

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BEZIER YÜZEYLERİ VE KIVRIMLI YÜZEYLER

Akın LEVENT

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Ağustos 2013

Tezin Başlığı : BEZIER YÜZEYLERİ VE KIVRIMLI YÜZEYLER

Tezi Hazırlayan : Akın LEVENT

Sınav Tarihi : 21.08.2013

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri (ilk isim jüri başkanı, ikinci isim tez danışmanı)

Prof.Dr. Rıfat GÜNEŐ

Prof.Dr. Bayram ŞAHİN

Dođ.Dr. Ahmet YILDIZ

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof.Dr. Mehmet ALPASLAN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Bezier Yüzeyleri Ve Kıvrımlı Yüzeyler" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Akın LEVENT

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

BEZIER YÜZEYLERİ VE KIVRIMLI YÜZEYLER

Akın LEVENT

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

72+iv sayfa

2013

Danışman: Prof.Dr. Bayram ŞAHİN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde konunun tarihsel gelişimi ve tezin içeriği özetlenmektedir.

İkinci bölümde eğrilerin ve yüzeylerin diferensiyel geometrisi sunulmaktadır.

Üçüncü bölümde tensör çarpım yüzeyleri ve Ferguson yamaları tanımlanmakta ve bu tür yüzeylerin inşası için yöntemler sunulmaktadır.

Dördüncü bölümde, verilen iki yüzey yamasından türetilen bileşik yüzey yamaları için yöntemler sunulmaktadır.

ANAHTAR KELİMELELER: Bezier yüzeyleri, Ferguson yüzeyleri, B-spline yüzeyler, yüzey yamaları.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

BEZIER SURFACES AND B-SPLINE SURFACES

Akın LEVENT

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

72+iv pages

2013

Supervisor: Prof.Dr. Bayram ŞAHİN

This thesis covers four chapters. In the first chapter, we survey historical development of the subject and give an outline for the context of this thesis.

In the second chapter we present basic concepts for curves and surfaces which will be useful for other chapters.

In the third chapter, we define tensor product patches and Ferguson patches and obtain certain methods to construct such surfaces.

In the fourth chapter, we define Coon's patch and present certain methods how to construct composite patches.

KEY WORDS: Bezier surfaces, Ferguson surfaces, B-spline surfaces, surface patches .

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenen ve tezin hazırlanması sürecinde yardımlarını ve desteğini esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Bayram ŞAHİN'e sonsuz teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca tezdeki şekillerin çiziminde desteklerini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Erkan Bahçe' ye, lisans ve lisans üstü eğitimim boyunca desteğini hep yanımda gördüğüm Matematik Anabilim Dalı Başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ' e, tez yazımda L^AT_EXprogramının kullanımında yardımını esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. M. Kemal Özdemir' e müteşekkirim. Şimdiye kadar hayatımın her aşamasında büyük bir fedakarlıkla maddi ve manevi olarak desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve desteğini hep yanımda gördüğüm biricik nişanlıma binlerce kez teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ÖZET	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
1. GİRİŞ	1
2. TEMEL KAVRAMLAR	5
2.1 Eğrilerin Diferensiyel Geometrisi	5
2.2 Yüzeylerin Diferensiyel Geometrisi	8
3. YÜZEY TASARIMI	19
3.1 Tensör çarpım yüzey yamaları	19
3.2 Ferguson bi-kübik yüzey yaması	22
3.3 Ferguson Yüzey Yamalarının Bazı Geometrik Yapıları	25
3.4 16 nokta ile yüzey yaması oluşturma	31
3.5 Bézier yüzey yamaları	33
3.6 Üçgen şeklinde yüzey yamaları	38
4. BİRLEŞİK YÜZEYLER	41
4.1 Sınır interpolasyon yüzeyler	41
4.2 Coon's yüzey yamaları	43
4.3 Ferguson Yüzeylerinin Birleştirilmesi	54
4.4 Bézier Yüzeylerinin Birleştirilmesi	59
4.5 B-Spline Yüzey Yamaları	66
5. KAYNAKLAR	71
ÖZGEÇMİŞ	72

1. GİRİŞ

Bilgisayar destekli geometrik tasarım (kısaca CAGD) 'in başlangıcı konik kesitlerinin ortaya konulması ve Roma dönemlerine kadar uzansada bu alandaki bilimsel araştırmaları ikinci dünya savaşı tetikledi. 2. Dünya savaşı boyunca uçak şirketi Mustang da çalışan R. Liming *Analytical Geometry with Application to Aircraft* kitabında ilk kez analitik geometrinin bilinen yöntemleri ile yeni sayısal hesaplama tekniklerini harmanladı. Liming'in sunduğu bu yeni teknikler uçak tasarımında kullanışlı olmasına karşın, diğer alanlarda kullanışlı olmadığı görüldü. Bununla birlikte CAGD teorisinin başlangıcı R. Liming'e dayandırılır.

Bilgisayar destekli geometrik tasarım için iki isim bu teorinin oluşmasına önemli katkılar yapmışlardır. Citroen şirketinde çalışan Casteljau, eğri ve yüzeylerin tasarımında Bernstein polinomlarını kullanarak eğri ve yüzeyler için, bu gün Casteljau algoritması adı verilen, sayısal yöntemleri geliştirmiştir. Aynı dönemde Renault şirketinde çalışan Bezier benzer yöntemleri geliştirerek mekanik parça tasarımlarına uygulamıştır. Bu gün Bezier eğri ve yüzeyleri denilen bu kavramlar Renault şirketinin kullandığı UNISURF için temel oluşturmuştur.

Bezier eğrileri yaygın olarak diferensiyellenebilir eğrileri modellemede kullanılır. n. dereceden bir Bezier eğrisi;

$$B(t) = \sum_{i=0}^n b_i B_i^n(t) \quad , t \in [0, 1]$$

olarak tanımlıdır. Burada b_0, \dots, b_n kontrol noktaları ve $B_i^n(t) = \binom{n}{i} (1-t)^{n-i} t^i$ olarak tanımlı Bernstein polinomlarıdır. Eğer $n=2$ olarak alınırsa bu kuadratik Bezier eğrisi olur. Kontrol noktaları ile oluşturulan bir Bezier eğrisinde başlangıç noktası b_0 eğrinin başlangıcı ve son nokta olan b_n eğrinin bitiş noktasıdır ve oluşan çokgene kontrol çokgeni denir. De Casteljau, Bezier eğrilerindeki polinomlar yardımı ile yeni bir metod olan yineleme metodunu geliştirmiştir. De Casteljau'nun bu algoritması Bezier eğrisini keyfi bir parametre ile ikiye bölmek için kullanılmıştır. Bir Bezier eğrisi kontrol çokgeni boyunca b_0 ve b_n uç noktalarından geçer yani eğri kontrol çokgenine uç noktalarda bağlıdır. Ayrıca Bezier eğrisi ϕ afin dönüşümü altında invariant'dır ve eğri koordinat eksenleri seçiminden bağımsızdır. Bu konuyla ilgili bu iki özellikten başka simetri özelliği, konveks kafes özelliği ve varyasyon azalımı özelliklerine de sahiptir. Bezier eğrileri eğri dizaynında önemli avantajlara sahiptir fakat bazı sınırlamalarda mevcuttur. Eğer eğri kompleks bir şekilde modellenirse, eğriyi dizayn etmek için Birleşik Bezier eğrilerini kullanmak gerekir. Bu birleştirilmiş eğrilerin birleşme noktalarında süreklilik şartları aranır. Bu bitişik Bezier eğrileri için iki tip süreklilik vardır. Bunlardan ilki parametrik süreklilik, ikincisi ise geometrik sürekliliktir. Genellikle eğer iki eğri belli derecede ise parametrik olarak, iki eğri aynı derecede ise geometrik olarak sürekli dir. Fakat bunun tersi doğru değildir. Örneğin C_0 süreklilik şartı iki eğrinin nokta birleşimi olurken, C^1 sürekli olan her eğri C_0 sürekli olup bu süreklilik birleşme noktalarındaki teğet vektörlerinin eşit olduğu anlamına gelir. Geometrik olarak süreklilik kavramı ise, bir parametrik fonksiyon ile ifade edilebilir. G^n süreklilik kavramı, eğer bir eğri C^n sürekliliğe sahip olarak yeniden parametrelendirilebiliyorsa mevcuttur. Örneğin, G^0 süreklilik iki eğrinin bir noktada

karşılaştığımızı, G^1 süreklilik ise iki eğrinin tanjant vektörlerinin birleşme noktasında orantılı olduğu anlamına gelir.

m. mertebeden bir rasyonel Bezier eğrisi b_0, \dots, b_m ler kontrol noktaları, w_0, \dots, w_m ler ağırlık fonksiyonları, $t \in [0, 1]$ parametre olmak üzere;

$$c(t) = \frac{\sum_{i=0}^m w_i b_i B_i^m(t)}{\sum_{i=0}^m w_i B_i^m(t)}$$

olur ki burada B_i^m ler baz fonksiyonlarıdır. Konikler ve çember yayları rasyonel Bezier eğrileri olarak açıklanabilir. Rasyonel Bezier eğrileri de afin dönüşümü altında invaryanttır. Ayrıca konveks kafes, uç nokta interpolasyonu ve azalan varyasyon özelliği sağlanır. Rasyonel Bezier eğrilerinin en önemli özelliklerinden biri genel projektif dönüşümü altında invaryanttır.

Bir B-spline eğri ise bir Bezier eğrisinin genelleştirilmesidir ve spline baz fonksiyonları tarafından oluşturulur. Eğrinin tamamı bu spline baz fonksiyonlar için verilen tekrarlı bağıntıların uygulamasından üretilir. 1946 yılında B-spline kavramını bulan I.J. Schoenberg spline yaklaşımlarının başlamasına öncülük etmiştir. Ayrıca B-spline 1970 yıllarının başlarında de Boor tarafından uygulamada kullanılmaya başlanmıştır. Aynı zaman diliminde Cox da benzer çalışmalar yapmıştır. Günümüzde de bilgisayar destekli geometrik tasarımda bu temel kavramlar oldukça önemlidir ve bu konular üzerine aktif çalışmalar devam etmektedir.

1960 ların ortalarında otomotiv şirketleri CAGD i kullanmaya başlamışlar ve CAGD yardımıyla otomobil gövdeleri elde edilmeye başlanmıştır. Boeing şirketinden J. Ferguson, yüzeyi bir bütün olarak değil yüzey yamalarının birleştirilmesi ile elde ederek yüzeylerin dizaynına yeni bir boyut kazandırmıştır. Ferguson'un bu bi-kübik yüzey yamaları F-yamalar olarak da bilinmektedir. Bezier, Ferguson'un bu fikirlerini

formülize ederek yüzeyleri dizayn etmek için yoğun bir matematik kullanmıştır. Bu yüzey yamalarının oluşumunda bilgisayarların kullanılması, gerekli olan ileri düzeyde matematiksel hesaplamaları daha kolay hale getirmiştir. Coon's dört keyfi sınır eğrisi ile yüzey yaması oluşturmuş bu yüzeyler ünlü otomotiv şirketi Ford tarafından kullanılmıştır. Bu yüzey oluşturma metotları arasında en popülerleri tensör çarpım yüzeyi olmuştur. Bu metod ilk olarak C. de Boor tarafından bi-kübik spline interpolasyonu için tanımlanmıştır. Aynı zaman diliminde de Casteljau üçgensel yüzey yamalarını oluşturarak CAGD'in gelişmesine katkıda bulunmuşlardır. 1974 yılında General Motors şirketinden Gordon ve Riesenfeld yüzey ve eğrilerin dizaynı için B-spline'ı kullanmışlardır.

Yukarıda verilen eğri ve yüzey tasarım tekniklerinin önemi, eğri veya yüzeyi tamamen değiştirmeden sadece yerel değişiklikler yaparak istenilen eğri veya yüzeyi elde etmemizi olanaklı hale getirmesidir. Günümüzde bu alandaki çalışmalar nümerik analiz ve yaklaşım teorisindeki bulgular yardımı ile daha da geliştirilmektedir.

Bu tezin temel amacı bilgisayar destekli geometrik tasarımda kullanılan yaygın yüzey tasarım teknikleri sunmaktır. Bu amaçla tezin ikinci bölümünde diğer bölümlerde kullanışlı olan eğrilerin ve yüzeylerin diferensiyel geometrisi verilmektedir. Üçüncü bölümde yüzey tasarımının temel konuları olan tensör çarpım yüzeyleri, Ferguson yüzey yaması ve diğer yüzey oluşturma teknikleri sunulmaktadır. Dördüncü bölümde ise verilen belirli eğriler yardımı ile birleşik yüzey yamalarının nasıl oluşturulacağı detaylı olarak incelenmektedir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde eğrilerin ve yüzeylerin diferensiyel geometrisi için temel tanım ve notasyonlar sunulmaktadır.

2.1 Eğrilerin Diferensiyel Geometrisi

Tanım 2.1.1. $I \subset \mathbb{R}$ bir açık aralık ve (I, α) koordinat komşuluğu verilsin.

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

olmak üzere $u \in I$ için $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \dots, \alpha_n(u))$ şeklinde tanımlı $\alpha(u)$ ' ya \mathbb{R}^n de bir eğri denir. Burada I aralığına α eğrisinin parametre aralığı, $u \in I$ ya α eğrisinin parametresi denir.[1]

Tanım 2.1.2. \mathbb{R}^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin.

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$u \in I$ ve $\alpha(u) = (\alpha_1(u), \alpha_2(u), \dots, \alpha_n(u))$ olmak üzere $\alpha'(u) = (\alpha'_1(u), \dots, \alpha'_n(u))$ ile tanımlı vektöre M eğrisinin hız vektörü denir.[1]

Tanım 2.1.3. (I, α) , \mathbb{R}^n de bir eğri ve

$$|\alpha'| : I \rightarrow \mathbb{R}$$

fonksiyonu verilsin. $u \in I$ için $|\alpha'| (u) = |\alpha'(u)|$ oluyorsa bu fonksiyona M eğrisinin (I, α) koordinat komşuluğuna göre skaler hız fonksiyonu, $|\alpha'(u)| \in \mathbb{R}$ reel sayısında skaler hız denir.[1]

Tanım 2.1.4. \mathbb{R}^n de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $\forall u \in I$ için;

$$|\alpha'(u)| = 1$$

oluyorsa M eğrisine (I, α) koordinat komşuluğuna göre birim hızlı eğri denir.[1]

Tanım 2.1.5. Her noktasındaki hız vektörü sıfırdan farklı olan eğriye regüler eğri denir. Yani;

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$$

olmak üzere $\forall u \in I$ için $\alpha'(u) \neq 0$ ise α eğrisi regüler eğridir.[1]

Şimdi eğriler teorisinde çok önemli olan Frenet 3- ayaklısı için türev denklemlerini hatırlatalım.

Tanım 2.1.6. \mathbb{R}^3 de bir M eğrisi (I, α) koordinat komşuluğu ile verilsin. $u \in I$ yay parametresi için $\alpha(t)$ noktasındaki Frenet 3- ayaklısı $\{T(u), N(u), B(u)\}$ ise

$$\begin{aligned} T &= \alpha'(u) \\ N &= \frac{\alpha''(u)}{|\alpha''(u)|} \\ B &= T \times N \end{aligned}$$

olarak hesaplanır. Ayrıca yay parametresi ile verilen eğrinin eğriliklerini hesaplamak için;

$$\begin{aligned} k_1 &= \kappa = |\alpha''(u)| \\ k_2 &= \tau = \frac{\det(\alpha'(u), \alpha''(u), \alpha'''(u))}{|\alpha'(u) \times \alpha''(u)|^2} \end{aligned}$$

eşitlikleri kullanılır. Eğer u yay parametresi değilse;

$$T = \frac{\alpha'(u)}{|\alpha'(u)|}$$
$$B = \frac{\alpha'(u) \times \alpha''(u)}{|\alpha'(u) \times \alpha''(u)|}$$
$$N = B \times T$$

dır. Yay parametresi ile verilmeyen eğrilerin eğrilik ve burulması;

$$k_1 = \kappa = \frac{|\alpha'(u) \times \alpha''(u)|}{|\alpha'(u)|^3}$$
$$k_2 = \tau = \frac{\det(\alpha'(u), \alpha''(u), \alpha'''(u))}{|\alpha'(u) \times \alpha''(u)|^2}$$

olur. Ayrıca

$$T' = \kappa N$$

$$N' = -\kappa T + \tau B$$

$$B' = -\tau N$$

eşitlikleri de yazılabilir. Bu ifade matris formunda

$$\begin{bmatrix} T' \\ N' \\ B' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \kappa & 0 \\ -\kappa & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T \\ N \\ B \end{bmatrix}$$

olarak yazılır.[1]

Aşağıdaki tanımlarda Bilgisayar destekli geometrik tasarımda oldukça önemli olan Ferguson, Bézier ve Spline eğriler tanıtılmaktadır.

Tanım 2.1.7. $P_i(x_i, y_i, z_i)$ ve $P_{i+1}(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$ noktaları, $u \in [0, 1]$ parametresi için sırasıyla $u = 0$ ve $u = 1$ de uç noktalar olsun. Ayrıca $T_i(p_i, q_i, r_i)$ ve $T_{i+1}(p_{i+1}, q_{i+1}, r_{i+1})$ de sırasıyla bu noktalardaki eğimler olmak üzere

$$r(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_i \\ P_{i+1} \\ T_i \\ T_{i+1} \end{bmatrix}$$

şeklinde tanımlı eğriye Ferguson eğrisi denir.[4]

Tanım 2.1.8. Verilen $i = 0, 1, \dots, n$ olmak üzere $(n+1)$ tane P_i veri noktası için

$$r(u) = \sum_{i=0}^n {}^n C_i (1-u)^{n-i} u^i P_i = \sum_{i=0}^n B_i^n(u) P_i, \quad 0 \leq u \leq 1$$

şeklinde tanımlı eğriye Bézier eğrisi denir. Burada $B_i^n(u) = {}^n C_i (1-u)^{n-i} u^i$ ifadesine Bernstein polinomu denir.[4]

Tanım 2.1.9. b_0, b_1, \dots, b_n kontrol noktaları, t_0, t_1, \dots, t_n knotlar olmak üzere

$$b(t) = \sum_{i=0}^n N_{p,p+i}(t) b_i$$

şeklinde tanımlı eğriye B- spline eğri denir.[4]

2.2 Yüzeylerin Diferensiyel Geometrisi

Tanım 2.2.1. U, \mathbb{R}^2 uzayının irtibatlı bir açık alt kümesi olmak üzere $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$, diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $\varphi : U \rightarrow \varphi(U)$ dönüşümü bir homeomorfizm ise $\varphi(U)$ kümesine, \mathbb{R}^3 uzayında bir basit yüzey denir.[2]

Tanım 2.2.2. M , \mathbb{R}^3 uzayının bir alt kümesi olsun. M nin her bir p noktası için $p \in \varphi(U)$ ve $\varphi(U) \subset M$ olacak biçimde bir $\varphi(U)$ basit yüzeyi bulunabiliyorsa M kümesine, \mathbb{R}^3 uzayında bir yüzey denir.[2]

Tanım 2.2.3. \mathbb{R}^3 te bir yüzey $r(u, v) = x(u, v)\vec{i} + y(u, v)\vec{j} + z(u, v)\vec{k}$ ile verilir. Bu durumda

$$r_u(u_0, v_0) = \left. \frac{\partial r(u, v)}{\partial u} \right|_{(u_0, v_0)} \text{ ve } r_v(u_0, v_0) = \left. \frac{\partial r(u, v)}{\partial v} \right|_{(u_0, v_0)}$$

tek olarak var ve

$$r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0) \neq 0$$

oluyorsa (u_0, v_0) noktasına regüler nokta denir. Eğer,

$$r_u(u_0, v_0) \times r_v(u_0, v_0) = 0$$

ise (u_0, v_0) noktasına singüler nokta denir.[4]

Tanım 2.2.4. Yüzey üzerinde herhangi bir $P(u, v)$ noktası verilsin. Bu noktadaki teğetler $r_u(u, v)$ ve $r_v(u, v)$ olmak üzere

$$N(u, v) = r_u(u, v) \times r_v(u, v)$$

eşitliğine yüzeyin normali denir.[4]

Bu vektör yüzeyin her noktasında yüzeyin teğet düzlemine diktir. Başka bir ifade ile yüzeyin normali hem $r_u(u, v)$ ye hem de $r_v(u, v)$ ye dik olan bir vektördür. Ayrıca

$$n = \frac{r_u(u, v) \times r_v(u, v)}{|r_u(u, v) \times r_v(u, v)|}$$

eşitliğinede *yüzeyin birim normali* denir.[4] Yüzey üzerindeki $P(u_0, v_0)$ noktasında teğet vektörleri olan $r_u(u, v)$ ve $r_v(u, v)$ nin oluşturduğu düzleme *teğet düzlem* denir.[4]

Verilen bir yüzeyin kapalı denklemi,

$$F(x, y, z) = 0$$

olarak yazılır. Açıkırtki bu durumda (*Tanım 2.1.4*) ile verilen normal vektörü'nü bulmak mümkün olmaz. Bu nedenle bu tür denklemlerle verilen yüzeyin normalini ifade etmek için zincir kuralı uygulanırsa

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial F}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial F}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial v} = 0$$

olur. Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k \right) \left(\frac{\partial x}{\partial u} i + \frac{\partial y}{\partial u} j + \frac{\partial z}{\partial u} k \right) &= 0 \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k \right) \left(\frac{\partial x}{\partial v} i + \frac{\partial y}{\partial v} j + \frac{\partial z}{\partial v} k \right) &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.1)$$

elde edilir. Ayrıca

$$r_u(u, v) = \frac{\partial x}{\partial u} i + \frac{\partial y}{\partial u} j + \frac{\partial z}{\partial u} k \text{ ve } r_v(u, v) = \frac{\partial x}{\partial v} i + \frac{\partial y}{\partial v} j + \frac{\partial z}{\partial v} k$$

eşitlikleri yukarıda yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k \right) \cdot r_u(u, v) &= 0 \\ \left(\frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k \right) \cdot r_v(u, v) &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Burada,

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial x} i + \frac{\partial F}{\partial y} j + \frac{\partial F}{\partial z} k$$

olduğundan

$$\nabla F \cdot (r_u(u, v)) = 0$$

$$\nabla F \cdot (r_v(u, v)) = 0$$

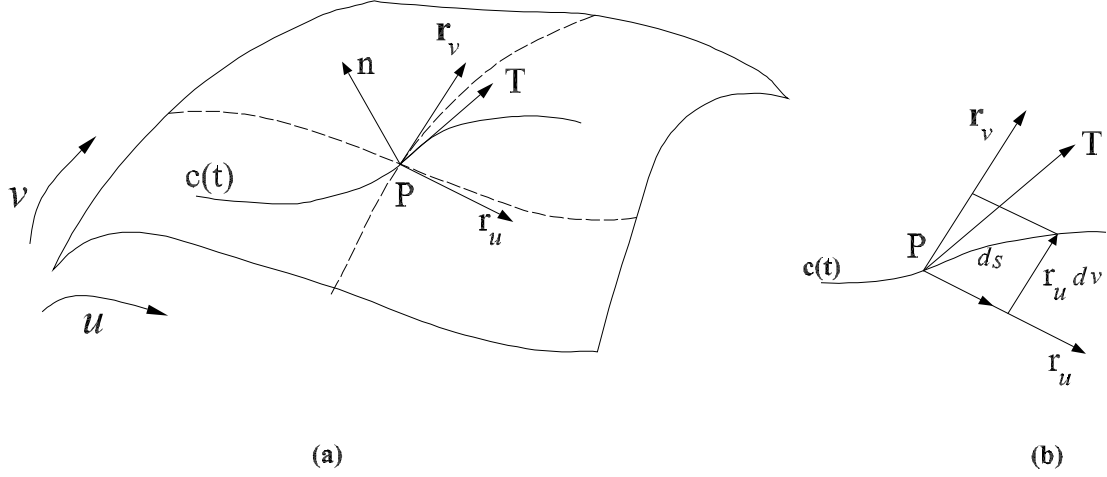
elde edilir ki ∇F hem $r_u(u, v)$ hem de $r_v(u, v)$ ye dik olur. Dolayısıyla $F(x, y, z) = 0$ olarak verilen yüzeyin normali ∇F dir.[4]

$r(u, v)$ parametrik yüzeyi üzerinde herhangi bir eğri $c(t) = r(u(t), v(t))$ olsun.

Bu eğrinin teğeti,

$$\begin{aligned} T &= \frac{dc(u, v)}{dt} = \frac{\partial r(u, v)}{\partial u} \cdot \frac{du}{dt} + \frac{\partial r(u, v)}{\partial v} \cdot \frac{dv}{dt} \\ &= \begin{bmatrix} r_u & r_v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olarak yazılır.[4]



Şekil 2.1. Parametrik bir yüzey üzerinde bir $c(t)$ eğrisi

Ayrıca $c(t)$ eğrisinin yay uzunluğu

$$s = \int |T| dt \implies ds = |T| dt$$

dır.[4] O halde

$$ds = |T| dt$$

$$ds = \left| \frac{dc(u, v)}{dt} \right| dt$$

$$ds = \left| r_u \cdot \frac{du}{dt} + r_v \cdot \frac{dv}{dt} \right| dt$$

$$ds = \sqrt{\left(r_u \cdot \frac{du}{dt} + r_v \cdot \frac{dv}{dt} \right) \left(r_u \cdot \frac{du}{dt} + r_v \cdot \frac{dv}{dt} \right)} dt$$

olup r_u ve r_v yerlerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
ds &= \sqrt{\left[\begin{array}{cc} \frac{du}{dt} & \frac{dv}{dt} \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} r_u \\ r_v \end{array} \right] \cdot \left[r_u \quad r_v \right] \left[\begin{array}{c} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{array} \right] dt} \\
ds &= \sqrt{\left[\begin{array}{cc} \frac{du}{dt} & \frac{dv}{dt} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} r_u \cdot r_u & r_u \cdot r_v \\ r_v \cdot r_u & r_v \cdot r_v \end{array} \right] \left[\begin{array}{c} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{array} \right] dt} \\
ds &= \sqrt{\left[\begin{array}{cc} \frac{du}{dt} & \frac{dv}{dt} \end{array} \right] G \left[\begin{array}{c} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{array} \right] dt}
\end{aligned}$$

yazılır ve burada

$$G = \begin{bmatrix} r_u \cdot r_u & r_u \cdot r_v \\ r_v \cdot r_u & r_v \cdot r_v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E & F \\ F & G \end{bmatrix}$$

olup G matrisine yüzeyin *birinci temel form matrisi* denir.[4] Ayrıca

$$G_{11} = r_u \cdot r_u = E$$

$$G_{12} = G_{21} = r_u \cdot r_v = F$$

$$G_{22} = r_v \cdot r_v = G$$

eşitliklerine *birinci temel formun katsayıları* denir.[4] Bu ifadeler yardımıyla yüzey üzerindeki bir $c(t)$ eğrisinin yay uzunluğunu

$$\begin{aligned}
ds^2 &= \left\{ G_{11} \left(\frac{du}{dt} \right)^2 + 2G_{12} \left(\frac{du}{dt} \right) \left(\frac{dv}{dt} \right) + G_{22} \left(\frac{dv}{dt} \right)^2 \right\} (dt)^2 \\
ds^2 &= G_{11} (du)^2 + 2G_{12} du dv + G_{22} dv^2
\end{aligned}$$

olarak yazabiliriz. O halde bir yüzeyin *birinci temel formu*

$$I = \left(\frac{1}{G_{11}} \right) \{ (G_{11}du + G_{12}dv)^2 + (G_{11}G_{22} - G_{12}^2)dv^2 \}$$

eşitliği ile ifade edilir.

Eğrinin birim teğet vektörü t olmak üzere,

$$t = \frac{\frac{\partial r(u,v)}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial r(u,v)}{\partial v} \frac{dv}{dt}}{\left| \frac{\partial r(u,v)}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial r(u,v)}{\partial v} \frac{dv}{dt} \right|} = \frac{\frac{\partial r(u,v)}{\partial u} \frac{du}{dt} + \frac{\partial r(u,v)}{\partial v} \frac{dv}{dt}}{\sqrt{\begin{bmatrix} \frac{du}{dt} & \frac{dv}{dt} \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} \frac{du}{dt} \\ \frac{dv}{dt} \end{bmatrix}}}$$

dır.

$r(u, v)$ yüzeyi üzerinde kesişen iki eğri $c(t_1)$ ve $c(t_2)$ olsun. Bu eğrilerin birim teğet vektörleri sırasıyla t_1 ve t_2 olmak üzere,

$$t_1 = \frac{\frac{\partial r(u,v)}{\partial u} \frac{du}{dt_1} + \frac{\partial r(u,v)}{\partial v} \frac{dv}{dt_1}}{\sqrt{\begin{bmatrix} \frac{du}{dt_1} & \frac{dv}{dt_1} \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} \frac{du}{dt_1} \\ \frac{dv}{dt_1} \end{bmatrix}}} \quad \text{ve} \quad t_2 = \frac{\frac{\partial r(u,v)}{\partial u} \frac{du}{dt_2} + \frac{\partial r(u,v)}{\partial v} \frac{dv}{dt_2}}{\sqrt{\begin{bmatrix} \frac{du}{dt_2} & \frac{dv}{dt_2} \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} \frac{du}{dt_2} \\ \frac{dv}{dt_2} \end{bmatrix}}}$$

eşitlikleri yazılabilir. Dolayısıyla

$$t_1 \cdot t_2 = \frac{\frac{\partial r(u,v)}{\partial u} \frac{du}{dt_1} + \frac{\partial r(u,v)}{\partial v} \frac{dv}{dt_1}}{\sqrt{\begin{bmatrix} \frac{du}{dt_1} & \frac{dv}{dt_1} \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} \frac{du}{dt_1} \\ \frac{dv}{dt_1} \end{bmatrix}}} \cdot \frac{\frac{\partial r(u,v)}{\partial u} \frac{du}{dt_2} + \frac{\partial r(u,v)}{\partial v} \frac{dv}{dt_2}}{\sqrt{\begin{bmatrix} \frac{du}{dt_2} & \frac{dv}{dt_2} \end{bmatrix} G \begin{bmatrix} \frac{du}{dt_2} \\ \frac{dv}{dt_2} \end{bmatrix}}} = \cos \theta$$

dır. Eğer bu iki eğri dik ise

$$\left(\frac{\partial r(u, v)}{\partial u} \frac{du}{dt_1} + \frac{\partial r(u, v)}{\partial v} \frac{dv}{dt_1} \right) \left(\frac{\partial r(u, v)}{\partial u} \frac{du}{dt_2} + \frac{\partial r(u, v)}{\partial v} \frac{dv}{dt_2} \right) = 0$$

veya

$$G_{11} \frac{du}{dt_1} \frac{du}{dt_2} + G_{12} \left(\frac{du}{dt_1} \frac{du}{dt_2} + \frac{du}{dt_2} \frac{du}{dt_1} \right) + G_{22} \frac{dv}{dt_1} \frac{dv}{dt_2} = 0$$

olur. $u = t_1$ ve $v = t_2$ olarak alınırsa

$$t_1.t_2 = \cos \theta = \frac{\frac{\partial r(u,v)}{\partial u}}{\sqrt{G_{11}}} \cdot \frac{\frac{\partial r(u,v)}{\partial v}}{\sqrt{G_{22}}} = \frac{G_{12}}{\sqrt{G_{11}G_{22}}}$$

elde edilir. Buradan eğer $G_{12} = 0$ ise t_1 ve t_2 birbirine dik olur.[4]

Yüzey üzerinde iki nokta $P = r(u_0, v_0)$ ve $R = r(u_0 + du, v_0 + dv)$ olsun. PR vektörünün birim normal \vec{n} ye dik izdüşümü d olmak üzere

$$d = PR.\vec{n}$$

$$d = (r(u_0 + du, v_0 + dv) - r(u_0, v_0)) .n$$

şeklinde yazılabilir. Taylor açılımı yapılırsa

$$\begin{aligned} d &= \left[\frac{\partial r}{\partial u} du + \frac{\partial r}{\partial v} dv + \frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} dudv + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} (du)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} (dv)^2 \right] .n \\ &= r_u .ndu + r_v .ndv + \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} \right) .ndudv + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} .n(du)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} .n(dv)^2 \end{aligned}$$

olur. Burada n birim normal vektörü teğet düzlemine dik olduğundan $r_u .n = r_v .n = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned} d &= \left(\frac{\partial^2 r}{\partial u \partial v} \right) .ndudv + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial u^2} .n(du)^2 + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 r}{\partial v^2} .n(dv)^2 \quad (2.2.2) \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{uu} .n & r_{uv} .n \\ r_{uv} .n & r_{vv} .n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dır. Buradaki $D = \begin{bmatrix} r_{uu} .n & r_{uv} .n \\ r_{uv} .n & r_{vv} .n \end{bmatrix}$ ye *ikinci temel formun matrisi* denir.[4]

$G_{11}G_{22} - G_{12}G_{21} = (r_u \times r_v) \cdot (r_u \times r_v)$ eşitliğini kullanarak

$$n = \frac{r_u \times r_v}{|(r_u \times r_v)|} = \frac{r_u \times r_v}{\sqrt{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}}$$

yazılabilir. (2.2.2) den

$$2d = \begin{bmatrix} du & dv \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{uu} \cdot n & r_{uv} \cdot n \\ r_{uv} \cdot n & r_{vv} \cdot n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du \\ dv \end{bmatrix} = r_{uu} \cdot n (du)^2 + 2r_{uv} \cdot n dudv + r_{vv} \cdot n (dv)^2$$

veya

$$2d = L(du)^2 + 2Mdudv + N(dv)^2 \quad (2.2.3)$$

olarak yazılır ki burada $L = r_{uu} \cdot n$, $M = r_{uv} \cdot n$, $N = r_{vv} \cdot n$ olup K, L, M ye *ikinci temel formun katsayıları* denir.[4] Dolayısıyla ikinci temel formun matrisi

$$D = \begin{bmatrix} L & M \\ M & N \end{bmatrix}$$

dır.

(2.2.3) eşitliğinde $d = 0$ alınırsa

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2 = 0 \implies du = \frac{-M \pm \sqrt{M^2 - LN}}{L} dv$$

dır. Dolayısıyla yüzey üzerinde aldığımız P noktası için,

1) $M^2 - LN < 0$ ise reel kök yoktur ve teğet düzlem yüzeyi sadece P noktasında keser. Bu noktalara *eliptik nokta* denir.

2) $M^2 - LN = 0$ ise teğet düzlem yüzeyi bir doğru boyunca keser ve bu P noktasına *parabolik nokta* denir.

3) $M^2 - LN > 0$ ise teğet düzlem yüzeyi iki doğru boyunca keser ve bu P noktasına *hiperbolik nokta* denir.

4) $L = M = N = 0$ ise teğet düzlem yüzeye birden fazla noktada teğet olur ve bu P noktasına *flat nokta* denir.[4]

Ayrıca yüzeyin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{LN - M^2}{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}$$

ve ortalama eğriliği,

$$H = \frac{1}{2} \frac{G_{11}N + G_{22}L - G_{12}M}{G_{11}G_{22} - G_{12}^2}$$

dir.[4] Yüzey üzerindeki bir noktada maksimum ve minimum normal eğrilikler sırasıyla κ_{\max} ve κ_{\min} olmak üzere,

$$\kappa_{\max} = (H + \sqrt{H^2 - K})$$

$$\kappa_{\min} = (H - \sqrt{H^2 - K})$$

dir.[4] Ve Gauss ve ortalama eğriliği bu normal eğrilikler ile,

$$K = \kappa_{\max}\kappa_{\min}$$

$$H = \frac{\kappa_{\max} + \kappa_{\min}}{2}$$

şeklinde ifade edebiliriz.[4]

3. YÜZEY TASARIMI

Bu bölümde sonlu yüzey parçalarının (yamalarının) oluşturulması için çeşitli yöntemler verilecektir. Bu bölüm altı alt bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde tensör çarpım yüzeyler verilmektedir. İkinci bölümde Ferguson yüzey yamaları ve üçüncü bölümde bu tür yüzey yamalarının geometrik özellikleri incelenmektedir. Dördüncü ve beşinci bölümde sırası ile verilen onaltı nokta ile oluşturulan yüzey yaması ve Bezier yüzey yamaları tanıtılmaktadır. Son alt bölümde ise üçgensel yüzey yamalarının nasıl oluşturulacağı incelenmektedir.

3.1 Tensör çarpım yüzey yamaları

Sonlu sayıda yüzey parçaları u ve v parametrelerine bağlı olarak yazılabilir. Yani bir yüzey,

$$f(u, v) = [x(u, v) + y(u, v) + z(u, v)], \quad u \in [0, 1] \text{ ve } v \in [0, 1]$$

olarak yazılabilir. Ayrıca bu ifade kapalı formda $\phi(x, y, z) = 0$ olarak da yazılabilir. Böylece bir yüzey yaması $f(u, 0)$, $f(u, 1)$, $f(0, v)$ ve $f(1, v)$ eğrileri ile sınırlıdır.

Φ ve Ψ , $u \in U$ ve $v \in V$ olmak üzere,

$$\Phi = \{\varphi_i(u)\}_{i=0}^m \text{ ve } \Psi = \{\psi_j(v)\}_{j=0}^n$$

şeklinde tanımlı iki küme olsun. Bu durumda

$$r(u, v) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m C_{ij} \varphi_i(u) \psi_j(v)$$

şeklinde tanımlı yüzeye *tensör çarpım yüzeyi* denir. Eğer yüzey $m = n = 2$ ise bi-kuadratik, $m = n = 3$ ise bi-kübik' dir. Aşağıdaki örnekte, iki özel eğrinin oluşturduğu çarpım yüzeyi gözönüne alınmaktadır.[4]

Örnek 3.1.1. *Birinci ve ikinci mertebeden Bézier baz fonksiyonlarını göz önüne alalım.*

$$\begin{aligned} \Phi(u) &= \begin{bmatrix} \varphi_0(u) & \varphi_1(u) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-u) & u \end{bmatrix} \\ \Psi(v) &= \begin{bmatrix} \psi_0(v) & \psi_1(v) & \psi_2(v) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (1-v)^2 & 2v(1-v) & v^2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

dir. Tensör çarpım yüzeyinin eşitliğinden,

$$\begin{aligned} r(u, v) &= C_{00}\varphi_0\psi_0 + C_{01}\varphi_0\psi_1 + C_{02}\varphi_0\psi_2 \\ &\quad + C_{10}\varphi_1\psi_0 + C_{11}\varphi_1\psi_1 + C_{12}\varphi_1\psi_2 \end{aligned}$$

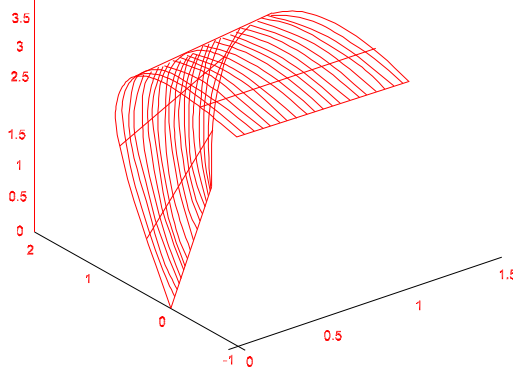
dir. Burada C_{ij} katsayıları

$$C_{00} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, C_{10} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, C_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 4 \end{bmatrix},$$

$$C_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}, C_{02} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, C_{12} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

olarak alınırsa

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} (1-u) & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (0, 0, 0) & (0, 2, 4) & (0, -1, 3) \\ (1, 2, 0) & (1, 2, 4) & (1, -1, 3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1-v)^2 \\ 2v(1-v) \\ v^2 \end{bmatrix}$$



Şekil 3.1. Bir tensör çarpım yüzey örneği

şeklinde yazılır. Oluşan bu yüzey (Şekil-3.1) deki gibidir. [4]

Bu tensör çarpım yüzeyi genelleştirirsek,

$$[D_i] = \begin{bmatrix} D_{mn} & D_{m(n-1)} & \dots & D_{m0} \\ D_{(m-1)n} & D_{(m-1)(n-1)} & \dots & D_{(m-1)0} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ D_{0n} & D_{0(n-1)} & \dots & D_{00} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$r(u, v) = \sum_{j=0}^n \sum_{i=0}^m D_{ij} u^i v^j = \begin{bmatrix} u^m & u^{m-1} & \dots & 1 \end{bmatrix} [D_i] \begin{bmatrix} v^n \\ v^{n-1} \\ \dots \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.1.1)$$

şeklinde yazılır.[4]

3.2 Ferguson bi-kübik yüzey yaması

Eğrinin uç noktaları $r(0)$ ve $r(1)$ ve bu noktalardaki eğim vektörleri $r_u(0)$, $r_u(1)$ olmak üzere $r(u)$ Ferguson eğrisi,

$$r(u) = \varphi_0 r(0) + \varphi_1 r(1) + \varphi_2 r_u(0) + \varphi_3 r_u(1)$$

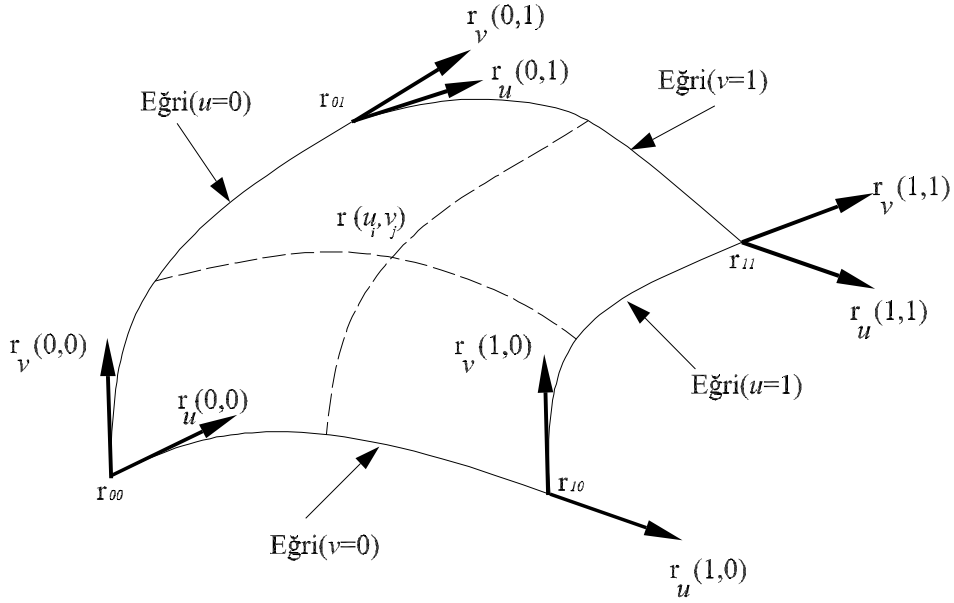
şeklinde yazılır. Burada $\varphi_0 = (2u^3 - 3u^2 + 1)$, $\varphi_1 = (-2u^3 + 3u^2)$, $\varphi_2 = (u^3 - 2u^2 + u)$, $\varphi_3 = (u^3 - u^2)$ şeklinde tanımlı Hermite kesme fonksiyonlarıdır. Bu eşitlik matris formunda,

$$\begin{aligned} r(u) &= \begin{bmatrix} \varphi_0 & \varphi_1 & \varphi_2 & \varphi_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \\ r_u(0) \\ r_u(1) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r(0) \\ r(1) \\ r_u(0) \\ r_u(1) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

dır.[4]

Tensör çarpım yüzey yaması, Hermite-kesme fonksiyonları içinde yazılabilir. Yani $i = 0, 1, 2, 3$ için $\Phi_i(u)$ ve $j = 0, 1, 2, 3$ için $\Phi_j(v)$, u ve v iki parametre olmak üzere iki Hermite-kesme fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$[C] = \begin{bmatrix} C_{00} & C_{01} & C_{02} & C_{03} \\ C_{10} & C_{11} & C_{12} & C_{13} \\ C_{20} & C_{21} & C_{22} & C_{23} \\ C_{30} & C_{31} & C_{32} & C_{33} \end{bmatrix}$$



Şekil 3.2. Hermite-Ferguson yüzey yaması

olmak üzere,

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} \varphi_0(u) & \varphi_1(u) & \varphi_2(u) & \varphi_3(u) \end{bmatrix} [C] \begin{bmatrix} \varphi_0(v) \\ \varphi_1(v) \\ \varphi_2(v) \\ \varphi_3(v) \end{bmatrix} \quad (3.2.2)$$

olarak yazılır.[4] Bu 16 tane C_{ij} fonksiyonları aşağıdaki bilgiler ışığında belirlenebilir;

- Yüzey yamasının dört köşe noktası $r(0, 0), r(0, 1), r(1, 0), r(1, 1)$ dir.
- Yüzeyin her köşesindeki u ve v ye göre sekiz tane teğet vektörleri $r_u(0, 0), r_v(0, 0), r_u(0, 1), r_v(0, 1), r_u(1, 0), r_v(1, 0), r_u(1, 1), r_v(1, 1)$ dir.
- Yüzeyin köşelerindeki dört tane büküm vektörleri $r_{uv}(0, 0), r_{uv}(0, 1), r_{uv}(1, 0), r_{uv}(1, 1)$ dir.[4]

Eğer (3.2.2) de

$$\begin{array}{cccc}
r(0,0) = C_{00} & r(1,0) = C_{10} & r_u(0,0) = C_{20} & r_u(1,0) = C_{30} \\
r(0,1) = C_{01} & r(1,1) = C_{11} & r_u(0,1) = C_{21} & r_u(1,1) = C_{31} \\
r_v(0,0) = C_{02} & r_v(1,0) = C_{12} & r_{uv}(0,0) = C_{22} & r_{uv}(1,0) = C_{32} \\
r_v(0,1) = C_{03} & r_v(1,1) = C_{13} & r_{uv}(0,1) = C_{23} & r_{uv}(1,1) = C_{33}
\end{array}$$

olarak alınırsa (3.2.2) eşitliği,

$$[G] = \begin{bmatrix} r(0,0) & r(0,1) & r_v(0,0) & r_v(0,1) \\ r(1,0) & r(1,1) & r_v(1,0) & r_v(1,1) \\ r_u(0,0) & r_u(0,1) & r_{uv}(0,0) & r_{uv}(0,1) \\ r_u(1,0) & r_u(1,1) & r_{uv}(1,0) & r_{uv}(1,1) \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$r(u,v) = \begin{bmatrix} \varphi_0(u) & \varphi_1(u) & \varphi_2(u) & \varphi_3(u) \end{bmatrix} [G] \begin{bmatrix} \varphi_0(v) \\ \varphi_1(v) \\ \varphi_2(v) \\ \varphi_3(v) \end{bmatrix} \quad (3.2.3)$$

şeklinde yazılabilir.[4] Burada $U = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix}$, Ferguson katsayılar matrisi

$$M = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 1 & 1 \\ -3 & 3 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ise bu durumda

$$\begin{bmatrix} \varphi_0(u) & \varphi_1(u) & \varphi_2(u) & \varphi_3(u) \end{bmatrix} = UM$$

eşitliği yazılabilir. Ayrıca $V = \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix}$ ve

$$G = \begin{bmatrix} r(0,0) & r(0,1) & r_v(0,0) & r_v(0,1) \\ r(1,0) & r(1,1) & r_v(1,0) & r_v(1,1) \\ r_u(0,0) & r_u(0,1) & r_{uv}(0,0) & r_{uv}(0,1) \\ r_u(1,0) & r_u(1,1) & r_{uv}(1,0) & r_{uv}(1,1) \end{bmatrix}$$

olarak alınır (3.2.3) eşitliği

$$r(u, v) = UMG M^T V^T \quad (3.2.4)$$

dır. [4](3.1.1) eşitliği cebirsel formda ve (3.2.4) eşitliği geometrik formda yazılmış olup bu iki ifade birbirine eşittir. $m = n = 3$ için

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{33} & D_{32} & D_{31} & D_{30} \\ D_{23} & D_{22} & D_{21} & D_{20} \\ D_{13} & D_{12} & D_{11} & D_{10} \\ D_{03} & D_{02} & D_{01} & D_{00} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 D_{ij} u^i v^j = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= UDV^T = UMG M^T V^T \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise $D = M G M^T$ veya $G = M^{-1} D (M^T)^{-1}$ eşitlikleri elde edilir. [4]

3.3 Ferguson Yüzey Yamalarının Bazı Geometrik Yapıları

Bir yüzey üzerinde alınan $P(u_0, v_0) = P(x_0, y_0, z_0)$ noktasında $r_u(u, v)$ ve $r_v(u, v)$ teğet vektörlerini içeren düzleme *teğet düzlem* denir. Bu teğet düzlemin denklemini

belirlemek için teğet düzlemi üzerinde verilen bu P noktasından farklı bir $Q(x, y, z)$ noktası alalım. Düzlemin normali $N(u_0, v_0)$ bu iki noktayı birleştiren PQ vektörüne dik olduğundan $PQ = (x - x_0)i + (y - y_0)j + (z - z_0)k$ için

$$PQ.N = 0$$

dır.[4] Buradan,

$$PQ.(r_u(u, v) \times r_v(u, v)) = \begin{bmatrix} x - x_0 & y - y_0 & z - z_0 \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{bmatrix} = 0$$

dır. Bu eşitliklerden faydalanarak bir $P = r(u_i, v_j)$ ve $Q(x, y, z)$ noktaları ile

$$r(u_i, v_j) = x(u_i, v_j)i + y(u_i, v_j)j + z(u_i, v_j)k = x_{ij}i + y_{ij}j + z_{ij}k \quad (3.3.1)$$

$$r_u(u_i, v_j) = x_u(u_i, v_j)i + y_u(u_i, v_j)j + z_u(u_i, v_j)k = x_{ij}^u i + y_{ij}^u j + z_{ij}^u k$$

$$r_v(u_i, v_j) = x_v(u_i, v_j)i + y_v(u_i, v_j)j + z_v(u_i, v_j)k = x_{ij}^v i + y_{ij}^v j + z_{ij}^v k$$

olup bu ifadeyi

$$\begin{bmatrix} x - x_{ij} & x_{ij}^u & x_{ij}^v \\ y - y_{ij} & y_{ij}^u & y_{ij}^v \\ z - z_{ij} & z_{ij}^u & z_{ij}^v \end{bmatrix}$$

olarak yazabiliriz.[4]

$$\begin{aligned} G_{11} &= r_u(u, v).r_u(u, v) & G_{12} &= r_u(u, v).r_v(u, v) & G_{22} &= r_v(u, v).r_v(u, v) \\ L &= r_{uu}(u, v).n(u, v) & M &= r_{uv}(u, v).n(u, v) & N &= r_{vv}(u, v).n(u, v) \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

eşitliklerini kullanarak Gauss eğriliği K ve ortalama eğrilik H yı hesaplayabiliriz. Ayrıca bu eşitlikler yardımıyla $LN - M^2 = 0$ ise parabolik nokta, $LN - M^2 > 0$ ise eliptik nokta ve $LN - M^2 < 0$ ise hiperbolik nokta şeklinde nokta sınıflandırılması yapılabilir.

Bir yüzey yamasının yüzey alanı,

$$S = \int \int_{u,v} |r_u(u, v) \times r_v(u, v)| dudv \quad (3.3.3)$$

ile hesaplanır.[4] Ayrıca (3.2.4) eşitliğini kullanarak

$$\begin{aligned} r_u(u, v) &= UM^uGM^TV^T \\ r_v(u, v) &= UMG(M^v)^TV^T \\ r_{uu}(u, v) &= UM^{uu}GM^TV^T \\ r_{uv}(u, v) &= UM^uG(M^v)^TV^T \\ r_{vv}(u, v) &= UMG(M^{vv})^TV^T \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

ifadelerini elde ederiz.[4] Burada

$$M^u = M^v = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 6 & -6 & 3 & 3 \\ -6 & 6 & -4 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$M^u = M^{vv} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & -12 & 6 & 6 \\ -6 & 6 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

dir.[4] Aşağıda bu duruma bir örnek verilmektedir.

Örnek 3.3.1. *Bir Ferguson yüzey yamasının geometrik katsayılar matrisi,*

$$G = \begin{bmatrix} (6, 0, 0) & (6, 0, 6) & (0, 0, 6) & (0, 0, 6) \\ (0, 6, 0) & (0, 6, 6) & (0, 0, 6) & (0, 0, 6) \\ (0, 5, 0) & (0, 5, 0) & 0 & 0 \\ (-5, 0, 0) & (-5, 0, 0) & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

olsun. Şimdi bu yüzeyin $(u = 0.5, v = 0.5)$ noktasındaki normal, teğet düzlemi, Gauss eğriliği ve ortalama eğriliğini hesaplayalım.

$$r(u, v) = UMGMT^TV^T = \begin{bmatrix} (7u^3 - 13u^2 + 6) & (-7u^3 + 8u^2 + 5u) & (6v) \end{bmatrix}$$

olup $(u = 0.5, v = 0.5)$ noktasındaki koordinatları $(3.625, 3.625, 3)$ dir. (3.3.4) eşitliklerini kullanarak,

$$r_u(u, v) = \begin{bmatrix} (21u^2 - 26u) & (-21u^2 + 16u + 5) & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_v(u, v) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

dir. $(u = 0.5, v = 0.5)$ noktasında bu ifadeler

$$r_u(0.5, 0.5) = \begin{bmatrix} -7.75 & 7.75 & 0 \end{bmatrix}$$

$$r_v(0.5, 0.5) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

olur. Dolayısıyla birim normal

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ -7.75 & 7.75 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 46.5i + 46.5j$$

dir.

$$n(0.5, 0.5) = \frac{46.5i + 46.5j}{\sqrt{46.5^2 + 46.5^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\begin{aligned} r_{uu}(u, v) &= UM^{uu}GM^TV^T = \begin{bmatrix} (42u - 26) & (-42u + 16) & 0 \end{bmatrix} \\ r_{uv}(u, v) &= UM^uG(M^v)^TV^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ r_{vv}(u, v) &= UMG(M^{vv})^TV^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

olur. Ayrıca

$$L = r_{uu}(u, v) \cdot n(u, v) = \frac{-1260u^2 + 1260u - 780}{\sqrt{(-126u^2 + 96u + 30)^2 + (-126u^2 + 156u)^2}}$$

$$M = r_{uv}(u, v) \cdot n(u, v) = 0$$

$$N = r_{vv}(u, v) \cdot n(u, v) = 0$$

dır. Bu durumda yüzeyin Gauss eğriliği,

$$K = \frac{LN - M^2}{G_{11}G_{22} - G_{12}^2} = 0$$

olur. Yüzeyin ortalama eğriliği için (3.3.2) eşitlikleri kullanılarak,

$$G_{11} = r_u(u, v) \cdot r_u(u, v) = (21u^2 - 26u)^2 + (-21u^2 + 16u + 5)^2$$

$$G_{12} = r_u(u, v) \cdot r_v(u, v) = 0$$

$$G_{22} = r_v(u, v) \cdot r_v(u, v) = 36$$

elde edilir. Böylece

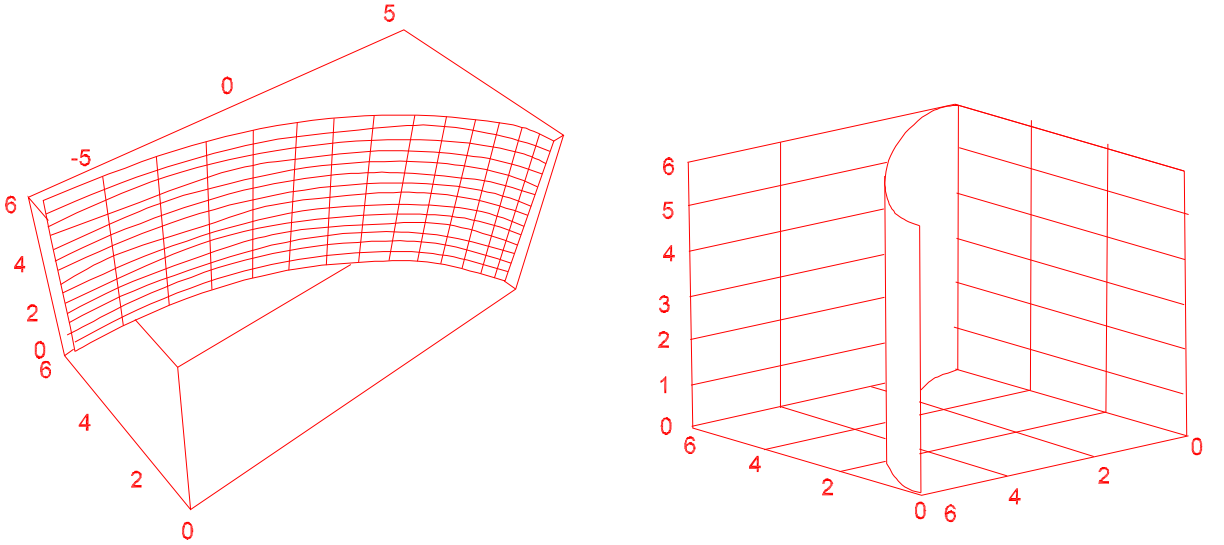
$$H = \frac{G_{11}N + G_{22}L - 2G_{12}M}{2(G_{11}G_{22} - G_{12}^2)} = \frac{L}{2G_{11}} = \frac{r_{uu}(0.5, 0.5) \cdot n(0.5, 0.5)}{2G_{11}(0.5, 0.5)}$$

dır. Burada $r_{uu}(0.5, 0.5) = (-5i - 5j)$ ve $n(0.5, 0.5) = (i + j)/\sqrt{2}$ değerleri yerlerine yazılırsa $H = -0.0294$ elde edilir. Tanjant düzlemi ise (3.3.1) kullanılarak,

$$\begin{vmatrix} (x - 3.625) & -7.75 & 0 \\ (y - 3.625) & 7.75 & 0 \\ (z - 3) & 0 & 6 \end{vmatrix} = 0$$

$$46.5(x - 3.625) + 46.5(y - 3.625) = 0$$

yani $x + y = 7.25$ elde edilir. Bu yüzey yamasının alanı



Şekil 3.3. Ferguson yüzey yamaları

$$r_u(u, v) \times r_v(u, v) = 6(-21u^2 + 16u + 5)i - 6(21u^2 - 26u)j$$

olduğundan

$$|r_u(u, v) \times r_v(u, v)| = 6 [(-21u^2 + 16u + 5)^2 + (21u^2 - 26u)^2]^{\frac{1}{2}} = f(u)$$

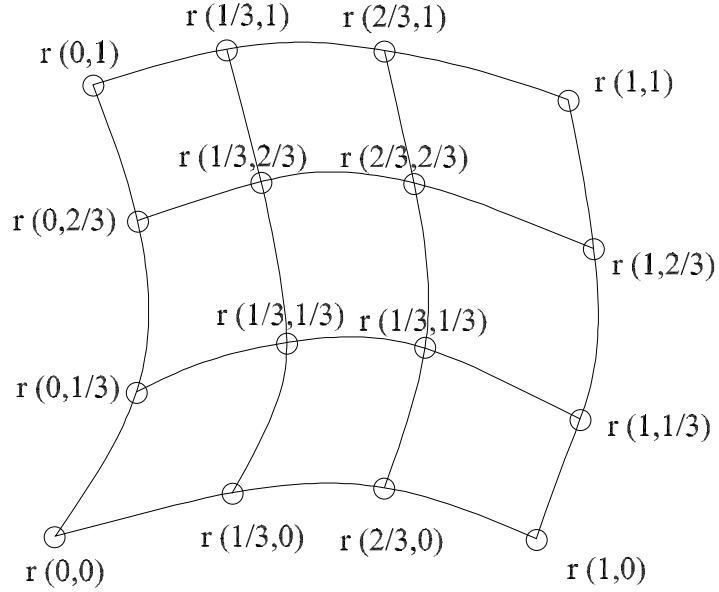
dır. O halde

$$S = \int_{u=0}^1 \int_{v=0}^1 f(u) du dv = 56.64$$

elde edilir.[4]

3.4 16 nokta ile yüzey yaması oluşturma

Yüzey yaması üzerinde 16 nokta için, (3.1.1) de verilen eşitlikte $m = n = 3$ için bir bi-kübik tensör çarpım yüzeyi oluşturabilir.



Şekil 3.4. 16 nokta ile bi-kübik yüzey yaması

$m = n = 3$ için,

$$\begin{aligned}
r(u, v) &= \sum_{j=0}^3 \sum_{i=0}^3 D_{ij} u^i v^j \\
&= \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} D_{33} & D_{32} & D_{31} & D_{30} \\ D_{23} & D_{22} & D_{21} & D_{20} \\ D_{13} & D_{12} & D_{11} & D_{10} \\ D_{03} & D_{02} & D_{01} & D_{00} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{3.4.1}$$

ile D_{ij} leri belirleyelim. $u \in [0, 1]$ ve $v \in [0, 1]$ ve her bir aralıkta $[0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1]$ alt aralıkları mevcut olsun.

Yüzey üzerinde eşit aralıklarla verilen 16 nokta gözönüne alınırsa

$$\begin{bmatrix} r_{33} & r_{32} & r_{31} & r_{30} \\ r_{23} & r_{22} & r_{21} & r_{20} \\ r_{13} & r_{12} & r_{11} & r_{10} \\ r_{03} & r_{02} & r_{01} & r_{00} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r(1, 1) & r(1, \frac{2}{3}) & r(1, \frac{1}{3}) & r(1, 0) \\ r(\frac{2}{3}, 1) & r(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}) & r(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}) & r(\frac{2}{3}, 0) \\ r(\frac{1}{3}, 1) & r(\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) & r(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}) & r(\frac{1}{3}, 0) \\ r(0, 1) & r(0, \frac{2}{3}) & r(0, \frac{1}{3}) & r(0, 0) \end{bmatrix} \tag{3.4.2}$$

yazılabilir. (3.4.1) ve (3.4.2) den

$$[D] = \begin{bmatrix} D_{33} & D_{32} & D_{31} & D_{30} \\ D_{23} & D_{22} & D_{21} & D_{20} \\ D_{13} & D_{12} & D_{11} & D_{10} \\ D_{03} & D_{02} & D_{01} & D_{00} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$\begin{bmatrix} r_{33} & r_{32} & r_{31} & r_{30} \\ r_{23} & r_{22} & r_{21} & r_{20} \\ r_{13} & r_{12} & r_{11} & r_{10} \\ r_{03} & r_{02} & r_{01} & r_{00} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{8}{27} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [D] \begin{bmatrix} 1 & \frac{8}{27} & \frac{1}{27} & 0 \\ 1 & \frac{4}{9} & \frac{1}{9} & 0 \\ 1 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3.4.3}$$

elde edilir.[4] Burada

$$M_{16} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{8}{27} & \frac{4}{9} & \frac{2}{3} & 1 \\ \frac{1}{27} & \frac{1}{9} & \frac{1}{3} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1}$$

için

$$\begin{bmatrix} D_{33} & D_{32} & D_{31} & D_{30} \\ D_{23} & D_{22} & D_{21} & D_{20} \\ D_{13} & D_{12} & D_{11} & D_{10} \\ D_{03} & D_{02} & D_{01} & D_{00} \end{bmatrix} = M_{16} \begin{bmatrix} r_{33} & r_{32} & r_{31} & r_{30} \\ r_{23} & r_{22} & r_{21} & r_{20} \\ r_{13} & r_{12} & r_{11} & r_{10} \\ r_{03} & r_{02} & r_{01} & r_{00} \end{bmatrix} M_{16}^T$$

olur.[4] Dolayısıyla eşit aralıklı 16 nokta kullanılarak oluşturulan bir yüzey yaması,

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} M_{16} \begin{bmatrix} r_{33} & r_{32} & r_{31} & r_{30} \\ r_{23} & r_{22} & r_{21} & r_{20} \\ r_{13} & r_{12} & r_{11} & r_{10} \\ r_{03} & r_{02} & r_{01} & r_{00} \end{bmatrix} M_{16}^T \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (3.4.4)$$

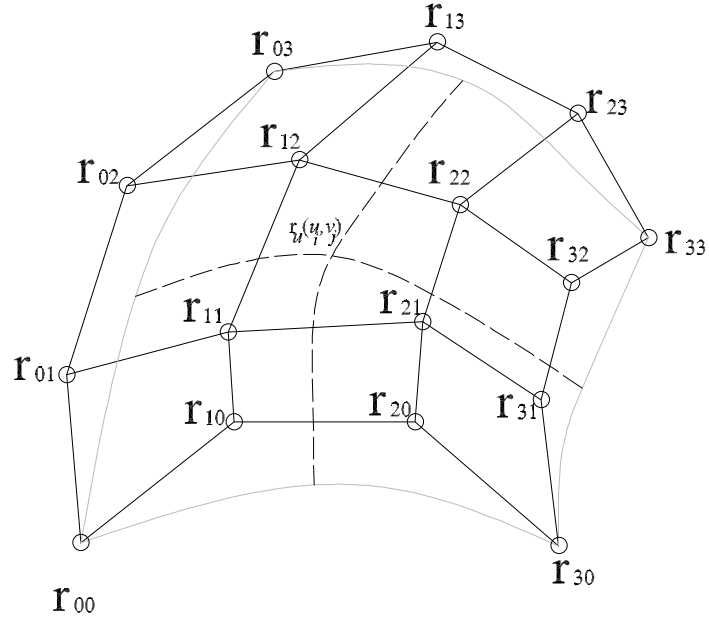
şeklinde yazılır.[4]

3.5 Bézier yüzey yamaları

$i = 0, \dots, m$ ve $j = 0, \dots, n$ olmak üzere r_{ij} kontrol noktaları ve u, v parametrelerine göre Bernstein polinomları $B_i^m(u)$ ile $B_j^n(v)$ tensör çarpım Bezier yüzey yaması

$$r(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n r_{ij} B_i^m(u) B_j^n(v) \quad (3.5.1)$$

ile verilir.[4]



Şekil 3.5. Bi-kübik Bezier yüzey yaması

$$[R_i] = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & \dots & r_{0(n-1)} & r_{0n} \\ r_{10} & r_{11} & \dots & r_{1(n-1)} & r_{1n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ r_{(m-1)0} & r_{(m-1)1} & \dots & r_{(m-1)(n-1)} & r_{(m-1)n} \\ r_{m0} & r_{m1} & \dots & r_{m(n-1)} & r_{mn} \end{bmatrix}$$

olmak üzere bu eşitlik

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} (1-u)^m & mu(1-u)^{m-1} & \dots & u^m \end{bmatrix} [R_i] \begin{bmatrix} (1-v)^n \\ n(1-v)^{n-1}v \\ \dots \\ v^n \end{bmatrix} \quad (3.5.2)$$

dir.[4]

Örneğin bir bi-kübik Bezier yüzey yaması için

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & r_{03} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{30} & r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

olmak üzere

$$r(u, v) = \begin{bmatrix} (1-u)^3 & 3u(1-u)^2 & 3u^2(1-u) & u^3 \end{bmatrix} [R] \begin{bmatrix} (1-v)^3 \\ 3v(1-v)^2 \\ 3v^2(1-v) \\ v^3 \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [R] \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} M_B [R] M_B^T \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada M_B matrisine *Bézier katsayılar matrisi* denir.[4]

Örnek 3.5.1. *Bir kuadratik-kübik Bézier yüzey yaması için kontrol noktaları,*

$$[A] = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & r_{03} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & r_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (0, 0, 0) & (1, 0, 1) & (2, 0, 1) & (3, 0, 0) \\ (0, 1, 0) & (1, 1, 1) & (2, 1, 1) & (3, 1, 0) \\ (0, 2, 0) & (1, 2, 1) & (2, 2, 1) & (3, 2, 0) \end{bmatrix}$$

olsun. Bu durumda yüzey üzerinde $(u = 0.5, v = 0.5)$ noktasındaki birim normali, tanjant düzleminin denklemini ve eğriliklerini hesaplayalım. Burada (3.5.1) eşitliğinde $m = 2$ ve $n = 3$ dir. O halde verilen bu kontrol noktaları ile yüzey yamasını,

$$\begin{aligned}
r(u, v) &= \begin{bmatrix} (1-u)^2 & 2u(1-u) & u^2 \end{bmatrix} [A] \begin{bmatrix} (1-v)^3 \\ 3v(1-v)^2 \\ 3v^2(1-v) \\ v^3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} (1-u)^2 & 2u(1-u) & u^2 \end{bmatrix} [A] \begin{bmatrix} (1-v)^3 \\ 3v(1-v)^2 \\ 3v^2(1-v) \\ v^3 \end{bmatrix} \\
&= [3v, 2u, 3v(1-v)]
\end{aligned}$$

olarak (Şkil-3.6) bulunur.

Dolayısıyla yüzeyin birim normali,

$$n = \frac{r_u(u, v) \times r_v(u, v)}{|r_u(u, v) \times r_v(u, v)|} = \frac{\{6 - 12v, 0, -6\}}{\sqrt{(6 - 12v)^2 + 36}} \implies n(0.5, 0.5) = \{0, 0, -1\}$$

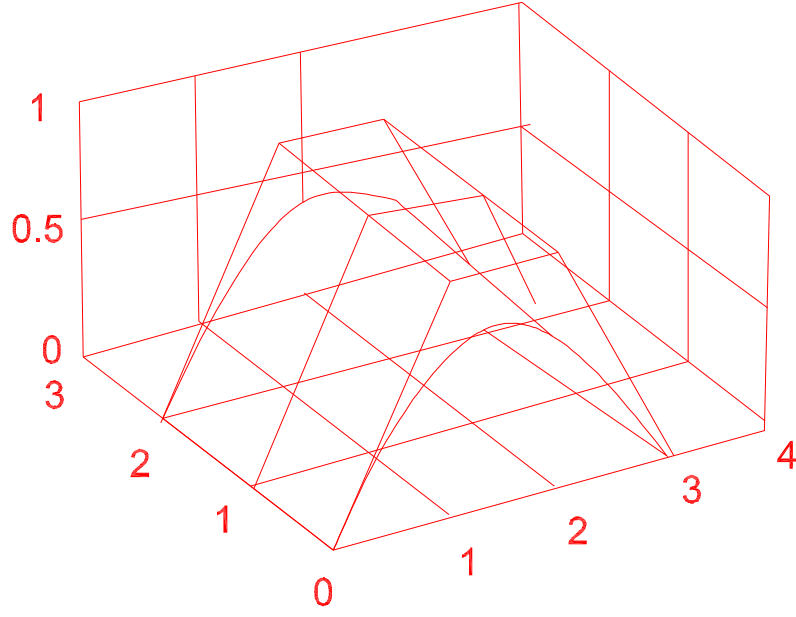
olur. Tanjant düzlemi $r(0.5, 0.5) = [1.5, 1, 0.75]$ de

$$\begin{vmatrix} x - x_p & x_{up} & x_{vp} \\ y - y_p & y_{up} & y_{vp} \\ z - z_p & z_{up} & z_{vp} \end{vmatrix} = 0 \implies \begin{vmatrix} x - 1.5 & 0 & 3 \\ y - 1 & 2 & 0 \\ z - 0.75 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0 \implies z = 0.75$$

elde edilir. Ayrıca $u = 0.5$ ve $v = 0.5$ noktalarında

$$r_u = \{0, 2, 0\}, \quad r_v = \{3, 0, 0\}, \quad r_{uu} = \{0, 0, 0\}$$

$$r_{uv} = \{0, 0, 0\}, \quad r_{vv} = \{0, 0, -6\}$$



Şekil 3.6. Kuadratik-kübik Bezier yüzey yaması

olup

$$G_{11} = 4, \quad G_{12} = 0, \quad G_{22} = 9$$

$$L = M = 0, \quad N = 0$$

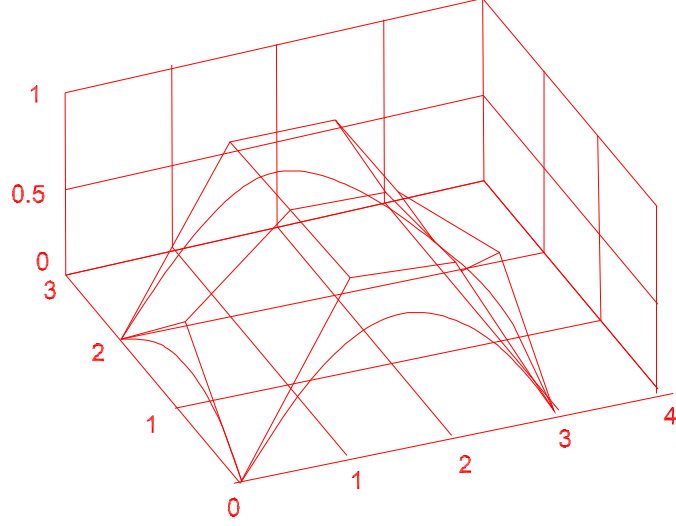
dır. Buradan,

$$K = \kappa_1 \kappa_2 = \frac{LN - M^2}{G_{11}G_{22} - G_{12}^2} = 0$$

ve

$$H = \frac{1}{2}(\kappa_1 + \kappa_2) = \frac{G_{11}N + G_{22}L - 2G_{12}M}{2(G_{11}G_{22} - G_{12}^2)} = \frac{1}{3}$$

dir. Şimdi verilen bir yüzeyde kontrol noktalarının değiştirilmesi ile yüzeyde oluşacak değişikliği gözlemleyelim. Eğer yukarıda oluşturduğumuz yüzeye ait olan r_{10} ve r_{13} kontrol noktalarını sırasıyla $(0, 1, 0.5)$ ve $(3, 1, 0.5)$ olarak değiştirirsek bu durumda yeni yüzey (Şekil-3.7) deki gibi olur.[4]



Şekil 3.7. İki kontrol noktasının değişimi ile kuadratik-kübik Bezier yüzey yaması

3.6 Üçgen şeklinde yüzey yamaları

Bir üçgen yüzey yaması oluşturmak için parametrelerimiz u, v ve w olsun. Burada $u + v + w = 1$ olmalıdır. Üçgen şeklinde yüzey yamalarının kontrol noktaları r_{ijk} olmak üzere bu noktalar

$$\begin{array}{ccccc}
 & & n = 2 \text{ ise} & & \\
 & & r_{020} & & \\
 & r_{011} & & r_{110} & \\
 r_{002} & & r_{101} & & r_{200}
 \end{array}$$

ve

$$\begin{array}{cccccc}
& & & & & n = 4 \\
& & & & & r_{040} \\
& & & & & r_{031} & & r_{130} \\
& & & & & r_{022} & & r_{121} & & r_{220} \\
& & & & & r_{013} & & r_{112} & & r_{211} & & r_{310} \\
& & & & & r_{004} & & r_{103} & & r_{202} & & r_{301} & & r_{400}
\end{array}$$

şeklinde üçgen şeklinde dizilir. Herbir kontrol noktası üç boyutludur ve i, j, k indisleri için $0 \leq i, j, k \leq n$ ve $i + j + k = n$ dir. Burada n seçimi keyfidir. Ayrıca kontrol noktası sayısını $\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$ ile belirleyebiliriz. Bu ifadelerle birlikte bir üçgen yüzey yaması, yüzeyin sınır eğrileri, $\{u = 0, v, w = (1 - v)\}$, $\{u = (1 - w), v = 0, w\}$ ve $\{u, v = (1 - u), w = 0\}$

$$\begin{aligned}
r(v) &= \sum_{i+k=n} r_{0,j,k} \frac{n!}{j!k!} v^j (1-v)^k = \sum_{j=0}^n r_{0,j,n-j} \frac{n!}{j!(n-j)!} v^j (1-v)^{n-j} \quad (3.6.1) \\
r(u) &= \sum_{i+j=n} r_{i,j,0} \frac{n!}{i!j!} u^i (1-u)^j = \sum_{i=0}^n r_{i,(n-i),0} \frac{n!}{i!(n-i)!} u^i (1-u)^{n-i} \\
r(w) &= \sum_{k+i=n} r_{i,0,k} \frac{n!}{i!k!} w^k (1-w)^i = \sum_{k=0}^n r_{(n-k),0,k} \frac{n!}{k!(n-k)!} w^k (1-w)^{n-k}
\end{aligned}$$

olmak üzere

$$r(u, v, w) = \sum_{i+j+k=n} r_{ijk} \frac{n!}{i!j!k!} u^i v^j w^k, \quad u + v + w = 1 \text{ ve } i + j + k = n \quad (3.6.2)$$

elde edilir.[4]

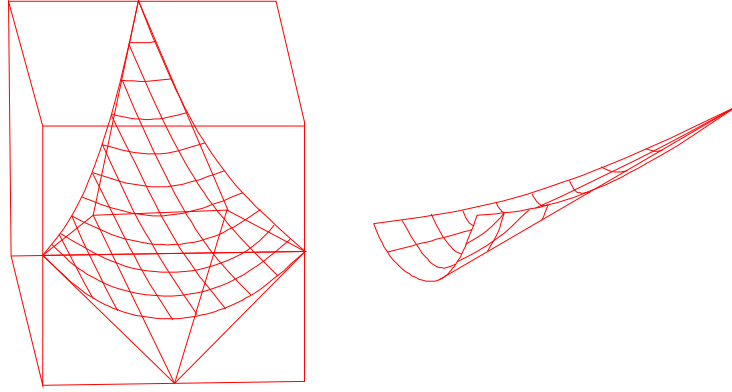
Örnek 3.6.1. $n = 2$ için bir üçgen Bézier yüzey yaması oluşturalım. Kontrol noktaları,

$$r_{020} = (1, 3, 1)$$

$$r_{011} = (0.5, 1, 0); r_{110} = (1.5, 1, 0)$$

$$r_{002} = (0, 0, 0); r_{101} = (1, 0, -1); r_{200} = (2, 0, 0)$$

olarak verilsin. Bu durumda (3.6.2) eşitliği yardımıyla (Şekil-3.8) elde edilir.[4]



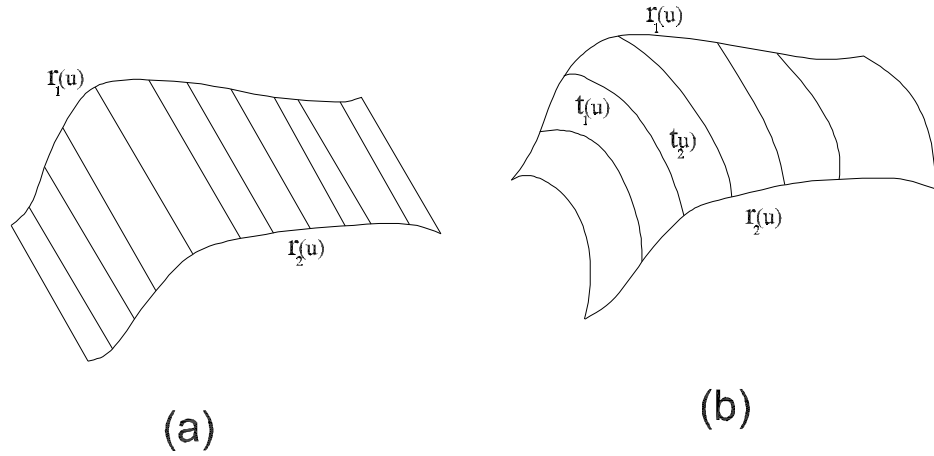
Şekil 3.8. Üçgensel yüzey yamaları

4. BİRLEŞİK YÜZEYLER

Bu bölümde önce verilen iki eğriyi sınır eğrileri kabul eden yüzey yamaları sunulacak, sonrada iki yüzey yamasının oluşturduğu yüzey yaması tanıtılacaktır.

4.1 Sınır interpolasyon yüzeyler

Tanım 4.1.1. $p(u)$ ve $q(u)$ iki eğri olsun. Bu iki eğriye dayanarak hareket eden doğrunun meydana getirdiği yüzeye regle yüzey denir. Daha açık olarak $r(u, v) = (1 - v)p(u) + vq(u)$ şeklinde tanımlı yüzeye regle yüzey denir.[3]



Şekil 4.1. a) Regle yüzey ve b) loft yüzey

Regle yüzey yamaları, sınır interpolasyon yüzeylere iyi bir örnektir. $r_1(u)$ ve $r_2(u)$,

$[0, 1]$ aralığında iki parametrik eğri olsun. Regle yüzeyin tanımı gereği,

$$\begin{aligned} r(u, v) &= (1 - v)r_1(u) + vr_2(u) \\ &= r_1(u) + v[r_2(u) - r_1(u)] \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

şeklinde yazılabilir. Ayrıca $t_1(u)$ ve $t_2(u)$, sırasıyla $r_1(u)$ ve $r_2(u)$ eğrilerinin çapraz sınır teğetleri olsun. Bu durumda bu yüzey (3.2.1) yardımıyla,

$$r(u, v) = \varphi_0(v)r_1(u) + \varphi_1(v)r_2(u) + \varphi_2(v)t_1(u) + \varphi_3(v)t_2(u) \quad (4.1.2)$$

olarak yazılır. Bu şekilde tanımlı yüzeye *loft yüzey* denir.[4]

Örnek 4.1.1. $r(u, 0) = \{\cos[\pi(1 - u)], \sin[-\pi u], 0\}$ ve $r(u, 1) = \{(2u - 1), -2u(1 - u), 1\}$ eğrileri, $u \in [0, 1]$ aralığında regle yüzeyin iki sınır eğrisi olsun. $v \in [0, 1]$ için yüzey

$$r(u, v) = \{(1 - v)\cos[\pi(1 - u)] + v(2u - 1), -(-v\sin[\pi u] - 2u)(1 - u)v, v\}$$

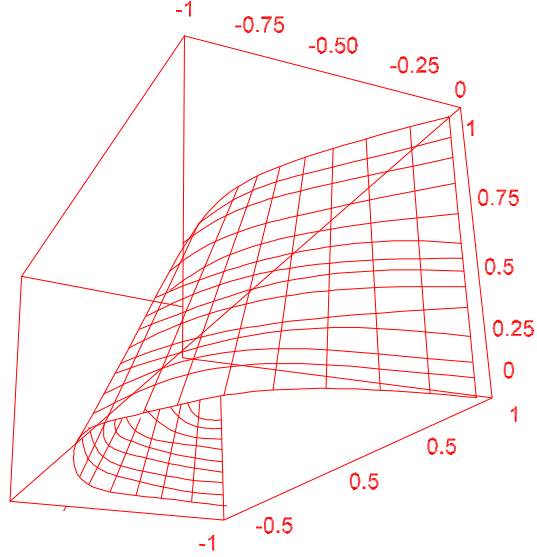
dir. Ayrıca $(u = 0.5, v = 0.5)$ noktasında

$$r_u(0.5, 0.5) = \left\{ \frac{\pi}{2} + 1, 0, 0 \right\}, \quad r_v(0.5, 0.5) = \left\{ 0, \frac{1}{2}, 1 \right\}$$

olup

$$r_u \times r_v = \left\{ 0, \frac{\pi}{2} + 1, \frac{1}{2}(\frac{\pi}{2} + 1) \right\} \implies \text{birim normal } n = \{0, 0.895, 0.448\}$$

elde edilir.[4]



Şekil 4.2. Regle yüzey

4.2 Coon's yüzey yamaları

$P_{00}, P_{01}, P_{10}, P_{11}$ kontrol noktalarındaki sınır eğrileri $a_0(v), a_1(v), b_0(u)$ ve $b_1(u)$ olsun.

Regle yüzeyler bu eğri parçalarından karşılıklı iki tanesinin birleştirilmesiyle oluştuğundan,

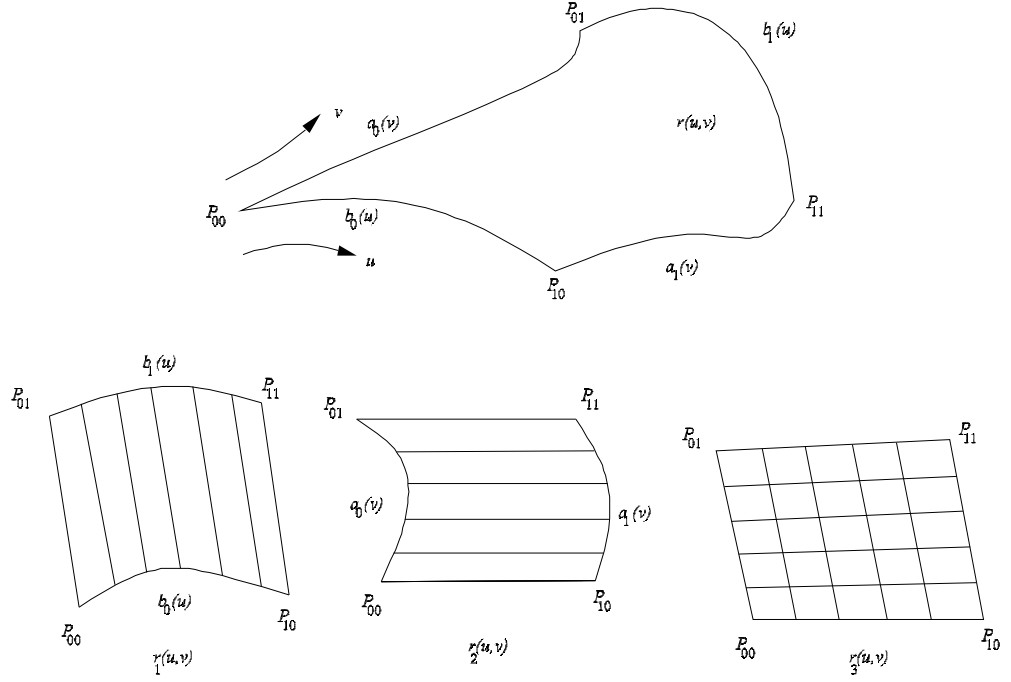
$$r_1(u, v) = (1 - v)b_0(u) + vb_1(u) \quad (4.2.1)$$

$$r_2(u, v) = (1 - u)a_0(v) + ua_1(v)$$

dir. Bir lineer Coon's yaması bu iki yamanın toplamı olarak aşağıda verilen yöntemle bulunur. İlk olarak

$$r(u, v) = r_1(u, v) + r_2(u, v) - r_3(u, v) \quad (4.2.2)$$

yazılır.[4]



Şekil 4.3. Bir bi-linear Coon's yamasının oluşumu

$r(u, 0) = b_0(u)$ olduğundan

$$\begin{aligned}
 r(u, 0) &= r_1(u, 0) + r_2(u, 0) - r_3(u, 0) \\
 &= b_0(u) + (1 - u)a_0(0) + ua_1(0) - r_3(u, 0) \\
 &= b_0(u) + (1 - u)P_{00} + uP_{10} - r_3(u, 0)
 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$r_3(u, 0) = (1 - u)P_{00} + uP_{10} \quad (4.2.3)$$

olur. Benzer şekilde $r(u, 1) = b_1(u)$ olduğundan

$$\begin{aligned} r(u, 1) &= r_1(u, 1) + r_2(u, 1) - r_3(u, 1) \\ &= b_1(u) + (1 - u)a_0(1) + ua_1(1) - r_3(u, 1) \\ &= b_1(u) + (1 - u)P_{01} + uP_{11} - r_3(u, 1) \end{aligned}$$

dır. Buradan

$$r_3(u, 1) = (1 - u)P_{01} + uP_{11} \quad (4.2.4)$$

bulunur. (4.2.3) ve (4.2.4) eşitliklerinden $r_3(u, v)$ eğrisi için iki sınır eğrisi olan $r_3(u, 0)$ ve $r_3(u, 1)$ nin v parametresine bağlı lineer oldukları görülür. Dolayısıyla,

$$\begin{aligned} r_3(u, v) &= (1 - v)r_3(u, 0) + vr_3(u, 1) \\ &= (1 - v)[(1 - u)P_{00} + uP_{10}] + v[(1 - u)P_{01} + uP_{11}] \\ &= (1 - v)(1 - u)P_{00} + u(1 - v)P_{10} + (1 - u)vP_{01} + uvP_{11} \end{aligned} \quad (4.2.5)$$

elde edilir. Aynı şekilde $r(0, v) = a_0(v)$ ve $r(1, v) = a_1(v)$ eşitlikleri kullanılarak,

$$\begin{aligned} r(0, v) &= (1 - v)b_0(0) + vb_1(0) + a_0(v) - r_3(0, v) \\ &= (1 - v)P_{00} + vP_{01} + a_0(v) - r_3(0, v) = a_0(v) \end{aligned}$$

ve

$$r_3(0, v) = (1 - v)P_{00} + vP_{01} \quad (4.2.6)$$

bulunur. Ayrıca

$$\begin{aligned} r(1, v) &= (1 - v)b_0(1) + vb_1(1) + a_1(v) - r_3(1, v) \\ &= (1 - v)P_{10} + vP_{11} + a_1(v) - r_3(1, v) = a_1(v) \end{aligned}$$

ve

$$r_3(1, v) = (1 - v)P_{10} + vP_{11} \quad (4.2.7)$$

olur. $r_3(0, v)$ ve $r_3(1, v)$, u 'ya bağlı lineer fonksiyonlardır. Bu durumda bir lineer Coon's yüzey yaması,

$$\begin{aligned} r(u, v) &= \begin{bmatrix} (1 - u) & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0(v) \\ a_1(v) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} (1 - v) & v \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0(u) \\ b_1(u) \end{bmatrix} \\ &\quad - \begin{bmatrix} (1 - u) & u \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{00} & P_{01} \\ P_{10} & P_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - v) \\ v \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

dır. Burada $\begin{bmatrix} (1 - u) & u \end{bmatrix}$ ve $\begin{bmatrix} (1 - v) & v \end{bmatrix}$ fonksiyonları Coon's yüzey yamaları için kesme fonksiyonlarıdır.[4]

Lineer Coon's yüzey yaması için verilen yöntem benzer olarak Hermite kesme fonksiyonları yardımı ile Hermite veya bi-kübik Coon's yüzey yaması oluşturulabilir. Dört sınır eğrisi ve köşe noktalarına ilaveten sırasıyla çapraz sınır teğetleri $s_0(v)$, $s_1(v)$,

$t_0(u)$ ve $t_1(u)$ olsun. $b_0(u)$ ve $b_1(u)$ sınır eğrilerinin çapraz sınır teğetleri $t_0(u)$ ve $t_1(u)$ olmak üzere,

$$r_1(u, v) = \varphi_0(v)b_0(u) + \varphi_1(v)b_1(u) + \varphi_2(v)t_0(u) + \varphi_3(v)t_1(u) \quad (4.2.9)$$

yazılır. Benzer şekilde $a_0(v)$ ve $a_1(v)$ sınır eğrilerinin çapraz sınır teğetleri $s_0(v)$ ve $s_1(v)$ olmak üzere,

$$r_2(u, v) = \varphi_0(u)a_0(v) + \varphi_1(u)a_1(v) + \varphi_2(u)s_0(v) + \varphi_3(u)s_1(v) \quad (4.2.10)$$

yazabiliriz. (4.2.2) te verilen bi-kübik Coon' yüzey yaması için,

$$\begin{aligned} r(u, 0) &= \varphi_0(0)b_0(u) + \varphi_1(0)b_1(u) + \varphi_2(0)t_0(u) + \varphi_3(0)t_1(u) \\ &\quad + \varphi_0(u)a_0(0) + \varphi_1(u)a_1(0) + \varphi_2(u)s_0(0) + \varphi_3(u)s_1(0) - r_3(u, 0) \\ &= b_0(u) \end{aligned}$$

ise

$$r_3(u, 0) = \varphi_0(u)P_{00} + \varphi_1(u)P_{10} + \varphi_2(u)s_0(0) + \varphi_3(u)s_1(0) \quad (4.2.11)$$

elde edilir. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned} r(u, 1) &= \varphi_0(1)b_0(u) + \varphi_1(1)b_1(u) + \varphi_2(1)t_0(u) + \varphi_3(1)t_1(u) \\ &\quad + \varphi_0(u)a_0(1) + \varphi_1(u)a_1(1) + \varphi_2(u)s_0(1) + \varphi_3(u)s_1(1) - r_3(u, 1) \\ &= b_1(u) \end{aligned}$$

ise

$$r_3(u, 1) = \varphi_0(u)P_{01} + \varphi_1(u)P_{11} + \varphi_2(u)s_0(1) + \varphi_3(u)s_1(1) \quad (4.2.12)$$

dir.[4] Şimdi oluşturduğumuz bu $r(u, v)$ yüzey yamasının v ye göre diferensiyeli alınırsa,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}r(u, v) &= \frac{\partial}{\partial v}r_1(u, v) + \frac{\partial}{\partial v}r_2(u, v) - \frac{\partial}{\partial v}r_3(u, v) \\ &= \frac{\partial}{\partial v}\varphi_0(v)b_0(u) + \frac{\partial}{\partial v}\varphi_1(v)b_1(u) + \frac{\partial}{\partial v}\varphi_2(v)t_0(u) + \frac{\partial}{\partial v}\varphi_3(v)t_1(u) \\ &\quad + \varphi_0(u)\frac{\partial}{\partial v}a_0(v) + \varphi_1(u)\frac{\partial}{\partial v}a_1(v) + \varphi_2(u)\frac{\partial}{\partial v}s_0(v) + \varphi_3(u)\frac{\partial}{\partial v}s_1(v) - \frac{\partial}{\partial v}r_3(u, v) \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

elde edilir.[4] Twist vektörleri χ_{ij} olmak üzere,

$$\chi_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial u \partial v}r(u, v) \Big|_{u=i, v=j} = \frac{\partial}{\partial v}s_i(v) \Big|_{v=j} = \frac{\partial}{\partial u}t_j(u) \Big|_{u=i} \quad , i = 0, 1 \text{ ve } j = 0, 1 \quad (4.2.14)$$

olarak tanımlansın. Böylece $v = 0$ için $\frac{\partial}{\partial v}a_0(0) = t_0(0)$ ve $\frac{\partial}{\partial v}a_1(0) = t_0(1)$ olup (4.2.13) eşitliği,

$$\frac{\partial}{\partial v}r(u, 0) = t_0(u) + \varphi_0(u)t_0(0) + \varphi_1(u)t_0(1) + \varphi_2(u)\chi_{00} + \varphi_3(u)\chi_{10} - \frac{\partial}{\partial v}r_3(u, 0) = t_0(u)$$

olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial v}r_3(u, 0) = \varphi_0(u)t_0(0) + \varphi_1(u)t_0(1) + \varphi_2(u)\chi_{00} + \varphi_3(u)\chi_{10} \quad (4.2.15)$$

dır. Benzer şekilde $v = 1$ için $\frac{\partial}{\partial v}a_0(1) = t_1(0)$ ve $\frac{\partial}{\partial v}a_1(1) = t_1(1)$ olduğundan,

$$\frac{\partial}{\partial v}r(u, 1) = t_1(u) + \varphi_0(u)t_1(0) + \varphi_1(u)t_1(1) + \varphi_2(u)\chi_{01} + \varphi_3(u)\chi_{11} - \frac{\partial}{\partial v}r_3(u, 1) = t_1(u)$$

olduğundan

$$\frac{\partial}{\partial v} r_3(u, 1) = \varphi_0(u)t_1(0) + \varphi_1(u)t_1(1) + \varphi_2(u)\chi_{01} + \varphi_3(u)\chi_{11} \quad (4.2.16)$$

dır. (4.2.11), (4.2.12), (4.2.15) ve (4.2.16) eşitliklerinden

$$r_3(u, v) = \varphi_0(v)r_3(u, 0) + \varphi_1(v)r_3(u, 1) + \varphi_2(v)\frac{\partial}{\partial v}r_3(u, 0) + \varphi_3(v)\frac{\partial}{\partial v}r_3(u, 1)$$

veya

$$\begin{aligned} r_3(u, v) &= \varphi_0(v) [\varphi_0(u)P_{00} + \varphi_1(u)P_{10} + \varphi_2(u)s_0(0) + \varphi_3(u)s_1(0)] \\ &\quad + \varphi_1(v) [\varphi_0(u)P_{01} + \varphi_1(u)P_{11} + \varphi_2(u)s_0(1) + \varphi_3(u)s_1(1)] \\ &\quad + \varphi_2(v) [\varphi_0(u)t_0(0) + \varphi_1(u)t_0(1) + \varphi_2(u)\chi_{00} + \varphi_3(u)\chi_{10}] \\ &\quad + \varphi_3(v) [\varphi_0(u)t_1(0) + \varphi_1(u)t_1(1) + \varphi_2(u)\chi_{01} + \varphi_3(u)\chi_{11}] \end{aligned}$$

veya matris formunda

$$r_3(u, v) = \begin{bmatrix} \varphi_0(v) & \varphi_1(v) & \varphi_2(v) & \varphi_3(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{00} & P_{10} & s_0(0) & s_1(0) \\ P_{01} & P_{11} & s_0(1) & s_1(1) \\ t_0(0) & t_0(1) & \chi_{00} & \chi_{10} \\ t_1(0) & t_1(1) & \chi_{01} & \chi_{11} \end{bmatrix} \quad (4.2.17)$$

olarak yazılır.[4] Dolayısıyla bir bi-kübik yüzey yaması,

$$\begin{aligned}
r(u, v) = & \left[\varphi_0(v) \quad \varphi_1(v) \quad \varphi_2(v) \quad \varphi_3(v) \right] \left[b_0(u) \quad b_1(u) \quad t_0(u) \quad t_1(u) \right]^T \quad (4.2.18) \\
& + \left[a_0(v) \quad a_1(v) \quad s_0(v) \quad s_1(v) \right] \begin{bmatrix} \varphi_0(u) \\ \varphi_1(u) \\ \varphi_2(u) \\ \varphi_3(u) \end{bmatrix} \\
& - \left[\varphi_0(v) \quad \varphi_1(v) \quad \varphi_2(v) \quad \varphi_3(v) \right] \begin{bmatrix} P_{00} & P_{10} & s_0(0) & s_1(0) \\ P_{01} & P_{11} & s_0(1) & s_1(1) \\ t_0(0) & t_0(1) & \chi_{00} & \chi_{10} \\ t_1(0) & t_1(1) & \chi_{01} & \chi_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_0(u) \\ \varphi_1(u) \\ \varphi_2(u) \\ \varphi_3(u) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

dır.[4] Benzer ifadeleri diğer sınır şartları içinde yazılırsa,

$$\begin{aligned}
r(0, v) = & \left[\varphi_0(v) \quad \varphi_1(v) \quad \varphi_2(v) \quad \varphi_3(v) \right] \left[b_0(0) \quad b_1(0) \quad t_0(0) \quad t_1(0) \right]^T \\
& + a_0(v) - \left[\varphi_0(v) \quad \varphi_1(v) \quad \varphi_2(v) \quad \varphi_3(v) \right] \begin{bmatrix} P_{00} \\ P_{01} \\ t_0(0) \\ t_1(0) \end{bmatrix} \\
= & a_0(v)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
r(1, v) &= \begin{bmatrix} \varphi_0(v) & \varphi_1(v) & \varphi_2(v) & \varphi_3(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_0(1) & b_1(1) & t_0(1) & t_1(1) \end{bmatrix}^T \\
&+ a_1(v) - \begin{bmatrix} \varphi_0(v) & \varphi_1(v) & \varphi_2(v) & \varphi_3(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{10} \\ P_{11} \\ t_0(1) \\ t_1(1) \end{bmatrix} \\
&= a_1(v)
\end{aligned}$$

bulunur.[4] Ayrıca

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u} r(u, v) &= \begin{bmatrix} \varphi_0(v) & \varphi_1(v) & \varphi_2(v) & \varphi_3(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} b_0(u) & \frac{\partial}{\partial u} b_1(u) & \frac{\partial}{\partial u} t_0(u) & \frac{\partial}{\partial u} t_1(u) \end{bmatrix}^T \\
&+ \begin{bmatrix} a_0(v) & a_1(v) & s_0(v) & s_1(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \varphi_0(u) \\ \frac{\partial}{\partial u} \varphi_1(u) \\ \frac{\partial}{\partial u} \varphi_2(u) \\ \frac{\partial}{\partial u} \varphi_3(u) \end{bmatrix} \\
&- \begin{bmatrix} a_0(v) & a_1(v) & s_0(v) & s_1(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} P_{00} & P_{10} & s_0(0) & s_1(0) \\ P_{01} & P_{11} & s_0(1) & s_1(1) \\ t_0(0) & t_0(1) & \chi_{00} & \chi_{10} \\ t_1(0) & t_1(1) & \chi_{01} & \chi_{11} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial u} \varphi_0(u) \\ \frac{\partial}{\partial u} \varphi_1(u) \\ \frac{\partial}{\partial u} \varphi_2(u) \\ \frac{\partial}{\partial u} \varphi_3(u) \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

olur.[4] Burada

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}r(0, v) &= \begin{bmatrix} \varphi_0(v) & \varphi_1(v) & \varphi_2(v) & \varphi_3(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0(0) & s_0(1) & \chi_{00} & \chi_{01} \end{bmatrix}^T \\
&+ s_0(v) - \begin{bmatrix} \varphi_0(v) & \varphi_1(v) & \varphi_2(v) & \varphi_3(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_0(0) \\ s_0(1) \\ \chi_{00} \\ \chi_{01} \end{bmatrix} \\
&= s_0(v)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial u}r(1, v) &= \begin{bmatrix} \varphi_0(v) & \varphi_1(v) & \varphi_2(v) & \varphi_3(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(0) & s_1(1) & \chi_{10} & \chi_{11} \end{bmatrix}^T \\
&+ s_1(v) - \begin{bmatrix} \varphi_0(v) & \varphi_1(v) & \varphi_2(v) & \varphi_3(v) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} s_1(0) \\ s_1(1) \\ \chi_{10} \\ \chi_{11} \end{bmatrix} \\
&= s_1(v)
\end{aligned}$$

ile belirlidir.[4]

Örnek 4.2.1. *Aşağıdaki kontrol noktalarını kullanarak bir Coon's yüzey yaması oluşturalım.*

$$\begin{aligned}
a_0(v) \equiv r_{00} &= (0, 0, 0) & r_{01} &= \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\right) & r_{02} &= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\right) & r_{03} &= (\sqrt{2}, 0, 0) \\
b_1(u) \equiv r_{10} &= r_{03} & r_{11} &= r_{02} & r_{12} &= \left(\sqrt{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}, \sqrt{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\right) & r_{13} &= (\sqrt{2}, \sqrt{2}, 0) \\
a_1(v) \equiv r_{20} &= r_{13} & r_{21} &= r_{12} & r_{22} &= \left(\frac{1}{3\sqrt{2}}, \sqrt{2} - \frac{1}{3\sqrt{2}}, \frac{1}{3}\right) & r_{23} &= (0, \sqrt{2}, 0) \\
b_0(u) \equiv r_{30} &= r_{23} & r_{31} &= r_{22} & r_{32} &= r_{01} & r_{33} &= r_{00}
\end{aligned}$$

Bir iki-lineer Coon's yüzey yaması elde etmek için dört sınır eğrisi,

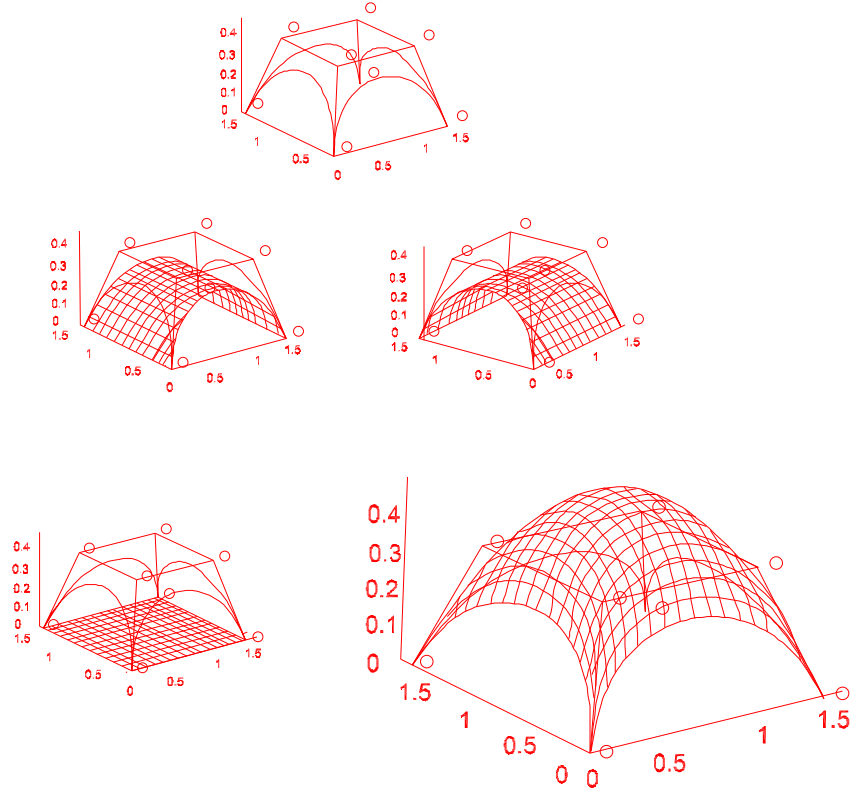
$$a_0(v) = \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{00} \\ r_{01} \\ r_{02} \\ r_{03} \end{bmatrix}$$

$$a_1(v) = \begin{bmatrix} v^3 & v^2 & v & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{20} \\ r_{21} \\ r_{22} \\ r_{23} \end{bmatrix}$$

$$b_0(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{30} \\ r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{bmatrix}$$

$$b_1(u) = \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} r_{10} \\ r_{11} \\ r_{12} \\ r_{13} \end{bmatrix}$$

dır. Bu eşitlikler yardımıyla bir bi-lineer Coon's yüzey yamasının sınır eğrisi, $r_1(u, v)$ yüzeyi, $r_2(u, v)$ yüzeyi, $r_3(u, v)$ yüzeyi ve bunların birleştirilmesi ile oluşan yüzey (Şekil-4.4) daki gibidir.[4]



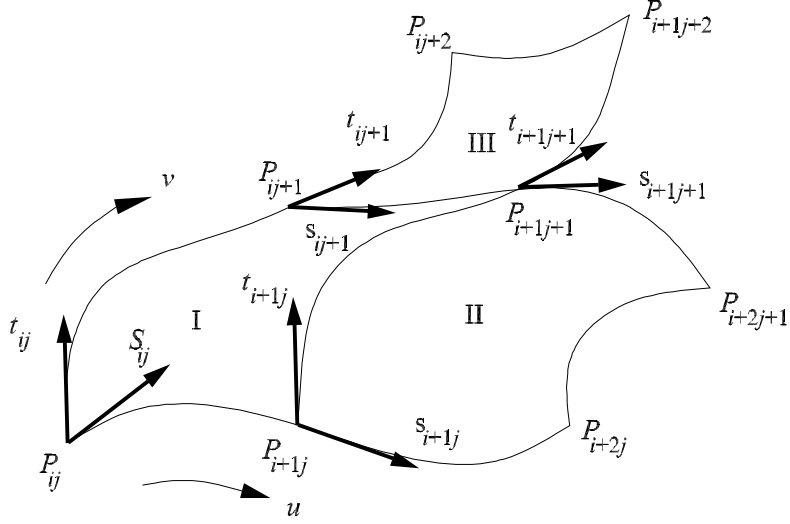
Şekil 4.4. Bi-lineer Coon's yüzey yamasının oluşumu

4.3 Ferguson Yüzeylerinin Birleştirilmesi

Bu alt bölümde iki yüzey yaması verildiğinde bunların oluşturduğu yeni yüzey yaması inşa edilecektir.

Ferguson bi-kübik yüzey yamalarında, iki bitişik yüzey yamasının köşe noktaları ve eğimleri aynı olduğundan bu karşılıklı yüzey yamaları C_0 sürekliliği sağlamaktadır.

(Şekil-4.5) gözönüne alınırsa I ve II numaralı ortak sınırlı yüzey yamaları için v parametresine bağlı kübik bir eğridir ($u = 1$ için I , $u = 0$ için II dir). Bu ise



Şekil 4.5. Ferguson yüzey yamasının sınırları

r_v eğiminin bu sınır eğrisi boyunca sürekli olduğunu gösterir. Benzer olarak I ve III içinde r_u eğimi bu sınır eğrisi boyunca süreklidir. (3.2.4) eşitliğinde fazla sayıda teğet ve twist vektörü gerektirdiğinden bundan sakınmak için bir yol olarak verilen P_{ij} $i = 0, 1, \dots, m$ ve $j = 0, 1, \dots, n$ veri noktalarının kümesi için bir Ferguson yüzey yaması uydurmak gerekir. u parametresi boyunca s_{ij} ve v parametresi boyunca t_{ij} ler aşağıdaki şekilde hesaplanır;

$$s_{ij} = C_i \frac{P_{i+1j} - P_{i-1j}}{|P_{i+1j} - P_{i-1j}|}, \quad C_i = \min(|P_{ij} - P_{i-1j}|, |P_{i+1j} - P_{ij}|) \quad (4.3.1)$$

$$t_{ij} = D_i \frac{P_{ij+1} - P_{ij-1}}{|P_{ij+1} - P_{ij-1}|}, \quad D_i = \min(|P_{ij} - P_{ij-1}|, |P_{ij+1} - P_{ij}|)$$

dır. Twist vektörler sıfır olarak kabul edildiğinde bir Ferguson yüzey yamasının geometrik matrisi,

$$G = \begin{bmatrix} P_{ij} & P_{ij+1} & t_{ij} & t_{ij+1} \\ P_{i+1j} & P_{i+1j+1} & t_{i+1j} & t_{i+1j+1} \\ s_{ij} & s_{ij+1} & 0 & 0 \\ s_{i+1j} & s_{i+1j+1} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.3.2)$$

elde edilir. Burada dikkat etmemiz gereken bir nokta, $i = 0$ veya $i = m$ için P_{-1j} ve P_{m+1j} bilinmeyenler olduklarından tüm $j = 0, 1, \dots, n$ için s_{0j} ve s_{mj} ler keyfi olarak seçilebilir. Benzer şekilde t_{i0} ve t_{in} de tüm $i = 0, 1, \dots, m$ ler için keyfi olarak seçilebilir.[4]

Örnek 4.3.1. *Kontrol noktaları,*

$$\begin{aligned} P_{00} &= (0, 0, 0) & P_{10} &= (1, 0, 0) & P_{20} &= (2, 0, 0) \\ P_{01} &= (0, 1, 0) & P_{11} &= (1, 1, 0) & P_{21} &= (2, 1, 0) \\ P_{02} &= (0, 1, 2) & P_{12} &= (1, 1, 2) & P_{22} &= (2, 1, 4) \end{aligned}$$

olarak verilsin. Bu noktaları kullanarak bir Ferguson yüzey yaması elde edelim. Burada $i = 0, 1, 2$ ve $j = 0, 1, 2$ için keyfi olarak $s_{0j} = s_{mj} = t_{i0} = t_{in} = (0, 0, 0)$ şeklinde seçebiliriz. Arada kalan s_{ij} eğimlerini (4.3.1) eşitliklerini kullanarak,

$$\begin{aligned} s_{10} &= [\min(|P_{10} - P_{00}|, |P_{20} - P_{10}|)] \frac{P_{20} - P_{00}}{|P_{20} - P_{00}|} \\ &= [\min(|(1, 0, 0) - (0, 0, 0)|, |(2, 0, 0) - (1, 0, 0)|)] \frac{(2, 0, 0) - (0, 0, 0)}{|(2, 0, 0) - (0, 0, 0)|} = (1, 0, 0) \\ s_{11} &= [\min(|P_{11} - P_{01}|, |P_{21} - P_{11}|)] \frac{P_{21} - P_{01}}{|P_{21} - P_{01}|} \\ &= [\min(|(1, 1, 0) - (0, 1, 0)|, |(2, 1, 0) - (1, 1, 0)|)] \frac{(2, 1, 0) - (0, 1, 0)}{|(2, 1, 0) - (0, 1, 0)|} = (1, 0, 0) \\ s_{12} &= [\min(|P_{12} - P_{02}|, |P_{22} - P_{12}|)] \frac{P_{22} - P_{02}}{|P_{22} - P_{02}|} \\ &= [\min(|(1, 1, 2) - (0, 1, 2)|, |(2, 1, 4) - (1, 1, 2)|)] \frac{(2, 1, 4) - (0, 1, 2)}{|(2, 1, 4) - (0, 1, 2)|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \end{aligned}$$

ve t_{ij} eğimleri

$$\begin{aligned}
t_{01} &= [\min(|P_{01} - P_{00}|, |P_{02} - P_{01}|)] \frac{P_{02} - P_{00}}{|P_{02} - P_{00}|} \\
&= [\min(|(0, 1, 0) - (0, 0, 0)|, |(0, 1, 2) - (0, 1, 0)|)] \frac{(0, 1, 2) - (0, 0, 0)}{|(0, 1, 2) - (0, 0, 0)|} = (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) \\
t_{11} &= [\min(|P_{11} - P_{10}|, |P_{12} - P_{11}|)] \frac{P_{12} - P_{10}}{|P_{12} - P_{10}|} \\
&= [\min(|(1, 1, 0) - (1, 0, 0)|, |(1, 1, 2) - (1, 1, 0)|)] \frac{(1, 1, 2) - (1, 0, 0)}{|(1, 1, 2) - (1, 0, 0)|} = (0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}) \\
t_{21} &= [\min(|P_{21} - P_{20}|, |P_{22} - P_{21}|)] \frac{P_{22} - P_{20}}{|P_{22} - P_{20}|} \\
&= [\min(|(2, 1, 0) - (2, 0, 0)|, |(2, 1, 4) - (2, 1, 0)|)] \frac{(2, 1, 4) - (2, 0, 0)}{|(2, 1, 4) - (2, 0, 0)|} = (0, \frac{1}{\sqrt{17}}, \frac{4}{\sqrt{17}})
\end{aligned}$$

bulunur.[4]

(4.3.2) de twist vektörleri sıfır kabul edildi. Ancak bu yüzey için güçlü bir sınırlamadır. Bu durum düzlem durumunun ortaya çıkmasına neden olur. Bundan sakınmak için twist vektörlerini sıfırdan farklı olarak seçmek gerekir. Dolayısıyla yüzey yamasının sınırında C^2 süreklilik şartını incelememiz gerekir. (3.2.4) eşitliğinden (Şekil-4.5) deki I yüzey yaması için,

$$r^I(u, v) = UMG^I M^T V^T \quad (4.3.3)$$

ifadesine sahibiz. Burada

$$G = \begin{bmatrix} P_{ij} & P_{ij+1} & t_{ij} & t_{ij+1} \\ P_{i+1j} & P_{i+1j+1} & t_{i+1j} & t_{i+1j+1} \\ s_{ij} & s_{ij+1} & \chi_{ij} & \chi_{ij+1} \\ s_{i+1j} & s_{i+1j+1} & \chi_{i+1j} & \chi_{i+1j+1} \end{bmatrix} \quad (4.3.4)$$

şeklinde tanımlıdır. I ve II numaralı yüzey yamalarının ortak sınırı boyunca C^2 sürekliliği için,

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} r^I(1, v) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} r^{II}(0, v)$$

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} M G^I M^T V^T = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} M G^{II} M^T V^T$$

$$\begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} G^I M^T V^T = \begin{bmatrix} -6 & 6 & -4 & -2 \end{bmatrix} G^{II} M^T V^T$$

veya

$$\begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix} G^I = \begin{bmatrix} -6 & 6 & -4 & -2 \end{bmatrix} G^{II}$$

eşitliği yazılır.[4] Bu durumda,

$$A) \quad s_{ij} + 4s_{i+1j} + s_{i+2j} = 3(P_{i+2j} - P_{ij}) \quad (4.3.5)$$

$$B) \quad \chi_{ij} + 4\chi_{i+1j} + \chi_{i+2j} = 3(t_{i+2j} - t_{ij}) \quad j \text{ sabiti için } i = 0, \dots, m - 2$$

denklemleri elde edilir.

Benzer şekilde *I* ve *III* yüzey yamaları arasında,

$$\frac{\partial^2}{\partial u^2} r^I(1, v) = \frac{\partial^2}{\partial u^2} r^{III}(0, v)$$

$$UMG^I M^T \begin{bmatrix} 6 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T = UMG^{III} M^T \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

$$UMG^I \begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T = UMG^{III} \begin{bmatrix} -6 & 6 & -4 & -2 \end{bmatrix}^T$$

veya

$$G^I \begin{bmatrix} 6 & -6 & 2 & 4 \end{bmatrix}^T = G^{III} \begin{bmatrix} -6 & 6 & -4 & -2 \end{bmatrix}^T$$

yazılır. Böylece,

$$C) \quad t_{ij} + 4t_{ij+1} + t_{ij+2} = 3(P_{ij+2} - P_{ij}) \quad (4.3.6)$$

$$D) \quad \chi_{ij} + 4\chi_{i+1j} + \chi_{i+2j} = 3(s_{ij+2} - s_{ij}) \quad i \text{ sabiti için } j = 0, \dots, n-2$$

elde edilir. Bu bilgiler yardımıyla, veri noktaları $i = 0, \dots, m$ ve $j = 0, \dots, n$ P_{ij} ler olmak üzere s_{ij} ler (A) ile, t_{ij} ler (C) ile, χ_{ij} ler (B) ve (D) ile hesaplanabilir.[4]

4.4 Bézier Yüzeylerinin Birleştirilmesi

(Şekil-4.6) da iki bitişik bi-kübik Bézier yüzey yamasını gözönüne alalım. (3.5.2) eşitliğini kullanarak,

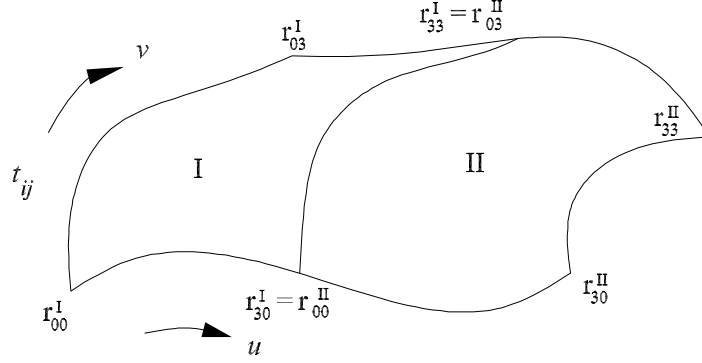
$$r^I(u, v) = UM_B G_B^I M_B^T V^T \quad (4.4.1)$$

$$r^{II}(u, v) = UM_B G_B^{II} M_B^T V^T$$

eşitlikleri elde edilir. Bu sınır eğrisi boyunca her v değeri için $r^I(1, v) = r^{II}(0, v)$ dir.[4]

$$\text{Yani } \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} M_B G_B^I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} M_B G_B^{II} \text{ veya } [R] = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & r_{03} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{30} & r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,



Şekil 4.6. Bitişik Bézier yüzey yamasının sınırları

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} [R]^I = \begin{bmatrix} r_{30} \\ r_{31} \\ r_{32} \\ r_{33} \end{bmatrix}^I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} [R]^{II} = \begin{bmatrix} r_{00} \\ r_{01} \\ r_{02} \\ r_{03} \end{bmatrix}^{II}$$

olup $j = 0, \dots, 3$ için $r_{3j}^I = r_{0j}^{II}$ elde edilir.[4]

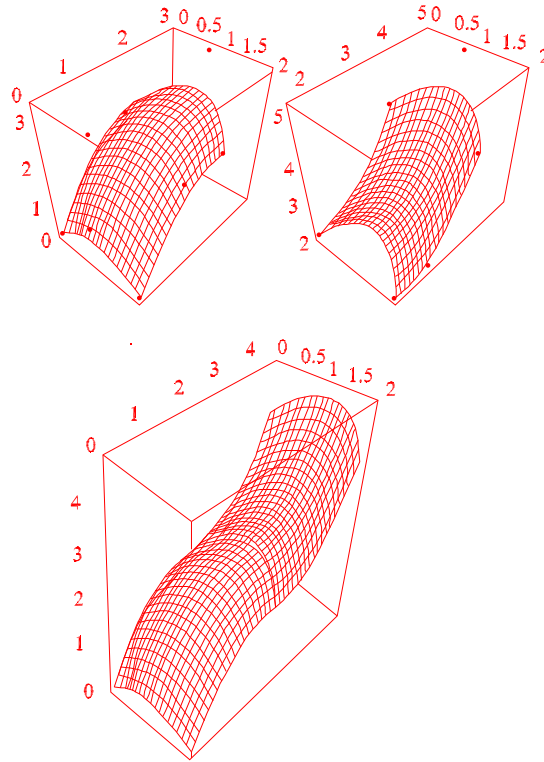
Örnek 4.4.1. S_p ve S_q iki quadratik Bézier yüzey yaması olsun. S_p nin kontrol noktaları

$$\begin{bmatrix} p_{00} = \{0, 0, 0\} & p_{01} = \{0, 1, 2\} & p_{02} = \{0, 2, 2\} \\ p_{10} = \{1, 0, 1\} & p_{11} = \{1, 1, 3\} & p_{12} = \{1, 3, 3\} \\ p_{20} = \{2, 0, 0\} & p_{21} = \{2, 1, 2\} & p_{22} = \{2, 2, 2\} \end{bmatrix}$$

ve S_q nin kontrol noktaları

$$\begin{bmatrix} q_{00} = \{0, 2, 2\} & q_{01} = \{0, 3, 2\} & q_{02} = \{0, 4, 4\} \\ q_{10} = \{1, 3, 3\} & q_{11} = \{1, 4, 3\} & q_{12} = \{1, 5, 5\} \\ q_{20} = \{2, 2, 2\} & q_{21} = \{2, 3, 2\} & q_{22} = \{2, 4, 4\} \end{bmatrix}$$

olsun. (Şekil-4.7) sırasıyla bu yüzeyleri ve bu yüzeylerin birleştirilmesi ile oluşan birleştirilmiş yüzeyi göstermektedir.[4] Eğer S_p nin kontrol noktalarını değiştirmeden

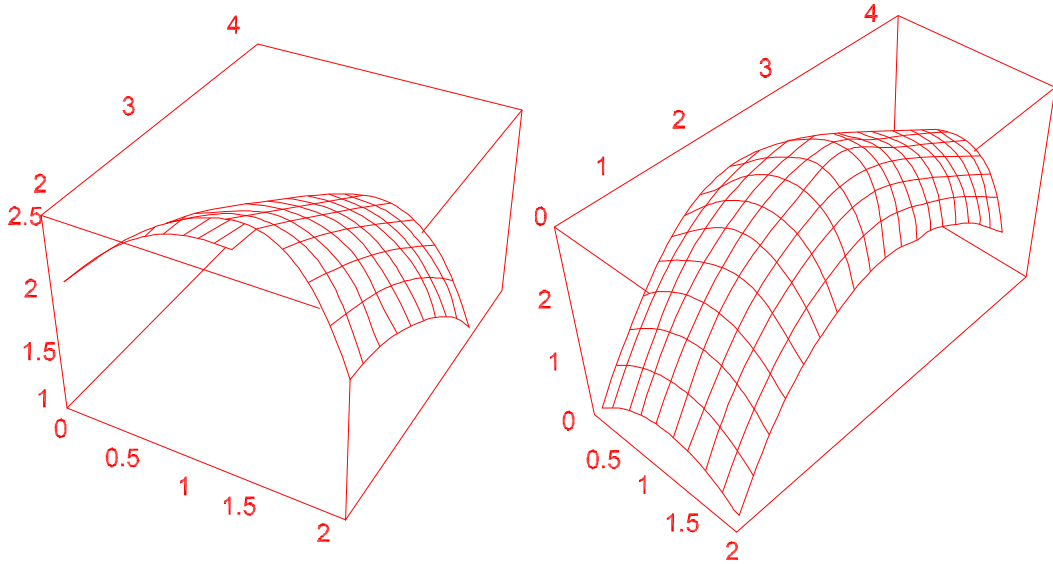


Şekil 4.7: İki bi-kuadratik yüzey yaması ve bunların birleştirilmesi ile oluşan bi-kuadratik Bezier yüzey yaması

S_q nin kontrol noktalarını

$$\begin{bmatrix} q_{00} = \{0, 2, 2\} & q_{01} = \{0, 3, 2\} & q_{02} = \{0, 4, 1\} \\ q_{10} = \{1, 3, 3\} & q_{11} = \{1, 4, 2\} & q_{12} = \{1, 5, 2\} \\ q_{20} = \{2, 2, 2\} & q_{21} = \{2, 3, 2\} & q_{22} = \{2, 4, 1\} \end{bmatrix}$$

olarak değiştirip bu yeni yüzeye S_{q_1} dersek bu iki yüzeyin birleştirilmesi ile oluşturulan yüzey (Şekil-4.8) deki gibidir.[4]



Şekil 4.8. S_{q_1} yüzeyi ve S_p ve S_{q_1} yüzeyleri ile birleştirilmiş yüzey yamaları

C^1 sürekliliği için $v \in [0, 1]$ aralığında $u = 0$ da II yüzey yaması ile $u = 1$ de I yüzey yamasının tanjant düzlemleri aynı olmalıdır bir başka ifade ile sınırdaki yüzeyin normal doğrultusu ortak olmalıdır. Yani

$$\frac{\partial}{\partial u} r^{II}(0, v) \times \frac{\partial}{\partial v} r^{II}(0, v) = \lambda(v) \frac{\partial}{\partial u} r^I(1, v) \times \frac{\partial}{\partial v} r^I(1, v) \quad (4.4.2)$$

yazılabilir.[4] $\frac{\partial}{\partial v}r^{II}(0, v) = \frac{\partial}{\partial v}r^I(1, v)$ eşitliği süreklilik sağlandığından (4.4.2) eşitliği için iki durum söz konusudur;

1. Durum

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial u}r^{II}(0, v) &= \lambda(v)\frac{\partial}{\partial u}r^I(1, v) \\ \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] M_B G_B^{II} M_B^T V^T &= \lambda(v) \left[\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] M_B G_B^I M_B^T V^T \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

dir. Gerekli düzenlemeyi yaptığımızda,

$$r_{1i}^{II} - r_{0i}^{II} = \lambda(r_{3i}^I - r_{2i}^I), \quad i = 0, 1, 2, 3 \quad (4.4.4)$$

elde edilir.[4]

2. Durum

$$\frac{\partial}{\partial u}r^{II}(0, v) = \lambda(v)\frac{\partial}{\partial u}r^I(1, v) + \mu(v)\frac{\partial}{\partial u}r^I(1, v) \quad (4.4.5)$$

ki burada $\lambda(v)$ ve $\mu(v)$ v ye bağlı skalar fonksiyonlardır. Bu ifade matris formunda,

$$\begin{aligned} \left[\begin{array}{cccc} 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right] M_B G_B^{II} M_B^T V^T &= \lambda(v) \left[\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & 0 \end{array} \right] M_B G_B^I M_B^T V^T \\ &+ \mu(v) \left[\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \end{array} \right] M_B G_B^I M_B^T \begin{bmatrix} 3v^2 \\ 2v \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (4.4.6)$$

şeklinde yazılır.[4]

Örnek 4.4.2. İki bi-kübik Bézier yüzey yaması $r^I(u, v)$ ve $r^{II}(u, v)$ olsun. $r^I(u, v)$ yüzey yamasının kontrol noktaları

$$\begin{bmatrix} (0, 0, 0) & (1, 0, 0) & (2, 0, 0) & (3, 0, 0) \\ (0, 1, 0) & (1, 1, 1) & (2, 1, 1) & (3, 1, 0) \\ (0, 2, 0) & (1, 2, 2) & (2, 2, 2) & (3, 2, 0) \\ (0, 3, 0) & (1, 3, 3) & (2, 3, 3) & (3, 3, 0) \end{bmatrix}$$

ve $r^I(u, v)$ ye bitişik $r^{II}(u, v)$ yüzey yamasının kontrol noktaları ise,

$$\begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & r_{03} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ (0, 6, 0) & (1, 6, 5) & (2, 6, 5) & (3, 6, 0) \\ (0, 7, 0) & (1, 8, 0) & (2, 8, 0) & (3, 7, 0) \end{bmatrix}^{II}$$

olsun. Şimdi $\begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & r_{03} & r_{10} & r_{11} & r_{12} & r_{13} \end{bmatrix}^{II}$ bilinmeyen kontrol noktalarını belirleyip birleştirilmiş yüzeyi elde edelim. Yüzey yamalarının C^0 sürekliliğinden

$$\begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & r_{03} \end{bmatrix}^{II} = \begin{bmatrix} (0, 3, 0) & (1, 3, 3) & (2, 3, 3) & (3, 3, 0) \end{bmatrix}$$

dır. C^1 sürekliliği için yukarıda tanımladığımız iki durumu göz önüne alalım. İlk durum için,

$$r_{1i}^{II} - r_{0i}^{II} = \lambda(r_{3i}^I - r_{2i}^I), \quad i = 0, 1, 2, 3$$

olup $\lambda = 2$ seçilirse

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} r_{10} & r_{11} & r_{12} & r_{13} \end{bmatrix}^{II} &= \begin{bmatrix} (0, 3, 0) & (1, 3, 3) & (2, 3, 3) & (3, 3, 0) \end{bmatrix} \\ &+ 2 \begin{bmatrix} (0, 1, 0) & (0, 1, 1) & (0, 1, 1) & (0, 1, 0) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} (0, 5, 0) & (1, 5, 5) & (2, 5, 5) & (3, 5, 0) \end{bmatrix} \end{aligned}$$

elde edilir. İkinci durum için (4.4.6) eşitliğinden,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_B G_B^{II} M_B^T V^T &= \lambda \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_B G_B^I M_B^T V^T \\ &+ (\mu_0 + \mu_1(v)) \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} M_B G_B^I M_B^T \end{aligned} \begin{bmatrix} 3v^2 \\ 2v \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

yazılabilir. V nin katsayıları kıyaslandığında,

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} -3 & 3 & 0 & 0 \end{bmatrix} G_B^{II} &= \lambda \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} M_B G_B^I \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} M_B G_B^I M_B^T \end{aligned} \begin{bmatrix} 3\mu_1 & 3\mu_0 & 0 & 0 \\ 0 & 2\mu_1 & 2\mu_0 & 0 \\ 0 & 0 & \mu_1 & \mu_0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} M_B^{-T}$$

eşitliği bulunur. $\lambda = \mu_0 = \mu_1 = 1$ seçilirse,

$$3 \begin{bmatrix} (r_{10} - r_{00}) & (r_{11} - r_{01}) & (r_{12} - r_{02}) & (r_{13} - r_{03}) \end{bmatrix}^{II} = \begin{bmatrix} (3, 3, 9) & (4, 3, 9) & (5, 3, 0) & (6, 3, -18) \end{bmatrix}$$

veya

$$\begin{aligned} r_{10}^{II} &= (0, 3, 0) + \frac{1}{3}(3, 3, 9) = (1, 4, 3) \\ r_{11}^{II} &= (1, 3, 3) + \frac{1}{3}(4, 3, 9) = \left(\frac{7}{3}, 4, 6\right) \\ r_{12}^{II} &= (2, 3, 3) + \frac{1}{3}(5, 3, 0) = \left(\frac{11}{3}, 4, 3\right) \\ r_{13}^{II} &= (3, 3, 0) + \frac{1}{3}(6, 3, -18) = (5, 4, -6) \end{aligned}$$

olur.[4]

4.5 B-Spline Yüzey Yamaları

Bir B-spline yüzey yamasını oluşturmak için B-spline eğrileri ve tensör çarpımını kullanacağız. Eğer knot vektörleri düzgün ise bu durumda bir düzgün kuadratik B-spline yüzeyi,

$$[X] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ve

$$[R_1] = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$r(u, v) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 \begin{bmatrix} u^2 & u & 1 \end{bmatrix} [X] [R_1] [X]^T \begin{bmatrix} v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.5.1)$$

ve bir düzgün kübik B-spline yüzeyi

$$[R] = \begin{bmatrix} r_{00} & r_{01} & r_{02} & r_{03} \\ r_{10} & r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{20} & r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{30} & r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix}$$

ve

$$[Y] = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

olmak üzere,

$$r(u, v) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 \begin{bmatrix} u^3 & u^2 & u & 1 \end{bmatrix} [Y] [R] [Y]^T \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad (4.5.2)$$

eşitlikleri ile yazılabilir.[4]

Eğer B-spline yüzey kapalı olarak oluşturulacaksa aşağıdaki adımlar gözönüne alınır.

Kontrol noktaları r_{ij} ($i = 0, \dots, n$) ve ($j = 0, \dots, m$) olmak üzere bir kapalı düzgün kübik B- spline yüzey oluşturmak için; $r_{00}, r_{01}, r_{02}, r_{03}, r_{04}, r_{05}, r_{06}, r_{07}, r_{00}; r_{10}, r_{11}, r_{12}, r_{13}, r_{14}, r_{15}, r_{16}, r_{17}, r_{10}; r_{20}, r_{21}, r_{22}, r_{23}, r_{24}, r_{25}, r_{26}, r_{27}, r_{20}; r_{30}, r_{31}, r_{32}, r_{33}, r_{34}, r_{35}, r_{36}, r_{37}, r_{30}; r_{40}, r_{41}, r_{42}, r_{43}, r_{44}, r_{45}, r_{46}, r_{47}, r_{40}$ şeklinde 45 tane kontrol noktasına ihtiyaç vardır. Dikkat edecek olursak her parçanın son kontrol noktası ile ilk kontrol noktası aynıdır. Burada knot dizisini $\left[0 \ 1 \ 2 \ 3 \ 4 \ 5 \ 6 \ 7 \ 8 \ 9 \ 10 \ 11 \ 12 \ 13 \ 14 \right]$ olarak alacağız. Dolayısıyla bir kübik B- spline yüzey için, yüzey yamalarının eşitliği,

$$r_{1,j+1}(u, v) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 UM \begin{bmatrix} r_{0,(j \bmod 8)+1} & r_{0,((j+1) \bmod 8)+1} & r_{0,((j+2) \bmod 8)+1} & r_{0,((j+3) \bmod 8)+1} \\ r_{1,(j \bmod 8)+1} & r_{1,((j+1) \bmod 8)+1} & r_{1,((j+2) \bmod 8)+1} & r_{1,((j+3) \bmod 8)+1} \\ r_{2,(j \bmod 8)+1} & r_{2,((j+1) \bmod 8)+1} & r_{2,((j+2) \bmod 8)+1} & r_{2,((j+3) \bmod 8)+1} \\ r_{3,(j \bmod 8)+1} & r_{3,((j+1) \bmod 8)+1} & r_{3,((j+2) \bmod 8)+1} & r_{3,((j+3) \bmod 8)+1} \end{bmatrix} M^T V$$

$$r_{2,j+1}(u, v) = \left(\frac{1}{6}\right)^2 UM \begin{bmatrix} r_{1,(j \bmod 8)+1} & r_{1,((j+1) \bmod 8)+1} & r_{1,((j+2) \bmod 8)+1} & r_{1,((j+3) \bmod 8)+1} \\ r_{2,(j \bmod 8)+1} & r_{2,((j+1) \bmod 8)+1} & r_{2,((j+2) \bmod 8)+1} & r_{2,((j+3) \bmod 8)+1} \\ r_{3,(j \bmod 8)+1} & r_{3,((j+1) \bmod 8)+1} & r_{3,((j+2) \bmod 8)+1} & r_{3,((j+3) \bmod 8)+1} \\ r_{4,(j \bmod 8)+1} & r_{4,((j+1) \bmod 8)+1} & r_{4,((j+2) \bmod 8)+1} & r_{4,((j+3) \bmod 8)+1} \end{bmatrix} M^T V$$

olur. Burada

$$U = \begin{bmatrix} u^3 \\ u^2 \\ u \\ 1 \end{bmatrix}, \quad M = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -3 & 1 \\ 3 & -6 & 3 & 0 \\ -3 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 4 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad V = \begin{bmatrix} v^3 \\ v^2 \\ v \\ 1 \end{bmatrix}$$

dir.[4]

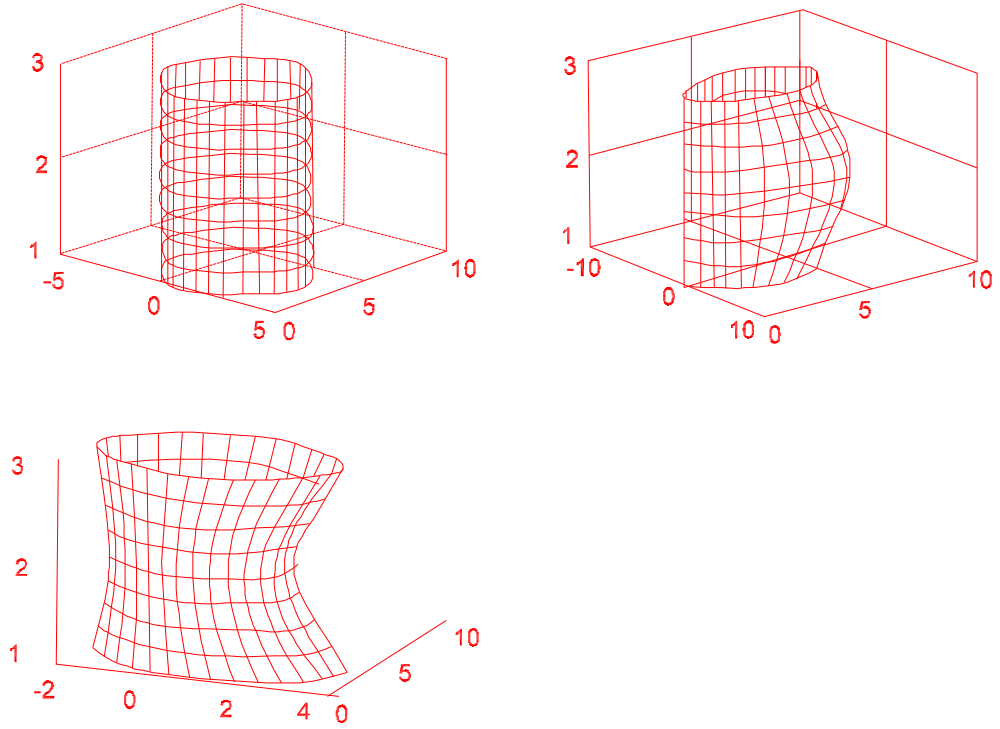
Örnek 4.5.1. *Aşağıda verilen kontrol noktalarını kullanarak bir kapalı B-spline yüzey yaması oluşturalım.*

i	r_{i0}	r_{i1}	r_{i2}	r_{i3}	r_{i4}	r_{i5}	r_{i6}	r_{i7}
0	(0,0,0)	(-2,2,0)	(-2,4,0)	(0,6,0)	(2,6,0)	(4,4,0)	(4,2,0)	(2,0,0)
1	(0,0,1)	(-2,2,1)	(-2,4,1)	(0,6,1)	(2,6,1)	(4,4,1)	(4,2,1)	(2,0,1)
2	(0,0,2)	(-2,2,2)	(-2,4,2)	(0,6,2)	(2,6,2)	(4,4,2)	(4,2,2)	(2,0,2)
3	(0,0,3)	(-2,2,3)	(-2,4,3)	(0,6,3)	(2,6,3)	(4,4,3)	(4,2,3)	(2,0,3)
4	(0,0,4)	(-2,2,4)	(-2,4,4)	(0,6,4)	(2,6,4)	(4,4,4)	(4,2,4)	(2,0,4)

i	r_{i0}	r_{i1}	r_{i2}	r_{i3}	r_{i4}	r_{i5}	r_{i6}	r_{i7}
0	(0,0,0)	(-2,2,0)	(-2,4,0)	(0,6,0)	(2,6,0)	(4,4,0)	(4,2,0)	(2,0,0)
1	(0,0,1)	(-2,2,1)	(-2,4,1)	(0,6,1)	(2,6,1)	(4,4,1)	(4,2,1)	(2,0,1)
2	(0,0,2)	(-1,1,2)	(-1,2,2)	(0,3,2)	(2,3,2)	(2,2,2)	(2,1,2)	(1,0,2)
3	(0,0,3)	(-2,2,3)	(-2,4,3)	(0,6,3)	(2,6,3)	(4,4,3)	(4,2,3)	(2,0,3)
4	(0,0,4)	(-2,2,4)	(-2,4,4)	(0,6,4)	(2,6,4)	(4,4,4)	(4,2,4)	(2,0,4)

i	r_{i0}	r_{i1}	r_{i2}	r_{i3}	r_{i4}	r_{i5}	r_{i6}	r_{i7}
0	(0,0,0)	(-2,2,0)	(-2,4,0)	(0,6,0)	(2,6,0)	(4,4,0)	(4,2,0)	(2,0,0)
1	(0,0,1)	(-2,2,1)	(-2,4,1)	(0,6,1)	(2,6,1)	(4,4,1)	(4,2,1)	(2,0,1)
2	(0,0,2)	(-2,2,2)	(-2,4,2)	(0,6,2)	(2,6,2)	(8,8,2)	(4,2,2)	(2,0,2)
3	(0,0,3)	(-2,2,3)	(-2,4,3)	(0,6,3)	(2,6,3)	(4,4,3)	(4,2,3)	(2,0,3)
4	(0,0,4)	(-2,2,4)	(-2,4,4)	(0,6,4)	(2,6,4)	(4,4,4)	(4,2,4)	(2,0,4)

Tablolarda verilen kontrol noktalarında ve bazı nokta değışimleri ile yüzey değışiklikleri şekilde gibidir.[4]



Şekil 4.9. Kapalı B-spline yüzey yamaları

Son olarak eğer seçilen eğriler rasyonel B- spline ise oluşturulacak yüzey rasyonel B-spline yüzey olur. Böylece bir B-spline yüzey yaması,

$$r(u, v) = \sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n N_{p,p+i}(u) N_{q,q+j}(v) P_{ij}$$

eşitliği ile hesaplanır ve burada P_{ij} ler ($i = 0, \dots, m$ ve $j = 0, \dots, n$) için kontrol noktaları, p ve q ise B-spline eğrilerin sırasıyla u ve v ye göre mertebelerdir. Burada knot vektörlerinin sayısı u parametresine göre $m+p+1$ ve v parametresine göre $n+q+1$ dir. Rasyonel B-spline yüzey yaması,

$$r(u, v) = \frac{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} N_{p,p+i}(u) N_{q,q+j}(v) P_{ij}}{\sum_{i=0}^m \sum_{j=0}^n w_{ij} N_{p,p+i}(u) N_{q,q+j}(v)}$$

olup burada w_{ij} ler kullanıcı tarafından seçilen ağırlık fonksiyonlarıdır.[4]

5. KAYNAKLAR

- [1] Hacısalihođlu H.H., Diferensiyel Geometri, Ankara Üniversitesi Yayinevi, (1993)
- [2] Sabuncuođlu A., Diferensiyel Geometri,Nobel Yayınları, (2005)
- [3] Kaya R., Analitik Geometri, Bilim Teknik Yayinevi, (2009)
- [4] Saxena A., Sahay B, Computer Aided Engineering Design, Springer, (2005)
- [5] Farin G., Curves and Surfaces for Computer Aided Geometric Design, Academic press, San Diego, (1990)

ÖZGEÇMİŞ

Akın LEVENT, 13/08/1984 tarihinde Malatya' da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Malatya 'da tamamladı. 2008 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' ne girdi. 2011 yılında mezun olduktan sonra İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Geometri Anabilim Dalı' nda yüksek lisans öğrenimine başladı.