T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HEMEN HEMEN KONTAKT EĞRİLER

Ecem KAVUK

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Aralık 2015

Tezin Başlığı : HEMEN HEMEN KONTAKT EĞRİLER

Tezi Hazırlayan : Ecem KAVUK

Sınav Tarihi : 25.12.2015

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri (ilk isim jüri başkanı, ikinci isim tez danışmanı)

Prof.Dr. Sadık KELEŞ ____________________

Prof.Dr. Erol KILIÇ ____________________

Doç.Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ ____________________

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

____

Prof.Dr. Alaattin ESEN

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum ”Hemen Hemen Kontakt Eğriler” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ecem KAVUK

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HEMEN HEMEN KONTAKT EĞRİLER

Ecem KAVUK

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

86+iv sayfa

2015

Danışman: Prof.Dr. Erol KILIÇ

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölümde, daha sonraki bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için eğriler, Riemann manifoldlar, Kontakt manifoldlar, K-Kontakt manifoldlar, Sasakian Manifoldlar, Lorentzian kontakt manifoldlar, Hemen hemen parakontakt manifoldlar, Hemen hemen normal parakontakt metrik manifoldlar hakkında bazı temel kavramlara yer verildi.

İkinci bölümde ise ilk olarak Legendre eğrileri ve bazı örnekler verildi. Ayrıca bu bölümde slant eğriler, 3-boyutlu hemen hemen normal kontakt geometride slant eğriler ve Lorentzian sasakian uzaylarda Legendre eğrileri incelendi.

Üçüncü bölümde ise 3-boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifoldlarda slant eğriler, null slant eğriler, null normal slant eğriler , 3-boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifoldlarda Legendre eğrileri ve 3-boyutlu Heisenberg gruplarda Legendre eğrileri verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Kontakt Manifold, Hemen Hemen Normal Kontakt Metrik Manifold, Hemen Hemen Normal Parakontakt Metrik Manifold, Lorentzian Metrik Manifold, Frenet Eğrisi, Legendre Eğrisi, Slant Eğri, Heisenberg Grup.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ALMOST CONTACT CURVES

Ecem KAVUK

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

86+iv pages

2015

Supervisor: Prof.Dr. Erol KILIÇ

This study which is designed as master science thesis covers three chapters.

In the first chapter we give some basic concepts about curves, Riemannian manifolds, contact manifolds, K-Contact manifolds, Sasakian manifolds, Lorentzian contact manifolds, almost paracontact metric manifolds and normal almost paracontact metric manifolds for the rest of the thesis that readers can easily understand.

In the second chapter, firstly, Legendre curves and some examples are given. Furthermore, in this chapter, we investigate slant curves, slant curves in 3-dimensional normal almost geometry and Legendre curves in Lorentzian Sasaki spaces.

In the third chapter, slant curves in 3-dimensional normal almost paracontact metric manifolds, null slant curves, null normal slant curves, Legendre curves in 3-dimensional normal almost paracontact metric manifolds and Legendre curves on 3-dimensional Heisenberg groups are given.

KEY WORDS: Contact Manifold, Normal Almost Contact Metric Manifold, Normal Almost Paracontact Metric Manifold, Lorentzian Metric Manifold, Frenet Curve, Legendre Curve, Slant Curve, Heisenberg Group.

TEŞEKKÜR

Tez konumu veren ve bu çalışmanın her aşamasında bilgi ve görüşlerini esirgemeyen, tecrübeleriyle beni yönlendiren tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Erol KILIÇ' a, bölümde iyi çalışma ortamı hazırladığından ve teşviklerinden dolayı Matematik Bölüm Başkanı Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ' e, tez yazımında kullandığım latex programının kullanımında ve diğer konularda yardımını esirgemeyen Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR' e, ayrıca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkür ederim.

Ayrıca bu tez TUBİTAK tarafından 113F388 nolu projesi ile desteklenmiştir. Desteklerinden dolayı TUBİTAK'a teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Eğriler teorisi diferensiyel geometrinin temelini teşkil ettiği gibi, fen bilimlerinin diğer alanlarında da çok kullanılan bir teoridir. Özellikle, mühendisliğin hemen hemen bütün alanlarında ihtiyaç duyulan matematiksel yapıların başında gelir. Klasik diferensiyel geometriden de bilindiği gibi, eğrilerin öncelikle ve başlıca çalışıldığı uzay Öklid uzayıdır. Öklid uzayında eğrilerin sınıflandırılması genel olarak Frenet çatısına göre yapılır, bu çatı yardımıyla eğrilerin karakteristik özellikleri incelenir ve bu özelliklerine göre de isimlendirilirler. Bu eğrilerden en ilginç olanlarından biri, 3-boyutlu Öklid uzayındaki sabit eğimli, yani eğrinin teğetinin sabit bir doğrultuyla yaptığı açının sabit olduğu eğrilerdir. Bu tür bir eğri bir silindir üzerinde var olduğundan dolayı silindirik helis olarak adlandırılmış ve bir çok matematikçinin ilgisini çekmiştir. Bu kavramın değişik uzaylarda karşılıkları araştırılmış ve bu tür eğrilerin varlıkları ile ilgili gerek ve yeter şartlar aranmıştır. Bu eğrilerin klasik karakterizasyonu Bertrand-Lancret-de Saint Venant teoremi olarak bilinen teoremle verilir.

Hemen hemen kontakt geometride Legendre eğrisi kavramı, [1] de Ch. Baikoussis ve D.E. Blair tarafından 1994 yılında yayınladıkları çalışmalarında tanıtıldı. Bu çalışmadan sonra Legendre eğrisi kavramı bir çok geometrici tarafından değişik uzaylarda çalışıldı ve bu eğri tipleri ile ilgili bir çok karakterizasyon verildi. J.T. Cho, J.I. Inoguchi ve J.E. Lee tarafından [2] de hemen hemen kontakt metrik manifoldlarda slant eğri kavramı, helis ve Legendre eğrilerinin bir genelleştirilmesi olarak tanımlandı. Legendre eğrisi kavramı şu ana kadar, hemen hemen kontakt metrik manifoldların yanı sıra, normal hemen hemen kontakt manifoldlar, Sasakian manifoldlar, kontakt pseudo-Hermityen manifoldlar, Kenmotsu manifoldları ve f-Kenmotsu manifoldlarında bir çok matematikçi tarafından çalışıldı.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu tezin amacı "Hemen Hemen Kontakt Eğriler" adı altındaki eğri türlerinin araştırmasını yapmak ve bu eğrileri anlaşılır hale getirmektir. Üç bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde eğriler, Riemann manifoldlar, Kontakt manifoldlar, K-Kontakt manifoldlar, Saskian manifoldlar, Lorentzian kontakt manifoldlar, Hemen hemen parakontakt metrik manifoldlar ve Hemen hemen normal parakontakt metrik manifoldlar hakkında temel ve kısa bilgilere verildi. İkinci bölümde ilk olarak Legendre eğrileri ve bazı örnekler verildi. Ayrıca bu bölümde Slant eğriler, 3-boyutlu hemen hemen normal kontakt geometride slant eğriler ve Lorentzian Sasaki uzaylarda Legendre eğrileri incelendi. Üçüncü bölümde ise 3-boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifoldlarda slant eğriler, Null slant eğriler, Null normal slant eğriler, 3-boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifoldlarda Legendre eğrileri ve 3-boyutlu Heisenberg gruplarda Legendre eğrileri incelendi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Eğriler

Tanım 2.1.1. *$a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$, $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$ olmak üzere*

$$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

sürekli dönüşümüne $\mathbb{R}^3$de bir eğri denir. Eğer γ dönüşümü bir diferensiyellenebilir dönüşüm ise eğriye bir diferensiyellenebilir eğri denir. $s \in (a, b)$ için $\gamma'(s) = \dfrac{d\gamma}{ds}$ vektörüne γ eğrisinin teğet vektör alanı denir ve T ile gösterilir. Eğer $\|\gamma'(s)\| = 1$ ise γ ya yay parametresi ile verilmiş eğri denir. Her regüler eğri yay parametresi ile ifade edilebildiğinden, eğriler yay parametresi ile gözönüne alınabilir [3].

Tanım 2.1.2. *$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ yay parametresi ile verilmiş bir eğri olsun. $\kappa(s) = \|\gamma''(s)\|$ pozitif reel sayısına γ eğrisinin s noktasındaki eğriliği denir [3].*

Eğer γ eğrisi $\mathbb{R}^3$de bir doğru ise u ve v, $\mathbb{R}^3$de sabit vektörler ve $\|u\| = 1$ olmak üzere

$$\gamma(s) = us + v$$

şeklindedir ve $\kappa = 0$ dır.

$\kappa(s) \neq 0$ olan noktalarda

$$\gamma''(s) = \kappa(s) N(s)$$

denklemiyle tanımlı, $\gamma''(s)$ yönünde tanımlı $N(s)$ birim vektörü vardır.

$$\|\gamma'(s)\| = 1$$

olduğundan $N(s)$ ile $\gamma'(s)$ dik vektörlerdir, yani $\langle \gamma'(s), N(s) \rangle = 0$ dır. $N(s)$ vektörüne γ eğrisinin birim normali denir.

$\{T, N\}$ kümesinin germiş olduğu düzleme γ nın oskülatör düzlemi denir.

$\kappa = 0$ olan noktalarda birim normal vektörü tanımlı değildir, dolayısıyla oskülatör düzlem de tanımlı değildir.

$\gamma''(s) = 0$ olan $s \in I$ noktasına birinci dereceden tekil nokta denir.

Bundan sonra birinci dereceden tekil noktaya sahip olmayan eğrileri gözönüne alacağız. Bu durumda

$$T'(s) = \kappa(s) N(s) \tag{2.1.1}$$

olarak yazabiliriz.

$\mathbb{R}^3$de vektörel çarpım $\wedge$ ile gösterilmek üzere, $B(s) = T(s) \wedge N(s)$ vektörü oskülatör düzleme diktir ve $B(s)$, γ eğrisinin binormal vektörü olarak adlandırılır.

$B(s) = T(s) \wedge N(s)$ olduğundan

$$B'(s) = T'(s) \wedge N(s) + T(s) \wedge N'(s) = T(s) \wedge N'(s)$$

elde edilir. $\langle T(s), N(s) \rangle = 0$, $\langle N(s), N'(s) \rangle = 0$ olduğundan $B'(s)$ vektörü $N(s)$ vektörüne paraleldir ve

$$B'(s) = -\tau(s) N(s) \tag{2.1.2}$$

olacak şekilde bir $\tau(s)$ fonksiyonu vardır. Bu $\tau(s)$ fonksiyonuna γ eğrisinin, $\gamma(s)$ noktasındaki burulması denir.

$B(s) = T(s) \wedge N(s)$ ifadesinde her iki taraf $T(s)$ ile sağ taraftan vektörel çarpıma tabi tutulursa $N(s) = B(s) \wedge T(s)$ olarak elde edilir. Buradan ise

$$N'(s) = B'(s) \wedge T(s) + B(s) \wedge T'(s)$$

olur. (2.1.1) ve (2.1.2) kullanılırsa

$$N'(s) = \tau(s) B(s) - \kappa(s) T(s) \tag{2.1.3}$$

olarak bulunur. (2.1.1), (2.1.2) ve (2.1.3) den

$$\begin{aligned} T' &= \kappa N \\ N' &= -\kappa T + \tau B \\ B' &= -\tau N \end{aligned}$$

elde edilir ki buna γ eğrisinin Frenet formülleri denir.

$\{T, B\}$ kümesinin gerdiği düzleme rektifiyan düzlem, $\{N, B\}$ kümesinin gerdiği düzleme de normal düzlem denir.

$N(s)$ ve $B(s)$ vektörlerine, γ nın sırasıyla asli normali ve binormali denir. $R = \frac{1}{\kappa}$ ya $\gamma(s)$ noktasında γ nın eğrilik yarıçapı denir.

Eğer $\kappa = 0$ ise $\mathbb{R}^3$ de bir eğriye geodezik denir. $\mathbb{R}^3$ ün geodezikleri doğrulardır. Eğer $\tau = 0$ ise γ eğrisi bir düzlemsel eğridir.

$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^3$ olmak üzere γ eğrisinin $t \in I$ noktasındaki eğriliği

$$\kappa(t) = \frac{\|\gamma' \wedge \gamma''\|}{\|\gamma'\|^3}$$

olur ve torsiyonu

$$\tau(t) = \frac{\det(\gamma', \gamma'', \gamma''')}{\|\gamma' \wedge \gamma''\|^2}$$

dır.

$\gamma : I \longrightarrow \mathbb{R}^2$, $\gamma(t) = (x(t), y(t))$ ile verilmiş bir eğri ise γ nın eğriliği

$$\kappa(t) = \frac{\dot{x}\ddot{y} - \ddot{x}\dot{y}}{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)^{3/2}}$$

ile hesaplanır.

(M, g) bir 3-boyutlu Riemann manifold olsun. $\gamma : I \longrightarrow M$ bir regüler eğri ve γ yay parametresi ile verilmiş bir eğri olsun. ∇, M üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\nabla_{\dot{\gamma}}$ ile γ boyunca ∇ ya göre kovaryant diferensiyeli gösterelim.

γ nın M üzerinde bir Frenet eğrisi olması için gerek ve yeter şart aşağıdaki üç durumdan birinin sağlanmasıdır:

(i) γ, 1. dereceden oskülatördür yani

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0 \qquad (2.1.4)$$

ise bunlar geodeziklerdir.

(ii) γ, 2. dereceden oskülatördür yani $E_1 = \dot{\gamma}$ olmak üzere E_1, E_2 ortonormal vektör alanları vardır öyleki

$$\nabla_{\dot{\gamma}} E_1 = \kappa E_2, \qquad \nabla_{\dot{\gamma}} E_2 = -\kappa E_1 \tag{2.1.5}$$

dir. Burada κ, γ boyunca bir pozitif fonksiyondur.

(iii) γ, 3. dereceden oskülatördür yani γ boyunca $E_1 = \dot{\gamma}$, E_2, E_3 ortonormal vektör alanları vardır öyle ki

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} E_1 &= \kappa E_2 \\ \nabla_{\dot{\gamma}} E_2 &= -\kappa E_1 + \tau E_3 \\ \nabla_{\dot{\gamma}} E_3 &= -\tau E_2 \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

dır. Burada κ ve τ, γ boyunca pozitif fonksiyonlardır. κ ve τ ya sırasıyla γ nın eğriliği ve torsiyonu (burulması) denir.

Eğer 2. dereceden bir γ Frenet eğrisinde $\kappa = sabit > 0$ ise γ ya M de bir çember denir. Eğer 3. dereceden bir Frenet eğrisinde eğrisinde $\kappa = sabit$ ve $\tau = sabit$ ise γ ya bir helis denir. Eğer $\frac{\kappa}{\tau} = sabit$ ise γ ya bir genelleştirilmiş helis denir [3].

2.2 Riemann Manifoldlar

Tanım 2.2.1. *M, n-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M üzerinde simetrik, pozitif tanımlı $(0,2)$ tipinde bir g tensör alanı var ise g ye M üzerinde bir Riemann metrik ve (M,g) ikilisine de Riemann manifold denir [4].*

(M,g) bir Riemann manifold, M nin bir p noktasında lokal koordinat sistemi $(x^1, ..., x^n)$ olsun. $X = \sum X^i \frac{\partial}{\partial x^i}$, $Y = \sum Y^j \frac{\partial}{\partial x^j}$, $p \in M$ noktasında iki tanjant vektör olmak üzere

$$\begin{aligned} g(X,Y) &= \sum_{i,j=1}^{n} X^i Y^j g\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) \\ &= \sum g_{ij} dx^i(X)\, dx^j(Y) \end{aligned}$$

olarak yazılır. Burada $dx^i(X) = X(x^i) = X^i$ ve $dx^j(Y) = Y(x^j) = Y^j$ dir. Ayrıca $g^{ij} = g(dx^i, dx^j)$ olmak üzere $g_{ij}g^{jk} = \delta_i^k$ dır [4].

Tanım 2.2.2. *M bir diferensiyellenebilir manifold ve ∇ da M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Bu durumda $X,\ Y \in \chi(M)$ için*

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

şeklinde tanımlanan $T : \chi(M) \times \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ tensörüne torsiyon tensörü denir. T torsiyon tensörü anti-simetriktir, yani

$$T(X,Y) = -T(Y,X)$$

dir. Ayrıca $\forall X,\ Y \in \chi(M)$ ve $f,\ g \in C^\infty$ fonksiyonları için

$$T(fX, gY) = fgT(X,Y)$$

olur [4].

Tanım 2.2.3. *(M,g) bir Riemann manifold ve ∇ da M üzerinde bir afin konneksiyon olsun. Bu durumda $\forall X,\ Y,\ Z \in \chi(M)$ için*

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z)$$

dir. Eğer $\nabla_X g = 0$ ise ∇ ya bir metrik konneksiyon denir. M üzerinde torsiyonsuz metrik konneksiyona Levi-Civita konneksiyonu denir [5].

Tanım 2.2.4. *M bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X,\ Y,\ Z \in \chi(M)$ için*

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \qquad (2.2.1)$$

şeklinde tanımlanan $R(X,Y) : \chi(M) \longrightarrow \chi(M)$ dönüşümüne M Riemann manifoldunun eğrilik tensörü denir [5].

Teorem 2.2.1. *Eğer M sabit c eğrilikli uzay form ise, M de X, Y ve Z vektör alanları için*

$$R(X,Y)Z = c[g(Y,Z)X - g(X,Z)Y]$$

dir [4].

Tanım 2.2.5. *(M, g) n-boyutlu Riemann manifoldu ve M manifoldunu bir p noktasındaki tanjant uzayı T_pM olsun. T_pM uzayının 2-boyutlu bir alt uzayı P olsun. P düzlemini geren birim vektörler x ve y olmak üzere*

$$K(P) = K(x, y) = \frac{g(R(x, y)y, x)}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2}$$

değerine M manifoldunun P düzlemine göre kesit eğriliği denir [5].

Teorem 2.2.2. *Bir M Riemann manifoldu üzerinde bir Riemann konneksiyonu ∇ olsun. Her X, Y, $Z \in \chi(M)$ için aşağıdaki özellikler sağlanır:*

1) $R(X, Y)Z + R(Z, X)Y + R(Y, Z)X = 0$ (I. Bianchi özdeşliği)

2) $K(X, Y, Z, W) = -K(Y, X, Z, W)$

3) $K(X, Y, Z, W) = -K(X, Y, W, Z)$

4) $K(X, Y, Z, W) = K(Z, W, X, Y)$ [4].

Tanım 2.2.6. *(M, g) bir Riemann manifoldu ve R de M nin eğrilik tensör alanı olsun. Her X, $Y \in \chi(M)$ için R nin izi*

$$S = iz\{R \longrightarrow R(X, .)Y\}$$

ye M nin ∇ ya göre Ricci eğriliği denir [4].

Tanım 2.2.7. *M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. $\forall p \in M$ noktasına T_pM nin bir D_p alt uzayını karşılık getiren*

$$D : M \longrightarrow \cup T_pM$$

$$p \longrightarrow D_p \subset T_pM$$

dönüşümüne distrübüsyon denir. Eğer D_p yi geren $X_1, ..., X_n$ vektör alanları varsa D ye diferensiyellenebilir distrübüsyon denir. Eğer $D_p = T_pM$ ise D ye integrallanebilirdir denir. $\forall X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ ise D ye involutive denir. Ayrıca D nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart D nin involutive olmasıdır (Frobenius Teoremi) [4].

Tanım 2.2.8. *M bir manifold ve X de M üzerinde bir vektör alanı olsun.* Φ_t 1*-parametreli dönüşüm grubu olmak üzere*

$$(L_X K)_x = \lim_{t=0} \frac{1}{t} \left[K_x - (\Phi_t K)_x \right]$$

ifadesine K tensör alanının X vektör alanına göre Lie türevi denir [4].

Tanım 2.2.9. (M, g) *bir Riemann manifold ve X de M üzerinde bir vektör alanı olsun. Eğer g, X in* 1*-parametreli dönüşüm grubu altında invaryant, yani*

$$L_X g = 0$$

ise X vektör alanına g Riemann metriğinin bir Killing vektör alanı denir. Eğer X bir Killing vektör alanı ise bu durumda M de Y ve Z vektör alanları için

$$(L_X g)(Y, Z) = g(\nabla_Y X, Z) + g(\nabla_Z X, Y) = 0$$

dır [5].

2.3 Kontakt Manifoldlar

Tanım 2.3.1. M^{2n+1}*,* C^{∞}*-sınıfından diferensiyellenebilir* $(2n+1)$*-boyutlu bir manifold olsun. Eğer* M^{2n+1} *üzerinde her yerde diferensiyellenebilir bir* η 1*- formu var ve*

$$\eta \Lambda (d\eta)^n \neq 0$$

şartını sağlıyor ise M^{2n+1} *e bir kontakt manifold veya bir kontakt yapıya sahiptir ve* η *ya da bir kontakt form denir [4].*

Tanım 2.3.2. (M, η) *bir kontakt manifold olsun. Bu durumda*

$$D = \{X \in TM \mid \eta(X) = 0\}$$

şeklinde tanımlanan D distribüsyonuna kontakt distribüsyon denir [4].

Tanım 2.3.3. *M yönlendirilebilir bir manifold ise (M, η) manifoldunda*

$$\eta(\xi) = 1, \quad d\eta(\xi, X) = 0$$

olacak şekilde bir ξ vektör alanı vardır. ξ vektör alanına M nin karekteristik vektör alanı denir. Eğer M üzerinde

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi \tag{2.3.1}$$

şartlarını sağlayacak şekilde η $1-$formu, ξ vektör alanı ve φ $(1,1)$ tipinde tensör alanı var ise (φ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen kontakt yapı denir [4].

Bir (M, φ, ξ, η) hemen hemen kontakt manifoldunda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$$\varphi\xi = 0$$

$$\eta \circ \varphi = 0$$

$$rank\varphi = 2n$$

[4].

Tanım 2.3.4. *(M, φ, ξ, η) bir hemen hemen kontakt manifold olsun. Eğer M üzerindeki keyfi X, Y vektör alanları için*

$$g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \eta(X)\eta(Y) \tag{2.3.2}$$

şartını sağlayan bir g Riemann metriği var ise M ye (φ, ξ, η, g) hemen hemen kontakt metrik yapısına sahiptir veya M ye hemen hemen kontakt metrik manifold denir. Burada g metriğine hemen hemen kontakt yapı ile uyumlu metrik (bağdaşık, compatible metrik) denir [4].

Tanım 2.3.5. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. $\Phi(X, Y) = g(X, \varphi Y)$ şeklinde tanımlı $(0,2)-$tipindeki Φ tensörüne M nin temel iki formu denir [4].*

(M,φ,ξ,η) bir $(2n+1)-$boyutlu hemen hemen kontakt manifold olsun. $M\times\mathbb{R}$ çarpım manifoldunu gözönüne alalım. $M\times\mathbb{R}$ üzerinde bir vektör alanı $\left(X,f\frac{d}{dt}\right)$ şeklinde tanımlanır. Burada X, M üzerinde vektör alanı; t, $\mathbb{R}$ nin koordinatı; f de $M\times\mathbb{R}$ üzerinde bir fonksiyondur.

$M\times\mathbb{R}$ nin bir tanjant uzayı üzerinde J endomorfizmini

$$J\left(X,f\frac{d}{dt}\right)=\left(\varphi X-f\xi,\eta\left(X\right)\frac{d}{dt}\right)$$

şeklinde tanımlayalım. Bu şekilde tanımlanan J, $J^2=-I$ yı sağlar ve J, $M\times\mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen kompleks yapıdır.

J hemen hemen kompleks yapısının Nijenhuis tensör alanı

$$N_J\left(X,Y\right)=J^2\left[X,Y\right]+\left[JX,JY\right]-J\left[JX,Y\right]-J\left[X,JY\right]$$

şeklinde tanımlanır [4].

Tanım 2.3.6. *(M,φ,ξ,η) bir hemen hemen kontakt manifold olsun. Eğer N_J Nijenhuis torsiyon tensörü sıfır ise J hemen hemen kompleks yapısına integrallenebilirdir denir. Eğer $M\times\mathbb{R}$ de J hemen hemen kompleks yapısı integrallenebilirse, (φ,ξ,η) hemen hemen kontakt yapısına normaldir denir [4].*

φ nin Nijenhuis tensör alanı

$$N_\varphi\left(X,Y\right)=\varphi^2\left[X,Y\right]+\left[\varphi X,\varphi Y\right]-\varphi\left[\varphi X,Y\right]-\varphi\left[X,\varphi Y\right]$$

olarak tanımlanır. M üzerinde X, Y vektör alanları için

$$N_J\left(\left(X,0\right),\left(Y,0\right)\right)=\left(N_\varphi\left(X,Y\right)+2d\eta\left(X,Y\right)\xi,\left(\left(L_{\varphi X}\eta\right)Y-\left(L_{\varphi Y}\eta\right)X\right)\frac{d}{dt}\right)$$

dır ve

$$N_J\left(\left(X,0\right),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right)=\left(\left(L_\xi\varphi\right)X,\left(L_\xi\eta\right)X\frac{d}{dt}\right)$$

olarak elde edilir. Eğer

$$N^{(1)}\left(X,Y\right)=N_\varphi\left(X,Y\right)+2d\eta\left(X,Y\right)\xi$$

$$N^{(2)}(X,Y) = (L_{\varphi X}\eta)Y - (L_{\varphi Y}\eta)X$$

$$N^{(3)}(X) = (L_{\xi}\varphi)X$$

$$N^{(4)}(X) = (L_{\xi}\eta)X$$

denilirse (M,φ,ξ,η) hemen hemen kontakt manifoldunun normal olması için gerek ve yeter şart $N^{(1)} = N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$ olmasıdır. Ayrıca hatırlatalım ki $N^{(1)} = 0$ ise $N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$ dır. Buna göre (M,φ,ξ,η) hemen hemen kontakt manifoldunun normal olması için gerek ve yeter şart $N^{(1)} = 0$ olmasıdır [6].

Önerme 2.3.1. *M nin (φ,ξ,η) hemen hemen kontakt yapısının normal olması için gerek ve yeter şart*

$$N_{\varphi} + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

olmasıdır [4].

Önerme 2.3.2. *M^{2n+1}, her yerde*

$$\eta\Lambda\Phi^{n} \neq 0$$

olacak şekilde bir global η 1-formuna ve global bir Φ 2-formuna sahip diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda M^{2n+1} hemen hemen kontakt yapısına sahiptir. Eğer M^{2n+1} bir η kontakt formuna sahip ise, bu durumda temel 2-formu

$$\Phi = d\eta \tag{2.3.3}$$

olacak şekilde bir (φ,ξ,η,g) hemen hemen kontakt metrik yapısı vardır [4].

Lemma 2.3.1. *M nin bir (φ,ξ,η,g) hemen hemen kontakt metrik yapısı için φ nin kovaryant türevi*

$$\begin{aligned} 2g\left((\nabla_X\varphi)Y,Z\right) = {} & 3d\Phi\left(X,\varphi Y,\varphi Z\right) - 3d\Phi\left(X,Y,Z\right) + g\left(N^{(1)}(Y,Z),\varphi X\right) \\ & + \eta(X)N^{(2)}(Y,Z) + 2d\eta(\varphi Y,X)\eta(Z) - 2d\eta(\varphi Z,X)\eta(Y) \end{aligned} \tag{2.3.4}$$

şeklinde verilir. Burada X, Y ve Z, M üzerindeki teğet vektör alanları, ξ karakteristik vektör alanı ve Φ temel 2-formudur [6].

Bir kontakt metrik manifold üzerinde $N^{(2)} = 0$ olduğundan ve (2.3.3) denklemi kullanılarak, (2.3.4) eşitliği

$$\begin{aligned} 2g\left(\left(\nabla_X \varphi\right) Y, Z\right) = {} & g\left(N^{(1)}\left(Y, Z\right), \varphi X\right) + 2d\eta\left(\varphi Y, X\right)\eta\left(Z\right) \\ & - 2d\eta\left(\varphi Z, X\right)\eta\left(Y\right) \end{aligned} \tag{2.3.5}$$

şeklinde yazılabilir. (2.3.5) eşitliğinde X yerine ξ alınırsa

$$\begin{aligned} 2g\left(\left(\nabla_\xi \varphi\right) Y, Z\right) & = g\left(N^{(1)}\left(Y, Z\right), \varphi \xi\right) + 2d\eta\left(\varphi Y, \xi\right)\eta\left(Z\right) - 2d\eta\left(\varphi Z, \xi\right)\eta\left(Y\right) \\ & = 2g\left(\varphi Y, \varphi \xi\right)\eta\left(Z\right) - 2g\left(\varphi Z, \varphi \xi\right)\eta\left(Y\right) \\ & = 0 \end{aligned}$$

elde edilir ve böylece bir kontakt metrik manifoldda

$$\nabla_\xi \varphi = 0 \tag{2.3.6}$$

sonucuna ulaşılır [4].

2.4 K-Kontakt Yapılar

Tanım 2.4.1. *M^{2n+1}, (φ, ξ, η, g) kontakt metrik yapısına sahip olan bir kontakt metrik manifold olsun. Eğer ξ karakteristik vektör alanı g ye göre bir Killing vektör alanı ise bu durumda M üzerindeki kontakt metrik yapıya bir K-kontakt yapı ve M ye de bir K-kontakt manifold denir [4].*

Önerme 2.4.1. *M^{2n+1} bir K-kontakt metrik manifold olsun. Bu durumda M^{2n+1} nin bir K-kontakt metrik manifold olması için gerek ve yeter şart*

$$\nabla_X \xi = -\varphi X \tag{2.4.1}$$

olmasıdır [4].

Önerme 2.4.2. *M^{2n+1}, (φ, ξ, η, g) yapısına sahip bir K-kontakt manifold olsun. Bu durumda ξ yi içeren herhangi bir düzlemin kesit eğriliği 1 dir [4].*

İspat. M^{2n+1} bir K-kontakt metrik manifold olsun. Ayrıca X, ξ ye ortogonal bir birim vektör alanı ve R de g metriğinin bir eğrilik tensörü olsun. Bu durumda (2.3.6) ve (2.4.1) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
R_{\xi X}\xi &= \nabla_\xi \nabla_X \xi - \nabla_X \nabla_\xi \xi - \nabla_{[\xi,X]}\xi \\
&= -\nabla_\xi \varphi X + \varphi\,[\xi, X] \\
&= -\nabla_\xi \varphi X + \varphi \nabla_\xi X - \varphi \nabla_X \xi \\
&= -\left(\nabla_\xi \varphi\right)(X) - \varphi \nabla_X \xi \\
&= -\varphi \nabla_X \xi \\
&= \varphi^2 X \\
&= -X + \eta\,(X)\,\xi \\
&= -X + g\,(\xi, X)\,\xi \\
&= -X
\end{aligned}$$

olur ve buradan da

$$g\,(R_{\xi X}\xi, X) = -g\,(X, X)$$

olarak yazılır ve dolayısıyla $g\,(R_{\xi X}X, \xi) = 1$ şeklinde elde edilir. □

2.5 Sasakian Manifoldlar

Tanım 2.5.1. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Eğer M nin kontakt metrik yapısı normal ise bu durumda M manifoldu bir Sasakian yapıya sahiptir ve M manifolduna da Sasakian manifold denir [4].*

Teorem 2.5.1. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. M nin bir Sasakian yapıya sahip olması için gerek ve yeter şart*

M üzerindeki X ve Y vektör alanları için

$$(\nabla_X \varphi)Y = g\left(X, Y\right)\xi - \eta\left(Y\right)X \tag{2.5.1}$$

olmasıdır [6].

Eğer M bir Sasakian manifold ise (2.5.1) den kolayca gösterilebilir ki

$$\nabla_X \xi = -\varphi X$$

dir [4].

Lemma 2.5.1. *Bir Sasakian manifold üzerinde, ξ ye ortogonal olan bir X birim vektör alanı için*

$$R_{X\xi}X = -\xi$$

dir [4].

Önerme 2.5.1. *Bir Sasakian manifold üzerinde*

$$R_{XY}\xi = \eta\left(Y\right)X - \eta\left(X\right)Y \tag{2.5.2}$$

dir [4].

Örnek 2.5.1. *(x, y, z), $\mathbb{R}^3$ ün standart koordinat sistemi $\eta = \frac{1}{2}\left(dz - ydx\right)$ ve $\xi = 2\frac{\partial}{\partial z}$ olsun. $\mathbb{R}^3$ üzerinde φ endomorfizminin matrisi $\mathbb{R}^3$ ün standart bazına göre*

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\eta\left(\xi\right) = \frac{1}{2}\left(dz - ydx\right)\left(2\frac{\partial}{\partial z}\right) = 1$$

dir.

$$X = X_1\frac{\partial}{\partial x} + X_2\frac{\partial}{\partial y} + X_3\frac{\partial}{\partial z}$$

olmak üzere

$$\varphi X=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&y&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_1\\X_2\\X_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}X_2\\-X_1\\yX_2\end{bmatrix}$$

dir. Tekrar φ uygulanırsa

$$\varphi^2 X=\begin{bmatrix}0&1&0\\-1&0&0\\0&y&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}X_2\\-X_1\\yX_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-X_1\\-X_2\\-yX_1\end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}\varphi^2 X&=(-X_1,-X_2,-yX_1)\\&=(-X_1,-X_2,-X_3+X_3-yX_1)\\&=(-X_1,-X_2,-X_3)+(0,0,X_3-yX_1)\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\eta(X)&=\frac{1}{2}(dz-ydx)\left(X_1\frac{\partial}{\partial x}+X_2\frac{\partial}{\partial y}+X_3\frac{\partial}{\partial z}\right)\\&=\frac{1}{2}(X_3-yX_1)\end{aligned}$$

olduğundan

$$\varphi^2 X=-X+\eta(X)\xi$$

bulunur. Böylece (φ,ξ,η), $\mathbb{R}^3$ üzerinde bir hemen hemen kontakt yapıdır. Eğer g metrik tensörünü

$$g=\frac{1}{4}\left(dx^2+dy^2\right)+\eta\otimes\eta$$

olarak alırsak standart baza göre g nin matrisi

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix}1+y^2&0&-y\\0&1&0\\-y&0&1\end{bmatrix}$$

olarak bulunur. Ayrıca

$$g(X,\xi)=\frac{1}{4}\begin{bmatrix}X_1&X_2&X_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1+y^2&0&-y\\0&1&0\\-y&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\2\end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{4}\begin{bmatrix} X_1 & X_2 & X_3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -2y \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix} \\
&= \frac{1}{4}\left(-2yX_1 + 2X_3\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(-yX_1 + X_3\right) \\
&= \eta\left(X\right)
\end{aligned}
$$

dir ve

$$
\begin{aligned}
d\eta\left(X,Y\right) &= \frac{1}{2}\left\{X\eta\left(Y\right) - Y\eta\left(X\right) - \eta\left(\left[X,Y\right]\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{\left(\nabla_X \eta\right)\left(Y\right) - \left(\nabla_Y \eta\right)\left(X\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{g\left(\nabla_X \xi, Y\right) - g\left(\nabla_Y \xi, X\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}\left\{g\left(\nabla_X \xi, Y\right) + g\left(Y, \nabla_X \xi\right)\right\} \\
&= g\left(\nabla_X \xi, Y\right) \\
&= g\left(-\varphi X, Y\right) \\
&= g\left(X, \varphi Y\right)
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Böylece $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ *bir kontakt metrik manifold olur.*

$$
\Gamma_{ji}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{r=1}^{n} g^{kr}\left\{\frac{\partial g_{rj}}{\partial X_i} + \frac{\partial g_{ri}}{\partial X_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial X_r}\right\} \tag{2.5.3}
$$

ile tanımlanan konneksiyon katsayılarından

$$
\Gamma_{12}^{1} = -\Gamma_{23}^{3} = \frac{1}{2}y, \quad \Gamma_{23}^{1} = -\Gamma_{13}^{2} = -\frac{1}{2}, \quad \Gamma_{11}^{2} = -y, \quad \Gamma_{12}^{3} = -\frac{(1-y^2)}{2}
$$

olarak bulunur. $E_1 = 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right)$, $E_2 = 2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\xi = 2\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ *olmak üzere* $\{E_1, E_2, \xi\}$ *g ye göre bir ortonormal bazdır ve ayrıca*

$$
\varphi E_1 = -E_2, \quad \varphi E_2 = E_1, \quad \varphi\xi = 0
$$

dır. Bu son eşitlikler kullanılırsa

$$
\nabla_{E_1} E_2 = -\xi, \quad \nabla_{E_2} E_1 = \xi
$$

$$\nabla_{E_2}\xi = \nabla_\xi E_2 = -E_1, \quad \nabla_{E_1}\xi = \nabla_\xi E_1 = E_2$$

olarak bulunur. Şimdi

$$X = aE_1 + bE_2 + c\xi$$

$$Y = \bar{a}E_1 + \bar{b}E_2 + \bar{c}\xi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}(\nabla_X\varphi)\,Y &= \nabla_X\varphi Y - \varphi\nabla_X Y \\ &= \left(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c}\right)\xi - a\bar{c}X - b\bar{c}Y - c\bar{c}\xi \\ &= g\,(X,Y)\,\xi - \eta\,(Y)\,X\end{aligned}$$

olarak bulunur ve $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g)$ *bir Sasakian manifolddur [7].*

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Bu durumda M üzerindeki keyfi X, Y vektör alanları için

$$(\nabla_X\varphi)\,Y = g\,(\varphi\nabla_X\xi, Y)\,\xi - \eta\,(Y)\,\varphi\nabla_X\xi \tag{2.5.4}$$

elde edilir. Burada ∇, M üzerindeki Levi-Civita konneksiyonudur.

Bir $3-$boyutlu hemen hemen kontakt metrik manifoldunun normal olması için gerek ve yeter şart

$$\nabla_{\varphi X}\xi = \varphi\nabla_X\xi \tag{2.5.5}$$

veya buna denk olarak

$$\nabla_X\xi = \alpha\,(X - \eta\,(X)\,\xi) - \beta\varphi X \tag{2.5.6}$$

olmasıdır. Burada α, β fonksiyonları

$$\alpha = \frac{1}{2}iz\,\{X \longrightarrow \nabla_X\xi\}\,, \quad \beta = \frac{1}{2}iz\,\{X \longrightarrow \varphi\nabla_X\xi\}$$

ile tanımlıdır. Buna göre (2.5.6) eşitliği (2.5.4) de yerine yazılırsa

$$(\nabla_X\varphi)\,Y = \beta\,(g\,(X,Y)\,\xi - \eta\,(Y)\,X) + \alpha\,(g\,(\varphi X, Y)\,\xi - \eta\,(Y)\,\varphi X) \tag{2.5.7}$$

elde edilir.

Eğer bir normal hemen hemen kontakt metrik manifold üzerinde temel $2-$form kapalı ise (φ, ξ, η, g) ye bir quasi-Sasakian yapı ve M ye de bir quasi-Sasakian manifold denir.

Bir $3-$boyutlu normal hemen hemen kontakt metrik manifoldda $\alpha = 0$ ise bu durumda M bir quasi-Sasakian manifolddur. Buna göre (2.5.6) dan bir quasi-Sasakian manifold için

$$\nabla_X \xi = -\beta \varphi X \tag{2.5.8}$$

olarak yazılır. Eğer bir quasi-Sasakian manifold da $\beta = 1$ ise kolayca görülür ki M bir Sasakian manifolddur [8].

2.6 Lorentzian Kontakt Manifoldlar

Tanım 2.6.1. *M, $(2n+1)$ boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold ve (φ, ξ, η) da M üzerinde bir hemen hemen kontakt yapı olsun. M üzerinde bir g metriği*

$$g(\xi, \xi) = \epsilon, \qquad g(\varphi X, \varphi Y) = g(X, Y) - \epsilon \eta(X) \eta(Y)$$

olacak şekilde tanımlı olsun. Eğer $\epsilon = 1$ ise $(\varphi, \xi, \eta, g, \epsilon)$ ya M üzerinde bir Riemannian hemen hemen kontakt metrik yapı, $\epsilon = -1$ ise $(\varphi, \xi, \eta, g, \epsilon)$ ya M üzerinde Lorentzian hemen hemen kontakt metrik yapı denir [7].

Tanım 2.6.2. *$(\varphi, \xi, \eta, g, \epsilon)$ hemen hemen kontakt yapısı M de bir hemen hemen kontakt metrik yapı ise $d\eta(X, Y) = \epsilon g(X, \varphi Y)$ dir [7].*

Teorem 2.6.1. *Bir hemen hemen kontakt yapı (φ, ξ, η) ile donatılmış her diferensiyellenebilir M manifoldu üzerinde bu yapı ile birleşen Riemann metrikleri ve Lorentzian metrikleri vardır [7].*

İspat. Tanım 2.6.1 e göre $\epsilon = 1$ ve $\epsilon = -1$, sırasıyla, Riemannian ve Lorentzian durumlardır. Burada $\epsilon = -1$ durumu üzerinde duracağız. h_0, $h_0(\xi, \xi) = 1$ olacak şekilde bir Riemann metrik olsun. Lorentzian metrik için, h_0 a göre ξ nin dual formu ξ^* olmak üzere $\tilde{h} = h_0 - (1-\epsilon)\,\xi^* \otimes \xi^*$ denilirse $\tilde{h}\,(\xi,\xi) = \epsilon$ olur.

$$h\,(X,Y) = \tilde{h}\left(\varphi^2 X, \varphi^2 Y\right) + \epsilon\eta\,(X)\,\eta\,(Y)$$

olsun. Açıkça görülür ki $h\,(\xi,X) = \epsilon\eta\,(X)$ ve $h\,(\xi,\xi) = \epsilon$ dir. Şimdi $(0,2)$ tipinde g tensör alanını

$$g\,(X,Y) = \frac{1}{2}\left[h\,(X,Y) + h\,(\varphi X, \varphi Y) + \epsilon\eta\,(X)\,\eta\,(Y)\right]$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda

$$g\,(\xi,\xi) = \epsilon \tag{2.6.1}$$

dir.

$$g\,(\varphi X, \varphi Y) = \frac{1}{2}\left[h\,(\varphi X, \varphi Y) + h\,(-X + \eta\,(X)\,\xi, -Y + \eta\,(Y)\,\xi)\right]$$

olduğundan

$$g\,(\varphi X, \varphi Y) = \frac{1}{2}\left[h\,(X,Y) + h\,(\varphi X, \varphi Y) + \epsilon\eta\,(X)\,\eta\,(Y)\right] - \epsilon\eta\,(X)\,\eta\,(Y)$$

olur. Ayrıca

$$g\,(\varphi X, \varphi Y) = g\,(X,Y) - \epsilon\eta\,(X)\,\eta\,(Y) \tag{2.6.2}$$

dir. (2.6.1)ve (2.6.2) den g bir Lorentzian metriktir. □

Lemma 2.6.1. *Bir $(\varphi,\xi,\eta,g,\epsilon)$ hemen hemen kontakt yapısı için φ nin kovaryant türevi*

$$\begin{aligned} 2g\,((\nabla_X \varphi)\,Y, Z) = {} & 3\epsilon d\Phi\,(X, \varphi Y, \varphi Z) - 3\epsilon d\Phi\,(X,Y,Z) + g\left(N^1\,(Y,Z)\,, \varphi X\right) \\ & + \epsilon\eta\,(X)\,N^2\,(Y,Z) + 2\epsilon d\eta\,(\varphi Y, X)\,\eta\,(Z) - 2\epsilon d\eta\,(\varphi Z, X)\,\eta\,(Y) \end{aligned}$$

dir. Burada $\Phi\,(X,Y) = \epsilon g\,(X, \varphi Y)$ dir. $\Phi = d\eta$ olması durumunda

$$2g\,((\nabla_X \varphi)\,Y, Z) = g\left(N^1\,(Y,Z)\,, \varphi X\right) + \epsilon d\eta\,(\varphi Y, X)\,\eta\,(Z) - 2\epsilon d\eta\,(\varphi Z, X)\,\eta\,(Y)$$

olur [7].

Önerme 2.6.1. *Bir* $(\varphi, \xi, \eta, g, \epsilon)$ *hemen hemen kontakt metrik yapısının Sasakian olması için gerek ve yeter şart*

$$(\nabla_X \varphi) Y = \epsilon g(X, Y) \xi - \eta(Y) X$$

olmasıdır [7].

İspat. $(\varphi, \xi, \eta, g, \epsilon)$ yapısının normal olması için gerek ve yeter şart

$$N^1 = N_\varphi + 2d\eta \otimes \xi = 0$$

olmasıdır. Lemma 2.6.1 den

$$g((\nabla_X \varphi) Y, Z) = \epsilon d\eta(\varphi Y, X) \eta(Z) - \epsilon d\eta(\varphi Z, X) \eta(Y)$$

dir. $d\eta(X, Y) = \epsilon g(X, \varphi Y)$ olduğundan

$$g((\nabla_X \varphi) Y, Z) = g(\varphi Y, \varphi X) \eta(Z) - g(\varphi Z, \varphi X) \eta(Y)$$

olur. Ayrıca

$$g((\nabla_X \varphi) Y, Z) = \eta(Z) [g(Y, X) - \epsilon \eta(X) \eta(Y)] - \eta(Y) [g(Z, X) - \epsilon \eta(X) \eta(Z)]$$

elde edilir. Böylece

$$g(\nabla_X \varphi Y, Z) = g(\epsilon g(Y, X) \xi, Z) - g(Z, \eta(Y) X)$$

bulunur. □

Önerme 2.6.2. $(\varphi, \xi, \eta, g, \epsilon)$ *M üzerinde, Riemann ya da Lorentz metriğe göre ξ bir Killing vektör alanı olacak şekilde bir kontakt metrik yapı (K-kontakt yapı) olsun. Bu durumda,*

1) $\nabla_X \xi = -\varphi X,$

2) *Bir spacelike vektör ve ξ tarafından gerilen herhangi bir düzlemin kesit eğriliği ϵ dur [7].*

İspat. $d\eta(X,Y) = \epsilon g(X,\varphi Y)$ kullanılarak η 1-formunun dış türevi

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) = g(X,\varphi Y) &= \frac{1}{2}\{X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X,Y])\} \\ &= \frac{1}{2}\{(\nabla_X \eta)(Y) - (\nabla_Y \eta)(X)\} \end{aligned}$$

yazılabilir ve ξ bir Killing vektör alanıdır. $\eta(X) = \epsilon g(X,\xi)$ kullanılarak

$$\begin{aligned} d\eta(X,Y) &= \frac{1}{2}(g(\nabla_X \xi, Y) - g(\nabla_Y \xi, X)) \\ &= \frac{1}{2}(g(\nabla_X \xi, Y) + g(Y, \nabla_X \xi)) \\ &= g(\nabla_X \xi, Y) \end{aligned}$$

olduğu görülür. $g(\nabla_X \xi, Y) = -g(\varphi X, Y)$ den $\nabla_X \xi = -\varphi X$ dir, buradan $\nabla_\xi \xi = 0$ dır. (3.2.6) kullanılarak

$$\begin{aligned} R_{\xi X}\xi &= \nabla_\xi \nabla_X \xi - \nabla_X \nabla_\xi \xi - \nabla_{[\xi,X]}\xi \\ &= -\nabla_\xi \varphi X + \varphi[\xi, X] \\ &= -\nabla_\xi \varphi X + \varphi(\nabla_\xi X) - \varphi(\nabla_X \xi) \end{aligned}$$

elde edilir. $R_{\xi X}\xi = -(\nabla_\xi \varphi) X + \varphi^2 X$ ve $\nabla_\xi \varphi = 0$ kullanılarak ve X in ξ ye ortogonal olması durumuyla

$$\begin{aligned} R_{\xi X}\xi &= -X + \eta(X)\xi \\ &= -X + \epsilon g(X,\xi)\xi \\ &= -X \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan $\{\xi, X\}$ in gerdiği düzlemin kesit eğriliği

$$K_{\xi \wedge X} = \frac{g(R_{\xi X}X, \xi)}{g(\xi,\xi)\, g(X,X)} = \epsilon$$

olur. □

Lemma 2.6.2. *Bir $(M,\varphi,\xi,\eta,g,\epsilon)$ Sasakian manifoldu üzerinde aşağıdaki bağıntılar sağlanır:*

$$R_{XY}\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y = \epsilon g(\xi,Y)X - \epsilon g(\xi,X)Y$$

$$R_{X\xi}Y = \eta(Y)X - \epsilon g(X,Y)\xi = -(\nabla_X\varphi)Y$$

dir. Ayrıca, ξ ye dik bir birim vektör alanı için

$$R_{X\xi}X = -\epsilon\xi$$

dir [7].

İspat. $\nabla_X\xi = -\varphi X$ olduğu kullanılarak

$$\begin{aligned} R_{XY}\xi &= \nabla_X\nabla_Y\xi - \nabla_Y\nabla_X\xi - \nabla_{[X,Y]}\xi \\ &= -\nabla_X\varphi Y + \nabla_Y\varphi X + \varphi[X,Y] \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} R_{XY}\xi &= -(\nabla_X\varphi)Y - \varphi\nabla_XY + (\nabla_Y\varphi)X + \varphi\nabla_YX + \varphi\nabla_XY - \varphi\nabla_YX \\ &= -(\nabla_X\varphi)Y + (\nabla_Y\varphi)X \end{aligned}$$

bulunur. Önerme 2.6.1 kullanılarak

$$R_{XY}\xi = \eta(Y)X - \eta(X)Y$$

olduğu görülür. Bu son eşitlik ve $\eta(Z) = \epsilon g(Z,\xi)$ uygulanarak

$$\begin{aligned} g(R_{X\xi}Y, Z) &= g(R_{ZY}\xi, X) = g(\eta(Y)Z - \eta(Z)Y, X) \\ &= g(\eta(Y)X - \epsilon g(X,Y)\xi, Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikte X in ξ ye ortogonalliği kullanılarak

$$R_{X\xi}X = -\epsilon\xi$$

olur. □

Teorem 2.6.2. *M bir Riemannian ya da Lorentzian manifold olsun.*

$$R_{XY}\xi = \varepsilon(g(\xi,Y)X - g(\xi,X)Y)$$

olacak şekilde bir ξ birim Killing vektör alanının var olduğunu kabul edelim. Bu durumda M bir Sasakian manifolddur [7].

2.7 Hemen Hemen Parakontakt Manifoldlar

Tanım 2.7.1. *M, $(2n+1)$-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun. M üzerinde φ, $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı; η, bir 1-form ve ξ de bir vektör alanı olmak üzere*

$$\varphi^2 = I - \eta \otimes \xi$$

$$\eta(\xi) = 1$$

şartları sağlanıyor ise (φ, ξ, η) üçlüsüne M üzerinde bir hemen hemen parakontakt yapı ve (M, φ, ξ, η) ya da bir hemen hemen parakontakt manifold denir [9].

Önerme 2.7.1. *M^{2n+1} bir (φ, η, ξ) hemen hemen parakontakt manifold olsun. Bu durumda*

$$\varphi\xi = 0$$

$$\eta \circ \varphi = 0$$

$$rank\varphi = 2n$$

dir [9].

Tanım 2.7.2. *(M, φ, ξ, η) bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Eğer M üzerinde*

$$g(\varphi X, \varphi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$$

olacak şekilde bir g yarı-Riemann metriği var ise M ye hemen hemen parakontakt metrik manifold ve g metriğine de bağdaşabilir metrik denir [9].

Sonuç 2.7.1. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. Bu durumda*

$$g(\varphi X, Y) = -g(X, \varphi Y)$$

ve

$$\eta(X) = g(X, \xi)$$

dir [9].

Tanım 2.7.3. *M, (φ,ξ,η,g) yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Bu durumda M üzerinde*

$$\Phi(X,Y)=g(X,\varphi Y)$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne, (φ,ξ,η,g) hemen hemen parakontakt yapısının temel iki formu denir [9].

Tanım 2.7.4. *M, (φ,ξ,η,g) yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Eğer her $X,Y\in TM$ için*

$$g(X,\varphi Y)=d\eta(X,Y)$$

ise M ye parakontakt metrik manifold ve η ya M nin parakontakt formu denir. Burada

$$d\eta(X,Y)=\frac{1}{2}\{X\eta(Y)-Y\eta(X)-\eta([X,Y])\}$$

dir [9].

Örnek 2.7.1. *$\mathbb{R}^{2n+1}$, (x_i,y_i,z), $(i=1,...,n)$, standart koordinat sistemi ile verilen reel uzay olsun. $\mathbb{R}^{2n+1}$ üzerinde*

$$\varphi\frac{\partial}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial y_i},\quad \varphi\frac{\partial}{\partial y_i}=\frac{\partial}{\partial x_i},\quad \varphi\frac{\partial}{\partial z}=0$$

$$\eta=dz,\quad \xi=\frac{\partial}{\partial z}$$

$$g=\eta\otimes\eta+\sum_{i=1}^{n}dx_i\otimes dx_i-\sum_{i=1}^{n}dy_i\otimes dy_i$$

olacak şekilde φ $(1,1)$-tensör alanını, η 1-formunu, ξ vektör alanını g metriğini tanımlayalım. Bu durumda

$$\eta(\xi)=dz\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)=1$$

dir. X ve Y vektör alanları için

$$X=a_i\frac{\partial}{\partial x_i}+b_i\frac{\partial}{\partial y_i}+c\frac{\partial}{\partial z}\qquad (i=1,...,n)$$

$$Y = d_i \frac{\partial}{\partial x_i} + e_i \frac{\partial}{\partial y_i} + f \frac{\partial}{\partial z} \qquad (i = 1, ..., n)$$

olmak üzere

$$\eta (X) = c, \quad \eta (Y) = f$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\varphi^2 (X) &= \varphi (\varphi (X)) \\
&= \varphi \left(\varphi \left(a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial}{\partial y_i} + c \frac{\partial}{\partial z} \right) \right) \\
&= \varphi \left(a_i \frac{\partial}{\partial y_i} + b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
&= a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + b_i \frac{\partial}{\partial y_i} \\
&= X - \eta (X) \xi
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
(\eta \circ \varphi) (X) &= \eta (\varphi (X)) \\
&= \eta \left(a_i \frac{\partial}{\partial y_i} + b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
&= dz \left(a_i \frac{\partial}{\partial y_i} + b_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
&= 0
\end{aligned}$$

ve

$$\varphi (\xi) = \varphi \left(\frac{\partial}{\partial z} \right) = 0$$

dır. Böylece (φ, ξ, η), $\mathbb{R}^{2n+1}$ *üzerinde bir hemen hemen parakontakt yapı olur. Ek olarak*

$$\begin{aligned}
g (\varphi (X), \varphi (Y)) &= g \left(a_i \frac{\partial}{\partial y_i} + b_i \frac{\partial}{\partial x_i}, d_i \frac{\partial}{\partial y_i} + e_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) \\
&= -a_i d_i + b_i e_i \\
&= -g (X, Y) + \eta (X) \eta (Y)
\end{aligned}$$

olduğundan g *bir bağdaşabilir metrik ve* $(\mathbb{R}^{2n+1}, \varphi, \xi, \eta, g)$ *bir hemen hemen parakontakt metrik manifolddur [9].*

Tanım 2.7.5. *V bir reel vektör uzayı olmak üzere*

$$J : V \longrightarrow V$$

lineer dönüşümü

$$J^2 = I$$

şartını sağlıyor ise J ye V üzerinde bir parakompleks yapı denir [9].

$(2n+1)$-boyutlu bir hemen hemen parakontakt manifold (M, φ, ξ, η) olsun. $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunu gözönüne alalım. Buna göre $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$\left(X, f\frac{d}{dt} \right)$$

şeklindedir, burada X, M üzerinde bir vektör alanı, t, $\mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve f, $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ üzerinde bir fonksiyondur. Bu durumda $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ üzerinde bir parakompleks yapı

$$J\left(X, f\frac{d}{dt} \right) = \left(\varphi X + f\xi, \eta\left(X\right) \frac{d}{dt} \right)$$

ile tanımlanır [9].

Hemen hemen kontakt yapılarda olduğu gibi para-kontakt yapılarda da Nijenhuis tensör alanı benzer şekilde tanımlanır.

$$N_F\left(X, Y\right) = F^2\left[X, Y\right] + \left[FX, FY\right] - F\left[FX, Y\right] - F\left[X, FY\right]$$

ve $\forall X, Y \in \Gamma\left(TM\right)$ için

$$\begin{aligned} N_J\left(X, Y\right) &= J^2\left[X, Y\right] + \left[JX, JY\right] - J\left[JX, Y\right] - J\left[X, JY\right] \\ &= \left[X, Y\right] + \left[JX, JY\right] - J\left[JX, Y\right] - J\left[X, JY\right] \end{aligned}$$

dir.

Parakontakt yapıda da integrallenebilirlik ve normallik kavramları kontakt yapıdakine benzer şekilde tanımlanır.

(M,φ,ξ,η) bir hemen hemen parakontakt manifold ve N_φ, φ nin Nijenhuis tensör alanı olsun. Bu durumda

$$N\varphi\left(X,Y\right)=\varphi^2\left[X,Y\right]+\left[\varphi X,\varphi Y\right]-\varphi\left[\varphi X,Y\right]-\varphi\left[X,\varphi Y\right] \tag{2.7.1}$$

dir.

$M\times\mathbb{R}$ üzerindeki J hemen hemen parakompleks yapısının Nijenhuis tensör alanı bir tensör alanı N_J, $(1,2)$-tipinde bir tensör alanı olduğundan

$$N_J\left(\left(X,0\right),\left(Y,0\right)\right)=\left(N_\varphi\left(X,Y\right)-2d\eta\left(X,Y\right)\xi,\left(\left(L_{\varphi X}\eta\right)Y-\left(L_{\varphi Y}\eta\right)X\right)\frac{d}{dt}\right)$$

ve

$$N_J\left(\left(X,0\right),\left(0,\frac{d}{dt}\right)\right)=\left(\left(L_\xi\varphi\right)X,\left(L_\xi\eta\right)X\frac{d}{dt}\right)$$

dir. (2.7.1) eşitliği göz önüne alınarak

$$N^{(1)}\left(X,Y\right)=N_\varphi\left(X,Y\right)-2d\eta\left(X,Y\right)\xi \tag{2.7.2}$$

$$N^{(2)}\left(X,Y\right)=\left(L_{\varphi X}\eta\right)Y-\left(L_{\varphi Y}\eta\right)X$$

$$N^{(3)}\left(X\right)=\left(L_\xi\varphi\right)X$$

$$N^{(4)}\left(X\right)=\left(L_\xi\eta\right)X$$

olarak yazılır. Açık olarak (φ,ξ,η) hemen hemen parakontakt yapısının normal olması için gerek ve yeter şart $N^{(1)}=N^{(2)}=N^{(3)}=N^{(4)}=0$ olmasıdır [9].

Önerme 2.7.2. M, *(φ,ξ,η) hemen hemen parakontakt yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Bu durumda (φ,ξ,η) hemen hemen parakontakt yapısının normal olması için gerek ve yeter şart $N_\varphi-2d\eta\otimes\xi=0$ olmasıdır [9].*

Önerme 2.7.3. *(M,φ,ξ,η,g) bir parakontakt manifold olsun. Bu durumda M nin bir K-parakontakt manifold olması için gerek ve yeter şart*

$$\nabla_X\xi=-\varphi X$$

olmasıdır [9].

Önerme 2.7.4. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} 2g\left(\left(\nabla_X \varphi\right) Y, Z\right) &= -d\Phi\left(X, Y, Z\right) - d\Phi\left(X, \varphi Y, \varphi Z\right) \\ &- N^{(1)}\left(Y, Z, \varphi X\right) + N^{(2)}\left(Y, Z\right) \eta\left(X\right) \\ &- 2d\eta\left(\varphi Z, X\right) \eta\left(Y\right) + 2d\eta\left(\varphi Y, X\right) \eta\left(Z\right) \end{aligned}$$

dir. Özel olarak, eğer M bir parakontakt metrik manifold ise

$$\begin{aligned} 2g\left(\left(\nabla_X \varphi\right) Y, Z\right) &= -N^{(1)}\left(Y, Z, \varphi X\right) - 2d\eta\left(\varphi Z, X\right) \eta\left(Y\right) \\ &+ 2d\eta\left(\varphi Y, X\right) \eta\left(Z\right) \end{aligned}$$

dir [9].

Teorem 2.7.1. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. M nin bir para-Sasakian manifold olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in TM$ için*

$$\left(\nabla_X \varphi\right) Y = -g\left(X, Y\right) \xi + \eta\left(Y\right) X$$

olmasıdır [9].

2.8 Hemen Hemen Normal Parakontakt Metrik Manifoldlar

Önerme 2.8.1. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ nin $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen parakontakt metrik manifold olması için gerek ve yeter şart*

$$\varphi\left(\nabla_X \varphi\right) Y - \left(\nabla_{\varphi X} \varphi\right) Y + \left(\nabla_X \eta\right)\left(Y\right) \xi = 0 \qquad (2.8.1)$$

olmasıdır. Burada ∇, M nin Levi-Civita konneksiyonudur [10].

İspat. Levi-Civita konneksiyonu yardımı ile (2.7.2) normallik şartı

$$\begin{aligned} &\varphi\left(\nabla_X \varphi\right) Y - \left(\nabla_{\varphi X} \varphi\right) Y + \left(\nabla_X \eta\right)\left(Y\right) \xi \qquad (2.8.2) \\ &- \left(\varphi\left(\nabla_Y \varphi\right) X - \left(\nabla_{\varphi Y} \varphi\right) X + \left(\nabla_Y \eta\right)\left(X\right) \xi\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir.

$$A(X,Y,Z) = g(\varphi(\nabla_X \varphi)Y - (\nabla_{\varphi X}\varphi)Y + (\nabla_X \eta)(Y)\xi, Z)$$

olacak şekilde $(0,3)$-tipli bir tensör alanı A olsun. Açıkça görülür ki eğer $A = 0$ ise yapı normaldir. Şimdi yapı normal ise $A = 0$ olduğunu gösterelim. İlk olarak (2.8.2) den

$$A(X,Y,Z) = A(Y,X,Z) \tag{2.8.3}$$

olur. Kolayca gösterebiliriz ki

$$\begin{aligned} A(X,Y,Z) + A(X,Z,Y) &= -g((\nabla_X\varphi)Y, \varphi Z) \\ &\quad - g(\varphi Y, (\nabla_X \varphi)Z) \\ &\quad + \eta(Y)g(\nabla_X \xi, Z) + \eta(Z)g(\nabla_X\xi, Y) \end{aligned}$$

dir.

$$g(\varphi Y, \varphi Z) = -g(Y,Z) + \eta(Y)\eta(Z) \tag{2.8.4}$$

eşitliğinden

$$g((\nabla_X\varphi)Y, \varphi Z) + g(\varphi Y, (\nabla_X\varphi)Z) = \eta(Y)g(\nabla_X\xi, Z) + \eta(Z)g(\nabla_X\xi, Y)$$

elde edilir. Böylece

$$A(X,Y,Z) = -A(X,Z,Y)$$

olur. (2.8.3) den

$$\begin{aligned} A(X,Y,Z) &= -A(X,Z,Y) = -A(Z,X,Y) = A(Z,Y,X) \\ &= A(Y,Z,X) = -A(Y,X,Z) = -A(X,Y,Z) \end{aligned}$$

elde edilir ki $A = 0$ olduğu görülür ve ispat tamamlanır. $\square$

Önerme 2.8.2. *3-boyutlu bir hemen hemen parakontakt M manifoldu için*

$$(\nabla_X\varphi)Y = g(\varphi\nabla_X\xi, Y)\xi - \eta(Y)\varphi\nabla_X\xi \tag{2.8.5}$$

dir [10].

İspat. $\eta \Lambda \Phi$ 3-formu M nin hacim elemanına eşittir. Böylece $\nabla_X (\eta \Lambda \Phi) = 0$ olur. Ayrıca

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X \eta)(Y)\Phi(Z,W) + \eta(Y)(\nabla_X \Phi)(Z,W) \\
&+ (\nabla_X \eta)(Z)\Phi(W,Y) + \eta(Z)(\nabla_X \Phi)(W,Y) \\
&+ (\nabla_X \eta)(W)\Phi(Y,Z) + \eta(W)(\nabla_X \Phi)(Y,Z) \\
&= 0
\end{aligned}$$

dır. Son eşitlikte $W = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \Phi)(Z,Y) &= -\eta(Z)(\nabla_X \Phi)(Y,\xi) + \eta(Y)(\nabla_X \Phi)(Z,\xi) \\
&= g(Z, g(\varphi \nabla_X \xi, Y)\xi - \eta(Y)\varphi \nabla_X \xi)
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 2.8.3. *Bir 3-boyutlu hemen hemen parakontakt metrik manifold M de aşağıdaki üç şart karşılıklı olarak denktir:*

(a) *M normaldir*

(b) *M üzerinde*

$$(\nabla_X \varphi) Y = \beta (g(X,Y)\xi - \eta(Y)X) + \alpha (g(\varphi X, Y)\xi - \eta(Y)\varphi X) \quad (2.8.6)$$

olacak şekilde α ve β fonksiyonları vardır.

(c) *M üzerinde*

$$\nabla_X \xi = \alpha (X - \eta(X)\xi) + \beta \varphi X. \quad (2.8.7)$$

olacak şekilde α ve β fonksiyonları vardır [10].

İspat. (2.8.5) i kullanarak (2.8.1) deki normallik şartının

$$\nabla_{\varphi X} \xi = \varphi \nabla_X \xi \quad (2.8.8)$$

ifadesine denk olduğu kolayca görülebilir. (2.8.7) den (2.8.8) in elde edileceği açıktır. Şimdi (2.8.8) den (2.8.7) nin elde edileceğini ispatlayalım. Öncelikle bir $\{E_0, E_1, E_2\}$ çatısını seçelim öyle ki

$$E_0 = \xi, \quad \varphi E_1 = E_2, \quad \varphi E_2 = E_1, \quad g(E_1, E_1) = -1, \quad g(E_0, E_0) = g(E_2, E_2) = 1,$$

olsun. (2.8.8) dikkate alınarak herhangi α ve β için

$$\nabla_{E_0}\xi = 0, \quad \nabla_{E_1}\xi = \alpha E_1 + \beta E_2, \quad \nabla_{E_2}\xi = \beta E_1 + \alpha E_2$$

bulunur. Buradan (2.8.7) sonucuna ulaşırız. (2.8.5) i uygulayarak, (2.8.7) yi yerine yazarsak (2.8.6) yı elde ederiz. Tersine (2.8.6) yı uygulayalım. (2.8.6) da $Y = \xi$ alırsak (2.8.7) yi buluruz. □

Sonuç 2.8.1. *(2.8.6) daki α ve β fonksiyonları*

$$2\alpha = iz\left\{X \longrightarrow \nabla_X \xi\right\}, \qquad 2\beta = iz\left\{X \longrightarrow \varphi \nabla_X \xi\right\} \tag{2.8.9}$$

şeklinde tanımlıdır [10].

Tanım 2.8.1. *Bir 3-boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifold da*

- *eğer $\alpha = \beta = 0$ ise M ye parakosimplektik manifold,*
- *$\alpha = 0$ ve $\beta \neq 0$ ise M ye quasi-para-Sasakian manifold,*
- *β sabit olmak üzere $\alpha = 0$ ve $\beta \neq 0$ ise M ye β-para-Sasakian manifold,*
- *$\beta = -1$ ve $\alpha = 0$ ise M ye para-Sasakian manifold,*
- *α sabit olmak üzere $\alpha \neq 0$ ve $\beta = 0$ ise α-para-Kenmotsu manifold denir [11].*

Önerme 2.8.4. *Bir 3-boyutlu hemen hemen parakontakt M metrik manifoldu için aşağıdaki ifadeler denktir;*

(a) *M quasi-para-Sasakiandir,*

(b) *M üzerinde bir β fonksiyonu mevcuttur öyle ki*

$$\left(\nabla_X \varphi\right) Y = \beta \left(g\left(X, Y\right) \xi - \eta\left(Y\right) X\right), \tag{2.8.10}$$

dir,

(c) *M üzerinde bir β fonksiyonu mevcuttur öyle ki*

$$\nabla_X \xi = \beta \varphi X. \tag{2.8.11}$$

dir.

Ayrıca (2.8.11) den görülür ki böyle bir manifoldun para-Sasakindir olması için gerek ve yeter şart (2.8.10) da $\beta = -1$ olmasıdır [10].

İspat. Önerme 2.8.3 ü kullanarak, birinci iddiayı ispatlamak için, bir 3-boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifolda $d\Phi = 0$ için gerek ve yeter şart $\alpha = 0$ olmasıdır. Bunu yapmak için (2.8.6) yı uygulayalım:

$$\begin{aligned} 3d\Phi\left(X, Y, Z\right) &= \left(\nabla_X \Phi\right)\left(Y, Z\right) + \left(\nabla_Y \Phi\right)\left(Z, X\right) + \left(\nabla_Z \Phi\right)\left(X, Y\right) \\ &= g\left(Y, \left(\nabla_X \varphi\right) Z\right) + g\left(Z, \left(\nabla_Y \varphi\right) X\right) + g\left(X, \left(\nabla_Z \varphi\right) Y\right) \\ &= 2\alpha\left(g\left(X, \varphi Y\right)\eta\left(Z\right) + g\left(Y, \varphi Z\right)\eta\left(X\right) + g\left(Z, \varphi X\right)\eta\left(Y\right)\right) \\ &= 2\alpha\left(\Phi\left(X, Y\right)\eta\left(Z\right) + \Phi\left(Y, Z\right)\eta\left(X\right) + \Phi\left(Z, X\right)\eta\left(Y\right)\right) \\ &= 6\alpha\left(\Phi \wedge \eta\right)\left(X, Y, Z\right). \end{aligned}$$

elde edilir. Manifoldun herhangi bir noktasında $\Phi \wedge \eta$ sıfırdan faklı olduğundan, $d\Phi = 0$ için gerek ve yeter şart $\alpha = 0$ olmasıdır. İkinci iddiayı ispatlamak için, $d\eta = \Phi$ olduğunu garanti etmeliyiz. (2.8.11) den

$$\begin{aligned} 2d\eta\left(X, Y\right) &= \left(\nabla_X \eta\right)\left(Y\right) - \left(\nabla_Y \eta\right)\left(X\right) = g\left(\nabla_X \xi, Y\right) - g\left(\nabla_Y \xi, X\right) \\ &= -2\beta g\left(X, \varphi Y\right) = -2\beta\Phi\left(X, Y\right). \end{aligned}$$

dır. Böylece $d\eta = \Phi$ olması için gerek ve yeter şart $\beta = -1$ olmasıdır. □

3. KONTAKT MANİFOLDLARLARDA EĞRİLER

Bu bölümde Sasakian manifoldlarda, hemen hemen metrik manifoldlarda Legendre eğrileri ve slant eğriler incelendi. Bu eğriler ile ilgili bazı karekterizasyonlar ve sonuçlar verildi.

3.1 Legendre Eğrileri

Tanım 3.1.1. (M, φ, ξ, η) *bir hemen hemen kontakt metrik manifold olsun. Eğer*

$$\gamma : I \longrightarrow M$$
$$s \longrightarrow \gamma(s)$$

diferensiyellenebilir eğrisi M *nin kontakt distribüsyonu* D *nin bir integral eğrisi ise* γ *ya* M *üzerinde bir Legendre eğrisi denir [8].*

Sonuç 3.1.1. *Bir hemen hemen kontakt metrik manifold* (M, φ, ξ, η) *üzerinde bir* γ *eğrisinin Legendre eğrisi olması için gerek ve yeter şart* $\eta(\dot{\gamma}) = 0$ *olmasıdır.*

Önerme 3.1.1. *Bir* $3-$*boyutlu Sasakian manifold üzerinde bir Legendre eğrisinin torsiyonu* 1 *e eşittir [1].*

İspat. γ bir $3-$boyutlu Sasakian manifold üzerinde yay parametresi ile verilmiş bir Legendre eğrisi olsun. Bu durumda

$$\eta(\dot{\gamma}) = 0$$

dır. Buna göre

$$\eta(\dot{\gamma}) = g(\xi, \dot{\gamma})$$

eşitliğinin her iki tarafının $\gamma-$boyunca türevi alınırsa

$$g(\nabla_{\dot{\gamma}}\xi, \dot{\gamma}) + g(\xi, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) = 0$$

elde edilir. $\nabla_{\dot{\gamma}}\xi = -\varphi\dot{\gamma}$ ve $g(\varphi\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ olduğundan

$$g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \xi) = 0$$

bulunur. Böylece ξ, $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ ya diktir. γ boyunca

$$g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = g(\varphi\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}) = g(\xi, \xi) = 1$$

$$g(\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}) = g(\dot{\gamma}, \xi) = g(\varphi\dot{\gamma}, \xi) = 0$$

olduğundan $\{\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}, \xi\}$, TM nin bir ortonormal bazıdır. Böylece $\{\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}, \xi\}$ bazına göre

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = a\dot{\gamma} + b\varphi\dot{\gamma} + c\xi$$

olarak yazılır, burada

$$a = g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$$

$$b = g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma})$$

$$c = g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \xi) = 0$$

dir. Buna göre

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \mp\kappa\varphi\dot{\gamma} \tag{3.1.1}$$

elde edilir ve burada $\kappa = \mp b$ dir. Ayrıca Frenet formüllerinden biliyoruz ki

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \kappa E_2 \tag{3.1.2}$$

dir. Buna göre (3.1.1) ve (3.1.2) den

$$E_2 = \mp\varphi\dot{\gamma} \tag{3.1.3}$$

olur. φ nin γ eğrisi boyunca kovaryant türevi

$$(\nabla_{\dot{\gamma}}\varphi)\,\dot{\gamma} = \nabla_{\dot{\gamma}}\varphi\dot{\gamma} - \varphi\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$$

dır. Böylece (2.5.1) ve (3.1.3) den

$$(\nabla_{\dot{\gamma}}E_2) = \pm(\xi + \varphi\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma})$$

elde edilir. Bu durum (2.1.6) ile birlikte gözönüne alınırsa, ξ nin katsayısının mutlak değeri torsiyon olduğundan $\tau = 1$ olarak bulunmuş olur. $\square$

Öklidyen 3-uzayda geodezik olmayan bir eğrinin düzlemsel olması için gerek ve yeter şart torsiyonun sıfır olmasıdır. Sasakian uzay form $\mathbb{R}^3(-3)$ de geodezik olmayan bir eğrinin Legendre eğrisi olması için gerek ve yeter şart torsiyonunun 1 e eşit olmasıdır. Herhangi bir 3-boyutlu Sasakian manifoldda diferensiyellenebilir bir eğrinin torsiyonunun 1 e eşit olması onun Legendre eğrisi olması için yeterli değildir. Böylece daha genel olan aşağıdaki teoremi verelim [1].

Teorem 3.1.1. *Bir 3-boyutlu Sasakian manifoldda, bir diferensiyellenebilir γ eğrisi için $\sigma = \eta(\dot{\gamma})$ diyelim. Eğer $\tau = 1$ ve bir noktada $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ ise bu durumda γ bir Legendre eğrisidir [1].*

İspat. γ, bir $3-$boyutlu Sasakian manifoldda ξ nin integral eğrisi ve geodezik olmayan bir eğri olsun. Kabul edelim ki $\dot{\gamma}$ teğet vektör alanı ξ ile lineer bağımsız olsun. Buna göre $\{\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}, \xi\}$ bir lineer bağımsız sistem oluşturur. Gram Schmidt yöntemi kullanılarak

$$\left\{\dot{\gamma}, \frac{\varphi\dot{\gamma}}{\sqrt{1-\sigma^2}}, \frac{\xi - \sigma\dot{\gamma}}{\sqrt{1-\sigma^2}}\right\}$$

ortonormal bazı elde edilir. Böylece

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = a\frac{\varphi\dot{\gamma}}{\sqrt{1-\sigma^2}} + b\frac{\xi - \sigma\dot{\gamma}}{\sqrt{1-\sigma^2}} \tag{3.1.4}$$

olarak yazılabilir, burada

$$a = \frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} g\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}\right)$$
$$b = \frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} g\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \xi - \sigma\dot{\gamma}\right)$$

dır. γ nın eğriliği $\kappa^2 = \|\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\|^2$ olduğundan (3.1.4) den

$$\kappa = \sqrt{a^2 + b^2}$$

olarak elde edilir. (3.1.4) de γ boyunca türev alınırsa ve Frenet formülleri kullanılırsa

$$\tau = 1 + \frac{a\dot{b} - b\dot{a}}{a^2 + b^2} + \frac{a\sigma}{\sqrt{1-\sigma^2}} \tag{3.1.5}$$

olarak bulunur. Eğer $a = 0$ ise

$$g\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}\right) = 0 \qquad \text{ve} \qquad g\left(\xi, \varphi\dot{\gamma}\right) = 0$$

olduğundan $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$ ile ξ ya da $\dot{\gamma}$ ile ξ lineer bağımlıdır. Bu ise bir çelişkidir. Böylece $a \neq 0$ olmak zorundadır.

$$\sigma = \eta\left(\dot{\gamma}\right) = g\left(\dot{\gamma}, \xi\right)$$

ifadesinde γ boyunca diferensiyel alınırsa

$$\dot{\sigma} = b\sqrt{1 - \sigma^2}$$

veya

$$b = \frac{\dot{\sigma}}{\sqrt{1 - \sigma^2}}$$

elde edilir. Hipotezden $\tau = 1$ olduğundan (3.1.5) den

$$0 = a\left(\ddot{\sigma} + \frac{2\sigma\dot{\sigma}^2}{1 - \sigma^2}\right) + a^3\sigma - \dot{\sigma}\dot{a} \tag{3.1.6}$$

elde edilir. Bu diferensiyel denklem çözümünü araştıralım. $a = 0$ bu sistem için bir aşikar çözümdür ve $\dot{\sigma} = 0$ olduğunda ise $\sigma = 0$ olur. Şimdi kabul edelim ki σ bir sabit olmasın. $\lambda = \frac{\dot{\sigma}}{a}$ diyelim. Bu durumda (3.1.6) dan λ ya bağlı olarak

$$\lambda\frac{d\lambda}{d\sigma} + \frac{2\sigma\lambda^2}{1 - \sigma^2} + \sigma = 0$$

şeklinde bir adi diferensiyel denklem elde edilir. Bu diferensiyel denklem bir Bernoulli denklemidir. Bu denklem çözülürse

$$\dot{\sigma}^2 = a^2\left(1 - \sigma^2\right)\left(C\left(1 - \sigma^2\right) - 1\right)$$

olarak bulunur ve burada C bir sabittir. Şimdi kabul edelim ki bir noktada $\sigma = \dot{\sigma} = 0$ olsun. Bu durumda $a \neq 0$ olduğundan $C = 1$ olmak zorundadır. $C = 1$ ise

$$\dot{\sigma}^2 = a^2\left(1 - \sigma^2\right)\left(-\sigma^2\right)$$
$$\dot{\sigma}^2 = -a^2\left(1 - \sigma^2\right)\sigma^2$$

olur. Bu durumda $\sigma^2 < 1$ olduğundan γ boyunca $\sigma = 0$ olmak zorundadır. Bu ise σ nın sabit olmasın kabülü ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.1.2. *Eğer* $3-$*boyutlu kontakt metrik manifold* M *de Legendre eğrilerinin torsiyonu* 1 *e eşit ise bu durumda manifold Sasakiandir [1].*

İspat. Herhangi bir $3-$boyutlu kontakt metrik manifoldda

$$(\nabla_X \varphi) Y = g(X + hX, Y)\xi - \eta(Y)(X + hX) \tag{3.1.7}$$

dir. Burada $h = \frac{1}{2} L_\xi \varphi$ olup $L_\xi \varphi$, φ nin ξ doğrultusunda Lie türevidir. Burada h bir simetrik operatördür ve ξ nin bir Killing vektör alanı olması için gerek ve yeter şart $h = 0$ olmasıdır. (3.1.7) den aşikar olarak görülür ki $h = 0$ olması için gerek ve yeter şart M nin bir Sasakian manifold olmasıdır. Ayrıca kontakt metrik manifoldda

$$(\nabla_X \xi) = -\varphi X - \varphi h X \tag{3.1.8}$$

olduğunu biliyoruz. Şimdi γ M üzerinde bir Legendre eğrisi olsun. Bu durumda $\eta(\dot{\gamma}) = 0$ dır. γ boyunca η nın diferensiyeli alınırsa

$$g(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \xi) + g(\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}} \xi) = 0$$

veya

$$g(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \xi) + g(\dot{\gamma}, -\varphi h \dot{\gamma}) = 0$$

ve böylece $\{\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}, \xi\}$ bazına göre

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = a\xi + b\varphi\dot{\gamma} = \kappa E_2$$

olarak yazılır. Burada

$$a = g(\dot{\gamma}, \varphi h \dot{\gamma}), \quad b = g(\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma})$$

dır. Buradan

$$E_2 = \frac{1}{\kappa}(a\xi + b\varphi\dot{\gamma})$$

vektörü γ nın asli normal vektörüdür. E_2 nin γ boyunca diferensiyeli alınır ve

(3.1.7) ile (3.1.8) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}} E_2 &= \left(-\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2} a + \frac{\dot{a}}{\kappa} + \frac{b}{\kappa} g\left(\dot{\gamma} + h\dot{\gamma}, \dot{\gamma}\right)\right) \xi - \frac{b^2}{\kappa}\dot{\gamma} \\ &+ \left(-\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2} b - \frac{a}{\kappa} + \frac{\dot{b}}{\kappa}\right) \varphi\dot{\gamma} - \frac{a}{\kappa}\varphi h\dot{\gamma} \\ &= -\kappa\dot{\gamma} + \tau E_3\end{aligned} \tag{3.1.9}$$

olur. $g\left(\xi, h\dot{\gamma}\right) = 0$ olduğundan

$$h\dot{\gamma} = \delta\dot{\gamma} + \varepsilon\varphi\dot{\gamma}$$

olarak yazılır. Buna tekrar φ uygulanırsa $\varepsilon = -a$ elde edilir. (3.1.9) dan

$$\tau E_3 = \left(-\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2} a + \frac{\dot{a}}{\kappa} + \frac{b}{\kappa}\left(1 + \delta\right)\right) \xi + \left(-\frac{\dot{\kappa}}{\kappa^2} b + \frac{\dot{b}}{\kappa} - \frac{a}{\kappa}\left(1 + \delta\right)\right) \varphi\dot{\gamma}$$

dır, buradan ve $\kappa^2 = a^2 + b^2$ den

$$\tau = \left|\frac{b\dot{a} - a\dot{b}}{\kappa^2} + (1 + \delta)\right|$$

elde edilir. Eğer γ, h nın bir eigen-eğrisi ise eğri boyunca

$$\begin{aligned}h\dot{\gamma} &= \delta\dot{\gamma} + \varepsilon\varphi\dot{\gamma} \\ &= \delta\dot{\gamma} - a\varphi\dot{\gamma} \\ a &= g\left(\dot{\gamma}, \varphi h\dot{\gamma}\right) \\ &= g\left(\dot{\gamma}, h\varphi\dot{\gamma}\right) \\ &= 0\end{aligned}$$

dır. Buradan $\varepsilon = -a = 0$ dır ve $\tau = (1 + \delta)$ olarak bulunur. Böylece eğer her Legendre eğrisinin torsiyonu 1 ise, h her yerde sıfır eigen değerine sahiptir ve böylece $h = 0$ olur ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

Şimdi Sasakian yapının standart örneği olan $\mathbb{R}^3(-3)$ de Legendre eğrilerini gözönüne alalım. $\gamma\left(s\right) = (x(s), y(s), z(s)) \in \mathbb{R}^3(-3)$ Sasakian yapısına göre yay uzunluğu ile parametrize edilmiş bir Legendre eğrisi olsun. $\{e, \varphi e, \xi\}$ bazına göre

$$\nabla_{\varphi e} e = ae + b\varphi e + c\xi$$

olarak yazılır. Burada $e = \dot{\gamma}$ dır. Bu denklemden

$$a = g\left(\nabla_{\varphi e} e, e\right) = 0$$

$$b = g\left(\nabla_{\varphi e} e, \varphi e\right)$$

$$c = g\left(\nabla_{\varphi e} e, \xi\right)$$

olmak üzere

$$\nabla_{\varphi e} e = -\xi, \quad \nabla_{e} \varphi e = \xi, \quad \nabla_{e} \xi = -\varphi e, \quad \nabla_{\varphi e} \xi = e$$

$$\nabla_{\xi} e = -\varphi e, \quad \nabla_{\xi} \varphi e = e, \quad \nabla_{e} e = \nabla_{\varphi e} \varphi e = \nabla_{\xi} \xi = 0$$

elde edilir [1].

Teorem 3.1.3. $\mathbb{R}^3(-3)$ *uzayındaki herhangi bir Legendre eğrisinin eğriliği, eğrinin öklidyen metriğine göre xy düzlemine izdüşüm eğrisinin eğriliğinin iki katına eşittir [12].*

İspat. Kabul edelim ki $\gamma(s) = (x(s), y(s), z(s))$ eğrisi $\mathbb{R}^3(-3)$ de yay parametresi ile verilmiş bir Legendre eğrisi olsun. Burada $\dot{\gamma}(s) = \dot{x}(s)\frac{\partial}{\partial x} + \dot{y}(s)\frac{\partial}{\partial y} + \dot{z}(s)\frac{\partial}{\partial z}$ olarak yazalım. Burada $\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}$ standart baz vektörleri olmak üzere

$$e_1 = 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right), \quad e_2 = 2\frac{\partial}{\partial y}, \quad \xi = 2\frac{\partial}{\partial z}$$

olarak seçilirse $\{e_1, e_2, \xi\}$ bir ortonormal baz olur. Bu durumda

$$\dot{\gamma}(s) = \frac{1}{2}\left\{\dot{x}(s)\, e_1 + \dot{y}(s)\, e_2 + \left[\dot{z}(s) - y\dot{x}(s)\right]\xi\right\} \tag{3.1.10}$$

olarak yazılabilir. $\eta(\dot{\gamma}(s)) = 0$ olduğundan, (3.1.10) dan

$$\dot{z}(s) - y\dot{x}(s) = 0$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca $\|\dot{\gamma}(s)\|^2 = \frac{1}{4}\left[(\dot{x}(s))^2 + (\dot{y}(s))^2\right] = 1$ olduğundan $(\dot{x}(s))^2 + (\dot{y}(s))^2 = 4$ tür. Burada $\theta = \theta(s)$ olmak üzere $\dot{x}(s) = -2\sin\theta$, $\dot{y}(s) = 2\cos\theta$ denilirse

$$\nabla_{\dot{\gamma}(s)}\dot{\gamma}(s) = \frac{1}{4}\left[\dot{x}(s)\,\dot{y}(s)\,\nabla_{e_1} e_2 + \dot{x}(s)\,\dot{y}(s)\,\nabla_{e_2} e_1\right] + \frac{1}{2}\left(\ddot{x}(s)\, e_1 + \ddot{y}(s)\, e_2\right)$$

elde edilir. $\nabla_{e_1} e_2 = \xi$, $\nabla_{e_2} e_1 = -\xi$ eşitlikleri gözönüne alınırsa

$$\nabla_{\dot{\gamma}(s)}\dot{\gamma}(s) = \frac{1}{2}\left(\ddot{x}(s)\, e_1 + \ddot{y}(s)\, e_2\right)$$

sonucuna ulaşılır. Böylece $\left\|\nabla_{\dot{\gamma}(s)}\dot{\gamma}(s)\right\|^2 = \left(\dot{\theta}\right)^2$ elde edilir. Bu durumda γ nın eğriliği, $\kappa = \left|\dot{\theta}\right|$ eşitliğini sağlar. Diğer taraftan γ nın $xy-$düzlemine izdüşüm eğrisi için $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ olduğundan $\|\dot{\alpha}(s)\|^2 = 4$ olur. Burada $\|.\|$ öklidyen normdur. Düzlemde $\alpha(s)$ eğrisinin eğriliğinin

$$\kappa_\alpha = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{\left((\dot{x})^2 + (\dot{y})^2\right)^{3/2}}$$

olduğundan $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ değerleri yerlerine yazılırsa $\kappa_\alpha = \frac{4}{4^{3/2}}\dot{\theta}$ eşitliği elde edilir. Son eşitlikte her iki tarafın karesi alınırsa,

$$\kappa_\alpha^2 = \frac{4^2}{4^3}\kappa^2$$

olur. Dolayısıyla

$$\kappa^2 = 4\kappa_\alpha^2$$

bulunur. Sonuçta

$$\kappa = \left|\dot{\theta}\right| = \frac{|\ddot{x}\dot{y} - \ddot{y}\dot{x}|}{4}$$

eşitliğinin sağlandığı görülür. Böylece ispat tamamlanır. □

Bir Legendre eğrisinin geodezik olması için gerek ve yeter şart $\kappa = 0$ olmasıdır. Bu durumda $\kappa = \left|\dot{\theta}\right| = 0$ ise θ =sabittir. Böylece $\dot{x} = -2\sin\theta$, $\dot{y} = 2\cos\theta$ ve $\dot{z} - y\dot{x} = 0$ dan kolayca görülür ki $\mathbb{R}^3(-3)$ ün Legendre eğrileri, $x(s) = as + b$, $y(s) = cs + d$, $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ ve $z(s)$, s nin bir kuadratiği olmak üzere $\alpha(s) = (x(s), y(s), z(s))$ şeklindedir.

Diğer taraftan $\tau = 1$ olduğundan γ Legendre eğrisi bir çember değildir fakat sabit eğrilikli Legendre eğrileri helislerdir. γ nın eğriliği, γ nın $xy-$düzlemine izdüşümü olan eğrinin eğriliğinin iki katı olduğundan bu eğriler bir $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = sabit$, şeklinde dik dairesel silindirinde bulunurlar. Eğer Legendre eğrisi helis ise $\kappa = \left|\dot{\theta}\right| = c_1$ olmalıdır. $\left|\dot{\theta}\right| = c_1\,(sabit)$ olduğundan $\theta = c_1\,(s) + c_2$ $(c_1 = c_2 = sabit)$ olur. θ değerini yerine yazarsak

$$\dot{x} = -2\sin\left(c_1\,(s) + c_2\right)$$

$$\dot{y} = 2\cos\left(c_1\,(s) + c_2\right)$$

eşitlikleri elde edilir. Bu iki denklemin integrali alınırsa

$$x = \frac{2}{c_1}\cos\left(c_1\,(s) + c_2\right) + x_0$$
$$y = \frac{2}{c_1}\sin\left(c_1\,(s) + c_2\right) + y_0$$

dır, yani

$$x = \frac{2}{c_1}\cos\theta + x_0, \quad y = \frac{2}{c_1}\sin\theta + y_0$$

olarak bulunur. γ bir Legendre eğrisi olduğundan $\dot{z} - y\dot{x} = 0$ eşitliği sağlanır. Böylece

$$\begin{aligned}\dot{z} &= -2\left(\frac{2}{c_1}\sin\left(c_1\,(s) + c_2\right) + y_0\right)\sin\left(c_1\,(s) + c_2\right) \\ &= -\frac{4}{c_1}\sin^2\left(c_1\,(s) + c_2\right) - 2y_0\sin\left(c_1\,(s) + c_2\right)\end{aligned}$$

olur. Son eşitlikte integral alırsak

$$z = \frac{1}{c_1^2}\sin 2\left(c_1\,(s) + c_2\right) + \frac{2y_0}{c_1}\cos\left(c_1\,(s) + c_2\right) - \frac{2}{c_1^2}\left(c_1\,(s) + c_2\right)$$

veya

$$z = \frac{1}{c_1^2}\sin 2\theta - \frac{2}{c_1^2}\theta + \frac{2y_0}{c_1}\cos\theta + c_3$$

sonucuna ulaşırız [1].

Teorem 3.1.4. *M bir 3-boyutlu hemen hemen normal kontakt metrik manifold olsun. Eğer bir $\gamma : I \longrightarrow M$ Legendre eğrisi geodezik değilse δ, I üzerinde bir fonksiyon olmak üzere eğrinin eğriliği ve torsiyonu sırasıyla,*

$$\kappa = \sqrt{\alpha^2 + \delta^2} \tag{3.1.11}$$

$$\tau = \left|\beta + \frac{\alpha\dot{\delta} - \dot{\alpha}\delta}{\kappa^2}\right| \tag{3.1.12}$$

dur. Burada $\alpha = \frac{1}{2}iz\left\{X \longrightarrow \nabla_X\xi\right\}$ ve $\beta = \frac{1}{2}iz\left\{X \longrightarrow \varphi\nabla_X\xi\right\}$ dir [8].

İspat. γ, 3-boyutlu hemen hemen normal kontakt metrik manifold üzerinde bir Legendre eğrisi olsun. Bu durumda $\{\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}, \xi\}$, γ boyunca bir ortonormal bazdır. $g(\xi, \dot{\gamma}) = 0$ olduğundan γ boyunca diferensiyeli alınırsa $g(\nabla_{\dot{\gamma}}\xi, \dot{\gamma}) + g(\xi, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) = 0$ olur. Burada (2.5.6) kullanılırsa

$$g(\alpha\dot{\gamma} - \beta\varphi\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) + g(\xi, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) = 0$$

$$\alpha g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) - \beta g(\varphi\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = -g(\xi, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma})$$

$$-\alpha = g(\xi, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma})$$

olduğu görülür. Böylece δ, I üzerinde bir fonksiyon olmak üzere

$$\nabla_{\dot{\gamma}}E_1 = -\alpha\xi + \delta\varphi\dot{\gamma} \tag{3.1.13}$$

olur. Ayrıca γ nın κ eğriliği (3.1.11) ile verilir.

$$E_2 = \frac{1}{\kappa}\nabla_{\dot{\gamma}}E_1 = -\frac{\alpha}{\kappa}\xi + \frac{\delta}{\kappa}\varphi\dot{\gamma}$$

vektör alanının γ boyunca diferansiyeli alınır ve (2.5.6), (2.5.7), (3.1.13) kullanılırsa

$$\nabla_{\dot{\gamma}}E_2 = -\dot{\gamma}\left(\frac{\alpha}{\kappa}\right)\xi - \frac{\alpha}{\kappa}\nabla_{\dot{\gamma}}\xi + \dot{\gamma}\left(\frac{\delta}{\kappa}\right)\varphi\dot{\gamma} + \frac{\delta}{\kappa}\left((\nabla_{\dot{\gamma}}\varphi)\dot{\gamma} + \varphi\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right) \tag{3.1.14}$$

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot{\gamma}}E_2 = & -\frac{\dot{\alpha}\kappa - \alpha\dot{\kappa}}{\kappa^2}\xi - \frac{\alpha}{\kappa}\left(\alpha\left(\dot{\gamma} - \eta(\dot{\gamma})\xi\right) - \beta\varphi\dot{\gamma}\right) + \frac{\dot{\delta}\kappa - \delta\dot{\kappa}}{\kappa^2}\varphi\dot{\gamma} \\
& + \frac{\delta}{\kappa}\left(\beta\left(g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\xi - \eta(\dot{\gamma})\dot{\gamma}\right) + \alpha\left(g(\varphi\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\xi - \eta(\dot{\gamma})\varphi\dot{\gamma}\right)\right) \\
& + \frac{\delta}{\kappa}\varphi\left(-\alpha\xi + \delta\varphi\dot{\gamma}\right) \\
& = -\kappa\dot{\gamma} + a\xi + b\varphi\dot{\gamma}
\end{aligned}$$

olur. Burada

$$a = \frac{\delta\beta}{\kappa} - \frac{\dot{\alpha}\kappa - \alpha\dot{\kappa}}{\kappa^2}, \qquad b = \frac{\alpha\beta}{\kappa} + \frac{\dot{\delta}\kappa - \delta\dot{\kappa}}{\kappa^2}$$

dır. (3.1.11) yardımı ile

$$c = \beta + \frac{\alpha\dot{\delta} - \dot{\alpha}\delta}{\kappa^2}$$

olmak üzere

$$a = \frac{\delta c}{\kappa}, \quad b = \frac{\alpha c}{\kappa}$$

şeklinde yazılabilir. (3.1.14) den

$$\tau E_3 = \nabla_{\dot{\gamma}} E_2 + \kappa E_1 = a\xi + b\varphi\dot{\gamma}$$

bulunur. Bu son denklemden $\tau^2 = a^2 + b^2$ elde edilir ve ispat tamamlanır. $\square$

Örnek 3.1.1. *N, $\mathbb{R}^2$ düzleminin açık bağlantılı bir alt kümesi olsun. (a,b), $\mathbb{R}$ de bir açık aralık $(-\infty \leq a < b \leq +\infty)$ ve $M = N \times (a,b)$ olsun. Bu durumda M bir diferensiyellenebilir manifolddur. $\mathbb{R}^2$ deki standart koordinat sisteminden N üzerine indirgenen koordinatlar (x,y), (a,b) üzerine $\mathbb{R}$ den indirgenen koordinatlar da z olsun. Böylece (x,y,z), M üzerinde bir koordinat sistemidir. Şimdi*

$$\omega_1 : N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \omega_2 : N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad f : N \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \sigma : M \longrightarrow \mathbb{R}_+$$

diferensiyellenebilir fonksiyonlar olsun. M üzerinde hemen hemen kontakt metrik yapısını kuralım:

$$\varphi\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial y} - \omega_2\frac{\partial}{\partial z}, \quad \varphi\frac{\partial}{\partial y} = \omega_1\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial x}, \quad \varphi\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$\xi = \frac{\partial}{\partial z}, \quad \eta = \omega_1 dx + \omega_2 dy + dz$$

$$[g(\partial_i, \partial_j)] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 + \sigma e^{2f} & \omega_1\omega_2 & \omega_1 \\ \omega_1\omega_2 & \omega_2^2 + \sigma e^{2f} & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 1 \end{bmatrix}$$

olsun. Burada $\partial_1 = \partial_x$, $\partial_2 = \partial_y$ ve $\partial_3 = \partial_z$ dir. Buna göre,

$$\eta(\xi) = 1, \quad \varphi^2 = -I + \eta \otimes \xi, \quad \eta \circ \varphi = 0$$

$$\varphi\xi = 0, \quad \eta(X) = g(X,\xi)$$

şartlarının sağlandığını gösterelim:

$\eta(\xi) = 1$ olduğu kolaylıkla görülür.

$$X = X_1\frac{\partial}{\partial x} + X_2\frac{\partial}{\partial y} + X_3\frac{\partial}{\partial z}$$

için

$$\begin{aligned}\varphi X &= X_1\varphi\frac{\partial}{\partial x}+X_2\varphi\frac{\partial}{\partial y}+X_3\varphi\frac{\partial}{\partial z}\\ &= X_1\left(\frac{\partial}{\partial y}-\omega_2\frac{\partial}{\partial z}\right)+X_2\left(\omega_1\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\\ &= -X_2\frac{\partial}{\partial x}+X_1\frac{\partial}{\partial y}+\left(\omega_1X_2-\omega_2X_1\right)\frac{\partial}{\partial z}\end{aligned}$$

dir. Tekrar φ *uygulanırsa*

$$\begin{aligned}\varphi^2 X &= -X_2\varphi\frac{\partial}{\partial x}+X_1\varphi\frac{\partial}{\partial y}+\left(\omega_1X_2-\omega_2X_1\right)\varphi\frac{\partial}{\partial z}\\ &= -X_2\left(\frac{\partial}{\partial y}-\omega_2\frac{\partial}{\partial z}\right)+X_1\left(\omega_1\frac{\partial}{\partial z}-\frac{\partial}{\partial x}\right)\\ &= -X_1\frac{\partial}{\partial x}-X_2\frac{\partial}{\partial y}+\left(X_1\omega_1+X_2\omega_2\right)\frac{\partial}{\partial z}\\ &= -X_1\frac{\partial}{\partial x}-X_2\frac{\partial}{\partial y}-X_3\frac{\partial}{\partial z}+\left(X_1\omega_1+X_2\omega_2+X_3\right)\frac{\partial}{\partial z}\\ &= -X+\eta\left(X\right)\xi\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\varphi X = -X_2\frac{\partial}{\partial x}+X_1\frac{\partial}{\partial y}+\left(\omega_1X_2-\omega_2X_1\right)\frac{\partial}{\partial z}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\eta\left(\varphi X\right) &= \left(\omega_1 dx\right)\left(-X_2\frac{\partial}{\partial x}\right)+\left(\omega_2 dy\right)\left(X_1\frac{\partial}{\partial y}\right)+dz\left(\omega_1X_2-\omega_2X_1\right)\frac{\partial}{\partial z}\\ &= 0\end{aligned}$$

olur.

$\xi=\frac{\partial}{\partial z}$ *olduğundan*

$$\varphi\xi=\varphi\frac{\partial}{\partial z}=0$$

dır. $\eta\left(X\right)=g\left(X,\xi\right)$ *sağlandığını gösterelim:*

$$\begin{aligned}g\left(X,\xi\right) &= \begin{bmatrix}X_1 & X_2 & X_3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1^2+\sigma e^{2f} & \omega_1\omega_2 & \omega_1\\ \omega_1\omega_2 & \omega_2^2+\sigma e^{2f} & \omega_2\\ \omega_1 & \omega_2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\\ &= X_1\omega_1+X_2\omega_2+X_3\end{aligned}$$

dir.

$$\eta = \omega_1 dx + \omega_2 dy + dz,$$
$$X = X_1 \frac{\partial}{\partial x} + X_2 \frac{\partial}{\partial y} + X_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

için,

$$\begin{aligned}\eta(X) &= (\omega_1 dx)\left(X_1 \frac{\partial}{\partial x}\right) + (\omega_2 dy)\left(X_2 \frac{\partial}{\partial y}\right) + dz\left(X_3 \frac{\partial}{\partial z}\right) \\ &= X_1\omega_1 + X_2\omega_2 + X_3\end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$\alpha = \frac{1}{2\sigma}\frac{\partial \sigma}{\partial z}, \quad \beta = \frac{e^{-2f}}{2\sigma}\left(\frac{\partial \omega_1}{\partial y} - \frac{\partial \omega_2}{\partial x}\right)$$

olarak bulunur ve $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *bir hemen hemen normal kontakt metrik manifolddur [8].*

Örnek 3.1.2. *Kabul edelim ki*

$$N = \mathbb{R}^2, \quad (a, b) = \mathbb{R}_+, \quad M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$$

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 2x, \quad f = 0, \quad \sigma = 2z$$

olsun. $\alpha = (2z)^{-1}$, $\beta = -(2z)^{-1}$ *ve* (φ, ξ, η, g) *yapısı normaldir ve quasi-Sasakian değildir.* M *de bir* $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ *eğrisinin bir Legendre eğrisi olması için gerek ve yeter şart*

$$2\gamma^1\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}^3 = 0 \text{ ve } \left(\dot{\gamma}^1\right)^2 + \left(\dot{\gamma}^2\right)^2 = \left(2\gamma^3\right)^{-1} \tag{3.1.15}$$

olmasıdır. Gerçekten

$$\eta(\dot{\gamma}) = (\omega_1 dx + \omega_2 dy + dz)\left(\dot{\gamma}^1 \frac{\partial}{\partial x} + \dot{\gamma}^2 \frac{\partial}{\partial y} + \dot{\gamma}^3 \frac{\partial}{\partial z}\right)$$

olduğundan γ *bir Legendre eğrisi ise*

$$2\gamma^1\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}^3 = 0$$

elde edilir. $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$ *olduğundan*

$$g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \begin{bmatrix}\dot{\gamma}^1 & \dot{\gamma}^2 & \dot{\gamma}^3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\omega_1^2 + \sigma e^{2f} & \omega_1\omega_2 & \omega_1 \\ \omega_1\omega_2 & \omega_2^2 + \sigma e^{2f} & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\gamma}^1 \\ \dot{\gamma}^2 \\ \dot{\gamma}^3\end{bmatrix} = 1$$

dir ve

$$\left(\omega_1^2+\sigma e^{2f}\right)\left(\dot{\gamma}^1\right)^2+\left(\omega_2^2+\sigma e^{2f}\right)\left(\dot{\gamma}^2\right)^2+\left(\dot{\gamma}^3\right)^2+2\omega_1\omega_2\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^2+2\omega_1\dot{\gamma}^1\dot{\gamma}^3+2\omega_2\dot{\gamma}^2\dot{\gamma}^3=1$$

olduğu görülür. Buradan

$$\left(\omega_1\dot{\gamma}^1+\omega_2\dot{\gamma}^2+\dot{\gamma}^3\right)^2+\sigma e^{2f}\left[\left(\dot{\gamma}^1\right)^2+\left(\dot{\gamma}^2\right)^2\right]=1$$

olduğundan (3.1.15) elde edilir.

(a) $\gamma(t)=(0,t/2,2)\,,\ t>0$ *için,*

$$[g(\partial_i,\partial_j)]=\begin{bmatrix}2z & 0 & 0\\ 0 & 4x^2+2z & 2x\\ 0 & 2x & 1\end{bmatrix}$$

ve

$$\left[g^{-1}(\partial_i,\partial_j)\right]=\begin{bmatrix}\frac{1}{2z} & 0 & 0\\ 0 & \frac{1}{2z} & -\frac{x}{z}\\ 0 & -\frac{x}{z} & \frac{2x^2}{z}+1\end{bmatrix},$$

dir. Ayrıca (2.5.3) kullanılarak

$$\Gamma_{11}^1=0,\quad \Gamma_{11}^2=\frac{x}{z},\quad \Gamma_{11}^3=-\left(\frac{2x^2}{z}+1\right),$$

$$\Gamma_{12}^1=\Gamma_{21}^1=0,\quad \Gamma_{12}^2=\Gamma_{21}^2=\frac{x}{z},\quad \Gamma_{12}^3=\Gamma_{21}^3=1-\frac{2x^2}{z},$$

$$\Gamma_{13}^1=\Gamma_{31}^1=\frac{1}{2z},\quad \Gamma_{13}^2=\Gamma_{31}^2=\frac{1}{2z},\quad \Gamma_{13}^3=\Gamma_{31}^3=-\frac{x}{z},$$

$$\Gamma_{22}^1=-\frac{2x}{z},\quad \Gamma_{22}^2=\frac{x}{z},\quad \Gamma_{22}^3=-\left(1+\frac{2x^2}{z}\right),$$

$$\Gamma_{23}^1=\Gamma_{32}^1=-\frac{1}{2z},\quad \Gamma_{23}^2=\Gamma_{32}^2=\frac{1}{2z},\quad \Gamma_{23}^3=\Gamma_{32}^3=-\frac{x}{z},$$

$$\Gamma_{33}^1=0,\quad \Gamma_{33}^2=0,\quad \Gamma_{33}^3=0$$

elde edilir. Böylece

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1=\frac{x}{z}\partial_2-\left(1+\frac{2x^2}{z}\right)\partial_3,\quad \nabla_{\partial_1}\partial_2=\nabla_{\partial_2}\partial_1=\frac{x}{z}\partial_2+\left(1-\frac{2x^2}{z}\right)\partial_3$$

$$\nabla_{\partial_1}\partial_3=\nabla_{\partial_3}\partial_1=\frac{1}{2z}\partial_1+\frac{1}{2z}\partial_2-\frac{x}{z}\partial_3$$

$$\nabla_{\partial_2}\partial_3 = \nabla_{\partial_3}\partial_2 = -\frac{1}{2z}\partial_1 + \frac{1}{2z}\partial_2 - \frac{x}{z}\partial_3$$
$$\nabla_{\partial_2}\partial_2 = -\frac{2x}{z}\partial_1 + \frac{x}{z}\partial_2 - \left(1 + \frac{2x^2}{z}\right)\partial_3, \quad \nabla_{\partial_3}\partial_3 = 0$$

olur. γ *nın teğet vektör alanı*

$$T = \dot{\gamma} = \left(0, \frac{1}{2}, 0\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}$$

dır. Frenet denklemlerinden

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \kappa N$$

kullanılarak

$$\nabla_{\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}}\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{4}\nabla_{\frac{\partial}{\partial y}}\frac{\partial}{\partial y} = \frac{1}{4}\nabla_{\partial_2}\partial_2 = \frac{1}{4}\left(-\frac{2x}{z}\partial_1 + \frac{x}{z}\partial_2 - \left(1 + \frac{2x^2}{z}\right)\partial_3\right)$$

olur ve buradan

$$\begin{aligned}\kappa &= \sqrt{g\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right)} \\ &= \sqrt{\frac{1}{16}\left(\frac{4x^2}{z^2} + \frac{x^2}{z^2} + 1 + \frac{4x^2}{z} + \frac{4x^4}{z^2}\right)} \\ &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

ve

$$\nabla_{\dot{\gamma}}N = -\kappa T + \tau B \tag{3.1.16}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}}N &= \nabla_{\frac{1}{2}\partial_2}\left(-\frac{2x}{z}\partial_1 + \frac{x}{z}\partial_2 - \left(1 + \frac{2x^2}{z}\right)\partial_3\right) \\ &= -\frac{x}{z}\nabla_{\partial_2}\partial_1 + \frac{1}{2}\frac{x}{z}\nabla_{\partial_2}\partial_2 - \frac{1}{2}\nabla_{\partial_2}\partial_3 - \frac{x^2}{z}\nabla_{\partial_2}\partial_3 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\frac{x^2}{z} + \frac{1}{4}\right)\partial_1 - \left(\frac{x^2}{z^2} + \frac{1}{4z}\right)\partial_2 + \left(\frac{2x^3}{z^2} - \frac{x}{z}\right)\partial_3\end{aligned}$$

elde edilir. (3.1.16) dan

$$\tau = \frac{1}{4}$$

bulunur. Yani γ *bir helistir.*

(b) $\gamma(t) = \left(\sqrt{t}, -\sqrt{t}, t\right)$, $t > 0$, $\kappa = \left(\sqrt{2}t\right)^{-1}$ *ve* $\tau = (2t)^{-1}$ *ile genelleştirilmiş bir helisdir [8].*

Örnek 3.1.3. *Kabul edelim ki*

$$N = \mathbb{R}^2, \quad (a, b) = \mathbb{R}_+, \quad M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$$

$$\omega_1 = 0, \quad \omega_2 = 2x, \quad f = 0, \quad \sigma = x^2$$

olsun. $\alpha = 0$, $\beta = -x^{-2}$ *ve* (φ, ξ, η, g) *yapısı quasi-Sasakiandir.* M *de bir* $\gamma = (\gamma^1, \gamma^2, \gamma^3)$ *eğrisinin Legendre eğrisi olması için gerek ve yeter şart*

$$2\gamma^1\dot{\gamma}^2 + \dot{\gamma}^3 = 0 \quad ve \quad \left(\dot{\gamma}^1\right)^2 + \left(\dot{\gamma}^2\right)^2 = \left(\gamma^1\right)^{-2}$$

olmasıdır. M *de Legendre eğrileri için bazı somut örnekler verelim.*

(a) $\gamma(t) = (1/c, ct, -2t)$, $t \in \mathbb{R}$, $c = sabit > 0$ *olması durumunda* $\kappa = \tau = c^2$ *ile bir helisdir.*

(b) $\gamma(t) = \left(\sqrt{t}, \sqrt{3t}, -\sqrt{3}t\right)$, $t > 0$ *olması durumunda* $\kappa = \sqrt{3}(2t)^{-1}$ *ve* $\tau = t^{-1}$ *ile bir genelleştirilmiş helisdir.*

(c) $\gamma(t) = \left(\sqrt{1-t^2}, t, -t\sqrt{1-t^2} - \arcsin t\right)$, $-1 < t < 1$ *olması durumunda,* $\kappa = 2\left(1-t^2\right)^{-1/2}$ *ve* $\tau = \left(1-t^2\right)^{-1}$ *ile bir eğridir [8].*

3.2 Slant Eğriler

3.2.1 3-Boyutlu Hemen Hemen Normal Kontakt Geometride Slant Eğriler

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir $3-$boyutlu hemen hemen normal kontakt manifold ve $\gamma : I \longrightarrow M$ ye bir eğri olsun. $T(s)$, γ nın teğet vektör alanı olmak üzere

$$\cos\theta(s) = g(T(s), \xi) = \eta(T(s)), \quad \theta \in [0, 2\pi) \tag{3.2.1}$$

olacak şekilde bir θ sabit fonksiyonu var ise γ ya bir slant eğri veya θ-slant eğri denir. $\theta = \frac{\pi}{2}$ ya da $\theta = \frac{3\pi}{2}$ olması durumunda, aşikar olarak γ bir Legendre eğrisidir.

Geodezik olmayan bir γ θ-slant eğrisi için *Lancret* sabiti

$$Lancret\,(\gamma) = \frac{\cos\theta}{|\sin\theta|}$$

şeklinde tanımlanır [13].

Önerme 3.2.1. *γ Frenet eğrisi θ-slant eğri olması için gerek ve yeter şart γ boyunca*

$$\eta\,(N) = -\frac{\alpha}{\kappa}\sin^2\theta, \tag{3.2.2}$$

olmasıdır. Eğer $\alpha > 0$ ise γ nın θ-slant olması için

$$|\sin\theta| \leq \min\left\{\sqrt{\frac{\kappa}{\alpha}}, \frac{\kappa}{\alpha}, 1\right\} \tag{3.2.3}$$

olması gereklidir [13].

İspat. γ, bir θ-slant Frenet eğrisi olsun. Bu durumda γ boyunca (3.2.1) in kovaryant türevi alınırsa

$$0 = -\dot{\theta}\sin\theta = g\,(\kappa N, \xi) + g\,(T, \alpha\,(T - \eta\,(T)\,\xi) + \beta\varphi\,(T))\,,$$

elde edilir. φ, g ye göre anti simetrik olduğundan $g\,(T, \varphi T) = 0$ olur, böylece

$$\kappa\eta\,(N) + \alpha\sin^2\theta = 0$$

elde edilir ki bu da (3.2.2) dir. ξ, karakteristik vektör alanı γ boyunca

$$\xi = \lambda_1 T + \lambda_2 N + \lambda_3 B$$

olarak yazılır. Buradan

$$\lambda_1 = \cos\theta, \quad \lambda_2 = -\frac{\alpha}{\kappa}\sin^2\theta, \quad \lambda_3 = \eta\,(B)$$

olarak bulunur ve

$$\xi = (\cos\theta)\,T + \left(-\frac{\alpha}{\kappa}\sin^2\theta\right)N + \eta\,(B)\,B$$

olarak yazılır. ξ bir birim vektör alanı olduğundan

$$1 = \cos^2\theta + \frac{\alpha^2}{\kappa^2}\sin^4\theta + \eta\left(B\right)^2$$

dir ve ayrıca $\eta^2\left(B\right) \geq 0$ olduğundan $\left|\frac{\alpha}{\kappa}\sin\theta\right| \leq 1$ olarak elde edilir. Kabulden $\alpha > 0$ ve Frenet denklemlerinden $\kappa > 0$ dır. Buna göre $\left|\frac{\alpha}{\kappa}\sin^2\theta\right| \leq 1$ den $\frac{\alpha}{\kappa}\sin^2\theta \leq 1$ veya $\sin^2\theta \leq \frac{\kappa}{\alpha}$ dır. Ayrıca $|\sin\theta| \leq 1$ olduğundan

$$|\sin\theta| \leq \min\left\{\sqrt{\frac{\kappa}{\alpha}}, \frac{\kappa}{\alpha}, 1\right\}$$

elde edilir. □

(3.2.2) den görülür ki γ eğrisinin θ-slant eğri olması β ya bağlı değildir. Yani γ nın slantlığı Sasakin yapıya bağlı değildir.

Eğer γ nın asli normal doğrusu sabit bir doğrultu ile bir sabit açı yaparsa geodezik olmayan bir eğri slant helis olarak adlandırılır.

Kabul edelim ki γ geodezik olmasın. Yani $\kappa > 0$ ve γ, ξ nın bir integral eğrisi değildir ki bu $\theta \neq 0$ anlamına gelir. (2.8.7) kullanılırsa

$$\nabla_{\dot\gamma}\xi = \alpha\left(\dot\gamma - \cos\theta\xi\right) - \beta\varphi\left(\dot\gamma\right)$$

olur. γ boyunca,

$$F_1 = T = \dot\gamma, \quad F_2 = \frac{\varphi\left(\dot\gamma\right)}{|\sin\theta|}, \quad F_3 = \frac{\xi - \cos\theta\dot\gamma}{|\sin\theta|}$$

ortonormal çatısını gözönüne alalım. Bu çatıya göre

$$\xi = \cos\theta F_1 + |\sin\theta|\, F_3$$

olarak yazılır [13].

Önerme 3.2.2. *Eğer bir 3−boyutlu hemen hemen normal kontakt metrik manifold $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ de γ bir θ-slant eğri ise bu durumda*

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot\gamma}F_1 &= \delta\,|\sin\theta|\,F_2 - \alpha\,|\sin\theta|\,F_3 \\
\nabla_{\dot\gamma}F_2 &= -\delta\,|\sin\theta|\,F_1 + \left(\beta + \delta\cos\theta\right)F_3 \qquad (3.2.4)\\
\nabla_{\dot\gamma}F_3 &= \alpha\,|\sin\theta|\,F_1 - \left(\beta + \delta\cos\theta\right)F_2
\end{aligned}$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$\delta = \frac{1}{\sin^2\theta} g\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \varphi\left(\dot{\gamma}\right)\right)$$

dır. Ayrıca

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\xi = \alpha\sin^2\theta F_1 - \beta\left|\sin\theta\right| F_2 - \alpha\cos\theta\left|\sin\theta\right| F_3,$$

dir [13].

Önerme 3.2.3. *M de θ-slant eğrinin eğrilik ve torsiyonu*

$$\kappa = \left|\sin\theta\right|\sqrt{\alpha^2+\delta^2}, \tag{3.2.5}$$

$$\delta = \left|\beta + \delta\cos\theta + \frac{\alpha\dot{\delta}-\dot{\alpha}\delta}{\alpha^2+\delta^2}\right|,$$

dır. $\delta \neq 0$ için Lancret sabiti

$$Lancret_{\pm}\left(\gamma\right) = \frac{\left(\dot{\alpha}\delta - \alpha\dot{\delta}\right)\left(\alpha^2+\delta^2\right)^{-\frac{1}{2}} + \left(\pm\tau-\beta\right)\left(\alpha^2+\delta^2\right)^{\frac{1}{2}}}{\delta\kappa} \tag{3.2.6}$$

dir [13].

İspat. Eğriliğin tanımı göz önüne alınarak (3.2.4) ve (3.2.5) ile ilişkili olarak

$$N = \frac{1}{\kappa}\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}}\left(\delta F_2 - \alpha F_2\right)$$

olur. γ boyunca türev alınırsa

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}}N &= -\kappa T + \left(\beta + \delta\cos\theta + \frac{\alpha\dot{\delta}-\dot{\alpha}\delta}{\alpha^2+\delta^2}\right)\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}}\left(\alpha F_2 + \delta F_3\right)\\ &= -\kappa T + \tau B\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\mu = \beta + \delta\cos\theta + \frac{\alpha\dot{\delta}-\dot{\alpha}\delta}{\alpha^2+\delta^2}$$

denilirse

$$B = \frac{\mu}{\left|\mu\right|\sqrt{\alpha^2+\delta^2}}\left(\alpha F_2 + \delta F_3\right)$$

olur ve $\tau = \left|\mu\right|$ dür. (3.2.5) ifadesinden $\kappa > 0$ olduğu için iyi tanımlı olduğunu gösterir. (3.2.6) işareti $\sin\theta$ nın işaretine karşılık gelir ki

$$Lancret_{\pm}\left(\gamma\right) = \frac{\cos\theta}{\left|\sin\theta\right|} = \frac{\cos\theta}{\pm\sin\theta}$$

dir. (3.2.6) in sağ tarafındaki hesaplama (3.2.5) den $\cos\theta$ ve $\sin\theta$ ifadesi ile açıktır. Frenet çatısı yardımıyla aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$F_2 = \frac{\delta}{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}}N + \frac{\alpha\,|\mu|}{\mu\sqrt{\alpha^2+\delta^2}}B$$

$$F_3 = \frac{-\alpha}{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}}N + \frac{\delta\,|\mu|}{\mu\sqrt{\alpha^2+\delta^2}}B$$

$$\xi = \cos\theta T - \frac{\alpha\,|\sin\theta|}{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}}N + \frac{\delta\,|\mu|\,|\sin\theta|}{\mu\sqrt{\alpha^2+\delta^2}}B$$

$$\nabla_{\dot\gamma}\xi = \alpha\sin^2\theta T + \frac{|\sin\theta|}{\sqrt{\alpha^2+\delta^2}}\left[\left(\alpha^2\cos\theta-\beta\delta\right)N - \frac{(\beta+\delta\cos\theta)\,\alpha\,|\mu|}{\mu}B\right].$$

Buradan $\|\nabla_{\dot\gamma}\xi\| = |\sin\theta|\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ elde edilir ve bu norm γ eğrisinden bağımsızdır.

□

Uyarı 3.2.1. *Bazı özel durumlar aşağıdaki gibidir:*

1. *(β-Sasakian durumu) $\alpha = 0$ ve $\beta \neq 0$ için β-Sasakian durumu elde edilir. β-Sasakian 3-manifoldda geodezik olmayan bir slant eğri $\frac{\tau\pm\beta}{\kappa}$ sabitine sahiptir ki bu β-Sasakian geometride Lancret sabiti olarak göz önüne alınabilir.*

2. *(α-Kenmotsu durumu) $\beta = 0$ ve $\alpha \neq 0$ için α-Kenmotsudur.*

3. *Eğer $\alpha = \beta = 0$ ise (3.2.5) için kosimplektik durum elde edilir ki $\kappa = |\delta\sin\theta|$, $\tau = |\delta\cos\theta|$ ve Lancret$_\pm(\gamma) = \pm\frac{\tau}{k}$ dır. Böylece, kosimplektik manifoldda bir slant eğri genelleştirilmiş bir helisdir.*

4. *$\theta = \frac{\pi}{2}$ için hemen hemen normal kontakt metrik manifoldlarda olduğu gibi Legendre eğrisi elde edilir [13].*

(M,φ,ξ,η,g), 3-boyutlu hemen hemen normal kontakt metrik manifold ve γ da M üzerinde bir eğri olsun. Eğer γ, M nin 1-boyutlu altmanifoldu olarak gözönüne alınırsa, M nin Levi-Civita konneksiyonu $\bar\nabla$, γ eğrisi üzerine indirgenen konneksiyonu ∇ olmak üzere Gauss formülünden

$$\bar\nabla_T T = \nabla_T T + h\,(T,T)$$

olarak yazılır. Buna göre γ boyunca ortalama eğrilik vektörü

$$H = iz\,(h) = h\,(T, T) = \nabla_T T$$

dir. Δ, M üzerinde Laplace operatörü olmak üzere γ boyunca

$$\Delta H = \lambda H \tag{3.2.7}$$

olacak şekilde bir $\lambda \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ fonksiyonu var ise γ eğrisine has (proper) ortalama eğrilik vektör alanına sahip eğri denir. Eğer $\lambda = 0$ ise γ ya harmonik ortalama eğrilikli eğri denir. Ayrıca γ boyunca

$$\Delta H = -\nabla_T \nabla_T \nabla_T T$$

dır. Frenet denklemleri kullanılarak

$$-3\kappa'\kappa T + \left(\kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2\right) N + \left(2\kappa'\tau + \kappa\tau'\right) B = -\lambda\kappa N$$

elde edilir. Buradan ise

$$\kappa'\kappa = 0, \quad \kappa'' - \kappa^3 - \kappa\tau^2 = -\lambda\kappa, \quad 2\kappa'\tau + \kappa\tau' = 0$$

elde edilir ki, bu denklemlerden κ =sabit, τ =sabit olduğu sonucuna ulaşılır. κ ve τ sabit olduğundan λ fonksiyonuda sabittir ve

$$\lambda = \kappa^2 + \tau^2 \tag{3.2.8}$$

olarak bulunur [13].

Önerme 3.2.4. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu hemen hemen normal kontakt metrik manifold olsun. M de geodezik olmayan θ-slant eğrisi γ nın bir has ortalama vektör alanına sahip olması için gerek ve yeter şart γ nın bir helis ve*

$$\lambda = \alpha^2 \sin^2\theta + \beta^2 + \delta^2 + (\dot{\alpha})^2 + 2\beta\delta\cos\theta - 2\beta\dot{\alpha} - 2\delta\dot{\alpha}\cos\theta \tag{3.2.9}$$

olmasıdır. Özel olarak γ bir Legendre helis eğrisi ise

$$\lambda = \alpha^2 + \delta^2 + (\dot{\alpha} - \beta)^2 > 0$$

olur [13].

İspat. γ, M de has ortalama eğrilik vektör alanına sahip bir θ-slant eğri olsun. Bu durumda (3.2.5) ve (3.2.8) den

$$\lambda = \alpha^2 \sin^2 \theta + \beta^2 + \delta^2 + \left(\frac{\alpha\dot{\delta} - \dot{\alpha}\delta}{\alpha^2 + \delta^2} \right)^2 + 2\beta\delta\cos\theta \tag{3.2.10}$$
$$+ 2\frac{\beta\left(\alpha\dot{\delta} - \dot{\alpha}\delta\right)}{\alpha^2 + \delta^2} + 2\frac{\delta\left(\alpha\dot{\delta} - \dot{\alpha}\delta\right)}{\alpha^2 + \delta^2}\cos\theta$$

elde edilir. $\kappa^2 = \alpha^2 + \delta^2$ ifadesinin türevi alınırsa

$$\dot{\delta} = -\frac{\alpha\dot{\alpha}}{\delta}$$

elde edilir. Bu (3.2.10) da yerine yazılırsa (3.2.9) elde edilir. Eğer $\delta = 0$ ise $\kappa = \alpha\left|\sin\theta\right|$ ve $\tau = \left|\beta\right|$ dir. Bu durumda (3.2.9) dan

$$\lambda = \alpha^2 \sin^2 \theta + \beta^2$$

elde edilir. □

Örnek 3.2.1. $\mathbb{R}^2$ *nin bir açık irtibatlı alt kümesi* N *olsun.* (a,b), $\mathbb{R}$ *de bir açık aralık olmak üzere* $M = N \times (a,b)$ *bir 3-boyutlu manifolddur.* N *üzerindeki koordinatlar* (x,y) *ve* (a,b) *üzerindeki koordinat da* z *olsun. Böylece* (x,y,z), M *üzerindeki standart koordinat sistemidir.*

$$\omega_1, \omega_2 : N \longrightarrow \mathbb{R}, \qquad \sigma, f : M \longrightarrow \mathbb{R}_+^*,$$

diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. M *üzerinde bir* φ $(1,1)$ *tensör alanını*

$$\varphi\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y} - \omega_2\frac{\partial}{\partial z}, \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) = -\frac{\partial}{\partial x} + \omega_1\frac{\partial}{\partial z}, \quad \varphi\left(\frac{\partial}{\partial z}\right) = 0,$$

olarak ve ξ *ile* η *yı*

$$\xi = \frac{\partial}{\partial z}, \qquad \eta = dz + \omega_1 dx + \omega_2 dy$$

şeklinde ve M *üzerinde* g *metriğini de*

$$g = [g_{ij}] = \begin{bmatrix} \omega_1^2 + \sigma e^{2f} & \omega_1\omega_2 & \omega_1 \\ \omega_1\omega_2 & \omega_2^2 + \sigma e^{2f} & \omega_2 \\ \omega_1 & \omega_2 & 1 \end{bmatrix}.$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda (M,φ,ξ,η,g) *bir hemen hemen normal kontakt metrik manifolddur. Böylece* g *ye göre*

$$H_1=\frac{e^{-f}}{\sqrt{\sigma}}\left[\frac{\partial}{\partial x}-\omega_1\frac{\partial}{\partial z}\right],\quad H_2=\frac{e^{-f}}{\sqrt{\sigma}}\left[\frac{\partial}{\partial y}-\omega_2\frac{\partial}{\partial z}\right],\quad H_3=\xi=\frac{\partial}{\partial z}$$

bir ortonormal çatıdır. Bu durumda

$$[H_1,H_2]=\frac{\sqrt{\sigma}}{e^{-f}}\left[-H_2\left(\frac{e^{-f}}{\sqrt{\sigma}}\right)H_1+H_1\left(\frac{e^{-f}}{\sqrt{\sigma}}\right)H_2\right]+\frac{e^{-f}}{\sigma}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y}-\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right)H_3$$
$$[H_1,H_3]=\frac{\sigma_z}{2\sigma}H_1,\quad [H_2,H_3]=\frac{\sigma_z}{2\sigma}H_2$$

elde edilir. Buradan

$$\alpha=\frac{1}{2\sigma}\frac{\partial\sigma}{\partial z}+\frac{\partial f}{\partial z},\quad \beta=\frac{e^{-2f}}{2\sigma}\left(\frac{\partial\omega_1}{\partial y}-\frac{\partial\omega_2}{\partial x}\right) \tag{3.2.11}$$

olarak bulunur. Bu durumda $\sigma=\sigma(x,y)$ *için* η *kapalı iken* β*-Sasakian durumunun elde edilmesi için gerek ve yeter şart* $\alpha=0$ *olmasıdır.*

Eğer $\gamma(s)=(\gamma_1(s),\gamma_2(s),\gamma_3(s))$ *olduğu düşünülürse* γ *nın bir* θ*-slant eğri olması için gerek ve yeter şart*

$$\left\{\begin{array}{c}\omega_1\dot{\gamma}_1+\omega_2\dot{\gamma}_2+\dot{\gamma}_3=\cos\theta\\ \left(\omega_1^2+\sigma e^{2f}\right)(\dot{\gamma}_1)^2+\left(\omega_2^2+\sigma e^{2f}\right)(\dot{\gamma}_2)^2+(\dot{\gamma}_3)^2\\ +2\omega_1\omega_2\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_2+2\omega_1\dot{\gamma}_1\dot{\gamma}_3+2\omega_2\dot{\gamma}_2\dot{\gamma}_3=1\end{array}\right. \tag{3.2.12}$$

olmasıdır. Fakat (3.2.12) deki ikinci eşitlik

$$(\omega_1\dot{\gamma}_1+\omega_2\dot{\gamma}_2+\dot{\gamma}_3)^2+\sigma e^{2f}\left[(\dot{\gamma}_1)^2+(\dot{\gamma}_2)^2\right]=1$$

olur ve γ *nın bir* θ*-slant eğri olması için gerek ve yeter şart*

$$\left\{\begin{array}{l}\omega_1\dot{\gamma}_1+\omega_2\dot{\gamma}_2+\dot{\gamma}_3=\cos\theta\\ (\dot{\gamma}_1)^2+(\dot{\gamma}_2)^2=\frac{\sin^2\theta}{\sigma}e^{-2f}\end{array}\right. \tag{3.2.13}$$

olmasıdır. Kolayca hesaplanır ki

$$\dot{\gamma}=\sqrt{\sigma}e^{f}\left(\dot{\gamma}_1H_1+\dot{\gamma}_2H_2\right)+\cos\theta H_3$$

ve

$$\varphi(\dot{\gamma})=\sqrt{\sigma}e^{f}\left(-\dot{\gamma}_2H_1+\dot{\gamma}_1H_2\right)$$

dir [13].

Önerme 3.2.5. *γ, (M,φ,ξ,η,g) manifoldu üzerinde geodezik olmayan bir θ-slant eğri olsun. Bu durumda*

$$\gamma(s) = |\sin\theta| \left(\int_{s_0}^{s} \frac{e^{-f}}{\sqrt{\sigma}} \zeta(t)\, dt, s\frac{\cos\theta}{|\sin\theta|} - \int_{s_0}^{s} \frac{e^{-f}}{\sqrt{\sigma}} \left(\omega_1 \cos u(t) + \omega_2 \sin u(t)\right) dt \right)$$

dir. Burada $\zeta(s) = (\cos u(s), \sin u(s))$, $\mathbb{S}^1$ çemberinin keyfi bir diferansiyellenebilir parametrizasyonudur [13].

İspat. (3.2.13) deki ikinci eşitlikten bir $u = u(s)$ fonksiyonu mevcuttur öyle ki

$$\begin{cases} \dot{\gamma}_1 = \frac{|\sin\theta|}{\sqrt{\sigma}} e^{-f} \cos u(s) \\ \dot{\gamma}_2 = \frac{|\sin\theta|}{\sqrt{\sigma}} e^{-f} \sin u(s) \end{cases} \tag{3.2.14}$$

dir. (3.2.13) de ilk eşitlikte yerine yazılırsa

$$\dot{\gamma}_3 = \cos\theta - \frac{|\sin\theta|}{\sqrt{\sigma}} e^{-f} \left(\omega_1 \cos u(s) + \omega_2 \sin u(s)\right)$$

olur. □

Bu önermeyi Örnek 3.1.2 ye uygulayalım. Örnek 3.1.2 ye göre: $N = \mathbb{R}^2$, $(a,b) = \mathbb{R}_+$, $\omega_1 = f = 0$, $\omega_2 = 2x$, $\sigma = 2z$ dir ve $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+$ normaldir, fakat quasi-Sasakian değildir. (3.2.11) den

$$\alpha = \frac{1}{2z} = -\beta$$

olduğu görülür. Ayrıca $\gamma_1 = 0$ seçilirse u bir sabit fonksiyondur yani $u = \frac{\pi}{2}$ dir. $\omega_2|_\gamma = 0$ olduğundan (3.2.13) deki ilk eşitlikten $\gamma_3 = \cos\theta s$ olur ve (3.2.14) de ikinci eşitlikten $I = (0, +\infty)$ üzerinde bir non-Legendre eğrisi elde edilir:

$$\dot{\gamma}_2 = \frac{|\sin\theta|}{\sqrt{2\cos\theta}} \cdot \frac{1}{\sqrt{s}}$$

dir ve

$$\gamma_2 = |\sin\theta| \sqrt{\frac{2s}{\cos\theta}}$$

ve

$$\gamma_\pm(s) = \left(0, \pm\sin\theta\sqrt{\frac{2s}{\cos\theta}}, \cos\theta s\right)$$

θ-slant eğridir. $\{H_1, H_2, H_3\}$ çatısını kullanarak ve ∇ için Kozsul formülünden yaralanılarak

$$\delta(s) = \frac{1}{s}$$

elde edilir ve

$$\begin{cases} k = \dfrac{|\sin\theta|}{2s\cos\theta}\sqrt{1+4\cos^2\theta} \\ \tau = \dfrac{|\cos 2\theta|}{2s\cos\theta} \end{cases}$$

dir. Bu eğri

$$\frac{\tau}{k} = \frac{|\cos 2\theta|}{|\sin\theta|\sqrt{1+4\cos^2\theta}}$$

ile genelleştirilmiş bir helistir.

Aynı $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ manifoldunda $I = (0, +\infty)$ üzerinde

$$\gamma_3(s) = \left(0, \frac{s}{2}, 2\right)$$

eğrisi

$$k = \tau = \frac{1}{4}$$

ile bir Legendre helis eğrisidir. (3.2.5) in ilk eşitliğinden ve $\alpha = -\beta = \frac{1}{4}$ den $\delta = 0$ dır ve Önerme 3.2.4 kullanılarak γ_3 has ortalama eğrilik vektör alanıdır ve

$$\lambda = \frac{1}{8}$$

dir [13].

3.3 Lorentzian Sasakian Manifoldlarda Legendre Eğrileri

Teorem 3.3.1. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g, \epsilon)$, 3-boyutlu kontakt metrik manifold olsun. Bu durumda M nin Sasakian olması için gerek ve yeter şart M deki bir Legendre eğrisinin torsiyonunun ε a eşit olmasıdır [7].*

İspat. M bir 3-boyutlu kontakt metrik manifold olmak üzere M nin Sasakian olması için gerek ve yeter şart Legendre eğrilerinin torsiyonunun 1 e eşit olmasıdır. Bu $\varepsilon = 1$ durumu için geçerlidir. Lorentzian olması durumunda $\varepsilon = -1$ dir.

γ yay uzunluğu ile parametrelenmiş bir eğri olsun. Bu durumda Frenet denklemlerinde $E_1 = \dot{\gamma}$ ve E_1, E_2, E_3 çatısı çevreleyen uzayın yönlendirmesi ile ilgilidir. $\eta(\dot{\gamma}) = 0$ dır. Böylece $\dot{\gamma}$, ξ ye ortogonaldir ve $\nabla_{\dot{\gamma}}\xi = -\varphi\dot{\gamma}$ dır öyle ki $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}$, ξ ye ortogonaldir. $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \kappa\varphi\dot{\gamma}$ durumunda κ, γ nın eğriliğidir. ξ timelike ve $\{\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}\}$ bir spacelike düzlemdir. Bu durumda

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\varphi\dot{\gamma} = \varepsilon\xi + \varphi(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma})$$

elde edilir. Buradan

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\varphi\dot{\gamma} = \varepsilon\xi - \kappa\dot{\gamma}$$

olur. Bu durumda Frenet formülleri ile birlikte gözönüne alınırsa $\tau = \varepsilon$ olduğu görülür.

Tersine $h = \frac{1}{2}L_\xi\varphi$ olmak üzere Lorentzian olması durumunda

$$\nabla_X\xi = -\varphi X - \varphi hX \tag{3.3.1}$$

dir. γ yay uzunluğu ile parametrelenmiş bir Legendre eğrisi olsun. $g(\dot{\gamma}, \xi) = 0$ ifadesinin türevi alınırsa

$$g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \xi) + g(\dot{\gamma}, -\varphi h\dot{\gamma}) = 0$$

olur ve ayrıca

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = a\xi + b\varphi\dot{\gamma} = \kappa E_2$$

olarak yazılır. Burada

$$a = \varepsilon g(\dot{\gamma}, \varphi h\dot{\gamma})$$

dır. Böylece γ nın asli normali

$$E_2 = \frac{(a\xi + b\varphi\dot{\gamma})}{\kappa}$$

olur.

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\varphi\dot{\gamma} = g(\nabla_{\dot{\gamma}}\varphi\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\,\dot{\gamma} + \varepsilon g(\nabla_{\dot{\gamma}}\varphi\dot{\gamma}, \xi)\,\xi$$

kullanılarak ve (3.3.1) yardımıyla

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\varphi\dot{\gamma} = -b\dot{\gamma} + \varepsilon g(\dot{\gamma} + h\dot{\gamma}, \dot{\gamma})\,\xi \tag{3.3.2}$$

elde edilir. E_2 nin diferensiyeli alınır ve Frenet denklemleri kullanılırsa

$$\nabla_{\dot\gamma} E_2 = \left[\frac{\dot a}{\kappa} - \frac{\dot\kappa a}{\kappa^2} + \frac{\varepsilon b}{\kappa} g\left(\dot\gamma + h\dot\gamma, \dot\gamma\right)\right]\xi - \frac{b^2}{\kappa}\dot\gamma + \left[\frac{\dot b}{\kappa} - \frac{a}{\kappa} - \frac{b\dot\kappa}{\kappa^2}\right]\varphi\dot\gamma - \frac{a}{\kappa}\varphi h\dot\gamma$$
$$= -\kappa\dot\gamma + \tau E_3$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$g\left(\dot\gamma, \dot\gamma\right) = 1$$
$$2g\left(\nabla_{\dot\gamma}\xi, \xi\right) = 0$$
$$g\left(\varphi\dot\gamma - \varphi h\dot\gamma, \xi\right) = 0$$

olup

$$g\left(h\dot\gamma, \xi\right) = 0$$

dır, yani $h\dot\gamma$, ξ ya ortogonaldir.

$$h\dot\gamma = \delta\dot\gamma + \lambda\varphi\dot\gamma$$

olarak yazılır. Son eşitliğe tekrar φ uygulanırsa $\lambda = -\varepsilon a$ elde edilir. Eğer γ, h nın eigen eğrisi ise $\lambda = -a = 0$ dır. Ayrıca $E_2 = \varphi\dot\gamma$ ve bu yüzden (3.3.1) ve (3.3.2) sırasıyla

$$\nabla_{\dot\gamma}\xi = -\left(1+\delta\right)\varphi\dot\gamma$$
$$\nabla_{\dot\gamma}\varphi\dot\gamma = -b\dot\gamma + \varepsilon\left(1+\delta\right)\xi$$

olur. Böylece $E_1 = \dot\gamma$, $E_2 = \varphi\dot\gamma$ spacelike ve E_3 timelike $E_3 = \xi$ dir. Lorentzian manifoldlarda eğriler için Frenet formülleri kullanılarak $(1+\delta) = 1$ elde edilir. Ayrıca $\delta = 0$ durumunda M Sasakiandir. □

Örnek 3.3.1. $\mathbb{R}^3$ *de standart koordinatlar* $(x, y, z) = (x_1, x_2, x_3)$ *ve* $\eta = \frac{1}{2}\left(dz - ydx\right)$ 1-*formu olsun.* $\xi = 2\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ *ve* $\mathbb{R}^3$ *üzerinde* φ *endomorfizminin matrisi* $\mathbb{R}^3$ *ün standart bazına göre*

$$\begin{bmatrix} 0 & \varepsilon & 0 \\ -\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon y & 0 \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlansın. Burada $\varepsilon^2 = 1$ *dir. Bu durumda* $\eta(\xi) = 1$ *ve* $\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ *dir. Ayrıca* (ϕ, ξ, η) $\mathbb{R}^3$ *üzerinde bir hemen hemen kontakt yapıdır. Eğer g metrik tensörü*

$$g = \frac{1}{4}\left(dx^2 + dy^2\right) + \varepsilon \eta \otimes \eta$$

olarak alınırsa standart baza göre g nin matrisi

$$\frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1 + \varepsilon y^2 & 0 & -\varepsilon y \\ 0 & 1 & 0 \\ -\varepsilon y & 0 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

olarak bulunur. g metriğinin matrisini ve ϕ *endomorfizmini kullanılarak*

$$\eta(X) = \varepsilon g(X, \xi) \ \text{ ve } d\eta(X, Y) = \varepsilon g(X, \phi Y)$$

dir. Ayrıca $(\mathbb{R}^3, \phi, \xi, \eta, g, \xi)$ *bir kontakt metrik manifolddur. Konneksiyon katsayıları hesaplanırsa*

$$\Gamma_{12}^1 = -\Gamma_{23}^3 = \frac{\varepsilon}{2}y, \quad \Gamma_{23}^1 = -\Gamma_{13}^2 = -\frac{\varepsilon}{2}, \quad \Gamma_{11}^2 = -\varepsilon y, \quad \Gamma_{12}^3 = -\frac{(1 - \varepsilon y^2)}{2}$$

olur. $X = 2\left(\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right)$, $Y = 2\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)$, $\xi = 2\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$ *olmak üzere* $\{X, Y, \xi\}$ *g ye göre bir ortonormal bazdır ve ayrıca*

$$\varphi X = -\varepsilon Y, \quad \varphi Y = \varepsilon X, \quad \varphi \xi = 0$$

dır. Bu son denklemler kullanılırsa

$$\nabla_X Y = -\xi, \quad \nabla_Y X = \xi$$

$$\nabla_Y \xi = \nabla_\xi Y = -\varepsilon X, \quad \nabla_X \xi = \nabla_\xi X = \varepsilon Y$$

olarak bulunur. Şimdi

$$\bar{X} = aX + bY + c\xi$$

$$\bar{Y} = \bar{a}X + \bar{b}Y + \bar{c}\xi$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}(\nabla_{\bar{X}}\varphi)\,\bar{Y} &= \nabla_{\bar{X}}\varphi\bar{Y} - \varphi\nabla_{\bar{X}}\bar{Y} \\ &= \varepsilon\left(a\bar{a} + b\bar{b} + c\bar{c}\right)\xi - a\bar{c}X - b\bar{c}Y - c\bar{c}\xi \\ &= \varepsilon g\left(\bar{X},\bar{Y}\right)\xi - \eta\left(\bar{Y}\right)\bar{X}\end{aligned}$$

olarak bulunur ve $(\mathbb{R}^3, \varphi, \xi, \eta, g, \varepsilon)$ *bir Sasakian manifolddur [7].*

4. PARAKONTAKT MANİFOLDLARDA EĞRİLER

Bu bölümde ilk olarak hemen hemen parakontakt metrik manifoldlarda slant eğrilere yer verildi. İkinci olarak hemen hemen parakontakt metrik manifoldlarda Legendre eğrileri incelendi. Son olarak 3-boyutlu Heisenberg gruplarda Legendre eğrileri ile ilgili bazı sonuçlar verildi.

Tanım 4.0.1. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir 3-boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifold, γ da M üzerinde bir eğri olsun. Eğer*

$$g(\dot{\gamma}, \xi) = \eta(\dot{\gamma}) = c \quad (c \text{ sabit}) \tag{4.0.1}$$

ise γ ya bir slant eğri denir. Eğer (4.0.1) de $c = 0$ ise γ bir Legendre eğrisidir [11].

Uyarı 4.0.1. *g Riemann metriği ile verilen hemen hemen normal kontakt metrik manifoldda $g(\dot{\gamma}, \xi)$ nin değeri $-1 \leq g(\dot{\gamma}, \xi) \leq 1$ dir. Bu nedenle γ nın yapısal açısını tanımlayabiliriz. Yani $\theta : I \longrightarrow [0, 2\pi)$ fonksiyonu*

$$\cos\theta(t) = g(\dot{\gamma}(t), \xi) = \eta(\dot{\gamma}(t))$$

ile verilir. Eğer θ bir sabit fonksiyonsa γ bir slant eğridir [11].

$\gamma : I \longrightarrow M$, M de bir slant eğri olsun öyle ki $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \varepsilon_1 = \pm 1$ dir. $\{\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}, \xi\}$ vektör alanları için

$$g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \varepsilon_1, \; g(\dot{\gamma}, \xi) = c, \; g(\varphi\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}) = -\varepsilon_1 + c^2, \; g(\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}) = g(\xi, \varphi\dot{\gamma}) = 0, \; g(\xi, \xi) = 1$$

dir.

$\{\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}, \xi\}$ lineer bağımsız bir küme ve TM nin bir bazı olması için gerek ve yeter şart $\varepsilon_1 - c^2 \neq 0$ olmasıdır. Bu durumda Gram-Schmidt ortogonalleştirme yöntemi kullanılarak

$$F_1 = \dot{\gamma}, \quad F_2 = \frac{\varphi\dot{\gamma}}{\sqrt{|\varepsilon_1 - c^2|}}, \quad F_3 = \frac{\xi - \varepsilon_1 c\dot{\gamma}}{\sqrt{|\varepsilon_1 - c^2|}} \tag{4.0.2}$$

ortonormal baz sistemi elde edilir.

Burada $g(F_1, F_1) = \varepsilon_1$, $g(F_2, F_2) = sgn(-(\varepsilon_1 - c^2)) = v$, $g(F_3, F_3) = -\varepsilon_1 v$ dir [11].

Önerme 4.0.1. *M bir 3−boyutlu normal hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. Eğer $\gamma : I \longrightarrow M$, ξ nin integral eğrisi olmayan üçüncü dereceden oskülatör bir slant Frenet eğrisi ise,*

$$\nabla_{\dot{\gamma}} F_i = a_{i1}F_1 + a_{i2}F_2 + a_{i3}F_3$$

şeklinde yazabiliriz. Burada a_{ij} katsayılarını hesaplarsak

$$\nabla_{\dot{\gamma}} F_1 = v\delta\sqrt{|\varepsilon_1 - c^2|}F_2 - \varepsilon_1\alpha\sqrt{|\varepsilon_1 - c^2|}F_3, \tag{4.0.3}$$

$$\nabla_{\dot{\gamma}} F_2 = -\varepsilon_1\delta\sqrt{|\varepsilon_1 - c^2|}F_1 + (\varepsilon_1\beta - vc\delta)F_3, \tag{4.0.4}$$

$$\nabla_{\dot{\gamma}} F_3 = -\varepsilon_1 v\alpha\sqrt{|\varepsilon_1 - c^2|}F_1 + (\beta - \varepsilon_1 vc\delta)F_2, \tag{4.0.5}$$

olarak bulunur. Burada δ fonksiyonu $\delta = \dfrac{g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma})}{|\varepsilon_1 - c^2|}$ şeklinde tanımlıdır [11].

$\{\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}, \xi\}$ nin lineer bağımlı olma durumunu inceleyelim. $\{\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}, \xi\}$ nin lineer bağımlı olması için gerek ve yeter şart

$$\dot{\gamma} = c\xi \quad \text{ya da} \quad \dot{\gamma} = c\xi \pm \varphi\dot{\gamma} \tag{4.0.6}$$

olmasıdır. Gerçekten $\{\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}, \xi\}$ lineer bağımlı ise $\varepsilon_1 = 1$ ve $c^2 = 1$ dir. Böylece $g(\varphi\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}) = 0$ veya $\varphi\dot{\gamma} = 0$ ya da $\varphi\dot{\gamma}$ null vektör alanıdır.

Eğer $\varphi\dot{\gamma} = 0$ ise $0 = \varphi^2\dot{\gamma} = \dot{\gamma} - c\xi$ ve $\dot{\gamma} = c\xi$ dır.

Eğer $\varphi\dot{\gamma}$ null vektör alanı ise a ve b fonksiyonları için $\dot{\gamma} = a\xi + b\varphi\dot{\gamma}$ şeklinde yazılabilir. $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$ ve $g(\dot{\gamma}, \xi) = c$ kullanılarak $\dot{\gamma} = c\xi + b\varphi\dot{\gamma}$ elde edilir. Buradan

$$\varphi\dot{\gamma} = b\varphi^2\dot{\gamma} = b(\dot{\gamma} - c\xi) = b(c\xi + b\varphi\dot{\gamma} - c\xi) = b^2\varphi\dot{\gamma}$$

elde edilir, böylece $b^2 = 1$ olur ve $\dot{\gamma} = c\xi \pm \varphi\dot{\gamma}$ olarak yazılır [11].

4.1 Slant Frenet Eğriler

M, g metriği ile bir $3-$boyutlu pseudo-Riemann manifold olsun.

$\gamma : I \longrightarrow M$, I, $\mathbb{R}$ de bir aralık olmak üzere M de bir eğri olsun.

Eğer $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \varepsilon_1, \varepsilon_1 = \pm 1$, olmak üzere aşağıdaki üç durumdan biri sağlanıyor ise γ ya bir Frenet eğrisi denir:

(a) γ birinci dereceden oskülatördür yani $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = 0$ (geodezik) dir.

(b) γ ikinci dereceden oskülatördür yani $E_1 (= \dot{\gamma})$, E_2, $(g(E_2, E_2) = \varepsilon_2 = \pm 1)$ olmak üzere iki vektör alanı ve γ boyunca pozitif bir κ fonksiyonu (eğrilik) mevcuttur öyle ki

$$\nabla_{\dot{\gamma}} E_1 = \kappa \varepsilon_2 E_2, \quad \nabla_{\dot{\gamma}} E_2 = -\kappa \varepsilon_1 E_1$$

dir.

(c) γ üçüncü dereceden oskülatördür yani $E_1 (= \dot{\gamma})$, E_2, E_3, $(g(E_2, E_2) = \varepsilon_2 = \pm 1$,
$g(E_3, E_3) = \varepsilon_3 = \pm 1)$ olmak üzere üç vektör alanı ve γ boyunca iki pozitif κ (eğrilik) ve τ (torsiyon) fonksiyonları mevcuttur öyle ki

$$\nabla_{\dot{\gamma}} E_1 = \kappa \varepsilon_2 E_2, \quad \nabla_{\dot{\gamma}} E_2 = -\kappa \varepsilon_1 E_1 + \tau \varepsilon_3 E_3, \quad \nabla_{\dot{\gamma}} E_3 = -\tau \varepsilon_2 E_2$$

dir [11].

Önerme 4.1.1. *M bir $3-$boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifold olsun. Eğer $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 1$ ve $g(\dot{\gamma}, \xi) = c = \pm 1$ olmak üzere $\gamma : I \longrightarrow M$ bir slant Frenet eğri ise γ bir geodeziktir [11].*

İspat. (4.0.6) deki iki durumu düşünelim.

Eğer $\dot{\gamma} = c\xi$ ise (2.8.7) yardımıyla $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \nabla_{\xi}\xi = 0$ ve γ bir geodeziktir.

Eğer $\dot{\gamma} = c\xi \pm \varphi\dot{\gamma}$ ise (2.8.7) ve (2.8.6) kullanılarak

$$\begin{aligned}\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} &= c\nabla_{\dot{\gamma}}\xi \pm \nabla_{\dot{\gamma}}\varphi\dot{\gamma} = c\nabla_{\dot{\gamma}}\xi \pm (\nabla_{\dot{\gamma}}\varphi)\dot{\gamma} \pm \varphi\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} \\ &= (\alpha \mp \beta)(c\dot{\gamma} - \xi \mp c\varphi\dot{\gamma}) \pm \varphi\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = \pm\varphi\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan $g\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right) = \pm g\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \varphi\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right) = 0$ olur ve böylece γ bir geodeziktir. $\square$

Teorem 4.1.1. *M bir $3-$boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifold olsun. Eğer $\gamma : I \longrightarrow M$, M de üçüncü dereceden bir slant Frenet eğri ise eğrilik ve torsiyonu sırasıyla,*

$$\kappa = \sqrt{\left|\varepsilon_1 - c^2\right| \left|\alpha^2 - \varepsilon_1\delta^2\right|}, \tag{4.1.1}$$

ve

$$\tau = \left| sgn\left(1 - \varepsilon_1 c^2\right)\beta + c\delta + \frac{\alpha\dot{\delta} - \dot{\alpha}\delta}{\alpha^2 - \varepsilon_1\delta^2} \right| \tag{4.1.2}$$

dir, burada $\delta = \dfrac{g\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}\right)}{\left|\varepsilon_1 - c^2\right|}$ ile tanımlıdır [11].

İspat. γ, M de üçüncü dereceden bir slant Frenet eğri olsun. Önerme 4.1.1 den böyle bir eğri için $\varepsilon_1 - c^2 \neq 0$ dır. γ eğrisi boyunca eğrilik ve torsiyonu hesaplamak için (4.0.2) den (F_1, F_2, F_3) çatısını kullanalım. (4.0.3) den

$$\kappa^2\varepsilon_2 = -\varepsilon_1 v\left|\varepsilon_1 - c^2\right|\left(\alpha^2 - \varepsilon_1\delta^2\right),$$

elde edilir, burada $\varepsilon_2 = sgn\left(-\varepsilon_1 v\left(\alpha^2 - \varepsilon_1\delta^2\right)\right) = \pm 1$ dir. Bu ise (4.1.1) ile verilen ifadedir. (4.0.3), (4.0.4) ve (4.0.5) kullanılarak

$$E_2 = \frac{1}{\varepsilon_2\kappa}\nabla_{\dot{\gamma}}E_1 = \frac{\varepsilon_2\left(v\delta F_2 - \varepsilon_1\alpha F_3\right)}{\sqrt{\left|\alpha^2 - \varepsilon_1\delta^2\right|}}$$

olarak yazılır.

$p = \sqrt{\left|\alpha^2 - \varepsilon_1\delta^2\right|}$ olarak alınırsa

$$\begin{aligned}
\nabla_{\dot{\gamma}}E_2 &= \varepsilon_2 v\dot{\gamma}\left(\frac{\delta}{p}\right)F_2 + \varepsilon_2 v\left(\frac{\delta}{p}\right)\nabla_{\dot{\gamma}}F_2 \\
&\quad - \varepsilon_1\varepsilon_2\dot{\gamma}\left(\frac{\alpha}{p}\right)F_3 - \varepsilon_1\varepsilon_2\left(\frac{\alpha}{p}\right)\nabla_{\dot{\gamma}}F_3 \\
&= -\varepsilon_1\kappa E_1 + \left(\varepsilon_2 v\dot{\gamma}\left(\frac{\delta}{p}\right) - \varepsilon_2\frac{\alpha v}{p}\left(\varepsilon_1 v\beta - c\delta\right)\right)F_2 \\
&\quad + \left(-\varepsilon_1\varepsilon_2\dot{\gamma}\left(\frac{\alpha}{p}\right) + \varepsilon_2\frac{\delta}{p}\left(\varepsilon_1 v\beta - c\delta\right)\right)F_3 \\
&= -\varepsilon_1\kappa E_1 + \varepsilon_2\left(-\varepsilon_1 v\beta + c\delta + \frac{\alpha\dot{\delta} - \dot{\alpha}\delta}{\alpha^2 - \varepsilon_1\delta^2}\right)\frac{v\alpha F_2 - \delta F_3}{\sqrt{\left|\alpha^2 - \varepsilon_1\delta^2\right|}}
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

elde edilir. Frenet eşitliklerinden ve ayrıca (4.1.3) kullanılarak

$$\begin{aligned}\varepsilon_3\tau^2 &= vsgn\left(\alpha^2-\varepsilon_1\delta^2\right)\left(-\varepsilon_1 v\beta + c\delta + \frac{\alpha\dot{\delta}-\dot{\alpha}\delta}{\alpha^2-\varepsilon_1\delta^2}\right)^2 \\ &= -\varepsilon_1\varepsilon_2\left(sgn\left(1-\varepsilon_1 c^2\right)\beta + c\delta + \frac{\alpha\dot{\delta}-\dot{\alpha}\delta}{\alpha^2-\varepsilon_1\delta^2}\right)^2\end{aligned}$$

elde edilir, burada $\varepsilon_3 = -\varepsilon_1\varepsilon_2$ dir. Buradan ise (4.1.2) elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.1.1. *M bir $3-$boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifold, $\gamma : I \longrightarrow M$ M de üçüncü dereceden oskülatör slant Frenet eğri olsun.*

i) *Eğer M bir parakosimplektik manifold ise γ nın eğrilik ve torsiyonu sırasıyla,*

$$\kappa = \sqrt{\left|\varepsilon_1 - c^2\right|}\,|\delta|, \quad \tau = |c\delta|$$

dır.

ii) *Eğer M bir quasi-para-Sasakian manifold ise γ nın eğrilik ve torsiyonu*

$$\kappa = \sqrt{\left|\varepsilon_1 - c^2\right|}\,|\delta|, \quad \tau = \left|sgn\left(1-\varepsilon_1 c^2\right)\beta + c\delta\right|$$

dır.

iii) *Eğer M bir para-Sasakian manifold ise γ nın eğrilik ve torsiyonu*

$$\kappa = \sqrt{\left|\varepsilon_1 - c^2\right|}\,|\delta|, \quad \tau = \left|sgn\left(1-\varepsilon_1 c^2\right) + c\delta\right|$$

dır.

ıv) *Eğer M bir $\alpha-$Kenmotsu manifold ise γ nın eğrilik ve torsiyonu*

$$\kappa = \sqrt{\left|\varepsilon_1 - c^2\right|\left|\alpha^2-\varepsilon_1\delta^2\right|}, \quad \tau = \left|c\delta + \frac{\alpha\dot{\delta}}{\alpha^2-\varepsilon_1\delta^2}\right|$$

ile verilir. Burada $\delta = \dfrac{g\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}\right)}{\left|\varepsilon_1 - c^2\right|}$ şeklinde tanımlı bir fonksiyondur [11].

4.2 Null Slant Eğriler

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, $3-$boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifold olsun. Eğer M üzerinde bir γ eğrisinin teğet vektör alanı null ise γ ya M üzerinde null eğri denir. Bu durumda γ bir null eğri ise $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0$ dır. γ geodezik olmayan bir null eğri olsun. Bu durumda $g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) \neq 0$ dır. Böylece $g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) = 1$ alabiliriz. Buna göre γ nın Cartan çatısı

$$T = \dot{\gamma}, \quad N = \nabla_{\dot{\gamma}}T, \quad W = -\nabla_{\dot{\gamma}}N - \tau T, \tag{4.2.1}$$

olarak ifade edilir. Burada

$$\tau = \frac{1}{2} g(\nabla_{\dot{\gamma}}N, \nabla_{\dot{\gamma}}N)$$

dir ve

$$g(T, W) = g(N, N) = 1 \text{ ve } g(T, T) = g(T, N) = g(W, W) = g(W, N) = 0$$

dir. γ null eğrisi için Cartan denklemleri

$$\nabla_{\dot{\gamma}}T = N, \quad \nabla_{\dot{\gamma}}W = \tau N, \quad \nabla_{\dot{\gamma}}N = -\tau T - W$$

ile verilir [11].

Teorem 4.2.1. *Eğer $\gamma : I \longrightarrow M$, $3-$boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifoldda geodezik olmayan bir null slant eğri ise*

$$\tau = -\frac{\alpha^2 c^2}{2} - \dot{\alpha} c \pm \beta - \frac{1}{2c^2} \tag{4.2.2}$$

$$N = \alpha c \dot{\gamma} \pm \frac{1}{c} \varphi \dot{\gamma} \tag{4.2.3}$$

$$W = \frac{-\alpha^2 c^2 - 1}{2c} \dot{\gamma} \mp \alpha \varphi \dot{\gamma} + \frac{1}{c^2} \xi \tag{4.2.4}$$

dir [11].

İspat. Öncelikle N vektör alanını bulalım. p, q, τ fonksiyonları için $\varphi\dot{\gamma} = p\dot{\gamma} + qN + \tau W$ olarak yazılabilir. Buna göre

$$\tau = g(\varphi\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = 0, \quad g(\varphi\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}) = c^2 = q^2, \quad g(\varphi\dot{\gamma}, \xi) = pc + q\alpha c^2 = c\left(p \pm \alpha c^2\right) = 0,$$

olarak elde edilir ve buradan $\tau = 0$, $q = \pm c$, $p = \mp\alpha c^2$ ve $\varphi\dot{\gamma} = \mp\alpha c^2\dot{\gamma} \pm cN$ olur. Böylece $N = \alpha c\dot{\gamma} \pm \frac{1}{c}\varphi\dot{\gamma}$ bulunur. (2.8.6) ve (4.2.3) kullanılarak

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} N &= \dot{\alpha} c\dot{\gamma} + \alpha c \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} \pm \frac{1}{c}\left(\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\varphi\right)\dot{\gamma} + \varphi\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right) \\ &= \left(\dot{\alpha} c\alpha + \alpha^2 c^2 \mp \beta + \frac{1}{c}\right)\dot{\gamma} \pm \alpha\varphi\dot{\gamma} - \frac{1}{c}\xi \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

elde edilir. (4.2.1) deki τ ve W tanımından dolayı (4.2.5) kullanılarak (4.2.2) ve (4.2.4) bulunur. □

Sonuç 4.2.1. *M bir 3−boyutlu manifold olsun. $\gamma : I \longrightarrow M$, M de geodezik olmayan bir null slant eğri olsun. Bu durumda*

i) *M bir para-kosimplektik manifold ise γ null eğrisi için*

$$\tau = -\frac{1}{2c^2}, \quad N = \pm\frac{1}{c}\varphi\dot{\gamma}, \quad W = \frac{1}{c^2}\xi,$$

ii) *M bir quasi-para-Sasakian manifold ise γ için*

$$\tau = \pm\beta - \frac{1}{2c^2}, \quad N = \pm\frac{1}{c}\varphi\dot{\gamma}, \quad W = \frac{1}{c^2}\xi,$$

iii) *M bir para-Sasakian manifold ise γ için*

$$\tau = \pm 1 - \frac{1}{2c^2}, \quad N = \pm\frac{1}{c}\varphi\dot{\gamma}, \quad W = \frac{1}{c^2}\xi,$$

ıv) *M bir α-Kenmotsu manifold ise γ için*

$$\tau = -\frac{\alpha^2 c^2}{2} - \frac{1}{2c^2}, \quad N = \alpha c\dot{\gamma} \pm \frac{1}{c}\varphi\dot{\gamma}, \quad W = \frac{-\alpha^2 c^2 - 1}{2c}\dot{\gamma} \mp \alpha\varphi\dot{\gamma} + \frac{1}{c^2}\xi,$$

dir [11].

4.3 Null Normal Slant Eğriler

$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ bir hemen hemen parakontakt metrik manifold ve $\gamma : I \longrightarrow M$ ye bir eğri olsun. Eğer

$$g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \varepsilon_1 = \pm 1, \quad \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} \neq 0, \quad g\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right) = 0$$

ise γ ya bir null normal eğri denir.

Böyle bir eğri için Frenet vektörleri

$$T = \dot{\gamma}, \quad N = \nabla_{\dot{\gamma}} T, \quad W,$$

şeklinde tanımlanır. Burada W vektör alanı

$$g(T,T) = \varepsilon_1, \quad g(N,W) = 1, \tag{4.3.1}$$
$$g(N,N) = g(W,W) = g(T,N) = g(T,W) = 0$$

şartlarını sağlayacak şekilde γ boyunca bir vektör alanıdır, burada $\varepsilon_1 = \pm 1$ dir. γ null normal eğrisi için Cartan denklemleri

$$\nabla_{\dot{\gamma}} T = N, \quad \nabla_{\dot{\gamma}} N = \kappa N, \quad \nabla_{\dot{\gamma}} W = -T - \kappa W$$

şeklinde elde edilir [11].

Teorem 4.3.1. *Eğer $\gamma : I \longrightarrow M$, 3−boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifoldda geodezik olmayan null normal bir slant eğri ise $c^2 \neq 1$ olmak üzere $\alpha = \pm \dfrac{g(N, \varphi\dot{\gamma})}{1-c^2} \neq 0$ ve*

$$N = -\alpha\left(\xi - c\dot{\gamma} \pm \varphi\dot{\gamma}\right), \tag{4.3.2}$$

$$\kappa = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \pm \beta + \alpha c, \tag{4.3.3}$$

$$W = \frac{-1}{2\alpha\left(1-c^2\right)}\left(\xi - c\dot{\gamma} \mp \varphi\dot{\gamma}\right) \tag{4.3.4}$$

dir [11].

İspat. $c^2 \neq 1$ olmak üzere bir null normal slant eğri için (4.0.2) deki γ boyunca bir ortonormal çatı kullanılabilir. Eğer

$$N = \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = aF_2 + bF_3, \tag{4.3.5}$$

denilirse, $g(N,N) = a^2 - b^2 = 0$ elde edilir, burada a, b diferansiyellenebilir fonksiyonlardır ve buradan $a = \pm b$ elde edilir. (2.8.7) kullanılarak

$$\begin{aligned} b = g(N, F_3) &= -\frac{1}{\sqrt{|1-c^2|}} g\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\xi, \dot{\gamma}\right) \\ &= -\alpha\sqrt{|1-c^2|}. \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Ayrıca $\alpha \neq 0$ ve (4.3.6) deki a, b değerleri , (4.3.5) de yerine yazılırsa (4.3.2) elde edilir.

(2.8.7), (4.3.5), (2.8.6) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\nabla_{\dot{\gamma}} N &= -\dot{\alpha}\left(\xi - c\dot{\gamma} \pm \varphi\dot{\gamma}\right) \\
&\quad - \alpha\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\xi - c\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} \pm \left(\nabla_{\dot{\gamma}}\varphi\right)\dot{\gamma} \pm \varphi\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right) \\
&= \left(-\dot{\alpha} \pm \alpha\beta - a^2 c\right)\left(\xi - c\dot{\gamma} \pm \varphi\dot{\gamma}\right) \\
&= \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \pm \beta + \alpha c\right) N
\end{aligned}
$$

olarak elde edilir. Buradan ise $\kappa = \frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \pm \beta + \alpha c$ olduğu kolayca görülür.

Sonuçta d, e, f fonksiyonları için $W = dF_1 + eF_2 + fF_3$ kullanılarak ve (4.3.1) den (4.3.4) bulunur. □

Teorem 4.3.1 den aşağıdaki teoreme sahip oluruz.

Teorem 4.3.2. $\gamma : I \longrightarrow M$, *3−boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik M manifoldunda null normal bir Legendre eğrisi olsun. Bu durumda* $\alpha = \pm g\left(N, \varphi\dot{\gamma}\right)$, $\alpha \neq 0$ *ve*

$$
T = \dot{\gamma}, \quad N = -\alpha\left(\xi \pm \varphi\dot{\gamma}\right), \quad W = \frac{-1}{2\alpha}\left(\xi \mp \varphi\dot{\gamma}\right) \quad \text{ve} \quad \kappa = \left(\frac{\dot{\alpha}}{\alpha} \pm \beta\right)
$$

dır [11].

İspat. γ, Legendre eğrisi ise $c = 0$ dır. (4.3.2), (4.3.3) ve (4.3.4) de $c = 0$ alınmasıyla ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.3.1. $\gamma : I \longrightarrow M$, *3−boyutlu α-Kenmotsu M manifoldunda $c^2 \neq 1$ olmak üzere bir null normal slant eğri olsun. Bu durumda* $\alpha = \pm g\left(N, \varphi\dot{\gamma}\right) \in \mathbb{R}$ *dır ve*

$$
\kappa = \alpha c, \quad N = -\alpha\left(\xi - c\dot{\gamma} \pm \varphi\dot{\gamma}\right), \quad W = \frac{-1}{2\alpha\left(1 - c^2\right)}\left(\xi - c\dot{\gamma} \pm \varphi\dot{\gamma}\right)
$$

olur. Eğer γ bir Legendre eğrisi ise

$$
\kappa = 0, \quad N = -\alpha\left(\xi \pm \varphi\dot{\gamma}\right), \quad W = \frac{-1}{2\alpha}\left(\xi \mp \varphi\dot{\gamma}\right)
$$

dır [11].

İspat. M, α-Kenmotsu manifoldu ise $\alpha \neq 0$ ve $\beta = 0$ dır. (4.3.2), (4.3.3) ve (4.3.4) den ispat açıkça görülür. □

Örnek 4.3.1. $\mathbb{R}^3$ *Kartezyen uzay ve* (x, y, z) *bu uzayda kartezyen koordinatlar olsun.* $\mathbb{R}^3$ *üzerinde* (φ, ξ, η) *standart hemen hemen parakontakt yapısı*

$$\varphi\partial_1 = \partial_2 - 2x\partial_3, \quad \varphi\partial_2 = \partial_1, \quad \varphi\partial_3 = 0, \quad \xi = \partial_3, \quad \eta = 2xdy + dz \qquad (4.3.7)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ *ve* $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$ *dir.*

$$[\varphi, \varphi](\partial_i, \partial_j) - 2d\eta(\partial_i, \partial_j)\xi = 0, \quad 1 \leq i < j \leq 3,$$

olduğu görülür.

Kabul edelim ki $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^3$ *olsun ve* M *üzerinde tanımlanan bir hemen hemen normal parakontakt metrik yapısı olduğu düşünülürse* (φ, ξ, η), *(4.3.7) yapısının* M *ye kısıtlanmışıdır ve* g

$$[g(\partial_i, \partial_j)] = \begin{bmatrix} -2z & 0 & 0 \\ 0 & 4x^2 + 2z & 2x \\ 0 & 2x & 1 \end{bmatrix}$$

ile Lorentzian metriktir.

g *nin Levi-Civita konneksiyonu* ∇ *olmak üzere*

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = -\frac{x}{z}\partial_2 + \left(1 + \frac{2x^2}{z}\right)\partial_3, \quad \nabla_{\partial_1}\partial_2 = \nabla_{\partial_2}\partial_1 = \frac{x}{z}\partial_2 + \left(1 - \frac{2x^2}{z}\right)\partial_3,$$

$$\nabla_{\partial_1}\partial_3 = \nabla_{\partial_3}\partial_1 = \nabla_{\partial_2}\partial_3 = \nabla_{\partial_3}\partial_2 = \frac{1}{2z}\partial_1 + \frac{1}{2z}\partial_2 - \frac{x}{z}\partial_3,$$

$$\nabla_{\partial_2}\partial_2 = \frac{2x}{z}\partial_1 + \frac{x}{z}\partial_2 - \left(1 + \frac{2x^2}{z}\right)\partial_3, \quad \nabla_{\partial_3}\partial_3 = 0$$

elde edilir. Son eşitlikler ve (2.8.7) kullanılarak $\alpha = \beta = (2z)^{-1}$ *bulunur.*

(a) M *üzerinde*

$$\gamma(t) = \left(0, -2\sqrt{-t}, t\right), \quad t < 0$$

eğrisini gözönüne alalım. γ *nın teğet vektörü* $\dot{\gamma} = T = \left(0, \frac{1}{\sqrt{-t}}, 1\right)$ *dır. Buna göre*

$$g(T,T) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{-t}} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2z & 0 & 0 \\ 0 & 4x^2+2z & 2x \\ 0 & 2x & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{-t}} \\ 1 \end{bmatrix}$$
$$= -1$$

dir ve T *bir timelike eğridir. Buradan* $\eta(\dot{\gamma}) = 1 = c$ *ile* γ *nın bir slant eğri olduğu elde edilir. Ayrıca* $\alpha(\gamma(t)) = \beta(\gamma(t)) = \frac{1}{2t}$,

$$\delta(t) = \frac{1}{t}, \quad \kappa = -\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}t}, \quad \tau = -\frac{3}{2t}$$

olarak bulunur.

(b) M *üzerinde*

$$\gamma(t) = \left(\frac{1}{4}, t, \frac{3}{8}\right),$$

eğrisini gözönüne alalım. γ *nın teğet vektörü bir null normal slant eğridir ve* $\varepsilon_1 = 1$ *dir.*

γ *eğrisi için*

$$c = \eta(\dot{\gamma}) = \frac{1}{2}$$

ve

$$\alpha(\gamma(t)) = \frac{4}{3}, \quad \beta(\gamma(t)) = \frac{4}{3}$$

olur. Ayrıca

$$T = (0,1,0), \quad N = \left(\frac{4}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{3}\right)$$
$$W = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -\frac{1}{2}\right), \quad \kappa = -\frac{2}{3}$$

olarak elde edilir.

(c) M *üzerinde*

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{t}, -a\sqrt{t}, at\right), \quad t > 0, \quad a = \sqrt[3]{1-b} + \sqrt[3]{1+b}, \quad b = \sqrt{\frac{26}{27}}$$

eğrisini gözönüne alalım. Bir null normal Legendre eğrisidir ve $\varepsilon_1 = 1$ dir. Bu eğri için

$$\alpha(\gamma(t)) = (2at)^{-1}, \quad \beta(\gamma(t)) = (2at)^{-1}$$

$$\alpha(\gamma(t)) = g(N, \varphi\dot{\gamma}) = \frac{1}{(2at)}$$

ve

$$T = \left(\left(2\sqrt{t}\right)^{-1}, -a\left(2\sqrt{t}\right)^{-1}, a\right)$$

$$N = \left(\frac{1}{4}t^{-\frac{3}{2}}, -\frac{1}{4a}t^{-\frac{3}{2}}, 0\right)$$

$$W = \left(-2a^2\sqrt{t}, 2a\sqrt{t}, -8at\right)$$

$$\kappa = \frac{1-2a}{2at}$$

olarak bulunur [11].

4.4 3-Boyutlu Hemen Hemen Normal Parakontakt Metrik Manifoldlarda Legendre Eğrileri

Teorem 4.4.1. $(M, \varphi, \xi, \eta, g)$ *bir 3-boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifold olsun. Eğer bir* $\gamma : I \longrightarrow M$ *Frenet Legendre eğrisi geodezik değilse eğrilik ve torsiyonu*

$$\kappa = \sqrt{|\alpha^2 - \varepsilon_1\delta^2|} \tag{4.4.1}$$

$$\tau = \left|\beta + \frac{\alpha\dot{\delta} - \dot{\alpha}\delta}{\alpha^2 - \varepsilon_1\delta^2}\right| \tag{4.4.2}$$

ile verilir, burada δ *fonksiyonu* $\delta = g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma})$ *ile tanımlıdır [10].*

İspat. γ 3-boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifold üzerinde bir Frenet Legendre eğrisi olsun. γ boyunca $\{\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}, \xi\}$ ortonormal vektör alanlarıdır. γ boyunca $g(\dot{\gamma}, \xi)$ nin türevi alınıp ve (2.8.7) kullanılarak

$$g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \xi) = -\varepsilon_1\alpha$$

olduğu görülür. Ayrıca $\delta = g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma})$ olsun. Buradan

$$\nabla_{\dot{\gamma}}E_1 = \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = -\varepsilon_1\alpha\xi - \varepsilon_1\delta\varphi\dot{\gamma} \tag{4.4.3}$$

elde edilir. Böylece

$$\varepsilon_2 \kappa^2 = g\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\right) = \alpha^2 - \varepsilon_1 \delta^2 \tag{4.4.4}$$

olur öyle ki bu (4.4.1) de verilen eğriliktir, $\varepsilon_2 = sgn\left(\alpha^2 - \varepsilon_1\delta^2\right) = \pm 1$ ve

$$E_2 = \frac{1}{\varepsilon_2 \kappa} \nabla_{\dot{\gamma}} E_1 = -\frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha}{\kappa} \xi - \frac{\varepsilon_1 \varepsilon_2 \delta}{\kappa} \varphi \dot{\gamma}$$

dir. γ boyunca E_2 nin türevi alınırsa ve (2.8.6), (2.8.7) ile (4.4.3) uygulanarak

$$\begin{aligned} \nabla_{\dot{\gamma}} E_2 &= -\varepsilon_1 \varepsilon_2 \dot{\gamma}\left(\frac{\alpha}{\kappa}\right) \xi - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\alpha}{\kappa} \nabla_{\dot{\gamma}} \xi \\ &\quad - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \dot{\gamma}\left(\frac{\delta}{\kappa}\right) \varphi \dot{\gamma} - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \frac{\delta}{\kappa}\left(\left(\nabla_{\dot{\gamma}} \varphi\right) \dot{\gamma} + \varphi \nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma}\right) \\ &= -\varepsilon_1 \kappa \dot{\gamma} - \varepsilon_1 \varepsilon_2 \alpha \xi - \varepsilon_1 \varepsilon_2 b \varphi \dot{\gamma} \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

elde edilir. Burada

$$a = \frac{\varepsilon_1 \delta \beta}{\kappa} + \frac{\dot{\alpha}\kappa - \alpha\dot{\kappa}}{\kappa^2}, \quad b = \frac{\alpha\beta}{\kappa} + \frac{\dot{\delta}\kappa - \delta\dot{\kappa}}{\kappa^2}$$

dir. (4.4.4) yardımı ile

$$c = \beta + \varepsilon_2 \frac{\alpha\dot{\delta} - \dot{\alpha}\delta}{\kappa^2}$$

olmak üzere

$$a = \frac{\varepsilon_1 \delta c}{\kappa}, \quad b = \frac{\alpha c}{\kappa}$$

şeklinde yazılabilir. $\varepsilon_3 = -\varepsilon_1\varepsilon_2$ dir. (4.4.4) kullanılarak

$$a^2 - \varepsilon_1 b^2 = -\varepsilon_1 \varepsilon_2 c^2 = \varepsilon_3 c^2$$

olduğu görülür. Diğer taraftan (4.4.5) eşitliğinden

$$\varepsilon_3 \tau E_3 = \nabla_{\dot{\gamma}} E_2 + \varepsilon_1 \kappa E_1 = \varepsilon_3 \left(a\xi + b\varphi\dot{\gamma}\right)$$

olur. Böylece

$$\varepsilon_3 \tau^2 = a^2 - \varepsilon_1 b^2 = \varepsilon_3 c^2$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Teorem 4.4.2. *$(M, \varphi, \xi, \eta, g)$, 3-boyutlu quasi-para-Sasakian manifold olsun. Eğer $\gamma : I \longrightarrow M$ geodezik olmayan bir Frenet Legendre eğrisi ise torsiyonu $\tau = |\beta|$ olmak üzere M nin β yapı fonksiyonu ile ilgilidir [10].*

4.4.1 Non-Frenet Legendre Eğrileri

Bir γ Legendre eğrisinin null eğri olması durumunda $g(\dot{\gamma},\dot{\gamma})=0$ dir [10].

Teorem 4.4.3. *(M,φ,ξ,η,g) bir 3-boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifold olsun. Eğer $\gamma : I \longrightarrow M$ null bir Legendre eğrisi ise ϑ bir fonksiyon olmak üzere $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=\vartheta\dot{\gamma}$ dır ve sonuçta yeniden bir parametrizasyondan sonra γ bir geodeziktir [10].*

İspat. γ bir 3-boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifoldda bir null Legendre eğrisi olsun. γ boyunca vektör alanları $\{\dot{\gamma},V,W\}$ olarak seçilsin öyle ki

$$g(\dot{\gamma},\dot{\gamma})=g(V,V)=0 \tag{4.4.6}$$
$$g(W,W)=g(\dot{\gamma},V), \quad g(\dot{\gamma},W)=g(V,W)=0$$

dir. (4.4.6) dan c ve d fonksiyonları için

$$\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=c\dot{\gamma}+dW \tag{4.4.7}$$

yazılabilir. γ boyunca $g(\xi,\dot{\gamma})=0$ ifadesinin türevi alınırsa ve (2.8.7) ve (4.4.7) kullanılarak $dg(W,\xi)=0$ elde edilir. Kabul edelim ki $d\neq 0$ olsun. Buradan $g(W,\xi)=0$ dır. Böylece (4.4.6) ile a ve b fonksiyonları için eğri boyunca $\xi=a\dot{\gamma}+bV$ elde edilir. Ayrıca yine (4.4.6) kullanılarak

$$1=g(\xi,\xi)=2ab, \quad 0=\eta(\dot{\gamma})=g(\xi,\dot{\gamma})=b$$

elde edilir ki bu bir çelişkidir. Böylece $d=0$ dır. $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}=c\dot{\gamma}$ olur ve ispat tamamlanır. □

Eğer

$$g(\dot{\gamma},\dot{\gamma})=\varepsilon_1=\pm 1, \quad \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}\neq 0, \quad g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma},\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma})=0 \tag{4.4.8}$$

ise $\gamma : I \longrightarrow M$ bir null normal eğridir.

Teorem 4.4.4. *M bir 3-boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifold olsun. $\gamma : I \longrightarrow M$ bir null normal eğri olması için gerek ve yeter şart $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \varepsilon_1 = 1$ ve $\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = -\alpha(\xi \pm \varphi\dot{\gamma})$ olmasıdır. Burada α fonksiyonu (4.4.9) eşitliği ile tanımlıdır ve γ boyunca sıfırdan farklıdır [10].*

İspat. γ bir 3-boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifold olsun. Teorem 4.4.1 in ispatından

$$\nabla_{\dot{\gamma}}E_1 = \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = -\varepsilon_1\alpha\xi - \varepsilon_1\delta\varphi\dot{\gamma}$$

yazılabilir. Burada $\delta = g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma})$ dır. Ayrıca

$$g(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}) = \alpha^2 - \varepsilon_1\delta^2$$

dir. (4.4.8) den γ nın null normal olması için gerek ve yeter şart $\varepsilon_1 = 1$ ve $\alpha = \pm\delta \neq 0$ olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 4.4.1. *Bir 3-boyutlu quasi-para-Sasakian manifoldda null normal Legendre eğrisi yoktur [10].*

Son olarak null binormal eğrileri düşünelim. Eğer $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \varepsilon_1 = \pm 1$ ve $E_1 (= \dot{\gamma})$, E_2, $(g(E_2, E_2) = \varepsilon_2 = \pm 1)$ iki ortonormal vektör alanı mevcut ve

$$\nabla_{\dot{\gamma}}E_1 = \kappa\varepsilon_2 E_2, \quad \nabla_{\dot{\gamma}}E_2 + \kappa\varepsilon_1 E_1 \neq 0 \tag{4.4.9}$$

$$g(\nabla_{\dot{\gamma}}E_2 + \kappa\varepsilon_1 E_1, \nabla_{\dot{\gamma}}E_2 + \kappa\varepsilon_1 E_1) = 0$$

olacak şekilde γ boyunca bir κ fonksiyonu (eğrilik) mevcut ise $\gamma : I \longrightarrow M$ bir null binormal eğridir [10].

Teorem 4.4.5. *Bir 3-boyutlu hemen hemen normal parakontakt metrik manifoldda null binormal Legendre eğrisi yoktur [10].*

İspat. γ, M de bir Legendre eğrisi ve $g(\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) = \varepsilon_1 = \pm 1$ olsun. Teorem (4.4.1) den

$$\nabla_{\dot{\gamma}}E_1 = \nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma} = -\varepsilon_1\alpha\xi - \varepsilon_1\delta\varphi\dot{\gamma} = \kappa\varepsilon_2 E_2 \tag{4.4.10}$$

$$\nabla_{\dot{\gamma}}E_2 + \varepsilon_1\kappa E_1 = -\varepsilon_1\varepsilon_2(a\xi + b\varphi\dot{\gamma})$$

ve burada

$$\delta = g\left(\nabla_{\dot{\gamma}}\dot{\gamma}, \varphi\dot{\gamma}\right), \quad \kappa = \sqrt{|\alpha^2 - \varepsilon_1\delta^2|}, \quad \varepsilon_2 = sgn\left(\alpha^2 - \varepsilon_1\delta^2\right) = \pm 1 \qquad (4.4.11)$$

$$a = \frac{\varepsilon_1\delta c}{\kappa}, \quad b = \frac{\alpha c}{\kappa}, \quad c = \beta + \varepsilon_2\frac{\alpha\dot{\delta} - \dot{\alpha}\delta}{\kappa^2} \qquad (4.4.12)$$

dir. Kabul edelim ki γ null binormal eğri olsun. (4.4.10) ile

$$g\left(\nabla_{\dot{\gamma}}E_2 + \varepsilon_1\kappa E_1, \nabla_{\dot{\gamma}}E_2 + \varepsilon_1\kappa E_1\right) = \alpha^2 - \varepsilon_1 b^2 = 0$$

bulunur.

Eğer $\varepsilon_1 = -1$ ise buradan $a = b = 0$ dir. (4.4.10) ile bu durum (4.4.9) ile çelişir.

Eğer $\varepsilon_1 = 1$ ise $a = \pm b$ dir. Bu durumda (4.4.12) den $\alpha = \pm\delta$ olur. (4.4.11) de $\kappa = 0$ dır ki bu durum yine (4.4.9) ile çelişir. □

Örnek 4.4.1. *$\mathbb{R}^3$ uzayında (x, y, z) kartezyen koordinatlar olsun. $\mathbb{R}^3$ üzerinde (φ, ξ, η) standart hemen hemen parakontakt yapısı*

$$\varphi\partial_1 = \partial_2 - 2x\partial_3, \quad \varphi\partial_2 = \partial_1, \quad \varphi\partial_3 = 0, \quad \xi = \partial_3, \quad \eta = 2xdy + dz \qquad (4.4.13)$$

şeklinde tanımlıdır. Burada $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial x}$, $\partial_2 = \frac{\partial}{\partial y}$ ve $\partial_3 = \frac{\partial}{\partial z}$ dir.

$$[\varphi, \varphi]\left(\partial_i, \partial_j\right) - 2d\eta\left(\partial_i, \partial_j\right)\xi = 0, \quad 1 \leq i < j \leq 3,$$

olduğu görülür öyle ki yapı normaldir.

Kabul edelim ki $M = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}_+ \subset \mathbb{R}^3$ olsun. M üzerinde tanımlanan bir hemen hemen normal parakontakt metrik yapısı olduğu düşünülürse (φ, ξ, η), (4.4.13) yapısının M ye kısıtlanmışıdır ve g

$$[g\left(\partial_i, \partial_j\right)] = \begin{bmatrix} -2z & 0 & 0 \\ 0 & 4x^2 + 2z & 2x \\ 0 & 2x & 1 \end{bmatrix}$$

ile Lorentzian metriktir.

Levi-Civita konneksiyonu için

$$\nabla_{\partial_1}\partial_1 = -\frac{x}{z}\partial_2 + \left(1 + \frac{2x^2}{z}\right)\partial_3, \quad \nabla_{\partial_1}\partial_2 = \nabla_{\partial_2}\partial_1 = \frac{x}{z}\partial_2 + \left(1 - \frac{2x^2}{z}\right)\partial_3,$$

$$\nabla_{\partial_1}\partial_3 = \nabla_{\partial_3}\partial_1 = \nabla_{\partial_2}\partial_3 = \nabla_{\partial_3}\partial_2 = \frac{1}{2z}\partial_1 + \frac{1}{2z}\partial_2 - \frac{x}{z}\partial_3,$$
$$\nabla_{\partial_2}\partial_2 = \frac{2x}{z}\partial_1 + \frac{x}{z}\partial_2 - \left(1 + \frac{2x^2}{z}\right)\partial_3, \quad \nabla_{\partial_3}\partial_3 = 0$$

elde edilir. Son eşitlikler ve (2.8.7) kullanılarak $\alpha = \beta = (2z)^{-1}$ *bulunur. Bu* (φ, ξ, η, g) *yapısı Önerme 2.8.4 den quasi-para-Sasakian değildir.*

(a) *M üzerinde*

$$\gamma(t) = \left(0, at, -\frac{1}{2a^2}\right), \quad a \neq 0$$

eğrisini gözönüne alalım. $\varepsilon_1 = -1$ *ve* $\kappa = \tau = a^2$ *(κ ve τ sabit olduğundan bir helisdir) olup bir Frenet Legendre eğrisidir.*

(b) *M üzerinde*

$$\gamma(t) = \left(c\sqrt{t}, -2c\sqrt{t}, 2c^2 t\right), \quad t > 0, \quad c = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}$$

eğrisini gözönüne alalım. $\varepsilon_1 = 1$, $\kappa = \frac{\sqrt{2}}{4t}$ *ve* $\tau = \frac{\sqrt{3}}{4t}$ *($\frac{\kappa}{\tau}$ sabit olduğundan genelleştirilmiş bir helisdir) olup bir Frenet Legendre eğrisidir.*

(c) *M üzerinde*

$$\gamma(t) = \left(\frac{t}{\sqrt{2c}}, d, c\right), \quad c > 0$$

eğrisini gözönüne alalım. $\varepsilon_1 = -1$, $\kappa = \frac{\sqrt{c^2+t^2}}{2c^2}$ *ve* $\tau = \frac{c^2-t^2}{2c(c^2+t^2)}$ *ile bir Frenet Legendre eğrisidir.*

(d) *M üzerinde*

$$\gamma(t) = \left(-t, t, t^2\right)$$

eğrisini gözönüne alalım. Bir null Legendre eğrisidir.

(e) *M üzerinde*

$$\gamma(t) = \left(\sqrt{t}, -a\sqrt{t}, at\right), \quad t > 0, \quad a = \sqrt[3]{1-b} + \sqrt[3]{1+b}, \quad b = \sqrt{\frac{26}{27}}$$

eğrisini gözönüne alalım. Null normal Legendre eğrisidir ve $\varepsilon_1 = 1$ *dir [10].*

4.5 3-Boyutlu Heisenberg Gruplarda Legendre Eğrileri

$$M = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & y & z \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} : x, y, z \in \mathbb{R} \right\}$$

kümesini göz önüne alalım. Matris çarpımı ile bu üst üçgensel matrislerin kümesi bir gruptur ve bu gruba Heisenberg grup denir.

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x} - y\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial y} + x\frac{\partial}{\partial z}, \quad e_3 = \frac{\partial}{\partial z}$$

olmak üzere $\{e_1, e_2, e_3\}$ M nin her noktasında lineer bağımsız kümedir.

$$g = dx^2 + dy^2 + (dz + ydx - xdy)^2 \tag{4.5.1}$$

olmak üzere g, M üzerinde Riemann metriktir. Herhangi bir $X \in \chi(M)$ için

$$\eta(X) = g(X, e_3) \tag{4.5.2}$$

1-formunu tanımlayalım. Ayrıca

$$\varphi(e_1) = e_2, \quad \varphi(e_2) = -e_1, \quad \varphi(e_3) = 0 \tag{4.5.3}$$

ile φ $(1,1)$ tensör alanını tanımlayalım. (4.5.2) ve (4.5.3) den kolayca görülür ki

$$\eta(e_3) = 1, \quad \varphi^2 Z = -Z + \eta(Z)e_3, \quad g(\varphi Z, \varphi W) = g(Z, W) - \eta(Z)\eta(W)$$

dir. Ayrıca $X, Y \in \chi(M)$ için

$$d\eta(X, Y) = g(X, \varphi Y)$$

dir. Böylece $e_3 = \xi$ olmak üzere (φ, ξ, η, g), M üzerinde bir kontakt metrik yapı tanımlar. g den indirgenen Levi Civita konneksiyonu olmak üzere, kolayca hesaplanır ki

$$[e_1, e_2] = 2e_3, \quad [e_2, e_3] = 0, \quad [e_1, e_3] = 0,$$

dır. Kozsul formülü ile

$$\begin{aligned} &\nabla_{e_1} e_3 = -e_2, \quad &&\nabla_{e_1} e_2 = e_3, \quad &&\nabla_{e_1} e_1 = 0 \\ &\nabla_{e_2} e_3 = e_1, &&\nabla_{e_2} e_2 = 0, &&\nabla_{e_2} e_1 = -e_3 \\ &\nabla_{e_3} e_3 = 0, &&\nabla_{e_3} e_2 = e_1, &&\nabla_{e_3} e_1 = -e_2 \end{aligned} \tag{4.5.4}$$

olur. (4.5.4) yardımıyla

$$R(e_1,e_2)e_1 = 3e_2, \quad R(e_1,e_2)e_2 = -3e_1, \quad R(e_1,e_2)e_3 = 0 \tag{4.5.5}$$
$$R(e_2,e_3)e_1 = 0, \quad R(e_2,e_3)e_2 = -e_3, \quad R(e_2,e_3)e_3 = e_2$$
$$R(e_3,e_1)e_1 = e_3, \quad R(e_3,e_1)e_2 = 0, \quad R(e_3,e_1)e_3 = -e_1$$

olduğu görülür [14].

4.5.1 Heisenberg Gruplarda Yerel φ-Simetrik Legendre Eğrisi

Tanım 4.5.1. *Eğer $T = \dot{\gamma}$ olmak üzere*

$$\varphi^2(\nabla_T R)(\nabla_T T, T)T = 0$$

ise 3-boyutlu Heisenberg grup üzerinde bir γ Legendre eğrisi yerel φ-simetrik olarak adlandırılır [14].

3-boyutlu Heisenberg grup üzerinde bir φ-simetrik Legendre eğrisi gözönüne alınsın. $\{T, \varphi T, \xi\}$ Legendre eğrisi üzerinde bir Frenet çatısı olsun. $\varphi T = N$ ve $\varphi N = -T$ olsun. Ayrıca $B = \xi$ alınsın. Serret-Frenet formülleri kullanılarak

$$R(\nabla_T T, T)T = R(k\varphi T, T)T = kR(N,T)T \tag{4.5.6}$$

elde edilir. T ve N, $\xi = e_3$ ye ortogonal olduğundan (Heisenberg gruplar için farzedildiği gibi) t_1, t_2, n_1, n_2 skalerler olmak üzere $T = t_1e_1 + t_2e_2$ ve $N = n_1e_1 + n_2e_2$ olarak alalım.

R eğrilik tensörünün tanımı, T ve N ifadesi ve (4.5.5) kullanılarak

$$R(N,T)T = 3t_1(t_2n_1e_2 - n_2t_1e_2) - 3t_2(n_1t_2e_1 - n_2t_1e_1) \tag{4.5.7}$$

elde edilir.

T, $\varphi T = N$ ve $\xi = e_3$ olduğundan sağ el kuralından $t_1n_2 - t_2n_1 = 1$ olur. Bu eşitlikten

$$R(N,T)T = 3t_2e_1 - 3t_1e_2$$

olur. (4.5.6) ve (4.5.7) kullanılarak

$$R(\nabla_T T, T) T = k3t_2e_1 - k3t_1e_2 \tag{4.5.8}$$

olduğu görülür.

$$(\nabla_T R)(\nabla_T T, T) T = \nabla_T R(\nabla_T T, T) T - R\left(\nabla_T^2 T, T\right) T - R(\nabla_T T, \nabla_T T) T \tag{4.5.9}$$

$$\begin{aligned} & - R(\nabla_T T, T) \nabla_T T \\ & = \nabla_T R(kN, T) T - k' R(N, T) T + k^2 R(T, T) T \\ & - k\tau R(B, T) T - kR(kN, T) T + k'N \end{aligned}$$

dir.

$$\begin{aligned} R(B, T) T &= R(\xi, t_1e_1 + t_2e_2)(t_1e_1 + t_2e_2) \\ &= -t_1^2 R(e_1, \xi) e_1 - t_1t_2 R(e_2, \xi) e_1 - t_2t_1 R(e_1, \xi) e_2 - t_2^2 R(e_2, \xi) e_2 \end{aligned} \tag{4.5.10}$$

olur. (4.5.10) da (4.5.5) kullanılarak

$$R(B, T) T = \left(t_1^2 + t_2^2\right) e_3 \tag{4.5.11}$$

elde edilir. Yine

$$(\nabla_T R)(kN, T) T = \left(k'3t^2 - kt_23t_2e_3 - k'3t_1\right) e_2 - kt_13t_1e_3 \tag{4.5.12}$$

dir. (4.5.9) da (4.5.10), (4.5.11) ve (4.5.12) kullanılarak

$$\begin{aligned} (\nabla_T R)(\nabla_T T, T) T = & -kt_23t_2e_3 - kt_13t_1e_3 - k\tau\left({}^2_1 + t_2^2\right) e_3 \\ & - k^2(3t_2e_1 - 3t_1e_2) + k'(n_1e_1 + n_2e_2) \end{aligned}$$

eşitliği görülür. (2.3.1) ve (2.3.2) ile

$$\varphi^2 (\nabla_T R)(\nabla_T T, T) T = k^2(3t_2e_1 - 3t_1e_2) - k'(n_1e_1 + n_2e_2) \tag{4.5.13}$$

olur. Bu yerel φ-simetrik Legendre eğrisi olsun.

$$k^2(3t_2e_1 - 3t_1e_2) - k'(n_1e_1 + n_2e_2) = 0 \tag{4.5.14}$$

şeklinde tanımlıdır.

(4.5.14) in her iki tarafı e_1 ile iç çarpıma tabi tutulursa

$$-k^2 3t_2 + k' n_1 = 0 \tag{4.5.15}$$

elde edilir.

Eğer bu eğri bir çember ise $k = a$ pozitif sabit ve $\tau = 0$ dır. Buradan (4.5.15)

$$k = 0$$

olarak verilir. Bu eşitlik $k = a$ pozitif sabitiyle çelişir [14].

Teorem 4.5.1. *Bir 3-boyutlu Heisenberg grup üzerinde bir yerel φ-simetrik Legendre eğrisi çember değildir [14].*

5. KAYNAKLAR

[1] C. Baikoussis and D. E. Blair, On Legendre Curves in Contact 3-Manifolds, Geom. Dedicate, Vol. 49, 135-142, 1994.

[2] J. T. Cho, J. I. Inoguchi and J. E. Lee, On slant curves in Sasakian 3-manifolds, Bull. Austral. Math. Soc., Vol. 74, 359-367, 2006.

[3] Manfredo P. do Carmo, Differential Geometry of Curves and Surfaces, Brazil, 1976.

[4] Sibel Şener, Diferensiyellenebilir Manifoldlar Üzerindeki Kontakt Yapılar, Y. L. Tezi, İnönü Üniversitesi, Türkiye, 2008.

[5] Bayram Şahin, Manifoldların Diferensiyel Geometrisi, Nobel Yayıncılık, Türkiye, 2012.

[6] D. E. Blair, Riemannian Geometry of Contact and Symplectic Manifolds, Progress in Mathematics Vol. 203, Birkhäuser, Boston, 2002.

[7] M. Belkhelfa, I. E. Hirică, R. Rosca and L. Verstraelen, On Legendre Curves in Riemannian and Lorentzian Sasaki Spaces, Soochow Journal of Math. Vol. 28, No 1, 81-91, 2002.

[8] Joanna Welyczko, On Legendre Curves in 3-Dimensional Normal Almost Contact Metric Manifolds, Soochow J. Math. 33, 929-937, 2007.

[9] Bilal Eftal Acet, Para-Sasakian Manifoldların Altmanifoldları, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Türkiye, 2014.

[10] Joanna Welyczko, On Legendre Curves in 3-Dimensional Normal Almost Paracontact Metric Manifolds, Result. Math. 54, 377-387, 2009.

[11] Joanna Welyczko, Slant Curves in 3-dimensional Normal Almost Paracontact Metric Manifolds, Mediterr. J. Math., 965-978, 2014.

[12] Çetin Camcı, Kontakt Geometride Eğriler Teorisi, Doktora Tezi, Ankara Üniversitesi, Türkiye, 2007.

[13] Constantin Călin and Mircea Crasmareanu, Slant Curves in 3-dimensional Normal Almost Contact Geometry, Mediterr. J. Math., 2012.

[14] A. Sarkar and Dipankar Biswas, Legendre Curves on Three-Dimensional Heisenberg Groups, Ser. Math. Inform. Vol. 28, No 3, 241-248, 2013.

[15] Jun-ichi Inoguchi and Ji-Eun Lee, Almost contact curves in normal almost contact 3-manifolds, J. Geom. Vol. 103, 457-474, 2012.

[16] H. Hilmi Hacısalihoğlu, Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi, Türkiye, 1998.

[17] Şaban Güvenç and Cihan Özgür, On Slant Curves In Trans-Sasakian Manifolds, Revista De La Unión Matemática Argentina, Vol.55, No.2, 81-100, 2014.

[18] Giovanni Calvaruso, Contact Lorentzian manifolds, Differential Geometry and its Applications, Vol. 29, 41-51, 2011.

[19] Z. Olszak, Normal almost contact metric manifolds of dimension three, Ann. Pol. Math., 42-50, 1986.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Ecem KAVUK

Doğum Yeri ve Tarihi: Malatya / 01.01.1990

Adres: İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü

E-Posta: ecem1990_ugurlu@hotmail.com

Lisans: İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2008-2012)