T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

HALF-LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR

Burçin DOĞAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
AĞUSTOS 2013

Tezin Başlığı : HALF-LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR

Tezi Hazırlayan : Burçin DOĞAN

Sınav tarihi : 06.08.2013

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi üyeleri (İlk isim jüri başkanı, ikinci isim tez danışmanı)

Prof. Dr. Bayram ŞAHİN (İnönü Üniv.) ………………………………….

Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ (İnönü Üniv.) ………………………………….

Prof. Dr. H. Bayram KARADAĞ (İnönü Üniv.) ………………………………….

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

………………….

Prof. Dr. Mehmet ALPASLAN

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Half-Lightlike Altmanifoldlar” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

İÇİNDEKİLER

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

HALF-LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR

Burçin DOĞAN

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

64 + v sayfa

2013

Danışman: Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ

Üç bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümün de, çalışmanın amacı ve literatürdeki yeri açıklandı.

İkinci bölümde, Semi-Riemann manifoldun Lightlike Altmanifoldları ve Lightlike Hiperyüzeyleri tanımlandı ve çalışmamız için gerekli olan temel tanım ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, Half-Lightlike Altmanifold tanımı verildi. Half-lightlike Altmanifoldun Gauss-Weingarten denklemleri ve Riemann eğrilik tensörleri hesaplandı. Total umbilik, screen konformal ve irrotasyonel screen homotetik half-lightlike altmanifoldlara ait temel tanım ve teoremler verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Half-Lightlike altmanifold, Lightlike manifold, Semi-Riemann manifold, screen konformal, total umbilik, total geodezik, irrotasyonel screen homotetik altmanifold.

ABSTRACT

M. Sc. Thesis
HALF-LIGHTLIKE SUBMANIFOLDS

Burçin DOĞAN

İnönü University
Graduate School Of Natural And Applied Sciences
Departman Of Mathematics
64 + v pages
2013
Supervisor: Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ

In the first chapter of this thesis that consists of three chapters, the goal of the work and its importance in the literature are emphasized.

In the second chapter, the lightlike submanifolds and lightlike hypersurfaces of a Semi-Riemann manifolds are defined and the main definitions and theorems which are necessary for our study are given.

In the third chapter, the definition of half-lightlike submanifolds is given. The Gauss-Weingarten equations and Riemann curvature tensors of a half-lightlike submanifold are calculated. Basic definitions and theorems for total umbilical, screen conformal and irrotational screen homothetic half-lightlike submanifolds are given.

KEY WORDS: Half-Lightlike submanifold, Lightlike manifold, Semi-Riemann manifold, screen conformal, total umbilik, total geodesic, irrotational screen homothetic submanifold.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenen ve tezin hazırlanması sürecinde yardımlarını ve desteğini esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ'e, başta Matematik Anabilim Dalı Başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ olmak üzere tüm İnönü Üniversitesi öğretim üyelerine, tezin yazım sürecinde yardımlarını esirgemeyen Mersin Üniversitesi öğretim üyelerinden Sayın Doç. Dr. Erol YAŞAR'a, karşılaştığım sorunlarda değerli bilgilerini esirgemeyen Adıyaman Üniversitesi öğretim üyelerinden Sayın Yrd. Doç. Dr. Feyza Esra ERDOĞAN'a, eğitim hayatım boyunca büyük fedâkarlıklar yapan, maddi ve manevi desteğini esirgemeyen annem Hatice DOĞAN'a ve her daim yanımda olan nişanlım Makina Müh. Mehmet ŞİMŞEK'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

SİMGELER

M	:	Manifold,
TM	:	Tanjant demet,
$T_x M$	:	x noktasının tanjant uzayı,
R	:	Riemann eğrilik tensörü,
Ric	:	Ricci tensör,
D	:	Distribüsyon,
$RadTM$	:	Radikal distribüsyon,
$S(TM)$	:	Screen distribüsyon,
$ltr(TM)$	:	M' nin lightlike transversal demeti,
B	:	Hiperyüzeyin ikinci temel formu,
$C(X,PY)$	:	Screen temel form,
h^l	:	Lightlike altmanifoldun lightlike ikinci temel formu,
h^S	:	Lightlike altmanifoldun screen transversal ikinci temel formu,
A_N	:	M' nin şekil operatörü,
h^*	:	Screen ikinci temel form,
A^*	:	$S(TM)$' nin screen şekil operatörü,
$\tilde{M}$	:	Semi – Riemann manifold,
$\tilde{\nabla}$	:	$\tilde{M}$ ' nin Levi – Civita konneksiyonu

1. GİRİŞ

Günümüz diferensiyel geometrisinde manifoldlar ve onların altmanifoldları oldukça önemli bir alandır. Eğer manifold üzerinde pozitif tanımlı bilineer simetrik bir tensör alanı varsa, bu durumda manifolda Riemann manifoldu denir. Standart iç çarpım ile birlikte Öklidyen uzay bir Riemann manifoldudur. Ayrıca Riemann manifoldları üzerinde torsiyonsuz ve metrik bir konneksiyon vardır. Bir Riemann manifoldunun altmanifoldu göz önüne alındığında bu altmanifold üzerinde manifolddan indirgenen bir Riemann metriğe ve dolayısıyla torsiyonsuz ve metrik konneksiyona sahip olur. Bu şekildeki manifoldlara ait temel özellikler B.Y. Chen tarafından [1] de derlendi.

1970 li yıllarda manifold üzerindeki metrik tensör alanının negatif olma durumu göz önüne alındı ve Riemann manifoldlara ait özellikler bu manifoldlarda incelendi. Bu manifoldlar üzerinde de torsiyonsuz ve metrik konneksiyon vardır. Bu manifoldlara ait çalışmalar B.O'Neill tarafından [2] de derlendi. Bu şekildeki manifoldlara Semi-Riemann manifold denir. Eğer bir Semi-Riemann manifold üzerinden indirgenen metrik tensör alanı altmanifoldun tanjant demeti üzerinde pozitif ise buna spacelike altmanifold ve negatif olması durumunda ise timelike altmanifold denir. Timelike veya spacelike altmanifoldların her ikisine birden Semi-Riemann (veya non-dejenere) altmanifold adı verilir. Spacelike ve timelike altmanifoldlar üzerinde de torsiyonsuz ve metrik konneksiyon vardır. Günümüzde de Semi-Riemann altmanifoldlar üzerine pek çok matematikçi tarafından çalışmalar yapılmaktadır.

Lightlike altmanifoldlar teorisi ve Riemann yada Semi-Riemann altmanifoldlar teorisi arasındaki temel fark, lightlike durumunda $TM^{\perp}$ normal demetinin bir kısmı alt manifoldun teğet kısmında kalırken, Riemann yada Semi-Riemann durumunda TM ile $TM^{\perp}$ vektör demetlerinin arakesiti sıfırdır. Böylece lightlike durum için temel problem, TM demetine teğet olmayan alt vektör demetlerinin var olup olmadığıdır. Duggal-Bejancu, [3] deki çalışmalarında böyle bir demetin varlığını göstererek yeni bir yöntem ortaya koydular. Özel olarak lightlike altmanifoldun $RadTM$ sinin boyutu 1 ise manifold Half-lightlike Altmanifold adını alır.

Bir Semi-Riemann manifoldunun lightlike altmanifoldunu çalışmadan önce bu manifoldun half-lightlike altmanifoldunu çalışmak çok anlamlıdır. Half-lightlike altmanifoldlarla ilgili ilk çalışmalar K.L. Duggal, B. Şahin ve D.H. Jin tarafından yapılmıştır. Bu çalışmalarda half-lightlike altmanifoldların temel özellikleri verilmiştir. Bir Semi-Riemann manifoldunun half-lightlike altmanifoldunun distribüsyonları ile ilgili sınıflandırmalar yapılmıştır. Total umbilik half-lightlike altmanifold tanımlanarak bu altmanifold ile ilgili sonuçlar verilmiştir. Ayrıca screen konformal altmanifoldlar göz önüne alınarak half-lightlike olması durumunda total geodezik ve total umbilik durumları ile ilgili teoremler verilmiştir. Bir Semi-Riemann manifoldunun half-lightlike altmanifoldları ile ilgili olarak yapılan çalışmaları bir araya getirmek bu çalışmanın temel amacıdır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm dört alt bölümden oluşmuş olup temel tanım ve teoremler ayrıntılı bir şekilde incelendi. Semi-Riemann manifold ve lightlike altmanifoldlar tanıtılarak, çalışmamızda esas olan tanım ve teoremler verildi. Daha sonra Duggal ve Bejancu'nun yöntemleri kullanılarak lightlike hiperyüzeylerin geometrisi çalışıldı.

2.1 . Semi-Öklidyen Uzaylar

Tanım 2.1.1 . V bir reel vektör uzayı olmak üzere;

$$g : V \times V \to R$$

dönüşümü $\forall a,b \in R$ ve $\forall u,v,w \in V$ için,

$i)$ $g(u,v) = g(v,u)$,

$ii)$ $g(au+bv,w) = ag(u,w) + bg(v,w)$

$g(u,av+bw) = ag(u,v) + bg(u,w)$

özeliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir *simetrik bilineer form* denir [2].

Tanım 2.1.2 . V bir reel vektör uzayı ve g de V üzerinde tanımlı simetrik bilineer form olsun.

$i)$ $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) > 0$ ise g simetrik bilineer formuna *pozitif tanımlı*,

$ii)$ $\forall v \in V$ ve $v \neq 0$ için $g(v,v) < 0$ ise g simetrik bilineer formuna *negatif tanımlı*,

$iii)$ $\forall v \in V$ için $g(v,v) \geq 0$ ise g simetrik bilineer formuna *pozitif yarı-tanımlı*,

$iv)$ $\forall v \in V$ için $g(v,v) \leq 0$ ise g simetrik bilineer formuna *negatif yarı-tanımlı*

denir [2].

Tanım 2.1.3 . V bir reel vektör uzayı ve g, V üzerinde tanımlı simetrik bilineer form olsun. $0 \neq \xi \in V$ olmak üzere; $\forall v \in V$ için

$$g(\xi,v) = 0$$

ise g simetrik bilineer formuna V üzerinde *dejeneredir* denir. Aksi durumda g ye *non-dejeneredir* denir. Buradan açıkça görülür ki, g nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in V$ için

$$g(u,v) = 0 \text{ iken } v = 0$$

olmasıdır [3].

Tanım 2.1.4 . V bir reel vektör uzayı ve g , V üzerinde simetrik bilineer form olsun. Bu durumda V nin

$$RadV = \{\xi \in V \mid g(\xi, v) = 0, \forall v \in V\}$$

şeklinde tanımlı altuzayına, g simetrik bilineer formuna göre V uzayının *radikal* (veya *null*) *uzayı* denir. [3]

Tanım 2.1.5 . V bir reel vektör uzayı ve W da V nin bir altuzayı olsun. g , V üzerinde tanımlı simetrik bilineer bir dönüşüm olmak üzere; g nin W altuzayı üzerine kısıtlanmışı olan

$$g_{|_W} : W \times W \to R$$

dönüşümünün negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna g , simetrik bilineer formunun *indeksi* denir ve q ile gösterilir [2].

Teorem 2.1.1 . V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda,

$i)$ $g(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad i \neq j$

$ii)$ $g(\alpha_i, \alpha_i) = 1, \quad 1 \leq i \leq p,$

$iii)$ $g(\alpha_i, \alpha_i) = -1, \quad p+1 \leq i \leq p+q = r$

$iv)$ $g(\alpha_i, \alpha_i) = 0, \quad r+1 \leq i \leq n = p+q+m$

olacak şekilde V nin bir $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ bazı vardır [4].

Tanım 2.1.6 . V reel vektör uzayı üzerindeki non-dejenere simetrik bilineer forma, V reel vektör uzayı üzerinde bir *skalar çarpım* (*Semi-Öklid metriği*) denir. V üzerindeki bir skalar çarpma g ise (V, g) ikilisine de *skalar çarpım uzayı* (*Semi-Öklidyen uzay*) denir.

Eğer g pozitif tanımlı ise o zaman g bir *iç çarpım* (*Öklid metriği*) olur ve (V,g) de *Öklid uzayı* olarak adlandırılır. g nin indeksi, $q=1$ ise g ye *Lorentz (Minkowski) metriği* ve (V,g) ye de *Lorentz (Minkowski) uzayı* denir. p, ortonormal bazdaki spacelike vektör sayısı ve q da ortonormal bazdaki timelike vektör sayısı olmak üzere; $p,q\neq 0$ olması durumunda V, *proper Semi-Öklidyen uzay* olarak adlandırılır. Eğer g dejenere ise o zaman da V vektör uzayına g ye göre *lightlike (dejenere) vektör uzayı* denir [3].

Tanım 2.1.7 . V bir Semi-Öklidyen uzay ve g, V üzerinde tanımlı simetrik bilineer form olsun. $v\in V$ için

$i)$ $g(v,v)>0$ veya $v=0$ ise v vektörüne *spacelike,*

$ii)$ $g(v,v)<0$ ise v vektörüne *timelike,*

$iii)$ $g(v,v)=0$ ve $v\neq 0$ ise v vektörüne *lightlike vektör*

denir [1].

Tanım 2.1.8 . V bir lightlike vektör uzayı ve $RadV$, V vektör uzayının radikali olsun. Radikal uzaya tümleyen olan non-dejenere altuzaya *ekran* (*screen) uzay* denir ve SV ile gösterilir [3].

Tanım 2.1.9 . V bir reel vektör uzayı ve W da V nin altuzayı olsun. $g_{|W}$ dejenere ise W ya *lightlike* (*dejenere*) *altuzay* denir ve

$$W\cap W^{\perp}\neq\{0\}$$

olmak üzere;

$$W^{\perp}=\{v\in V \mid g(v,w)=0, \forall w\in W\}$$

altuzayına W *uzayının dik uzayı* denir [3].

Teorem 2.1.2 . V $m-$boyutlu bir Semi-Öklidyen uzay ve W, V nin bir altuzayı olsun. Bu durumda,

1) $boyW + boyW^{\perp} = m$

2) $(W^{\perp})^{\perp} = W$

3) $RadW = RadW^{\perp} = W \cap W^{\perp}$

dir [3].

Tanım 2.1.10. (V,g) $n-$boyutlu bir proper Semi-Öklidyen uzay olsun. V uzayının $\{e_1,...,e_q\}$ birim timelike ve $\{e_{q+1},...,e_n\}$ birim spacelike olacak şekilde $\{e_1,...,e_n\}$, $p+q=n$ ortonormal bazını göz önüne alalım. Bu durumda lightlike vektörleri de ihtiva eden bir baz sistemini üç şekilde elde edebiliriz [3].

Durum 1 . Ortonormal sistemdeki timelike vektör sayısı, spacelike vektör sayısından az yani $q<p$ olsun. Bu durumda

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} + e_i\} \ , \quad f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} - e_i\} \ , \quad i \in \{1,...,q\}$$

lightlike vektörlerini inşa edelim. Gerçekten,

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0$$

ve

$$g(f_i, f_j^*) = \delta_{ij} \ , \quad i,j \in \{1,...,q\}$$

dir. Böylece

$$\{f_1,..., f_q, f_1^*,..., f_q^*, e_{2q+1},..., e_{p+q}\}$$

bazı, V uzayının $2q$ tane lightlike vektörünü ve $p-q$ tane spacelike vektörünü ihtiva eden bir bazdır.

Durum 2 . Ortonormal sistemdeki spacelike vektör sayısı, timelike vektör sayısından az yani $p<q$ olsun. Böylece benzer şekilde

$$f_i = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} + e_i\} \ , \quad f_i^* = \frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i} - e_i\} \ , \quad i \in \{1,..., p\}$$

lightlike vektörleri tanımlanırsa, $i,j \in \{1,...,p\}$ için, V uzayının $2p$ tane lightlike ve $q-p$ tane de timelike vektörlerden oluşan

$$\{f_1,...,f_p,f_1^*,...,f_p^*,e_{2p+1},...,e_{p+q}\}$$

bazı elde edilir.

Durum 3 . Eğer ortonormal bazda bulunan spacelike ve timelike vektör sayıları eşitse yani $p=q$ ise, $n=2p=2q$ olduğundan, V nin

$$f_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i}+e_i\}\ ,\quad f_i^*=\frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i}-e_i\}\ ,\quad i\in\{1,...,q\}$$

veya

$$f_i=\frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i}+e_i\}\ ,\quad f_i^*=\frac{1}{\sqrt{2}}\{e_{q+i}-e_i\}\ ,\quad i\in\{1,...,p\}$$

şeklinde tanımlanan

$$\{f_1,...,f_p,f_1^*,...,f_p^*\}$$

lightlike bazı elde edilir.

Tanım 2.1.11 . V bir Semi-Öklidyen uzay olsun. Bu uzayın

$$g(f_i,f_j)=g(f_i^*,f_j^*)=0,\quad g(f_i,f_j^*)=\delta_{ij},\quad i,j\in\{1,...,\mu\}$$

ve

$$g(u_\alpha,f_i)=g(u_\alpha,f_i^*)=0\ ,\quad g(u_\alpha,u_\beta)=\varepsilon_\alpha\delta_{\alpha\beta}\ ,\quad \alpha,\beta\in\{1,...,t\}\ ,\quad \varepsilon_\alpha=\mp1$$

olacak şekildeki $\{f_1,...,f_\mu,f_1^*,...,f_\mu^*,u_1,...,u_t\}$ bazına *Semi-Öklidyen uzayın quasi-ortonormal bazı* denir [3].

Teorem 2.1.3 . V bir Semi-Öklidyen uzay ve W da bu uzayın bir lightlike altuzayı olsun. Bu durumda, V uzayının W boyunca bir quasi-ortonormal bazı vardır [3].

2.2 . Semi-Riemann Manifoldlar

Tanım 2.2.1 . M bir C^{∞} manifold olsun. $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olmak üzere;

$$\begin{array}{llll} g_{|_p}: & T_pM \times T_pM & \rightarrow & R \\ & (X_p, Y_p) & \rightarrow & g_{|_p}(X_p, Y_p) = g(X_p, Y_p) \end{array}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer, non-dejenere $(0,2)$ tensör alanına M üzerinde bir *metrik tensör* denir [2].

Tanım 2.2.2 . M, C^{∞} bir manifold olsun. Eğer M, g metrik tensörü ile donatılmışsa, M ye bir *Semi-Riemann manifold* denir [2].

Tanım 2.2.3 . Bir M Semi-Riemann manifoldu üzerindeki g metrik tensörünün indeksine *Semi-Riemann manifoldunun indeksi* denir ve $indM$ ile gösterilir.

Eğer indeks q ise $0 \leq q \leq boyM$ dir. Özel olarak, $q = 0$ ise $\forall p \in M$ için $g_{|_p}$, T_pM üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan, M bir *Riemann manifoldu* olur. $q = 1$ ve $n \geq 2$ olması durumunda ise, M ye bir *Lorentz manifoldu* denir. [2]

Tanım 2.2.4 . M, $n-$ boyutlu bir C^{∞} manifold olsun. M üzerinde

$$\begin{array}{llll} D: & M & \rightarrow & T_pM \\ & p & \rightarrow & D_p \subset T_pM \end{array}$$

şeklinde tanımlı D dönüşümüne, $r-$ *boyutlu distribüsyon (dağılım)* ve $X \in \Gamma(TM)$ için $X_p \in D_p$ ise X vektör alanına da D ye aittir denir. Eğer her $p \in M$ noktası için D_p de r tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise D distribüsyonuna *diferensiyellenebilirdir* denir [3].

Tanım 2.2.5 . M diferensiyellenebilir bir manifold ve K, M üzerinde herhangi bir tensör alanı olsun. Bu durumda $p \in M$, $t \in I \subset \mathbb{R}$ ve $X \in \Gamma(TM)$ olmak üzere;

$$L_X K = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(K(p) - (\phi_t K)(p))$$

ile tanımlanan L_X diferensiyel operatörüne X vektör alanına göre *Lie türevi* denir. Burada ϕ,

$$\phi : (t,x) \in [-\varepsilon,\varepsilon] \times U \to \phi(t,x) \in M$$

şeklinde tanımlı bir dönüşümdür [3].

Teorem 2.2.1 . M diferensiyellenebilir bir manifold ve L_X de manifold üzerinde tanımlı Lie türevi olsun. O zaman $\forall Y, Z \in \Gamma(TM)$ ve $f \in C^\infty(M,R)$ için

$i)$ $L_X f = X(f)$,

$ii)$ $L_X Y = [X,Y]$,

$iii)$ ψ, M üzerinde $(0,2)$ tipinde bir tensör alanı olmak üzere;

$$(L_X \psi)(Y,Z) = X(\psi(Y,Z)) - \psi([X,Y],Z) - \psi(Y,[X,Z])$$

dir [3].

Tanım 2.2.6 . M, $n-$ boyutlu C^∞ bir manifold ve D, M üzerinde $r-$ boyutlu bir distribüsyon olsun. Eğer $X,Y \in \Gamma(D)$ için $[X,Y] \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna *involutivedir* denir [5].

Tanım 2.2.7 . $\{u_1,...,u_n\}$, R_v^n üzerinde doğal koordinatlar olsun. V ve $W = \sum W_i \partial_i$, R_v^n üzerinde vektör alanları iseler,

$$\nabla_V W = \sum_{i=1}^{n} V(W_i)\partial_i$$

vektör alanına W nın V ye göre *kovaryant türevi* denir [2].

Tanım 2.2.8 . M, bir C^∞ manifold olmak üzere; M üzerindeki bir ∇ lineer konneksiyonu,

$i)$ $\nabla_V W$, V ye göre $C^\infty(M,R)$ lineerdir,

$ii)$ $\nabla_V W$, W ya göre R lineerdir,

$iii)$ $\nabla_V(fW) = V(f)W + f\,\nabla_V W$, $\forall f \in C^\infty(M,R)$ için,

şartlarını sağlayan ve

$$\nabla : \Gamma(TM)\times\Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$$

şeklinde tanımlanan bir fonksiyondur [2].

∇ nın (M,g) Semi-Riemann manifoldu üzerinde lineer konneksiyon olduğunu kabul edelim. Metrik tensör alanı g, ∇ ya göre paralel ise, yani $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y,Z) - g(Y,\nabla_X Z) = 0$$

ise ∇ ya *metrik konneksiyon (Riemann konneksiyon)* denir [3].

Teorem 2.2.2 . Bir M Semi-Riemann manifoldu üzerinde $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$i)$ $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

$ii)$ $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z)$

olacak şekilde M nin bir tek ∇ *Levi-Civita konneksiyonu* vardır ve bu konneksiyon

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_X Y,Z) &= Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) - Zg(X,Y) \\ &\quad - g(X,[Y,Z]) + g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) \end{aligned}$$

Kozsul formülü ile karakterize edilir [2].

Tanım 2.2.9 . M, bir C^∞ manifold ve ∇, M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Eğer $X,Y \in \Gamma(D)$ için ,

$$\nabla_X Y \in \Gamma(D)$$

ise D distribüsyonuna *paraleldir* denir [6].

Tanım 2.2.10 . M, Levi-Civita konneksiyonu ∇ olan Semi-Riemann bir manifold olsun. $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{array}{llll} R: & \Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\times\Gamma(TM) & \to & \Gamma(TM) \\ & (X,Y,Z) & \to & R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \end{array}$$

biçiminde tanımlanan M üzerinde $(1,3)$ tipindeki R fonksiyonuna M nin *Riemann eğrilik tensörü* denir [2].

Teorem 2.2.3 . M bir Semi-Riemann manifoldu ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. O zaman $\forall X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ için,

$i)$ $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(Y,X)Z,W)$,

$ii)$ $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$,

$iii)$ $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,

$iv)$ $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

dir [2].

Tanım 2.2.11 . (M,g) bir Semi-Riemann manifold ve $p \in M$ noktasındaki T_pM tanjant uzayının iki boyutlu bir altuzayı P olsun. P altuzayının bir bazı $\{X,Y\}$ olmak üzere;

$$K(p) = \frac{R(X,Y,X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

olarak tanımlanan $K(p)$ reel sayısına P nin *Riemann anlamındaki kesit eğriliği* denir. Eğer $K(p) = c(sbt)$ ise M manifolduna c *sabit kesit eğrilikli Semi-Riemann manifold* veya sadece *uzay form* denir ve $M(c)$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.2.12 . Eğer M manifoldu sabit bir c eğriliğine sahipse M nin eğrilik tensörü , $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$R(X,Y)Z = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\}$$

şeklindedir [3].

Tanım 2.2.13 . M bir Semi-Riemann manifold ve R, M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1,...,e_n\}$, T_PM nin ortonormal bir bazı ve ε_i, $\{e_i\}$ bazının işareti olmak üzere; $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$g(e_i,e_j) = \varepsilon_i \delta_{ij}$$

ve

$$X = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(X,e_i)e_i$$

olduğundan,

$$g(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i g(X,e_i)g(Y,e_i)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{array}{llll} Ric: & TM \times TM & \to & R \\ & (X,Y) & \to & Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i R(e_i, X, Y, e_i) \end{array}$$

veya

$$Ric(X,Y) = iz\{Z \to R(X,Y)Z\}$$

şeklinde tanımlı Ric tensörüne M Semi-Riemann manifoldunun *Ricci eğrilik tensörü* ve $Ric(X,Y)$ değerine de M nin *Ricci eğriliği* denir [7].

Tanım 2.2.14 . M bir Semi-Riemann manifoldu ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olsun. T_pM uzayının $2-$boyutlu altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına M manifoldunun *skaler eğriliği* denir ve ρ ile gösterilir. Buna göre R, M nin Riemann eğrilik tensörü ve $\{e_1,...,e_n\}$, T_PM nin bir ortonormal bazı olmak üzere;

$$\rho = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i Ric(e_i,e_i)$$

ile tanımlanır [7].

Tanım 2.2.15 . M , m -boyutlu bir Semi-Riemann manifold olsun. $\forall X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned} C(X,Y)Z &= R(X,Y)Z+\frac{1}{m-2}\{Ric(X,Z)Y-Ric(Y,Z)X+g(X,Z)QY \\ &- g(Y,Z)QX\}-\frac{\rho}{(m-1)(m-2)}\{g(X,Z)Y-g(Y,Z)X\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan (1,3) tipindeki tensör alanına M nin *Weyl konformal eğrilik tensörü* denir. Burada Q, $g(QX,Y)=Ric(X,Y)$ ile tanımlı Ricci operatörüdür [3].

Tanım 2.2.16 . M , bir Semi-Riemann manifold olsun. Eğer $\lambda\in R$ için

$$Ric(X_p,Y_p)=\lambda\tilde{g}(X_p,Y_p)$$

ise M ye *Einstein manifoldu* denir [8].

Tanım 2.2.17 . M , bir Semi-Riemann manifold ve R de M nin eğrilik tensörü olsun. Eğer, $R=0$ ise M ye *lokal flat* ve $\nabla R=0$ ise M ye *lokal simetrik uzay* denir [8].

Tanım 2.2.18 . $\tilde{M}$ nın bir Semi-Riemann hiperyüzeyi, ekboyutu 1 olan Semi-Riemann altmanifoldudur [9].

Tanım 2.2.19 . M , $m+2-$boyutlu $\tilde{M}$ Semi-Riemann manifoldunun altmanifoldu olsun. $\tilde{M}$ nın Riemann metriği $\tilde{g}$ iken

$$\dot{I}^*\tilde{g}=g$$

ile tanımlanan g, M nin non-degenere metriği ise (M,g) ikilisine *Semi-Riemann hiperyüzey* denir. Burada $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ için,

$$\dot{I}_*(X)=X$$

ve

$$(\dot{I}^*\tilde{g})(X,Y)=\tilde{g}(\dot{I}_*(X),\dot{I}_*(Y))$$

dir.

(M, g), aynı zamanda bir Semi-Riemann manifolddur [9].

2.3. Semi-Riemann Manifoldunun Lightlike Altmanifoldları

Tanım 2.3.1 . $\widetilde{M}$ Semi-Riemann manifoldunun C^{∞} bir altmanifoldu M ve $\widetilde{M}$ deki metrik $\widetilde{g}$ olsun.

$$\varphi : M \to \widetilde{M}$$
$$p \to \varphi(p)$$

inclusion (daldırma) dönüşümü için $p \in M$ noktasındaki türev dönüşümü

$$T_pM \xrightarrow{\varphi_*|_p} T_{\varphi(p)}\widetilde{M}$$

ve ek dönüşümü de

$$T_pM^* \xleftarrow{\varphi^*{}_p} T^*_{\varphi(p)}\widetilde{M}^*$$

olmak üzere; $\forall X_p, Y_p \in T_pM$ için,

$$(\varphi^*\big|_p \widetilde{g}\big|_p)(X_p, Y_p) = \widetilde{g}(\varphi_*(X_p), \varphi_*(Y_p))\big|_p$$

eşitliği ile tanımlı $\varphi^*\big|_p(\widetilde{g}\big|_p)$ dönüşümü, M üzerinde bir metrik ise M ye $\widetilde{M}$ nin bir *Semi-Riemann altmanifoldu* denir [2].

Tanım 2.3.2 . $\widetilde{M}$, C^{∞} sınıfından bir manifold ve D, $\widetilde{M}$ üzerinde μ-boyutlu bir distribüsyon olsun. M, $\widetilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere, eğer M nin her p noktasında, M manifoldunun tanjant uzayı ile D_p aynı ise M ye D distribüsyonunun *integral manifoldu* denir [6].

Tanım 2.3.3 . Eğer D distribüsyonunun M altmanifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa bu manifolda distribüsyonun *maksimal integral manifoldu* denir [6].

Tanım 2.3.4 . $\widetilde{M}$, bir C^{∞} manifold ve M, $\widetilde{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Eğer

$\forall p \in M$ için D distribüsyonunun p noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa D ye *integrallenebilir* denir [6].

Teorem 2.3.1 . $\widetilde{M}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve D, $\widetilde{M}$ üzerinde $n-$boyutlu bir distribüsyon olsun. Her involutive distribüsyon integrallenebilirdir. Bu durumda D distribüsyonunun integral manifoldu vardır [6].

Tanım 2.3.5 . M, $\widetilde{M}$ nin bir Semi-Riemann altmanifoldu olsun. $\forall p \in M$ için $T_pM^{\perp}$ uzayının boyutuna M *nin dik tümleyeninin boyutu (eş boyutu)*, $T_pM^{\perp}$ in indeksine de M *nin dik tümleyeninin indeksi* denir [2].

Tanım 2.3.6 . $\widetilde{M}$ bir Semi-Riemann manifold olsun. $\widetilde{M}$ nın dik tümleyeninin boyutu (eş boyutu) 1 olan Semi-Riemann altmanifolduna, $\widetilde{M}$ nın bir *Semi-Riemann hiperyüzeyi* denir [2].

Tanım 2.3.7 . $(m+n)-$ boyutlu bir Semi-Riemann $\widetilde{M}$ manifoldunun, eş boyutu n olan bir altmanifoldu M olsun. $\forall p \in M$ için

$$Rad \ : \ p \in M \to RadT_pM$$

dönüşümü, M üzerinde $rankRad = r > 0$ olacak şekilde diferensiyellenebilir bir distribüsyon tanımlıyorsa, M ye r *-lightlike altmanifold* denir.

$r-$ lightlike bir altmanifold, boyutu, eş boyutu ve rankına göre dört durumda incelenebilir:

1. Durum. Eğer $0 < r < \min\{m, n\}$ ise M nin TM tanjant demetinde $RadTM$ ye tümleyen olan bir $S(TM)$ screen distribüsyonu vardır. $S(TM)$, $RadTM$ ye ortogonal ve $\widetilde{g}$ ya göre non-degeneredir. M üzerinde $S(TM)$ sabit indekslidir ve TM tanjant demeti

$$TM = RadTM \perp S(TM)$$

şeklinde yazılır. TM nin ortogonal demeti $TM^{\perp}$ olmak üzere; $TM^{\perp}$ de $RadTM$ ye tümleyen olan non-dejenere bir $S(TM^{\perp})$ transversal vektör demeti vardır ve

$$TM^{\perp} = RadTM \perp S(TM^{\perp})$$

şeklinde ifade edilir. Ayrıca, $S(TM)$ ve $S(TM^{\perp})$, sırasıyla, $T\tilde{M}\big|_M$ ve $S(TM)^{\perp}$ in non-dejenere alt vektör demetleri olduğundan;

$$T\tilde{M}\big|_M = S(TM) \perp S(TM)^{\perp}$$

ve hem $S(TM^{\perp})$ hem de $S(TM)^{\perp}$ demetlerinin her ikisi de non-dejenere olup, $S(TM^{\perp})$ demeti, $S(TM)^{\perp}$ demetinin altvektör demeti olduğundan,

$$S(TM)^{\perp} = S(TM^{\perp}) \perp S(TM^{\perp})^{\perp}$$

dir. Diğer taraftan $S(TM^{\perp})^{\perp}$ demetinde $RadTM$ ye tümleyen olan ve M nin *lightlike transversal vektör demeti* olarak adlandırılan bir $ltr(TM)$ demeti vardır. Böylece

$$tr(TM) = ltr(TM) \perp S(TM^{\perp})$$

ayrışımı yazılabilir.

2. Durum. Eğer $1 < r = n < m$ ise $RadTM = TM^{\perp}$ dir. Böylece $S(TM^{\perp}) = \{0\}$ olduğundan; TM ve $T\tilde{M}$, sırasıyla,

$$TM = S(TM) \perp TM^{\perp}$$

ve

$$T\tilde{M} = TM \oplus ltr(TM) = S(TM) \perp (TM^{\perp} \oplus ltr(TM))$$

olur. Bu durumdaki M ye *co-isotropik altmanifold* denir.

3. Durum. Eğer $1 < r = m < n$ ise $RadTM = TM$ dir. Buradan $S(TM) = \{0\}$ olduğundan; $TM^{\perp}$ ve $T\tilde{M}$ sırasıyla,

$$TM^{\perp} = TM \perp S(TM^{\perp})$$

ve

$$T\tilde{M} = (TM \oplus ltr(TM) \perp S(TM^{\perp}))$$

dir. Bu şekildeki M manifolduna *isotropik altmanifold* denir.

4. Durum. Eğer $1 < r = m = n$ ise,

$$RadTM = TM = TM^{\perp}$$

dir. Buradan $S(TM) = S(TM^{\perp}) = \{0\}$ olduğundan;

$$T\tilde{M} = (TM \oplus ltr(TM)$$

dir. Bu durumda da M ye *tamamen lightlike altmanifold* adı verilir [3].

Teorem 2.3.2 . $\tilde{M}$, Semi-Riemann manifoldunun lightlike altmanifoldu M olsun. $\tilde{\nabla}$, $\tilde{M}$ de Levi-Civita konneksiyon ve $(S(TM), S(TM^{\perp}))$ çiftine göre $\tilde{M}$ nin transversal vektör demeti $tr(TM)$ olmak üzere; $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(tr(TM))$ için *Gauss ve Weingarten denklemleri*, sırasıyla,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h^{\ell}(X,Y) + h^{s}(X,Y)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_X V = -A_V X + D_X^{\ell} SV + D_X^{s} LV$$

şeklinde tanımlanır. Burada D^{ℓ} ve D^{s}, $tr(TM)$ üzerinde lineer konneksiyonlar, h^{ℓ} ve h^{s} sırasıyla altmanifoldun lightlike ikinci temel formu ve screen ikinci temel formu olup,

$$L : tr(TM) \rightarrow ltr(TM), \quad S : tr(TM) \rightarrow S(TM^{\perp}),$$

$$h^{\ell}(X,Y) = Lh(X,Y), \quad h^{s}(X,Y) = Sh(X,Y)$$

ve

$$\begin{array}{lccc} D^{S} : & \Gamma(TM) \times \Gamma(ltr(TM)) & \rightarrow & \Gamma(S(TM^{\perp})) \\ & (X, LV) & \rightarrow & D_X^{s} LV \end{array}$$

$$\begin{array}{lccc} D^{\ell} : & \Gamma(TM) \times \Gamma(S(TM^{\perp})) & \rightarrow & \Gamma(ltr(TM)) \\ & (X, SV) & \rightarrow & D_X^{\ell} SV \end{array}$$

dir [3].

Teorem 2.3.3 . M, $\tilde{M}$ Semi-Riemann manifoldunun lightlike altmanifoldu olsun. Eğer M co-isotropik yada tamamen lightlike altmanifold ise screen vektör demetleri olmayacağından $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(tr(TM))$ yerine özel olarak $N \in \Gamma(ltr(TM))$ alınırsa, *Gauss ve Weingarten denklemleri*, sırasıyla,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h^{\ell}(X,Y)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^{\ell}_X N$$

şeklindedir [3].

Tanım 2.3.8 . M, $\tilde{M}$ Semi-Riemann manifoldunun lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$h^{\ell}(X,Y) = \tilde{g}(X,Y)H_L$$

ve

$$h^{s}(X,Y) = \tilde{g}(X,Y)H_S$$

olacak şekilde $H_L \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $H_S \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ vektör alanları var ise M ye *total umbiliktir* denir [10].

Teorem 2.3.4 . M, $\tilde{M}$ Semi-Riemann manifoldunun lightlike veya co-isotropik altmanifoldu olsun. O zaman P, TM tanjant demetinden screen distribüsyon üzerine bir projeksiyon dönüşümü olmak üzere; $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(Rad(TM))$ için

$$\nabla_X Y = \nabla^{*}_X Y + h^{*}(X,Y)$$

ve

$$\nabla_X \xi = -A^{*}_{\xi} X + \nabla^{\perp}_X \xi$$

dir. Burada $\nabla^{*}_X Y$ ve $A^{*}_{\xi} X$ $S(TM)$ nin, $h^{*}(X,Y)$ ve $\nabla^{\perp}_X \xi$ ise $RadTM$ nin elemanları olup, ∇ ya *indirgenmiş*, ∇^{*} a ise *screen konneksiyon* denir [3].

2.4 . Semi-Riemann Manifoldunun Lightlike Hiperyüzeylerinin Geometrisi

Tanım 2.4.1 . $\tilde{M}$, $(m+2)$-boyutlu ve q , $1 \leq q \leq n+1$, indeksli bir Semi-Riemann manifold olsun. $\tilde{M}$ nin $(m+1)$-boyutlu bir hiperyüzeyi M olmak üzere; $\forall p \in M$ için,

$$Rad \ : \ p \in M \to RadT_pM$$

dönüşümü, M üzerinde rankı 1 olacak şekilde diferensiyellenebilir bir distribüsyon tanımlıyorsa, M ye *lightlike hiperyüzey* denir. M , lightlike hiperyüzeyi için $S(TM)$, TM de $TM^{\perp}$ in tümleyen vektör demeti olmak üzere;

$$TM = S(TM) \perp TM^{\perp}$$

dir. Burada $S(TM)$, non-dejenere olduğundan $T\tilde{M}$,

$$T\tilde{M}\Big|_M = S(TM) \perp S(TM)^{\perp}$$

şeklinde yazılabilir.

Böylece $tr(TM)$, $S(TM)^{\perp}$ in tümleme vektör demetini göstermek üzere;

$$S(TM)^{\perp} = TM^{\perp} \oplus tr(TM)$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} T\tilde{M}\Big|_M &= S(TM) \perp S(TM)^{\perp} \\ &= S(TM) \perp (TM^{\perp} \oplus tr(TM)) \\ &= TM \oplus tr(TM) \end{aligned}$$

ayrışımı elde edilir.

$\tilde{\nabla}$ ve ∇, sırasyla, $\tilde{M}$ ve M üzerindeki Levi-Civita ve lineer konneksiyonlar olsunlar. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(M)$ için,

$$\nabla_X Y, \ A_N X \in \Gamma(TM) \ \text{ve} \ h(X,Y), \ \nabla_X^{\perp} N \in \Gamma(tr(TM))$$

olmak üzere;

Gauss ve *Weingarten denklemleri*, sırasıyla,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla_X^{\perp} N$$

şeklinde verilir.

ξ ve N, M lightlike hiperyüzeyi üzerindeki kesitlerin bir parçası olmak üzere; B bilineer formu ve τ 1-formu, $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$B(X,Y) = \tilde{g}(h(X,Y),\xi)$$

ve

$$\tau(X) = \tilde{g}(\nabla^{\perp}_{X} N,\xi)$$

şeklinde tanımlıdır. Açıkça görülür ki

$$B(X,Y)N = h(X,Y)$$

ve

$$\nabla^{\perp}_{X} N = \tau(X)N$$

dir. Buradan

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)N$$

ve

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \tau(X)N$$

olur. Burada B, M nin ikinci temel formu ve A_N de M nin şekil operatörüdür.

Teorem 2.4.1 . $(\tilde{M},\tilde{g})$ bir Semi-Riemann manifold ve bu manifoldun lightlike hiperyüzeyi $(M,g,S(TM))$ olsun. U koordinat komşuluğunda ξ, $\Gamma(TM^{\perp})$ nin bir bazı olmak üzere; $\forall X \in \Gamma(S(TM))$ için $tr(TM)$ lightlike transversal vektör demetinin

$$g(N,N) = g(N,X) = 0$$

ve

$$\tilde{g}(N,\xi) = 1$$

olacak şekilde bir tek N diferensiyellenebilir kesiti vardır [3].

Teorem 2.4.2 . $(M, g, S(TM))$, $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Semi-Riemann manifoldunun lightlike bir hiperyüzeyi olsun. O zaman $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

1) ∇^* lineer konneksiyonu metriktir.
2) ∇ indirgenmiş konneksiyonu, $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$\tau(Z) = \widetilde{g}(Z, N)$$

olmak üzere;

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = B(X, Y)\tau(Z) + B(X, Z)\tau(Y)$$

eşitlikleri sağlanır [3].

Tanım 2.4.2 . M, $(m+1)$-boyutlu bir lightlike hiperyüzey ve $S(TM)$, M nin bir screen distribüsyonu olsun. $\{E_1, ..., E_n\}$, $S(TM)$ nin bir ortanormal bazı olmak üzere;

$$H = -\sum_{i=1}^{n} B(E_i, E_i)$$

biçiminde tanımlanan H ye M nin *ortalama eğriliği* denir [11].

Tanım 2.4.3 . M, $\widetilde{M}$ nin lightlike bir hiperyüzeyi olmak üzere; $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$B(X, Y) = \varphi g(X, Y)$$

olacak şekilde M de C^∞ sınıfından bir φ fonksiyonu varsa, M hiperyüzeyine *total umbiliktir* denir [3].

Teorem 2.4.3 . M, $\widetilde{M}$ Semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M, Einstein ise M nin Ricci tensörü simetriktir.

İspat. M lightlike hiperyüzeyi Einstein olsun. O zaman $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $S(TM)$ nin $\{E_1, ..., E_n\}$ ortonormal bazı için M nin Ricci eğrilik tensörü göz önüne alınır ve Gauss formülü kullanılırsa,

$$Ric(X, Y) - Ric(Y, X) = -2d\tau(X, Y)$$

elde edilir. Ayrıca, Einstein manifold tanımından,

$$kg(X,Y)-kg(Y,X)=-2d\tau(X,Y)$$

dir. Böylece

$$d\tau(X,Y)=0$$

olur. Bu ise Ricci tensörünün simetrik olduğunu gösterir.

Teorem 2.4.4 . $\tilde{M}$ Semi-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi M olsun. O zaman transversal vektör demeti üzerindeki $\nabla^{\perp}$ transversal lineer konneksiyonun flat olması için gerek ve yeter şart, lightlike transversal vektör demeti N nin paralel ve M nin total geodezik olmasıdır.

İspat . M , $\tilde{M}$ Semi-Riemann manifoldunun lightlike bir hiperyüzeyi olsun. O halde $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ ve $N\in\Gamma(tr(TM))$ için $T\tilde{M}$ ve $tr(TM)$ üzerindeki konneksiyonlar, sırasıyla $\tilde{\nabla}$ ve $\nabla^{\perp}$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)N &= -\nabla_X(A_N Y)-h(X,A_N Y)-A_{\tau(Y)N}X\\ &\quad+\nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y N+\nabla_Y(A_N X)+h(Y,A_N X)+A_{\tau(X)N}Y\\ &\quad-\nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X N-A_N[X,Y]+\nabla^{\perp}_{[X,Y]}N\end{aligned}$$

dir. Böylece lightlike tranversal vektör demetinin eğrilik tensörü,

$$\begin{aligned}\tilde{R}^{\perp}(X,Y)N &= \nabla^{\perp}_X\nabla^{\perp}_Y N+\nabla^{\perp}_Y\nabla^{\perp}_X N+\nabla^{\perp}_{[X,Y]}N\\ &\quad+h(Y,A_N X)-h(X,A_N Y)\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikten açıkça görülür ki $\nabla^{\perp}$ nin flat olması için gerek ve yeter şart N nin paralel ve M nin total geodezik olmasıdır.

Teorem 2.4.5 . $\tilde{M}(c)$, sabit kesit eğrilikli bir Semi-Riemann manifold ve M de $\tilde{M}(c)$ nin lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $\nabla^{\perp}$ konneksiyonunun flat olması için gerek ve yeter şart M nin total geodezik olmasıdır.

İspat . $\tilde{R}$, $\tilde{M}(c)$ nin eğrilik tensörünü göstermek üzere; $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$, $N\in\Gamma(tr(TM))$ ve $\xi\in\Gamma(RadTM)$ için,

$$\begin{aligned}\widetilde{R}(X,Y)N &= \nabla_Y(A_N X)-\nabla_X(A_N Y)+h(Y,A_N X)\\ &\quad -h(X,A_N Y)+\tau(X)A_N Y-\tau(Y)A_N X\\ &\quad -A_N[X,Y]+\widetilde{R}^{\perp}(X,Y)N\end{aligned}$$

dir. $\widetilde{M}$ nin sabit kesitsel eğriliği göz önüne alınır ve eşitliğin her iki tarafı ξ ile skalar çarpılırsa,

$$\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)N,\xi)=g(\widetilde{R}^{\perp}(X,Y)N,\xi)+B(Y,A_N X)-B(X,A_N Y)$$

elde edilir. Böylece

$$g(\widetilde{R}^{\perp}(X,Y)N,\xi)=B(X,A_N Y)-B(Y,A_N X)$$

olur. Bu ise $\nabla^{\perp}$ nin flat olması için gerek ve yeter şartın M nin total geodezik olması gerektiğini ifade eder.

Örnek 2.4.1 . R_2^4 de M hiperyüzeyi

$$x^3-\frac{1}{2}(\cos x^1+\sin x^1)^2=x^0$$

şeklinde verilsin. O halde M nin

$$g(\xi,\xi)=g(\xi,W)=g(N,W)=0$$
$$g(\xi,N)=1$$

olacak şekildeki radikal ve transversal vektör alanı ile screen uzayı,

$$RadTM=Sp\left\{\frac{\partial}{\partial x^0}+(\cos x^1+\sin x^1)\frac{\partial}{\partial x^1}-(\cos x^1+\sin x^1)\frac{\partial}{\partial x^2}+\frac{\partial}{\partial x^3}\right\}$$

$$\begin{aligned}tr(TM)=-\frac{1}{2\left(1+(\cos x^1+\sin x^1)^2\right)} &\left\{\frac{\partial}{\partial x^0}+\left(\cos x^1+\sin x^1\right)\frac{\partial}{\partial x^1}\right.\\ &\left.+(\cos x^1+\sin x^1)\frac{\partial}{\partial x^2}-\frac{\partial}{\partial x^3}\right\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}S(TM) &= \left\{W_1=\frac{\partial}{\partial x^1}-(\cos x^1+\sin x^1)\frac{\partial}{\partial x^0}\right.\\ &\quad \left.+W_2=\frac{\partial}{\partial x^2}+(\cos x^1+\sin x^1)\frac{\partial}{\partial x^1}\right\}\end{aligned}$$

şeklinde bulunur. Böylece M , R_2^4 de bir lightlike hiperyüzeydir [12].

Teorem 2.4.6 . İndirgenmiş ∇ konneksiyonunun Levi-Civita konneksiyon olması için gerek ve yeter şart $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için $B(X,Y)=0$ olmasıdır.

P , TM den $S(TM)$ ye projeksiyon, ∇ bir Levi-Civita konneksiyonu iken $S(TM)$ nin Levi-Civita konneksiyonu ∇^*, şekil operatörü A^* ve $RadTM$ nin ikinci temel formu h^* olmak üzere; $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in RadTM$ için,

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + h^*(X,PY)$$

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X + \nabla^\perp_X \xi$$

ifadeleri elde edilir.

$$C(X,PY) = \tilde{g}(h^*(X,PY),N)$$

ve

$$\varepsilon(X) = \tilde{g}(\nabla^\perp_X \xi, N) = -\tau(X)$$

ile C ve ε fonksiyonları tanımlanırsa, $S(TM)$ nin Gauss ve Weingarten formülleri

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + C(X,PY)\xi$$

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X + -\tau(X)\xi$$

şeklinde elde edilir. Diğer taraftan

$$B(X,Y) = \tilde{g}(A^*_\xi X, Y) \ , \ \tilde{g}(A^*_\xi X, N) = 0$$

ifadesiyle M nin ikinci temel formu ile $S(TM)$ nin şekil operatörü arasındaki ilişki ve

$$C(X,PY) = \tilde{g}(A_N X, PY) \ , \ \tilde{g}(A_N X, N) = 0$$

ifadesiyle de $S(TM)$ nin ikinci temel formu ile M nin şekil operatörü arasındaki ilişki tanımlanır [13].

Teorem 2.4.7 . $\widetilde{M}$, sabit bir c eğriliğine sahip Semi-Riemann manifold ve M, $\widetilde{M}$ nin total umbilik lightlike altmanifoldu olsun. Eğer screen distribüsyon total umbilik ise M sabit kesit eğriliğe sahiptir.

Tanım 2.4.4 . $(M, g, S(TM))$, Semi-Riemann manifoldun lightlike bir hiperyüzeyi olsun. φ, M nin bir U koordinat komşuluğu üzerinde diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere; M nin şekil operatörü ile $S(TM)$ nin şekil operatörü arasında

$$A_N = \varphi A^*_\xi$$

bağıntısı varsa, M ye *screen konformal hiperyüzey* denir. Özel olarak φ, sıfırdan farklı bir sabitse M , *screen homotetik hiperyüzey* adını alır [13].

Teorem 2.4.8 . $(M, g, S(TM))$, $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Semi-Riemann manifoldunun lightlike bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir.

1) $S(TM)$ distribüsyonu integrallenebilirdir.

2) $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için $h^*(X, Y) = h^*(Y, X)$ dir.

3) M nin şekil operatörü g ye göre simetriktir. Yani, $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ ve $V \in \Gamma(tr(TM))$ için,

$$g(A_V X, Y) = g(X, A_V Y)$$

dir [13].

Tanım 2.4.5 . $(M, g, S(TM))$, $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ Semi-Riemann manifoldunun lightlike bir hiperyüzeyi olsun. Eğer $\forall p \in M$ noktasında $X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$B(X, Y) = \phi g(X, Y)$$

olacak şekilde bir ϕ diferensiyellenebilir fonksiyonu varsa, M ye tamamen umbilik *hiperyüzey* denir. O halde

$$A^*_\xi X = \phi X$$

olur [13].

Tanım 2.4.6 . M, lightlike hiperyüzeyi üzerindeki bir geodezik, M nin immersed olduğu $\tilde{M}$ manifoldunda da geodezik ise M ye *tamamen geodezik hiperyüzey* adı verilir [13].

Tanım 2.4.7 . M, $\tilde{M}$ Semi-Riemann manifoldunun lightlike bir hiperyüzeyi olsun. $\Gamma(TM)$ üzerinde bir D distribüsyonu ve L lie türev fonksiyonu verilsin. Bu durumda $\forall X, Y, Z \in \Gamma(D)$ için,

$$(L_X g)(Y, Z) = 0$$

yani

$$Xg(Y, Z) = g(L_X Y, Z) + g(Y, L_X Z)$$

oluyorsa, X vektör alanına *killing vektör alanı* denir ve eğer D nin her X vektör alanı killing vektör alanı ise, D distribüsyonuna *killing distribüsyonu* denir [13].

Teorem 2.4.8 . M, $\tilde{M}$ Semi-Riemann manifoldunun lightlike bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

1) M, tamamen geodeziktir.

2) $h = 0$ dır.

3) M üzerinde $A^*_\xi = 0$ dır.

4) M üzerindeki indirgenmiş ∇ konneksiyonu metriktir.

5) $RadTM$ paraleldir.

6) $RadTM$ killing distribüsyondur [13].

Teorem 2.4.9 . M, $\tilde{M}$ Semi-Riemann manifoldunun lightlike bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

1) $S(TM)$ paraleldir.

2) $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için, $C(X, PY) = 0$ dır.

3) $A_N = 0$ dır [13].

3. HALF-LIGHTLIKE ALTMANİFOLDLAR

3.1 . Genel Kavramlar

2-ekboyutlu lightlike altmanifold M için iki durum söz konusudur. $RadTM$, radikal distribüsyonunun boyutu ya birdir yada ikidir. Eğer $boyRadTM=1$ ise, M ye *half-lightlike altmanifold* denir [15]. Şimdi ise half-lightlike altmanifoldların genel özelliklerini verelim.

$(\widetilde{M},\widetilde{g})$, $q\geq 1$ indeksli $(m+2)$-boyutlu bir Semi-Riemann manifold ve (M,g), $\widetilde{M}$ nin 2-boyutlu bir lightlike altmanifoldu olsun. g, dejenere olduğundan; sıfırdan farklı bir $\xi\in\Gamma(TM)$ vektör alanı vardır öyle ki $\forall X\in\Gamma(TM)$ için,

$$g(\xi,X)=0$$

dır. Böylece T_xM tanjant uzayı için

$$T_xM^{\perp}=\{u\in T_x\widetilde{M}:\widetilde{g}(u,v)=0,\forall v\in T_xM\}$$

olacak şekilde $T_x\widetilde{M}$ nın 2-boyutlu dejenere bir altuzayı vardır. M, lightlike olduğundan; T_xM ve $T_xM^{\perp}$ in ikisi de dejenere, ortogonal fakat birbirlerinin tamamlayanı olmayan altuzaylardır. Bu durumda

$$RadT_xM=T_xM\cap T_xM^{\perp}$$

olduğundan, $RadT_xM$ nin boyutu, $x\in M$ noktasına bağlıdır. Burada, $RadTM$ ile M nin TM tanjant demetinin bir radikal distribüsyonu ifade edilmektedir. $RadT_xM$ altuzayı T_xM nin 1 yada 2 boyutlu bir altuzayıdır. TM de $RadTM$ ye komplemant olan non-dejenere bir $S(TM)$ distribüsyonu vardır ve M nin *screen (ekran) distribüsyonu* olarak isimlendirilir. Ortogonal distribüsyonla

$$TM=RadTM\oplus_{orth}S(TM)$$

yazılabilir. Eğer $RadTM$ nin boyutu 1 ise, $(M,g,S(TM))$ altmanifolduna, *half-lightlike altmanifold* denir. Bu durumda $TM^{\perp}$ de half-lightliketır. Diğer taraftan, eğer $boyRadTM=2$ ise,

$$S(TM^{\perp}) = \{0\}$$

olduğundan

$$RadTM = TM^{\perp}$$

tir ve $(M, g, S(TM))$, *co-isotropik altmanifold* diye isimlendirilir [14].

Bu tezde

$$\tilde{g}(\xi, v) = 0, \ \tilde{g}(u,u) \neq 0, \ \forall v \in T_x M^{\perp} \ , \ \xi, u \in T_x M^{\perp}$$

eşitliğini sağlayan half-lightlike altmanifoldlar için yapılan çalışmalardan derlenen sonuçlar verilecektir.

Yukarıdaki denklemden $\xi \in T_x M$ olur ve dolayısıyla $\xi \in RadT_x M$ dir. Bununla beraber M üzerinde lokal bir ξ lightlike vektör alanı vardır öyle ki $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $u \in \Gamma(TM^{\perp})$ için,

$$\tilde{g}(\xi, x) = \tilde{g}(\xi, u) = 0$$

dır. Böylece $RadTM$, lokal olarak ξ tarafından gerilir. Bu durumda TM de $RadTM$ yi tamamlayan $S(TM)$ distribüsyonu vardır. $T\tilde{M}$ da $S(TM)$ ye ortogonal komplemant olan $S(TM)^{\perp}$ distribüsyonu göz önünde bulundurulursa, $\xi, u \in \Gamma(S(TM)^{\perp})$ olur. Böylece $\in = \pm 1$ olmak üzere, $\tilde{g}(u,u) = \in$ olacak şekilde bir birim vektör alanı seçilebilir. Buradan $RadTM$, $TM^{\perp}$ nin 1-boyutlu bir alt vektör demeti olur. $RadTM$ yi tamamlayan ve u ile oluşturulan bir D distribüsyonu M nin *screen transversal demeti* olarak adlandırılır. Böylece $S(TM)^{\perp}$ de D ye ortogonal komplemant olan $D^{\perp}$ distribüsyonu ile birlikte

$$S(TM)^{\perp} = D \perp D^{\perp}$$

ortogonal parçalanması elde edilir. $D^{\perp}$ in non-degenereliği ve $\xi \in \Gamma(D^{\perp})$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$\tilde{g}(N, \xi) \neq 0, \ \tilde{g}(N, N) = 0, \ \tilde{g}(N, u) = 0$$

şartını sağlayan bir tek $N \in \Gamma(D^{\perp})$ olması için gerek ve yeter şart $\tilde{g}(\xi, v) \neq 0$ iken N vektör alanının

$$N = \frac{1}{\tilde{g}(\xi, v)} \left\{ v - \frac{\tilde{g}(v,v)}{2\tilde{g}(\xi, v)} \xi \right\} \ , \ v \in \Gamma(F|_U)$$

şeklinde tanımlanmasıdır. Burada F, $D^{\perp}$ de $RadTM$ nin komplemantıdır. Buradan ve $\tilde{g}(\xi,u)=0$ eşitliğinden açıkça görülür ki N lightlike vektör alanı, ne M ye tanjanttır ne de u ile lineer bağımlıdır. Eğer başka bir koordinat komşuluğu üzerinde $\xi^{*}=\alpha\xi$ seçilirse, $N^{*}=\frac{1}{\alpha}N$ elde edilir. Böylece M üzerinde

$$tr(TM)=D\oplus_{orth} ltr(TM)$$

ile verilen $tr(TM)$ vektör demeti tanımlanır. Burada $ltr(TM)$, $RadTM$ ile aynı boyuta sahip olan ve lokal olarak N ile gerilen 1-boyutlu bir vektör demetidir. $ltr(TM)$ ye $S(TM)$ distribüsyonuna göre M nin *lightlike transversal vektör demeti* denir [13]. Böylece

$$\begin{aligned} T\tilde{M} &= S(TM)\perp(RadTM\oplus tr(TM)) \\ &= S(TM)\perp D\perp(RadTM\oplus ltr(TM)) \end{aligned} \qquad (*)$$

dir. (*) ayrışımı yardımıyla $\{F_1,F_2,...F_{m-1}\}$, $\Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bazı olmak üzere; M için $\{\xi,F_1,F_2,...F_{m-1}\}$ ve $\tilde{M}$ için de $\{\xi,F_1,F_2,...F_{m-1},u,N\}$ vektör alanları çatısı seçilebilir.

Örnek 3.1.1 . R_2^4 ün

$$x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2)$$

$$x_4=\frac{1}{2}\log(1+(x_1-x_2)^2)$$

denklemi ile verilen M manifoldunu düşünelim. O zaman

$$\left(x_1,x_2,x_3=\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2),x_4=\frac{1}{2}\log(1+(x_1-x_2)^2)\right)$$

ifadesini sırasıyla x_1 ve x_2 ye göre türevlersek,

$$U_1=\sqrt{2}\left(1+(x_1-x_2)^2\right)\partial_1+\left(1+(x_1-x_2)^2\right)\partial_3+\sqrt{2}(x_1-x_2)\partial_4$$

$$U_2=\sqrt{2}\left(1+(x_1-x_2)^2\right)\partial_2+\left(1+(x_1-x_2)^2\right)\partial_3+\sqrt{2}(x_1-x_2)\partial_4$$

$$\xi=\left(x_1,x_2,\frac{1}{\sqrt{2}}(x_1+x_2),\frac{1}{2}\log(1+(x_1-x_2)^2)\right)$$

olup, ξ ifadesinde $x_1 = x_2 = 1$ alınırsa,

$$\xi = (1,1,\sqrt{2},0)$$

bulunur.

$$u = 2(x_2 - x_1)\partial_2 + \sqrt{2}(x_2 - x_1)\partial_3 + (1 + (x_1 - x_2))\partial_4$$

olup,

$$TM = Span\{U_1, U_2\} \text{ ve } TM^{\perp} = Span\{\xi, u\}$$

bulunur. M üzerindeki radikal distribüsyon $RadTM$, ξ ile gerildiği için rankı 1 olup, M bir half-lightlike altmanifolddur. Ayrıca $S(TM)$ ve D de sırasıyla U_2 timelike ve u spacelike vektörleri ile gerilirler [13].

Örnek 3.1.2 . R_1^4 ün

$$x_1 = x_3,\ x_2 = (1 - x_4)^{\frac{1}{2}}$$

ile verilen M altmanifoldunu göz önüne alalım. $\left(x_1, (1 - x_4)^{\frac{1}{2}}, x_1, x_4\right)$ ifadesinin sırasıyla x_1 ve x_4 e göre kısmi türevleri alınırsa,

$$X_{x_1} = (1,0,1,0)$$

$$X_{x_4} = \left(0, -\frac{x_4}{x_2}, 0, 1\right)$$

olup,

$$TM = Span\{\xi = \partial x_1 + \partial x_3, v = -x_4 \partial x_2 + x_2 \partial x_4\}$$

$$TM^{\perp} = Span\{\xi = \partial x_1 + \partial x_3, u = x_2 \partial x_2 + x_4 \partial x_2\}$$

elde edilir. Böylece

$$RadTM = Span\{\xi\}$$

$$S(TM) = Span\{v\}$$

$$S(TM^{\perp}) = Span\{u\}$$

ve

$$ltr(TM) = Span\left\{ N = \frac{1}{2}(\partial x_1 + \partial x_3) \right\}$$

olup, M , R_1^4 ün bir half-lightlike altmanifoldudur [13].

Yukarıdaki (*) ayrışımına göre P, TM nin $S(TM)$ üzerine olan projeksiyonu ve τ da

$$\tau(X) = g(X, N)$$

ile verilen M üzerinde lokal diferensiyel $1-$form olmak üzere; $\forall X \in \Gamma(TM)$ için,

$$X = PX + \tau(X)\xi$$

elde edilir. $\tilde{\nabla}$, $\tilde{M}$ üzerinde metrik konneksiyon olsun. (*) ayrışımı kullanılarak ve

$$h(X,Y), \nabla_X N, \nabla_X u \in \Gamma(tr(TM)) \text{ ve } \nabla_X Y, A_N X, A_u X \in \Gamma(TM) \qquad (**)$$

olmak üzere; $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $N,u \in \Gamma(tr(TM))$ için,

$$\begin{aligned} \tilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X,Y) \\ \tilde{\nabla}_X N &= -A_N X + \nabla_X N \\ \tilde{\nabla}_X u &= -AuX + \nabla_X u \end{aligned} \qquad (3.1.1)$$

eşitlikleri elde edilir. Burada ∇, M üzerinde torsiyonsuz lineer konneksiyon ve h da $\Gamma(TM)$ üzerinden $\Gamma(tr(TM))$ ye bilineer formdur. Böylece $\{\xi, N\}$, $U \subset M$ üzerinde lokal lightlike kesit olduğundan, $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için, U üzerinde

$$D_1(X,Y) = \tilde{g}(h(X,Y), \xi)$$

$$D_2(X,Y) = \in \tilde{g}(h(X,Y), u)$$

$$\rho_1(X) = \tilde{g}(\nabla_X N, \xi)$$

$$\rho_2(X) = \in \tilde{g}(\nabla_X N, u)$$

$$\varepsilon_1(X) = \tilde{g}(\nabla_X u, \xi)$$

$$\varepsilon_2(X) = \in \tilde{g}(\nabla_X u, u)$$

olacak şekilde $\rho_1, \rho_2, \varepsilon_1, \varepsilon_2$ $1-$formları ve D_1, D_2 simetrik $F(M)$ lineer formları tanımlanabilir. Yukarıdaki eşitliklerden de

$$h(X,Y) = D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u$$

$$\nabla_X N = \rho_1(X)N + \rho_2(X)u \qquad (3.1.2)$$

$$\nabla_X u = \varepsilon_1(X)N + \varepsilon_2(X)u$$

eşitliği elde edilir.

Böylece (3.1.2) değerleri (3.1.1) eşitliğinde yerine yazılırsa,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u \qquad (3.1.3)$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \rho_1(X)N + \rho_2(X)u \qquad (3.1.4)$$

$$\tilde{\nabla}_X u = -A_u X + \varepsilon_1(X)N + \varepsilon_2(X)u \qquad (3.1.5)$$

bulunur. Burada h, D_1 ve D_2, sırasıyla $tr(TM)$ ye göre M nin *ikinci temel formu, lightlike ikinci temel formu* ve *screen ikinci temel formu*dur. A_N ve A_u ise $\Gamma(TM)$ üzerinde lineer operatörler olup A_N, M nin *şekil operatörü* olarak adlandırılır.

$$\tilde{\nabla}_X u = -A_u X + \varepsilon_1(X)N + \varepsilon_2(X)u$$

denkleminde (3.1.2) eşitliği göz önüne alınırsa;

$$\nabla_X u = \varepsilon_1(X)N + \varepsilon_2(X)u$$

elde edilir. Bu eşitliğin her iki tarafı u birim vektörüyle çarpılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(\nabla_X u, u) &= \varepsilon_1(X)\tilde{g}(N,u) + \varepsilon_2(X)\tilde{g}(u,u) \\ &= \in \varepsilon_2(X) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikten de

$$\varepsilon_2(X) = \in \tilde{g}(\nabla_X u, u) = 0 \qquad (3.1.6)$$

bulunur. Benzer yolla ξ ve N lightlike vektör alanları oldukları için,

$$h(X,Y) = D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u$$

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u$$

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \rho_1(X)N + \rho_2(X)u$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemleri ve (3.1.1) eşitliğini kullanarak,

$$\tilde{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi + D_1(X,\xi)N + D_2(X,\xi)u$$

eşitliği bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafı ξ ile çarpılırsa,

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \xi, \xi) = \tilde{g}(\nabla_X \xi, \xi) + D_1(X,\xi)\tilde{g}(N,\xi) + D_2(X,\xi)\tilde{g}(u,\xi)$$

ve buradan da

$$D_1(X,\xi) = 0 \qquad (3.1.7)$$

elde edilir. Diğer taraftan,

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X + \rho_1(X)N + \rho_2(X)u$$

eşitliğinin her iki tarafı N ile çarpılırsa,

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X N, N) = -\tilde{g}(A_N X, N) + \rho_1(X)\tilde{g}(N,N) + \rho_2(X)\tilde{g}(u,N)$$

ve buradan da

$$\tilde{g}(A_N X, N) = 0 \qquad (3.1.8)$$

elde edilir. Ayrıca

$$\tilde{\nabla}_X u = -A_u X + \varepsilon_1(X)N + \varepsilon_2(X)u$$

eşitliği göz önüne alınırsa, (3.1.6) dan

$$\tilde{\nabla}_X u = -A_u X + \varepsilon_1(X)N \qquad (3.1.9)$$

olur. Bu denklemde $A_u X$ çekilir ve denklemin her iki tarafı Y ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(A_u X, Y) &= -\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X u, Y) + \varepsilon_1(X)\tilde{g}(N,Y) \\
&= \tilde{g}(u, \tilde{\nabla}_X Y) + \varepsilon_1(X)\tau(Y) \\
&= \tilde{g}(u, \nabla_X Y + D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u) + \varepsilon_1(X)\tau(Y) \\
&= D_2(X,Y)\tilde{g}(u,u) + \varepsilon_1(X)\tau(Y)
\end{aligned}$$

buradan da

$$\tilde{g}(A_u X, Y) = \in D_2(X,Y) + \varepsilon_1(X)\tau(Y) \qquad (3.1.10)$$

bulunur. (3.1.3) ve (3.1.7) kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{\nabla}_X \xi &= \nabla_X \xi + D_1(X,\xi)N + D_2(X,\xi)u \\
&= \nabla_X \xi + D_2(X,\xi)u
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ifadenin her iki tarafı N ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \xi, N) &= \tilde{g}(\nabla_X \xi, N) + D_2(X,\xi)\tilde{g}(u,N) \\
\Rightarrow \quad -\tilde{g}(\xi, \tilde{\nabla}_X N) &= \tilde{g}(\nabla_X \xi, N)
\end{aligned}$$

olur. Burada (3.1.4) eşitliği yerine yazılırsa,

$$-\tilde{g}(\xi, -A_N X + \rho_1(X)N + \rho_2(X)u) = \tilde{g}(\nabla_X \xi, N$$

$$-\rho_1(X)\tilde{g}(\xi, N) = \tilde{g}(\nabla_X \xi, N)$$

elde edilir. $\tilde{g}(\xi, N) = 1$ olduğundan,

$$\rho_1(X) = -\tilde{g}(\nabla_X \xi, N) \qquad (3.1.11)$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\tilde{\nabla}_X u = -A_u X + \varepsilon_1(X)N + \varepsilon_2(X)u$$

denkleminin her iki tarafı N ile çarpılırsa,

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X u, N) = -\tilde{g}(A_u X, N) + \varepsilon_1(X)\tilde{g}(N,N) + \varepsilon_2(X)\tilde{g}(u,N)$$

$$-\tilde{g}(u, \tilde{\nabla}_X N) = -\tilde{g}(A_u X, N)$$

elde edilir. Burada (3.1.4) eşitliği yerine yazılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(A_u X, N) &= \tilde{g}(u, -A_N X + \rho_1(X)N + \rho_2(X)u) \\ &= -\tilde{g}(u, A_N X) + \rho_2(X)\tilde{g}(u,u)\end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$\rho_2(X) = \in \tilde{g}(A_u X, N) = \in \tau(A_u X) \tag{3.1.12}$$

olduğu görülür. Diğer taraftan, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için, (3.1.10) denkleminde $Y = \xi$ yazılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(A_u X, \xi) &= \in D_2(X,\xi) + \varepsilon_1(X)\tau(\xi) \\ &= \in D_2(X,\xi) + \varepsilon_1(X)\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\varepsilon_1(X) = -\in D_2(X,\xi) \tag{3.1.13}$$

dir. $\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u$$

eşitliği kullanılırsa,

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = D_1(X,Y)\tau(Z) + D_1(X,Z)\tau(Y) \tag{3.1.14}$$

bulunur. Gerçekten, $\tilde{\nabla}$, metrik konneksiyon olduğundan,

$$\begin{aligned}(\tilde{\nabla}_X \tilde{g})(Y,Z) = 0 \quad &\Rightarrow \quad X\tilde{g}(Y,Z) - \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, Z) - \tilde{g}(Y, \tilde{\nabla}_X Z) = 0 \\ &\Rightarrow \quad X\tilde{g}(Y,Z) - \tilde{g}(\nabla_X Y + D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u, Z) \\ &\qquad - \tilde{g}(Y, \nabla_X Z + D_1(X,Z)N + D_2(X,Z)u) = 0 \\ &\Rightarrow \quad X\tilde{g}(Y,Z) - \tilde{g}(\nabla_X Y, Z) - D_1(X,Y)\tilde{g}(N,Z) \\ &\qquad - D_2(X,Y)\tilde{g}(u,Z) - \tilde{g}(Y,\nabla_X Z) - \tilde{g}(Y,\nabla_X Z) \\ &\qquad - D_1(X,Z)\tilde{g}(N,Y) - D_2(X,Z)\tilde{g}(u,Y) = 0 \\ &\Rightarrow \quad X\tilde{g}(Y,Z) - \tilde{g}(\nabla_X Y, Z) - D_1(X,Y)\tau(Z) \\ &\qquad - \tilde{g}(Y,\nabla_X Z) - D_1(X,Z)\tau(Y) = 0 \\ &\Rightarrow \quad (\nabla_X g)(Y,Z) - D_1(X,Y)\tau(Z) - D_1(X,Z)\tau(Y) = 0 \\ &\Rightarrow \quad (\nabla_X g)(Y,Z) = D_1(X,Y)\tau(Z) - D_1(X,Z)\tau(Y)\end{aligned}$$

dir. Buradan görülür ki ∇, her zaman bir Levi-Civita konneksiyonu değildir.

(3.1.3) ifadesinden D_1 ve D_2 nin $\Gamma(TM)$ üzerinde simetrik bilineer formlar olduğunu ve screen distribüsyona bağlı olmadıkları görülür. Gerçekten, $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, \xi) = D_1(X,Y)\ ,\ \ \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, u) = \in D_2(X,Y)$$

dir. D_1 ve ρ_1, $\xi \in \Gamma(RadTM)$ kesitine bağlıydı. Eğer $\xi^* = \alpha\xi$ alınırsa, $N^* = \frac{1}{\alpha}N$ bulunur. Böylece $\forall X \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned}
\rho_1(X) &= -\tau(\nabla_X \xi) \\
&= -\tilde{g}(\nabla_X \xi, N) \\
&= \tilde{g}(\xi, \nabla_X N) \\
&= \tilde{g}\left(\frac{1}{\alpha}\xi^*, \nabla_X \alpha N^*\right) \\
&= \frac{1}{\alpha}\tilde{g}(\xi^*, X(\alpha)N^* + \alpha\nabla_X N^*) \\
&= \frac{1}{\alpha}X(\alpha)\tilde{g}(\xi^*, N^*) + \tilde{g}(\xi^*, \nabla_X N^*) \\
&= X(\log\alpha) + \tilde{g}(\xi^*, \nabla_X N^*) \\
&= X(\log\alpha) + \rho_1^*(X)
\end{aligned}$$

ve buradan da

$$\begin{aligned}
& D_1(X,\xi) = D_1\left(X, \frac{1}{\alpha}\xi^*\right) = \frac{1}{\alpha}D_1(X,\xi^*) \\
\Rightarrow\ & D_1(X,\xi^*) = \alpha D_1(X,\xi) \\
\Rightarrow\ & D_1^* = \alpha D_1
\end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$d\rho_1(X,Y) = \frac{1}{2}\{X(\rho_1(Y)) - Y(\rho_1(X)) - \rho_1([X,Y])\}$$

diferensiyel $2-$formu kullanılarak, aşağıdaki teorem ifade edilir.

Teorem 3.1.1 . M, 2 ekboyutlu $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Semi-Riemann manifoldunun half-lightlike bir altmanifoldu olsun. Kabul edelim ki, ρ_1 ve ρ_1^*, U üzerinde sırasıyla ξ ve ξ^* a göre $1-$formlar olsunlar. O halde U üzerinde $d\rho_1^* = d\rho_1$ dir [13].

Şimdi

$$T\widetilde{M} = S(TM) \perp D \perp (RadTM \oplus ltrTM)$$

ayrışımını göz önüne alalım. Bu durumda $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için $\nabla^*_X PY$, $A^*_\xi \in \Gamma(S(TM))$ ve $h^*(X,PY), \nabla^\perp_X \xi \in \Gamma(RadTM)$ olmak üzere;

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + h^*(X,PY) \tag{3.1.15}$$

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X + \nabla^\perp_X \xi \tag{3.1.16}$$

denklemleri yazılır. Burada ∇^* ve $\nabla^\perp$, sırasıyla screen ve radikal distribüsyonlarının lineer konneksiyonları, A^*_ξ, $\Gamma(TM)$ üzerinde lineer operatör, h^* da $\Gamma(TM)\times\Gamma(S(TM))$ üzerinde bilineer formdur. Ayrıca ∇^*, $S(TM)$ üzerinde metrik konneksiyondur. Bu taktirde $U \subset M$ üzerinde $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$E_1(X,PY) = \tilde{g}(h^*(X,PY),N)$$

ve

$$u_1(X) = \tilde{g}(\nabla^\perp_X \xi, N)$$

eşitlikleri tanımlanırsa, $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$E_1(X,PY)\xi = h^*(X,PY)$$

ve

$$u_1(X)\xi = \nabla^\perp_X \xi$$

elde edilir. Böylece (3.1.15) ve (3.1.16) denklemleri,

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + E_1(X,PY)\xi \tag{3.1.17}$$

ve

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X + u_1(X)\xi \tag{3.1.18}$$

eşitliklerine dönüşür. Burada h^* ve E_1 e $RadTM$ ye göre $S(TM)$ nin sırasıyla *ikinci temel formu* ve *lokal ikinci temel formu,* A^*_ξ a da *screen distribüsyonun şekil operatörü* denir. Bu durumda $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$D_1(X,PY) = \tilde{g}(A^*_\xi X, PY) \tag{3.1.19}$$

$$E_1(X,PY) = \tilde{g}(A_N X, PY) \tag{3.1.20}$$

$$u_1(X) = -\rho_1(X) \tag{3.1.21}$$

bulunur. Gerçekten,

$$\widetilde{\nabla}_X PY = \nabla_X PY + D_1(X,PY)N + D_2(X,PY)u$$

eşitliğinden

$$D_1(X,PY)N = \widetilde{\nabla}_X PY - \nabla_X PY - D_2(X,PY)u$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafı ξ ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(D_1(X,PY)N,\xi) &= \tilde{g}(\widetilde{\nabla}_X PY - \nabla_X PY - D_2(X,PY)u,\xi)\\ &= \tilde{g}(\widetilde{\nabla}_X PY,\xi) - \tilde{g}(\nabla_X PY,\xi) - D_2(X,PY)\tilde{g}(u,\xi)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}D_1(X,PY) &= \tilde{g}(\widetilde{\nabla}_X PY,\xi)\\ &= -\tilde{g}(PY,\widetilde{\nabla}_X \xi)\\ &= -\tilde{g}(PY,\nabla_X \xi + D_1(X,\xi)N + D_2(X,\xi)u\\ &= -\tilde{g}(PY,\nabla_X \xi) - D_2(X,\xi)\tilde{g}(PY,u)\\ &= -\tilde{g}(PY,-A^*_\xi X + u_1(X)\xi\\ &= \tilde{g}(PY,A^*_\xi X) - u_1(X)\tilde{g}(PY,\xi)\\ &= \tilde{g}(PY,A^*_\xi X) = \tilde{g}(A^*_\xi X,PY)\end{aligned}$$

bulunur. Yine benzer şekilde

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + E_1(X,PY)\xi$$

eşitliği kullanılır ve bu eşitliğin her iki yanı N ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(E_1(X,PY)\xi,N) &= \tilde{g}(\nabla_X PY - \nabla^*_X PY,N)\\ &= \tilde{g}(\nabla_X PY,N) - \tilde{g}(\nabla^*_X PY,N)\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan da

$$\begin{aligned}E_1(X,PY) &= \tilde{g}(\nabla_X PY,N)\\ &= \tilde{g}(\widetilde{\nabla}_X PY - D_1(X,PY)N - D_2(X,PY)u,N)\\ &= \tilde{g}(\widetilde{\nabla}_X PY,N)\\ &= -\tilde{g}(PY,\widetilde{\nabla}_X N)\\ &= -\tilde{g}(PY,-A_N X + \rho_1(X)N + \rho_2(X)u)\\ &= \tilde{g}(PY,A_N X) - \rho_1(X)\tilde{g}(PY,N) - \rho_2(X)\tilde{g}(PY,u)\\ &= \tilde{g}(PY,A_N X) = \tilde{g}(A_N X,PY)\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan,

$$u_1(X)\xi = \nabla^{\perp}_X \xi$$

eşitliğinin her iki tarafı N ile çarpılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(u_1(X)\xi, N) &= \tilde{g}(\nabla^{\perp}_X \xi, N) \\ &= \tilde{g}(\nabla_X \xi + A^*_\xi X, N)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}u_1(X) &= \tilde{g}(\nabla_X \xi, N) + \tilde{g}(A^*_\xi X, N) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \xi - D_1(X,\xi)N - D_2(X,\xi)u, N) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X \xi, N) \\ &= -\tilde{g}(\xi, \tilde{\nabla}_X N) \\ &= -\tilde{g}(\xi, -A_N X + \rho_1(X)N + \rho_2(X)u) \\ &= -\rho_1(X)\end{aligned}$$

bulunur. Böylece (3.1.18) eşitliği

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X - \rho_1(X)\xi$$

şeklini alır.

(3.1.19) denkleminde $X = \xi$ alınırsa, (3.1.7) den

$$D_1(\xi, PY) = \tilde{g}(A^*_\xi \xi, PY)$$

olur. Bu eşitlikten de

$$A^*_\xi \xi = 0 \qquad (3.1.22)$$

bulunur. Buradan ξ nin A^*_ξ ın 0 özdeğerine karşılık gelen özvektör olduğu açıkça görülür.

(3.1.17) ve ∇ torsiyonsuz lineer konneksiyonu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}[X,Y] &= \tilde{\nabla}_X Y - \tilde{\nabla}_Y X \\ &= \nabla_X Y + h(X,Y) - \left(\nabla_Y X + h(Y,X)\right) \\ &= \nabla_X Y - \nabla_Y X\end{aligned}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned}X &= PX + \tau(X)\xi \\ Y &= PY + \tau(Y)\xi\end{aligned}$$

projeksiyonu kullanılırsa,

$$
\begin{aligned}
[X,Y] &= \widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X \\
&= \nabla_X Y + h(X,Y) - (\nabla_Y X + h(Y,X)) \\
&= \nabla_X (PY + \tau(Y)\xi) - \nabla_Y (PX + \tau(X)\xi) \\
&= \nabla_X PY + X(\tau(Y))\xi + \tau(Y)\nabla_X \xi - (\nabla_Y PX + Y(\tau(X))\xi + \tau(X)\nabla_Y \xi) \\
&= \nabla^*_X PY + E_1(X,PY)\xi + X(\tau(Y))\xi + \tau(Y)(-A^*_\xi X - \rho_1(X)\xi) \\
&\quad - \nabla^*_Y PX - E_1(Y,PX)\xi - Y(\tau(X))\xi - \tau(X)(-A^*_\xi Y - \rho_1(Y)\xi) \\
&= \{\nabla^*_X PY - \nabla^*_Y PX - \tau(Y)A^*_\xi X + \tau(X)A^*_\xi Y\} + \{E_1(X,PY) - E_1(Y,PX) \\
&\quad + X(\tau(Y)) - Y(\tau(X)) - \tau(Y)\rho_1(X) + \tau(X)\rho_1(Y)\}\xi
\end{aligned}
$$

denklemi elde edilir.

Bu denklem sırasıyla N ve PZ ile skalar çarpılır ve (3.1.19) eşitliği yerine yazılırsa,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g}([X,Y],N) &= \widetilde{g}(\nabla^*_X PY, N) - \widetilde{g}(\nabla^*_Y PX, N) - \tau(Y)\widetilde{g}(A^*_\xi X, N) \\
&\quad + \tau(X)\widetilde{g}(A^*_\xi Y, N) + \widetilde{g}(\{E_1(X,PY) - E_1(Y,PX) + X(\tau(Y)) \\
&\quad - Y(\tau(X)) - \tau(Y)\rho_1(X) + \tau(X)\rho_1(Y)\}\xi, N) \\
&= E_1(X,PY) - E_1(Y,PX) + X(\tau(Y)) - Y(\tau(X)) - \tau(Y)\rho_1(X) + \tau(X)\rho_1(Y) \\
\Rightarrow \tau([X,Y]) &= E_1(X,PY) - E_1(Y,PX) + X(\tau(Y)) - Y(\tau(X)) - \tau(Y)\rho_1(X) + \tau(X)\rho_1(Y)
\end{aligned}
$$

dir. Buradan da

$$
E_1(X,PY) - E_1(Y,PX) + \tau(Y)\rho_1(X) - \tau(X)\rho_1(Y) = X\tau(Y) - Y\tau(X) - \tau([X,Y])
$$

olup, $2-$form tanımından

$$
E_1(X,PY) - E_1(Y,PX) + \tau(Y)\rho_1(X) - \tau(X)\rho_1(Y) = 2d\tau(X,Y) \tag{3.1.23}
$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g}([X,Y],PZ) &= \widetilde{g}(\nabla^*_X PY, PZ) - \widetilde{g}(\nabla^*_Y PX, PZ) \\
&\quad + \tau(X)\widetilde{g}(A^*_\xi Y, PZ) - \tau(Y)\widetilde{g}(A^*_\xi X, PZ) \\
&\quad + \widetilde{g}(\{E_1(X,PY) - E_1(Y,PX) + X(\tau(Y)) \\
&\quad - Y(\tau(X)) - \tau(Y)\rho_1(X) + \tau(X)\rho_1(Y)\}\xi, PZ) \\
&= \widetilde{g}(\nabla^*_X PY, PZ) - \widetilde{g}(\nabla^*_Y PX, PZ) \\
&\quad - \tau(Y)\widetilde{g}(A^*_\xi X, PZ) + \tau(X)\widetilde{g}(A^*_\xi Y, PZ) \\
&= \tau(X)D_1(Y,PZ) - \tau(Y)D_1(X,PZ)
\end{aligned}
$$

olur. Burada (3.1.19) eşitliği kullanılırsa,

$$
\widetilde{g}([X,Y],PZ) - \widetilde{g}(\nabla^*_X PY, PZ) + \widetilde{g}(\nabla^*_Y PX, PZ) = \tau(X)D_1(Y,PZ) - \tau(Y)D_1(X,PZ)
$$

bulunur. Ayrıca $\tau(X) = \widetilde{g}(X,N)$ eşitliği ve (3.1.23) denkleminden,

$$
\begin{aligned}
\tau([PX,PY]) &= \tilde{g}([PX,PY],N) \\
&= \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{PX}PY-\tilde{\nabla}_{PY}PX,N\right) \\
&= \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{PX}PY,N\right)-\tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{PY}PX,N\right) \\
&= \tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{PX}PY+D_1(PX,PY)N+D_2(PX,PY)u,N\right) \\
&\quad -\tilde{g}\left(\tilde{\nabla}_{PY}PX+D_1(PY,PX)N+D_2(PY,PX)u,N\right) \\
&= \tilde{g}(\nabla_{PX}PY,N)-\tilde{g}(\nabla_{PY}PX,N) \\
&= \tilde{g}\left(\nabla^*_{PX}PY+E_1(PX,PY)\xi,N\right)-\tilde{g}\left(\nabla^*_{PY}PX+E_1(PY,PX)\xi,N\right)
\end{aligned}
$$

ve böylece

$$\tau([PX,PY])=E_1(PX,PY)-E_1(PY,PX) \tag{3.1.24}$$

elde edilir.

(3.1.20) ve (3.1.24) eşitliklerinden aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.1.2 . Eğer M, $\tilde{M}$ manifoldunun half-lightlike bir altmanifoldu ise aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) $S(TM)$ screen distribüsyonu integrallenebilirdir.

(2) $S(TM)$ nin ikinci temel formu, $\Gamma(S(TM))$ üzerinde simetriktir.

(3) $\tilde{M}$ nin M immersiyonunun A_N şekil operatörü, $\tilde{g}$ ye göre $\Gamma(S(TM))$ üzerinde simetriktir [15].

İspat . (1) $\Leftrightarrow$ (2) Kabul edelim ki $S(TM)$ screen distribüsyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda $\forall PY,PX\in S(TM)$ için $\tau([PX,PY])=0$ dır. O halde (3.1.24) denkleminden, $E_1(PX,PY)=E_1(PY,PX)$ olur. Tersine $E_1(PX,PY)=E_1(PY,PX)$ ise, $\tau([PX,PY])=0$ olur. Bu ise $S(TM)$' nin integrallenebilir olduğunu gösterir.

(2) $\Leftrightarrow$ (3) $\tau([PX,PY])=E_1(PX,PY)-E_1(PY,PX)$ denkleminde (3.1.20) ifadesi yerine yazılırsa, $\tau([PX,PY])=\tilde{g}(A_NPX,PY)-\tilde{g}(A_NPY,PX)$ olur. Eğer E_1, $\Gamma(S(TM))$ üzerinde simetrikse $\tilde{g}(A_NPX,PY)=\tilde{g}(A_NPY,PX)$ olur. Yani A_N, $\tilde{g}$ göre $\Gamma(S(TM))$ üzerinde simetriktir. Karşıt olarak A_N, $\tilde{g}$ ye göre $\Gamma(S(TM))$ üzerinde simetrik ise, (3.1.20) ve (3.1.24) eşitliklerinden $E_1(PX,PY)=E_1(PY,PX)$ olur. Yani E_1, $\Gamma(S(TM))$ üzerinde simetriktir.

$(3) \Leftrightarrow (1)$ kabul edelim ki A_N, $\Gamma(S(TM))$ üzerinde simetrik olsun. O halde $\tau([PX, PY]) = \tilde{g}(A_N PX, PY) - \tilde{g}(A_N PY, PX) = 0$ olup, $S(TM)$ integrallenebilirdir. Tersinin doğruluğu da açıktır.

Öte yandan, (3.1.7), (3.1.14), (3.1.18) ve (3.1.19) denklemleri kullanılırsa, aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 3.1.3 . M , $\tilde{M}$ Semi-Riemann manifoldunun half-lightlike bir altmanifoldu olsun. O halde aşağıdaki ifadeler denktir.

1) M üzerindeki ∇ bir metrik konneksiyondur.

2) M üzerinde $D_1 = 0$ dır.

3) M üzerinde $A^*_\xi = 0$ dır.

4) ξ bir killing distribüsyondur.

5) $TM^\perp$, ∇ ' ya göre paralel distribüsyondur [15].

İspat. $(1) \Rightarrow (2)$ yi gösterelim:

Kabul edelim ki ∇ bir metrik konneksiyon olsun. Bu durumda (3.1.14) denkleminde $Y = \xi$ yazılırsa,

$$(\nabla_X g)(\xi, Z) = D_1(X, \xi)\tau(Z) + D_1(X, Z)\tau(\xi)$$

elde edilir. Burada $\tau(\xi) = 1$ ve (3.1.7) ifadeleri göz önüne alınırsa,

$\forall X, Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$D_1(X, Z) = 0 \tag{3.1.25}$$

bulunur.

$(2) \Rightarrow (3)$: $Z = PY$ için (3.1.25) ifadesi, (3.1.19) denkleminde kullanılırsa, $\forall X \in \Gamma(TM)$ için, $A^*_\xi X = 0$ olur. Yani M üzerinde $A^*_\xi = 0$ dır.

$(3) \Rightarrow (4)$: $A^*_\xi X = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için,

$$
\begin{aligned}
(L_\xi \widetilde{g})(X,Y) &= \xi\widetilde{g}(X,Y) - \widetilde{g}(L_\xi X,Y) - \widetilde{g}(X,L_\xi Y) \\
&= \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_\xi X,Y) + \widetilde{g}(X,\widetilde{\nabla}_\xi Y) - \widetilde{g}([\xi,X],Y) - \widetilde{g}(X,[\xi,Y]) \\
&= \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_\xi X,Y) + \widetilde{g}(X,\widetilde{\nabla}_\xi Y) - \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_\xi X,Y) \\
&\quad + \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X \xi,Y) - \widetilde{g}(X,\widetilde{\nabla}_\xi Y) + \widetilde{g}(X,\widetilde{\nabla}_Y \xi) \\
&= \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X \xi,Y) + \widetilde{g}(X,\widetilde{\nabla}_Y \xi) \\
&= \widetilde{g}(\nabla_X \xi + D_1(X,\xi)N + D_2(X,\xi)u,Y) \\
&\quad + \widetilde{g}(X,\nabla_Y \xi + D_1(Y,\xi)N + D_2(Y,\xi)u) \\
&= \widetilde{g}(\nabla_X \xi,Y) + D_2(X,\xi)\widetilde{g}(u,Y) + \widetilde{g}(X,\nabla_Y \xi) + D_2(Y,\xi)\widetilde{g}(X,u) \\
&= \widetilde{g}(\nabla_X \xi,Y) + \widetilde{g}(X,\nabla_Y \xi) \\
&= \widetilde{g}(-A^*_\xi X + u_1(X),\xi) + \widetilde{g}(X,-A^*_\xi Y + u_1(Y)\xi) \\
&= -\widetilde{g}(A^*_\xi X,Y)u_1(X)\widetilde{g}(\xi,Y) - \widetilde{g}(X,A^*_\xi Y)u_1(Y)\widetilde{g}(X,\xi) \\
&= -\widetilde{g}(A^*_\xi X,Y) - \widetilde{g}(X,A^*_\xi Y) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

dır. Bu da ξ nin bir killing vektör alanı olduğunu gösterir.

$(4) \Rightarrow (5)$: Kabul edelim ki ξ bir killing vektör alanı olsun. Eğer $RadTM$ killing distribüsyon ise $\forall \xi \in RadTM$ için $L_\xi = 0$ ' dır. Böylece M üzerinde g ' ye göre bir ∇ Levi-Civita konneksiyonu vardır. Buradan $(4) \Rightarrow (5)$ ve $(5) \Rightarrow (1)$ sağlanır ve ispat tamamlanır.

Şimdi (3.1.3), (3.1.4), (3.1.5), (3.1.7) ve (3.1.13) denklemlerini kullanarak, $\widetilde{\nabla}$ ve ∇ ya göre sırasıyla $\widetilde{R}$ ve R eğrilik tensörlerini tanımlayalım. $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)Z &= \tilde{\nabla}_X\tilde{\nabla}_Y Z-\tilde{\nabla}_Y\tilde{\nabla}_X Z-\tilde{\nabla}_{[X,Y]}Z\\
&= \tilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z+D_1(Y,Z)N+D_2(Y,Z)u)-\tilde{\nabla}_Y(\nabla_X Z+D_1(X,Z)N+D_2(X,Z)u)\\
&\quad -\nabla_{[X,Y]}Z-D_1([X,Y],Z)N-D_2([X,Y],Z)u\\
&= \tilde{\nabla}_X(\nabla_Y Z)+X(D_1(Y,Z))N+D_1(Y,Z)\tilde{\nabla}_X N+X(D_2(Y,Z))u+D_2(Y,Z)\tilde{\nabla}_X u\\
&\quad -\tilde{\nabla}_Y(\nabla_X Z)-Y(D_1(X,Z))N-D_1(X,Z)\tilde{\nabla}_Y N-Y(D_2(X,Z))u-D_2(X,Z)\tilde{\nabla}_Y u\\
&\quad -\nabla_{[X,Y]}Z-D_1([X,Y],Z)N-D_2([X,Y],Z)u\\
&= \nabla_X\nabla_Y Z+D_1(X,\nabla_Y Z)N+D_2(X,\nabla_Y Z)u+D_1(\nabla_X Y,Z)N+D_1(Y,\nabla_X Z)N\\
&\quad +D_1(Y,Z)(-A_N X+\rho_1(X)N+\rho_2(X)u)+D_2(\nabla_X Y,Z)u+D_2(Y,\nabla_X Z)u\\
&\quad +D_2(Y,Z)(-A_u X+\varepsilon_1(X)N+\varepsilon_2(X)u)+(\nabla_X D_2)(Y,Z)u+(\nabla_X D_1)(Y,Z)N\\
&\quad -\nabla_Y\nabla_X Z-D_1(Y,\nabla_X Z)N-D_2(Y,\nabla_X Z)u-D_1(\nabla_Y X,Z)N-D_1(X,\nabla_Y Z)N\\
&\quad -D_1(X,Z)(-A_N Y+\rho_1(Y)N+\rho_2(Y)u)-D_2(\nabla_Y X,Z)u-D_2(X,\nabla_Y Z)u\\
&\quad -D_2(X,Z)(-A_u Y+\varepsilon_1(Y)N+\varepsilon_2(Y)u)-(\nabla_Y D_2)(X,Z)u-(\nabla_Y D_1)(X,Z)N\\
&\quad -\nabla_{[X,Y]}Z-D_1(\nabla_X Y,Z)N+D_1(\nabla_Y X,Z)N-D_2(\nabla_X Y,Z)u+D_2(\nabla_Y X,Z)u\\
&= R(X,Y)Z-D_1(Y,Z)A_N X+D_1(X,Z)A_N Y-D_2(Y,Z)A_u X+D_2(X,Z)A_u Y\\
&\quad \{+(\nabla_X D_1)(Y,Z)-(\nabla_Y D_1)(X,Z)+D_1(Y,Z)\rho_1(X)-D_1(X,Z)\rho_1(Y)\\
&\quad +D_2(Y,Z)\varepsilon_1(X)-D_2(X,Z)\varepsilon_1(Y)\}N\\
&\quad +\{(\nabla_X D_2)(Y,Z)-(\nabla_Y D_2)(X,Z)+D_1(Y,Z)\rho_2(X)-D_1(X,Z)\rho_2(Y)\}u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)N &= -\nabla_X(A_N Y)+\nabla_Y(A_N X)+A_N[X,Y]+\rho_1(X)A_N Y-\rho_1(Y)A_N X\\
&\quad +\rho_2(X)A_u Y-\rho_2(Y)A_u X+\{D_1(Y,A_N X)-D_1(X,A_N Y)+2d\rho_1(X,Y)\\
&\quad +\varepsilon_1(X)\rho_2(Y)-\varepsilon_1(Y)\rho_2(X)\}N+\{D_2(Y,A_N X)-D_2(X,A_N Y)+2d\rho_2(X,Y)\\
&\quad +\rho_1(Y)\rho_2(X)-\rho_1(X)\rho_2(Y)\}u
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)u &= -\nabla_X(A_u Y)+\nabla_Y(A_u X)+A_u[X,Y]+\varepsilon_1(X)A_N Y-\varepsilon_1(Y)A_N X\\
&\quad +\{D_1(Y,A_u X)-D_1(X,A_u Y)+2d\varepsilon_1(X,Y)\\
&\quad +\rho_1(X)\varepsilon_1(Y)-\rho_1(Y)\varepsilon_1(X)\}N+\{D_2(Y,A_u X)-D_2(X,A_u Y)\\
&\quad +\varepsilon_1(Y)\rho_2(X)-\varepsilon_1(X)\rho_2(Y)\}u
\end{aligned}
$$

şeklindedir. Bu denklemler yardımıyla R^*, ∇^* ın eğrilik tensörü olmak üzere;

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)PZ &= R^{*}(X,Y)PZ + E_1(X,PZ)A_{\xi}Y \\
&\quad - E_1(Y,PZ)A_{\xi}X + \{X(E_1(Y,PZ)) \\
&\quad - Y(E_1(X,PZ)) - E_1([X,Y],PZ) \\
&\quad + E_1(X,\nabla^{*}_{Y}PZ) - E_1(Y,\nabla^{*}_{X}PZ) \\
&\quad - \rho_1(X)E_1(Y,PZ) + \rho_1(Y)E_1(X,PZ)\}\xi
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)\xi &= -\nabla^{*}_{X}(A_{\xi}Y) + \nabla^{*}_{Y}(A_{\xi}X) + A_{\xi}[X,Y] \\
&\quad - \rho_1(X)A_{\xi}Y + \rho_1(Y)A_{\xi}X \\
&\quad \{+ E_1(Y,A_{\xi}X) - E_1(X,A_{\xi}Y) - 2d\rho_1(X,Y)\}\xi
\end{aligned}
$$

elde edilir.

3.2 . Total Umbilik Half-lightlike Altmanifoldlar

(M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ Semi-Riemann manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. M üzerinde M nin *afin normal eğrilik vektör alanı* olarak adlandırılan öyle bir $Z \in \Gamma(tr(TM))$ vektör alanı vardır ki $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$h(X,Y) = Z\widetilde{g}(X,Y)$$

dir. Bu eşitliği sağlayan (M,g) half-lightlike altmanifolduna *total umbiliktir* denir. Özel olarak, (M,g) half-lightlike altmanifoldu üzerinde $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için $h(X,Y)=0$ ise (M,g) *total geodezik* olarak adlandırılır. Direkt hesaplamayla M nin total geodezik olması için gerek ve yeter şartın M üzerinde sırasıyla lightlike ve screen ikinci temel tensörler olan D_1 ve D_2 nin sıfır olması gerektiği kolayca görülür. Böylece $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$D_1(X,Y) = D_2(X,Y) = 0$$

olur. Bunun yanında (3.1.10), (3.1.12), (3.1.13) ve (3.1.19) ifadelerinden,

$$\varepsilon_1 = A^{*}_{\xi} = A_u = \rho_2 = 0$$

bulunur. $h(X,Y) = D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u$ eşitliğinden , M total umbiliktir denir gerek ve yeter şart her U koordinat komşuluğunda $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$
\begin{aligned}
D_1(X,Y) &= H_1\widetilde{g}(X,Y) \\
D_2(X,Y) &= H_2\widetilde{g}(X,Y)
\end{aligned}
\tag{3.2.1}
$$

olacak şekilde, sırasıyla $ltr(TM)$ ve D üzerinde H_1 ve H_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları vardır. Bu tanım M nin screen distribüsyonuna bağlı değildir. Bunların yanında (3.1.7), (3.1.8), (3.1.10), (3.1.19) ifadeleri ve $S(TM)$ nin non-dejenere olmasından aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz.

Teorem 3.2.1 . (M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ Semi-Riemann manifoldunun half-lightlike bir altmanifoldu olsun. M, total umbiliktir gerek ve yeter şart her U koordinat komşuluğu üzerinde H_1 ve H_2 diferensiyellenebilir fonksiyonları vardır öyle ki $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$A^*_\xi X = H_1 PX \tag{3.2.2}$$

ve

$$P(A_u X) = \in H_2 PX \tag{3.2.3}$$

olup $\Gamma(TM)$ üzerinde $\varepsilon_1 = 0$ dır [13].

İspat .

$$D_1(PX,PY) = g(A^*_\xi X, PY)$$

eşitliğinde (3.2.1) kullanılırsa,

$$H_1\widetilde{g}(PX,PY) = g(A^*_\xi X, PY)$$

olur. Buradan da

$$\widetilde{g}(H_1PX,PY) = g(A^*_\xi X, PY)$$

$$H_1PX = A^*_\xi X$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$\widetilde{g}(A_u X, PY) = \in D_2(X,PY) + \varepsilon_1(X)\tau(PY)$$

eşitliğinde (3.2.1) kullanılır ve $X = PX + \tau(X)\xi$ izomorfizmi göz önüne alınırsa,

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(A_u X, PY) &= \in H_2\widetilde{g}(X,PY) \\ &= \in H_2\widetilde{g}(PX + \tau(X)\xi, PY) \\ &= \in H_2\widetilde{g}(PX,PY) \end{aligned}$$

olur. Buradan da

$$P(A_u X) = \in H_2 PX$$

bulunur.

Teorem 3.2.2 . M nin total umbilik olması durumunda $\forall X \in \Gamma(TM)$ için;

$$D_2(X,\xi)=0 \ , \ \rho_2(\xi)=0 \ , \ A_u\xi=0 \tag{3.2.4}$$

ve

$$\in A_u X = H_2 PX + \rho_2(X)\xi \tag{3.2.5}$$

dir [13].

İspat . Kabul edelim ki M total umbilik olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} h(X,\xi) &= Z\tilde{g}(X,\xi) \\ &= D_1(X,\xi)N + D_2(X,\xi)u \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$D_2(X,\xi)=0$$

olur. Benzer şekilde (3.1.10) ifadesinde $X=\xi$ alınır ve yukarıdaki sonuç kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(A_u\xi,Y) &= \in D_2(\xi,Y)+\varepsilon_1(\xi)\tau(\xi) \\ &= \varepsilon_1(\xi) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte (3.1.13) ifadesi kullanılırsa,

$$\tilde{g}(A_u\xi,Y) = -\in D_2(\xi,\xi)$$

bulunur. Buradan

$$A_u\xi=0$$

olur. Böylece (3.1.12) den

$$\rho_2(\xi)=0$$

bulunur. Bunların yanında (3.1.10) denkleminde $Y=PY$ alınır ve (3.2.1) ifadesi kullanılırsa,

$$\begin{aligned} \tilde{g}(A_u X,PY) &= \in D_2(X,PY)+\varepsilon_1(X)\tau(PY) \\ &= \in H_2\tilde{g}(X,PY) \\ &= \in H_2\tilde{g}(PX+\tau(X)\xi,PY) \\ &= \in H_2\tilde{g}(PX,PY) + \in H_2\tau(X)\tilde{g}(\xi,PY) \end{aligned}$$

olur. Bu da

$$\in A_u X = H_2 PX$$

eşitliğini verir. Ayrıca

$$\begin{aligned}\tilde{g}(A_u X, PY) &= H_2 \tilde{g}(X, PY) \\ &= \in H_2 \tilde{g}(PX + \tau(X)\xi, PY) \\ &= \in H_2 PX + \in H_2 \tau(X)\xi \\ \tilde{g}(A_u X, PY) &= \in H_2 PX + \rho_2(X)\xi\end{aligned}$$

eşitliği de yazılabilir.

Tanım 3.2.2 . $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için M üzerinde $h^*(X, PY) = \omega g(X, PY)$ olacak şekilde bir $\omega \in \Gamma(RadTM)$ vektör alanı varsa, M de $S(TM)$ *total umbiliktir* denir. $S(TM)$, total umbiliktir gerek ve yeter şart $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için her $U \subset M$ koordinat komşuluğunda bir K fonksiyonu vardır öyle ki

$$E_1(X, PY) = Kg(X, PY) \tag{3.2.6}$$

dir. Bu da $S(TM)$ üzerinde E_1 in simetrik olduğunu ifade eder. Bu taktirde Teorem 3.1.2 den $S(TM)$ integrallenebilirdir. Özel olarak eğer $K = 0$ ise $S(TM)$ ye *total geodezik*, $K \neq 0$ ise de $S(TM)$ ye *proper total umbiliktir* denir [13].

(3.1.8), (3.1.20) ve (3.2.6) ifadelerinden $\forall X \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned}A_N X &= KPX \\ E_1(\xi, PX) &= 0\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

elde edilir. (3.1.23) denklemi ve $S(TM)$ nin total umbilik olduğunu göz önüne alırsak,

$$2d\tau(X, Y) = \rho_1(X)\tau(Y) - \rho_1(Y)\tau(X)$$

bulunur. Böylece aşağıdaki teorem ifade edilebilir.

Teorem 3.2.3 . (M, g), $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Semi-Riemann manifoldunun half-lightlike bir altmanifoldu ve $S(TM)$ total umbilik olsun. Bu durumda

$$d\tau = 0 \Leftrightarrow \rho_1 = 0$$

ifadesi sağlanır [13].

Teorem 3.2.4 . (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ Semi-Riemann manifoldunun half-lightlike bir altmanifoldu olsun. M ye indirgenen ∇ konneksiyonunun Ricci tensörü simetriktir gerek ve yeter şart ρ_1 kapalı yani $d\rho_1 = 0$ dır [13].

3.3 . Screen Konformal Half-lightlike Altmanifoldlar

Non-dejenere bir alt manifoldun ikinci temel formuyla manifoldun şekil operatörü arasındaki metrik tensöre bağlı ilişki (3.1.19) ve (3.1.20) ile verilen

$$\begin{aligned} E_1(X,PY) &= g(A_N X,PY) \\ D_1(X,PY) &= g(A^*_\xi X,PY) \end{aligned} \tag{*}$$

bağıntılarından bilinmektedir [16]. Şekil operatörü, alt manifoldların geometrisini çalışırken bize bir takım bilgiler sağlar. Bu bölümde aşağıdaki tanımlamayla verilen screen konformal half-lightlike altmanifoldlar ele alındı.

Tanım 3.3.1 . M, bir Semi-Riemann manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. M nin üzerindeki her U koordinat komşuluğunda tanımlı sıfırdan farklı, diferensiyellenebilir bir φ fonksiyonu vardır öyle ki her null $\xi \in \Gamma(TM^\perp)$ vektör alanı için M ve $S(TM)$ nin şekil operatörleri arasında $\forall X \in \Gamma(TM|_u)$ için

$$A_N X = \varphi A^*_\xi X \tag{3.3.1}$$

ilişkisi varsa, M *lokal screen konformal* olarak isimlendirilir [17].

Teorem 3.3.1 . (M,g), $(\tilde{M},\tilde{g})$ Semi-Riemann manifoldunun half-lightlike bir altmanifoldu olsun. O zaman M screen konformaldir gerek ve yeter şart $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$E_1(X,PY) = \varphi D_1(X,PY) \tag{3.3.2}$$

dir [13].

İspat . Kabul edelim ki M bir screen konformal half-lightlike altmanifold olsun. O zaman $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned} E_1(X,PY) &= g(A_N X, PY) \\ &= g(\varphi A^*_\xi X, PY) \\ &= \varphi g(A^*_\xi X, PY) \\ &= \varphi D_1(X,PY) \end{aligned}$$

olur. Tersine eğer $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$E_1(X,PY) = \varphi D_1(X,PY)$$

ise o zaman yukarıdaki (*) ifadesinden;

$$\begin{aligned} & E_1(X,PY) &= \varphi D_1(X,PY) \\ \Rightarrow\ & g(A_N X, PY) &= \varphi g(A^*_\xi X, PY) \end{aligned}$$

sağlanır. Böylece $A_N X = \varphi A^*_\xi X$ eşitliği bulunur.

M screen konformal olsun. O zaman $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned} \nabla_X PY &= \nabla^*_X PY + h^*(X,PY) \\ &= \nabla^*_X PY + E_1(X,PY)\xi \\ &= \nabla^*_X PY + \varphi D_1(X,PY)\xi \end{aligned} \tag{3.3.3}$$

olur.

Teorem 3.3.2. $(M,g,S(TM))$, $(\widetilde{M}^{m+2},\widetilde{g})$ Semi-Riemann manifoldunun screen konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. O zaman M nin her screen distribüsyonu integrallenebilirdir [13].

İspat. $\forall X,Y \in S(TM)$ için

$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u$, $[X,Y] \in S(TM)$ olduğunu göstermeye çalışalım. Bunun için de $\tau([X,Y]) = \widetilde{g}([X,Y],N) = 0$ olduğunu göstermeliyiz.

$$\begin{aligned} \widetilde{g}([X,Y],N) &= \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, N) - \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_Y X, N) \\ &= \widetilde{g}(\nabla_X Y + D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u, N) - \widetilde{g}(\nabla_Y X + D_1(Y,X)N + D_2(Y,X)u, N) \\ &= \widetilde{g}(\nabla_X Y, N) - \widetilde{g}(\nabla_Y X, N) \\ &= \widetilde{g}(\nabla^*_X Y + E_1(X,Y)\xi, N) - \widetilde{g}(\nabla^*_Y X + E_1(Y,X)\xi, N) \\ &= E_1(X,Y) - E_1(Y,X) \\ &= \varphi D_1(X,Y) - \varphi D_1(Y,X) \\ &= \varphi\{D_1(X,Y) - D_1(Y,X)\} \end{aligned}$$

D_1 simetriktir. Dolayısıyla $\tilde{g}([X,Y],N)=0$ olup $S(TM)$ integrallenebilirdir.

Tanım 3.3.2. M, $\tilde{M}$ Semi-Riemann manifoldunun half-lightlike bir altmanifoldu olsun. Eğer $tr|_{S(TM)} h = 0$ ve $\varepsilon_1(\xi)=0$ ise M ye *minimal half-lightlike altmanifold* denir [13].

$\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u$$

ve

$$\tilde{g}(A_u X, Y) = \in D_2(X,Y) + \varepsilon_1(X)\tau(Y)$$

eşitliklerinden M nin minimal olması için gerek ve yeter şart $\{e_1\}_{i=1}^{n-1}$ $S(TM)$ nin ortonormal bir bazı iken

$$\sum_{i=1}^{n-1} D_1(e_i,e_i)=0 \ , \ \sum_{i=1}^{n-1} D_2(e_i,e_i)=0 \ \text{ve} \ \varepsilon_1(\xi)=0$$

olmasıdır.

Teorem 3.3.3 . M, $\tilde{M}$ Semi-Riemann manifoldunun screen konformal bir altmanifoldu ve M' de $S(TM)$ nin bir lifi olsun. Bu durumda

1) M total geodeziktir.

2) M total umbiliktir.

3) M minimaldir.

gerek ve yeter şart M' nün, $\tilde{M}$ nın bir alt manifolduna immersed ve M üzerinde $E_1=0$ olmasıdır [13].

İspat . $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$E_1(X,PY)=\varphi D_1(X,PY)$$

ifadesinin kullanılmasıyla,

$\forall X,Y \in \Gamma(TM')$ için,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla^*_X Y + \varphi D_1(X,Y)\xi + D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u \tag{3.3.4}$$

bulunur. Bir önceki teoremden screen konformal bir altmanifold, integrallenebilir bir screen distribüsyona sahiptir. Böylece $S(TM)$ nin lifi, bir Semi-Riemann alt manifold olur. Buradan $\widetilde{M}$ de, M' nün Levi-Civita konneksiyonu ∇' ve ikinci temel formu h' olmak üzere;

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla'_X Y + h'(X,Y) \tag{3.3.5}$$

bulunur. Böylece (3.3.4) ve (3.3.5) denklemlerinden $\forall X,Y \in \Gamma(TM')$ için

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X Y &= \nabla'_X Y + \varphi D_1(X,Y)\xi + D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u \\ &= \nabla'_X Y + (\varphi\xi + N)D_1(X,Y) + D_2(X,Y)u \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$h'(X,Y) = (\varphi\xi + N)D_1(X,Y) + D_2(X,Y)u \tag{3.3.6}$$

bulunur. Diğer taraftan, (3.1.10) ifadesinde $Y = PZ$ alınırsa,

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(A_u\xi, PZ) &= \in D_2(\xi, PZ) + \varepsilon_1(\xi)\tau(PZ) \\ &= \in D_2(\xi, PZ) \end{aligned}$$

ve

$$\widetilde{g}(A_u PZ, \xi) = \in D_2(PZ,\xi) + \varepsilon_1(PZ)\tau(\xi)$$

dir. O halde

$$\in D_2(PZ,\xi) = -\varepsilon_1(PZ)\tau(\xi)$$

bulunur. D_2 simetrik olduğundan;

$$\widetilde{g}(A_u\xi, PZ) = -\varepsilon_1(PZ)$$

dir. Benzer şekilde

$$\in D_2(\xi,\xi) = \varepsilon_1(\xi)$$

alınabilir. Sonuç olarak $\forall Z \in \Gamma(TM)$ için,

$$D_2(\xi, PZ) = D_2(PZ,\xi) = D_2(\xi,\xi) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_1(Z) = 0 \tag{3.3.7}$$

dır. Böylece (3.3.6) ve (3.3.7) den

$$h'(X,Y) = (\varphi\xi + N)D_1(X,Y) + D_2(X,Y)u$$

$$h'(\xi, PY) = (\varphi\xi + N)D_1(\xi, PY) + D_2(\xi, PY)u$$

$$h'(\xi, PY) = 0 \Leftrightarrow D_2(\xi, PY) = 0 \Leftrightarrow \varepsilon_1(Z) = 0$$

olur ve ispat tamamlanır.

Tanım 3.3.3 . M , $\tilde{M}$ Semi-Riemann manifoldunun lightlike bir altmanifoldu olsun. $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RodTM)$ için

$$\nabla_X \xi \in \Gamma(TM)$$

ise M ye *irrotasyonaldir* denir [7].

M , half-lightlike altmanifoldu için $D_1(X,\xi)=0$ olduğundan, yukarıdaki tanım $\forall X \in \Gamma(TM)$ için,

$$D_2(X,\xi)=0=\varepsilon_1(X)$$

ifadesine denktir. Bu ifadenin (3.3.7) de kullanılması ile aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç . M , M' Semi-Riemann manifoldunun irrotasyonal screen konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. O zaman

1) M total geodeziktir.

2) M total umbiliktir.

3) M minimaldir.

gerek ve yeter şart $S(TM)$ nin her M' lifi, $\tilde{M}$ nin bir altmanifolduna immerseddir [13].

Teorem 3.3.4 . M , bir Semi-Riemann manifoldunun screen konformal half-lightlike alt manifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir.

1) $S(TM)$ nin her lifi M de total geodeziktir.

2) M', $S(TM)$ nin bir lifi iken M , L ve M' nün lightlike çarpım manifoldudur. Burada M' non-değere manifold ve L , 1-boyutlu lightlike manifoldtur.

3) M üzerinde $D_1=0$ dır.

4) M üzerindeki ∇ konneksiyonu, metrik konneksiyondur [13].

İspat . $X \in \Gamma(S(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RodTM)$ için $\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u$ ifadesinden

$$g(\nabla_\xi \xi, X) = \tilde{g}(\tilde{\nabla}_\xi \xi, X)$$

olur. Ayrıca $\tilde{\nabla}$, metrik konneksiyon olduğundan

$$\tilde{g}(\nabla_{\xi}\xi, X) = -\tilde{g}(\xi, \tilde{\nabla}_{\xi}X)$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\nabla_{\xi}\xi, X) &= -\tilde{g}(\xi, \tilde{\nabla}_{\xi}X) &&= -\tilde{g}(\xi, \nabla_{\xi}X + D_1(\xi, X)N + D_2(\xi, X)u) \\ & &&= -D_1(\xi, X)\tilde{g}(\xi, N) \\ & &&= 0\end{aligned}$$

dır. Böylece

$$\tilde{g}(\nabla_{\xi}\xi, X) = 0 \tag{3.3.8}$$

bulunur. Benzer şekilde $\forall X, Y \in \Gamma(S(TM))$ ve $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X N, Y) &= -\tilde{g}(N, \tilde{\nabla}_X Y) \\ &= -\tilde{g}(N, \nabla_X Y + D_1(X, Y)N + D_2(X, Y)u)\end{aligned}$$

dir. Buradan,

$$\tilde{g}(\tilde{\nabla}_X N, Y) = -\tilde{g}(N, \nabla_X Y)$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}-\tilde{g}(N, \nabla_X Y) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X N, Y) \\ &= \tilde{g}(-A_N X + \rho_1(X)N + \rho_2(X)u, Y) \\ &= -\tilde{g}(A_N X, Y)\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\tilde{g}(N, \nabla_X Y) = \tilde{g}(A_N X, Y)$$

bulunur. $\forall X \in \Gamma(TM|_u)$ için screen konformallikten gelen

$$A_N X = \varphi A_{\xi}^{*} X$$

eşitliği kullanılırsa,

$$\begin{aligned}\tilde{g}(\nabla_X Y, N) &= \tilde{g}(A_N X, Y) \\ &= \tilde{g}(\varphi A_{\xi}^{*} X, Y)\end{aligned}$$

olur. O halde

$$\tilde{g}(\nabla_X Y, N) = \varphi \tilde{g}(A_{\xi}^{*} X, Y)$$

bulunur. Burada (3.1.17) ifadesi kullanılırsa,

$$\tilde{g}(A_{\xi}^{*} X, Y) = D_1(X, Y)$$

olduğundan;

$$\tilde{g}(\nabla_X Y, N) = \varphi D_1(X,Y) \tag{3.3.9}$$

elde edilir.

$\tilde{g}(\nabla_\xi \xi, X) = 0$ ve $\tilde{g}(\nabla_X Y, N) = \varphi D_1(X,Y)$ olduğunu hatırlayalım. O halde $(1) \Leftrightarrow (2)$ dir. Eğer M bir çarpım manifoldu ise o zaman $S(TM)$ nin her lifi paraleldir. Böylece (3.3.9) ve (3.1.7) den $D_1 = 0$ dır. Eğer $D_1 = 0$ ise o zaman $S(TM)$ nin lifi (3.3.9) dan paraleldir ve (3.3.8) in göz önünde bulundurulmasıyla (2) elde edilir. Böylece $(2) \Leftrightarrow (3)$ olur. Diğer taraftan, $D_1 = 0$ ise daha önce ispatlanmış olan Teorem 3.1.3 ten $(3) \Leftrightarrow (4)$ gelir ve böylece ispat tamamlanır.

M, screen konformal half-lightlike bir altmanifold olsun. $\tilde{\nabla}$ nın $(0,4)$ tipindeki Riemann eğriliğini düşünelim.

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)Z \quad = \quad & R(X,Y)Z + D_1(X,Z)A_N Y - D_1(Y,Z)A_N X \\
& + D_2(X,Z)A_u Y - D_2(Y,Z)A_u X \\
& + \{(\nabla_X D_1)(Y,Z) - (\nabla_Y D_1)(X,Z) + \rho_1(X)D_1(Y,Z) \\
& - \rho_1(Y)D_1(X,Z) + \varepsilon_1(X)D_2(Y,Z) - \varepsilon_1(Y)D_2(X,Z)\}N \\
& + \{(\nabla_X D_2)(Y,Z) - (\nabla_Y D_2)(X,Z) \\
& + \rho_2(X)D_1(Y,Z) - \rho_2(X)D_1(Y,Z)\}u
\end{aligned}$$

ifadesinin kullanılmasıyla ve eğrilik tensörünün tanımından

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)Z, PW) \quad = \quad & \tilde{g}(R(X,Y)Z, PW) \\
& + \varphi\{D_1(X,Z)D_1(Y,PW) \\
& - D_1(Y,Z)D_1(X,PW)\} \\
& + \in \{D_2(X,Z)D_2(Y,PW) \\
& - D_2(Y,Z)D_2(X,PW)\}
\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)PZ, N) \quad = \quad & \tilde{g}(R(X,Y)Z, PW) \\
& + \in \{\rho_2(Y)D_2(X,PZ) - \rho_2(X)D_2(Y,PZ)\} \\
= \quad & \tilde{g}(\nabla_X (A_N Y) - \nabla_Y (A_N X) - A_N[X,Y], PZ) \\
& + \varphi\{\rho_1(Y)D_1(X,PZ) - \rho_1(X)D_1(Y,PZ)\} \\
& + \in \{\rho_2(Y)D_2(X,PZ) - \rho_2(X)D_2(Y,PZ)\}
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

$$\tilde{g}(\tilde{R}(X,Y)\xi,PZ) = \tilde{g}(R(X,Y)\xi,PZ) + \in D_2(X,\xi)D_2(Y,PZ) - \in D_2(Y,\xi)D_2(X,PZ) \tag{3.3.12}$$

elde edilir.

R^*, ∇^* ın eğrilik tensörü olmak üzere; (3.1.18) ve (3.3.2) den,

$$\begin{aligned} R(X,Y)PZ &= R^*(X,Y)PZ - \varphi\{D_1(Y,PZ)A^*_\xi X - D_1(X,PZ)A^*_\xi Y\} \\ &+ \varphi\{(\nabla_X D_1)(Y,PZ) - (\nabla_Y D_1)(X,PZ)\}\xi \\ &+ D_1(Y,PZ)\{X(\varphi) - \varphi\rho_1(X)\}\xi - D_1(X,PZ)\{Y(\varphi) - \varphi\rho_1(Y)\}\xi \end{aligned}$$

bulunur.

Teorem 3.3.5 . M, $\tilde{M}(c)$ Semi-Riemann uzay formunun screen konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. O zaman M ' nin Ricci tensörü simetriktir gerek ve yeter şart

$$(D_2 \wedge \rho_2)(\xi,X,Y) = D_2(X,Y)\rho_2(\xi)$$

olmasıdır [13].

İspat . Half-lightlike bir altmanifoldun Ricci tensörü $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için,

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{m-1} \in g(R(X,e_i)Y,e_i) + \tilde{g}(R(X,\xi)Y,N)$$

ile ifade edilir.

$\tilde{M}(c)$ uzay formu için $E_1(X,PY) = \varphi D_1(X,PY)$, (3.3.10) ve (3.3.11) eşitliklerinden,

$$\begin{aligned} Ric(X,Y) &= (1-m)cg(X,Y) + \sum_{i=1}^{m-1}\{(-D_1(X,Y)D_1(e_i,e_i) - D_1(e_i,Y)D_1(X,e_i))\varphi \\ &- \in D_2(X,Y)D_2(e_i,e_i) + D_2(e_i,Y)D_2(X,e_i)\} \\ &- \in D_2(X,Y)\rho_2(\xi) + \in D_2(\xi,Y)\rho_2(X) \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$Ric(X,Y) - Ric(Y,X) = \in \{D_2(X,Y)\rho_2(X) - D_2(\xi,X)\rho_2(Y)\}$$

ya da

$$Ric(X,Y) - Ric(Y,X) = (D_2 \wedge \rho_2)(\xi,X,Y) - D_2(X,Y)\rho_2(\xi) \tag{3.3.14}$$

olur ve ispat tamamlanır. Bu durumda Tanım 3.3.3 ve (3.3.14) denkleminden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç . $\widetilde{M}(c)$ nin her irrotasyonel screen konformal half-lightlike altmanifoldunun Ricci tensörü simetriktir [13].

$p \in M$ ve ξ, T_pM nin bir null vektörü olsun. Bu durumda $\forall W \in H$ için $\widetilde{g}(\xi, W) = 0$ ve $\widetilde{g}(W_0, W_0) \neq 0$ olacak şekilde $W_0 \in H$ varsa, T_pM nin ξ yi de içeren bir H düzlemi, ξ *yönünde null düzlem* olarak isimlendirilir. Böylece $\widetilde{\nabla}$ ve ξ ye göre H nın null kesit eğriliği

$$K_\xi(H) = \frac{R_p(W, \xi, \xi, W)}{g_p(W, W)}$$

ile tanımlanır [13].

Teorem 3.3.6 . M , $\widetilde{M}(c)$ nin bir screen konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. O zaman M nin null kesit eğriliği $\forall X \in \Gamma(S(TM))$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için,

$$K_\xi(H) = \in \{D_2(\xi,\xi)D_2(X,X) - D_2(X,\xi)D_2(\xi,X)\} \tag{3.3.15}$$

olur.

İspat . (3.3.10) dan

$$\begin{aligned} K_\xi(H) \quad &= \quad \varphi\{D_1(X,\xi)D_1(\xi,X) - D_1(\xi,\xi)D_1(X,X)\} \\ &\quad + \in \{D_2(\xi,\xi)D_2(X,X) - D_2(X,\xi)D_2(\xi,X)\} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (3.1.7) nin kullanılmasıyla (3.3.15) denklemi bulunur. (3.1.3) eşitliğinin (3.3.15) te yerine yazılmasıyla aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç . $\widetilde{M}(c)$ nin screen konformal half-lightlike altmanifoldu olan M nin null kesit eğriliğinin sıfıra eşit olması için gerek ve yeter şart $\forall X \in \Gamma(S(TM))$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için,

$$(D_2 \wedge \varepsilon_1)(X, \xi, X) = - \in \varepsilon_1^2(X)$$

olmasıdır. Gerçekten,

$$K_\xi(H) = \varphi\{D_2(\xi,\xi)D_2(X,X) - D_2(X,\xi)D_2(\xi,X)\}$$

eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
(D_2 \wedge \varepsilon_1)(X,\xi,X) &= D_2(X,\xi)\varepsilon_1(X) \\
&= -\in \varepsilon_1(X)\varepsilon_1(X) \\
&= -\in \varepsilon_1^2(X) \\
&= -D_2(X,\xi) \in D_2(X,\xi) \\
&= -\in D_2^2(X,\xi) \\
\Rightarrow \quad \in D_2(\xi,\xi) + \varepsilon_1(\xi) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $\tilde{M}(c)$ nin her irrotasyonal screen konformal half-lightlike altmanifoldunun null kesit eğriliği sıfırdır [13].

Teorem 3.3.7. $(M,g,S(TM))$, $\tilde{M}(c)$ nin screen konformal half-lightlike altmanifoldu ve $D_2 = 0$ olsun. Bu taktirde M nin flat olması için gerek ve yeter şart $S(TM)$ nin bir M' lifinin de flat ve $c = 0$ olmasıdır [13].

Teorem 3.3.8 . M , $\tilde{M}$ Semi-Riemann manifoldunun half-lightlike bir altmanifoldu olsun. Kabul edelim ki $S(TM)$ integrallenebilir ve $S(TM)$ nin bir M' lifi : $\alpha\beta > 0$ la ekboyutu 3 olan non-dejenere altmanifold olarak $\tilde{M}$ ye immersed total umbilik olsun. O zaman M screen lokal konformaldir. $\Leftrightarrow$ α ve β , ξ ve N yönündeki lifinin ortalama eğrilik vektör alanının bileşenleri iken $X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RodTM)$ için $E_1(\xi, PX) = 0$ dır [13].

İspat . M', $S(TM)$ nin lifi olsun. O zaman $\forall X,Y \in \Gamma(TM')$ için,

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla^*_X Y + E_1(X,Y)\xi + D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u$$

ve H^* ortalama eğrilik vektör alanı olmak üzere,

$$H^* = \alpha\xi + \beta N + \gamma u$$

dur. M , $\tilde{M}$ de total umbilik olduğundan;

$$E_1(X,Y)\xi + D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u = g(X,Y)(\alpha\xi + \beta N + \gamma u)$$

dur. Böylece

$$E_1(X,Y) = \alpha g(X,Y) \tag{3.3.22}$$

ve

$$D_2(X,Y) = \beta(X,Y) \quad , \quad D_2(X,Y) = \gamma g(X,Y) \tag{3.3.23}$$

bulunur. Buradan $E_1(X,Y) = \dfrac{\alpha}{\beta} D_1(X,Y)$ olur. $\forall X, Y \in \Gamma(TM')$ için $A^*_\xi \xi = 0$ ve $E_1(\xi, Y) = 0$ olduğundan, $\forall X \in \Gamma(TM)$ için ,

$$A_N X = \varphi A^*_\xi X$$

olur. Yani M screen konformaldir.

Tersine, kabul edelim ki M screen konformal olsun. Bu durumda $\forall X \in \Gamma(TM)$ için,

$$D_1(X, PY) = \frac{K}{\varphi} g(X, PY) \tag{3.3.24}$$

oluyorsa, $E_1(X, PY) = Kg(X, PY)$ olduğundan M' total umbiliktir.

Teorem 3.3.9 . M , $\widetilde{M}$ nin bir screen konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. O zaman $\forall X \in \Gamma(TM)$ için, M total umlibiktir $\Leftrightarrow$ $P(A_u X) = H_2 PX$, $\varepsilon_1(X) = 0$ ve $S(TM)$ nin her M' lifi de M de total umbiliktir [13].

İspat : $\forall X \in \Gamma(TM)$ için,

$$\begin{aligned} D_1(X,Y) &= H_1 \widetilde{g}(X,Y) \\ D_2(X,Y) &= H_2 \widetilde{g}(X,Y) \end{aligned}$$

ifadelerinden

$$P(AuX) = H_2 PX \text{ ve } \varepsilon_1(X) = 0$$

dır. Gerçekten,

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(A_u X, Y) = \in D_2(X,Y) = \in \widetilde{g}(H_2 X, Y) &\Leftrightarrow A_u X = H_2 X \\ &\Leftrightarrow P(A_u X) = P(H_2 X) \\ &\Leftrightarrow P(A_u X) = H_2 PX \end{aligned}$$

ve

$$\in D_2(\xi, X) + \varepsilon_1(X) = \tilde{g}(A_u X, \xi)$$
$$\varepsilon_1(X) = -D_2(\xi, X) = -\in H_2 \tilde{g}(\xi, X) = 0$$

dir.

Kabul edelim ki $D_1(X,Y) = H_1\tilde{g}(X,Y)$ olsun. Bu durumda M screen konformal olduğundan ve (4.3.2) den

$$E_1(X,Y) = \varphi D_1(X,Y) = \varphi H_1 \tilde{g}(X,Y)$$

dir. Böylece M', $K = \varphi H_1$ ile total umbiliktir. Tersine M' total umbilikse o zaman (3.3.2) , (3.3.11) ve (3.1.10) kullanılarak, $H_1 = \dfrac{K}{\varphi}$ olmak üzere;

$$D_1(X,Y) = H_1\tilde{g}(X,Y)$$

bulunur.

Teorem 3.3.9 . M , $\tilde{M}$ nin screen konformal total umbilik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlar sağlanır.

1) M , $\tilde{M}$ de total umbiliktir.

2) M total geodeziktir. $\Leftrightarrow$ M , $\tilde{M}$ de total geodeziktir [13].

İspat . M total umbilik olduğundan $D_2(X,\xi) = 0$ dır ve (3.3.6) , (3.2.1) den $\forall X,Y \in \Gamma(TM')$ için

$$h'(X,Y) = g(X,Y)(H,\varphi\xi + H_1 N + H_2 u)$$

sağlanır.

3.4. Irrotasyonel Screen Homotetik Half-Lightlike Altmanifoldlar

Tanım 3.4.1. $(M, g, S(TM))$, $(\tilde{M}, \tilde{g})$ Lorentz manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu olsun. M üzerinde sıfırdan farklı bir b sabiti için,

$$A_N = bA_\xi^*$$

veya denk olarak $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$E_1(X,PY)=bD_1(X,Y) \tag{3.4.1}$$

eşitliği sağlanıyorsa, M ye *screen homotetiktir* denir [18].

Eğer M, screen homotetik ise E_1, M üzerinde simetriktir ve $S(TM)$ integrallenebilirdir. Burada L, lightlike bir eğri ve M^*da $S(TM)$'nin bir lifi olmak üzere;

$$M=L\times M^*$$

olacak şekilde bir çarpım manifoldudur diyebiliriz.

Eğer M, irrotasyonelse, $\forall X\in\Gamma(TM)$ için (3.1.3) ve (3.1.13) ifadelerinden $D_2(X,\xi)=0$ ve dolayısıyla $\varepsilon_1(X)=0$ olduğunu gösterebiliriz.

Tanım 3.4.2. M nin $R^{(0,2)}$ ile verilen Ricci tensörü genel olarak simetrik değildir. Eğer $R^{(0,2)}$, M üzerinde simetrik ise M nin indirgenmiş Ricci tensörü olarak adlandırılır. [13].

Teorem 3.4.1 . $(M,g,S(TM))$, $(\tilde{M}(c),\tilde{g})$ nin bir irrotasyonel screen homotetik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin $R^{(0,2)}$ Ricci tensörü, indirgenmiş Ricci tensörüdür [18].

İspat . $(\tilde{M}(c),\tilde{g})$ Lorentz uzay formu olduğundan

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(X,Y) &= mcg(X,Y)+D_1(X,Y)+rA_N+rA_u \\ &\quad -g(A_NX,A_\xi^*Y)-g(A_uX,A_uY)+\xi(X)\varepsilon_1(Y) \end{aligned}$$

elde edilir [18]. Böylece $A_N=bA_\xi^*$ ve $\varepsilon_1=0$ olduğunun hesaba katılmasıyla ispat tamamlanır.

Teorem 3.4.2 . $(M,g,S(TM))$, $(\tilde{M},\tilde{g})$ Lorentz manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $R^{(0,2)}$simetrikse, U üzerinde öyle bir $\{\xi,N\}$ çifti vardır ki, M de τ 1-formu sıfıra eşittir [18].

M nin τ 1-formu sıfır olduğunda U daki $\{\xi, N\}$ çiftine M nin *distinguished null çifti* denir. $S(TM)$ nin genellikle tek olmamasına rağmen,

$$S(TM)^* = TM / RadTM$$

factör demetine izomorfiktir. Böylece $S(TM)$ lerin hepsi mutually izomorfiktir [7]. Sonuç olarak $(M, g, S(TM))$, $\{\xi, N\}$ disttinguished null çiftine sahip $(\widetilde{M}(c), \widetilde{g})$ Lorentz uzay formunun irrotasyonel screen homotetik half-lightlike altmanifoldudur.

Teorem 3.4.3 . $(M, g, S(TM))$, $(\widetilde{M}(c), \widetilde{g})$ Lorentz uzay formunun screen homotetik half-lightlike bir altmanifoldu olsun. Eğer $boyM > 3$ ise,

1) M ye indirgenmiş ∇ konneksiyonu bir metrik konneksiyondur.

2) M, total umbiliktir ve L, null bir eğri, M^* da küreye izometrik olan total geodezik bir Riemann uzay formu olmak üzere, $L \times M^*$ şeklinde bir yerel çarpım manifoldudur [18].

4. KAYNAKLAR

[1] Chen, B. Y. Geometry of Submanifolds, Marcell Dekker Inc. 1973.

[2] O' Neill, B., Semi-Riemann Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, New York, 1983.

[3] Duggal, K. L. and Bejancu, A., Lightlike submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Kluwer Academic, **364**, 1996.

[4] Nomizu, K., On hypersurfaces satisfying a certain condition on the curvature tensor, Tohoku Math. J., **20**, 1986.

[5] Sahin B., CR-Altmanifoldların Geometrisi, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, 1996.

[6] Sahin B., Lightlike Manifoldların Altmanifoldları Üzerine, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, 2000.

[7] Kupeli, D. N., Singular Semi-Riemannian Geometry, Kluwer Academic, 366, 1996.

[8] Hacısalihoglu, H. H., Tensör Geometri, AÜ. Fen Fakültesi, Ankara, 2003.

[9] Bejancu, A. and Duggal, K. L., Lightlike Submanifolds of Semi-Riemann Manifolds, Acta Appl. Math. **38**, 1995.

[10] Ioan, C. A., Degenerate Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds Tensör, N.S., 1997.

[11] Duggal, K. L., Gimenez, A., Lightlike Hypersurfaces of Lorentzian Manifolds with Distinquished Screen, Journal of Geometry and Physics **55**, 107-122, 2005.

[12] Yasar, E., Yarı-Riemann Manifoldunda Lightlike Hiperyüzeylerin Geometrisi Üzerine, Doktora Tezi, Süleyman Demirel Üniversitesi, 2006.

[13] Duggal, K. L. and Sahin, B., Differential Geometry of Lightlike Submanifolds, Birkhauser Verlag AG, Berlin, 2010.

[14] Duggal, K. L. and Jin, D. H., Half-lightlike submanifolds of codimension 2, Math. J. Toyoma Univ., **22**, 121-161, 1999.

[15] Duggal, K. L. and Bejancu, A., Lightlike submanifolds of codimension two, Math. J. Toyoma Univ., **15**, 59-82, 1992.

[16] Jin, D. H., A characterizasyon of screen conformal half-lightlike submanifolds, Honam Math. J., **31**, 17-23, 2009.

[17] Duggal, K. L. and Sahin, B., Screen conformal half-lightlike submanifolds, Int., J. Math. and Math. Sci., 68, 3737-3753, 2004.

[18] Jin, D. H., Irrotational screen homothetic half-lightlike submanifolds, Journal of the Chungcheong Mathematical Society, **23**, 2010.

ÖZGEÇMİŞ

Burçin DOĞAN, 23/03/1988 tarihinde Malatya' da doğdu. İlk ve orta öğrenimini 1993–2001 tarihleri arasında Malatya Merkez Cumhuriyet İlköğretim Okulu' nda, lise öğrenimini ise 2001–2005 tarihleri arasında İstanbul Köy Hizmetleri Anadolu Lisesi' nde tamamladı. 2006 yılında İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nde eğitim görmeye hak kazandı. Temmuz 2010 da mezun olduktan sonra Eylül 2010 da İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Geometri Anabilim Dalı' nda yüksek lisans öğrenimine başladı. Ocak 2013' te Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü' nde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. Hala görevine devam etmektedir.