)$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4h^3}u_{j-2}^{n+1} - \frac{2}{4h^3}u_{j-1}^{n+1} + \frac{2}{4h^3}u_{j+1}^{n+1} - \frac{1}{4h^3}u_{j+2}^{n+1} + \frac{1}{2}v_j^{n+1} \\ & = -\frac{1}{4h^3}u_{j-2}^n + \frac{2}{4h^3}u_{j-1}^n - \frac{2}{4h^3}u_{j+1}^n + \frac{1}{4h^3}u_{j+2}^n - \frac{1}{2}v_j^n \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

sonlu fark şeması elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} \phi_1 &= \frac{1}{3} \left( u_j^{n+1/2} \right) \\ \phi_2 &= \frac{1}{3} \left( u_{j+1}^{n+1/2} \right) \\ \phi_3 &= \frac{1}{3} \left( u_{j-1}^{n+1/2} \right) \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

dir. (3.1.3) ve (3.1.4) coupled cebirsel denklem sisteminin çözülebilmesi için  $j = 1$  ve  $j = J - 1$  konumlarında sistemin ikinci denkleminde ortaya çıkan problemin çözüm bölgesi içerisine düşmeyen  $n$ -inci ve  $(n + 1)$ -inci zaman adımlarındaki  $u$  'nun  $u_{-1}$  ve  $u_{J+1}$  hayali değerlerinin yok edilmesi gerekir. Bunun için  $u_{\hat{x}}(x_L, t) = u_{\hat{x}}(x_R, t) = 0$  sınır şartları kullanılırsa

$$(u_j^n)_{\hat{x}} = \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}$$

olmak üzere

$$j = 0 \text{ için } (u_0^n)_{\hat{x}} = \frac{u_1^n - u_{-1}^n}{2h} = 0 \text{ olup buradan } u_{-1}^n = u_1^n$$

ve

$$j = J - 1 \text{ için } (u_{J-1}^n)_{\hat{x}} = \frac{u_{J+1}^n - u_{J-1}^n}{2h} = 0 \text{ olup buradan } u_{J+1}^n = u_{J-1}^n \text{ bulunur.}$$

Bunlar (3.1.4) 'de yerlerine yazılırsa (3.1.3) ve (3.1.4) den,  $(2J - 2)$  bilinmeyenli  $(2J - 2)$  tane denklemden oluşan

$$\begin{aligned} & \alpha_2 u_j^{n+1} + \alpha_3 u_{j+1}^{n+1} + \beta_2 v_j^{n+1} + \beta_3 v_{j+1}^{n+1} \\ j = 1 \text{ için} & \\ & = \alpha_2 u_j^{n+1} + \alpha_1 u_{j+1}^{n+1} - \beta_2 v_j^{n+1} - \beta_1 v_{j+1}^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha_1 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_2 u_j^{n+1} + \alpha_3 u_{j+1}^{n+1} + \beta_1 v_{j-1}^{n+1} + \beta_2 v_j^{n+1} + \beta_3 v_{j+1}^{n+1} \\ j = 2(1)J - 2 & \\ & = \alpha_3 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_2 u_j^{n+1} + \alpha_1 u_{j+1}^{n+1} - \beta_3 v_{j-1}^{n+1} - \beta_2 v_j^{n+1} - \beta_1 v_{j+1}^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \alpha_1 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_2 u_j^{n+1} + \beta_1 v_{j-1}^{n+1} + \beta_2 v_j^{n+1} \\ j = J - 1 \text{ için} & \\ & = \alpha_3 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_2 u_j^{n+1} - \beta_3 v_{j-1}^{n+1} - \beta_2 v_j^{n+1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
j = 1 \text{ için} \quad & \gamma_1 u_j^{n+1} - \gamma_2 u_{j+1}^{n+1} - \gamma_1 u_{j+2}^{n+1} + b_1 v_j^{n+1} \\
& = -\gamma_1 u_j^n + \gamma_2 u_{j+1}^n + \gamma_1 u_{j+2}^n - b_1 v_j^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j = 2(1)J-2 \quad & \gamma_1 u_{j-2}^{n+1} + \gamma_2 u_{j-1}^{n+1} - \gamma_2 u_{j+1}^{n+1} - \gamma_1 u_{j+2}^{n+1} + b_1 v_j^{n+1} \\
& = -\gamma_1 u_{j-2}^n - \gamma_2 u_{j-1}^n + \gamma_2 u_{j+1}^n + \gamma_1 u_{j+2}^n - b_1 v_j^n
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
j = J-1 \text{ için} \quad & \gamma_1 u_{j-2}^{n+1} + \gamma_2 u_{j-1}^{n+1} - \gamma_1 u_j^{n+1} + b_1 v_{j+1}^{n+1} \\
& = -\gamma_1 u_{j-2}^n - \gamma_2 u_{j-1}^n + \gamma_1 u_j^n - b_1 v_{j+1}^n
\end{aligned}$$

lineer karesel cebirsel denklem sistemi elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= -\frac{1}{4h} - \frac{\phi_1}{4h} - \frac{\phi_3}{4h}, & \beta_1 &= -\frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2}, \\
\alpha_2 &= \frac{1}{k}, & \beta_2 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2h^2}, \\
\alpha_3 &= \frac{1}{4h} + \frac{\phi_1}{4h} + \frac{\phi_2}{4h}, & \beta_3 &= \frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2}, \\
\gamma_1 &= \frac{1}{4h^3}, & b_1 &= \frac{1}{2}, \\
\gamma_2 &= -\frac{2}{4h^3}
\end{aligned}$$

olup

$$\begin{aligned}
A_{11}^{n+1} &= \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & & & & & & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & & & & & & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & & & & & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & & & & \\ & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & & & & \\ & & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & & & \end{bmatrix}, & A_{12}^{n+1} &= \begin{bmatrix} \beta_2 & \beta_3 & & & & & & & & & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & & & & & & & \\ & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & & & & \\ & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & & & \\ & & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & & \\ & & & & & & \beta_1 & \beta_2 & & & \end{bmatrix}, \\
B_{21}^{n+1} &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_1 & & & & & & & & \\ \gamma_2 & 0 & -\gamma_2 & -\gamma_1 & & & & & & & \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & -\gamma_2 & -\gamma_1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & -\gamma_2 & -\gamma_1 & & & & \\ & & & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & -\gamma_2 & & & & \\ & & & & \gamma_1 & \gamma_2 & -\gamma_1 & & & & \end{bmatrix}, & B_{22}^{n+1} &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & b_1 & 0 & & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & \\ & & & 0 & b_1 & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & b_1 & & & & & \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

$$A_{11}^n = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 & & & & & & \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & & \\ & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & & \\ & & & & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & \\ & & & & & \alpha_3 & \alpha_2 & \\ & & & & & & \alpha_3 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad A_{12}^n = \begin{bmatrix} -\beta_2 & -\beta_1 & & & & & & \\ -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 & & & & & \\ & -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 & \\ & & & & & -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 \\ & & & & & & -\beta_3 & -\beta_2 \\ & & & & & & & -\beta_3 & -\beta_2 \end{bmatrix},$$

$$B_{21}^n = \begin{bmatrix} -\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 & & & & & \\ -\gamma_2 & 0 & \gamma_2 & \gamma_1 & & & & \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & 0 & \gamma_2 & \gamma_1 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -\gamma_1 & -\gamma_2 & 0 & \gamma_2 & \gamma_1 & \\ & & & -\gamma_1 & -\gamma_2 & 0 & \gamma_2 & \\ & & & & -\gamma_1 & -\gamma_2 & \gamma_1 & \end{bmatrix}, \quad B_{22}^n = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & & & & & & \\ 0 & -b_1 & 0 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & 0 & -b_1 & 0 & & \\ & & & & 0 & -b_1 & & \\ & & & & & 0 & -b_1 & \end{bmatrix},$$

$$U^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{J-2}^{n+1} \\ u_{J-1}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad U^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_{J-2}^n \\ u_{J-1}^n \end{bmatrix}, \quad V^{n+1} = \begin{bmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \\ v_3^{n+1} \\ \vdots \\ v_{J-2}^{n+1} \\ v_{J-1}^{n+1} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad V^n = \begin{bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ v_3^n \\ \vdots \\ v_{J-2}^n \\ v_{J-1}^n \end{bmatrix}$$

olmak üzere yukarıdaki ikili cebirsel denklem sistemi matris formunda

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{n+1} & A_{12}^{n+1} \\ B_{21}^{n+1} & B_{22}^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{n+1} \\ V^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^n & A_{12}^n \\ B_{21}^n & B_{22}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^n \\ V^n \end{bmatrix} \quad (3.1.6)$$

olarak ifade edilebilir. Yukarıdaki hazırlıklardan sonra (3.1.6) sistemi direkt yöntemlerden biri yardımıyla kolayca çözülebilir. Çözüme başlamak için  $U^0$  ve  $V^0$  başlangıç vektörlerine ihtiyaç duyulur. Bu vektörler (3.0.2) ile verilen başlangıç şartlarından

$$U^0 = \begin{bmatrix} u(x_0, 0) \\ u(x_1, 0) \\ u(x_2, 0) \\ \vdots \\ u(x_{J-1}, 0) \\ u(x_J, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^0 \\ u_1^0 \\ u_2^0 \\ \vdots \\ u_{J-1}^0 \\ u_J^0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad V^0 = \begin{bmatrix} v(x_0, 0) \\ v(x_1, 0) \\ v(x_2, 0) \\ \vdots \\ v(x_{J-1}, 0) \\ v(x_J, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0^0 \\ v_1^0 \\ v_2^0 \\ \vdots \\ v_{J-1}^0 \\ v_J^0 \end{bmatrix}$$

olarak kolayca bulunur. Böylece (3.1.6)'dan  $n = 0$  için ilk zaman adımında  $U^1$  ve  $V^1$  değerleri  $U^0$  ile  $V^0$  değerleri kullanılarak,  $n = 1$  için ikinci zaman adımında  $U^2$  ve  $V^2$  değerleri  $U^1$  ile  $V^1$  değerleri kullanılarak ve benzer şekilde devam edilerek istenilen  $T$  zamanındaki  $U^{n+1}$  ve  $V^{n+1}$  değerleri hesaplanır. Burada belirtmeli ki, (3.1.6) sistemini bir direkt yöntem yardımıyla çözüldüğünden (3.1.5) denklemleri ile verilen  $\phi_1$ ,  $\phi_2$  ve  $\phi_3$  eşitliklerinde görülen lineer olmayan

terimler için her bir zaman adımında

$$U^{(n+\frac{1}{2})^*} = (U^*)^n = \frac{U^{n+1} + U^n}{2}$$

olarak tanımlanan iç iterasyon birkaç defa uygulandı. Başlangıçta sadece iterasyonun ilk adımında  $U^{n+1} = U^n$  alındı ve sonra (3.1.6) sistemi çözüldü. Buradan elde edilen değerler iç iterasyondaki  $U^{n+1}$  de yerine yazıldı ve tekrar (3.1.6) sistemi çözüldü. Bu şekilde iç iterasyon işlemine devam edilerek her bir zaman adımındaki yaklaşık çözümler elde edildi.

### 3.1.1 Kararlılık Analizi

Bu kısımda (3.1.3)-(3.1.4) ile verilen şemanın kararlılık analizi von-Neuman yöntemi ile incelendi. Bunun için (3.1.3)'de  $u_j^n$  ve  $v_j^n$  yerlerine,  $P$  ve  $W$  harmonik genlikler olmak üzere,

$$u_j^n = P \xi^n e^{ij\theta} \quad \text{ve} \quad v_j^n = W \xi^n e^{ij\theta}$$

yazılırsa

$$\begin{aligned} & \xi^{n+1} \left[ \left( -\frac{1}{4h} - \frac{\phi_1}{4h} - \frac{\phi_3}{4h} \right) e^{i(j-1)\theta} + \frac{1}{k} e^{ij\theta} + \left( \frac{1}{4h} + \frac{\phi_1}{4h} + \frac{\phi_2}{4h} \right) e^{i(j+1)\theta} \right] P \\ & + \xi^{n+1} \left[ \left( -\frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2} \right) e^{i(j-1)\theta} + \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{2h^2} \right) e^{ij\theta} + \left( \frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2} \right) e^{i(j+1)\theta} \right] W \\ & = \xi^n \left[ \left( \frac{1}{4h} + \frac{\phi_1}{4h} + \frac{\phi_3}{4h} \right) e^{i(j-1)\theta} + \frac{1}{k} e^{ij\theta} + \left( -\frac{1}{4h} - \frac{\phi_1}{4h} - \frac{\phi_2}{4h} \right) e^{i(j+1)\theta} \right] P \\ & \xi^n \left[ \left( -\frac{1}{2kh} + \frac{1}{2h^2} \right) e^{i(j-1)\theta} + \left( -\frac{1}{2} - \frac{2}{2h^2} \right) e^{ij\theta} + \left( \frac{1}{2kh} + \frac{1}{2h^2} \right) e^{i(j+1)\theta} \right] W \end{aligned}$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned} & \xi e^{ij\theta} \left[ \left( -\frac{1}{4h} - \frac{\phi_1}{4h} - \frac{\phi_3}{4h} \right) e^{-i\theta} + \left( \frac{1}{4h} + \frac{\phi_1}{4h} + \frac{\phi_2}{4h} \right) e^{i\theta} + \frac{1}{k} \right] P \\ & + \xi e^{ij\theta} \left[ \left( -\frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2} \right) e^{-i\theta} + \left( \frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2} \right) e^{i\theta} + \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{2h^2} \right) \right] W \\ & = e^{ij\theta} \left[ \left( \frac{1}{4h} + \frac{\phi_1}{4h} + \frac{\phi_3}{4h} \right) e^{-i\theta} + \left( -\frac{1}{4h} - \frac{\phi_1}{4h} - \frac{\phi_2}{4h} \right) e^{i\theta} + \frac{1}{k} \right] P \\ & + e^{ij\theta} \left[ \left( -\frac{1}{2kh} + \frac{1}{2h^2} \right) e^{-i\theta} + \left( \frac{1}{2kh} + \frac{1}{2h^2} \right) e^{i\theta} + \left( -\frac{1}{2} - \frac{2}{2h^2} \right) \right] W \end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.5) eşitliğinde görülen peş peşe gelen ardışık  $(j-1, n+1/2)$ ,  $(j, n+1/2)$  ve  $(j+1, n+1/2)$  grid noktalarındaki  $u$ 'nun değerleri için

$$\max_j \left| \left( u_j^{n+1/2} \right) \right| = \mu$$

olduğu kabul edilir ve yukarıdaki eşitlikte kullanılırsa, gerekli düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned} & \xi \left[ -\left(\frac{1+2\mu}{4h}\right) e^{-ij\theta} + \left(\frac{1+2\mu}{4h}\right) e^{ij\theta} + \frac{1}{k} \right] P + \xi \left[ -\left(\frac{1}{2kh} + \frac{1}{2h^2}\right) e^{-ij\theta} + \left(\frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2}\right) e^{ij\theta} + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h^2}\right) \right] W \\ & = \left[ \left(\frac{1+2\mu}{4h}\right) e^{-ij\theta} - \left(\frac{1+2\mu}{4h}\right) e^{ij\theta} + \frac{1}{k} \right] P + \left[ \left(-\frac{1}{2kh} + \frac{1}{2h^2}\right) e^{-ij\theta} + \left(\frac{1}{2kh} + \frac{1}{2h^2}\right) e^{ij\theta} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h^2}\right) \right] W \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik  $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$  Euler formülünün kullanılması ile

$$\begin{aligned} & \xi \left[ \left(\frac{1+2\mu}{4h}\right) 2i \sin \theta + \frac{1}{k} \right] P + \xi \left[ \left(\frac{1}{2kh}\right) 2i \sin \theta + \left(-\frac{1}{2h^2}\right) 2 \cos \theta + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h^2}\right) \right] W \\ & = \left[ -\left(\frac{1+2\mu}{4h}\right) 2i \sin \theta + \frac{1}{k} \right] P + \left[ \left(\frac{1}{2kh}\right) 2i \sin \theta + \left(\frac{1}{2h^2}\right) 2 \cos \theta - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{h^2}\right) \right] W \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} & \left\{ \left[ \left(\frac{1+2\mu}{4h}\right) 2i \sin \theta \right] (\xi + 1) + \frac{1}{k} (\xi - 1) \right\} P \\ & + \left\{ \left[ \frac{1}{2kh} 2i \sin \theta \right] (\xi - 1) + \left[ \frac{1}{2} + \frac{1}{h^2} + \frac{2}{2h^2} \cos \theta \right] (\xi + 1) \right\} W = 0 \end{aligned} \quad (3.1.7)$$

olarak yazılabilir.

Şimdi de (3.1.4) ile verilen şemada  $u_j^n$  ve  $v_j^n$  yerlerine

$$u_j^n = P \xi^n e^{ij\theta} \quad \text{ve} \quad v_j^n = W \xi^n e^{ij\theta}$$

yazılırsa

$$\begin{aligned} & \xi^{n+1} e^{ij\theta} \left( \frac{1}{4h^3} e^{-2i\theta} - \frac{2}{4h^3} e^{-i\theta} + \frac{2}{4h^3} e^{i\theta} - \frac{1}{4h^3} e^{2i\theta} \right) P + \frac{1}{2} \xi^{n+1} e^{ij\theta} W \\ & = \xi^n e^{ij\theta} \left( -\frac{1}{4h^3} e^{-2i\theta} + \frac{2}{4h^3} e^{-i\theta} - \frac{2}{4h^3} e^{i\theta} + \frac{1}{4h^3} e^{2i\theta} \right) P - \frac{1}{2} \xi^n e^{ij\theta} W \end{aligned}$$

bulunur. Buradan gerekli düzenlemelerden sonra

$$\begin{aligned} & \xi \left[ -\frac{1}{4h^3} (e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}) + \frac{2}{4h^3} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right] P + \frac{1}{2} \xi W \\ & = \left[ \frac{1}{4h^3} (e^{2i\theta} - e^{-2i\theta}) - \frac{2}{4h^3} (e^{i\theta} - e^{-i\theta}) \right] P - \frac{1}{2} W \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik ise

$$\xi \left[ \left(-\frac{1}{2h^3}\right) i \sin 2\theta + \left(\frac{1}{h^3}\right) i \sin \theta \right] P + \frac{1}{2} \xi W = \left[ \left(\frac{1}{2h^3}\right) i \sin 2\theta + \left(-\frac{1}{h^3}\right) i \sin \theta \right] P - \frac{1}{2} W$$

veya

$$\left( \frac{1}{h^3} i \sin \theta - \frac{1}{2h^3} i \sin 2\theta \right) (\xi + 1) P + \frac{1}{2} (\xi + 1) W = 0 \quad (3.1.8)$$

olarak yazılabilir.



(3.1.7) ve (3.1.8) denklemleri bir homojen cebirsel denklem sistemidir. Bu sistemin aşık olmaya en az bir çözümünün olabilmesi için katsayılar matrisi determinantı sıfıra eşit olması gerekir. Böylece,

$$(\xi + 1)^2 \left( \frac{\lambda_2}{2} - \lambda_4 \lambda_5 \right) + (\xi^2 - 1) (\lambda_1 - \lambda_3 \lambda_5) = 0$$

karakteristik denklemi elde edilir. Burada

$$\lambda_1 = \frac{1}{k}$$

$$\lambda_2 = \frac{1+2\mu}{2h} i \sin \theta$$

$$\lambda_3 = \frac{1}{kh} i \sin \theta$$

$$\lambda_4 = \frac{1}{2} + \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} \cos \theta$$

$$\lambda_5 = \frac{1}{h^3} i \sin \theta - \frac{1}{2h^3} i \sin 2\theta$$

dir. Açıkça yukarıdaki ikinci dereceden denklemin köklerinden biri

$$\xi = \xi_1 = -1 \quad (3.1.9)$$

olduğundan denklemin diğer kökü

$$(\xi + 1) \left( \frac{\lambda_2}{2} - \lambda_4 \lambda_5 \right) + (\xi - 1) (\lambda_1 - \lambda_3 \lambda_5) = 0$$

den

$$\xi = \xi_2 = \frac{\tilde{B} - i\tilde{A}}{\tilde{B} + i\tilde{A}} \quad (3.1.10)$$

olarak bulunur. Burada

$$\tilde{A} = \frac{1+2\mu}{4h} \sin \theta - \frac{1}{4h^3} \sin \theta - \frac{1}{2h^5} \sin \theta + \frac{1}{2h^5} (\cos \theta - 1) \sin 2\theta$$

$$\tilde{B} = \frac{1}{k} + \frac{1}{kh^4} \sin^2 \theta - \frac{1}{2kh^4} \sin \theta \sin 2\theta$$

dir. Kararlılık için,  $|\xi_1| \leq 1$  ve  $|\xi_2| \leq 1$  olmalıdır. (3.1.9) ve (3.1.10) den  $|\xi_1| = 1$  ve  $|\xi_2| = 1$  olduğundan (3.1.3)-(3.1.4) ile verilen ikili şema şartsız kararlıdır.

### 3.2 Lineerleştirme - II (Lin-II)

Konuma göre parçalanmış Rosenau-Kawahara denkleminin (3.0.1) ile verilen birinci denkleminde görülen  $\frac{1}{2} (u^2)_x$  lineer olmayan terimi yerine (2.2.1) yaklaşımı ve korunumlu sonlu fark yöntemi kullanırsa coupled sistemin Crank-Nicolson korunumlu kapalı sonlu fark

yaklaşımı,  $n = 1(1)N - 1$  ve  $j = 1(1)J - 1$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} \left(u_j^n\right)_t + \left(v_j^n\right)_{\hat{x}t} + \left(u_j^{n+1/2}\right)_{\hat{x}} + v_j^{n+1/2} - \left(v_j^{n+1/2}\right)_{\bar{x}\hat{x}} + z_m \left(u_j^{n+1/2}\right)_{\hat{x}} &= 0 \\ v_j^{n+1/2} - \left(u_j^{n+1/2}\right)_{\bar{x}\hat{x}} &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

olur. (3.2.1) denklem sisteminde bulunan  $\left(u_j^n\right)_t, \left(v_j^n\right)_{\hat{x}t}, \left(u_j^{n+1/2}\right)_{\hat{x}}, v_j^{n+1/2}, \left(v_j^{n+1/2}\right)_{\bar{x}\hat{x}}$  ve  $\left(u_j^{n+1/2}\right)_{\bar{x}\hat{x}}$  terimleri yerine (3.1.2) ile verilen yaklaşımlar yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa,  $n = 1(1)N - 1$  ve  $j = 1(1)J - 1$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} &\left(-\frac{1}{4h} - \frac{z_m}{4h}\right) u_{j-1}^{n+1} + \frac{1}{k} u_j^{n+1} + \left(\frac{1}{4h} + \frac{z_m}{4h}\right) u_{j+1}^{n+1} \\ &+ \left(-\frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2}\right) v_{j-1}^{n+1} + \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{2h^2}\right) v_j^{n+1} + \left(\frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2}\right) v_{j+1}^{n+1} \\ &= \left(\frac{1}{4h} + \frac{z_m}{4h}\right) u_{j-1}^n + \frac{1}{k} u_j^n + \left(-\frac{1}{4h} - \frac{z_m}{4h}\right) u_{j+1}^n \\ &+ \left(-\frac{1}{2kh} + \frac{1}{2h^2}\right) v_{j-1}^n + \left(-\frac{1}{2} - \frac{2}{2h^2}\right) v_j^n + \left(\frac{1}{2kh} + \frac{1}{2h^2}\right) v_{j+1}^n \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

ve

$$\begin{aligned} &\frac{1}{4h^3} u_{j-2}^{n+1} - \frac{2}{4h^3} u_{j-1}^{n+1} + \frac{2}{4h^3} u_{j+1}^{n+1} - \frac{1}{4h^3} u_{j+2}^{n+1} + \frac{1}{2} v_j^{n+1} \\ &= -\frac{1}{4h^3} u_{j-2}^n + \frac{2}{4h^3} u_{j-1}^n - \frac{2}{4h^3} u_{j+1}^n + \frac{1}{4h^3} u_{j+2}^n - \frac{1}{2} v_j^n \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

elde edilir. Bu ikili cebirsel denklem sisteminin çözülebilmesi için  $j = 1$  ve  $j = J - 1$  noktalarında sistemin ikinci denkleminde görülen problemin çözüm bölgesi içerisine düşmeyen  $n$ -inci ve  $(n + 1)$ -inci zaman adımlarındaki  $u$ 'nun  $u_{-1}$  ve  $u_{J+1}$  hayali değerleri sınır şartlarından yok edilirse  $(2J - 2)$  bilinmeyenli  $(2J - 2)$  tane denklemden oluşan

$$\begin{aligned} &\alpha_2 u_j^{n+1} + \alpha_3 u_{j+1}^{n+1} + \beta_2 v_j^{n+1} + \beta_3 v_{j+1}^{n+1} \\ j = 1 \text{ için} &= \alpha_2 u_j^{n+1} + \alpha_1 u_{j+1}^{n+1} - \beta_2 v_j^{n+1} - \beta_1 v_{j+1}^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_2 u_j^{n+1} + \alpha_3 u_{j+1}^{n+1} + \beta_1 v_{j-1}^{n+1} + \beta_2 v_j^{n+1} + \beta_3 v_{j+1}^{n+1} \\ j = 2(1)J - 2 &= \alpha_3 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_2 u_j^{n+1} + \alpha_1 u_{j+1}^{n+1} - \beta_3 v_{j-1}^{n+1} - \beta_2 v_j^{n+1} - \beta_1 v_{j+1}^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\alpha_1 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_2 u_j^{n+1} + \beta_1 v_{j-1}^{n+1} + \beta_2 v_j^{n+1} \\ j = J - 1 \text{ için} &= \alpha_3 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_2 u_j^{n+1} - \beta_3 v_{j-1}^{n+1} - \beta_2 v_j^{n+1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 j = 1 \text{ için} \quad & \gamma_1 u_j^{n+1} - \gamma_2 u_{j+1}^{n+1} - \gamma_1 u_{j+2}^{n+1} + b_1 v_j^{n+1} \\
 & = -\gamma_1 u_j^n + \gamma_2 u_{j+1}^n + \gamma_1 u_{j+2}^n + -b_1 v_j^n \\
 \\
 j = 2(1)J-2 \quad & \gamma_1 u_{j-2}^{n+1} + \gamma_2 u_{j-1}^{n+1} - \gamma_2 u_{j+1}^{n+1} - \gamma_1 u_{j+2}^{n+1} + b_1 v_j^{n+1} \\
 & = -\gamma_1 u_{j-2}^n - \gamma_2 u_{j-1}^n + \gamma_2 u_{j+1}^n + \gamma_1 u_{j+2}^n - b_1 v_j^n \\
 \\
 j = J-1 \text{ için} \quad & \gamma_1 u_{j-2}^{n+1} + \gamma_2 u_{j-1}^{n+1} - \gamma_1 u_j^{n+1} + b_1 v_{j+1}^{n+1} \\
 & -\gamma_1 u_{j-2}^n - \gamma_2 u_{j-1}^n + \gamma_1 u_j^n + -b_1 v_{j+1}^n
 \end{aligned}$$

ikili lineer cebirsel denklem sistemi bulunur. Burada,

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= -\frac{1}{4h} - \frac{z_m}{4h}, & \beta_1 &= -\frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2}, \\
 \alpha_2 &= \frac{1}{k}, & \beta_2 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2h^2}, \\
 \alpha_3 &= \frac{1}{4h} + \frac{z_m}{4h}, & \beta_3 &= \frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2}, \\
 \gamma_1 &= \frac{1}{4h^3}, & b_1 &= \frac{1}{2} \\
 \gamma_2 &= -\frac{2}{4h^3},
 \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 A_{11}^{n+1} &= \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & & & & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & & & & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & & \\ & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ & & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \end{bmatrix}, & A_{12}^{n+1} &= \begin{bmatrix} \beta_2 & \beta_3 & & & & & & & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & & & & & \\ & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & \\ & & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \\ & & & & & & \beta_1 & \beta_2 & \end{bmatrix}, \\
 \\
 B_{21}^{n+1} &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_1 & & & & & & \\ \gamma_2 & 0 & -\gamma_2 & -\gamma_1 & & & & & \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & -\gamma_2 & -\gamma_1 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & -\gamma_2 & -\gamma_1 & & \\ & & & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & -\gamma_2 & & \\ & & & & \gamma_1 & \gamma_2 & -\gamma_1 & & \end{bmatrix}, & B_{22}^{n+1} &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 & & & & & & & \\ 0 & b_1 & 0 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & & 0 & b_1 & 0 & & & \\ & & & & 0 & b_1 & \end{bmatrix},
 \end{aligned}$$

$$A_{11}^n = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_1 & & & & & & & & & \\ \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & & & & & \\ & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & & \\ & & & & \alpha_3 & \alpha_2 & \alpha_1 & & & & \\ & & & & & \alpha_3 & \alpha_2 & & & & \\ & & & & & & \alpha_3 & \alpha_2 & & & \\ & & & & & & & \alpha_3 & \alpha_2 & & \\ & & & & & & & & \alpha_3 & \alpha_2 & \\ & & & & & & & & & \alpha_3 & \alpha_2 \end{bmatrix}, \quad A_{12}^n = \begin{bmatrix} -\beta_2 & -\beta_1 & & & & & & & & & \\ -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 & & & & & & & & \\ & -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 & & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & \\ & & & -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 & & & & & \\ & & & & -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 & & & & \\ & & & & & -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 & & & \\ & & & & & & -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 & & \\ & & & & & & & -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 & \\ & & & & & & & & -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 \end{bmatrix},$$

$$B_{21}^n = \begin{bmatrix} -\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 & & & & & & & & \\ -\gamma_2 & 0 & \gamma_2 & \gamma_1 & & & & & & & \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & 0 & \gamma_2 & \gamma_1 & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & \\ & & -\gamma_1 & -\gamma_2 & 0 & \gamma_2 & \gamma_1 & & & & \\ & & & -\gamma_1 & -\gamma_2 & 0 & \gamma_2 & & & & \\ & & & & -\gamma_1 & -\gamma_2 & \gamma_1 & & & & \end{bmatrix}, \quad B_{22}^n = \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & & & & & & & & & \\ 0 & -b_1 & 0 & & & & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & & & & & \\ & & & 0 & -b_1 & 0 & & & & & \\ & & & & 0 & -b_1 & & & & & \\ & & & & & 0 & -b_1 & & & & \\ & & & & & & 0 & -b_1 & & & \end{bmatrix},$$

$$U^{n+1} = \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{J-2}^{n+1} \\ u_{J-1}^{n+1} \end{bmatrix}, \quad U^n = \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_{J-2}^n \\ u_{J-1}^n \end{bmatrix}, \quad V^{n+1} = \begin{bmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \\ v_3^{n+1} \\ \vdots \\ v_{J-2}^{n+1} \\ v_{J-1}^{n+1} \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad V^n = \begin{bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ v_3^n \\ \vdots \\ v_{J-2}^n \\ v_{J-1}^n \end{bmatrix}$$

olmak üzere denklem sisteminin matris formu kısaca

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{n+1} & A_{12}^{n+1} \\ B_{21}^{n+1} & B_{22}^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{n+1} \\ V^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^n & A_{12}^n \\ B_{21}^n & B_{22}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^n \\ V^n \end{bmatrix} \quad (3.2.4)$$

olarak yazılır.

(3.2.4) sistemi direkt yöntemlerden biri yardımıyla çözülür. Çözümeye başlamak için ihtiyaç duyulan  $U^0$  ve  $V^0$  başlangıç vektörleri, (3.0.2) ile verilen başlangıç şartlarından sırasıyla

$$U^0 = \begin{bmatrix} u(x_0, 0) \\ u(x_1, 0) \\ u(x_2, 0) \\ \vdots \\ u(x_{J-1}, 0) \\ u(x_J, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^0 \\ u_1^0 \\ u_2^0 \\ \vdots \\ u_{J-1}^0 \\ u_J^0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad V^0 = \begin{bmatrix} v(x_0, 0) \\ v(x_1, 0) \\ v(x_2, 0) \\ \vdots \\ v(x_{J-1}, 0) \\ v(x_J, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0^0 \\ v_1^0 \\ v_2^0 \\ \vdots \\ v_{J-1}^0 \\ v_J^0 \end{bmatrix}$$

dir. Böylece, (3.2.4)'dan  $n = 0$  için ilk zaman adımında  $U^1$  değerleri  $U^0$  değerleri kullanılarak,  $n = 1$  için ikinci zaman adımında  $U^2$  değerleri  $U^1$  değerleri kullanılarak ve benzer şekilde devam edilerek istenilen  $T$  zamanındaki  $U^{n+1}$  değerleri hesaplanır. Yine burada da belirtmek gerekir ki (3.2.4) sistemi bir direkt yöntem yardımıyla çözüleceğinden  $\frac{1}{2} (u^2)_x$  lineer olmayan teriminde

$$z_m = u$$

olarak alındı. Bu eşitlikte görülen  $U$  yerine her bir  $n$ . zaman adımında

$$U^* = \frac{U^{n+1} + U^n}{2}$$

olarak tanımlanan iç iterasyon birkaç defa uygulandı. İterasyonun ilk adımı için  $U^{n+1} = U^n$  alındı ve (3.2.4) sistemi çözüldü. Elde edilen yeni  $U$  değerler iç iterasyondaki  $U^{n+1}$  de yerine yazıldı ve aynı sistem tekrar çözüldü. İç iterasyon işlemi bu şekilde birkaç defa çalıştırılarak her bir zaman adımında hesaplanan yaklaşık çözümler iyileştirildi.

Bu şemanın da kararlılık analizi Lin-I şemasındakine benzer olarak incelendiğinde şemanın şartsız kararlı olduğu kolayca görülür. Bu nedenle benzer işlemleri bir kez daha tekrarlamaya gerek yoktur.

### 3.3 Lineerleştirme - III (Lin-III)

Konuma göre parçalanmış Rosenau-Kawahara denkleminin (3.0.1) ile verilen birinci denkleminde görülen  $\frac{1}{2} (u^2)_x$  lineer olmayan terimi yerine (2.3.1) yaklaşımı ve Crank-Nicolson korunumlu sonlu fark yöntemi kullanırsa coupled sistemin sonlu fark yaklaşımı,  $n = 1(1)N - 1$  ve  $j = 1(1)J - 1$  olmak üzere,

$$\begin{aligned} & \left( u_j^n \right)_t + \left( v_j^n \right)_{\hat{x}t} + \left( u_j^{n+1/2} \right)_{\hat{x}} + v_j^{n+1/2} - \left( v_j^{n+1/2} \right)_{\bar{x}\hat{x}} \\ & + \frac{1}{2} \left[ \left( u_j^{n+1} \right) \left( u_j^n \right)_{\hat{x}} + \left( u_j^n \right) \left( u_j^{n+1} \right)_{\hat{x}} \right] = 0 \quad (3.3.1) \\ & v_j^{n+1/2} - \left( u_j^{n+1/2} \right)_{\bar{x}\hat{x}} = 0 \end{aligned}$$

olur. (3.3.1) denklem sisteminde bulunan  $\left( u_j^n \right)_t$ ,  $\left( v_j^n \right)_{\hat{x}t}$ ,  $\left( u_j^{n+1/2} \right)_{\hat{x}}$ ,  $v_j^{n+1/2}$ ,  $\left( v_j^{n+1/2} \right)_{\bar{x}\hat{x}}$  ve  $\left( u_j^{n+1/2} \right)_{\bar{x}\hat{x}}$  terimleri yerine (3.1.2) ile verilen yaklaşımlar yazılır ve gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} & \left( -\frac{1}{4h} - \frac{1}{4h} (u_j^n) \right) u_{j-1}^{n+1} + \left( \frac{1}{k} + \frac{1}{4h} (u_{j+1}^n - u_{j-1}^n) \right) u_j^{n+1} + \left( \frac{1}{4h} + \frac{1}{4h} (u_j^n) \right) u_{j+1}^{n+1} \\ & + \left( -\frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2} \right) v_{j-1}^{n+1} + \left( \frac{1}{2} + \frac{2}{2h^2} \right) v_j^{n+1} + \left( \frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2} \right) v_{j+1}^{n+1} \\ & = \frac{1}{4h} u_{j-1}^n + \frac{1}{k} u_j^n - \frac{1}{4h} u_{j+1}^n + \left( -\frac{1}{2kh} + \frac{1}{2h^2} \right) v_{j-1}^n + \left( -\frac{1}{2} - \frac{2}{2h^2} \right) v_j^n + \left( \frac{1}{2kh} + \frac{1}{2h^2} \right) v_{j+1}^n \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & \frac{1}{4h^3} u_{j-2}^{n+1} - \frac{2}{4h^3} u_{j-1}^{n+1} + \frac{2}{4h^3} u_{j+1}^{n+1} - \frac{1}{4h^3} u_{j+2}^{n+1} + \frac{1}{2} v_j^{n+1} \\ & = -\frac{1}{4h^3} u_{j-2}^n + \frac{2}{4h^3} u_{j-1}^n - \frac{2}{4h^3} u_{j+1}^n + \frac{1}{4h^3} u_{j+2}^n - \frac{1}{2} v_j^n \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ikili cebirsel denklem sisteminin çözülebilmesi için  $j = 1$  ve  $j = J - 1$  noktalarında sistemin ikinci denkleminde görülen problemin çözüm bölgesi içerisine düşmeyen  $n$ -inci ve  $(n + 1)$ -inci zaman adımlarındaki  $u$ 'nun  $u_{-1}$  ve  $u_{J+1}$  hayali değerleri sınır şartlarından yok edilirse  $(2J - 2)$  bilinmeyenli  $(2J - 2)$  tane denklemden oluşan

$$\begin{aligned} j = 1 \text{ için} \quad & \alpha_2 u_j^{n+1} - \alpha_1 u_{j+1}^{n+1} + \beta_2 v_j^{n+1} + \beta_3 v_{j+1}^{n+1} \\ & = \alpha_4 u_j^{n+1} - \alpha_3 u_{j+1}^{n+1} - \beta_2 v_j^{n+1} - \beta_1 v_{j+1}^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j = 2(1)J - 2 \quad & \alpha_1 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_2 u_j^{n+1} - \alpha_1 u_{j+1}^{n+1} + \beta_1 v_{j-1}^{n+1} + \beta_2 v_j^{n+1} + \beta_3 v_{j+1}^{n+1} \\ & = \alpha_3 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_4 u_j^{n+1} - \alpha_3 u_{j+1}^{n+1} - \beta_3 v_{j-1}^{n+1} - \beta_2 v_j^{n+1} - \beta_1 v_{j+1}^{n+1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j = J - 1 \text{ için} \quad & \alpha_1 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_2 u_j^{n+1} + \beta_1 v_{j-1}^{n+1} + \beta_2 v_j^{n+1} \\ & = \alpha_3 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_4 u_j^{n+1} - \beta_3 v_{j-1}^{n+1} - \beta_2 v_j^{n+1} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} j = 1 \text{ için} \quad & \gamma_1 u_j^{n+1} - \gamma_2 u_{j+1}^{n+1} - \gamma_1 u_{j+2}^{n+1} + b_1 v_j^{n+1} \\ & = -\gamma_1 u_j^n + \gamma_2 u_{j+1}^n + \gamma_1 u_{j+2}^n + -b_1 v_j^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j = 2(1)J - 2 \quad & \gamma_1 u_{j-2}^{n+1} + \gamma_2 u_{j-1}^{n+1} - \gamma_2 u_{j+1}^{n+1} - \gamma_1 u_{j+2}^{n+1} + b_1 v_j^{n+1} \\ & = -\gamma_1 u_{j-2}^n - \gamma_2 u_{j-1}^n + \gamma_2 u_{j+1}^n + \gamma_1 u_{j+2}^n - b_1 v_j^n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} j = J - 1 \text{ için} \quad & \gamma_1 u_{j-2}^{n+1} + \gamma_2 u_{j-1}^{n+1} - \gamma_1 u_j^{n+1} + b_1 v_{j+1}^{n+1} \\ & - \gamma_1 u_{j-2}^n - \gamma_2 u_{j-1}^n + \gamma_1 u_j^n + -b_1 v_{j+1}^n \end{aligned}$$

ikili lineer cebirsel denklem sistemi bulunur. Burada

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{1}{4h} - \frac{1}{4h}(u_j^n), & \beta_2 &= \frac{1}{2} + \frac{2}{2h^2}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{k} + \frac{1}{4h}(u_{j+1}^n - u_{j-1}^n), & \beta_3 &= \frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2}, \\ \alpha_3 &= \frac{1}{4h}, & \gamma_1 &= \frac{1}{4h^3}, \\ \alpha_4 &= \frac{1}{k}, & \gamma_2 &= -\frac{2}{4h^3}, \\ \beta_1 &= -\frac{1}{2kh} - \frac{1}{2h^2}, & b_1 &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
 A_{11}^{n+1} &= \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\alpha_1 & & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_1 & & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_1 & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_1 \\ & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}, & A_{12}^{n+1} &= \begin{bmatrix} \beta_2 & \beta_3 & & & & & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & & & \\ & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \\ & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ & & & & & \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}, \\
 B_{21}^{n+1} &= \begin{bmatrix} \gamma_1 & -\gamma_2 & -\gamma_1 & & & & \\ \gamma_2 & 0 & -\gamma_2 & -\gamma_1 & & & \\ \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & -\gamma_2 & -\gamma_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & -\gamma_2 & -\gamma_1 \\ & & & \gamma_1 & \gamma_2 & 0 & -\gamma_2 \\ & & & & \gamma_1 & \gamma_2 & -\gamma_1 \end{bmatrix}, & B_{22}^{n+1} &= \begin{bmatrix} b_1 & 0 & & & & & \\ 0 & b_1 & 0 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 0 & b_1 & 0 & \\ & & & & 0 & b_1 \end{bmatrix}, \\
 A_{11}^n &= \begin{bmatrix} \alpha_4 & -\alpha_3 & & & & & \\ \alpha_3 & \alpha_4 & -\alpha_3 & & & & \\ & \alpha_3 & \alpha_4 & -\alpha_3 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & \alpha_3 & \alpha_4 & -\alpha_3 & \\ & & & & \alpha_3 & \alpha_4 & -\alpha_3 \\ & & & & & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}, & A_{12}^n &= \begin{bmatrix} -\beta_2 & -\beta_1 & & & & & \\ -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 & & & & \\ & -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & & -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 & \\ & & & & -\beta_3 & -\beta_2 & -\beta_1 \\ & & & & & -\beta_3 & -\beta_2 \end{bmatrix}, \\
 B_{21}^n &= \begin{bmatrix} -\gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 & & & & \\ -\gamma_2 & 0 & \gamma_2 & \gamma_1 & & & \\ -\gamma_1 & -\gamma_2 & 0 & \gamma_2 & \gamma_1 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & -\gamma_1 & -\gamma_2 & 0 & \gamma_2 & \gamma_1 \\ & & & -\gamma_1 & -\gamma_2 & 0 & \gamma_2 \\ & & & & -\gamma_1 & -\gamma_2 & \gamma_1 \end{bmatrix}, & B_{22}^n &= \begin{bmatrix} -b_1 & 0 & & & & & \\ 0 & -b_1 & 0 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & 0 & -b_1 & 0 & \\ & & & & 0 & -b_1 \end{bmatrix}, \\
 U^{n+1} &= \begin{bmatrix} u_1^{n+1} \\ u_2^{n+1} \\ u_3^{n+1} \\ \vdots \\ u_{J-2}^{n+1} \\ u_{J-1}^{n+1} \end{bmatrix}, & U^n &= \begin{bmatrix} u_1^n \\ u_2^n \\ u_3^n \\ \vdots \\ u_{J-2}^n \\ u_{J-1}^n \end{bmatrix}, & V^{n+1} &= \begin{bmatrix} v_1^{n+1} \\ v_2^{n+1} \\ v_3^{n+1} \\ \vdots \\ v_{J-2}^{n+1} \\ v_{J-1}^{n+1} \end{bmatrix} & \text{ve} & V^n &= \begin{bmatrix} v_1^n \\ v_2^n \\ v_3^n \\ \vdots \\ v_{J-2}^n \\ v_{J-1}^n \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

olmak üzere sistemin matris formu kısaca

$$\begin{bmatrix} A_{11}^{n+1} & A_{12}^{n+1} \\ B_{21}^{n+1} & B_{22}^{n+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^{n+1} \\ V^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11}^n & A_{12}^n \\ B_{21}^n & B_{22}^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^n \\ V^n \end{bmatrix} \quad (3.3.2)$$

olarak ifade edilir. (3.3.2) sistemi direkt yöntemlerden biri yardımı ile çözülür. Çözümü bulma işlemine başlayabilmek için  $U^0$  ve  $V^0$  başlangıç vektörlerine ihtiyaç duyulur.  $U^0$  ve  $V^0$  başlangıç

vektörleri (3.0.2) ile verilen başlangıç şartlarından

$$U^{(0)} = \begin{bmatrix} u(x_0, 0) \\ u(x_1, 0) \\ u(x_2, 0) \\ \vdots \\ u(x_{J-1}, 0) \\ u(x_J, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_0^0 \\ u_1^0 \\ u_2^0 \\ \vdots \\ u_{J-1}^0 \\ u_J^0 \end{bmatrix} \quad \text{ve} \quad V^{(0)} = \begin{bmatrix} v(x_0, 0) \\ v(x_1, 0) \\ v(x_2, 0) \\ \vdots \\ v(x_{J-1}, 0) \\ v(x_J, 0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0^0 \\ v_1^0 \\ v_2^0 \\ \vdots \\ v_{J-1}^0 \\ v_J^0 \end{bmatrix}$$

olarak elde edilir. Böylece (3.3.2)'den  $n = 0$  için ilk zaman adımında  $U^1$  ve  $V^1$  değerleri  $U^0$  ile  $V^0$  değerleri kullanılarak,  $n = 1$  için ikinci zaman adımında  $U^2$  ve  $V^2$  değerleri  $U^1$  ile  $V^1$  değerleri kullanılarak ve benzer şekilde devam edilerek istenilen  $T$  zamanındaki  $U^{n+1}$  ve  $V^{n+1}$  değerleri hesaplanır.

Bu şemanın da kararlılık analizi Lin-I şemasındaki benzer olarak incelendiğinde şemanın şartsız kararlı olduğu kolayca görülür. Bu nedenle benzer işlemleri bir kez daha tekrarlamaya gerek yoktur.

### 3.4 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda birinci bölümde verilen Problem 2'nin Lin-I, Lin-II ve Lin-III lineerleştirme teknikleri kullanılarak elde edilen nümerik şemaları çözüldü ve hesaplanan sonuçlar çizelgeler ve grafikler halinde sunuldu.

Çizelge 3.1'de konum adım uzunluğu  $h = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$  ve zaman adımı uzunluğu  $k = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$  seçilerek Lin-I, Lin-II ve Lin-III şemalarından  $T = 40$  zamanında hesaplanan  $L_2$  hata normu karşılaştırıldı. Çizelge incelendiğinde,  $k = 0.2$  sabit tutulup  $h$ 'nın azalan değerleri için,  $L_2$  hata normu azalmaktadır.  $k$  zaman adım uzunluğunun  $k = 0.1, 0.05, 0.025$  değerleri için de hata normlarının  $k = 0.2$  ile benzer davranış sergilediği, birbirleri ile iyi uyum içinde olduğu ve zaman adım uzunluğunun küçülmeye devam ederken hata normlarının da gittikçe azaldığı görülmektedir. Bu çalışmada sunulan Lin-I, Lin-II ve Lin-III lineerleştirmesi ile elde edilen nümerik sonuçların Hu [48]'nin verdiği lineerleştirme ile elde edilen sonuçlara yakın olduğu ve en iyi sonuçların Rubin-Graves lineerleştirme tekniği kullanılması ile elde edilen Lin-III nümerik şemasından hesaplandığı görülmektedir.

Çizelge 3.2'den,  $k$ 'nın sabit değeri için  $h = 0.4, 0.2, 0.1, 0.05$  ve  $0.025$  değerlerinde  $L_\infty$  hata normunun gittikçe küçüldüğü ve hatta  $h$  ve  $k$  nın küçülen değerlerinde  $L_\infty$  hata normunun daha da küçüldüğü açıkça görülmektedir. Lin-I, Lin-II ve Lin-III lineerleştirmesi ile elde edilen nümerik sonuçların Hu [48]'nin verdiği lineerleştirme ile elde edilen sonuçlara yakın sonuçlar verdiği



**Çizelge 3.1 :** Problem 2'nin Lin-I, Lin-II ve Lin-III ile  $h$  ve  $k$  nın farklı değerleri için  $T = 40$ 'da hesaplanan  $L_2$  hata normları.

$k$	$h$	$L_2 \times 10^3$			$L_2 \times 10^3$
		Lin-I	Lin-II	Lin-III	[48]
0.2	0.4	8.43027	8.33158	8.31241	8.58300
	0.2	3.00847	2.98175	2.96113	3.04774
	0.1	1.64880	1.64164	1.61966	1.65849
	0.05	1.30868	1.30684	1.28423	1.31087
	0.025	1.22350	1.22304	1.20052	1.22397
0.1	0.4	7.54649	7.44991	7.44519	7.69954
	0.2	2.11561	2.09003	2.08505	2.15499
	0.1	0.75350	0.74665	0.74133	0.76333
	0.05	0.41294	0.41108	0.40533	0.41513
	0.025	0.32773	0.32725	0.32137	0.32808
0.05	0.4	7.32533	7.22937	7.22819	7.47845
	0.2	1.89221	1.86718	1.86596	1.93157
	0.1	0.52948	0.52288	0.52158	0.53935
	0.05	0.18557	0.18701	0.18556	0.19092
	0.025	0.10194	0.10221	0.10193	0.10392
0.025	0.4	7.27002	7.17421	7.17392	7.42316
	0.2	1.83635	1.81147	1.81116	1.87571
	0.1	0.47346	0.46696	0.46664	0.48334
	0.05	0.13288	0.13106	0.13069	0.13496
	0.025	0.04887	0.04829	0.04828	0.04774

**Çizelge 3.2 :** Problem 2'nin Lin-I, Lin-II ve Lin-III ile  $h$  ve  $k$  nın farklı değerleri için  $T = 40$ 'da hesaplanan  $L_\infty$  hata normları.

$k$	$h$	$L_\infty \times 10^3$			$L_\infty \times 10^3$
		Lin-I	Lin-II	Lin-III	[48]
0.2	0.4	2.74818	2.71113	2.70261	2.80564
	0.2	0.98176	0.97186	0.96283	0.99881
	0.1	0.54256	0.53790	0.52670	0.54465
	0.05	0.43223	0.43108	0.41790	0.43096
	0.025	0.40399	0.40370	0.39137	0.40254
0.1	0.4	2.45939	2.42220	2.42005	2.51588
	0.2	0.68926	0.67931	0.67705	0.70534
	0.1	0.24697	0.24285	0.24055	0.25026
	0.05	0.13667	0.13551	0.13131	0.13634
	0.025	0.10878	0.10849	0.10425	0.10786
0.05	0.4	2.38715	2.34992	2.34938	2.44334
	0.2	0.61632	0.60637	0.60580	0.63187
	0.1	0.17295	0.16949	0.16891	0.17657
	0.05	0.06257	0.06141	0.06035	0.06260
	0.025	0.03375	0.03364	0.03363	0.03410
0.025	0.4	2.36906	2.33181	2.33168	2.42520
	0.2	0.59810	0.58815	0.58801	0.61350
	0.1	0.15448	0.15116	0.15102	0.15814
	0.05	0.04403	0.04286	0.04259	0.04415
	0.025	0.01653	0.01624	0.01597	0.01565

**Çizelge 3.3 :** Problem 2'nin Lin-I ile  $h$  ve  $k$ 'nın farklı değerleri için  $T = 10, 20, 30, 40$ 'da hesaplanan hata normları ve doğruluk mertebeleri.

$T$	$h = k$	Lin-I				[48]	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe ( $L_2$ )	Mertebe ( $L_\infty$ )	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
10	0.4	3.36579	1.15393			3.43837	1.19757
	0.2	0.84915	0.29273	1.9869	1.9789	0.86302	0.30054
	0.1	0.21279	0.07412	1.9966	1.9816	0.21597	0.07520
	0.05	0.05437	0.01920	1.9685	1.9488	0.05401	0.01880
	0.025	0.01733	0.00545	1.6495	1.8168	0.01354	0.00470
20	0.4	6.50693	2.20827			6.61452	2.25734
	0.2	1.63437	0.55485	1.9932	1.9927	1.66202	0.56742
	0.1	0.40919	0.13957	1.9979	1.9911	0.41603	0.14211
	0.05	0.10297	0.03559	1.9905	1.9714	0.10404	0.03554
	0.025	0.02820	0.00956	1.8685	1.8964	0.02603	0.00888
30	0.4	9.35810	3.09834			9.48958	3.16505
	0.2	2.35379	0.78334	1.9912	1.9838	2.38726	0.79726
	0.1	0.58933	0.19606	1.9978	1.9983	0.59774	0.19968
	0.05	0.14779	0.04967	1.9955	1.9808	0.14949	0.04994
	0.025	0.03881	0.01305	1.9290	1.9283	0.03739	0.01248
40	0.4	11.95079	3.89707			12.10156	3.95849
	0.2	3.00847	0.98176	1.9900	1.9889	3.04774	0.99881
	0.1	0.75350	0.24697	1.9974	1.9910	0.76333	0.25026
	0.05	0.18885	0.06257	1.9964	1.9808	0.19092	0.06260
	0.025	0.04887	0.01653	1.9502	1.9204	0.04774	0.01565

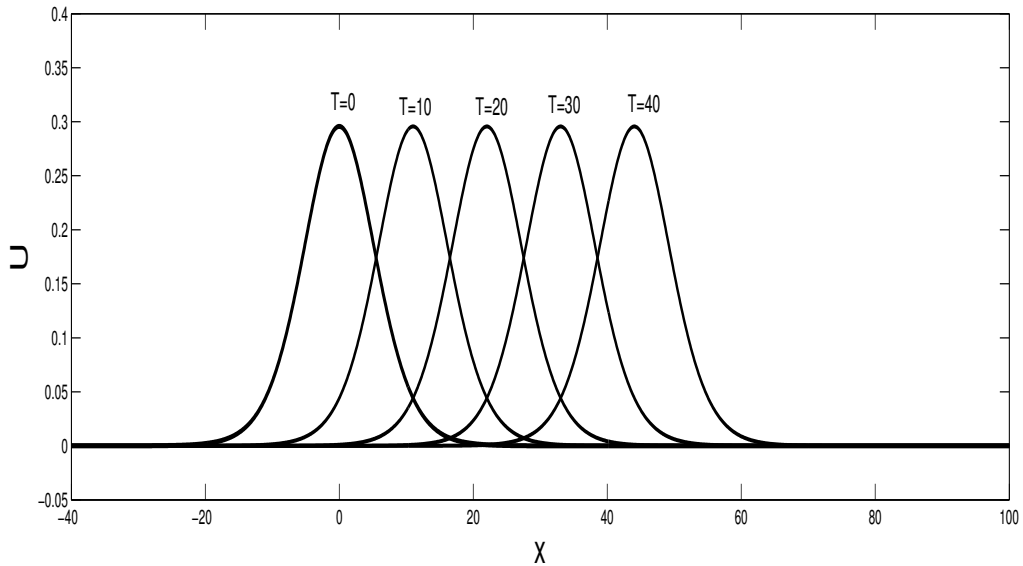
ve en iyi sonuçlar  $L_2$  hata normunda olduğu gibi yine Lin-III ile elde edilen nümerik şemadan hesaplanmıştır.

Çizelge 3.3, 3.4 ve 3.5'de sırasıyla Problem 2'nin  $h = k = 0.4, 0.2, 0.1, 0.5$  ve  $0.025$  değerleri için  $T = 10, 20, 30$  ve  $40$  zamanlarında, Lin-I, Lin-II ve Lin-III şemalarından hesaplanan  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normlarıyla birlikte doğruluk mertebesi verildi ve ayrıca Hu [48] tarafından önerilen şema ile elde edilen sonuçlarla karşılaştırıldı. Hesaplanan doğruluk mertebesinin  $p = 2$  analitik değerine yakın değerler olduğu görülmektedir. Her üç çizelgeden Lin-I, Lin-II ve Lin-III şemalarından elde edilen sonuçların Hu [48] tarafından önerilen şema ile elde edilen sonuçlardan daha iyi olduğu ve en iyi sonuçların ise Lin-III'den elde edildiği görülmektedir.

Çizelge 3.6'de Problem 2'nin  $h = k = 0.1, 0.05$  ve  $0.025$  değerleri için  $T = 0, 10, 20, 30, 40$  zamanlarında Lin-I, Lin-II ve Lin-III şemalarından elde edilen ayırık korunum sabitlerinin değerleri verildi.  $Q^n$  kütle ve  $E^n$  enerji değişmezlerinin iyi korunduğu ve her üç yöntemle

**Çizelge 3.4 :** Problem 2'nin Lin-II ile  $h$  ve  $k$ 'nin farklı değerleri için  $T=10,20,30,40$ 'da hesaplanan hata normları ve doğruluk mertebeleri.

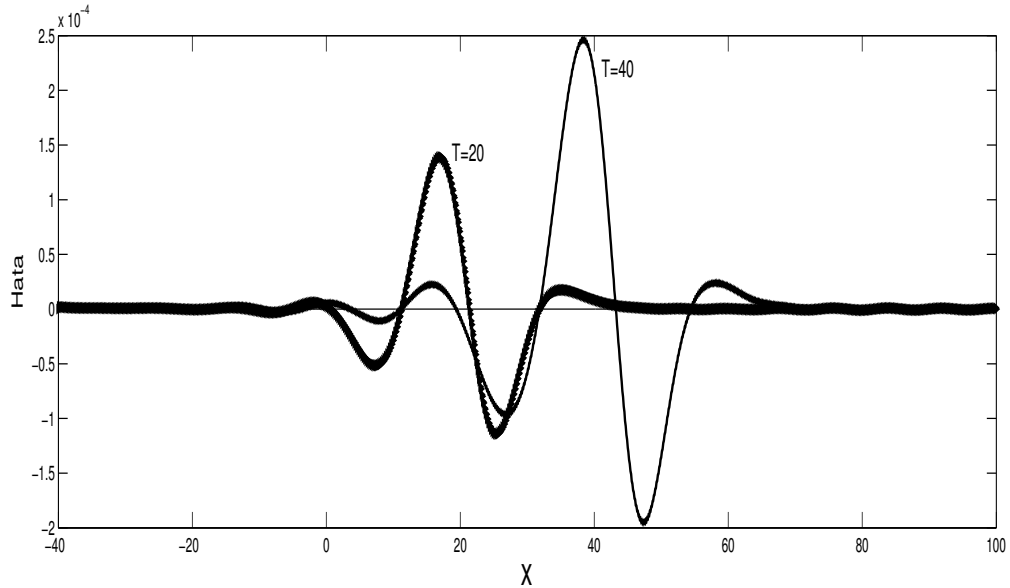
$T$	$h = k$	Lin-II				[48]	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe( $L_2$ )	Mertebe( $L_\infty$ )	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
10	0.4	3.29019	1.10474			3.43837	1.19757
	0.2	0.82971	0.28039	1.9875	1.9782	0.86302	0.30054
	0.1	0.20793	0.07103	1.9965	1.9809	0.21597	0.07520
	0.05	0.05318	0.01843	1.9671	1.9464	0.05401	0.01880
	0.025	0.01710	0.00525	1.6369	1.8117	0.01354	0.00470
20	0.4	6.39375	2.14605			6.61452	2.25734
	0.2	1.60584	0.53997	1.9933	1.9907	1.66202	0.56742
	0.1	0.40208	0.13584	1.9978	1.9910	0.41603	0.14211
	0.05	0.10124	0.03466	1.9897	1.9706	0.10404	0.03554
	0.025	0.02783	0.00932	1.8631	1.8949	0.02603	0.00888
30	0.4	9.23908	3.03852			9.48958	3.16505
	0.2	2.32347	0.76840	1.9915	1.9834	2.38726	0.79726
	0.1	0.58171	0.19210	1.9979	2.0000	0.59774	0.19968
	0.05	0.14588	0.04868	1.9955	1.9805	0.14949	0.04994
	0.025	0.03835	0.01281	1.9275	1.9261	0.03739	0.01248
40	0.4	11.84693	3.86062			12.10156	3.95849
	0.2	2.98175	0.97186	1.9903	1.9900	3.04774	0.99881
	0.1	0.74665	0.24285	1.9977	2.0007	0.76333	0.25026
	0.05	0.18701	0.06141	1.9973	1.9835	0.19092	0.06260
	0.025	0.04829	0.01624	1.9533	1.9189	0.04774	0.01565



**Şekil 3.1 :** Problem 2'nin Lin-I şemasından elde edilen  $h = 0.1$  ve  $k = 0.1$  için farklı  $T$  zamanlarında çözüm grafikleri

**Çizelge 3.5 :** Problem 2'nin Lin-III ile  $h$  ve  $k$ 'nın farklı değerleri için  $T=10,20,30,40$ 'da hesaplanan hata normları ve doğruluk mertebeleri.

$T$	$h = k$	Lin-III				[48]	
		$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$	Mertebe( $L_2$ )	Mertebe( $L_\infty$ )	$L_2 \times 10^3$	$L_\infty \times 10^3$
10	0.4	3.22831	1.06002			3.43837	1.19757
	0.2	0.81378	0.26917	1.9881	1.9775	0.86302	0.30054
	0.1	0.20394	0.06822	1.9965	1.9803	0.21597	0.07520
	0.05	0.05221	0.01772	1.9657	1.9448	0.05401	0.01880
	0.025	0.01691	0.00508	1.6264	1.8025	0.01354	0.00470
20	0.4	6.29990	2.08948			6.61452	2.25734
	0.2	1.58224	0.52643	1.9934	1.9888	1.66202	0.56742
	0.1	0.39620	0.13243	1.9977	1.9910	0.41603	0.14211
	0.05	0.09981	0.03381	1.9890	1.9697	0.10404	0.03554
	0.025	0.02754	0.00911	1.8577	1.8919	0.02603	0.00888
30	0.4	9.14136	2.98521			9.48958	3.16505
	0.2	2.29855	0.75481	1.9917	1.9836	2.38726	0.79726
	0.1	0.57545	0.18950	1.9980	1.9939	0.59774	0.19968
	0.05	0.14431	0.04778	1.9955	1.9877	0.14949	0.04994
	0.025	0.03796	0.01259	1.9266	1.9241	0.03739	0.01248
40	0.4	11.76754	3.82729			12.10156	3.95849
	0.2	2.96113	0.96283	1.9906	1.9910	3.04774	0.99881
	0.1	0.74133	0.24155	1.9980	1.9950	0.76333	0.25026
	0.05	0.18556	0.06045	1.9982	1.9985	0.19092	0.06260
	0.025	0.04782	0.01597	1.9562	1.9204	0.04774	0.01565



**Şekil 3.2 :** Problem 2'nin Lin-I şemasından elde edilen  $h = 0.1$  ve  $k = 0.1$  için farklı  $T$  zamanlarında hata grafikleri

**Çizelge 3.6 :** Problem 2'nin Lin-I Lin-II ve Lin-III ile  $h = k = 0.1, 0.05$  ve  $0.025$  değerleri için hesaplanan korumum sabitleri

Yöntem	T	$h = k = 0.1$			$h = k = 0.05$			$h = k = 0.025$		
		$Q^n$	$E^n$	$Q^n$	$E^n$	$Q^n$	$E^n$	$Q^n$	$E^n$	
Lin-I	0	4.12089313	0.83620109	4.12089316	0.83620119	4.12089317	0.83620127	4.12089317	0.83620127	
	10	4.12090427	0.83622106	4.12090443	0.83650342	4.12090436	0.84064301	4.12090436	0.84064301	
	20	4.12091302	0.83621342	4.12091334	0.83647729	4.12091392	0.83621845	4.12091392	0.83621845	
	30	4.12091875	0.83620393	4.12092123	0.83640718	4.12091485	0.83620573	4.12091485	0.83620573	
	40	4.12092496	0.83621649	4.12092937	0.83646425	4.12092473	0.83621453	4.12092473	0.83621453	
Lin-II	0	4.12089313	0.83620109	4.12089316	0.83620119	4.12089317	0.83620127	4.12089317	0.83620127	
	10	4.12090427	0.83622099	4.12090443	0.83650313	4.12090436	0.84064189	4.12090436	0.84064189	
	20	4.12091381	0.83621810	4.12091354	0.83649902	4.12091342	0.84077293	4.12091342	0.84077293	
	30	4.12092173	0.83620253	4.12092199	0.83639342	4.12092206	0.84035338	4.12092206	0.84035338	
	40	4.12092060	0.83620253	4.12092832	0.83632947	4.12093025	0.83999788	4.12093025	0.83999788	
Lin-III	0	4.12089324	0.83620109	4.12089321	0.83620118	4.12089320	0.83620120	4.12089320	0.83620120	
	10	4.12090437	0.83622091	4.12090448	0.83650280	4.12090439	0.84064030	4.12090439	0.84064030	
	20	4.12091463	0.83622302	4.12091378	0.83651943	4.12091349	0.84085223	4.12091349	0.84085223	
	30	4.12092454	0.83620174	4.12092274	0.83638126	4.12092226	0.84029689	4.12092226	0.84029689	
	40	4.12091673	0.83623196	4.12092741	0.83624844	4.12093004	0.83946919	4.12093004	0.83946919	
[48]	0	4.12089324	0.83620109	4.12089321	0.83620118	4.12089320	0.83620120	4.12089320	0.83620120	
	10	4.12089231	0.83620109	4.12089220	0.83620119	4.12089212	0.83620131	4.12089212	0.83620131	
	20	4.12089303	0.83620109	4.12089236	0.83620119	4.12089216	0.83620130	4.12089216	0.83620130	
	30	4.12089310	0.83620109	4.12089237	0.83620119	4.12089214	0.83620130	4.12089214	0.83620130	
	40	4.12089299	0.83620109	4.12089234	0.83620119	4.12089215	0.83620130	4.12089215	0.83620130	

**Çizelge 3.7 :** Problem 2'nin Lin-I, Lin-II ve Lin-III ile farklı  $T$  zamanlarında hesaplanan maksimum genlik değerleri ve konumları.

$T$	$x$	Genlik		
		Lin-I	Lin-II	Lin-III
0	0.00	0.29566	0.29566	0.29566
10	11.00	0.29565	0.29565	0.29566
20	22.00	0.29563	0.29563	0.29564
30	33.00	0.29561	0.29561	0.29562
40	44.00	0.29559	0.29559	0.29560

elde edilen sonuçların birbirleri ile oldukça iyi uyum içerisinde olduğu görülmektedir. Buradan nümerik çözümlerin analitik çözümlere yeterince yakın olduğu söylenebilir.

Çizelge 3.7'de, her üç nümerik şemadan hesaplanan soliteri dalgaların genlikleri ve konumları verilmektedir. Çizelgeden Lin-I, Lin-II ve Lin-III şemalarından elde edilen soliteri dalgaların genliklerinin birbirleri ile iyi uyum içinde olduğu ve  $(x,t) = (0,0)$  noktasındaki dalğanın genliğinin 0.29566 olan analitik değerine oldukça yakın olduğu görülmektedir.

Her üç lineerleştirme tekniği ile elde edilen nümerik çözümlerin birbirlerine oldukça yakın değerlere sahip olmasından dolayı grafik üzerinde ayırt edilemeyeceğinden Şekil 3.1'de sadece Lin-I tekniği ile elde edilen nümerik sonuçların dalga grafikleri  $h = k = 0.1$  değerleri için  $T = 0(10)40$  zamanlarında sunuldu. Şekilden, tek soliteri dalğanın artan zamanla eksenin sağ tarafına doğru şeklini ve hemen hemen genliğini koruyarak hareket ettiği görülmektedir.

Şekil 3.2'de ise  $h = k = 0.1$  için hata grafiği sunuldu. Şekilden görüldüğü üzere,  $t = 20$  zamanında hata yaklaşık olarak  $1.5 \times 10^{-4}$  iken,  $T = 40$  zamanında  $2.5 \times 10^{-4}$  olacak şekilde artmıştır.

#### 4. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, tek denklemlerle verilen Rosenau-Kawahara denklemi ile konum yönünde parçalanmış ikili (coupled) Rosenau-Kawahara denkleminin  $\frac{1}{2} (u^2)_x$  lineer olmayan terimi için Lin-I, Lin-II ve Lin-III ile verilen üç farklı lineerleştirme tekniği kullanılarak Crank-Nicolson korunumlu sonlu fark yöntemi ile nümerik şemaları elde edildi. Lin-I, Hu vd. [48] tarafından önerilen lineerleştirme tekniği olup Lin-II ve Lin-III ise yapılan araştırmalara göre bilindiği kadarıyla ilk defa bu tez çalışmasında Rosenau-Kawahara denklemi ile ikili Rosenau-Kawahara denklem sistemine uygulanan lineerleştirme teknikleridir.

Kullanılan şemaların etkinliğini ve doğruluğunu ölçmek ve göstermek için  $L_2$  ve  $L_\infty$  hata normları ile birlikte doğruluk mertebeleri ve korunum sabitleri hesaplandı. Nümerik şemalardan elde edilen sayısal sonuçlar  $L_2$  ve  $L_\infty$  hatalarının yeterince küçük olduğunu, korunum sabitlerinin korunduğunu ve hatta uzun hesaplama zamanları için neredeyse sabit kaldığını ve her bir şemanın doğruluk mertebesinin  $p = 2$  teorik değeri ile oldukça uyumlu olduğunu gösterdi.

İkinci ve üçüncü bölümlerde verilen çizelgelerden tezde sunulan Lin-II ve Lin-III lineerleştirme tekniklerinin kullanılmasıyla elde edilen nümerik şemalardan hesaplanan sonuçların, Hu vd. [48] tarafından önerilen Lin-I şemasının sonuçlarından daha iyi olduğu ve en iyi sonuçların Lin-III şemasından elde edildiğini görüldü.

Sonuç olarak Lin-I lineerleştirme tekniği ile birlikte özellikle bu tez çalışmasında kullanılan Lin-II ve Lin-III teknikleri ile elde edilen nümerik şemalar oldukça iyi sonuçlar üretmektedir. Bu tezde kullanılan alışılmış sonlu fark yöntemlerinin bir ailesi olan Crank-Nicolson korunumlu kapalı sonlu fark yönteminin kendine özgü avantajlarından başlıcaları kapalı ve simetrik bir cebirsel denklem sistemi türetmesi, problemin korunum sabitlerini sağlaması ve ayrıca yüksek mertebeden türevler içeren problemler için çözüm bölgesi içerisine düşmeyen hayali değerlerin alışılmış sonlu fark yöntemlerine göre daha az sayıda olmasıdır. Böylece, sunulan şemalar mühendislik, fizik ve diğer uygulamalı bilimlerde ortaya çıkan özellikle Rosenau tipi denklemler dahil olmak üzere başlangıç ve sınır şartları ile verilen yüksek mertebeden lineer olmayan kısmi diferansiyel denklemlerin yaklaşık çözümlerinin elde edilmesinde başarıyla kullanılabilir.



## KAYNAKLAR

- [1] **Korteweg, D.J. ve De Vries, G.** (1895). XLI. On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 39(240), 422–443.
- [2] **Biswas, A.** (2009). Solitary wave solution for KdV equation with power-law nonlinearity and time-dependent coefficients, *Nonlinear Dynamics*, 58(1), 345–348.
- [3] **Wang, G.W., Xu, T.Z., Ebadi, G., Johnson, S., Strong, A.J. ve Biswas, A.** (2014). Singular solitons, shock waves, and other solutions to potential KdV equation, *Nonlinear Dynamics*, 76(2), 1059–1068.
- [4] **Ma, L., Li, H. ve Ma, J.** (2015). Single-peak solitary wave solutions for the generalized Korteweg–de Vries equation, *Nonlinear Dynamics*, 79(1), 349–357.
- [5] **Dehghan, M. ve Shokri, A.** (2007). A numerical method for KdV equation using collocation and radial basis functions, *Nonlinear Dynamics*, 50(1), 111–120.
- [6] **Vaneeva, O.O., Papanicolaou, N., Christou, M.A. ve Sophocleous, C.** (2014). Numerical solutions of boundary value problems for variable coefficient generalized KdV equations using Lie symmetries, *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation*, 19(9), 3074–3085.
- [7] **Peregrine, D.H.** (1967). Long waves on a beach, *Journal of fluid mechanics*, 27(4), 815–827.
- [8] **Biswas, A.** (2010). Solitary waves for power-law regularized long-wave equation and R (m, n) equation, *Nonlinear Dynamics*, 59(3), 423–426.
- [9] **Mohebbi, A.** (2012). Solitary wave solutions of the nonlinear generalized Pochhammer–Chree and regularized long wave equations, *Nonlinear Dynamics*, 70(4), 2463–2474.
- [10] **Song, M.** (2015). Nonlinear wave solutions and their relations for the modified Benjamin–Bona–Mahony equation, *Nonlinear Dynamics*, 80(1), 431–446.
- [11] **Triki, H., Mirzazadeh, M., Bhrawy, A., Razborova, P. ve Biswas, A.** (2015). Solitons and other solutions to long-wave short-wave interaction equation, *Rom. J. Phys.*, 60(1-2), 72–86.
- [12] **Chegini, N., Salaripanah, A., Mokhtari, R. ve Isvand, D.** (2012). Numerical solution of the regularized long wave equation using nonpolynomial splines, *Nonlinear Dynamics*, 69(1), 459–471.
- [13] **Zhang, L.** (2005). A finite difference scheme for generalized regularized long-wave equation, *Applied Mathematics and Computation*, 168(2), 962–972.
- [14] **Roshan, T.** (2012). A Petrov–Galerkin method for solving the generalized regularized long wave (GRLW) equation, *Computers & Mathematics with Applications*, 63(5), 943–956.

- [15] **Rosenau, P.** (1986). A quasi-continuous description of a nonlinear transmission line, *Physica Scripta*, 34(6B), 827.
- [16] **Rosenau, P.** (1988). Dynamics of dense discrete systems: high order effects, *Progress of Theoretical Physics*, 79(5), 1028–1042.
- [17] **Park, M.** (1990). On the Rosenau equation, *Mat. Aplic. Comp*, 9, 145–152.
- [18] **Chung, S. ve Ha, S.** (1994). Finite element Galerkin solutions for the Rosenau equation, *Applicable Analysis*, 54(1-2), 39–56.
- [19] **Chung, S.** (1998). Finite Difference Approximate Solutions for: the Rosenau Equation, *Applicable Analysis*, 69(1-2), 149–156.
- [20] **Omrani, K., Abidi, F., Achouri, T. ve Khiari, N.** (2008). A new conservative finite difference scheme for the Rosenau equation, *Applied Mathematics and Computation*, 201(1-2), 35–43.
- [21] **Manickam, S.A.V., Pani, A.K. ve Chung, S.K.** (1998). A second-order splitting combined with orthogonal cubic spline collocation method for the Rosenau equation, *Numerical Methods for Partial Differential Equations: An International Journal*, 14(6), 695–716.
- [22] **Choo, S., Chung, S. ve Kim, K.** (2008). A discontinuous Galerkin method for the Rosenau equation, *Applied Numerical Mathematics*, 58(6), 783–799.
- [23] **Pan, X. ve Zhang, L.** (2012). On the convergence of a conservative numerical scheme for the usual Rosenau-RLW equation, *Applied Mathematical Modelling*, 36(8), 3371–3378.
- [24] **Pan, X. ve Zhang, L.** (2012). Numerical simulation for general Rosenau-RLW equation: an average linearized conservative scheme, *Mathematical Problems in Engineering*, 2012.
- [25] **Pan, X., Zheng, K. ve Zhang, L.** (2013). Finite difference discretization of the Rosenau-RLW equation, *Applicable Analysis*, 92(12), 2578–2589.
- [26] **Atouani, N. ve Omrani, K.** (2013). Galerkin finite element method for the Rosenau-RLW equation, *Computers & Mathematics with Applications*, 66(3), 289–303.
- [27] **Mittal, R. ve Jain, R.** (2012). Numerical solution of general Rosenau-RLW equation using quintic B-splines collocation method, *Communications in Numerical Analysis*, 2012.
- [28] **Saha, A.** (2012). Topological 1-soliton solutions for the generalized Rosenau-KdV equation, *Fundamental Journal of Mathematical Physics*, 2(1), 19–23.
- [29] **Razborova, P., Triki, H. ve Biswas, A.** (2013). Perturbation of dispersive shallow water waves, *Ocean Engineering*, 63, 1–7.
- [30] **Hu, J., Xu, Y. ve Hu, B.** (2013). Conservative linear difference scheme for Rosenau-KdV equation, *Advances in Mathematical Physics*, 2013.

- [31] **Wongsaijai, B. ve Pochinapan, K.** (2014). A three-level average implicit finite difference scheme to solve equation obtained by coupling the Rosenau–KdV equation and the Rosenau–RLW equation, *Applied Mathematics and Computation*, 245, 289–304.
- [32] **Razborova, P., Ahmed, B. ve Biswas, A.** (2014). Solitons, shock waves and conservation laws of Rosenau-KdV-RLW equation with power law nonlinearity, *Applied Mathematics & Information Sciences*, 8(2), 485.
- [33] **Razborova, P., Moraru, L. ve Biswas, A.** (2014). Perturbation of dispersive shallow water waves with Rosenau-KdV-RLW equation and power law nonlinearity, *Rom. J. Phys*, 59(7-8), 658–676.
- [34] **Razborova, P., Kara, A.H. ve Biswas, A.** (2015). Additional conservation laws for Rosenau–KdV–RLW equation with power law nonlinearity by Lie symmetry, *Nonlinear Dynamics*, 79(1), 743–748.
- [35] **Sanchez, P., Ebadi, G., Mojaver, A., Mirzazadeh, M., Eslami, M. ve Biswas, A.** (2015). Solitons and other solutions to perturbed Rosenau-KdV-RLW equation with power law nonlinearity, *Acta Phys. Pol. A*, 127(6), 1577–1586.
- [36] **Kawahara, T.** (1972). Oscillatory solitary waves in dispersive media, *Journal of the physical society of Japan*, 33(1), 260–264.
- [37] **Hunter, J.K. ve Scheurle, J.** (1988). Existence of perturbed solitary wave solutions to a model equation for water waves, *Physica D: Nonlinear Phenomena*, 32(2), 253–268.
- [38] **Sirendaoreji** (2004). New exact travelling wave solutions for the Kawahara and modified Kawahara equations, *Chaos Solitons & Fractals*, 19(1), 147–150.
- [39] **Wazwaz, A.M.** (2007). New solitary wave solutions to the modified Kawahara equation, *Physics Letters A*, 360(4-5), 588–592.
- [40] **Yusufoglu, E., Bekir, A. ve Alp, M.** (2008). Periodic and solitary wave solutions of Kawahara and modified Kawahara equations by using sine–cosine method, *Chaos, Solitons & Fractals*, 37(4), 1193–1197.
- [41] **Zhang, D.** (2005). Doubly periodic solutions of the modified Kawahara equation, *Chaos, Solitons & Fractals*, 25(5), 1155–1160.
- [42] **Bridges, T.J. ve Derks, G.** (2002). Linear instability of solitary wave solutions of the Kawahara equation and its generalizations, *SIAM Journal on Mathematical Analysis*, 33(6), 1356–1378.
- [43] **Shuangping, T. ve Shuangbin, C.** (2002). EXISTENCE AND UNIQUENESS OF SOLUTION TO NONLINEAR KAWAHARA EQUATION.
- [44] **Jin, L.** (2009). Application of variational iteration method and homotopy perturbation method to the modified Kawahara equation, *Mathematical and Computer modelling*, 49(3-4), 573–578.
- [45] **Polat, N., Kaya, D. ve Tutalar, H.I.** (2006). A analytic and numerical solution to a modified Kawahara equation and a convergence analysis of the method, *Applied mathematics and computation*, 179(2), 466–472.

- [46] **Kaya, D. ve Al-Khaled, K.** (2007). A numerical comparison of a Kawahara equation, *Physics letters A*, 363(5-6), 433–439.
- [47] **Zuo, J.M.** (2009). Solitons and periodic solutions for the Rosenau–KdV and Rosenau–Kawahara equations, *Applied Mathematics and Computation*, 215(2), 835–840.
- [48] **Hu, J., Xu, Y., Hu, B. ve Xie, X.** (2014). Two conservative difference schemes for Rosenau-Kawahara equation, *Advances in Mathematical Physics*, 2014.
- [49] **Labidi, M. ve Biswas, A.** (2011). Application of He’s principles to Rosenau-Kawahara equation., *Mathematics in Engineering, Science & Aerospace (MESA)*, 2(2).
- [50] **Biswas, A., Triki, H. ve Labidi, M.** (2011). Bright and dark solitons of the Rosenau-Kawahara equation with power law nonlinearity, *Physics of Wave Phenomena*, 19(1), 24–29.
- [51] **He, D.** (2015). New solitary solutions and a conservative numerical method for the Rosenau–Kawahara equation with power law nonlinearity, *Nonlinear Dynamics*, 82(3), 1177–1190.
- [52] **Chen, T., Xiang, K., Chen, P. ve Luo, X.** (2018). A New Linear Difference Scheme for Generalized Rosenau-Kawahara Equation, *Mathematical Problems in Engineering*, 2018.
- [53] **Wongsajjai, B., Charoensawan, P., Chaobankoh, T. ve Pochinapan, K.** (2021). Advance in compact structure-preserving manner to the Rosenau–Kawahara model of shallow-water wave, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 44(8), 7048–7064.
- [54] **Smith, G.D.** (1985). *Numerical solution of partial differential equations: finite difference methods*, Oxford university press.
- [55] **Griffiths, D.V. ve Smith, I.M.** (2006). *Numerical methods for engineers*, CRC press.
- [56] **Dimov, I., Faragó, I. ve Vulkov, L.** (2019). *Finite Difference Methods. Theory and Applications*, Springer.
- [57] **Rashidinia, J. ve Rasoulizadeh, M.N.** (2019). Numerical methods based on radial basis function-generated finite difference (RBF-FD) for solution of GKdVB equation, *Wave Motion*, 90, 152–167.

## ÖZGEÇMİŞ

**Ad-Soyad** : Heval ÖZDEMİR EKİCİ

### ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** İnönü Üniversitesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği

