T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LIGHTLIKE EINSTEIN HİPERYÜZEYLER

Esra KARATAŞ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Haziran 2015

Tezin Başlığı	:	LIGHTLIKE EINSTEIN HİPERYÜZEYLER
Tezi Hazırlayan	:	Esra KARATAŞ
Sınav Tarihi	:	17.06.2015

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri (ilk isim jüri başkanı, ikinci isim tez danışmanı)

Prof.Dr. Mehmet BEKTAŞ

Yrd. Doç. Dr. Cumali YILDIRIM

Prof. Dr. Bayram ŞAHİN

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof.Dr. Alaattin ESEN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Lightlike Einstein Hiperyüzeyler" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Esra KARATAŞ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

LIGHTLIKE EINSTEIN HİPERYÜZEYLER

Esra KARATAŞ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

65+iv sayfa

2015

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Cumali YILDIRIM

Bu tezde Semi- Öklidyen Uzaylar, Semi-Riemann Manifoldların Lightlike Hiperyüzeyleri, Lightlike Hiperyüzeyler için Gauss-Codazzi Denklemleri, Ricci Eğriliği, Ekran Homotetik Lightlike Hiperyüzeyler, Einstein Manifoldlar ve Einstein Hiperyüzeyler çalışılmıştır.

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm giriş bölümüdür.İkinci bölümde çalışmanın ileriki bölümlerinde kullanılan temel tanım ve kavramlar verilmiştir. Ayrıca dejenere-non dejenere metrik, quasi ortonormal bazlar ile ilgili temel tanım ve teoremler incelenmiştir.

Üçüncü bölümde Semi-Riemann Manifoldların Lightlike Hiperyüzeyleri, Lightlike Hiperyüzeylerin Lightlike Transversal Vektör Demeti, Lightlike Hiperyüzeylerde İndirgenmiş Geometrik Nesneler ve Lightlike Hiperyüzeyler için Gauss-Codazzi Denklemleri'nin genel bir tanımı verilmiş ve bazı bilinen teoremler ifade edilmiştir.

Son bölüm olan dördüncü bölümde Ricci Eğriliği, Einstein Hiperyüzeyler, Einstein Screen Homotetik Lightlike Hiperyüzeyler ile ilgili bazı teorem ve kavramlar verilmiş ve bu kavramlarla ilgili sonuçlar elde edilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Lightlike Hiperyüzeyler, Einstein Hiperyüzeyler, Gauss-Codazzi Denklemleri, Ekran Konform Lightlike Hiperyüzeyler, Yarı-Riemann Manifoldlar.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

LIGHTLIKE EINSTEIN HYPERSURFACES

Esra KARATAŞ

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

65+iv pages

2015

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Cumali YILDIRIM

In this thesis, Semi-Euclidean Spaces, Lightlike Hypersurfaces of Semi-Riemann Manifolds, Gauss-Codazzi Equations for Lightlike Hypersurfaces, Ricci Curvature, Homothetic Screen Lightlike Hypersurfaces, Einstein Manifolds and Einstein Hypersurfaces were studied.

This thesis consists of four chapters. The first chapter is the introduction.In the second chapter, basic definitions and concepts used in the later chapter of the study are given. In addition, basic definitions and theorems related to degenerate metrics, non-degenerate metrics, quasi orthonormal bases were examined.

In the third chapter, the general definitions and some known theorems of Lightlike Hypersurfaces of Semi-Riemann manifolds, Lightlike Transversal Vector Bundle of Lightlike Hypersurfaces, Induced Geometrical Objects on Lightlike Hypersurfaces and Gauss-Codazzi Equations for Lightlike Hypersurfaces are given.

In the fourth and the last chapter, some theorems and concepts related to Ricci Curvature, Einstein Hypersurfaces, Einstein Screen Homothetic Lightlike Hypersurfaces are provided and results obtained with these concepts.

KEY WORDS: Lightlike Hypersurfaces, Semi-Riemann Manifolds, Einstein Hypersurfaces, Gauss-Codazzi Equations, Screen Conformal Lightlike Hypersurfaces.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın her aşamasında beni destekleyen, bilgilendiren, öneri ve fikirleriyle başarı azmimi arttıran ve beni daima çalışmaya teşvik eden çok değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Cumali YILDIRIM'a; değerli bilgileri, önerileri ve sundukları her türlü imkânlarla bana yardımcı olan çok kıymetli hocalarım Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e, Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ'e, Prof. Dr. Bayram ŞAHİN'e, Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e ve tüm hocalarıma sonsuz teşekkürlerimi ve şükranlarımı sunarım. Ayrıca daima yanımda olan ve maddi- manevi destekleriyle beni bugüne getirmek için çabalayan aileme, çok sevdiğim ve her zaman değerli fikirlerinden yararlandığım çok kıymetli arkadaşlarım Eda YÜCEL'e ve Selin ERTAŞ'a ve tüm sevdiklerime sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

1930'larda, $\mathbb{R}^{n+1}$ Öklid uzaylarda M Einstein hiperyüzeylerin sınıflandırılması ilk olarak Fialkow[18] ve Thomas[19] tarafından çalışıldı. Eğer M, $(n \geq 3)$ bağlantılı Einstein hiperyüzey bazı γ sabit için $Ric = \gamma g$ ise bu durumda γ'nın non-negatif olduğu ispat edildi.

Ayrıca

$i)$ $\gamma = 0$ ise M, $\mathbb{R}^m$'e lokal olarak izometriktir.

$ii)$$\gamma > 0$ ise bu durumda M bir $n-$ kürede içerilir.

Bu çalışmamızdaki amaç, yukarıdaki klasik sonuçların lightlike versiyonunu çalışmaktır.

Einstein manifoldlar sadece kendi içlerinde ilginç değil; aynı zamanda Riemann geometrinin birçok önemli konularıyla da bağlantılıdır. Örneğin; Riemann submersiyonlar, Homojen Riemann uzaylar, Riemann fonksiyoneller ve kritik noktaları, Yang- Mills teorisi, Dört boyutlu self-dual manifoldlar, Holonomi grupları, Kuaterniyonik manifoldlar, $K3$ yüzeyler aracılığıyla cebirsel geometri [21] bu konulardan bazılarıdır.Çalışılan bu konular günümüzde gelişmekte olan konulardır.

Son çeyrek yüzyıldan itibaren manifoldlar teorisinin matematiksel fizikte uygulama alanı bulmasından dolayı, belirsiz metrikler veya non-dejenere metriklerle birlikte çalışılmaya başlandı. Bu tür manifoldlara semi-Riemann manifoldlar adı verilmektedir. Bu tür manifoldlarda, son yıllarda lightlike alt manifoldların büyüyen bir önemi ve genel bağlantılılıkta geniş bir kullanımı vardır. Lightlike geometri non-dejenere durumuna göre biraz daha karmaşıktır. Lightlike altmanifoldlar ile non-dejenere alt manifoldlar arasındaki fark, normal demetin tutumundan kaynaklanmaktadır. Non- dejenere alt manifoldlarda tanjant demeti ile normal demetin kesişimi sıfır iken , lightlike alt manifoldlarda normal demetin bir kısmı tanjant demette kaldığı için böyle bir durum söz konusu değildir. Lightlike alt manifoldlarda normal demetin boyutunun bir olduğu alt manifolda lightlike hiperyüzey denir.

Fialkow ve Thomas'ın sınıflandırmasının lightlike versiyonlarını Duggal [15], [20] Atindogbe[16] ve Şahin[1] ile birlikte yaptı ve sabit q indeksli $(\bar{M}, \bar{g})$ manifoldunun (M, g) Einstein lightlike hiperyüzeyinin diferensiyel geometrik teorisini çalıştı.

Skaler eğrilik

$$r = \sum_i^{m+2} \epsilon_i g(E_i, E_i) = g^{ij} R_{ij}$$

ve M'nin Einstein olması için gerek ve yeter şart r'nin sabit olması gerekir. $Ric = \frac{r}{m+2} g$ olduğunu belirtir. Böylece bir Einstein lightlike M'nin geometrik kavramı, indirgenmiş skaler eğrilikle hesaplanmış bir simetrik Ricci tensörünü bulundurmasıdır. Böylece M'nin Ricci ile tanımlanan indirgenmiş bir simetrik bir Ricci tensörünün olduğu lightlike hiperyüzeyinin bir sınıfı göz önüne alınır.

Bu çalışmada semi Riemann manifoldlar, Gauss-Codazzi denklemleri ve Lightlike hiperyüzeyler çalışılarak lightlike Einstein hiperyüzeylerin geometrisi incelenmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Semi Öklidyen Uzaylar

Tanım 2.1.1. *V, $m-$ boyutlu reel vektör uzayı olsun.*

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall x, y, z \in V$ ve $\forall a, b \in \mathbb{R}$ için

$$i.) g(x, y) = g(y, x)$$

$$ii.) g(ax + by, z) = ag(x, z) + bg(y, z)$$

$$g(x, ay + bz) = ag(x, y) + bg(x, z)$$

*özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde **simetrik bilineer form** denir.[4]*

Tanım 2.1.2. *E^n, $n-$boyutlu Öklid uzayında $(n-1)$ **boyutlu bir yüzey** veya $(n-1)$ **yüzey** diye E^n' deki boş olmayan bir M cümlesine denir, öyleki bu M cümlesi*

$$M = \{x \in U \subset E^n \mid f : U \overset{dif.bilir}{\to} \mathbb{R} \ , \ U \text{ bir açık alt cümle}\}$$

$$x \to f(x) = c$$

$\nabla f \mid_p \neq 0$, $\forall\ p \in M$ biçiminde tanımlanır.

Özel olarak E^3'te bir $2-$yüzeye sadece **yüzey** diyoruz.

E^n' de bir $(n-1)$ yüzey $n > 3$ olması halinde daha çok bir **hiperyüzey** olarak adlandırılır.[5]

Tanım 2.1.3. *I, $\mathbb{R}$' nin bir açık aralığı olmak üzere*

$$\alpha : I \to \mathbb{R}^n$$

*biçiminde (C^∞ sınıfından) bir α dönüşümüne $\mathbb{R}^n$ uzayı içinde bir **eğri** denir.[13]*

Tanım 2.1.4. *M bir diferensiyellenebilir manifold ve $p \in M$ olsun. T_pM vektör uzayına dual olan uzayı $T_p^*(M)$ ile gösterelim. Böylece $w_p \in T_p^*(M)$ elemanı $w_p : T_pM \to \mathbb{R}$ lineer dönüşümüdür. $T_p^*(M)$ uzayının elemanlarına* ***dual vektör*** *denir.[3]*

Tanım 2.1.5. *Herhangi bir $x \in M$ için T_x^*M, T_xM*' ***nin dual vektör uzayı*** *olarak tanımlanır ve*

$$T^*M = \bigcup_{x \in M} T_x^*M$$

dir.[2]

Tanım 2.1.6. *$\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde $p-$tane vektör uzayı $V_1, V_2, ...V_p$ olsun.*

$$f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_p \to \mathbb{R}$$

fonksiyonu $u_i, v_i \in V_i$, $\lambda \in \mathbb{R}$ için

1) $f(u_1, u_2, ..., u_i + v_i, ...u_p) = f(u_1, ..., u_i, ..., u_p) + f(u_1, ..., v_i, ..., u_p)$

2)$f(u_1, u_2, ..., \lambda u_i, ...u_p) = \lambda f(u_1, u_2, ..., u_i, ...u_p)$

özellikleri sağlanıyor ise f' ye ***i-yinci yere göre lineerdir****, $\forall i = 1, 2, ...p$ için 1) ve 2) özellikleri sağlanıyorsa f fonksiyonuna* **p$-$*lineer fonksiyon*** *adı verilir.[12]*

$p-$lineer fonksiyonların cümlesi $\mathcal{L}(V_1, V_2, ..., V_p; \mathbb{R}) = \{f \mid f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_p \overset{p-\text{lineer}}{\to} \mathbb{R}\}$ ile gösterilir ve bu cümle üzerinde toplama ve skalerle çarpma işlemi tanımlarsak $(\mathcal{L}(V_1, V_2, ..., V_p, \mathbb{R}), +, .)$ üçlüsü bir vektör uzayı olur.

Tanım 2.1.7. *$V_1, V_2, ..., V_p$ ve $W_1, W_{2,}..., W_q$ reel vektör uzayları olsunlar.*

$$g : W_1 \times W_2 \times ... \times W_q \overset{q-lineer}{\to} \mathbb{R}$$

$$f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_p \overset{p-lineer}{\to} \mathbb{R}$$

fonksiyonlarının çarpımı *$f \otimes g$ ile gösterilir ve*

$$\forall (v_1, v_2, ...v_p, w_1, w_{2,}..., w_q) \in V_1 \times V_2 \times ... \times V_p \times W_1 \times W_2 \times ... \times W_q$$

elemanına bir

$$f(v_1, ...v_p)g(w_1, ..., w_q) \in \mathbb{R}$$

elemanını karşılık tutar. Bu fonksiyon da

$$(f \otimes g) : V_1 \times V_2 \times ... \times V_p \times W_1 \times W_2 \times ... \times W_q \overset{(p+q)-lineer}{\rightarrow} \mathbb{R}$$

$$(f \otimes g)(v_1, v_{2,}..., v_p, w_{1,}w_{2,}...w_q) = f(v_1, ...v_p)g(w_1, ..., w_q) \in \mathbb{R}$$

olarak tanımlanır.[12]

Tanım 2.1.8. *$\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerinde $r-$tane vektör uzayı $V_1, V_2, ...V_r$ ve $r-$ lineer dönüşümlerinin cümlesi*

$$\mathcal{L}(V_1, V_2, ..., V_r; \mathbb{R}) = \{f \mid f : V_1 \times V_2 \times ... \times V_r \overset{r-lineer}{\rightarrow} \mathbb{R}\}$$

nin $\mathbb{R}$ üzerinde vektör uzayı olduğunu biliyoruz. Bu vektör uzayına $V_1^*, V_2^*, ..., V_r^*$ ***dual vektör uzaylarının tensör çarpımı*** *denir ve*

$$\mathcal{L}(V_1, V_2, ..., V_r; \mathbb{R}) = V_1^* \otimes V_2^* \otimes ... \otimes V_r^*$$

*ile gösterilir. $V_1^* \otimes V_2^* \otimes ... \otimes V_r^*$ tensör uzayının her bir elemanına $r-$**yinci mertebeden kovaryant tensör** denir. [12]*

Özel olarak;

$$V_1 = V_2 = ... = V_r = V$$

ise

$$V_1 \times V_2 \times ... \times V_r = V^r$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}\mathcal{L}(V_1, V_2, ..., V_r; \mathbb{R}) &= \mathcal{L}^r(V; \mathbb{R}) \\ &= \otimes_r V^* \\ &= T_r(V)\end{aligned}$$

olarak ifade edilir.[12]

Örnek 2.1.1. *V reel vektör uzayı üzerinde tanımlanan iç çarpım fonksiyonu 2. dereceden kovaryant tensördür.*

Tanım 2.1.9. *Kovaryant tensörler için verilen ifadelerde V yerine V^* alınarak V^* üzerinde $s-$lineer fonksiyonların vektör uzayı elde edilebilir.Bu uzaya* ***kontravaryant tensör uzayı*** *denir.Bu uzayı*

$$\mathcal{L}^s(V^*) = \mathcal{L}(V^*, V^*, ..., V^*; \mathbb{R}) = \underbrace{V \otimes V \otimes ... \otimes V}_{s-tane} = \otimes^s V$$

ve

$$T^s(V^*) = \otimes^s V$$

olarak alacağız. Böylece

$$T^0(V^*) = \mathbb{R}$$

$$T^1(V^*) = V$$

elde edilir. $T^s(V^*)$ tensör çarpımına bir kontravaryant $s-$tensör uzayı ve bu uzayın her bir elemanına da ***s inci dereceden bir kontravaryant*** *tensör veya bir kontravaryant* ***s-tensör*** *denir.[12]*

Örnek 2.1.2. *V ' nin elemanları kontravaryant tensörlerdir.*

Tanım 2.1.10. *$\mathbb{R}$ reel sayılar cismi üzerindeki $n-$boyutlu bir vektör uzayı ile bu uzayın duali sırası ile V ve V^* olsun. Bir*

$$f : V^r \times V^{*s} \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $(r+s)-$lineer olsun. $(r+s)-$lineer dönüşümlerinin cümlesini

$$\mathcal{L}(V^r, V^{*s}; \mathbb{R}) = \{f \mid f : V^r \times V^{*s} \overset{(r+s)-lineer}{\to} \mathbb{R}\}$$

şeklinde gösterelim. Bu cümle üzerinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpma işlemleri ile birlikte bir vektör uzayıdır. Bu vektör uzayı V^* ve V vektör uzayları üzerinde bir tensör uzayı, daha doğrusu ***r-dereceden kovaryant s-dereceden***

kontravaryant tensör uzayı *olur. Bu uzayın elemanlarına* (r,s) *tipinde* ***karışık tensörler*** *denir. Bu uzay daha kısa olarak*

$$T_r^s(V) = T_r(V) \otimes T^s(V^*)$$

şeklinde de gösterilir. [12]

Örnek 2.1.3.

$$V \otimes V \otimes V^* = V_2^1$$

$$V \otimes V \otimes V^* \otimes V \otimes V^* \otimes V^* = V_2{}^1{}_1{}^2$$

Tanım 2.1.11. *Her bir* $x \in M$ *için* $T_q^p(M)_x$ *vektör uzayını bütün* $(p+q)$ *lineer dönüşümleri için göz önüne alalım.*

$$T_x : \underbrace{T_x^*M \times ... \times T_x^*M}_{p\ tane} \times \underbrace{T_xM \times ... \times T_xM}_{q\ tane} \to \mathbb{R}$$

$T_q^p(M)_x$ *in bir elemanı* x*' te* (p,q) *tipinde bir tensördür.[2]*

Tanım 2.1.12. M*,* $m-$*boyutlu reel diferensiyellenebilir manifold ve* g*,* M *üzerinde* $(0,2)$ *tipinde bir simetrik tensör alanı olsun. Böylece* g*,* M*' nin her bir* x *noktasını* T_xM *tanjant uzayı üzerinde bir simetrik* g_x *bilineer formuna atar. Ayrıca burada* g_x*' in* T_xM *üzerinde non-dejenere olduğunu ve* g_x*' in indeksinin bütün* $x \in M$ *için aynı olduğunu kabul edelim. Böylece her bir* T_xM*,* $m-$*boyutlu bir semi öklidyen uzay olur. Yukarıdaki şartları sağlayan bu tensör alanına bir* ***semi-Riemann metrik (metrik tensör alanı)*** *ve* (g,M) *ikilisine de* ***semi-Riemann manifold*** *denir.[2]*

Tanım 2.1.13. T_xM *bir semi-Öklidyen uzay olduğundan herhangi bir* $u \in T_xM$ *tanjant vektörü için eğer;*

$\cdot\ g_x(u,u) > 0$ *veya* $u = 0$ *ise* ***spacelike****,*

$\cdot\ g_x(u,u) < 0$ *ise* ***timelike***

$\cdot\ g_x(u,u) = 0$ *ve* $u \neq 0$ *ise* ***lightlike***

olduğu söylenebilir. [2]

Bu sınıftaki bir tanjant vektör tanımlandığı kausal karakterin içine düşer. [2]

Tanım 2.1.14. *T_xM' nin lightlike vektörlerinin kümesi $x \in M$**' de lightlike koni** olarak adlandırılır.[2]*

Tanım 2.1.15. *M'nin indeksi q olsun.*

i) $q = 0$ durumunda M manifolduna **Riemann manifold**, g metriğine de **Riemann metrik** denir.

ii) $q = 1$ durumunda M manifolduna **Lorentz manifold**, g metriğine de **Lorentz metrik** denir.

iii) $0 < q < m$ durumunda M manifolduna **proper semi Riemann manifold** denir. [2]

Tanım 2.1.16. *En genel anlamda vektör demeti, her p noktasında vektör uzayı tayin eden bir diferensiyellenebilir manifolddur. [3]*

Tanım 2.1.17. *E, N üzerinde bir vektör demeti öyle ki $x \in N$, her E_x fibresi üzerinde non-dejenere simetrik bilineer form g_x olsun. Ayrıca $\forall\ x \in N$ için g_x' in q indeksinin aynı olduğunu kabul edelim. Eğer N' nin her x noktası için g_x, N üzerinde diferensiyellenebilir ise bu durumda E' ye **semi-Riemann vektör demetidir** denir.*

$\cdot$ *$q = 0$ durumunda E' ye **Riemann vektör demeti**,*

$\cdot$ *$q = 1$ durumunda E' ye **Lorentz vektör demeti***

denir.[2]

Tanım 2.1.18. *M, $m-$boyutlu reel diferensiyellenebilir bir manifold ve g de M üzerinde $(0, 2)$ tipinde simetrik bir tensör alanı olsun; öyle ki herhangi $x \in M$ için T_xM üzerinde g_x sabit q indeksli olsun. Kabul edelim ki $RadTM$ dönüşümü her bir $x \in M$' yi g_x' e karşılık olarak T_xM' nin $RadT_xM$ alt uzayına götürsün ki bu, M üzerinde rank $r > 0$ olan bir distribüsyon tanımlar. Bu durumda M' ye bir*

$r-$***lightlike (r−dejenere manifold)*** *ve g' ye de* $r-$***dejenere metrik*** *denir. RadTM ise M'* ***nin radikal distribüsyonu*** *olarak adlandırılır.[2]*

Yukarıdaki tanımla birlikte

$$g(\xi, X) = 0, \forall \xi \in \Gamma(RadTM),\, X \in \Gamma(TM)$$

ifadesini elde ederiz.[2]

Tanım 2.1.19. *M bir manifold olsun. M üzerinde bir distribüsyon, her $p \in M$ noktasına T_pM' nin D_p alt uzayını karşılık getiren bir dönüşümdür.[2]*

Tanım 2.1.20. *$\overline{M}$ bir $m-$boyutlu manifold olsun. $\overline{M}$ üzerinde*

$$D : \overline{M} \to \cup T_p\overline{M}$$

$$p \to D_p \subset T_p\overline{M},\ boy(D_p) = r$$

*ile tanımlı D dönüşümüne $r-$**boyutlu distribüsyon** denir.**[3]***

Distribüsyonlar vektör alanlarının genişletilmişidir.Çünkü

$$X = M \to T_pM$$

$$p \to X_p \in T_pM$$

noktayı bir tanjant vektöre götürür. Bu $1-$boyutlu distribüsyon olarak düşünülür. X vektör alanına p **noktasında D'ye aittir** denir.[2]

Tanım 2.1.21. *Eğer her p noktası için D_p alt uzayına ait r tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör varsa D distribüsyonuna* ***diferensiyellenebilirdir*** *denir. [3]*

Tanım 2.1.22. *TM' de $RadTM$' ye komplement olan $S(TM)$ distrübüsyonunu göz önüne alalım. $S(TM)$' nin lifleri $x \in M$ için T_xM' nin screen alt uzayları olduğundan $S(TM)$' ye M* ***üzerinde bir screen distribüsyon*** *denir.[2]*

Tanım 2.1.23. *Eğer* $X \in \chi(M)$ *için* $\pounds_X g = 0$ *ise yani;*

$$(\pounds_X g)(Y, Z) = Xg(Y, Z) - g([X, Y], Z) - g(Y, [X, Z]) = 0$$

ise X *vektör alanına* ***Killing vektör alanı*** *denir. Eğer* $\forall X \in D$ *için* $\pounds_X g = 0$ *ise* D *distribüsyonuna* ***Killing distribüsyon*** *denir.*

Tanım 2.1.24. M *ve* N *sırasıyla* m *ve* $n-$*boyutlu diferensiyellenebillir manifoldlar ve* $F : M \to N$ *diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. Bu durumda* F *dönüşümünün* $p \in M$ *noktasındaki rankı,* F_* *dönüşümünün* p *noktasındaki rankı olarak tanımlanır. Eğer her* p *noktasındaki* F *dönüşümünün rankı* m *ise, yani* $rank(F_{*p}) = m$ *ise* F *dönüşümüne* ***dolgulama*** *veya* ***immersiyon*** *denir.[3]*

Tanım 2.1.25. V *bir reel vektör uzayı,* g *ise*

$$g : V \times V \to \mathbb{R}$$

şeklinde V *üzerinde bilineer form olsun. Eğer* V *nin bir* $\xi \neq 0$ *vektörü var ve* $\forall v \in V$ *için*

$$g(\xi, v) = 0$$

oluyorsa g*' ye* V *üzerinde* ***dejeneredir*** *denir.[2]*

Tanım 2.1.26. V *bir reel vektör uzayı,* g *ise* V *üzerinde bilineer form olsun. Eğer* $\forall v \in V$ *için*

$$g(u, v) = 0$$

olması ancak $u = 0$ *ile mümkünse bu durumda* g*' ye* ***non-dejeneredir*** *denir.[2]*

V üzerinde non-dejenere bilineer form, V' nin bir alt uzayına ya dejenere ya da non-dejenere bilineer form indirger.

Tanım 2.1.27. V *reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form* g *olsun.* V *uzayının*

$$RadV = \{\xi \in V \mid g(\xi, v) = 0 \ , v \in V\}$$

ile tanımlı alt uzayına V *uzayının* g*' ye göre* ***radikal uzayı*** *ya da* ***null uzayı*** *denir ve* $nullV$ *ile gösterilir. Eğer;*

$\cdot$ *null* $V > 0$ *ise* g *dejeneredir.*

$\cdot$ *null* $V = 0$ *ise* g *non dejeneredir.[2]*

Tanım 2.1.28. *V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için*

*i.)$g(v,v) > 0$ ise g' ye **pozitif tanımlı,***

*ii.)$g(v,v) < 0$ ise g'ye **negatif tanımlı,***

*iii)$g(v,v) > 0$ ve $g(u,u) < 0$ olacak şekilde $u, v \in V$ mevcut ise g' ye **definit***

denir.[2]

Tanım 2.1.29. *V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. $\forall v \in V$ için*

*i.)$g(v,v) \geq 0$ ve $u \neq 0$ için $g(u,u) = 0$ ise g' ye **yarı pozitif tanımlı,***

*ii.)$g(v,v) \leq 0$ ve $u \neq 0$ için $g(u,u) = 0$ ise g' ye **yarı negatif tanımlı** ya da **indefinit form** denir.*

denir.[2]

Şimdi V nin W alt uzayını göz önüne alalım. Bu durumda g' nin $W \times W$ üzerinde kısıtlanması da W üzerinde bir simetrik bilineer formdur ve $g\ |_W$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.30.

$$g\ |_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

*negatif tanımlı olacak şekilde en büyük boyutlu W alt uzayının boyutuna g' nin V deki **indeksi** denir ve ind$V = q$ ile gösterilir.[2]*

Önerme 2.1.1. *Her g simetrik bilineer formuna*

$$h : V \to \mathbb{R}$$

$$v \to h(v) = g(v,v)$$

şeklinde tanımlı bir kuadratik form karşılık gelir. Burada h ile g arasında $\forall v, w \in V$ *için*

$$g(v,w) = \frac{1}{2}\{h(v+w) - h(v) - h(w)\}$$

bağıntısı vardır.[2]

Tanım 2.1.31. *V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda;*

$$\begin{aligned} &i.)\ g(x_i,x_j) = 0, \quad i \neq j \\ &ii.)\ g(x_i,x_i) = -1, \quad 1 \leq i \leq q \\ &iii.)\ g(x_i,x_i) = +1, \quad q+1 \leq i \leq p+q \\ &iv.)\ g(x_i,x_i) = 0, \quad p+q+1 \leq i \leq p+q+r = m \end{aligned}$$

*olacak şekilde V' nin bir $B = \{x_1, ...x_m\}$ ortonormal bazı vardır. Burada p+q+r = m olup (p,q,r) üçlüsüne **g formunun tipi** denir.[4]*

V' nin $E = \{e_1, ..., e_m\}$ bazına göre h kuadratik formu, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ve (v^i), $i \in \{1, ..., m\}$ v' nin koordinat bileşenleri olmak üzere

$$h(v) = g(v,v) = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i (v^i)^2 \qquad (2.1.1)$$

kanonikal formuna sahiptir. (2.1.1) de p, q, r sırasıyla $\lambda_i \in \mathbb{R}$' lerin pozitif, negatif ve sıfır olanlarının sayısıdır. (2.1.1) deki h nın kanonikal formu tek değildir. V' nin bazına göre değişir.[2]

Önerme 2.1.2. *h, V üzerinde (p,q,r) tipinde g' nin kuadratik formu olsun. O zaman;*

i.) $r > 0$ ise g dejeneredir; $r = 0$ ise non-dejeneredir.

ii.) $p = m$ ise g, pozitif tanımlıdır; $q = m$ ise g negatif tanımlıdır.

iii.) g, $q = 0$, $p > 0$, $r > 0$ ise yarı pozitif tanımlı ya da $p = 0$, $q > 0$, $r > 0$ ise yarı negatif tanımlıdır .

[2]

Tanım 2.1.32. *V ' nin keyfi bir bazı $U = \{u_1, ...u_m\}$ olsun. V üzerinde g simetrik bilineer formu*

$$g_{ij} = g(u_i, u_j), \quad 1 \leq j \leq m$$

*olmak üzere $G = [g_{ij}]_{m \times m}$ simetrik matrisi ile ifade edilebilir. Bu durumda G matrisine g **' nin U bazına karşılık gelen matrisi** denir. [2]*

Buradan E' nin bazlarından birine karşı h' nın (2.1.1) deki kanonikal formu oluşturulabilir öyle ki $\{e_1, ...e_m\}$ G' nin öz vektörleri ve $\{\lambda_1...\lambda_m\}$ de bu vektörlere karşı gelen öz değerlerdir. Açıkça görülür ki

$*$ g nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $rankG = m$

$*$ g nin dejenere olması için gerek ve yeter şart $rankG < m$

olmasıdır. [2]

Tanım 2.1.33. *Bir V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere, simetrik, bilineer g formuna V reel vektör uzayı üzerinde bir **skaler çarpım (yarı öklid metriği)** ve (V, g) ikilisine de **yarı öklid uzay** denir. [4]*

Tanım 2.1.34. *V yarı öklid uzayı üzerinde tanımlı bir g skaler çarpım için $p.q \neq 0$ olması durumunda g' ye **proper yarı öklid metrik** ve (V, g) ikilisine de **proper yarı öklid uzay** denir. [2]*

Tanım 2.1.35. *V yarı öklid uzayı üzerinde bir g skaler çarpımı için*

1. g pozitif tanımlı ise g'ye **Öklid metriği**, (V, g) ikilisine de **Öklid uzayı**,
2. g' nin indeksi $q = 1$ ise g' ye **Lorentz (Minkowski) metriği**, (V, g) ikilisine de **Lorentz (Minkowski) uzayı** denir.[2]

Tanım 2.1.36. *V yarı Öklid uzayı üzerinde bir g skaler çarpımı için*

$$\|.\| : V \to \mathbb{R} \tag{2.1.2}$$

$$v \to \|v\| = | \, g(v, v) \, |^{1/2} \, , \forall v \in V$$

dönüşümüne V vektör uzayı üzerinde ***norm dönüşümü*** *denir. Genel olarak $\|v\|$ sayısı v* ***vektörünün uzunluğu*** *olarak adlandırılır. [2]*

Tanım 2.1.37. *Uzunluğu 1 birim olan ; yani $g(u,u) = \pm 1$' in sağlandığı vektörlere* ***birim vektör*** *denir.[2]*

Tanım 2.1.38. *V yarı öklid uzayı üzerinde tanımlı bir g skaler çarpımı için,*

i.) $g(v,v) > 0$ veya $v = 0$ ise v' ye ***spacelike,***

ii.) $v \neq 0$ için $g(v,v) < 0$ ise v' ye ***timelike,***

iii.) $v \neq 0$ iken $g(v,v) = 0$ ise v' ye ***lightlike (null*** *veya* ***isotropik) vektör***

*denir. $v \in V$ vektörünün bu üç tipine v**' nin causal karakteri** denir. [2]*

Tanım 2.1.39. *Λ tarafından tanımlanan V' nin lightlike (null) konisi V' nin bütün lightlike vektörlerinin kümesidir; yani*

$$\Lambda = \{v \in (V - \{0\}) \mid g(v,v) = 0\}$$

dir.[2]

Tanım 2.1.40. *$u, v \in V$ için $g(u,v) = 0$ ise bu iki vektör* ***ortogonaldir*** *denir ve $u \perp v$ ile gösterilir. Benzer olarak V' nin iki alt kümesi U ve V olmak üzere herhangi $u \in U$ ve $w \in W$ için $u \perp w$ ise bu iki küme de ortogonaldir ve $U \perp W$ ile gösterilir. [2]*

Ortogonal birim vektörlerinin karşılıklı bir E kümesi **ortonormal bir küme** olarak adlandırılır ki bu küme lineer bağımsızdır. Bu nedenle $m-$boyutlu V' nin ortonormal vektörlerinin kümesi V' nin **ortonormal bazı** olarak adlandırılır. [2]

Önerme 2.1.3. *Sıfırdan farklı bir V semi-öklidyen uzayının ortonormal bir bazı mevcuttur. [2]*

Ayrıca belirtelim ki V vektör uzayının $E = \{e_1, ...e_m\}$ ortonormal bazlarının kümesinin bir vektörü sayesinde

$$g(e_i, e_j) = e_i \delta_{ij}$$

olur ve verilen herhangi bir $v \in V$ vektörü için

$$v = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i g(v, e_i) e_i$$

ifadesi izlenir.[2]

Tanım 2.1.41. $\{\varepsilon_1, ...\varepsilon_m\}$ *ifadesine* E ***bazının işaretlenmesi*** *denir.*

Buradan da g' nin h ile bağlantılı kuadratik formunun geldiğini görürüz.

$$h(v) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i g(v, e_i)^2 \tag{2.1.3}$$

Ayrıca p ve q, $\{\varepsilon_1, ...\varepsilon_m\}$ işaretlenmesinde pozitif ve negatif işaretlerin sayısı ise bu durumda semi-öklidyen metrik $(p, q, 0)$ tipindedir.[2]

Örnek 2.1.4. $\mathbb{R}^m$ *standart vektör uzayı ve* $\mathbb{R}^m$ *nin kanonikal bazı* $E = \{e_1 = (1, 0...0), ..., e_m = (0, 0, ..., 1)\}$ *olsun. O zaman* $\mathbb{R}^m$ *üzerinde* $0 < q < m$ *için proper semi öklidyen metrik*

$$g(x, y) = -\sum_{i=1}^{q} x^i y^i + \sum_{\alpha=q+1}^{m} x^\alpha y^\alpha \ ; \forall x, y \in \mathbb{R}^m \tag{2.1.4}$$

tanımlanabilir.

$\mathbb{R}^m_q$ ile $m-$ boyutlu $q-$ indeksli proper semi öklidyen uzayı g metriği ile tanımlansın. Özel olarak $\mathbb{R}^m_1$, Lorentz(Minkowski) vektör uzayıdır. $\mathbb{R}^m_q$ nin lightlike konisi $\mathbb{R}^m_q$ tarafından verilen Λ^{m-1}_{q-1} hiperyüzeyidir.

$$\Lambda^{m-1}_{q-1} = \{x \in (\mathbb{R}^m_q - \{0\}) \mid -\sum_{i=1}^{q} (x^i)^2 + \sum_{\alpha=q+1}^{m} (x^\alpha)^2 = 0\}$$

dır. Sonuç olarak $\mathbb{R}^m$, g metriği tarafından

$$g(x, y) = \sum_{A=1}^{m} x^A y^A$$

ile verilen öklidyen uzaydır.[2]

2.1.1 Semi Öklidyen Uzayların Alt Uzayları

(W, g) reel $n-$boyutlu lightlike vektör uzayı ve W' nin radikali $RadW$ olsun. Bu durumda W' nin bir alt uzayı dejenere olmayabilir. Bu ifadeyi desteklemek için aşağıdaki önermeyi verebiliriz:

Önerme 2.1.4. *(W, g), $n-$boyutlu lightlike vektör uzayı olsun;öyleki $nullW = r < n$ olsun. O zaman $RadW$' ye komplement her alt uzay non-dejeneredir.[2]*

Tanım 2.1.42. *W' de $RadW$' ye komplement alt uzay olan SW' ye W **' nin bir screen alt uzayı** denir. [2]*

SW, g' ye göre non-dejenere olduğundan bir semi öklidyen uzay olur. O zaman önerme (2.1.3) ten SW' nin $\{u_{r+1}, ..., u_{r+n}\}$ ortonormal bazı mevcuttur. Bu yüzden W' nin bazı verilen $B = \{f_1, ..., f_r\}$ ve $f_i \in RadW$, $i \in \{1, ..., r\}$ ile

$$W = RadW \perp SW \tag{2.1.5}$$

ifadesine uyarlanır. Bunu dikkate alarak $RadW$' nin herhangi bir vektörü W' ye ortogonaldir ve biz B' ye karşılık gelen matrisin;

$$[g] = \begin{bmatrix} 0_{r,r} & 0_{r,n-r} \\ 0_{n-r,r} & \varepsilon_{\alpha,}\delta_{ab} \end{bmatrix}$$

a,$b \in \{r + 1, ..., n\}$, $\varepsilon_\alpha = g(u_a, u_b)$ olduğunu söyleriz. [2]

Tanım 2.1.43. *(V, g) $m-$ boyutlu semi öklidyen uzay ve W de V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda $g\,|_W$ dejenere olması durumunda W' ye **lightlike(dejenere) alt uzay** denir. Aksi taktirde W' ye **non-dejenere alt uzay** denir. [2]*

$$W^\perp = \{v \in V : g(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

alt uzayını göz önüne alalım.

Tanım 2.1.44. *W, V' nin bir alt uzayı ise*

$$W^\perp = \{v \in V : v \perp W\}$$

*ifadesinde V' nin alt uzayı olan $W^\perp$, W **perp** olarak adlandırılır. [4]*

Bu ifade $W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$ olması açısından önemlidir. Buna örnek olarak şu ifadeyi verebiliriz:

Örnek 2.1.5. *$W = \{(x, y, x, y) \in \mathbb{R}^4_1 : x, y \in \mathbb{R}\}$ alt uzayını göz önüne alabiliriz ve buradan*

$$W \cap W^{\perp} = \{(x, 0, x, 0) : x \in \mathbb{R}\} \neq \{0\}$$

ifadesini elde ederiz.[2]

Önerme 2.1.5. *(V, g) $m-$ boyutlu semi öklidyen uzay ve W de V' nin bir alt uzayı olsun. O zaman;*

$$\text{1. } boyW + boyW^{\perp} = m \tag{2.1.6}$$

$$\text{2. } (W^{\perp})^{\perp} = W \tag{2.1.7}$$

$$\text{3. } RadW = RadW^{\perp} = W \cap W^{\perp} \tag{2.1.8}$$

olur.[2]

V bir vektör uzayı olsun. W_1 ve W_2, V' nin iki alt uzayı olmak üzere

1. $W_1 \cup W_2 = V$

2. $W_1 \cap W_2 = \{0\}$

ise $V = W_1 \oplus W_2$ şeklinde yazabiliyorduk.[5] Buradan hareketle şu sonucu verebiliriz:

Sonuç 2.1.1. *V semi-öklidyen uzay ve W, V' nin bir alt uzayı olsun. Aşağıdaki iddialar denktir:*

1. *W non-dejenere alt uzaydır.*
2. *$W^{\perp}$ non-dejenere alt uzaydır.*
3. *W ve $W^{\perp}$, V' nin komplement ortogonal alt uzaylarıdır.*
4. *V, W ve $W^{\perp}$' in ortogonal direkt toplamıdır; yani $V = W \perp W^{\perp}$ tir*

[2]

Ayrıca (2.1.3) ve yukarıdaki iv) ifadesini kullanarak

$$indV = indW + indW^{\perp} \tag{2.1.9}$$

ifadesini V' nin herhangi bir non-dejenere alt uzayı için elde ederiz.[2]

Önerme 2.1.6. *g, q indeksli $m-$ boyutlu V vektör uzayı üzerinde bir proper-semi öklidyen metrik olsun. O zaman V' nin* $\min\{q, m-q\}$ *boyutu geçmeyen bir alt uzay vardır, öyle ki $g \mid_{\overline{W}} = 0$ dır. [2]*

Bundan sonra göreceğiz ki lightlike alt manifoldlar boyunca proper semi-Riemann manifoldlarda en uygun çatı yapıları lightlike vektör alanlarını içerir. Bu yüzden burada bir lightlike alt uzay boyunca bazı semi-Öklidyen uzayların bazı özel tabanlarının nasıl inşa edileceğini göstereceğiz:

(V, g) $m-$ boyutlu proper semi-Öklidyen uzay olsun. Bu yüzden birleştirilmiş quadratik form $(p, q, 0)$, $p + q = m$ ve $p.q \neq 0$' dır. V' nin ortonormal bazının $\{e_1, ..., e_m\}$ olduğunu düşünelim öyle ki $\{e_1, ...e_q\}$ ve $\{e_{q+1}, ..., e_{q+p}\}$ sırasıyla timelike ve spacelike birim vektör kümeleridir.

Bazı lightlike vektörlerin bir bazını inşa etmek için aşağıdaki durumları analiz edelim:

Durum 2.1.1. *q<p yapı vektörleri*

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} + e_i\},\ f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} - e_i\},\ i \in \{1, ..., q\} \tag{2.1.10}$$

ki bu

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0 \tag{2.1.11}$$

ve

$$g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij},\ i, j \in \{1, ..., q\} \tag{2.1.12}$$

ifadelerini bize verir. Böylece $\left\{f_1, ..., f_q, f_1^*, ..., f_q^*, e_{2q+1}, ..., e_{q+p}\right\}$ *V' nin bir bazıdır ki $2q$ kadar lightlike vektör içerir ve $p - q$ tane spacelike vektör içerir.*

Durum 2.1.2. *p<q durumu için*

$$f_\alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+\alpha} + e_\alpha\},\ f_\alpha^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+\alpha} - e_\alpha\},\ \alpha \in \{1, ..., p\} \tag{2.1.13}$$

ve biz yine (2.1.11) ve (2.1.12) ifadelerini elde ederiz; fakat i, j yerine $\alpha, \beta \in \{1, ..., p\}$ olarak seçilir. Bu taktirde bu baz $\left\{f_1, ..., f_p, f_1^*, ..., f_p^*, e_{p+1}, ..., e_q\right\}$ olur. O halde $2p$ tane lightlike vektör ve $q-p$ tane de timelike vektör vardır.

Durum 2.1.3. *(p=q) durumunda $m = 2p = 2q$ olduğundan $\{f_1, ..., f_q, f_1^*, ..., f_q^*\}$ lightlike bazlarını tanımlanan (2.1.10) veya (2.1.13) ile elde ederiz. Buradan $\{f_1, ..., f_q, f_1^*, ..., f_q^*\}$ lightlike bazlardır ve bu bazlar $2q = m$ tanedir. [2]*

Tanım 2.1.45. *İndeksi $q = 1$ olan non-dejenere $2-$boyutlu bir vektör uzayına (düzleme) bir **hiperbolik düzlem** denir.[2]*

$A \in \{1, ..., \max(p, q)\}$ olmak üzere $\{f_A, f_A^*\}$ tarafından gerilmiş herhangi düzlem hiperbolik bir düzlemdir.

Böylece $p \neq q$ için bazı özel tabanların üstteki yapıları, keyfi proper-semi öklidyen uzayların ifadesini aşağıdaki

$$V = W_1 \perp W_2 \perp ... \perp W_s \perp W$$

gibi belirler. Burada s ya q ya da p, W_i $i \in \{1, ..., s\}$ hiperbolik düzlemler ve W ya spacelike ya da timelike uzaylardır.

Tanım 2.1.46. *$p = q$ ise bu ayrışım $V = W_1 \perp W_2 \perp ... \perp W_p$ olacak şekilde ayrışır ve **hiperbolik uzay[6]** veya **nötral uzay[7]** olarak adlandırılır.*

Tanım 2.1.47. *Eğer aşağıdaki şartlar sağlanırsa, bir (V, g) proper semi öklidyen uzayının bir $B = \{f_1, ...f_r, f_1^*, ..., f_r^*, u_1, ...u_t\}$ tabanı **quasi ortonormal baz** olarak adlandırılır.*

$$\begin{aligned} & g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0; \\ & g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij},\ i, j \in \{1, ..., q\} \\ & g(u_\alpha, f_i) = g(u_\alpha, f_i^*) = 0 \\ & g(u_\alpha, u_\beta) = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta},\ \alpha, \beta \in \{1, ...t\},\ \varepsilon_i = g(e_i, e_i) = \pm 1 \end{aligned} \tag{2.1.14}$$

[2]

Tanım 2.1.48. *$m-$ boyutlu bir proper semi-öklidyen V uzayının bir $n-$ boyutlu lightlike alt uzayı olan W' yi göz önüne alalım. Bu durumda bir quasi ortonormal $B = \{f_1, ..., f_r, f_1^*, ..., f_r^*, u_1, ..., u_t\}$ bazı vardır öyle ki*

$$W = Span\{f_{1,...,} f_r, u_1, ..., u_s\} \text{ dir; } n = r + s, \; 1 \leq s \leq t$$

veya

$$W = Span\{f_{1,...,} f_n\} \text{ dir } n \leq r \text{ ise}$$

ifadesine ***W boyunca V'nin quasi-ortonormal tabanı*** *denir.* ***[2]***

Önerme 2.1.7. *W boyunca V'nin bir quasi-ortonormal tabanı vardır.[2]*

Sonuç 2.1.2. *V proper-semi öklidyen uzayının bir proper lightlike alt uzayı W olsun. Bu durumda*

$$indV = indW' + indW'' + nullW$$

olur.[2]

Özel olarak $m-$boyutlu V Lorentz uzayının $n-$boyutlu lightlike W alt uzayını düşünelim. O zaman önerme (2.1.6)' ya göre $nullV = 1$ elde ederiz. Bu yüzden önerme (2.1.7)' nin ispatından aşağıdaki formlar elde edilmelidir:

$$\{f_1, f_1^*, u_1, ..., u_{n-1}, w_1, ...w_{m-n-1}\}, \; 1 < n < m-1 \text{ ise}$$

$$\{f_1, f_1^*, w_{1,...,} w_{m-n}\}, \; n = 1 < m-1 \text{ ise}$$

$$\{f_1, f_1^*, u_{1,...,} u_{n-1}\}, \; n = m-1 = 1 \text{ ise}$$

ve

$$\{f_1, f_1^*\}, \; n = m-1 = 1 \text{ ise}$$

Üstelik bu $\{u_\alpha, w_\alpha\}$ vektörlerinin tümü spaceliketır.

$2-$ boyutlu lightlike W alt uzayı boyunca $\mathbb{R}_1^4$ Minkowski uzayın bir quasi ortonormal bazı $B = \{f, f^*, u, v\}$ dörtlüsü tarafından verilir ki bu (f, f^*) ve (u, v)

sırasıyla lightlike ve birim ortogonal spacelike vektörlerdir. Bu da bize gösterir ki

$$g(f, f^*) = 1$$

olur ve

$$g(f, u) = g(f, v) = g(f^*, u) = g(f^*, v) = 0$$

dır. Bu durumda $W = Span\{f, u\}$ olur. Bu aynı baz W' nin boyutu 2 olmadığında da elde edilir. Ancak $W = Span\{f\}$ olduğu gözlenir ve $W = Span\{f, u, v\}$ olduğundan sırasıyla 1 ve 3 boyutludur.

Daha sonra kabul edelim ki $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ birim timelike vektör olan e_1 ve 3 tane birim spacelike vektör olan $\{e_2, e_3, e_4\}$ ile $\mathbb{R}_1^4$' ün ortonormal bazıdır. E' nin bu dual bazı $E^* = \{w_1, w_{2,} w_3, w_4\}$ tarafından ifade edilir. O zaman $\mathbb{R}_1^4$' ün Minkowski g metriğinin h kuadratik formuyla ililşkisi

$$h = -(w_1)^2 + (w_2)^2 + (w_3)^2 + (w_4)^2$$

ile ifade edilir.

Benzer şekilde $B = \{f, f^*, u, v\}$ quasi ortonormal bazın $B^* = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3, \theta_4\}$ dual bazı düşünüldüğünde, ki burada

$$f = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_1 + e_2\},\ f^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_2 - e_1\},\ u = e_3,\ v = e_4$$

tür ve

$$h = 2\theta_1\theta_2 + (\theta_3)^2 + (\theta_4)^2$$

elde edilir.[2]

Tanım 2.1.49. *(V, g) ve $(\bar{V}, \overline{g})$ iki semi-öklidyen uzay ve $T : V \to \overline{V}$ bir lineer dönüşüm olsun. Bu durumda skaler çarpım korunuyorsa, yani;*

$$\overline{g}(T(v), T(w)) = g(v, w);\ \forall v, w \in V \tag{2.1.15}$$

*ifadesi sağlanıyorsa T bir **lineer izometridir** denir. [2]*

Önerme 2.1.8. *T lineer dönüşümü bir izometridir gerek ve yeter şart V üzerinde g' nin normu korunur; yani $\forall v \in V$ için*

$$\|T(v)\| = \|v\| \tag{2.1.16}$$

dir. [2]

Tanım 2.1.50.

$$R : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$
$$(X, Y, Z) \to R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

ile tanımlı R tensör alanına ***eğrilik tensörü*** *denir.[3]*

Tanım 2.1.51. *M bir (yarı) Riemann manifoldu olsun.*

$$K : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, R)$$
$$(X, Y, Z, W) \to K(X, Y, Z, W) =< X, R(Z, W)Y >$$

olarak tanımlanan 4. mertebeden kovaryant tensöre ($K \in T_4^0(\chi(M))$, M üzerinde ***Riemann-Christoffel eğrilik tensörü*** *denir.[17]*

Tanım 2.1.52. *(M, g) $n-$boyutlu bir Riemann manifoldu ve M üzerinde lokal ortonormal vektör alanları $e_1, ..., e_n$ olsun. Bu durumda X, $Y \in \chi(M)$ için*

$$S : \chi(M) \times \chi(M) \to C^\infty(M, R)$$
$$(X, Y) \to S(X, Y) = izR(., X)Y$$

dönüşümü ile tanımlı $(2, 0)-$mertebeli

$$S(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i)$$

tensör alanına (M, g) manifoldunun ***Ricci tensörü*** *adı verilir.[3]*

Tanım 2.1.53. *(M, g) $n-$boyutlu Riemann manifoldu ve M manifoldunun bir p noktasındaki tanjant uzay T_pM olsun. T_pM uzayının $2-$boyutlu bir alt uzayı P olsun. P düzlemini geren birim vektörler x ve y olmak üzere*

$$K(P) = K(x, y) = \frac{g(R(x, y)y, x)}{g(x, x)g(y, y) - g(x, y)^2}$$

değerine M manifoldunun P düzlemine göre ***kesit eğriliği*** *denir.[3]*

Not 2.1.1. *Kesit eğriliği, P düzlemi için seçilen bazlardan bağımsızdır.[3]*

Tanım 2.1.54. *(M,g) bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olsun. T_pM uzayının $2-$boyutlu alt uzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına M manifoldunun* ***skaler eğriliği*** *denir ve* **r** *ile gösterilir.Buna göre T_pM uzayının ortonormal bazı $\{e_1, ..., e_n\}$ olmak üzere*

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i)$$

dir.[3]

Tanım 2.1.55. *M semi-Riemann manifoldunun kesit eğriliği sabit ise M' ye* ***sabit kesit eğrilikli semi-Riemann manifold*** *denir veya* ***indefinite uzay form*** *denir .[4]*

Eğer M sabit C kesit eğriliğine sahip ise

$$R_{xy}z = C\{< z, x > y - < z, y > x\}$$

ifadesi elde edilir. [4]

3. SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARIN LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLERİ

Burada bir proper semi-Riemann $\overline{M}$ manifoldunun $1-$lightlike M hiperyüzeyinin diferensiyel geometride bir temelini oluşturacağız. Bu amaçla bir non-dejenere screen distribüsyonu tanıtacağız ve $tr(TM)$' yi oluşturacağız. Ayrıca lineer konneksiyon, 2. temel form, şekil operatörü gibi geometrik konulardan yararlanarak Gauss-Codazzi denklemlerini oluşturacağız.

3.0.2 Lightlike Hiperyüzeylerin Lightlike Transversal Vektör Demeti

Tanım 3.0.56. *$(m+2)-$boyutlu $m > 0$, $q \in \{1, ..., m+1\}$ indeksli $(\overline{M}, \overline{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir hiperyüzeyi M olsun. Herhangi $u \in M$ için T_uM, $(T_u\overline{M}, \overline{g}_u)$ semi-öklidyen uzayın bir hiperdüzlemi olacağından*

$$T_uM^{\perp} = \{V_u \in T_u\overline{M} : \overline{g}_u(V_u, W_u) = 0, \quad \forall W_u \in T_uM$$

ve

$$RadT_uM = T_uM \cap T_uM^{\perp}$$

ifadelerini göz önüne alacağız. Herhangi $u \in M$' de $RadT_uM \neq \{0\}$ ise M, $\overline{M}$' nin ***Lightlike (null, dejenere) hiperyüzeyidir*** *deriz (veya buna eşdeğer olarak M* ***' nin $\overline{M}$' deki immersiyonu lightlike (null, dejenere)*** *deriz.[2]*

$\overline{M}$ üzerinde bu semi-Riemann $\overline{g}$ metriği M üzerinde $(0,2)$ tipinde bir g simetrik tensör alanı tanımlar; yani $u \in M$ için $g_u(X_u, Y_u)$' dur.

Önerme 3.0.9. *$(m+2)-$boyutlu semi-Riemann $(\overline{M}, \overline{g})$ manifoldunun bir* *hiperyüzeyi (M, g) olsun. O zaman aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) M, $\overline{M}$' nın Lightlike hiperyüzeyidir.

ii)g, M üzerinde sabit bir rank M' ye sahiptir.

iii)$TM^{\perp} = \underset{u\in M}{\cup} T_uM^{\perp}$, M üzerinde bir distribüsyondur.

[2]

Non-dejenere hiperyüzeylerin klasik teorisinde iyi bilinmektedir ki $TM^{\perp}$, M' nin bir normal demetidir ve 2. Temel Form, Şekil Operatörü, Konneksiyon gibi temel geometrik konuların tanıtılmasında önemli bir rol oynamaktadır.

Bu bölümde $T\overline{M}$' de TM' ye nasıl bir komplement(ortogonal olmayan) vektör demetinin inşa edileceğini göstereceğiz ki bu klasik teori ile birlikte $TM^{\perp}$' in rolünü oynayacaktur. Bu amaçla ilk olarak TM' de $TM^{\perp}$' in bir komplement $S(TM)$ vektör demetini göz önüne alacağız; yani biz;

$$TM = S(TM) \perp TM^{\perp} \tag{3.0.1}$$

ifadesine sahibiz.[2]

Tanım 3.0.57. *Her bir $S(TM)_u$, T_uM' nin bir screen alt uzayı olduğu için $S(TM)$' ye M **üzerinde screen distribüsyon** denir. [2]*

M parakompakt olduğundan daima $S(TM)$ mevcuttur. Burada $S(TM)$ bir non-dejenere uzaydır. Böylece M boyunca

$$T\overline{M} \mid_M = S(TM) \perp S(TM)^{\perp} \tag{3.0.2}$$

ayrışımına sahip oluruz.[2]

Teorem 3.0.1. *$(M, g, S(TM))$ bir $(\overline{M}, \overline{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman M üzerinde rankı 1 olan bir $tr(TM)$ vektör demeti mevcuttur öyle ki $U \subset M$ koordinat komşuluğunda $TM^{\perp}$' in sıfırdan farklı herhangi bir ξ kesiti için $tr(TM)$' nin U üzerinde bir M birim kesiti vardır ki bu bize*

$$\overline{g}(N, \xi) = 1 \tag{3.0.3}$$

ve

$$\overline{g}(N,N)=\overline{g}(N,W)=0\ \forall W\in\Gamma(S(TM)\mid_U) \tag{3.0.4}$$

ifadelerini verir. [2]

(3.0.3) ve (3.0.4)' ten $tr(TM)$' nin lightlike vektör demeti olduğu gözlenir; öyle ki $tr(TM)_u\cap T_uM=\{0\}$, $\forall u\in M$ için sağlanır. Üstelik (3.0.2) ve (3.0.1) den

$$T\overline{M}\mid_M=S(TM)\perp(TM^{\perp}\oplus tr(TM))=TM\oplus tr(TM) \tag{3.0.5}$$

elde edilir. Ayrıca herhangi screen distribüsyon $S(TM)$ için tek bir $tr(TM)$ elde ederiz ki bu $T\overline{M}\mid_M$' de TM' ye komplement vektör demeti ve (3.0.3) ve (3.0.4) sağlanır. Bu ise $S(TM)$' ye göre M' nin lightlike transversal vektör demetine $tr(TM)$ dediğimizin nedenidir.

Uyarı 3.0.1. *Herhangi $u\in M$' de $\{\xi_u,N_u\}$ çifti ile gerilmiş düzlem hiperbolik düzlem olduğundan*

$$TM\mid_M=S(TM)\perp(TM^{\perp}\oplus tr(TM))$$

den ve

$$indT\overline{M}=indS(TM)+indS(TM)^{\perp}$$

ifadelerinden $S(TM)$ herhangi screen distribüsyonu, sabit $q-1$ indeksli, non-dejeneredir. Özellikle de, Lorentz manifoldun bir lightlike hiperyüzeyi üzerinde herhangi screen distribüsyonu Riemann' dır; yani $S(TM)$ üzerindeki indirgenmiş metrik pozitif tanımlıdır.

Uyarı 3.0.2. *Schouten([8])' deki terimleri izlerken $tr(TM)$' nin M lightlike hiperyüzeyinde bir rigging olduğunu söyleyebiliriz. [2]*

Uyarı 3.0.3. *Bazen ilk olarak $tr(TM)$' yi elde etmek ve bundan sonra buna karşılık gelen $S(TM)$ distribüsyonunu elde etmek mümkündür. [2]*

Aşağıda vereceğimiz örnek iddiamızı destekleyecektir:

Örnek 3.0.6. $\mathbb{R}_2^4$*' te* $M: x^3 = x^0 + \frac{1}{2}(x^1+x^2)^2$ *hiperyüzeyini göz önüne alalım. Yukarıdaki uyarı (3.0.3) ten yola çıkarak önce* $tr(TM)$*' yi ve buna karşılık gelen* $S(TM)$*' yi bulabiliriz.*

3.0.3 Lightlike Hiperyüzeylerde İndirgenmiş Geometrik Nesneler

$(m+2)-$ boyutlu semi-Riemann $(\overline{M}, \overline{g})$ manifoldunun lightlike hiperyüzeyi (M,g) olsun ve $\overline{\nabla}$ da $\overline{M}$ manifoldu üzerinde $\overline{g}$' ye karşılık gelen Levi-Civita konneksiyonu olsun. Kabul edelim ki $S(TM)$ ve $tr(TM)$ sırasıyla screen distribüsyon ve buna karşılık gelen M' nin lightlike transversal vektör demeti olsun. O zaman (3.0.5) teki

$$T\overline{M}\mid_M = S(TM) \perp (TM^{\perp} \oplus tr(TM)) = TM \oplus tr(TM)$$

ayrışımının 2. kısmını kullanarak

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \tag{3.0.6}$$

ve

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla_X^t V \tag{3.0.7}$$

ifadeleri herhangi $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(tr(TM))$ için elde edilir. Burada $h(X,Y)$ ve $\nabla_X^t V$, $\Gamma(tr(TM))$' ye bağlı iken $\nabla_X Y$ ve $A_V X$ de $\Gamma(TM)$' ye bağlıdır.

∇' nın M üzerinde torsiyonsuz lineer konneksiyon olduğu ve h' nın $\Gamma(TM)$ üzerinde $\Gamma(tr(TM))$ değerli simetrik bilineer form olduğu gösterilebilir.

A_V , $\Gamma(TM)$' de bir $\mathcal{F}(M)-$ lineer operatördür ve ∇^t de $tr(TM)$' de lineer konneksiyondur. [2]

Tanım 3.0.58. ∇ *ve* ∇^t *ye sırasıyla* TM ***ve*** $tr(TM)$***' de indirgenmiş konneksiyonlar*** *denir. Riemann hiperyüzeylerin klasik teorisiyle uyumlu olarak* h *ve* A_V*' ye de* $\overline{M}$*' de* M *lightlike immersiyonun sırasıyla* ***ikinci temel formu*** *ve* ***şekil operatörü*** *denir. Ayrıca (3.0.6) ve (3.0.7) denklemlerine sırasıyla* ***Gauss*** *ve* ***Weingarten formülleri*** *denir.[2]*

$\{\xi, N\}$' nin (3.0.1) de tanımlanmış olan $U \subset M$ üzerinde kesitlerin çifti olduğunu göz önüne alalım. (Teorem(3.0.1): $\overline{g}(N,\xi) = 1$, $\overline{g}(N,N) = \overline{g}(N,W) = 0$ $\forall W \in \Gamma(S(TM)\mid_U)$).

Bu durumda, U üzerinde simetrik $\mathcal{F}(U)-$bilineer form B ve $1-$form τ

$$B(X,Y) = \overline{g}(h(X,Y),\xi), \; \forall\; X,Y \in \Gamma(T\overline{M}\mid_U) \tag{3.0.8}$$

$$\tau(X) = \overline{g}(\nabla^t_X N,\xi), \; \forall\; X \in \Gamma(T\overline{M}\mid_U) \tag{3.0.9}$$

tanımlansın. Buradan

$$h(X,Y) = B(X,Y)N \tag{3.0.10}$$

ve

$$\nabla^t_X N = \tau(X)N \tag{3.0.11}$$

ifadelerinden U üzerinde (3.0.6) ve (3.0.7) denklemleri sırasıyla

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)N \tag{3.0.12}$$

ve

$$\overline{\nabla}_X N = -A_N X + \tau(X)N \tag{3.0.13}$$

olur. Lightlike hiperyüzeylerin geometrisi seçilen screen distribüsyona bağlı olduğundan, iki screen distribüsyon tarafından indirgenmiş geometrik nesneler arasındaki ilişkileri incelemek önemlidir. Bu açıdan, aşağıdaki sonuç lightlike hiperyüzeylerin tüm çalışması için önemlidir. [2]

Önerme 3.0.10. *$S(TM)$ ve $S(TM)'$, M' de iki screen distribüsyon ve h ve h' sırasıyla $tr(TM)$ ve $tr(TM)'$ ne göre ikinci temel formlar olsunlar.Bu durumda U' da $B = B'$ dür ki M' nin ikinci temel formu bu U' da screen distribüsyon seçiminden bağımsızdır. [11]*

Sonuç 3.0.3. *Lightlike hiperyüzeylerin ikinci temel formu dejeneredir.[2]*

İspat. $B(X,Y) = B'(X,Y) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X Y, \xi)$ ifadesinden ve $\overline{\nabla}$' nın metrik konneksiyon olduğu göz önüne alınarak Y yerine ξ alınırsa $\forall X \in \Gamma(TM)_U$ için

$$B(X,\xi) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X \xi, \xi) \tag{3.0.14}$$

ifadesini ele alalım.

$$\begin{aligned} \overline{g}(\xi,\xi) &= 0 \\ X\overline{g}(\xi,\xi) &= 0 \\ \overline{g}(\overline{\nabla}_X \xi, \xi) + \overline{g}(\xi, \overline{\nabla}_X \xi) &= 0 \\ \overline{g}(\overline{\nabla}_X \xi, \xi) &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bunu yukarıdaki (3.0.14) denkleminde yerine yazarsak

$$B(X,\xi) = 0 \tag{3.0.15}$$

bulunur. Bu durumda

$$h(X,\xi) = B(X,\xi)N$$

olduğundan

$$h(X,\xi) = 0$$

bulunmuş olur. □

Tanım 3.0.59. *Eğer $B(V,W) = 0$ ise bu durumda M üzerindeki V ve W vektör alanlarına* ***konjuge(eşlenik)*** *denir. Eğer $g(V,V) = 0$ ise bu self-konjuge vektör alanına* ***asimptotik vektör alanı*** *denir. [9]*

Önerme 3.0.11. *Herhangi $\xi \in \Gamma(TM^{\perp} \mid_U)$, $\overline{M}$' nin lightlike hiperyüzeyi M üzerindeki herhangi vektör alanıyla konjugedir.Özellikle de ξ asimptotik vektör alanıdır. Yani*

$$g(\xi,\xi) = 0$$

dır. [2]

Ayrıca not edelim ki hem B hem de τ, $\xi \in \Gamma(TM^{\perp} \mid_U)$ kesitine bağlıdır. Gerçekten de $\overline{\xi} = \alpha\xi$ aldığımızda bunu $\overline{N} = (\frac{1}{\alpha})N$ takip eder ve (3.0.12) ve (3.0.13) den $\overline{B} = \alpha B$ ve

$$\tau(X) = \overline{\tau}(X) + X(\log \alpha) \tag{3.0.16}$$

ifadesini herhangi $X \in \Gamma(TM \mid_U)$ için elde ederiz. [2]

Önerme 3.0.12. *$(M, g, S(TM))$, $(\overline{M}, \overline{g})$' nin lightlike hiperyüzeyi olsun. τ ve $\overline{\tau}$ nin sırasıyla ξ ve $\overline{\xi}$' ne göre U üzerinde $1-$formlar olduğunu kabul edelim. Bu durumda N üzerinde $d\tau = d\overline{\tau}$' dir.[2]*

Eğer P, $TM = S(TM) \perp TM^{\perp}$ ayrışmasına göre $S(TM)$' de TM' nin projeksiyon morfizmini tanımlarsa bu durumda

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + h^*(X, PY), \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{3.0.17}$$

ve

$$\nabla_X U = -A^*_U X + \nabla^{*t}_X U,\ X \in \Gamma(TM),\ U \in \Gamma(TM^{\perp}) \tag{3.0.18}$$

burada $\nabla^*_X PY$ ve $A^*_U X$,$\Gamma(S(TM))$'ye bağlı; $h^*(X, PY)$ ve ∇^{*t}_Xise $\Gamma(TM^{\perp})$'ye bağlıdır. ∇^*ve ∇^{*t}sırasıyla $S(TM)$ ve $TM^{\perp}$ vektör demetlerinde lineer konneksiyonlardır. h^* bir $\Gamma(TM^{\perp})$ değerli bilineer formdu, $\Gamma(TM) \times \Gamma(S(TM))$' de değer alır ve A^*_U, $\Gamma(S(TM))$' de değer alır ve $\Gamma(TM)$' de $\mathcal{F}(M)-$ lineer operatördür.[2]

Tanım 3.0.60. *h^* ve A^*_U'a sırasıyla* ***screen distribüsyon A^*_U' ın ikinci temel formu*** *ve* ***şekil operatörü*** *deriz. Ayrıca yukarıdaki (3.0.17) ve(3.0.18) denklemlerine screen distribüsyon $S(TM)$ için sırasıyla* ***Gauss*** *ve* ***Weingarten denklemleri*** *denir.[2]*

(3.0.6), (3.0.7), (3.0.17) ve (3.0.18) kullanılarak direkt hesaplamalarla

$$g(A_V Y, PW) = \overline{g}(V, h^*(Y, PW)); \overline{g}(A_V Y, V) = 0, \tag{3.0.19}$$

ve

$$g(A^*_U X, PY) = \overline{g}(U, h(X, PY)); \; \overline{g}(A^*_U X, V) = 0, \qquad (3.0.20)$$

herhangi $X, Y, W \in \Gamma(TM)$, $U \in \Gamma(TM^{\perp})$ ve $V \in \Gamma(tr(TM))$ için bulunur.

Lokal olarak U üzerinde

$$C(X, PY) = \overline{g}(h^*(X, PY), N) \qquad (3.0.21)$$

ve

$$\epsilon(X) = \overline{g}(\nabla^{*t}_X \xi, N) \qquad (3.0.22)$$

dir. Böylece

$$h^*(X, PY) = C(X, PY)\xi \qquad (3.0.23)$$

ve

$$\nabla^{*t}_X \xi = \epsilon(X)\xi \qquad (3.0.24)$$

ifadeleri elde edilir. Diğer taraftan (3.0.22), (3.0.23), (3.0.12),(3.0.3) ve (3.0.13) denklemleri kullanılarak

$$\epsilon(X) = \overline{g}(\nabla_X \xi, N) = \overline{g}(\overline{\nabla}_X \xi, N) = -\overline{g}(\xi, \overline{\nabla}_X N) = -\tau(X)$$

elde edilir. Böylece (3.0.17) ve (3.0.18) lokal olarak

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + C(X, PY)\xi \qquad (3.0.25)$$

ve

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X - \tau(X)\xi \qquad (3.0.26)$$

sırasıyla elde edilir. Son olarak (3.0.19) ten ve (3.0.20) ten lokal olarak

$$g(A_N Y, PW) = C(Y, PW); \; \overline{g}(A_N Y, N) = 0 \qquad (3.0.27)$$

ve

$$g(A^*_\xi X, PY) = B(X, PY); \; \overline{g}(A^*_\xi X, N) = 0 \qquad (3.0.28)$$

sırayla elde edillir.[2]

Önerme 3.0.13. *$(M, g, S(TM))$, $(\overline{M}, \overline{g})$' nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M' nin şekil operatörü A_N ' nin özdeğeri sıfırdır.[2]*

Sonuç 3.0.4. *Screen distribüsyonun ikinci temel formu da dejeneredir. [2]*

$S(TM)$' nin şekil operatörünü göz önüne alalım ve (3.0.28) ve (3.0.15) denklemlerinden

$$A^*_\xi \xi = 0 \tag{3.0.29}$$

elde edilir. Yani ξ, sıfır öz değerine karşılık, A^*_ξ için öz vektör alanıdır. Böylece (3.0.12), (3.0.15),(3.0.26) ve (3.0.29)denklemleriyle;

$$\overline{\nabla}_\xi \xi = \nabla_\xi \xi = -\tau(\xi, \xi) \tag{3.0.30}$$

elde ederiz.

Kabul edelim ki $\xi = \sum_{\alpha=0}^{m} \xi^\alpha \frac{\partial}{\partial u^\alpha}$ olsun ve $C : u^\alpha = u^\alpha(t)$, $\alpha \in \{0, ..., m\}$, $t \in I \subset \mathbb{R}$; yani $\xi^\alpha = \frac{\partial u^\alpha}{\partial t}$ veya buna eşdeğer olarak $\xi = \frac{d}{dt}$ ifadesini göz önüne alalım. $T(\xi) \neq 0$ durumunda bu null C eğrisi üzerinde seçeceğimiz yeni parametre t^* olsun öyle ki

$$\frac{d^2 t^*}{dt^2} + \tau(\frac{d}{dt})\frac{dt^*}{dt} = 0$$

olur.

Ayrıca bir parametre, C üzerinde daima mevcuttur. Buradan kolayca görülür ki

$$\nabla_{\frac{d}{dt^*}} \frac{d}{dt^*} = 0$$

dır.[2]

Önerme 3.0.14. *$(M, g, S(TM))$, $(\overline{M}, \overline{g})$' nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $\xi \in \Gamma(T\overline{M}^\perp \mid_U)$ ' nin bir integral eğrisi; sırasıyla ∇ ve $\overline{\nabla}$ konneksiyonlarına göre hem M' nin hem de $\overline{M}$' nün bir null geodeziğidir.*

Önerme (2.1.3)' ün ispatı izlenirse $\Gamma(T\overline{M} \mid_U)$ ile V yer değiştirerek birim vektör alanı $\{W_i\}$, $i \in \{1, ..., m\}$ elde ederiz ki bu $\Gamma(S(TM) \mid_N)$ nin ortonormal bir taban formudur. Şimdi lokal ortonormal tabanı $\{W'_i\}$ ile başka bir screen distribüsyonu olan $S(TM)'$ ve aynı $\xi \in \Gamma(TM^{\perp} |_U)$ ya göre $tr(TM |_U)'$ nün kesiti N' olan ifadeleri göz önüne alalım. Bu durumda hem $S(TM)$ hem de $S(TM)'$ için

$$N' = N - \frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{m} \epsilon_i (c_i)^2\right\}\xi + \sum_{i=1}^{m} c_i W_i$$
$$W_i' = \sum_{j=1}^{m} A_i^j (W_j - \epsilon_j c_j \xi),\ i \in \{1, ..., m\} \quad (3.0.31)$$

elde ederiz. Burada c_i ve A_i^j, U' da diferensiyellenebilir fonksiyonlardır ve $\{\epsilon_1, ...\epsilon_m\}$ ler de $\{W_1, ..., W_m\}$'in işaretleridir. Bir sonuç olarak $S(TM)$ ve $S(TM)'$ ne göre Gauss ve Weingarten denklemleriyle indirgenmiş geometrik nesneler arasındaki ilişkileri aşağıdaki gibi elde ederiz:

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)\{\frac{1}{2}\left\{\sum_{i=1}^{m} \epsilon_i (c_i)^2\right\}\xi - \sum_{i=1}^{m} c_i W_i\} \quad (3.0.32)$$

$$\tau'(X) = \tau(X) + B(X, N' - N), \quad (3.0.33)$$

$$A'_{N'}X = A_N X + \sum_{i=1}^{m}\{\epsilon_i c_i X(c_i) - \tau(X)\epsilon_i (c_i)^2 - \frac{1}{2}\epsilon_i (c_i)^2 B(X, N - N')$$
$$- c_i C(X, W_i)\}\xi + \sum_{i=1}^{m}\{c_i(\tau(X) + B(X, N' - N)) - X(c_i)\}W_i \quad (3.0.34)$$
$$- \sum_{i=1}^{m} c_i \nabla^*_X W_i - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m} \epsilon_i (c_i)^2 A^*_\xi X,$$

$$\overset{*}{A}{}'_\xi = \overset{*}{A}_\xi X + B(X, N - N')\xi \quad (3.0.35)$$

herhangi $X, Y \in \Gamma(TM |_U)$.[2]

Teorem 3.0.2. *$(M, g, S(TM))$, $(\overline{M}, \overline{g})$' nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, ∇ indirgenmiş konneksiyon tektir; yani ∇, $S(TM)$' den bağımsızdır, gerek ve yeter şart M' nin ikinci temel formu h, M' de sıfırdır. [2]*

Şu not da önemlidir ki ∇ indirgenmiş konneksiyon, genelde metrik konneksiyon değildir. Bu gerçeği ifade etmek için U üzerinde bir η 1−formunu

$$\eta(X) = \overline{g}(X, N),\ \forall X \in \Gamma(TM |_U) \quad (3.0.36)$$

şeklinde gösteririz.[2]

Önerme 3.0.15. .

i)(3.0.17) *yani* $\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + h^*(X, PY), \forall X, Y \in \Gamma(TM)$*' den*$\nabla^*$ *lineer konneksiyonu* $S(TM)$*' de metrik konneksiyondur.* (3.0.37)

ii)M *üzerine indirgenmiş* ∇ *konneksiyonu* $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM\mid_U)$ *için*

$(\nabla_X g)(Y, Z) = B(X, Y)\eta(Z) + B(X, Z)\eta(Y)$ *sağlar.* (3.0.38)

[2]

Tanım 3.0.61. *İndirgenmiş konneksiyon* ∇*' ya göre* M*' nin herhangi geodeziği,* $\overline{\nabla}$*' ya göre* $\overline{M}$*' nin geodeziği olursa* M*' ye* $\overline{M}$ ***' nin total(tamamen) geodezik lightlike hiperyüzeyi*** *denir.[2]*

Aşağıdaki teorem, tanımın screen distribüsyona bağlı olmadığını gösterir.

Teorem 3.0.3. $(M, g, S(TM))$*,* $(\overline{M}, \overline{g})$ *semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:*

1. M total geodeziktir.

2. h, M' de sıfırdır.

3. A^*_U herhangi $U \in \Gamma(RadTM)$ için M' de sıfırdır.

4. M üzerinde tek bir metrik konneksiyon vardır.

5. $RadTM$, ∇' ya göre paralel distribüsyondur.

6. $RadTM$, M üzerinde bir Killing distribüsyondur.[2]

İspat. 2)⇔4) ve 3)⇔5) denkliklerini ispatlayalım:

2)⇔4): $h = 0 \Leftrightarrow RadTM$ Killing distribüsyondur.

$(\pounds_\xi g)(Y,Z)=0$ ise Killing distribübüsyondur. $\xi \in RadTM$ için

$$
\begin{aligned}
(\pounds_\xi g)(Y,Z) &= \xi g(Y,Z) - g([\xi,Y],Z) - g(Y,[\xi,Z]) \\
&= g(\nabla_\xi Y,Z) + g(Y,\nabla_\xi Z) - g(\nabla_\xi Y - \nabla_Y \xi, Z) - g(Y,\nabla_\xi Z - \nabla_Z \xi) \\
&= g(\nabla_\xi Y,Z) + g(Y,\nabla_\xi Z) - g(\nabla_\xi Y,Z) + g(\nabla_Y \xi, Z) \\
&- g(Y,\nabla_\xi Z) + g(Y,\nabla_Z \xi) \\
&= g(\nabla_Y \xi, Z) + g(Y,\nabla_Z \xi) \qquad (3.0.39)
\end{aligned}
$$

Öte yandan

$$(\nabla_Y g)(\xi,Z) = B(\xi,Y)\eta(Z) + B(Y,Z)\eta(\xi)$$

ifadesinden yola çıkarsak

$$
\begin{aligned}
Y(g(\xi,Z)) - g(\nabla_Y \xi, Z) - g(\xi,\nabla_Y Z) &= B(Y,Z) \\
&\Rightarrow -g(\nabla_Y \xi, Z) = B(Y,Z)
\end{aligned}
$$

bu ifade (3.0.39) da yerine yazılırsa

$$(\pounds_\xi g)(Y,Z) = -2B(Y,Z)$$

bulunur. O halde

$$(\pounds_\xi g) = 0 \Leftrightarrow B = 0 \Leftrightarrow h = 0$$

dır.

3)⇔5): A^*_ξ, M üzerinde sıfırdır⇔ $RadTM$ paraleldir.

$RadTM$' nin paralel olması için $\xi \in RadTM$ iken $\nabla_X \xi \in RadTM$ olmalıdır.

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X - \tau(X)\xi$$

olup $Y \in S(TM)$ için

$$g(\nabla_X \xi, Y) = -g(A^*_\xi X, Y) - \tau(X)\underbrace{g(\xi,Y)}_{=0}$$

$$g(\nabla_X \xi, Y) = -g(A^*_\xi X, Y)$$

olup $A^*_\xi = 0 \Leftrightarrow \nabla_X \xi \in RadTM$ dir. □

Teorem 3.0.4. *$(M, g, S(TM))$, $(\overline{M}, \overline{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialar dektir:*

i) $S(TM)$ integrallenebilir distribüsyondur.

ii) $h^*(X,Y) = h^*(Y,X)$, $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$.

iii) M' nin şekil operatörü g' ye göre simetriktir; yani

$g(A_V X, Y) = g(X, A_V Y)$; $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$; $V \in \Gamma(tr(TM))$

[11]

Uyarı 3.0.4. *$S(TM)$ integrallenebilir olduğundan M lokal çarpım uzayıdır. Öyle ki M bir $C \times M'$ lokal çarpımdır. Burada C bir null eğri ve M', $S(TM)$' nin bir lifidir. Özellilkle M' nin $3-$ boyutlu Lorentz $(\overline{M}, \overline{g})$ manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olduğunu kabul edelim. Buradan rankın 1 olmasından dolayı herhangi bir $S(TM)$ integrallenebilirdir. Böylece M bir $C_1 \times C_2$ lokal çarpımıdır, burada C_1 ve C_2 sırasıyla $\overline{M}$' nin null ve spacelike eğrisidir.* ■ *[2]*

Şimdi kabul edelim ki $S(TM)$ distribüsyonu ∇' ya göre paralel olsun; yani herhangi $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $\nabla_X PY \in \Gamma(S(TM))$ olsun. ∇ bir torsiyonsuz konneksiyon olduğundan $S(TM)$ integrallenebilirdir. Dahası (3.0.17) ve (3.0.18) denklemlerinden aşağıdaki önermeyi elde ederiz:

Önerme 3.0.16. *$(M, g, S(TM))$, $(\overline{M}, \overline{g})$' nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, aşağıdaki ifadeler denktir:*

i) *$S(TM)$, indirgenmiş ∇ konneksiyonuyla birlikte paraleldir.*

ii)*M üzerinde h^* sıfırdır.*

iii) *M üzerinde A_N sıfırdır.*

[2]

3.0.4 Lightlike Hiperyüzeyler İçin Gauss-Codazzi Denklemleri

$(M, g, S(TM))$, $(\overline{M}, \overline{g})$ semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi ve $\overline{\nabla}$, $\overline{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyon ve ∇ da M üzerinde indirgenmiş konneksiyon olsun. $\overline{\nabla}$' nın eğrilik tensörü $\overline{R}$ ile ve ∇' nın eğrilik tensörünü de R ile tanımlayalım. Daha sonra

$$R(X, Y)Z = \nabla_X(\nabla_Y Z) - \nabla_Y(\nabla_X Z) - \nabla_{[X,Y]}Z$$

denklemi ve (3.0.6) ve (3.0.7) denklemleri kullanılarak yani;

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y)$$

$$\overline{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^t_X V$$

denklemleri kullanılarak ;

$$\overline{R}(X, Y)Z = R(X, Y)Z + (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X \tag{3.0.40}$$

elde edilir. Burada herhangi $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = \nabla^t_X(h(Y, Z)) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{3.0.41}$$

dir.(3.0.40)'tan (3.0.10), (3.0.15) ve (3.0.19)'u göz önüne alırsak; yani

$$h(X, Y) = B(X, Y)N$$

$$B(X, \xi) = 0$$

$$g(A_V Y, PW) = \overline{g}(V, h^*(Y, PW)); \, \overline{g}(A_V Y, V) = 0,$$

denklemlerini kullanırsak

$$\begin{aligned} \overline{g}(\overline{R}(X, Y)Z, PW) &= g(R(X, Y)Z, PW) + \overline{g}(h(X, Z), h^*(Y, PW)) \\ &\quad - \overline{g}(h(Y, Z), h^*(X, PW)) \end{aligned} \tag{3.0.42}$$

$$\overline{g}(\overline{R}(X, Y)Z, U) = \overline{g}((\nabla_X h)(Y, Z) - \overline{g}(\nabla_Y h)(X, Z), U) \tag{3.0.43}$$

ve

$$\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,V) = \overline{g}(R(X,Y)Z,V) \tag{3.0.44}$$

ifadeleri herhangi $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$, $U \in \Gamma(TM^{\perp})$, $V \in \Gamma(tr(TM))$ için elde edilir.[2]

Tanım 3.0.62. *(3.0.42), (3.0.43) ve (3.0.44) denklemlerine* $(M, g, S(TM))$ *lightlike hiperyüzeyinin* ***Gauss-Codazzi denklemleri*** *denir. [2]*

Gerçekten bu denklemler $S(TM)$' ye bağlıdır. Ancak (3.0.42), (3.0.43) ve (3.0.44) denklemlerinde Z ile U 'nun yerini değiştirdiğimizde $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$, $U \in \Gamma(TM^{\perp})$ için

$$R(X,Y)U = \overline{R}(X,Y)U \tag{3.0.45}$$

ifadesini elde ederiz. [2] Böylece şu önermeyi verebiliriz:

Önerme 3.0.17. $(M, g, S(TM))$, $(\overline{M}, \overline{g})$*' nin lightlike hiperyüzeyi olsun.* $TM^{\perp}$ *üzerine* ∇*' nın eğrilik formunun kısıtlanması* $S(TM)$*' den bağımsızdır. [2]*

Şimdi teorem(3.0.1)'de olduğu gibi $U \subset M$ üzerinde $\{\xi, N\}$ çiftini göz önüne alalım ve (3.0.10), (3.0.11) ve (3.0.23)' i kullanarak (3.0.42),(3.0.43) ve (3.0.44) için lokal ifadeleri elde etmiş oluruz:

$$\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,PW) = g(R(X,Y)Z,PW) + B(X,Z)C(Y,PW) - B(Y,Z)C(X,PW) \tag{3.0.46}$$

$$\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,\xi) = g(R(X,Y)Z,\xi) \tag{3.0.47}$$

$$= (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) + B(Y,Z)\tau(X) - B(X,Z)\tau(Y) \tag{3.0.48}$$

$$\overline{g}(\overline{R}(X,Y)Z,N) = \overline{g}(R(X,Y)Z,N) \tag{3.0.49}$$

Herhangi $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM\mid_U)$ için

$$(\nabla_X B)(Y,Z) = X(B(Y,Z)) - B(\nabla_X Y, Z) - B(Y, \nabla_X Z) \tag{3.0.50}$$

(3.0.28)'den

$$B(X, A_\xi^* Y) = B(Y, A_\xi^* X)$$

$\forall X, Y \in \Gamma(TM \mid_U)$ için bulunur. [2]

Önerme 3.0.18. *$\overline{M}$' nin lightlike hiperyüzeyi M' nin herhangi screen distribüsyonunun şekil operatörü M' nin ikinci temel formuna göre simetriktir.[2].*

$$\overline{g}(\overline{R}(X, Y)PZ, N) = (\nabla_X C)(Y, PZ) - (\nabla_Y C)(X, PZ) + \tau(Y)C(X, PZ) \tag{3.0.51}$$

$$- \tau(X)C(Y, PZ)$$

$$g(R(X, Y)PZ, PW) = g(R^*(X, Y)PZ, PW) + C(X, PZ)B(Y, PW) \tag{3.0.52}$$

$$- C(Y, PZ)B(X, PW)$$

$$\overline{g}(\overline{R}(X, Y)\xi, N) = C(Y, A_\xi^* X) - C(X, A_\xi^* Y) - 2d\tau(X, Y) \tag{3.0.53}$$

herhangi $X, Y, Z \in \Gamma(TM \mid_U)$ için

$$(\nabla_X C)(Y, PZ) = X(C(Y, PZ)) - C(\nabla_X Y, PZ) - C(Y, \nabla_X^* PZ) \tag{3.0.54}$$

elde ederiz.

Tanım 3.0.63. *$x \in \bar{M}$ ve $T_x\bar{M}$' nin bir null vektörü U olsun. Eğer $T_x\bar{M}$' nin bir H düzlemi herhangi $W \in H$ için $\bar{g}_x(U, W) = 0$ olacak şekilde bir U içeriyorsa ve $\bar{g}_x(W_0, W_0) \neq 0$ olacak şekilde $W_0 \in H$ mevcut ise H düzlemine U* ***tarafından yönlendirilmiş bir null düzlem*** *denir. [2]*

H' nın U ve $\bar{\nabla}$' ya göre null kesit eğriliği bir sayı olarak

$$\overline{K}_U(H) = \frac{\overline{g}_x(\overline{R}(W, U)U, W)}{\overline{g}_x(W, W)} \tag{3.0.55}$$

dir.Burada W, H' da keyfi bir non-null vektördür. $\overline{K}_U(H)$' nın W' den bağımsız, U üzerindeki kuadratik biçime bağlıdır.[2]

Lemma 3.0.1. *$n \geq 3$ olmak üzere bir $n-$ boyutlu Lorentz manifold sabit eğriliklidir gerek ve yeter şart null kesit eğrilikleri her yerde sıfırdır. [2]*

$u \in M$' yi ve $\xi_u \in T_uM^{\perp}$ tarafından yönlendirilen T_uM' nin bir null H düzlemini göz önüne alalım. Benzer şekilde bir reel sayı olarak ∇ ve ξ_u'ya göre H' nın null kesit eğriliği olarak

$$K_{\xi_u}(H) = \frac{g_u(R(W_u, \xi_u)\xi_u, W_u)}{g_u(W_u, W_u)} \tag{3.0.56}$$

göz önüne alalım. Burada W_u, H' da keyfi bir non-null vektördür. O zaman (3.0.46), (3.0.55), (3.0.56) ve (3.0.1)'den aşağıdaki önermeyi elde ederiz:

Önerme 3.0.19. *$(M, g, S(TM))$, $(\bar{M}, \bar{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman şu ifadeleri elde ederiz:*

1. ξ_u tarafından yönlendirilmiş T_uM'nin herhangi null düzlemi için

   $$K_{\xi_u}(H) = \bar{K}_{\xi_u}(H)$$

   tır.

2. Özellikle de M sabit eğrilikli manifold ise bu durumda ξ_u tarafından yönlendirilmiş T_uM'nin her H null düzlemi her yerde sıfır null kesit eğriliklli $K_{\xi}(H)$'tır.

A_N şekil operatörünün U'daki rankı M'nin herhangi bir u noktasında type (tip) numarası $t(u)$'dur; yani (3.0.27)'deki ikinci bağıntı ile; yani $\bar{g}(A_NY, N) = 0$ ifadesi ile herhangi $u \in M$ için $t(u) \leq m$ elde edilmiş olur.

Teorem 3.0.5. *Bir $(m+2)-$boyutlu semi-Riemann $(\bar{M}, \bar{g})$ manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ olsun; öyle ki herhangi $u \in M$ için $t(u) = m$ olsun. Bu durumda M total geodeziktir gerek ve yeter şart M üzerinde indirgenmiş konneksiyon, $\overline{M}$ üzerinde indirgenmiş konneksiyonla aynı eğrilik tensörüne sahip ise; yani $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için*

$$R(X, Y)Z = \bar{R}(X, Y)Z$$

ise. [2]

4. BİR LORENTZIAN UZAY FORMUNUN EINSTEIN LIGHTLIKE HİPERYÜZEYLERİNİN BİR SINIFLANDIRILMASI

Tanım 4.0.64. *$\overline{M}$ bir $(m+2)-$ boyutlu semi-Riemann manifold olsun. Bu durumda $R\bar{i}c$ ile gösterilen $\overline{M}$'nin Ricci tensörü herhangi $X, Y \in \Gamma(T\overline{M})$ için*

$$R\bar{i}c(X,Y) = trace\{Z \to \overline{R}(X,Z)Y\} \tag{4.0.1}$$

şeklinde tanımlanır.[14]

Bu durumda $R\bar{i}c$ ifadesi

$$R\bar{i}c(X,Y) = \sum_{i=1}^{m+2} \epsilon_i \overline{g}(\overline{R}(E_i, X)Y, E_i)$$

ile verilir. Burada $\{E_1, ..., E_{m+2}\}$ $T\overline{M}$' nin bir ortonormal bazıdır.[14]

Eğer $\overline{M}$ üzerindeki Ricci tensör sıfır ise $\overline{M}$ Ricci flattır. [14]

Tanım 4.0.65. *$\overline{r}$ skaler eğriliği*

$$\overline{r} = \sum_{i=1}^{m+2} \epsilon_i R\bar{i}c(E_i, E_i) \tag{4.0.2}$$

şeklinde tanımlanır. [14]

4.0.5 İndirgenmiş Ricci ve Skaler Eğrilikler

M üzerinde indirgenmiş bir quasi-ortonormal $\{\xi, W_a\}$ çatı alanını göz önüne alalım. Burada $RadTM = Span\{\xi\}$, $S(TM) = Span\{W_a\}$ ve $E = \{\xi, N, W_a\}$ $\overline{M}$'deki çatı alanına karşılık gelsin. Bu durumda (4.0.1) kullanılırsa

$$R\bar{i}c(X,Y) = \sum_{a=1}^{m} \epsilon_a \overline{g}(\overline{R}(W_a, X)Y, W_a) + \overline{g}(\overline{R}(\xi, X)Y, N) + \overline{g}(\overline{R}(N, X)Y, \xi) \tag{4.0.3}$$

ifadesi bulunur. Burada ϵ_a, W_a vektör alanının (± 1) kausal karakterini gösterir.

Verilen

$$R^{(0,2)}(X,Y) = trace\{Z \to R(X,Z)Y\}, \ \forall X,Y \in \Gamma(TM) \tag{4.0.4}$$

ifadesi ile $R^{(0,2)}$, M üzerinde $(0,2)$ tipinde indirgenmiş tensör alanını göstersin. M üzerinde $\{\xi, W_a\}$ indirgenmiş quasi-ortonormal çatı alanını kullanarak

$$R^{(0,2)}(X,Y) = \sum_{a=1}^{m} \epsilon_a g(R(W_a,X)Y,W_a) + \overline{g}(R(\xi,X)Y,N)$$

ifadesini elde ederiz.(3.0.46) ve (3.0.47) Gauss-Codazzi eşitlikleri (4.0.3)'te yerine yazıldığında ve sonrasında

$$B(X,Y) = g(A^*_\xi X,Y) \text{ ve } C(X,PY) = g(A_N X,PY)$$

eşitliklerini kullandığımızda $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X,Y) = R\bar{i}c(X,Y) + B(X,Y)trA_N - g(A_N X, A^*_\xi Y) - \overline{g}(R(\xi,Y)X,N) \tag{4.0.5}$$

denklemini elde ederiz.(3.0.53) ve (4.0.5) kullanılırsa ve Birinci Bianchi özdeşliğini kullanırsak

$$R^{(0,2)}(X,Y) - R^{(0,2)}(Y,X) = 2d\tau(X,Y)$$

ifadesini bulmuş oluruz.[14]

Tanım 4.0.66. *$(\overline{M},\overline{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi $(M,g,S(TM))$ olsun.*

$$R^{(0,2)}(X,Y) = trace\{Z \to R(X,Z)Y\}, \ \forall X,Y \in \Gamma(TM)$$

ile verilen M' nin bir $R^{(0,2)}$ tensörü simetrik ise bu tensör ***indirgenmiş Ricci tensör*** *olarak adlandırılır. [15]*

Teorem 4.0.6. *$(M,g,S(TM))$, $(\overline{M},\overline{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda indirgenmiş ∇ konneksiyonunun Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şart $S(TM)$ tarafından indirgenmiş her bir τ $1-$formu kapalıdır; yani herhangi $U \subset M$' de $d\tau = 0$ dır.[2]*

İspat. Bu ispatın yapılabilmesi için

$$R^{(0,2)}(X,Y) - R^{(0,2)}(Y,X) = 2d\tau(X,Y)$$

ifadesini elde etmemiz gerekiyor. Bunun için öncelikle $R^{(0,2)}(X,Y)$'yi bulalım.

$X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(E_i,X)Y,E_i) + \overline{g}(R(\xi,X)Y,N)$$

dir. $\{\xi, E_1, ...E_n\}$, M üzerinde

$$TM = S(TM) \perp TM^{\perp}$$

ayrışımına göre ortonormal bir bazdır. $\varepsilon_i = 1$, $1 \leq i \leq n$. Buradan Gauss-Codazzi denklemlerinden (3.0.42) denklemi kullanılarak

$$\begin{aligned} g(R(E_i,X)Y,E_i) &= \bar{g}(\bar{R}(E_i,X)Y,E_i) + \bar{g}(h(X,Y),h^*(E_i,E_i)) - \bar{g}(h(E_i,Y),h^*(X,E_i)) \\ &= \bar{g}(\bar{R}(E_i,X)Y,E_i) + B(X,Y).C(E_i,E_i) - B(E_i,Y).C(X,E_i) \end{aligned}$$

dir. Böylece,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} g(R(E_i,X)Y,E_i) =& \sum_{i=1}^{n} \bar{g}(\bar{R}(E_i,X)Y,E_i) + B(X,Y).C(E_i,E_i) - \sum_{i=1}^{n} B(E_i,Y)C(X,E_i) \\ =& \sum_{i=1}^{n} \bar{g}(\bar{R}(E_i,X)Y,E_i) + B(X,Y)g(A_N E_i,E_i) \\ & - \sum_{i=1}^{n} g(A_\xi^* Y,E_i)g(A_N X,E_i) \\ =& \sum_{i=1}^{n} \bar{g}(\bar{R}(E_i,X)Y,E_i) + B(X,Y)\Big(\sum_{i=1}^{n} g(A_N E_i,E_i) + \bar{g}(A_N \xi,N)\Big) \\ & - g(A_N X, A_\xi^* Y) \end{aligned}$$

ve diğer yandan

$$\bar{g}(R(\xi,X)Y,N) = \bar{g}(\bar{R}(\xi,X)Y,N)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n} g(R(E_i,X)Y,E_i) + \bar{g}(R(\xi,X)Y,N) =& \sum_{i=1}^{n} \bar{g}(\bar{R}(E_i,X)Y,E_i) + \bar{g}(\bar{R}(\xi,X)Y,N) \\ & + B(X,Y)trA_N - g(A_N X, A_\xi^* Y) \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$R^{(0,2)}(X,Y) = Ric(X,Y) = R\bar{i}c(X,Y) + B(X,Y)trA_N - g(A_NX, A_\xi^*Y) - \eta(\bar{R}(\xi,Y)X)$$

dir. Benzer şekilde

$$R^{(0,2)}(Y,X) = R\bar{i}c(Y,X) + B(Y,X)trA_N - g(A_NY, A_\xi^*X) + \eta(\bar{R}(\xi,Y)X)$$

bulunmuş olur. Böylece

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X,Y) - R^{(0,2)}(Y,X) = R\bar{i}c(X,Y) + B(X,Y)trA_N - g(A_NX, A_\xi^*Y) \\ - g(\bar{R}(\xi,Y)X,N) - R\bar{i}c(Y,X) - B(Y,X)trA_N \\ + g(A_NY, A_\xi^*X) - g(\bar{R}(\xi,X)Y,N) \end{aligned} \tag{4.0.6}$$

elde edilir.

$$R\bar{i}c(X,Y) - Ric(X,Y) = \bar{g}(\bar{R}(N,X)Y,\xi)$$
$$R\bar{i}c(Y,X) - Ric(Y,X) = \bar{g}(\bar{R}(N,Y)X,\xi)$$

denklemlerini (4.0.6) denkleminde yerine yazarak bulduğumuz

$$0 = \bar{g}(\bar{R}(N,X)Y,\xi) - \bar{g}(\bar{R}(\xi,Y)X,N) - g(A_NX, A_\xi^*Y)$$
$$0 = \bar{g}(\bar{R}(N,Y)X,\xi) - \bar{g}(\bar{R}(\xi,X)Y,N) - g(A_NY, A_\xi^*X)$$

denklemleri alt alta çıkardığımızda

$$\begin{aligned} 0 &= \bar{g}(\bar{R}(N,X)Y,\xi) - \bar{g}(\bar{R}(\xi,Y)X,N) - g(A_NX, A_\xi^*Y) - \bar{g}(\bar{R}(N,Y)X,\xi) \\ &\quad + \bar{g}(\bar{R}(\xi,X)Y,N) + g(A_NY, A_\xi^*X) \\ &= \bar{g}(\bar{R}(N,X)Y,\xi) + \bar{g}(\bar{R}(Y,\xi)X,N) + \underbrace{\bar{g}(\bar{R}(X,Y)\xi,N) + 2d\tau(X,Y)}_{\text{(3.0.53) denkleminden}} \\ &\quad - \bar{g}(\bar{R}(N,Y)X,\xi) + \bar{g}(\bar{R}(\xi,X)Y,N) \\ &= \bar{g}(\bar{R}(N,X)Y,\xi) - \bar{g}(\bar{R}(N,Y)X,\xi) + \bar{g}(\bar{R}(Y,\xi)X + \bar{R}(X,Y)\xi + \bar{R}(\xi,X)Y,N) \\ &\quad + 2d\tau(X,Y) \text{ (1.Bianchi Özdeşliği'nden)} \\ &= 2d\tau(X,Y) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece indirgenmiş ∇ konneksiyonunun Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şart $d\tau = 0$ olmasıdır. $\square$

Not 4.0.2. *Kabul edelim ki $R^{(0,2)}$ simetrik bir Ric, Ricci tensörü olsun. Bu durumda yukarıdaki teoremden τ kapalı $1-$formdur. Böylece U üzerinde bir diferensiyellenebilir f fonksiyonu vardır öyle ki $\tau = df$'tir. Sonuç olarak $\tau(X) = X(f)$ elde ederiz. Eğer $\overline{\xi} = \alpha\xi$ alırsak bunun sonucunda $\tau(X) = \overline{\tau}(X) + X(\ln\alpha)$ olur. Bu eşitlikte $\alpha = \exp(f)$ ifadesini kullandığımızda herhangi $X \in \Gamma(TM_{|U})$ için $\overline{\tau}(X) = 0$ elde ederiz. U üzerindeki $\{\xi, N\}$ çifti M**' nin kanonik null çifti** olarak adlandırılır; eğer bu çifte karşılık gelen τ $1-$formu sıfır ise.[14]*

Tanım 4.0.67. *Bir $(\overline{M}, \overline{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike $(M, g, S(TM))$ hiperyüzeyi **ekran(screen) konformdur**; eğer M' nin A_N ve A_ξ^* şekil operatörleri ve $S(TM)$ screen distribüsyonu arasında sırasıyla*

$$A_N = \varphi A_\xi^*$$

*bağıntısı varsa. Burada φ, M' nin U komşuluğunda sıfır olmayan bir fonksiyondur. Eğer φ sıfır olmayan bir sabit ise M' ye **ekran homotetik** denir.[16]*

$$B(X,Y) = g(A_\xi^* X, Y)$$
$$C(X, PY) = g(A_N X, PY)$$

bağıntıları gösterir ki M ekran konformdur gerek ve yeter şart B ve C ikinci temel formları $U \subseteq M$ üzerindeki bazı diferensiyellenebilir φ fonksiyonları için.

$$C(X, PY) = \varphi B(X,Y), \; \forall X, Y \in \Gamma(TM_{|U})$$

ifadesini sağlar. [14]

Ekran konform lightlike hiperyüzeyler için aşağıdaki sonuçlar verilebilir:

Sonuç 4.0.5. *$(M, g, S(TM))$, $(\overline{M}(c), \overline{g})$ semi-Riemann manifoldunun sabit c eğrilikli ekran konform lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M, bir indirgenmiş simetrik Ricci tensörünü verir.[16]*

Sonuç 4.0.6. *Genel olarak* $C(X,Y)-C(Y,X) = \eta([X,Y])$ *dir,* $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ *için. M' nin ekran konform lightlike hiperyüzey olmasından dolayı herhangi* $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ *için* $\eta([X,Y]) = 0$ *dır.Böylece* $S(TM)$ *screen distribüsyonu integrallenebilirdir.[2]*

İspat.

$$\begin{aligned}
\eta([X,Y]) &= \overline{g}([X,Y],N) \\
&= \overline{g}(\nabla_X Y - \nabla_Y X, N) \\
&= \overline{g}(\nabla_X Y, N) - \overline{g}(\nabla_Y X, N) \\
&= \overline{g}(\nabla^*_X Y + h^*(X,Y), N) - \overline{g}(\nabla^*_Y X + h^*(Y,X), N) \\
&= \overline{g}(\nabla^*_X Y, N) + \overline{g}(h^*(X,Y), N) - \bar{g}(\nabla^*_Y X, N) - \bar{g}(h^*(Y,X), N) \\
&= \overline{g}(h^*(X,Y), N) - \overline{g}(h^*(Y,X), N) \\
&= C(X,Y) - C(Y,X)
\end{aligned}$$

dir. M ekran konform lightlike hiperyüzey olduğundan şekil operatörleri değişimlidir. Yani ;

$$g(A_N X, Y) = g(X, A_N Y)$$

dir.

$$C(X,Y) = g(A_N X, Y)$$
$$C(Y,X) = g(A_N Y, X)$$

ifadelerini kullanırsak

$$\begin{aligned}
C(X,Y) - C(Y,X) &= g(A_N X, Y) - g(A_N Y, X) \\
&= g(\varphi A^*_\xi X, Y) - g(\varphi A^*_\xi Y, X) \\
&= \varphi g(A^*_\xi X, Y) - \varphi g(A^*_\xi Y, X) \\
&= \varphi(g(A^*_\xi X, Y) - g(A^*_\xi Y, X)) \\
&= \varphi(B(X,Y) - B(Y,X)) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur ve $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ iken $[X, Y] \in \Gamma(S(TM))$ olduğundan $S(TM)$ distribüsyonu integrallenebilirdir. $\square$

Sonuç 4.0.7. *$(M, g, S(TM))$, $(\overline{M}, \overline{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir ekran konform lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M bir $C \times M^*$ lokal çarpım manifoldudur. Burada C bir null eğri ve M^*, $S(TM)$' nin bir lifidir.[15]*

Önerme 4.0.20. *$(M, g, S(TM))$, $(\overline{M}(c), \overline{g})$' nin bir screen homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$2\varphi(\tau)(\xi)B(X, PZ) = -cg(X, PZ)$$

dir.[1]

İspat. $\overline{M}$, c sabit eğrilikli bir semi-Riemann manifold olduğundan (3.0.47) den, yani;

$$\overline{g}(\overline{R}(X, Y)Z, \xi) = (\nabla_X B)(Y, Z) - (\nabla_Y B)(X, Z) + B(Y, Z)\tau(X) - B(X, Z)\tau(Y)$$

ifadesinden

$$(\nabla_X B)(Y, Z) - (\nabla_Y B)(X, Z) = B(X, Z)\tau(Y) - B(Y, Z)\tau(X) \tag{4.0.7}$$

eşitliğini elde ederiz. Ayrıca (3.0.51) denkleminden; yani

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)PZ, N) &= (\nabla_X C)(Y, PZ) - (\nabla_Y C)(X, PZ) + \tau(Y)C(X, PZ) \\ &\quad - \tau(X)C(Y, PZ) \\ &= \varphi(\nabla_X B)(Y, PZ) - \varphi(\nabla_Y B)(X, PZ) + \varphi(B(X, PZ))\tau(Y) \\ &\quad - \varphi(B(Y, PZ))\tau(X) \end{aligned}$$

dir.(4.0.7) denklemini kullanırsak

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)PZ, N) &= \varphi(B(X, PZ)\tau(Y) - B(Y, PZ)\tau(X)) + \varphi(B(X, PZ))\tau(Y) \\ &\quad - \varphi(B(Y, PZ))\tau(X) \\ &= 2\varphi\{B(X, PZ)\tau(Y) - B(Y, PZ)\tau(X)\} \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.Öte yandan $\overline{M}$, c sabit eğrilikli olduğundan

$$g(R(X,Y)PZ,N) = c\{g(Y,PZ).g(X,N) - g(X,PZ)g(Y,N)\} \tag{4.0.8}$$
$$= c\{g(Y,PZ)\eta(X) - g(X,PZ)\eta(Y)\}$$

dir. O halde (3.0.51) ve (4.0.8) denklemlerinin sol tarafları eşit olduğundan sağ tarafları da eşit olur ve

$$2\varphi\{B(X,PZ)\tau(Y) - B(Y,PZ)\tau(X)\} = c\{g(Y,PZ)\eta(X) - g(X,PZ)\eta(Y)$$

ifadesi elde edilir. Bu son eşitlikte Y yerine ξ yazılırsa

$$2\varphi\{B(X,PZ)\tau(\xi) - \underbrace{B(\xi,PZ)\tau(X)}_{0}\} = c\{\underbrace{g(\xi,PZ)}_{0}\eta(X) - g(X,PZ)\eta(\xi)\}$$
$$2\varphi B(X,PZ)\tau(\xi)) = -cg(X,PZ)\eta(\xi)$$
$$2\varphi(\tau)(\xi)B(X,PZ) = -cg(X,PZ)$$

bulunmuş olur. □

4.0.6 Lightlike Einstein Hiperyüzeyler

Tanım 4.0.68. *Eğer boy*$(\overline{M}) > 2$ *ve*

$$R\bar{i}c = \overline{k}\overline{g} \ , \ \overline{k} \ \textit{bir sabit} \tag{4.0.9}$$

ise bu durumda $\overline{M}$ *bir* ***Einstein manifold****dur.[1]*

∘ Eğer *boy*$(\overline{M}) = 2$ ise herhangi $\bar{M}$ Einsteindir; fakat (4.0.9)daki $\overline{k}$' nın sabit olmasına gerek yoktur.[1]

∘ $\overline{M}$ Einstein'dir gerek ve yeter şart $\overline{k} = \frac{\overline{r}}{m+2}$ dir. Burada $\overline{r}$, $\overline{M}$'nin skaler eğriliğidir.[1]

∘ Açık olarak bir $(M, g, S(TM))$ lightlike Einstein hiperyüzeyinin bir geometrik kavramı kendi skaler eğriliğini içermelidir. Böylece bir M lightlike Einstein hiperyüzeyin iyi tanımlı bir kavramı için M bir simetrik Ricci tensörünü içinde bulundurmayı garanti etmelidir ki bu indirgenmiş skaler eğrilik hesaplanabilmelidir.[1]

Tanım 4.0.69.

$$B(X,Y)_p = ag(X,Y)_p,\ \forall X,Y \in T_pM$$

ise non-dejenere durumundan dolayı M' nin bir p noktası ***umbilik*** *olarak adlandırılır. Burada $a \in \mathbb{R}$ ve p'ye bağlıdır. [1]*

Tanım 4.0.70. *M'nin her bir noktası umbilik ise; yani $B = \rho g$ ise (burada ρ diferensiyellenebilir bir fonksiyon) M, $\overline{M}$'de* ***total umbiliktir*** *denir.[1]*

∘ M total umbiliktir gerek ve yeter şart her bir U'da ρ vardır öyle ki

$$A_\xi^*(PX) = \rho PX, \text{ her bir } X \in \Gamma(TM_{|U}) \qquad (4.0.10)$$

için.[1]

∘ Özellikle

$$B = 0 \Longleftrightarrow \rho = 0$$

ise M, $\bar{M}$'de total geodeziktir. [1]

Not 4.0.3. *Önerme(4.0.20)'nin hipotezi altında şunu gösterebiliriz ki; $\tau = 0$ ise $c = 0$'dır ve $\tau(\xi) \neq 0$ ise M, $\overline{M}$'de total umbilik olur.[14]:*

Özellikle kabul edelim ki $(M, g, S(TM))$, c sabit eğrilikli $(\overline{M}(c), \overline{g})$ semi-Riemann manifoldunun total geodezik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

ifadesini kullanırsak

$$\overline{R}(\xi,Y)X = \overline{g}(X,Y)\xi$$

eşitliğini bulmuş oluruz.(3.0.47) denkleminden;

$$\overline{g}(\overline{R}(\xi,Y)X,N) = \overline{g}(R(\xi,Y)X,N)$$

elde edilir. Hem

$$R^{(0,2)}(X,Y) = R\bar{i}c(X,Y) + B(X,Y)trA_N - g(A_NX, A_\xi^*Y) - \overline{g}(R(\xi,Y)X,N)$$

denkleminden hem de teorem(3.0.3) nın (2) ve (3) maddelerinden

$$Ric(X,Y) = R\bar{i}c(X,Y) - c\overline{g}(X,Y)$$

elde edilir; ki bu $\overline{g}$ simetrik olduğundan simetriktir.[1] Böylece aşağıdaki önermeyi elde ederiz:

Önerme 4.0.21. *$\overline{M}(c)$' nin herhangi bir total geodezik lightlike hiperyüzeyi bir indirgenmiş simetrik Ricci tensörünü içerir.[1]*

Aşağıdaki sonuçları vurgulayalım:

∘ Total geodezik screen distribüsyon ile $\overline{M}(c)$'de hiçbir lightlike hiperyüzey yoktur.

∘ $\overline{M}(c)$'nin herhangi lightlike hiperyüzeyi proper total umbilik screen distribüsyon ile ya total umbiliktir ya da $\overline{M}(c)$'de total geodezik immerseddir.

∘ $3-$boyutlu Lorentz manifoldun herhangi lightlike hiperyüzeyi ya total umbiliktir ya da total geodeziktir.[1]

Şimdi lightlike Einstein hiperyüzey kavramından bahsedelim:

Tanım 4.0.71. *$(M, g, S(TM))$, $(m+2)-$boyutlu semi-Riemann $(\overline{M}, \overline{g})$ manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun öyle ki M bir indirgenmiş simetrik Ric Ricci tensörünü içersin. Bu durumda*

$$Ric(X,Y) = kg(X,Y),\ \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{4.0.11}$$

*ise M **Einstein hiperyüzey** olarak adlandırılır. Burada $m > 1$ ise k bir sabittir.[1]*

Biz sabit k ile M'nin indirgenmiş skaler eğriliği arasında bağlantı kurmadıkça genellikle yukarıdaki tanım geometrik anlama sahip olmaz, ki bu herhangi bir $\overline{M}$'nin bir hiperyüzeyi için mümkün değildir.[1]

$\overline{M}$' nin (4.0.2)'da tanımlanan $\overline{r}$ skaler eğriliği ve M'nin r skaler toplamından (4.0.2) kullanılarak

$$\overline{r} = R\bar{i}c(\xi,\xi) + R\bar{i}c(N,N) + \sum_{a=1}^{m} \epsilon_a R\bar{i}c(W_a, W_a)$$

$$r = R^{(0,2)}(\xi,\xi) + \sum_{a=1}^{m} \epsilon_a R^{(0,2)}(W_a, W_a)$$

sırasıyla elde edilir. Bu bağıntılardan ve (4.0.5)'ten

$$R^{(0,2)}(\xi,\xi) = R\bar{i}c(\xi,\xi)$$

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(W_a,W_a) &= R\bar{i}c(W_a,W_a) + g(A_\xi^* W_a, W_a) tr A_N - g(A_N W_a, A_\xi^* W_a) \\ &- \overline{g}(R(\xi,W_a)W_a, N) \end{aligned}$$

ifadelerini elde ederiz. Böylece

$$\begin{aligned} r &= \overline{r} + trA_\xi^* trA_N - tr(A_\xi^* A_N) - \sum_{a=1}^{m} \epsilon_a \{\overline{g}(R(\xi,W_a)W_a,N) \\ &+ \overline{g}(\overline{R}(N,W_a)W_a,N)\} \end{aligned} \tag{4.0.12}$$

dir. $\overline{M}$ bir Lorentziyen uzay formu olduğundan

$$\overline{R}(\xi,Y)X = c\overline{g}(X,Y)\xi$$

$$R\bar{i}c(X,Y) = (m+1)c\overline{g}(X,Y)$$

ve

$$\overline{r} = cm(m+1)$$

$$\overline{g}(\overline{R}(N,W_a)W_a,N) = 0$$

dır. Böylece

$$R^{(0,2)}(X,Y) = mcg(X,Y) + B(X,Y)trA_N - g(A_N X, A_\xi^* Y) \tag{4.0.13}$$

$$r = m^2 c + trA_\xi^* trA_N - tr(A_\xi^* A_N) \tag{4.0.14}$$

dır.(4.0.13), (4.0.14) ve M' nin Einstein olmasından dolayı

$$\begin{aligned} r &= Ric(\xi,\xi) + \sum_{a=1}^{m} \epsilon_a Ric(W_a,W_a) \\ &= kg(\xi,\xi) + k\sum_{a=1}^{m} \epsilon_a g(W_a,W_a) \\ &= km \end{aligned}$$

ifadesi elde edilir.Böylece

$$Ric(X,Y) = (\frac{r}{m}).g(X,Y) \tag{4.0.15}$$

ifadesini elde ederiz ki bu lightlike Einstein hiperyüzeylerin $k = \frac{r}{m}$ sabitinin gösterildiği gibi yorumlanmasını sağlar [1]. ξ, A^*_ξ ın 0 özdeğerine karşılık gelen öz vektör alanı olduğu için ve A^*_ξ 'ın $\Gamma(S(TM))$- değerli reel simetrik olmasından dolayı A^*_ξ, $S(TM)$'de m tane reel ortonormal öz vektör alanı içerir ve ortogonal operatör tarafından köşegenleştirilebilir.[1]

A^*_ξ 'ın $\{\xi, E_1, ..., E_m\}$ öz vektörlerinin bir çatı alanını göz önüne alalım. Öyle ki $\{E_1, ..., E_m\}$, $S(TM)$'nin ortonormal çatı alanıdır. Bu durumda

$$A^*_\xi E_i = \lambda_i E_i,\ 1 \leq i \leq m$$

M screen konformal ve $Ric = kg$ olduğundan (4.0.13) denkleminden

$$g(A^*_\xi X, A^*_\xi Y) - sg(A^*_\xi X, Y) + \varphi^{-1}(k - mc)g(X,Y) = 0 \tag{4.0.16}$$

ifadesine kısaltılır. Burada $s = trA^*_\xi$dır.[1]

Gerçekten de (4.0.13) denklemini kullanırsak

$$R^{(0,2)}(X,Y) = m.c.g(X,Y) + B(X,Y)trA_N - g(A_N X, A^*_\xi Y)$$
$$R^{(0,2)}(X,Y) = m.c.g(X,Y) + g(A^*_\xi X,Y)trA_N - g(\varphi A^*_\xi X, A^*_\xi Y)$$

$$kg(X,Y) = m.c.g(X,Y) + g(A^*_\xi X,Y)trA_N - \varphi g(A^*_\xi X, A^*_\xi Y)$$
$$kg(X,Y) = m.c.g(X,Y) + \varphi g(A^*_\xi X,Y)trA^*_\xi - \varphi g(A^*_\xi X, A^*_\xi Y)$$

$$\varphi g(A^*_\xi X, A^*_\xi Y) + kg(X,Y) - m.c.g(X,Y) - \varphi g(A^*_\xi X,Y)s = 0$$
$$(k - mc)g(X,Y) - \varphi sg(A^*_\xi X,Y) + \varphi g(A^*_\xi X, A^*_\xi Y) = 0$$
$$\varphi^{-1}(k - mc)g(X,Y) - sg(A^*_\xi X,Y) + g(A^*_\xi X, A^*_\xi Y) = 0$$

bulunmuş olur.(4.0.16) denkleminde $X = Y = E_i$ yazılırsa bu denklemin çözümü λ_i olur.

$$x^2 - sx + \varphi^{-1}(k - mc) = 0 \tag{4.0.17}$$

olur. (4.0.17) denklemi en fazla 2 farklı çözüme sahiptir ki bunlar U'da diferensiyellenebilir reel değerli fonksiyonlardır. Kabul edelim ki $p \in \{0, 1, ..., m\}$ mevcut olsun öyle ki $\lambda_1 = ... = \lambda_p = \alpha$ ve $\lambda_{p+1} = ... = \lambda_m = \beta$, gerekirse yeniden numaralandırılarak (4.0.17)'den

$$s = \alpha + \beta = p\alpha + (m-p)\beta; \;\; \alpha\beta = \varphi^{-1}(k - mc) \tag{4.0.18}$$

elde ederiz. Son bağıntının ilk denklemini indirgersek

$$(p-1)\alpha + (m-p-1)\beta = 0$$

olur. [1]

M üzerinde aşağıdaki D_α, D_β, D^s_α ve D^s_β distribüsyonlarını göz önüne alalım.

$$D_\alpha = \{X \in \Gamma(TM) \mid A^*_\xi X = \alpha PX\},\; D^s_\alpha = D_\alpha \cap S(TM),$$
$$D_\beta = \{U \in \Gamma(TM) \mid A^*_\xi U = \beta PU\},\; D^s_\beta = D_\beta \cap S(TM).$$

Gözlenir ki $E_1, ..., E_p \in \Gamma(D^s_\alpha)$ ve $E_{p+1}, ..., E_m \in \Gamma(D^s_\beta)$ dir.

(4.0.15) denklemi sadece bir çözüme sahiptir$\Longleftrightarrow$ $\alpha = \beta \Longleftrightarrow D_\alpha = D_\beta (= TM)$ dir.

∘ $0 < p < m$ ise $D_\alpha \neq D_\beta$ ve $D_\alpha \cap D_\beta = Rad(TM)$ 'dir.$m \geq 2$ ve $D_\alpha \neq D_\beta$ olması halinde $p = 0$ ise bu durumda α, A^*_ξ'ın bir öz değeri değildir; fakat (4.0.17)'nin bir kökü ve $D_\alpha = Rad(TM)$; $D_\beta = TM$ 'dir.

∘ $p = m$ ise bu durumda β, A^*_ξ'ın bir öz değeri değildir; fakat (4.0.17)'nin bir köküdür ve $D_\alpha = TM$; $D_\beta = RadTM$'dir.[1]

Lemma 4.0.2. *$D_\alpha \neq D_\beta$ ise bu durumda $D_\alpha \perp_g D_\beta$ ve $D_\alpha \perp_B D_\beta$dir. [1]*

İspat. $0 < p < m$ ise herhangi $X \in \Gamma(D_\alpha)$ için $A^*_\xi PX = A^*_\xi X = \alpha PX$ ve herhangi $U \in \Gamma(D_\beta)$ için $A^*_\xi PU = A^*_\xi U = \alpha PU$ dur. Böylece P projeksiyon dönüşümü D_α dan D^s_α üzerine ve D_β dan D^s_β üzerine olur. PX ve PU reel simetrik A^*_ξ operatörünün öz vektör alanları olduğundan sırasıyla farklı α ve β özdeğerlerine bağlıdır. $PX \perp PU$ ve $g(X, U) = g(PX, PU) = 0$ 'dır. Bu ise

$D_\alpha \perp_g D_\beta$'dır. Ayrıca $B(X,U) = g(A^*_\xi X, U) = \alpha g(PX, PU) = 0$ olduğundan $B(D_\alpha, D_\beta) = 0$'dır. Bu ise $D_\alpha \perp_B D_\beta$'dır. $p = 0$ veya $p = m$ olursa bu durumda sırasıyla $D_\alpha = Rad(TM)$; $D_\beta = TM$ veya $D_\alpha = TM$; $D_\beta = Rad(TM)$ olur. Böylece $D_\alpha \perp_g D_\beta$ ve $D_\alpha \perp_D D_\beta$'dır.[1] □

Lemma 4.0.3. *$D_\alpha \neq D_\beta$ ise bu durumda $TM = Rad(TM) \oplus_{orth} D^s_\alpha \oplus_{orth} D^s_\beta$ dir. $D_\alpha = D_\beta$ ise bu durumda $TM = Rad(TM) \oplus_{orth} D^s_\alpha \oplus_{orth} \{0\}$'dır.[1]*

İspat. $0 < p < m$ ise $\{E_i\}_{1 \leq i \leq p}$ ve $\{E_\alpha\}_{p+1 \leq \alpha \leq m}$ vektör alanları sırasıyla D^s_α ve D^s_β'nin karşılıklı vektör alanları olduğundan ve D^s_α ve D^s_β, $S(TM)$'nin ortogonal alt vektör demetleri olduğundan göstereceğiz ki D^s_α ve D^s_β sırasıyla rankı p ve $(m-p)$ olan non-dejenere distribüsyonlardır. ve $D^s_\alpha \cap D^s_\beta = \{0\}$ dır. Böylece $S(TM) = D^s_\alpha \oplus_{orth} D^s_\beta$ dir.

∘ $D_\alpha \neq D_\beta$ ve $p = 0$ ise bu durumda $D^s_\alpha = \{0\}$ ve $D^s_\beta = S(TM)$'dir.

∘ $D_\alpha \neq D_\beta$ ve $p = m$ ise bu durumda $D^s_\alpha = S(TM)$ ve $D^s_\beta = \{0\}$'dır. Ayrıca $S(TM) = D^s_\alpha \oplus_{orth} D^s_\beta$'dir. Bunun sonrasında $D_\alpha = D_\beta$ ise bu durumda $D^s_\alpha = D^s_\beta = S(TM)$ elde ederiz.[1] □

(3.0.1)'den aşağıdaki lemmayı bulabiliriz:

Lemma 4.0.4. $\mathrm{Im}(A^*_\xi - \alpha P) \subset \Gamma(D^s_\beta)$; $\mathrm{Im}(A^*_\xi - \beta P) \subset \Gamma(D^s_\alpha)$*' dir.[1]*

İspat. (4.0.16)'dan

$$(A^*_\xi)^2 - (\alpha + \beta)A^*_\xi + \alpha\beta P = 0$$

ifadesini elde ederiz.

$0 < p < m$ ise $Y \in \mathrm{Im}(A^*_\xi - \alpha P)$ alalım. Bu durumda $X \in \Gamma(TM)$ vardır öyle ki $Y = (A^*_\xi - \alpha P)X$ ve $(A^*_\xi - \beta P)Y = 0$ ve $Y \in \Gamma(D_\beta)$'dır. Böylece $\mathrm{Im}(A^*_\xi - \alpha P) \subset \Gamma(D_\beta)$'dır. $A^*_\xi - \alpha P$ dönüşümü $\Gamma(TM)$'den $\Gamma(S(TM))$ üzerine olduğu için $\mathrm{Im}(A^*_\xi - \alpha P) \subset \Gamma(D^s_\beta)$'dir. Ayrıca ikilikten $\mathrm{Im}(A^*_\xi - \beta P) \subset \Gamma(D^s_\alpha)$'yi buluruz. $p = 0$ ise bu durumda $D^s_\alpha = \{0\}$; $D^s_\beta = S(TM)$ ve $D_\beta = TM$ olduğundan $\mathrm{Im}(A^*_\xi - \alpha P) \subset \Gamma(S(TM))$; $A^*_\xi X = \beta PX, \forall X \in \Gamma(TM)$; yani $\mathrm{Im}(A^*_\xi - \beta P) = \{0\}$ veya $p = m$ ise

$D^s_\alpha = S(TM)$; $D^s_\beta = \{0\}$ ve $D_\alpha = TM$ olduğundan $A^*_\xi X = \alpha PX$, $\forall X \in \Gamma(TM)$ için elde ederiz. Yani $\mathrm{Im}(A^*_\xi - \alpha P) = \{0\}$; $\mathrm{Im}(A^*_\xi - \beta P) \subset \Gamma(S(TM))$ olur. [1] □

Lemma 4.0.5. *D^s_α ve D^s_β distribüsyonları daima integrallenebilirdir. Özellikle $D_\alpha \neq D_\beta$ ise bu durumda D_α ve D_β ayrıca integrallenebilirdir.[1]*

İspat. $D_\alpha \neq D_\beta$ ise bu durumda $X,Y \in \Gamma(D_\alpha)$ ve $Z \in \Gamma(TM)$ için

$$
\begin{aligned}
(\nabla_X B)(Y,Z) = & -g((A^*_\xi - \alpha P)\nabla_X Y, U) + \alpha B(X,Y)\eta(U) + (X\alpha)g(PY,Z) \\
& + \alpha^2 \eta(Y) g(PX,Z)
\end{aligned}
$$

dir.(4.0.19) denklemini ve

$$
(\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) = B(X,Z)\tau(Y) - B(Y,Z)\tau(X)
$$

denklemini kullanarak

$$
\begin{aligned}
g((A^*_\xi - \alpha P)[X,Y], Z) = & \{X\alpha + \alpha\tau(X) - \alpha^2\eta(X)\} g(PY,Z) \\
& - \{Y\alpha + \alpha\tau(Y) - \alpha^2\eta(Y)\} g(PX,Z)
\end{aligned} \tag{4.0.19}
$$

denklemini bulmuş oluruz. $Z = U \in \Gamma(D^s_\beta)$ yazarsak bu durumda

$$
g((A^*_\xi - \alpha P)[X,Y], U) = 0
$$

olur. D^s_β distribüsyonu non-dejenere olduğundan ve $\mathrm{Im}(A^*_\xi - \alpha P) \subset \Gamma(D^s_\beta)$ olduğundan $(A^*_\xi - \alpha P)[X,Y] = 0$ olur. Böylece $[X,Y] \in \Gamma(D_\alpha)$'dır ve D_α integrallenebilirdir. İkilikten D_β'nın da integrallenebilir olduğunu düşünebiliriz. $S(TM)$ integrallenebilir olduğundan herhangi $X,Y \in \Gamma(D_\alpha)$ için $[X,Y] \in \Gamma(D_\alpha)$ ve $[X,Y] \in \Gamma(S(TM))$ olur. Böylece $[X,Y] \in \Gamma(D^s_\alpha)$ ve D^s_α integrallenebilirdir ve D^s_β de integrallenebilirdir. Ayrıca $D_\alpha = D_\beta$ iken $D^s_\alpha = D^s_\beta = S(TM)$ integrallenebilirdir.[1] □

Lemma 4.0.6. $0 < p < m$ *ise bu durumda*

$$
(d\alpha + \alpha\tau - \alpha^2\eta)\mid_{D_\alpha} = 0; \quad (d\beta + \beta\tau - \beta^2\eta)\mid_{D_\beta} = 0
$$

ifadesini elde ederiz.[1]

İspat. (4.0.18)'den ; yani

$$s = \alpha + \beta = p\alpha + (m - p)\beta; \; \alpha\beta = \varphi^{-1}(k - mc)$$

ifadesinden herhangi $X, Y \in \Gamma(D_\alpha)$ ve $Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\{X\alpha + \alpha\tau(X) - \alpha^2\eta(X)\}g(PY, Z) = \{Y\alpha + \alpha\tau(Y) - \alpha^2\eta(Y)\}g(PX, Z)$$

ifadesini elde ederiz. $S(TM)$ non-dejenere olduğundan

$$\{X\alpha + \alpha\tau(X) - \alpha^2\eta(X)\}PY = \{Y\alpha + \alpha\tau(Y) - \alpha^2\eta(Y)\}PX$$

ifadesini elde ederiz.

Kabul edelim ki bir $X_0 \in \Gamma(D_\alpha)$ vektör alanı mevcut olsun öyle ki her $x \in M$ noktasında $(d\alpha + \alpha\tau - \alpha^2\eta)(X_0) \neq 0$ olsun. Bu durumda herhangi $Y \in \Gamma(D_\alpha)$ için $PY = fPX_0$ olur. Burada f bir diferensiyellenebilir bir fonksiyondur. Bunu da şu takip eder: $(D_\alpha)_x$ lifinden gelen bütün vektörler $(PX_0)_x$ ile doğrudaştır. Bu ise $(boy((D_\alpha)_x) = p + 1 > 1$ olarak bir çelişkidir. Böylece $(d\alpha + \alpha\tau - \alpha^2\eta) \mid_{D_\alpha} = 0$ olur. İkilikten biz ayrıca $(d\beta + \beta\tau - \beta^2\eta) \mid_{D_\beta} = 0$ ifadesini de söyleyebiliriz.[1] □

Lemma 4.0.7. *M, c sabit eğrilikli $(\overline{M}(c), \overline{g})$ Lorentz manifoldunun bir Einstein screen homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. $0 < p < m$ ise bu durumda α ve β $S(TM)$ boyunca sabittir gerek ve yeter şart $S(TM)$ üzerindeki $\tau = 0$'dır. [1]*

İspat. Lemma(4.0.6)'dan biliyoruz ki $(d\alpha + \alpha\tau) \mid_{D^s_\alpha} = 0$ ve $(d\beta + \beta\tau) \mid_{D^s_\beta} = 0$ dır. Böylece $S(TM)$ üzerindeki $\tau = 0$' dır gerek ve yeter şart D^s_α üzerinde $d\alpha = 0$ ve D^s_β üzerinde $d\beta = 0$'dır. Çünkü M screen homotetik olduğundan $\tau = 0$ ise $c = 0$ olur. Bu durumda Not(4.0.3)'ten $c = 0$ dır. Ayrıca $\alpha\beta = \varphi^{-1}\gamma$ olduğundan (ki bu ifade (4.0.18)'in ikinci denklemidir.) bir sabittir.[14] □

Bunu aşağıdaki lemma takip eder:

Şu ana kadar elde ettiğimiz sonuç, $(M, g, S(TM))$ c sabit eğrilikli $(\overline{M}(c), \overline{g})$ Lorentz manifoldunun bir $\{\xi, N\}$ kanonik null çifti ile donatılmış bir Einstein homotetik bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda Not(4.0.2) ve Not(4.0.3)'ten $\tau = c = 0$ olur.[14]

Uyarı 4.0.5. *$0 < p < m$ ise bu durumda α ve β TM boyunca sabit değildir; fakat $S(TM)$ boyunca sabittir. Gerçekten Not(4.0.2) gereği $\tau = 0$ dır. Lemma(4.0.7)'den α ve β $S(TM)$ boyunca sabittir. Bunun akabinde eğer α ve β TM boyunca sabit ise Lemma(4.0.6)'dan bütün $X \in D_\alpha$ için $\eta(X) = 0$ ve bütün $U \in D_\beta$ için $\eta(U) = 0$'dır. Not edelim ki M üzerindeki bir X vektör alanı $S(TM)$'ye bağlıdır; gerek ve yeter şart lokal olarak her bir $U \subset M$'de $\eta(X) = 0$'dır. Bu da gösterir ki D_α ve D_β distribüsyonları $S(TM)$'nin alt vektör demetleridir. Sonuç olarak $D_\alpha = D^s_\alpha$ ve $D_\beta = D^s_\beta$ olur. Bu ise $Rad(TM) \subset D_\alpha$ ve $Rad(TM) \subset D_\beta$ ile çelişir. Bu durumda α ve β TM boyunca sabit değildir.[14]*

Lemma 4.0.8. *$0 < p < m$ ise bu durumda $X \in \Gamma(D_\alpha)$ ve $U \in \Gamma(D_\beta)$ için*

$$\nabla_X U \in \Gamma(D_\beta);\ \nabla_U X \in \Gamma(D_\alpha) \tag{4.0.20}$$

dır.[1]

İspat. (3.0.47) denkleminden yararlanıp $\tau = 0$ kullanılarak

$$(\nabla_X B)(U, Z) = (\nabla_U B)(X, Z)$$

yani;

$$g(\{(A^*_\xi - \beta P)\nabla_X U - (A^*_\xi - \alpha P)\nabla_U X\}, Z) = 0$$

herhangi $Z \in \Gamma(TM)$ için bulunur. $S(TM)$ non-dejenere olduğundan

$$(A^*_\xi - \beta P)\nabla_X U = (A^*_\xi - \alpha P)\nabla_U X$$

ifadesini elde ederiz. Son eşitliğin soldaki terimi $\Gamma(D^s_\alpha)$'de ve sağ terim $\Gamma(D^s_\beta)$'de olduğundan ve $D^s_\alpha \cap D^s_\beta = \{0\}$ olduğundan

$$(A^*_\xi - \beta P)\nabla_X U = 0,\ (A^*_\xi - \alpha P)\nabla_U X = 0$$

olur. Bu da gösterir ki $\nabla_X U \in \Gamma(D_\beta)$ ve $\nabla_U X \in \Gamma(D_\alpha)$' dır.[1] □

Lemma 4.0.9. *$0 < p < m$ ise bu durumda $X, Y \in \Gamma(D_\alpha)$ ve $U, V \in \Gamma(D_\beta)$ için*

$$g(\nabla_Y X, U) = 0;\ g(X, \nabla_V U) = 0 \tag{4.0.21}$$

bulunmuş olur.[1]

İspat. $g(X, PU) = 0$ olduğundan

$$\nabla_Y(g(X, PU)) - g(\nabla_Y X, PU) - g(X, \nabla_Y PU)$$
$$= B(X, Y)\eta(PU) + B(Y, PU)\eta(X) = 0$$

$$\nabla_V(g(U, PX)) - g(\nabla_V U, PX) + g(U, \nabla_V PX)$$
$$= B(V, U)\eta(PX) + B(V, PX)\eta(U) = 0$$

dır.

$D_\alpha \perp_g D_\beta$ ve $B(D_\alpha, D_\beta\ ) = 0$ olduğundan $g(\nabla_Y X, U) = g(\nabla_Y X, PU) = 0$ ve $g(X, \nabla_V U) = g(PX, \nabla_V U) = 0$ bulunmuş olur.[1] □

(4.0.21) denkleminden D^s_α ve D^s_β'nin M' nin paralel distribüsyonu olduğu elde edilir.Böylece De Rham'ın bilinen ayrışımından aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz:[14]

Teorem 4.0.7. $(M, g, S(TM))$*, sabit eğrilikli* $(\bar{M}(c), \bar{g})$ *Lorentz manifoldunun bir Einstein screen konformal lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda* M *lokal olarak lightlike* $C \times (M' = M_\alpha \times M_\beta)$ *üçlü çarpım manifoldudur. Burada* C *bir null eğri,* M' $S(TM)$*'nin bir integral manifoldu,* M_α *ve* M_β *sırasıyla* M*'nin bazı distribüsyonlarının yapraklarıdır.[1]*

Lemma 4.0.10. $0 < p < m$ *ise bu durumda* $\gamma = \varphi\alpha\beta = 0$*'dır. Özellikle* $\alpha\beta = 0$*'dır.*

İspat. $X \in \Gamma(D_\alpha)$ ve $U \in \Gamma(D_\beta\ )$ için

$$g(R(X, U)U, X) = g(\nabla_X \nabla_U U, X)$$

tir. (4.0.21) denkleminin ikinci eşitliğinden biliyoruz ki $\nabla_U U$, D_α'nın bileşenine sahip değildir. P projeksiyon morfizmi olduğundan $\Gamma(D_\alpha)$'yı $\Gamma(D^s_\alpha)$'ye ve $\Gamma(D_\beta)$'yı $\Gamma(D^s_\beta)$'ye dönüştürür ve $S(TM) = D^s_\alpha \oplus_{orth} D^s_\beta$ dir.

$$\nabla_U U = P(\nabla_U U) + \eta(\nabla_U U)\xi;\ P(\nabla_U U) \in \Gamma(D^s_\beta)$$

dir. Bunu da

$$g(\nabla_X \nabla_U U, X) = g(\nabla_X P(\nabla_U U), X) + \nabla_X(\eta(\nabla_U U))g(\xi, X)$$
$$+\eta(\nabla_U U)g(\nabla_X \xi, X) = -\alpha\eta(\nabla_U U)g(X, X)$$

ifadesi takip eder.

$$\eta(\nabla_U U) = \varphi\beta g(U, U)$$

olduğundan

$$g(R(X, U)U, X) = -\varphi\alpha\beta g(X, X)g(U, U)$$

dur. Ayrıca M screen homotetik ve $\tau = 0$ olduğundan Not(4.0.3)'den $c = 0$ olduğu görülür. Böylece Gauss-Codazzi (3.0.46) denkleminden

$$g(R(X, U)U, X) = \varphi\alpha\beta g(X, X)g(U, U)$$

dur. Son iki eşitlikten

$$\gamma = \varphi\alpha\beta = 0$$

elde edilir.φ sıfırdan farklı bir sabit olduğundan $\alpha\beta = 0$ olur.[1] □

Yukarıdaki sonuçlardan, aşağıdaki temel teoremi elde ederiz:

Teorem 4.0.8. *$(m+2)-$boyutlu sabit eğrilikli $(\bar{M}(c), \bar{g})$ Lorentz manifoldunun bir Einstein screen homotetik lightlike hiperyüzeyi $(M, g, S(TM))$ olsun. Bu durumda $c = 0$ ve M lokal olarak $C \times (M' = M_\alpha \times M_\beta)$ üçlü çarpım manifoldudur. Burada C bir null eğri, M' $S(TM)$'nin bir integral manifoldudur. M_α ve M_β, M'nin bazı distribüsyonlarının yapraklarıdır öyle ki*

1. *$k \neq 0$ ise; M_α veya M_β, $\varphi\alpha^2$ veya $\varphi\beta^2$ sabit eğrilikli total umbilik Riemann manifolddur ki bunlardan biri $m-$boyutlu (pseudo)küresine ve diğeri de bir noktaya izometriktir.*

2. *$k = 0$ ise; M_α bir $(m-1)-$boyutlu veya $m-$boyutlu total geodezik Öklidyen uzay ve M_β bir non-null eğri veya $\bar{M}$'de bir noktadır.[1]*

İspat. (1) $k \neq 0$ olsun. $(trA^*_\xi)^2 \neq 4\varphi^{-1}\gamma$ olması durumunda (4.0.17) denklemi sıfır olmayan iki farklı α ve β çözümlerine sahiptir. $0 < p < m$ ise bu durumda Lemma(4.0.10)'dan $\gamma = 0$ olur. Böylece $p = 0$ veya $p = m$'dir.

$p = 0$ ise bu durumda α, A^*_ξ şekil operatörünün bir özdeğeri değildir; fakat (4.0.17) ve (4.0.18) denklemlerinin bir çözümü s'yi

$$s = \alpha + \beta = m\beta;\ \alpha\beta = \varphi^{-1}\gamma$$

ya indirger. Ayrıca $p = m$ ise β, A^*_ξ şekil operatörünün bir özdeğeri değildir; fakat (4.0.17) ve (4.0.18) denklemlerinin bir çözümü s' yi

$$s = \alpha + \beta = m\alpha;\ \alpha\beta = \varphi^{-1}\gamma$$

ya indirger.Sonuç olarak, $p = 0$ veya $p = m$ ise bu durumda α ve β sabittir ve sırasıyla $D^s_\alpha = \{0\}$; $S(TM) = D^s_\beta$ veya $S(TM) = D^s_\alpha$; $D^s_\beta = \{0\}$ dır. (3.0.46) ve (3.0.52) denklemlerinden

$$R^*(X, Y)Z = \varphi\alpha^2\{g(Y, Z)X - g(X, Z)Y\},\ \ \forall X, Y, Z \in \Gamma(D_\alpha);$$
$$R^*(U, V)W = \varphi\beta^2\{g(V, W)U - g(U, W)V\}, \forall U, V, W \in \Gamma(D_\beta)$$

dır.Böylece M_α ve M_β (ki bunlar sırasıyla D_α ve D_β' nın yapraklarıdır.) $\varphi\alpha^2$ ya da $\varphi\beta^2$ sabit eğrilikli bir M^* Riemann manifoldudur ve diğer yaprak ise bir $\{x\}$ noktasıdır.Eğer $M^* = M_\alpha$ ise bütün $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için $B(X, Y) = \alpha g(X, Y)$ olduğundan bütün $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için $C(X, Y) = \varphi\alpha g(X, Y)$ olur. $M^* = M_\beta$ ise bütün $U, V \in \Gamma(S(TM))$ için $B(U, V) = \beta g(U, V)$ olduğundan bütün $U, V \in \Gamma(S(TM))$ için $C(U, V) = \varphi\beta g(U, V)$ olur.Böylece M^* yaprağı total umbiliktir ve total geodezik değildir. Sonuç olarak M ya lokal olarak bir $C \times M^* \times \{x\ \}$ ya da $C \times \{x\} \times M^*$ çarpım manifoldudur. Burada M^*, $\varphi\beta^2$ veya $\varphi\alpha^2$ sabit eğrilikli bir total umbilik Riemann manifoldudur ki bu bir $m-$(pseudo) küreye izometriktir ve $\{x\}$ de bir noktaya izometriktir.$\cdot(trA^*_\xi)^2 = 4\varphi^{-1}\gamma$ olması durumunda (4.0.17) denklemi sıfırdan farklı yalnız bir çözüme sahiptir ve adı α'dır ve α, A^*_ξ şekil operatörünün tek özdeğeridir. Bu durumda (4.0.18) denklemi s'yi

$$s = 2\alpha = m\alpha;\ \alpha^2 = \varphi^{-1}\gamma$$

dır. Böylece $m = 2$' dir. (3.0.46) ve (3.0.52) denklemlerinden

$$R^*(X,Y)Z = k\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\},\ \forall X,Y,Z \in \Gamma(S(TM)) \text{ için.}$$

elde ederiz.Böylece M^*, k sabit eğrilikli Riemann $2-$ yüzeyidir. Bütün $X,Y \in \Gamma(TM)$ için $B(X,Y) = ag(X,Y)$ olduğundan $C(X,Y) = \varphi\alpha g(X,Y)$ olur $\forall X,Y \in \Gamma(S(TM))$ için. Böylece M^* yaprağı da total umbiliktir ve total geodezik değildir.Sonuç olarak M bir $C \times M^* \times \{x\ \}$ lokal çarpım manifoldudur. Burada C, $\overline{M}$'de bir null eğridir ve M^* sabit eğrilikli Riemann $2-$yüzeydir ki bu $2-$(pseudo) küreye izometriktir.

(2) $k = 0$ olsun. (4.0.17) denklemi

$$\lambda_i(\lambda_i - s) = 0,\ 1 \leq i \leq m$$

ifadesine indirgenir.

$trA^*_\xi \neq 0$ durumu için $\alpha = 0$ ve $\beta = s$ olsun. Bu durumda $s = \beta = (m-p)\beta$; yani $(m-p-1)\beta = 0$ dır. Böylece $p = (m-p-1)\beta = 0$ dır. Böylece $p = m-1$'dir; yani

$$A^*_\xi = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \cdot & & & & \\ & & \cdot & & & \\ & & & \cdot & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \beta \end{pmatrix}$$

dir.A^*_ξ'ın $\{\xi, E_1, ..., E_m\}$ özvektörlerinin çatı alanını göz önüne alalım. Öyle ki $\{E_i\}_i$, $S(TM)$'nin bir ortonormal çatı alanıdır; bu durumda

$$B(E_i, E_j) = C(E_i, E_j) = 0,\ 1 \leq i < j \leq m \ \text{ için}$$

dir.Böylece D_α'nın M_α yaprağı $(m-1)-$ boyutlu total geodeziktir ve D_β'nın M_β lifi bir eğridir. (3.0.46) ve (3.0.52) denklemlerinden

$$\overline{g}(\overline{R}(E_i, E_j)E_jE_i) = g(R^*(E_i, E_j)E_jE_i) = 0$$

dır. Böylece D_α'nın M_α yaprağının K kesit eğriliği

$$K(E_i,E_j)=\frac{g(R^*(E_i,E_j)E_jE_i)}{g(E_i,E_i)g(E_j,E_j)-g^2(E_i,E_j)}=0$$

dır.Böylece M bir $C\times M_\alpha\times M_\beta$ lokal çarpım manifoldudur. Burada M_α bir $(m-1)-$boyutlu Öklidyen uzay ve M_β, $\bar{M}$'de bir eğridir.

$trA^*_\xi=0$ olması durumunda $\alpha=\beta=0$'dır ve $A^*_\xi=0$ veya buna denk olarak $B=0$ ve $D^s_\alpha=D^s_\beta=S(TM)$'dir. Böylece $M,\bar{M}$' de bir total geodeziktir. M screen homotetik olduğundan ayrıca $C=A_N=0$'dır. Böylece $S(TM)$'nin M^* yaprağı da total geodeziktir.M^* yaprağına teğet herhangi X ve Y vektör alanları için $\overline{\nabla}_XY=\overset{*}{\nabla}_XY$ elde ederiz.Bu da gösterir ki M^* bir Öklidyen $m-$uzaydır. Böylece M lokal olarak $C\times M^*\times\{x\}$ çarpımıdır.Burada C bir null eğri ve $\{x\}$ bir noktadır.[1] $\square$

5. KAYNAKLAR

[1] Krishan L. Duggal and Bayram Sahin-Differential Geometry of Lightlike Submanifolds (Birkhauser Verlag AG, Basel,Boston, Berlin(2010)).

[2] Krishan L.Duggal and Aurel Bejancu- Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Application (University of Windsdor, Windsdor, Ortario, Canada and Polytechnic institute of Laşi, laşi, Ramania).

[3] Bayram Şahin-Manifoldların Diferensiyel Geometrisi (Nobel Yayıncılık, Malatya, (2012)).

[4] Barrett O' Neill-Semi Riemannian Geometry (Department of Mathematics university of California Los Angeles, California).

[5] H. Hilmi Hacisalihoğlu-Diferensiyel Geometri (Ankara Üniversitesi, Fen Fakültesi).

[6] Artin, E.-Geometric Algebra (Interscience Publishers, New York, (1975)).

[7] Vranceanu, Gh. and Rosca, R-Introduction to Relativity and Pseudo-Riemannian Geometry(Acad Publish of Romania,Bucharest, (1976)).

[8] Schouten, J.A-On non holonomic connections (Proc. Kon. Akad. Amsterdam. 31, (1928), 291-299).

[9] Vaisman, Izu-A first Course in Differential Geometry (Marcel Dekker, New York).

[10] Beem , J. K. and Ehrlich, P. E-Global Lorentzian Geometry (Marcel Dekker, New York, (1981)).

[11] Bejancu A. and Duggal, K.L.-Degenere hypersurfaces of semi-Riemannian manifolds (Bull. İnst. Politehnie lasi.(S.1). 37, (1991) 13-22).

[12] H. Hilmi Hacisalihoğlu-Tensör Geometri (Ankara Üniversitesi Fen Fakültesi, (2003)).

[13] Arif Sabuncuoğlu-Diferensiyel Geometri (Nobel Yayıncılık, Ankara, (2004)).

[14] Krishan L.Duggal and D.H.Jin -A classification of Einstein lightlike hypersurfaces of Lorentzian space forms (J. Geom. Phys.,(2010)).

[15] Krishan L. Duggal and D.H.Jin.-Null Curves and Hypersurfaces of semi-Riemann manifolds (World Scientific, (2007)).

[16] C.Atindogbe, K.L.Duggal, Conformal screen on lightlike hypersurfaces (Int J.Pure Appl. Math11(4),(2004)421-442).

[17] H. Hilmi Hacisalihoğlu- Diferensiyel Geometri (Gazi Üniversitesi Basın-Yayın Yüksekokulu Basımevi (1983)).

[18] A. Fialkow-Hypersurfaces of a space of constant curvature (Ann. of Math. 39, 762-785,(1938)).

[19] T: Y.Thomas-On closed spaces of constant mean curvature (Amer, J. Math. 58, 702-704,(1936)).

[20] Krishan L. Duggal- On scalar curvature in lightlike geometry (J. Geom. Phys. 57, 473-481,(2007)).

[21] Arthur L. Besse - Einstein Manifolds (Springer, Berlin (1987)).

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Esra KARATAŞ

Doğum Yeri ve Tarihi: Malatya - 01/01/1989

Adres: Tandoğan Mah. Aydemir Cad. Beyazsaray Evleri, Kat: 3, Daire: 11, Battalgazi / Malatya

E-Posta: esrameryem44@gmail.com

Lisans: İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü