T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATRİS ETKİ ALANLARININ ALTUZAYLARI ÜZERİNE

Asuman ULU

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2013

Tezin Başlığı : Matris Etki Alanlarının Altuzayları Üzerine

Tezi Hazırlayan : Asuman ULU

Sınav Tarihi : 21.06.2013

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Bilal ALTAY
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Hüsamettin ÇOSKUN
İnönü Üniversitesi

Yrd. Doç. Murat CANDAN
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Mehmet ALPASLAN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum ”Matris Etki Alanlarının Altuzayları Üzerine” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Asuman ULU

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Matris Etki Alanlarının Altuzayları Üzerine

Asuman ULU

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

58+v sayfa

2013
Danışman: Prof. Dr. Bilal ALTAY

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümünde, K- ve FK-uzayları ile ilgili genel bilgiler verildi.

İkinci bölümde, diğer bölümlerin daha kolay anlaşılmasını sağlayacak temel tanımlar ve teoremler verildi. Lokal konveks uzay ve dizi uzayları gibi kavramlardan bahsedildi.

Üçüncü bölümde, K- ve FK- uzaylarının bazı altuzayları bölümsel operatörlerle incelendi. Bu altuzayların özellikleri kullanılarak dual uzaylarla arasındaki ilişki verildi.

Dördüncü bölümde, matris etki alanlarının bazı altuzayları incelendi.

Beşinci bölümde, (Cesàro, Zweier ve Fark Matrisi gibi) özel matrislerin etki alanlarının bazı altuzayları incelendi.

ANAHTAR KELİMELER: Dizi uzayı, K-uzay, FK-uzay, AK, AB, SAK, FAK ve AD özellikleri, Matris etki alanları, Yakınsaklık alanı.

ABSTRACT

Master Thesis

On the Subspace of the Domain of Matrix

Asuman ULU

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

58+v pages
2013
Supervisor: Prof. Dr. Bilal ALTAY

The present thesis consists of five chapters. In the first chapter, brief history of K- and FK-spaces and general knowledge were given.

In the second chapter, for understand other chapters some basic definitions and theorems and basic concepts such as topological space, locally convex space and sequence spaces were mentioned.

In the third chapter, some subspaces of K- and FK-spaces were examined by section operators. Using the properties of these subspaces, relation among the dual spaces were given.

In the fourth chapter, some subspaces of the matrix domain were investigated.

In the fiveth chapter, some subspaces of the special matrix (such as Cesàro, Zweier and Difference) domain were investigated.

KEYWORDS: Sequence space, K-space, FK-space, AK, AB, SAK, FAK and AD property, Matrix domain, Convergence domain.

TEŞEKKÜR

Beni bu alanda çalışmaya teşvik eden, tezin hazırlanmasında ve yüksek lisans yaptığım süre boyunca yakın alakalarını esirgemeyen sayın hocam Prof. Dr. Bilal ALTAY' a, lisansta ve yüksek lisansta bana yol gösteren sayın hocam Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e minnetlerimi ve şükranlarımı borç biliyorum.

Çalışmalarımda ve hayatımın her alanında yanımda olan, maddi manevi desteklerini esirgemeyen aileme özellikle de babam Cavit ULU' ya sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

Asuman ULU

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER

$\mathbb{N}$: Doğal sayılar cümlesi,

$\mathbb{R}$: Reel sayılar cümlesi,

$\mathbb{C}$: Kompleks sayılar cümlesi,

$\mathbb{K}$: $\mathbb{C}$ veya $\mathbb{R}$

$||x||_\lambda$: λ uzayındaki x elemanının normu,

e^k : k. terimi 1, diğer terimleri 0 olan dizi,

e : Bütün terimleri 1 olan dizi,

$x^{[n]}$: (x_k) dizisinin, $\sum_{k=1}^{n} x_k e^k$ ile elde edilen $n-$li kısmı,

w : Tüm dizilerin lineer uzayı,

λ : w dizi uzayının herhangi bir altuzayı,

φ : Sonlu adette sıfır olmayan terimlerden oluşan dizilerin uzayı,

$\overline{\varphi}$: φ uzayının kapanışı,

(X,Y) : $A : X \to Y$ şeklindeki bütün matris sınıfları

λ^* : λ uzayının cebirsel duali,

λ' : λ uzayının sürekli duali,

λ_A : A matrisinin $\lambda-$ etki alanı,

c_A : A matrisinin yakınsaklık alanı,

λ^α : λ dizi uzayının $\alpha-$duali,

λ^β : λ dizi uzayının $\beta-$duali,

λ^γ : λ dizi uzayının $\gamma-$duali,

λ^f : λ dizi uzayının $f-$duali,

ℓ_∞ : Sınırlı dizilerin uzayı,

c : Yakınsak dizilerin uzayı,

c_0 : Sıfıra yakınsayan dizilerin uzayı,

bs : Kısmi toplamı sınırlı seri oluşturan dizilerin uzayı,

cs : Kısmi toplamı yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı,

ℓ : Mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı,

ℓ_p : $p-$ mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin uzayı,

bv : Sınırlı-salınımlı dizilerin uzayı,

bv_0 : $bv \cap c_0$

1. GİRİŞ

Günümüzde özellikle dizi uzayları ve matris dönüşümü çalışmalarında K- ve FK-uzayları önemli yer tutar. FK-uzaylar teorisi, Zeller [1] tarafından çalışılmıştır. Daha sonra Zeller [2] çalışmasında, FK uzayların, bölümsel yakınsaklık (AK), zayıf bölümsel yakınsaklık (SAK) ve fonksiyonel bölümsel yakınsaklık (FAK) özeliklerine sahip elemanların oluşturduğu altuzayların bazı özelliklerini incelemiştir. BK-uzaylarında bölümsel sınırlılığı da Sargent [3] çalışmıştır. Topolojik dizi uzaylarında AK ve AB özelikleri Garling [4] tarafından verilmiştir.

Forier seriler teorisinde Cesàro toplabilme önemli bir yere sahiptir. Yukarıdaki bölümsel altuzaylarına parelel olarak bölümsel Cesàro yakınsak ve bölümsel Cesàro sınırlılık altuzayları Buntinas [5] tarafından tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir. Toplanabilme teorisinde Cesàro metoduna benzer Euler, Riesz gibi önemli toplanabilme metodları mevcuttur. T bir toplanabilme metodu olmak üzere T-bölümsel yakınsaklık (TK) ve T-bölümsel sınırlılık (TB) yine Buntinas [6] da çalışılmıştır. E bir FK-uzay ve c yakınsak dizilerin uzayı olmak üzere $c.E = E$ eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şartlar Sember [7] tarafından verilmiştir. λ herhangi bir dizi uzayı olmak üzere Goes [8] tarafından verilen $\lambda E \subset E$ ve $E \subset \lambda E$ içerme teoremleri Bennett ve Kalton [9], Snyder ve Wilansky [10] tarafından incelendi. AK ve AB altuzaylarına paralel olarak KK, KB, KB&AD gibi özellikler Grosse-Erdmann [11] tarafından tanımlanarak içerme ve eşit olma teoremleri verilmiştir.

Toplanabilme teorisinde, topolojik dizi uzayları kadar bu uzayların çeşitli dualleri de önemli rol oynar. Dizi uzayları ile uzayların dualleri ($\alpha-$, $\beta-$, $\gamma-$ ve $f-$ dualleri) ile bölümsel altuzaylar arasındaki bazı ilişkiler Buntinas [6], Sember ve Raphael [12], Noll [13] mevcuttur. Mesela, bir λ FK-uzayının AB özeliğine sahip dizilerin $B^+(\lambda)$ uzayı, λ uzayının f-dualinin γ-dualine eşittir yani $B^+(\lambda) = \lambda^{f\gamma}$, FAK özeliğine sahip dizilerin $F^+(\lambda)$ uzayı, λ uzayının f-dualinin β-dualine eşittir yani $F^+(\lambda) = \lambda^{f\beta}$. Matris etki alanları ile bazı altuzayları arasındaki ilişkileri belirlemek mümkündür. Örneğin, Y AK özelliğine sahip bir FK-uzay ve A, $\quad Y_A \supset \varphi$ olacak şekilde bir matris olsun. Matris etki alanının $L_a = \left\{x \in Y_A : t(Ax) = (tA)x, \forall x \in Y^\beta\right\}$ olarak tanımlanan altuzayı ile SAK özelliği çakışır.

K- ve FK- uzayların bölümsel altuzayları ile ilgili bazı diğer çalışmalar [14–28] olarak verilebilir.

1.1 Çalışmanın Kapsamı

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada önce bahsedilen uzayların bölümsel altuzaylarını tanıtıp bu bölümsel altuzaylar yardımıyla uzayın dualleri arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz. Elde ettiğimiz bu sonuçları matris etki alanlarının bazı altuzaylarını incelerken kullanacağız. Bunu yaparken önce seçilen FK-uzayının sahip olduğu özelliklere göre sonra da matrisin Cesàro, Zweier, Fark matrisi gibi matrisler olarak alınması durumuna göre inceleyeceğiz.

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlere temel teşkil edecek olan bazı tanım ve teoremler verilmiştir. Vektör uzayı, topolojik uzay, normlu uzay, alt uzay, Banach uzayı gibi bazı temel kavramların bilindiği kabul edilmektedir.

2.1 Temel Kavramlar

Bu kısımda, genel topoloji ve fonksiyonel analizde kullanılan bazı tanım ve teoremler verilmiştir.

Vektör uzaylarının skalar $\mathbb{K}$ cismi, $\mathbb{C}$ kompleks veya $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, doğal sayılar cümlesi $\mathbb{N} = \{1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ ve $\mathbb{N}^0 = \{0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots\}$ olarak alınmıştır. Diziler ve serilerin indisleri belirtilmemişse sınırlar daima 0 veya 1 den ∞ 'a kadar alınacaktır.

Tanım 2.1.1. [29, shf. 2]

X bir lineer uzay ve (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Lineer uzayın cebirsel işlemleri τ topolojisine göre sürekli ise, (X,τ) ya topolojik vektör uzayı denir ve TVU ile gösterilir.

Bir TVU na sıfırın her komşuluğu sıfırın konveks bir komşuluğunu ihtiva ediyorsa yerel(lokal) konvekstir denir.

X bir topolojik vektör uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A cümlesi sıfırın her komşuluğu tarafından emilirse A cümlesine sınırlıdır denir.

Teorem 2.1.1. *[29, Teorem 4.4.1]*

X bir topolojik vektör uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(a) A cümlesi sınırlıdır.

(b) $\varepsilon_n \to 0$ olan her (ε_n) skaler dizisi ve her $(x_n) \subset A$ için $\varepsilon_n x_n \to 0$ dır.

(c) Her $(x_n) \subset A$ dizisi için $\frac{1}{n}x_n \to 0$ dır.

Tanım 2.1.2. [30, shf. 82]

X bir lineer uzay ve d ise X üzerinde tanımlı bir metrik olsun. Eğer X üzerinde tanımlanan toplama ve skalerle çarpım işlemleri d metriğinin ürettiği topolojiye göre sürekli ise X e lineer metrik uzay denir.

X ve Y birer vektör uzayı olsun. X den Y ye bütün lineer operatörlerin kümesi $L(X,Y)$ ile gösterilir. Y nin $\mathbb{R}$ ya da $\mathbb{C}$ alınması durumunda $L(X,\mathbb{R})$ ya da $L(X,\mathbb{C})$, X üzerinde tanımlı bütün lineer fonksiyonellerin kümesi olur. Bu kümelere X in cebirsel duali denir. X ve Y nin normlu vektör uzayları olması durumunda X den Y ye bütün sınırlı(sürekli) lineer operatörlerin kümesi $B(X,Y)$ ile gösterilir. Eğer $Y=\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ ise, $B(X,\mathbb{R})$ ve $B(X,\mathbb{C})$ kümelerine X in sürekli duali denir ve X' ile gösterilir.

Tanım 2.1.3. X bir lineer uzay ve τ_1,τ_2 bu uzay üzerinde tanımlanan iki vektör topolojisi olsun. Eğer X uzayı τ_1 ve τ_2 topolojilerine göre yerel konveks ve $(X,\tau_1)'=(X,\tau_2)'$ ise τ_1 ve τ_2 topolojileri birbiriyle uyumludur denir.

Tanım 2.1.4. [31, Teorem 4.8.2]

X bir normlu uzay ve (x_n) bu uzayda bir dizi olmak üzere her $f\in X'$ için

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=f(x)$$

oluyorsa (x_n) dizisi $x\in X$ noktasına zayıf yakınsar (ya da zayıf olarak yakınsaktır) denir ve $x\in X$ elemanına (x_n) dizisinin zayıf limiti denir. $x_n \xrightarrow{w} x$ ile gösterilir.

Lemma 2.1.2. *[31, Teorem 4.8.3]*

X bir normlu uzay ve (x_n), X uzayında bir dizi olsun. Bu durumda,

(a) Yakınsak her dizi aynı noktaya zayıf yakınsaktır.

(b) Zayıf limit bir tektir.

(c) Zayıf yakınsak her dizi sınırlıdır.

Teorem 2.1.3. *[29, Teorem 3.3.11] X bir yarınormlu uzay ve $E\subset X$ olsun. Her $f\in X'$ için, $f(E)$ sınırlı bir cümle ise, E cümlesi sınırlıdır.*

Lemma 2.1.4. *[32, Teorem 8.2.3]*

X ve Y birer FK uzay ve $E\subset X\cap Y$ olsun. Bu durumda,

(a) $\tau_Y|_E \subset \tau_X|_E$

(b) E cümlesinin X uzayında sınırlı olan her altcümlesi Y uzayında da sınırlıdır.

(c) $Y\supset \overline{E}^{\tau_X}$

önermeleri denktir.

Teorem 2.1.5. *[30, Teorem 16]*

X bir reel ya da kompleks lineer uzay, Z cümlesi X lineer uzayının bir alt lineer uzayı olsun. $p : X \to \mathbb{R}$ fonksiyoneli her $x, y \in X$ ve α skaleri için

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \text{ ve } p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$$

şartlarını sağlasın. Eğer f fonksiyoneli Z üzerinde

$$|f(x)| \leq p(x)$$

eşitsizliğini sağlayan bir lineer fonksiyonel ise, bu takdirde X üzerinde

$$g(x) \leq p(x)$$

olacak şekilde X uzayına f fonksiyonelinin bir g genişlemesi vardır.

Hahn-Banach teoreminin birçok uygulaması vardır. Bunlardan biri;

X, boştan farklı bir yarınormlu uzay, Y, X in bir altvektör uzayı ve $x \in X$ olsun. Eğer Y de $f = 0$ olan her $f \in X'$ fonksiyonu için $f(x) = 0$ oluyorsa bu durumda $x \in \overline{Y}$ elde edilir.

Tanım 2.1.5. [33, Teorem 6.3.31]

X ve Y yarınormlu uzaylar ve ϕ, X den Y ye lineer operatörlerin boş olmayan bir cümlesi olsun. Eğer, her $x \in X$ için,

$$\left\{ T(x) \mid T \in \phi \right\}$$

cümlesi Y uzayında sınırlı ise, ϕ noktasal sınırlıdır denir. Eğer,

$$\sup \left\{ \|T\| \mid T \in \phi \right\} < \infty$$

oluyorsa ϕ düzgün sınırlıdır denir.

Teorem 2.1.6. *(Düzgün Sınırlılık Prensibi)[33, Teorem 6.3.35]*

(X, p) ve (Y, q) yarı normlu uzaylar, (X, p) tam ve $\emptyset \neq \phi \subset B(X, Y)$ olsun. Eğer ϕ noktasal sınırlı ise, düzgün sınırlıdır.

Tanım 2.1.6. [33, Teorem 6.3.32]

X ve Y yarı metrik uzayları arasındaki dönüşümlerin bir ailesi ϕ olsun. Eğer,

$$\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 \forall f \in \phi \forall x, y \in X : d_x(x, y) < \delta \Rightarrow d_y(f(x), f(y)) < \varepsilon$$

oluyorsa ϕ eş süreklidir denir.

Teorem 2.1.7. *[32, shf. 103]*

Bir Frechet uzayından herhangi bir yerel konveks uzaya sürekli lineer operatörlerin bir dizisi noktasal sınırlı ise, eş süreklidir.

Tanım 2.1.7. [33, Teorem 6.3.36]

X boştan farklı bir cümle, (Y,τ) bir topolojik uzay ve (f_n), X cümlesinden Y uzayına tanımlanan dönüşümlerin bir dizisi olsun. Eğer her $x \in X$ için $(f_n(x)) \to f(x)$ olacak şekilde, X cümlesinden Y uzayına bir f dönüşümü mevcut ise, (f_n) noktasal yakınsaktır denir. f dönüşümüne, (f_n) dizisinin noktasal limiti denir.

Eğer, (Y,d) bir yarı metrik uzay ve her $x \in X$ için $(f_n(x)), (Y,d)$ uzayında bir Cauchy dizisi ise, bu durumda (f_n) dizisine noktasal Cauchy dizisi denir.

Teorem 2.1.8. *(Banach-Steinhaus Teoremi)[33, Teorem 6.3.38]*

(X,p) tam yarı normlu uzay, (Y,q) yarı normlu uzay ve (T_n), $B(X,Y)$ cümlesinde bir dizi olsun. Eğer (T_n) dizisi bir $T : X \to Y$ dönüşümüne noktasal yakınsak ise bu durumda $T \in B(X,Y)$ dir ve

$$\|T\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|T_n\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \|T_n\| < \infty$$

eşitsizlikleri geçerlidir.

$Y = \mathbb{K}$ alınırsa aşağıdaki teoremin sağlandığı görülür.

Teorem 2.1.9. *(Banach- Steinhaus Kapanış Teoremi)[32, Teorem 1.0.4]*

X bir Banach uzay, Y normlu bir uzay, $\{f_n\} \subset X'$ ve her $x \in X$ için $f(x) = \lim f_n(x)$ mevcut olsun. Bu durumda $f \in X'$ dir.

Teorem 2.1.10. *(Yakınsaklık Lemması)[32, Teorem 1.0.5]*

$\{f_n\}$ düzgün sınırlı olsun. Bu durumda $\{x : \lim_n f_n(x) \text{ var }\}$ ve $\{x : f_n(x) \to 0\}$ uzayları X in kapalı altvektör uzayıdır.

Teorem 2.1.11. *[33, Teorem 6.5.21]*

(X,P) local konveks bir uzay, S ve M X in boştan farklı altuzayları olsun. Bu durumda aşağıdaki denklik sağlanır.

$$M \subset \overline{<S>} \Leftrightarrow \forall f \in X' : \quad (S \subset Kern f \Rightarrow M \subset Kern f)$$

Tanım 2.1.8. [33, Teorem 6.6.1]

X ve Y aynı $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki lineer uzay ve $<,>: X \times Y \to \mathbb{K}$ bilineer dönüşümü,

D1) Sıfırdan farklı her $x \in X$ için $< x, y > \neq 0$ olacak şekilde en az bir $y \in Y$ vardır.

D2) Sıfırdan farklı her $y \in Y$ için $< x, y > \neq 0$ olacak şekilde en az bir $x \in X$ vardır.

önermelerini sağlıyorsa (X,Y) ikilisine bilineer dönüşümü altında dual çifttir denir.

Teorem 2.1.12. *[33, Teorem 6.6.13]*

(X,Y) dual çift ve A cümlesi de X uzayının lokal konveks bir alt cümlesi olsun. O halde, $\overline{A}$ cümlesi, (X,Y) dual çifti ile uyumlu olan bütün topolojilerde aynıdır.

2.2 Dizi Uzayları

Bu kısımda dizi uzayı tanımı verilerek bazı dizi uzaylarının $\alpha-, \beta-, \gamma-$ dualleri incelenecektir.

Tanım 2.2.1. [33, Teorem 1.2.2]

Bu tezde reel terimli bütün dizilerin cümlesi w ile gösterilecektir. w cümlesi, $x = (x_k)$, $y = (y_k)$ ve α bir skaler olmak üzere;

$$x + y = (x_k + y_k) \text{ ve } \alpha x = \alpha x_k$$

şeklinde tanımlanan işlemler altında bir lineer uzaydır. Bu uzayın $\lambda \subset w$ olacak şekildeki bir alt uzayına dizi uzayı denir.

$x = (x_k)$ reel terimli bir dizi olsun. Her $k \in \mathbb{N}$ için $|x_k| \leq M$ olacak şekilde $M \geq 0$ sayısı mevcut ise x dizisine sınırlı dizi denir. Reel terimli sınırlı dizilerin cümlesi ℓ_∞ ile gösterilir. Buna göre,

$$m = \ell_\infty = \left\{ x = (x_k) \in w : \| x \|_\infty = \sup_k |x_k| < \infty \right\},$$

şeklindedir. Sınırlı olmayan bir diziye sınırsız dizi denir.

Her $\varepsilon > 0$ için $n > n_0$ olduğunda $|x_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ ve $a \in \mathbb{R}$ mevcut ise (x_n) dizisi a noktasına yakınsaktır denir ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = a$$

şeklinde gösterilir. Yakınsak dizilerin cümlesi c ile gösterilir ve

$$c = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_k x_k \text{ mevcut } \right\}$$

şeklindedir. Sıfıra yakınsak dizilerin cümlesi de c_0 ile gösterilir ve

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) \in w : \lim_k x_k = 0 \right\}$$

şeklindedir. $1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\Sigma_k |x_k|^p < \infty$ olan diziye $p-$ mutlak yakınsak seri oluşturan dizi denir. $p-$ mutlak yakınsak seri oluşturan dizilerin cümlesi ℓ_p ile gösterilir ve

$$\ell_p = \left\{ x = (x_k) \in w : \Sigma_k |x_k|^p < \infty \right\}$$

şeklindedir. $p = 1$ mutlak yakınsak dizilerin uzayı,

$$\ell = \left\{ x = (x_k) \in w : \Sigma_k |x_k| < \infty \right\}$$

ile gösterilir. Bunların dışında çok kullanılan dizi uzayı örnekleri, kısmi toplamlar dizisi sınırlı seri oluşturan dizilerin,

$$bs = \left\{ x = (x_k) \in w : \sup_n |\Sigma_{k=0}^n x_k| < \infty \right\}$$

sınırlı-salınımlı dizilerin,

$$bv = \left\{ x = (x_k) \in w : \Sigma_k |x_k - x_{k-1}| < \infty \right\}$$

yakınsak seri oluşturan dizilerin,

$$cs = \left\{ x = (x_k) \in w : \left(\Sigma_{k=0}^n x_k \right) \in c \right\}$$

uzaylarıdır. Ayrıca,

$$m_0 = \left\{ x = (x_k) \in w \mid \{x_k : k \in \mathbb{N}\} \text{ sonlu bir cümle} \right\}$$

$$bv_0 = bv \cap c_0$$

ve sonlu adette terimi dışındaki terimleri sıfır olan dizilerin uzayı

$$\varphi = \left\{ x = (x_k) \in w : \exists n \in \mathbb{N} \quad \forall k \geq n \text{ için } x_k = 0 \right\}$$

ile gösterilir. Bu uzay e^k cümlesinin gerdiği uzaydır. (e^k) k. terimi 1, diğer terimleri sıfır olan dizileri göstermek üzere,

$$\varphi = < e^k \mid k \in \mathbb{N} >$$

eşitliği geçerlidir. Yukarıda tanımlanan dizi uzayları arasında,

$$\varphi \subseteq \ell \subseteq c_s \subseteq c_0 \subseteq c \subseteq \ell_\infty \subseteq w$$

kapsaması geçerlidir.

ℓ_∞, c ve c_0 uzayları,

$$\|x\|_\infty = \sup_k |x_k|$$

$\ell_p (1 \leq p < \infty)$ uzayı,

$$\|x\|_{\ell_p} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p \right)^{1/p}$$

bs ve cs uzayları,

$$\|x\|_{bs} = \sup_n \left| \sum_{k=1}^{n} x_k \right|$$

bv ve bv_0 uzayları da,

$$\|x\|_{bv} = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k-1}|$$

normu ile Banach uzaylarıdır.

Tanım 2.2.2. [34, shf. 272]

$\lambda \subset w$ dizi uzayı, her $x = (x_k) \in \lambda$ için,

$$\pi_k(x) = x_k, \ \forall k \in \mathbb{N}$$

ile tanımlı π_k kooordinat fonksiyonellerinin sürekli olduğu topolojiye sahip ise $K-$ uzay adını alır. Tam lineer metrik (normlu) $K-$uzaya FK-(BK-) uzay denir.

Tanım 2.2.3. [32, shf. 55]

H, Hausdorff topolojiye sahip bir vektör uzayı olsun. X, H nın alt vektör uzayı olmak üzere, X uzayı yerel konveks Fréchet uzayı ve topolojisi H nın indirgenmiş topolojisinden daha ince ise, X uzayına FH- uzayı denir. Eğer X bir Banach uzay ise, BH- uzayı denir.

”X ve Y iki FH uzayı olsun” tabiri ile X ve Y uzaylarının aynı H Hausdorff uzayının alt uzayları olduğu kabul edilecektir.

Teorem 2.2.1. *[32, Teorem 4.2.2]*

X bir Fréchet uzay, Y bir FH uzay ve $f : X \to Y$ dönüşümü lineer olsun. Eğer $f : X \to H$ sürekli ise, $f : X \to Y$ süreklidir.

Sonuç 2.2.2. *[32, Teorem 4.2.3]*

X bir Fréchet uzay, Y bir FK-uzay ve $f : X \to Y$ dönüşümü lineer olsun. Eğer $p_n \circ f : X \to K$ dönüşümü her n için sürekli ise,$f : X \to Y$ süreklidir.

Sonuç 2.2.3. *[32, Teorem 4.2.4]*

X ve Y, $X \subset Y$ olacak şekilde birer FH-uzayı olsunlar. Buna göre X in topolojisi Y nin X e indirgenmiş topolojisinden daha geniştir. Topolojilerin çakışık olması için gerek ve yeter şart X in Y nin kapalı bir alt uzayı olmasıdır.

Örnek 2.2.1. [33]

w, dizi uzayı,

$$d(x,y) = \sum_k 2^{-k} \frac{|x_k - y_k|}{1+|x_k - y_k|}$$

metriğinden elde edilen τ_w topolojisiyle bir K-uzay teşkil eder. (w, τ_w) topolojik dizi uzayının bir $x \in X$ noktasına yakınsayan $x^{(n)} = \left(x_k^{(n)}\right)$ dizisini göz önüne alalım. Bu takdirde;

$$x^{(n)} \to x = (x_k) \in (w, \tau_w) \Leftrightarrow \left(x_i^{(n)}\right) \to x_i \in \mathbb{K} \text{ (koordinatsal)}$$

önermesi geçerlidir. Yani, $(x^{(n)})$ dizisinin $x = (x_k)$ dizisine yakınsaması için gerek ve yeter şart $\forall k \in \mathbb{N}$ için,

$$\lim_k x_k^{(n)} = x_k$$

olarak yakınsamasıdır. Bu yakınsama koordinatsal yakınsaklık olarak bilinir. τ_w topolojisi de w üzerindeki koordinatsal yakınsaklık topolojisi adını alır. Bu topoloji w üzerindeki π_k koordinat fonksiyonelini sürekli kılan en zayıf topolojidir.

Tanım 2.2.4. [30, shf. 87]

$X \subset w$ normlu bir dizi uzayı ve $(b_k) \subset X$ olmak üzere, her bir $x \in X$ için;

$$\lim_{n\to\infty} \|x - \Sigma_{k=0}^{n} a_k b_k\| = 0$$

olacak şekilde bir tek $a = (a_k) \in w$ mevcut ise (b_k) cümlesine X uzayı için bir Schauder baz denir.

e^k cümlesi c_0 ve ℓ_p uzayları için bir Schauder bazdır.

$1 = e = (1,1,1,...)$ tüm terimleri 1 olan dizi ve $e^1 = (1,0,0,...)$, $e^2 = (0,1,0,...)$ olmak üzere $e, e^k (k \in \mathbb{N})$ cümlesi c uzayı için bir Schauder bazdır. $x = (x_k) \in c$ dizisi için $x_k \to a (k \to \infty)$ ise,

$$x = a \cdot e + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - a) e^k$$

şeklinde tek türlü olarak yazılabilir.

Tanım 2.2.5. [33]

X ve Y dizi uzayı olmak üzere,

$$X \cdot Y = \{xy = (x_k y_k) : x \in X, y \in Y\}$$
$$X^Y = \{a \in w : \forall x \in \text{X için } xa = (x_k a_k) \in Y\}$$

şeklindedir.

Teorem 2.2.4. *[33, Teorem 2.1.4]*

(a) $x = (x_k) \in bv$ *ve* $y = (y_k) \in cs$ *ise* $xy = (x_k y_k) \in cs$

(b) $x = (x_k) \in bv_0$ *ve* $y = (y_k) \in bs$ *ise* $xy = (x_k y_k) \in cs$

dır.

Tanım 2.2.6. [33, Tanım 6.7.4]

X bir yerel konveks uzay olsun. Eğer X uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına dizisel tamdır denir.

Tanım 2.2.7. [33, Tanım 7.1.4]

X bir dizi uzayı olsun. Bu durumda;

$$X^{\alpha} = \{a = (a_k) \in w : \text{her } x \in X \text{ için } ax \in \ell_1\},$$
$$X^{\beta} = \{a = (a_k) \in w : \text{her } x \in X \text{ için } ax \in cs\},$$
$$X^{\gamma} = \{a = (a_k) \in w : \text{her } x \in X \text{ için } ax \in bs\}$$

cümlelerine sırasıyla X uzayının α-, β- ve γ-duali denir.

Tanım 2.2.5 dan $X^{\alpha} = X^{\ell}$,$X^{\beta} = X^{cs}$ ve $X^{\gamma} = X^{bs}$ olarak gösterilebilir.

Teorem 2.2.5. *[33, Teorem 7.1.5]*

X, w uzayının boştan farklı altuzay $\xi \in \alpha, \beta, \gamma$ olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(a) $\varphi \subseteq X^{\alpha} \subseteq X^{\beta} \subseteq X^{\gamma}$

(b) $Y \subset X \subset w \Rightarrow X^{\xi} \subset Y^{\xi}$

(c) I bir indeks kümesi, $X_i(i \in I)$ dizi uzayları olmak üzere, eğer $X = \bigcup_{i \in I} X_i$ ise

$$X^{\xi} = \bigcap_{i \in I} X_i^{\xi}$$

eşitliği sağlanır.

(d) $X \subset X^{(\xi\xi)} = (X^{\xi})^{\xi}$

(e) $X^{\xi} = X^{\xi\xi\xi}$

Uyarı 2.2.6. *ξ, herhangi bir dizi uzayı olmak üzere, $Y \subset X$ ise,*

$$X^{\xi} \subset Y^{\xi}$$

kapsaması geçerlidir.

X bir dizi uzayı ve $\xi \in \alpha, \beta, \gamma$ olmak üzere genelde $X \neq X^{\xi\xi}$ dır. Ancak eşitliği sağlayan uzaylar için aşağıdaki tanım kullanılır.

Tanım 2.2.8. [33, Tanım 7.1.6]

X bir dizi uzayı ve $\xi \in \alpha, \beta, \gamma$ olsun. Eğer $X = X^{\xi\xi}$ ise X uzayına $\xi-$ uzay denir. Özel olarak $\alpha-$ uzayına kısaca Köthe uzay (mükemmel dizi uzayı) denir.

Tanım 2.2.9. [33, Tanım 7.1.8]

X bir dizi uzayı olsun. X uzayı için,

$$\left\{(u_k) \in w | \exists (x_k) \in X, \forall k \in \mathbb{N} : |u_k| \leq |x_k|\right\} \subset X$$

kapsaması geçerli ise X uzayına solid uzay denir.

Teorem 2.2.7. *[33, Teorem 7.1.8]*

X bir dizi uzayı olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(a) X uzayının solid olması için gerek ve yeter koşul $\ell_\infty X \subset X$ kapsamasının geçerli olmasıdır.

(b) Eğer $\mathbb{K} = \mathbb{C}$(kompleks sayı cismi) ise X uzayının solid olması için gerek ve yeter şart

$$\{u = (u_k) \in w | \exists x = (x_k) \in X, \forall k \in \mathbb{N} : |u_k| = |x_k|\} \subset$$

kapsamasının geçerli olmasıdır.

Bu teorem $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ için doğru değildir. $X = m_0, u = (u_k) = \left(\frac{1}{k+1}\right) \in w$ ve $x = (x_k) = e$ seçilirse $|u_k| \leq |x_k|$ sağlanır. $e \in m_0$ iken $u \notin m_0$ dır. Bu nedenle m_0 uzayı solid değildir. m_0 uzayı teoremin şartını sağlar fakat solid değildir.

Teorem 2.2.8. *[33, Teorem 7.1.10]*

X, w uzayının bir altuzayı olmak üzere aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(a) X bir Köthe uzay ise, X solid uzaydır.

(b) X solid uzay ise $X^\alpha = X^\beta = X^\gamma$ eşitliği sağlanır.

Teorem 2.2.9. *[33, Teorem 7.1.11(a),(b)]*

(a) φ, w, $\ell_p (0 < p < \infty), c_0$ ve ℓ_∞ dizi uzayları solid uzaylardır.

(b) c ve bv uzayları solid değildir.

Teorem 2.2.10. *[33, Teorem 7.1.11(c)]*

$1 \leq p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ ve $\xi \in \alpha, \beta, \gamma$ olmak üzere

$$\left(\ell_p\right)^\xi = \ell_q$$

şeklindedir.

İspat. ℓ_p uzayı solid olduğundan ispatı $\xi = \beta$ için yapmamız yeterli olacaktır. O halde, $y = (y_k) \in w$, $p, q \in \mathbb{R}$ ve $1 < p, q < \infty$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere,

$$y = (y_k) \in \left(\ell_p\right)^\beta \Leftrightarrow y = (y_k) \in \ell_q$$

yazılabilir.

$y = (y_k) \in \ell_q$ olsun. Hölder eşitsizliğinden $\sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k$ serisi her $x = (x_k) \in \ell_p$ için yakınsak olur. O halde $y = (y_k) \in \left(\ell_p\right)^\beta$ elde edilir.

Tersine, $y = (y_k) \in \left(\ell_p\right)^\beta$ olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$f_n : \ell_p \to \mathbb{K} \qquad x = (x_k) \to f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k x_k$$

lineer dönüşümünü gözönüne alalım. $y^{[n]} = (y_1, y_2, ..., y_n, 0, 0, ...)$ şeklinde olup, $y^{[n]} \in \varphi \subset \ell_q$ dir. O halde her $x \in \ell_p$ için Hölder eşitsizliğinden

$$|f_n(x)| \leq \sum_{k=1}^{n} |y_k x_k| = \sum_{k=1}^{\infty} |y_k^{[n]} x_k| \leq \|y^{[n]}\|_q \|x\|_p$$

olup bu ise f_n fonksiyonelinin sürekliliğini verir. Bu durumda her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\|f_n\| \leq \|y^{[n]}\|_q$$

elde edilir. Tersine her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\|y^{[n]}\|_q \leq \|f_n\|$$

olduğunu gösterelim. Eğer $y^{[n]} = 0$ ise ispat açıktır. Kabul ededlim ki $y^{[n]} \neq 0$ olsun. O halde $x^{(n)} = (x_k^{(n)})_k$ dizisini

$$x_k^{(n)} = \begin{cases} \frac{|y_k|^q}{y_k} & , \quad y_k \neq 0 \text{ ve } k \leq n \\ 0 & , \quad \text{Diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $x^{(n)} \in \ell_p$ dir ve $q = (q-1)p$ olmak üzere,

$$\|x^{(n)}\|_p = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^{(q-1)p}\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{p}} = \left(\|y^{[n]}\|_q\right)^{\frac{q}{p}}$$

şeklindedir ve $\|x^{(n)}\|_p \neq 0$ olduğundan;

$$\frac{|f_n(x^n)|}{\|x^{(n)}\|_p} = \frac{\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q}{\|x^{(n)}\|_p} = \frac{\|y^{[n]}\|_q^q}{\|x^{(n)}\|_p} = \|y^{[n]}\|_q^{q(1-\frac{1}{p})} = \|y^{[n]}\|_q$$

elde edilir. Bu nedenle $\|y^{[n]}\|_q \leq \|f_n\|$ elde edilir. Dolayısıyla $\|f_n\| = \|y^{[n]}\|_q$ dir. ℓ_p ve $\mathbb{K}$ uzayları birer Banach uzayları olduklarından (f_n) dizisi için, Banach-Steinhaus teoremini uygularsak,

$$f_y : \ell_p \to \mathbb{K}, \quad x = (x_k) \to f_y(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} y_k x_k$$

dönüşümü süreklidir ve

$$\|f_y\| \leq \sup_n \|f_n\| = \sup_n \|y^{[n]}\|_q < \infty$$

sağlanır.

$$\sup_n \|y^{[n]}\|_q = \sup_n \left(\sum_{k=1}^{n} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{\infty} |y_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

olduğundan $y = (y_k) \in \ell_p$ elde edilir.

Sonuç olarak

$$(\ell_p)^{\beta} = \ell_q$$

elde edilir. $\square$

2.3 Dizi Uzaylarında Matris Dönüşümleri

Bu kısımda matris dönüşümleri ile ilgili bazı tanım ve teoremlere yer verilecektir. Bu bölümde incelenen matrisler sonsuz matrislerdir.

Tanım 2.3.1. [34, shf. 244]

X ve Y, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde iki dizi uzayı ve $A=(a_{nk}),(n,k=1,2,3,...)$ bir sonsuz matris olsun. Her $x=(x_k)\in X$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$A_n(x)=\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k$$

serileri yakınsak ise, $Ax=\big(A_n(x)\big)$ yazılır. Eğer her $x=(x_k)\in X$ için $Ax=\big(A_n(x)\big)\in Y$ ise, A matrisi X den Y ye bir dönüşüm tanımlar denir ve $A:X\to Y$ şeklinde gösterilir. Ax dizisine x in A dönüşümü denir. $A:X\to Y$ dönüşümlerinin cümlesi (X,Y) şeklinde gösterilir.

Her $n\in\mathbb{N}$ için $(a_{nk})_k\in\varphi$ olan $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisine satır-sonludur denir.

Teorem 2.3.1. *[32, Teorem 8.3.8]*

X bir FK-uzay ve Y dizilerin herhangi bir cümlesi olsun. Eğer $A\in(X,Y)$ ise bu durumda $A^T\in(Y^{\beta},X^f)$ dır.

Tanım 2.3.2. [32, Teorem 1.2.3]

Bir $A=(a_{nk})$ sonsuz matrisi verilsin. Eğer A matrisi yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştürüyorsa A ya konservatif matris denir ve $A\in(c,c)$ ile gösterilir. Ayrıca konservatif A matrisi limiti de koruyorsa A ya regüler matristir denir.

Şimdi bazı matris sınıflarının karakterizasyonunu veren teoremleri ispatsız olarak verelim.

Teorem 2.3.2. *[33, Teorem 2.3.5]*

Bir A matrisi için aşağıdakiler eşdeğerdir:

(i) $A\in(\ell_\infty,\ell_\infty)$

(ii) $A\in(c_0,\ell_\infty)$

(iii) $\|A\| = \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

Teorem 2.3.3. *[30, Teorem 7.1.4]*

$A \in (c,c)$ olması için gerek ve yeter koşul;

i) $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) Her p için, $\lim_n \sum_{k=p}^{\infty} a_{nk}$ *mevcut*

olmasıdır.

Teorem 2.3.4. *[30, Teorem 7.1.3]*

A matrisinin regüler $(A \in (c,c))$ olması için gerek ve yeter koşul;

i) $\sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty$

ii) $a_{nk} \to 0 (n \to \infty, k \text{ sabit})$

iii) $\sum_k a_{nk} \to 1 (n \to \infty)$

olmalıdır.

Tanım 2.3.3. [32, shf. 3]

$$w_A = \{x : Ax \quad \text{tanımlı}\}$$

cümlesine A matrisinin etki alanı denir.

c yakınsak dizilerin cümlesi olmak üzere, $c_A = \{x : Ax \in c\}$ ya A nın yakınsaklık etki alanı denir.

Y bir dizi olmak üzere A matrisinin Y uzayındaki etki alanı

$$Y_A = \{x : Ax \in Y\}$$

şeklinde tanımlanır.

A bir matris, $x \in c_A$ için $\lim_A x = \lim(Ax)_n$ olmak üzere $\lim_A : c_A \to \mathbb{K}$ olarak tanımlansın. Buna göre eğer A matrisi $\lim_A x = m \lim x$ şartını sağlıyorsa m-çarpımsal denir. Eğer $m = 1$ ise A matrisine regülerdir denir.

A bir matris olsun. Eğer $c_A = c_B$ olacak şekilde tüm sütunları sıfıra yakınsayan bir B matrisi varsa A ya replaceable denir.

$\chi(A) = \lim_A e - \sum_k \lim_A e^k$ olarak tanımlanmak üzere, konservatif A matrisi için $\chi(A) = 0$ ise A matrisine conull , $\chi(A) \neq 0$ ise A matrisine coregulerdir denir.

$X^f \subset cs$ olan FK- X uzayına yarı konservatif (sc) uzay denir.

bv uzayını kapsayan yarıkonservatif uzaya salınımlı yarı konservatif (vsc) uzay denir.

X konservatif bir FK uzay olsun. Eğer $1^{(n)} \to 1$ zayıf yakınsak ise X uzayına conull uzay denir. Eğer bu yakınsama güçlü ise bu durumda X uzayına güçlü conull uzay denir.

Teorem 2.3.5. *[32, Teorem 4.3.12]*

(X,q) bir FK-uzay ve A bir matris olsun. Bu durumda $X_A = \{x : Ax \in X\}$, $p \cup h \cup q \circ A$ ile bir FK-uzaydır. Burada $p_n(x) = |x_n|$, $h_n(x) = \sup_m |\sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k|$ olarak tanımlanır.

Teorem 2.3.6. *[33, Teorem 2.5.7]*

Conull bir A matrisi hem sınırlı ıraksak dizileri hem de sınırsız dizileri toplar. Yani $\chi(A) = 0$ olması $c \subsetneq m \cap c_A \subsetneq c_A$ dır.

Teorem 2.3.7. *[33, Teorem 2.5.8]*

Eğer conservative bir A matrisi sınırlı ıraksak bir diziyi topluyorsa sınırsız bir diziyi de toplar. Yani $c_A \subset m$ olması $c_A = c$ olduğu anlamına gelir.

Tanım 2.3.4. [32, Teorem 4.3.4]

X bir FK-uzay ve z bir dizi olsun. Bu durumda $x.z = (x_n z_n)$ olmak üzere $z^{-1}X = \{x \in w : x.z \in X\}$ olarak tanımlanır. Buna göre $M(X) = \cap_{x \in X} x^{-1} Y$ olur.

Teorem 2.3.8. *[32, Teorem 4.4.10]*

Y bir FK-uzay, z bir dizi, $X = z^{-1}Y$ olsun. Bu durumda X bir FK-uzay ve $f \in X' \Leftrightarrow f(x) = \alpha x + g(z.x)$, $\alpha \in \varphi$, $g \in Y'$ önermesi geçerlidir.

Teorem 2.3.9. *[33, Teorem 8.1.8]*

$A = (a_{nk})$ keyfi bir matris ve E bir FK-uzay olsun. Bu durumda E_A, c_A ve ℓ_A nın dualleri aşağıdaki şekilde temsil edilir.

(a) $\forall f \in E_A' \quad \exists \alpha = (\alpha_k) \in w_A^{\beta} \quad \exists h \in E' :$

$$f(x) = h(Ax) + \sum_k \alpha_k x_k = h(Ax) + \alpha x \quad (x = (x_k) \in E_A)$$

(b) $\forall f \in c_A' \quad \exists \mu \in \mathbb{K} \quad \exists t = (t_n) \in \ell \quad \exists \alpha = (\alpha_k) \in w_A^\beta$:

$f(x) = \mu \lim_A x + \sum_n t_n \sum_k a_{nk} x_k + \sum_k a_k x_k$

$= \mu \lim_A x + t(Ax) + \alpha x \qquad (x = (x_k) \in c_A)$

(c) $\forall f \in \ell_A' \quad \exists t = (t_n) \in m \quad \alpha = (\alpha_k) \in w_A^\beta$:

$f(x) = t(Ax) + \alpha x \qquad (x = (x_k) \in \ell_A)$

3. FK UZAYLARININ BÖLÜMSEL ALT UZAYLARI

Bu bölümde K-uzayına ait bir elemanın n.kesimi (bölümü, kısmı) tanımlanarak, bu sayede oluşturulan alt uzaylar ve bu altuzayların özellikleri incelenecektir.

3.1 Bölümsel AltUzaylar

Tanım 3.1.1. [33, Tanım 7.2.10]

X, φ uzayını kapsayan bir K-uzay olsun. Bir $x \in X$ elemanının n.kesimi(bölümü),

$$x^{[n]} = \sum_{k=0}^{n} x_k e^{(k)}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer, $x^{[n]} \to x$ (yani $\lim_{n\to\infty} \|x - x^{[n]}\| = 0$) ise x dizisi AK-özelliğine sahiptir denir.

Eğer $\{x^{[n]} : n \in \mathbb{N}\}$ cümlesi X uzayında sınırlı ise x dizisi AB-özelliğine sahiptir denir.

Eğer, $x \in \overline{\varphi}$ ise x dizisi AD-özelliğine sahiptir denir.

Benzer şekilde $x^{[n]} \to x$ yakınsaması $\sigma(X, X')$ zayıf topolojiye göre ise x dizisi SAK-özelliğine sahiptir denir.

Her $f \in X'$ için, $\sum_k x_k f(e^k)$ serisi yakınsak ise x dizisi FAK-özelliğine sahiptir denir.

Yukarıda tanımladığımız özelliklere sahip olan dizilerin cümlesi,

$$\begin{aligned}
X_{AK} = S = S(X) &= \{x \in X : x \quad AK - \text{özelliğine sahiptir}\} \\
X_{SAK} = W = W(X) &= \{x \in X : x \quad SAK - \text{özelliğine sahiptir}\} \\
X_{FAK} = F = F(X) &= \{x \in X : x \quad FAK - \text{özelliğine sahiptir}\} \\
X_{AB} = B = B(X) &= \{x \in X : x \quad AB - \text{özelliğine sahiptir}\}
\end{aligned}$$

şeklinde gösterilir.

X, φ uzayını kapsayan bir K-uzayındaki bütün elemanlar yukarıdaki özelliklerden hangisine sahipse bu durumda uzay o özelliğe sahiptir denir. Bu durumda, X uzayı;

$$
\begin{aligned}
\text{AB-uzay} &\Leftrightarrow X_{AB} = B = X, \\
\text{AK-uzay} &\Leftrightarrow X_{AK} = S = X, \\
\text{SAK-uzay} &\Leftrightarrow X_{SAK} = W = X, \\
\text{FAK-uzay} &\Leftrightarrow X_{FAK} = F = X
\end{aligned}
$$

ve

$$\text{AD-uzay} \Leftrightarrow \overline{\varphi} = X$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.2. [32, Tanım 10.2.3]

X, φ uzyını kapsayan bir FK-uzay olsun. Bu durumda,

$$
\begin{aligned}
F^{+} &= F^{+}(X) \\
&= \left\{ z \in w : \left\{ z^{(n)} \right\}, X \text{ de zayıf Cauchy} \right\} \\
&= \left\{ z \in w : \forall f \in X', \left\{ z_n f(e^n) \right\} \in cs \right\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
B^{+} &= B^{+}(X) \\
&= \left\{ z \in w : \left\{ z^{(n)} \right\}, \text{ X de sınırlı} \right\} \\
&= \left\{ z \in w : \left\{ z_n f(e^n) \right\} \in bs, \forall f \in X' \right\}
\end{aligned}
$$

olarak tanımlanır.

Yukarıdaki tanımlardan $F = F^{+} \cap X$, $B = B^{+} \cap X$ olarak yazabiliriz.

Her $x \in \varphi$ için $x^{[n]} - x$ dizisi sıfır dizisi olduğundan,

$$\varphi \subset X_{AK}$$

kapsaması geçerlidir.

Lemma 2.1.2 (a) dan yakınsak her dizi zayıf yakınsak olduğundan,

$$X_{AK} \subset X_{SAK}$$

kapsaması geçerlidir.

$x \in X_{SAK}$ için, $f(x^{[n]}) \to f(x)$ olduğundan $f(x^{[n]})$ yakınsak olur. Bu ise,

$$X_{SAK} \subset X_{FAK}$$

kapsamasının geçerli olduğunu gösterir.

Lemma 2.1.2 (c) den zayıf yakınsak her dizi sınırlı olduğundan,

$$X_{FAK} \subset X_{AB}$$

kapsaması sağlanır.

$x \in X_{SAK}$ alalım. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için $\{x^{[n]}\} \subset \varphi$ olup her $f \in X'$ için $f(x^{[n]}) \to f(x)$ olduğundan Teorem 2.1.12 dan $x \in \overline{\varphi}^{\sigma(X,X')} = \overline{\varphi}^{\tau}$ olur ki bu ise,

$$X_{SAK} \subset \overline{\varphi}$$

kapsamasının geçerli olduğunu gösterir.

Buna göre, φ uzayını kapsayan X uzayının alt uzayları arasında,

$$\varphi \subset X_{AK} \subset X_{SAK} \subset X_{FAK} \subset X_{AB} \text{ ve } X_{SAK} \subset \overline{\varphi}$$

kapsamaları geçerlidir.

Teorem 3.1.1. *[33, shf. 358]*

$\ell_p(1 \leq p < \infty)$ uzayı bir AK-uzaydır.

İspat. $(\ell_p)_{AK} = \ell_p$ eşitliği gösterilmelidir. Tanımdan $(\ell_p)_{AK} \subset \ell_p$ olduğu aşikardır. $\ell_p \subset (\ell_p)_{AK}$ kapsaması için $x = (x_k) \in \ell_p$ alalım. x dizisinin n.kısmı

$$x^{[n]} = (x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...)$$

şeklinde olup

$$x^{[n]} - x = (0, 0, 0, ..., -x_{n+1}, -x_{n+2}, ...)$$

olur. $\|x^{[n]} - x\|_p$ normunun n üzerinden limiti alınırsa,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \|x^{[n]} - x\|_p &= \lim_{n\to\infty} \Big(\sum_{k \geq n+1} |x_k|^p \Big)^{\frac{1}{p}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise $x = (x_k) \in (\ell_p)_{AK}$ anlamına gelir. O halde $\ell_p \subset (\ell_p)_{AK}$ dir. Sonuç olarak $\ell_p = (\ell_p)_{AK}$ olup ℓ_p bir AK-uzaydır. □

Teorem 3.1.2. *AK-uzay olan her X dizi uzayı AD-uzaydır. Yani,*

$$X_{AK} = X \Rightarrow X = \overline{\varphi}$$

dır.

İspat. X bir AK-uzay olsun. Her $x \in X$ için $x^{[n]} \to x$ olup, $\{x^{[n]}\} \subset \varphi$ olduğundan $x \in \overline{\varphi}$ bulunur. Bu ise, $X \subset \overline{\varphi}$ olduğunu gösterir. $\varphi \subset X$ olduğundan

$$\overline{\varphi} = X$$

elde edilir. Bu ise X uzayının bir AD-uzay olduğunu gösterir. □

Teorem 3.1.3. *[32, Teorem10.3.19]*

X, φ uzayını kapsayan bir FK-uzayı olsun. X uzayının AK-uzay olması için gerek ve yeter şart X uzayının AB- ve AD-uzay olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow:)$ X uzayı AK-uzay ise, X uzayının AD-uzay olduğu Teorem 3.1.2 de gösterildi. X uzayı AK-uzay olduğundan $(x^{[n]})$ yakınsak bir dizi olup, $\left\{x^{[n]} : n \in \mathbb{N}\right\}$ cümlesi sınırlıdır. Dolayısıyla X uzayı bir AB-uzaydır.

$(\Leftarrow:)$ X bir AB uzay olsun. $f_n : X \to X, f_n(x) = x - x^{[n]}$ şeklinde tanımlayalım. X uzayı AB-uzay olduğundan f_n cümlesi noktasal sınırlıdır dolayısıyla eş süreklidir. $x \in \varphi$ için $f_n(x)$ dizisi 0 noktasına yakınsar. Teorem 2.1.10 den $\left\{x : f_n(x) \to 0\right\}$ cümlesi kapalıdır. Bu nedenle $f_n(x)$ dizisi $\overline{\varphi}$ uzayında 0 noktasına yakınsar. X bir AD-uzay olduğundan $\overline{\varphi} = X$ olup bu ise $f_n(x)$ dizisinin X uzayında 0 noktasına yakınsadığını gösterir. Yani her $x \in X$ için,

$$\|f_n(x)\| = \|x - x^{[n]}\| \to 0$$

olup bu ise X uzayının bir AK-uzay olduğunu gösterir. □

Tanım 3.1.3. [32, shf. 356]

X, φ uzayını kapsayan bir FK-uzay olsun. Bu uzayın f-duali,

$$X^f = \left\{(f(e^k)) | \forall f \in X'\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 3.1.4. *[32, Teorem 7.2.11]*

X, φ uzayını kapsayan bir FK-uzay olsun. Bu durumda,

$$X^f = (\overline{\varphi})^f$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Bunun için $X^f \subseteq (\overline{\varphi})^f$ ve $(\overline{\varphi})^f \subseteq X^f$ olduğunu göstermeliyiz. $y = (y_k) \in X^f$ alalım. Bu durumda $y_k = f(e^k)$ olacak şekilde bir $f \in X'$ mevcuttur. f fonksiyonelinin $\overline{\varphi}$ uzayına kısıtlanışını $g = f|_{\overline{\varphi}}$ olarak alalım. $y_k = g(e^k)$ olup $g \in (\overline{\varphi})'$ olduğundan $y \in (\overline{\varphi})^f$ elde edilir. Dolayısıyla,

$$X^f \subseteq (\overline{\varphi})^f \tag{3.1.1}$$

kapsaması geçerlidir.

Tersine, $g \in (\overline{\varphi})'$ ve $y_k = g(e^k)$ olmak üzere $y = (y_k) \in (\overline{\varphi})^f$ olsun. Hahn-Banach teoreminden g fonksiyonelinin X uzayına $g = f|_{\overline{\varphi}}$ olacak şekilde bir f genişlemesi vardır. $f \in X'$ olup $y_k = f(e^k)$ eşitliği geçerlidir. Bu ise $y = (y_k) \in X^f$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla,

$$(\overline{\varphi})^f \subseteq X^f \tag{3.1.2}$$

kapsaması elde edilir. (3.1.1) ve (3.1.2) kapsamalarından,

$$X^f = (\overline{\varphi})^f$$

elde edilir. □

Teorem 3.1.5. *[32, Teorem7.2.6]*

Y, φ uzayını kapsayan bir FK-uzay ve X ise φ uzayını kapsayan Y uzayının bir alt uzayı olsun. Bu durumda,

$$X \subset Y \Rightarrow Y^f \subset X^f$$

kapsaması geçerlidir. Eğer X uzayı Y içinde kapalı ise,

$$X^f = Y^f$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. $u \in Y^f$ alalım. Buna göre $u_k = f(e^k)$ olacak şekilde $f \in Y'$ vardır. Eğer $g = f|_X$ denirse, $g \in X'$ olup, $f(e^k) = u_k = g(e^k)$ olduğu görülür. O halde,

$$Y^f \subset X^f$$

elde edilir.

Diğer taraftan $\varphi \subset X \subset Y$ ve X kapalı olduğundan Y uzayı üzerindeki kapanışlar alınır ve Teorem 3.1.4 kullanılırsa,

$$X^f \subset Y^f$$

içermesi elde edilir. □

Teorem 3.1.6. *[32, Teorem 8.6.1]*

X bir AD-uzay olsun. Bu durumda herhangi bir Y FK uzayı için $Y \supset X \Leftrightarrow Y^f \subset X^f$ dır.

İspat. Gereklilik Teorem 3.1.5 den açıktır. Lemma 2.1.4 ü kullanarak yeterliliği ispatlayalım. B, X de sınırlı φ nin bir altcümlesi olsun. B nin Y de sınırlı olduğunu göstermek için Teorem 2.1.3 den zayıf sınırlı olduğunu göstermek yeterlidir. $f \in Y^{'}$ olsun. Hipotezden herbir k için $f(e^{(k)}) = g(e^{(k)})$ olacak şekilde $g \in X^{'}$ vardır. O halde φ (özel olarak B cümlesi) üzerinde $g = f$ olur. $g[B]$ sınırlı olduğundan $f[B]$ sınırlıdır. Lemma 2.1.4(c) den $Y \supset \overline{\varphi}^{\tau_X} = X$ elde edilir. □

Teorem 3.1.7. *[32, Teorem 10.2.7]*

X, φ uzayını kapsayan bir FK-uzay, $z \in w$ olsun. Bu durumda,

(i) $z \in B^+ \Leftrightarrow z^{-1}X \supset bv_0$. Özel olarak $1 \in B^+ \Leftrightarrow X \supset bv_0$,

(ii) $z \in X_{AB} \Leftrightarrow z^{-1}X \supset bv$. Özel olarak $1 \in X_{AB} \Leftrightarrow X \supset bv$,

(iii) $z \in F^+ \Leftrightarrow z^{-1}X$ sc uzaydır. Özel olarak $1 \in F^+ \Leftrightarrow X$ sc uzaydır.

(iv) $z \in X_{FAK} \Leftrightarrow z^{-1}X$ vsc uzaydır. Özel olarak $1 \in X_{FAK} \Leftrightarrow X$ vsc uzaydır.

(v) $z \in X_{SAK} \Leftrightarrow z^{-1}X$ conull uzaydır. Özel olarak $1 \in X_{SAK} \Leftrightarrow X$ conull uzaydır.

İspat. (i): $z^{-1}X \supset bv_0$ olsun. Her iki tarafın $f-$dualini alırsak $(z^{-1}X)^f \subset (bv_0)^f = bs$ olur. $u \in (z^{-1}X)^f$ alırsak $u = (u_k) = f(e^k) \in bs$ olacak şekilde en az bir $f \in (z^{-1}X)^{'}$ vardır. O halde Teorem 2.3.8 den

$$f(e^{(n)}) = \alpha_n + g(ze^n) = \alpha_n + g(z_n e^n) = \alpha_n + z_n g(e^n), \qquad \alpha \in \varphi, g \in X^{'}$$

olur. Böylece $\left\{ f(e^{(n)}) \right\} \in bs \Leftrightarrow z \in B^+$ elde edilir.

(ii): $z \in X_{AB}$ ise $z \in X$ dır. Böylece $1 \in z^{-1}X$ olup (i) den $z^{-1}X \supset bv$ dır. Tersine $1 \in bv$ olduğundan $1 \in z^{-1}X$ yani $z \in X$ dir. (i) şartından $z \in X_{AB}$ elde edilir.

(iii): $z^{-1}X$ sc uzay olsun. O halde $(z^{-1}X)^f \subset cs$ olup (i) ye benzer olarak bs yerine cs alınarak ispat yapılır.

(iv): (iii) ye benzer olarak yapılır.

(v): $f \in (z^{-1}X)^{'}$ olsun. Böylece yukarıdakilere benzer şekilde $f(1-1^{(n)}) = g(z.1-z.1^{(n)}) = g(z-z^{(n)})$ olup sonuç sağlanır. □

Teorem 3.1.8. *X, φ kapsayan bir FK-uzay, $z \in w$, λ bir dizi uzayı olsun. $X(\lambda) = \{z : z^{-1}X \supset \lambda\}$ olmak üzere, eğer λ AD ise $X(\lambda) = (X^f)^{\lambda^f}$ dır.*

İspat. $z \in X(\lambda)$ olsun. Her $u \in X^f$ için $zu \in \lambda^f$ olduğunu gösterelim. $u \in X^f$ olduğundan $u_k = g(e^k)$ olacak şekilde $g \in X^{'}$ var olup $zu = (z_k u_k) = (z_k g(e^k)) = \big(g(z_k e^k)\big)$ olur. $z \in X(\lambda)$ olduğundan $z^{-1}X \supset \lambda$ olup her iki tarafın f dualini alırsak $(z^{-1}X)^f \subset \lambda^f$ elde edilir. $v \in (z^{-1}X)^f$ olsun. O halde $v_k = f(e^k)$ olacak şekilde $f \in (z^{-1}X)^{'}$ mevcut olup,

$$v_k = f(e^k) = \alpha_k + h(z_k e^k) \qquad \alpha \in \varphi, h \in X^{'}$$

eşitliği sağlanır. Burada $\alpha \in \varphi$ olduğundan $\alpha \in \lambda^f$ olup $\big(h(z_k e^k)\big) \in \lambda^f$ yani $z \in (X^f)^{\lambda^f}$ bulunur. Yani $X(\lambda) \subset (x^f)^{\lambda^f}$ kapsaması sağlanır.

Tersine $z \in (X^f)^{\lambda^f}$ olsun. Bu durumda her $u \in X^f$ için $zu \in \lambda^f$ olup,

$$\begin{aligned} zu = (z_k u_k) &= (z_k g(e^k)), g \in X^{'} \\ &= (g(z_k e^k)) \end{aligned}$$

olur. Şimdi $\alpha \in \varphi$ olmak üzere $f(x) = \alpha x + g(zx)$ olarak tanımlayalım. O halde $f(e^k) = \alpha_k + g(z_k e^k)$ olup $f(e^k) \in \lambda^f$ bulunur. Ayrıca $f(e^k) \in (z^{-1}X)^f$ olduğundan $(z^{-1}X)^f \subset \lambda^f$ olur. λ, AD-uzay olduğundan $z^{-1}X \supset \lambda$, yani $z \in X(\lambda)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.1.9. *[32, Teorem 10.2.10]*

Y bir sc uzay ve Z bir AD-uzay olsun. $X \supset Y.Z$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $X \supset Z$ dır.

İspat. $z \in Z$ olsun. O halde $z^{-1}X \supset Y$ olup Teorem 3.1.7 (iii) den $z \in F^+$ dır. Bu nedenle $Z \subset F^+ = X^{f\beta}$ olup

$$Z^f \supset Z^\beta \supset X^{f\beta\beta} \supset X^f$$

kapsamaları geçerlidir. Z bir AD-uzay olduğundan Teorem 3.1.6 den sonuç sağlanır. □

Teorem 3.1.10. *[32, Teorem 7.2.9]*

X, φ uzayını kapsayan bir FK-uzay olsun.

$$T : X^{\beta} \to X', u \to T(u) = \widehat{u},\ \textit{her } x \in X \textit{ için } \widehat{u}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k x_k$$

şeklinde bir T dönüşümü tanımlayalım. Bu durumda T dönüşümü içine izomorfizm olup (yani $X^{\beta} \subset X'$), X bir AK-uzay ise, T dönüşümü örten izomorfizm olur. (Yani $X^{\beta} = X'$)

İspat. Banach-Steinhaus teoreminden $\widehat{u} \in X'$ olup, $T(u) = \widehat{u} = 0$ ise, her $x \in X$ için $ux = 0$ elde edilir. Özel olarak $x = e^k$ için, $\widehat{u}(e^k) = 0 \quad (k \in \mathbb{N})$ olacağından $u = 0$ bulunur. Bu ise T dönüşümünün bire-bir olduğunu gösterir. T dönüşümünün lineerliği açıktır. Buna göre T bir izomorfizmdir.

X bir AK-uzay olsun. $f \in X'$ alalım. $u_n = f(e^n)$ olarak tanımlarsak her $x \in X$ için,

$$\begin{aligned} f(x) &= f\Big(\sum_{k=1}^{n} x_k e^k\Big) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k f(e^k) \\ &= \sum_{k=1}^{n} x_k u_k \end{aligned}$$

olup, bu ise $u \in X^f$ ve $f = \widehat{u}$ olduğunu gösterir. □

Teorem 3.1.11. *[32, Teorem 10.3.4]*

X, φ uzayını kapsayan bir FK-uzay olsun. Bu durumda,

$$B^+ = (X^f)^{\gamma}$$

eşitliği geçerlidir.

İspat.

$$\begin{aligned} B^+ &= \left\{ z \in w : z^{[n]} \text{ sınırlı} \right\} \\ &= \left\{ z \in w : (z_n f(e^n)) \in bs \forall f \in X' \right\} \end{aligned}$$

olup $z \in B^+$ alındığında her $u \in X^f$ için $z.u \in bs$ elde edilir. Bu ise, $z \in (X^f)^{\gamma}$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla,

$$B^+ \subset (X^f)^{\gamma} \tag{3.1.3}$$

kapsaması geçerlidir.

Tersine, $z \in (X^f)^\gamma$ olsun. Her $u \in X^f$ için $z.u \in bs$ olduğundan $z \in B^+$ elde edilir. Bu ise,

$$(X^f)^\gamma \subset B^+ \tag{3.1.4}$$

kapsamasının geçerli olduğunu gösterir. (3.1.3) ve (3.1.4) birleştirilirse,

$$B^+ = (X^f)^\gamma$$

elde edilir. □

Teorem 3.1.12. *[32, Teorem 10.4.2]*

X, φ uzayını kapsayan bir FK-uzay olsun. Bu durumda ,

$$F^+ = (X^f)^\beta$$

eşitliği geçerlidir.

İspat. Bu teoremin ispatı Teorem 3.1.11 de bs yerine cs alınarak benzer şekilde yapılır. □

Teorem 3.1.13. *[32, Teorem 10.5.1]*

X, φ uzayını kapsayan bir FK-uzay olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) X uzayı SAK-özelliğine sahiptir.

(ii) X uzayı AK-özelliğine sahiptir.

(iii) $X^\beta = X'$

İspat. $X_{AK} \subset X_{SAK}$ olduğundan (ii) şartından (i) şartı elde edilir.

X uzayı SAK-uzay ise bu durumda $X_{SAK} \subset \overline{\varphi}$ olduğundan X uzayı AD-uzay ve $X_{SAK} \subset X_{AB}$ olduğundan X uzayı aynı zamanda AB-uzaydır. Teorem 3.1.3 den X uzayı AK uzay olur. Dolayısıyla (i) şartından (ii) şartı elde edilir.

X uzayı AK olsun. Bu durumda Teorem 3.1.10 dan dolayı (ii) şartından (iii) şartı elde edilir.

Tersine (iii) şartı sağlansın. $f \in X'$ alalım. $x \in X$ için $f(x) = ux$ olacak şekilde $u \in X^\beta$ vardır. $u_n = f(e^n)$ olduğundan $x \in X_{SAK}$ olur. Bu ise X uzayının SAK-uzay olduğunu gösterir. Dolayısıyla (iii) şartından (i) şartı elde edilir. □

Teorem 3.1.14. *[32, Teorem 7.2.7]*

X, φ uzayını kapsayan bir FK-uzay olsun. Bu durumda,

(i) $X^{\beta} \subset X^{\gamma} \subset X^{f}$

(ii) X AK-özellikli ise, $X^{\beta} = X^{f}$

(iii) X, AD-özellikli ise, $X^{\beta} = X^{\gamma}$

dır.

İspat. $u \in X^{\beta}$ alalım. Her $x \in X$ için $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k x_k$ olarak tanımlayalım. Bu durumda f_n cümlesi X üzerinde noktasal yakınsaktır. Banach-Steinhaus teoreminden

$$f(x) = \lim_n f_n(x)$$

ile tanımlı f fonksiyoneli uzayın sürekli dualindedir. $f(e^k) = u_k$ olduğundan $u \in X^f$ bulunur. Bu ise,

$$X^{\beta} \subset X^{f}$$

olduğunu gösterir.

(ii) X uzayı AK özelliğine sahip olsun. $X^{\beta} \subset X^{f}$ olduğunu biliyoruz. $u \in X^f$ alalım. Bu durumda $u_k = f(e^k)$ olacak şekilde $f \in X'$ vardır. X AK-uzay olduğundan her $x \in X$ için $x = \sum_k x_k e^k$ dır. Her $f \in X'$ için

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_k x_k f(e^k) \\ &= \sum_k x_k u_k \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. $f \in X'$ olmasından dolayı $\sum_k x_k u_k$ serisi yakınsaktır. O halde $u \in X^{\beta}$ olur. Dolayısıyla $X^f \subset X^{\beta}$ kapsaması geçerlidir. Sonuç olarak,

$$X^f = X^{\beta}$$

elde edilir.

(iii) X AD-uzay olsun. $X^{\beta} \subset X^{\gamma}$ olduğunu biliyoruz. İspatı tamamlamak için $X^{\gamma} \subset X^{\beta}$ içermesini göstermeliyiz.

$u \in X^{\gamma}$ alalım. Her $x \in X$ için $f_n(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k x_k$ şeklinde tanımlansın. O halde $\{f_n\}$ noktasal sınırlıdır, dolayısıyla eş süreklidir. Her $x \in \varphi$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ mevcuttur. $E = \left\{x \in X : \lim_{n\to\infty} f_n(x) \text{ mevcut } \right\}$ cümlesini tanımlayalım. Yakınsaklık leması gereğince E cümlesi X uzayının kapalı alt cümlesidir. $\varphi \subset E \subset X$ olup cümlelerin

X içinde kapanışı alınırsa, X AD-uzay olduğundan, $\overline{\varphi} \subset \overline{E} = E \subset X = \overline{\varphi}$ elde edilir. Buna göre $E = X = \overline{\varphi}$ olur. O halde her $x \in X$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ mevcuttur. Dolayısıyla $\sum_{k=1}^{n} u_k x_k$ serisi yakınsak olup

$$u \in X^{\beta}$$

sağlanır. Sonuç olarak,

$$X^{\gamma} \subset X^{\beta}$$

elde edilir.

(i) $\overline{\varphi} \subset X$ olduğundan $X^{\gamma} \subset (\overline{\varphi})^{\gamma}$ olur. (iii) şartından $(\overline{\varphi})^{\gamma} = (\overline{\varphi})^{\beta}$ elde edilir. φ uzayını kapsayan bir FK-uzay için $(\overline{\varphi})^{\beta} \subset (\overline{\varphi})^{f}$ kapsaması geçerlidir. Teorem 3.1.1 den $(\overline{\varphi})^{f} = X^{f}$ olur. Dolayısıyla,

$$X^{\gamma} \subset X^{f}$$

kapsaması sağlanır. □

Teorem 3.1.15. *X, φ kapsayan bir BK-uzay olsun. Bu durumda*

(i) X, FAK

(ii) $M(X), sc$ *uzay*

(iii) $1 \in F^{+}[M(X)]$

önermeleri denktir.

İspat. (ii)$\equiv$ (iii) Teorem 3.1.7 (iii) den görülür.

$(i) \Rightarrow (iii)$: $z \in X$ olsun. $f \in M(X)^{'}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} f(1^{(m)}) - f(1^{(n)}) &= f(1^{(m)} - 1^{(n)}) \\ &= \alpha(1^{(m)} - 1^{(n)}) + g(z^{(m)} - z^{(n)}) \end{aligned}$$

olup $m, n \to \infty$ için limiti alınırsa $f(1^{(m)} - 1^{(n)}) \to 0$ olur. Bu ise $1 \in F^{+}[M(X)]$ olduğunu gösterir.

$(ii) \Rightarrow (i)$: $z \in X$ ve $M(X)$, sc olsun. O halde $M(X)^{f} \subset cs$ olup $u \in M(X)^{f}$ alalım. O halde $u_k = f(e^k)$ olacak şekilde $f \in M(X)^{'}$ mevcut olup $f(x) = \alpha x + g(zx)$, $\alpha \in \varphi, g \in X^{'}$ için

$$u_k = f(e^k) = \alpha_k + g(ze^k) = \alpha_k + g(z_k e^k)$$

olur. $u \in cs, \alpha \in cs$ olduğundan $\left(g(z_k e^k) \in cs\right)$ olup kısmi toplamları yakınsak olan seriler yakınsak olup $(z_k) \in X$ olduğu için X uzayı FAK özelliğine sahiptir.

□

Teorem 3.1.16. *[32, Teorem 10.3.8]*

X, φ uzayını kapsayan bir FK-uzay olsun. Bu durumda, X uzayının AB-özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart

$$X^f \subset X^\gamma$$

kapsamasının geçerli olmasıdır.

İspat. ($\Rightarrow$:) Teorem 3.1.11 dan $X \subset B^+ = (X^f)^\gamma$ olduğunu biliyoruz. Her iki tarafın $\gamma-$ duali alınırsa,

$$X^\gamma \supset (X^f)^{\gamma\gamma} \supset X^f$$

elde edilir.

($\Leftarrow$:) $X^f \subset X^\gamma$ kapsamasında her iki tarafın $\gamma-$ duali alınırsa,

$$(X^f)^\gamma \supset X^{\gamma\gamma} \supset X$$

olup, $B^+ = (X^f)^\gamma$ olduğundan,

$$X \subset B^+$$

kapsaması elde edilir. Bu ise X uzayının AB-uzay olduğunu gösterir. □

Teorem 3.1.17. *[32, Teorem 10.4.4]*

X, φ uzayını kapsayan bir FK-uzay olsun. Bu durumda X uzayının FAK-özelliğine sahip olması için gerek ve yeter şart

$$X^f \subset X^\beta$$

kapsamasının geçerli olmasıdır.

İspat. Teorem 3.1.16 in ispatına benzer şekilde bir ispat yapılır. □

Teorem 3.1.18. *[32, Teorem 7.3.5]*

i) bv_0 *bir AK-uzaydır.*

ii) $bv_0^\beta = bv_0^\gamma = bv_0^f = bs$

İspat. **i)** $x \in bv_0$ ve $x^{[n]} = \sum_{k=1}^{n} x_k e^{(k)}$ olmak üzere,

$$\|x - x^{[n]}\|_{bv} = |x_{n+1}| + \sum_{k=n+2}^{\infty} |x_k - x_{k+1}|$$

olup, $n \to \infty$ için limit alınırsa $x \in bv_0 = bv \cap c_0$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty} \|x - x^{[n]}\| = 0$$

elde edilir. Bu ise $x = (x_k) \in (bv_0)_{AK}$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla,

$$(bv_0)_{AK} = bv_0$$

olur. Sonuç olarak bv_0 bir AK-uzaydır.

ii) bv_0 uzayı bir AK-uzay olduğundan bir AD-uzaydır. Dolayısıyla Teorem 3.1.14 dan dolayı

$$bv_0^{\beta} = bv_0^{\gamma} = bv_0^{f}$$

eşitlikleri geçerlidir. Şimdi bu duallerin bs uzayına eşit olduğunu gösterelim:

$y \in bs$ ve $x \in bv_0$ olsun. Teorem 2.2.4 (b) den $xy = (x_k y_k) \in cs$ dir. Bu ise $y \in bv_0^{\beta}$ anlamına gelir. Dolayısıyla,

$$bs \subset bv_0^{\beta} \tag{3.1.5}$$

kapsaması geçerlidir.

Tersine, $u \in (bv_0)^f$ olsun. Bu durumda $u_k = f(e^k)$ olacak şekilde en az bir $f \in (bv_0)'$ vardır. $e^{[n]} = \sum_{k=1}^{n} e^k$ olmak üzere, f fonksiyonelinin lineerliği ve sürekliliği dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned}
\Big|\sum_{k=1}^{n} u_k\Big| &= \Big|f\big(\sum_{k=1}^{n} e^k\big)\Big| \\
&= \big|f(e^{[n]})\big| \\
&\le \|f\|.\|e^{[n]}\| \\
&= 2\|f\|
\end{aligned}$$

elde edilir. O halde $\sup_n \left|\sum_{k=1}^{n} u_k\right| < \infty$ olup bu ise, $u \in bs$ dolayısıyla

$$bv_0^{f} \subset bs \tag{3.1.6}$$

kapsamasının geçerli olduğunu gösterir. (3.1.5) ve (3.1.6) kapsamalarından

$$bv_0^{\beta} = bv_0^{\gamma} = bv_0^{f} = bs$$

elde edilir. □

4. MATRİS ETKİ ALANLARININ BAZI ALTUZAYLARI

İki kısımdan oluşan bu bölümün ilk kısmında matrisin ve uzayın seçimine bağlı olarak matris etki alanlarının bazı altuzayları arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz. İkinci kısımda ise uzayı özel olarak c alıp seçilen matrisin özelliğine göre etki alanlarının bazı altuzayları arasındaki ilişkiden bahsedeceğiz.

4.1 Matris Etki Alanları

Açıklama 4.1.1. *[32, Remark 12.1.1]*

Bu kısımda Y bir FK-uzay, $z \in w$ ve A, $Y_A \supset \varphi$ olacak şekilde bir matris olarak ele alınacak ve bazı altuzaylar Y_A da hesaplanacaktır.

$$\begin{array}{lclcl} Y_{A_{AK}} & = & S(Y_A) & = & \mathrm{S} \\ Y_{A_{SAK}} & = & W(Y_A) & = & \mathrm{W} \\ Y_{A_{FAK}} & = & F^{+}(Y_A) & = & F^{+} \\ Y_{A_{AB}} & = & B^{+}(Y_A) & = & B^{+} \end{array}$$

şeklinde gösterilecektir.

Lemma 4.1.2. *[32, Lemma 12.1.2]*

A ve z Açıklama 4.1.1 deki gibi olsun. a^k, A matrisinin k. sütunu olmak üzere $Az^{(m)} = \sum_{k=1}^{m} z_k a^k$ eşitliği geçerlidir.

İspat.

$$\left(Az^{(m)}\right)_n = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} z_k = \left(\sum z_k a^k\right)_n$$

dır. □

Teorem 4.1.3. *[32, Teorem 9.4.1]*

Y ve A Açıklama 4.1.1 deki gibi olsun. Bu durumda Y_A sc uzay olması için gerek ve yeter şart A matrisinin herbir sütunu Y uzayında ve a^k, A matrisinin k. sütunu olmak üzere herbir $g \in Y'$ için $\left\{g(a^k)\right\} \in cs$ şartının sağlanmasıdır.

İspat. ($\Rightarrow$:) sc uzayın tanımından $Y_A \supset \varphi$ olduğu için A matrisinin sütunları Y uzayındadır. $g \in Y'$, $x \in Y_A$ için $f(x) = g(Ax)$ olsun. Böylece Teorem 2.3.9 (a) dan $f \in {Y_A}'$ olur. Ayrıca $f(e^k) = g(a^k)$ ve $Y_A^f \subset cs$ olduğundan $\{g(a^k)\} \in cs$ elde edilir.

($\Leftarrow$:) Hipotezde $g = p_n$, $p_n(x) = x_n$ olarak alınırsa $\left\{g(a^k)\right\} = \left\{a^k\right\}$ olduğundan A matrisinin sütunları Y dedir. Böylece $w_A \supset bv$ olur. Şimdi $f \in Y_A'$ alalım. Teorem

2.3.9 (a) dan $g \in Y', \alpha \in w_A^\beta \subset bv^\beta = cs$ olmak üzere $f(x) = \alpha x + g(Ax)$ olur. Böylece $f(e^k) = \alpha_k + g(a^k)$ olup hipotezden ve $\alpha \in cs$ olduğundan $\{f(e^k)\} \in cs$ elde edilir. Dolayısıyla $Y_A^f \subset cs$ olup Y_A sc uzaydır. □

Teorem 4.1.4. *[32, Teorem 9.4.9]*

Y, A Açıklama 4.1.1 deki gibi ve Y_A vsc uzay olsun. Bu durumda Y_A conull uzay olması için gerek ve yeter şart her $g \in Y'$ için $\sum g(a^k) = g(A1)$ olmasıdır. Burada a^k, A matrisinin k. sütunudur.

İspat. ($\Rightarrow$:) $f(x) = g(Ax)$ olsun. Teorem 2.3.9 (a) dan $f \in Y_A'$ olur. Böylece

$$g(A1) = f(1) = \lim_m f(1^{(m)}) = \lim_m g(A1^{(m)}) = \sum g(a^k)$$

olup istenen eşitlik sağlanır.

($\Leftarrow$:) $f \in Y_A'$ olsun. Teorem 2.3.9 (a) dan iki durum söz konusudur. İlki $f(x) = \alpha x$, $\alpha \in w_A^\beta \subset bv^\beta = cs$ olmasıdır. Bu durumda $f(1 - 1^{(m)}) = \sum_{m+1}^{\infty} \alpha_k \to 0$ olduğundan Y_A conull uzaydır. İkincisi $f(x) = g(Ax)$ olmasıdır. $g(A1) = \sum_k g(a^k)$ olduğundan $f(1^{(m)}) \to f(1)$ olduğundan Y_A conull uzaydır. □

Teorem 4.1.5. *[32, Teorem 12.1.3]*

z, Y, A açıklama 4.1.1 deki gibi olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(i) $z \in B^+$

(ii) $\{Az^{(m)}\}$, *Y de sınırlı*

(iii) $Y_{A.z} \supset bv_0$

(iv) $g \in Y'$ *için* $\{z_k g(a^k)\} \in bs$ *olur. Burada* a^k,*A nın k. sütunudur.*

İspat. $(i) = (iii)$: $z^{-1}Y_A = Y_{A.z}$ olduğundan Teorem 3.1.7 (i) den açıktır.

$(iii) = (ii)$: $z_k a^k$, $A.z$ nin k. sütunu olmak üzere, $(Y_{A.z})^f \subset (bv_0)^f = bs$ olduğundan (ii) sağlanır.

$(ii) = (iv)$: "$\{Az^{(m)}\}$, Y de sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\forall g \in Y'$ için $\{g(Az^{(m)})\}$ sınırlı" çift önermesi sağlandığından Lemma 4.1.2 kullanılarak (iv) elde edilir. □

Sonuç 4.1.6. *[32, shf. 189]*

Bu sonuçları Teorem 3.1.11 e benzer olarak yapmak mümkündür. Y^g yi A bir matris ve $g \in Y'$ olmak üzere tüm $\{g(a_k)\}$ dizilerinin cümlesi olarak tanımlayalım. Bu durumda $B^+ = Y^{g\gamma}$ olur. Ayrıca Y_A, AB özelliğine sahipse $Y^g \subset Y_A^\gamma$ elde edilir. Benzer sonuçlar Teorem 4.1.7 de F^+ uzayı için yapılabilir.

Teorem 4.1.7. *[32, Teorem 12.1.5]*

z, Y, A Açıklama 4.1.1 deki gibi olmak üzere aşağıdakiler denktir:

(i) $z \in F^+$

(ii) $\{Az^{(m)}\}$, *Y de zayıf Cauchy dizisidir.*

(iii) $Y_{A.z}$ *sc uzaydır.*

(iv) $g \in Y'$ *için* $\{z_k g(a_k)\} \in cs$ *olur. Burada* a^k,*A nın k. sütunudur.*

İspat. $(i) = (iii)$: Teorem 3.1.7 (iii) den açıktır.

$(iii) = (ii)$: $z_k a^k$, Az nin k. sütunu olup Teorem 4.1.3 den istenen eşitlik elde edilir.

$(ii) = (iv)$: Teorem 4.1.5 dekine benzer olarak yapılır. □

Teorem 4.1.8. *[32, Teorem 12.1.6]*

z, Y, A Açıklama 4.1.1 deki gibi olmak üzere aşağıdakiler denktir.

(i) $z \in W$

(ii) $Az^{(m)}$ *Y uzayında Az ye zayıf yakınsak*

(iii) $Y_{A.z}$ *conull uzaydır.*

(iv) *Her* $g \in Y'$ *için* $\sum_k z_k g(a^k) = g(Az)$ *eşitliği geçerlidir.*

İspat. $(i) = (iii)$: Teorem 3.1.7 (v)den açıktır.

$(iii) = (ii)$: Teorem 4.1.4 a benzer olarak yapılır.

$(ii) = (iv)$ Lemma 4.1.2 den acıktır. □

Teorem 4.1.9. *[32, Teorem 12.1.7]*

z, Y, A Açıklama 4.1.1 deki gibi olmak üzere aşağıdakiler denktir.

(i) $z \in S$

(ii) $Az^{(m)} \to Az$*, Y de yakınsak*

(iii) $Y_{A.z}$ *güçlü conull uzay*

(iv) $\sum z_k a^k = Az$*, Y de yakınsak. Burada* a^k*, A matrisinin k. sütunudur.*

İspat. $(i) = (iii)$: Teorem 3.1.7 den sağlanır.

$(i) \Rightarrow (ii)$: $z = \sum z_k e^k$ ve $A : Y_A \to Y$ sürekli olduğundan $Az = \sum z_k A e^k = \sum z_k a^k$ elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (i)$: w_A AK özelliğine sahiptir. Böylece $z \in w_A, \quad u = p$ veya h için $u(z - z^{(m)}) \to 0$ olur. Böylece q, Y nin normu olmak üzere $q[A(z - z^{(m)})] \to 0$ olup $z \in S$ elde edilir. □

4.1.1 L_e ve L_a Altuzayları

Bu kısımda toplanabilmede önemli bir rol oynayan Y_A nın L_e ve L_a altuzaylarını tanıtıp Y ve A nın seçimine bağlı olarak bazı altuzaylarla arasındaki ilişkiyi inceleyeceğiz.

Tanım 4.1.1. [32, Tanım 12.2.2]

Y ve A Açıklama 4.1.1 deki gibi olmak üzere,

$$L_e^+ = \left\{ z \in w : \forall t \in Y^\beta \text{ için } (tA)z \quad \text{mevcut} \right\} \qquad L_e = L_e^+ \cap Y_A$$
$$L_a = \left\{ x \in Y_A : \forall t \in Y^\beta, (tA)z = t(Az) \right\}$$

olarak tanımlanır.

$t \in Y^\beta$, $Ax \in Y$ olduğundan $t(Ax)$ her zaman vardır. Ayrıca $\varphi \subset L_a \subset L_e$ kapsamaları geçerlidir.

$z \in L_e^+$ olsun. Bu durumda her $t \in Y^\beta$ için $(tA)z$ vardır. $t = e^n$ olarak alındığında $(tA)z = (Az)_n$ olup $z \in w_A$ olduğundan $L_e^+ \subset w_A$ kapsaması sağlanır.

$t \in Y^\beta$ ve $f \in Y_A'$ için $f(x) = t(Ax)$ olarak tanımlanırsa, $\sum f(e^k) x_k = (tA)x$ olur.

Teorem 4.1.10. *[32, Teorem 12.2.4]*

Y ve A Açıklama 4.1.1 deki gibi olmak üzere $F^+ \subset L_e^+, \quad F \subset L_e, \quad W \subset L_a$ *kapsamaları geçerlidir.*

İspat. $z \in F, \quad t \in Y^{\beta}$ olmak üzere $f \in Y_A'$ için $f(x) = t(Ax)$ olarak tanımlansın. F^+ nın tanımından $\sum f(e^k)z_k = (tA)z$ olduğundan $z \in {L_e}^+$ elde edilir. Benzer olarak $x \in W$ ise aynı f ile $f(x) = \sum f(e^k)x_k$ eşitliği $t(Ax) = (tA)x$ olduğunu gösterir. Dolayısıyla $x \in L_a$ dır. □

Teorem 4.1.11. *[32, Teorem 12.2.5]*

A bir matris, Y bir FK-uzay ve Y^{β} AD özelliğine sahip olsun. Bu durumda $L_e = L_a, \quad B^+ \cap w_A \subset L_e^+, \quad B \subset L_e = L_a$ önermeleri geçerlidir.

İspat. $x \in Y_A, \quad t \in Y^{\beta}$ olmak üzere φ uzayında $(tA)x = t(Ax)$ olup Y^{β} AD olduğundan $L_e = L_a$ olur.

$z \in B^+ \cap w_A$ olsun. $A.z = \big(a_{nk}z_k\big)$ olmak üzere $z \in B^+$ olduğundan $A.z \in (bv_0, Y)$ olur ve Teorem 2.3.1 den $(A.z)^T \in (Y^{\beta}, bs)$ elde edilir. Ayrıca $z \in w_A$ olduğundan $A.z$ nin herbir sütunu yani $(A.z)^T$ nin herbir satırı cs ye aittir. Böylece $(A.z)^T \in (Y^{\beta}, cs)$ olur. Dolayısıyla $t \in Y^{\beta}$ için $(A.z)^T t \in cs$ olur. $\sum_k \big[(A.z)^T t\big]_k = \sum_k \sum_n a_{nk} z_k t_n = (tA)z$ olup $z \in L_e^+$ elde edilir. Böylece $B^+ \cap w_A \subset L_{e^+}$ olur. Bu kapsamadan $B \subset L_e = L_a$ elde edilir. □

Sonuç 4.1.12. *[32, shf. 192]*

$A = I$ alalım. Bu durumda $Y_A = Y$ olur. Ayrıca $L_e = L_a = Y$ olduğu açıktır. Yani $A = I$ olarak aldığımızda görüyoruz ki bu bölümde Y_A için ispatlanan teoremler Y için de geçerlidir.

Teorem 4.1.13. *[32, Teorem 12.2.8]*

Y, A Açıklama 4.1.1 deki gibi olmak üzere $A^T \in (Y^{\beta}, Y_A^{\beta})$ olması için gerek ve yeter şart $L_e = Y_A$ olmasıdır.

İspat. Açıkça $L_e = Y_A$ gerek ve yeter şart her $t \in Y^{\beta}$ için $tA \in Y_A^{\beta}$ dır ve bu $A^T \in (Y^{\beta}, Y_A^{\beta})$ olduğunu gösterir. □

Tanım 4.1.2. [32, Tanım 12.2.9]

$G = \big\{ f \in Y_A' : f(x) = t(Ax), \quad t \in Y^{\beta} \big\}$ olarak tanımlanır.

Teorem 4.1.14. *[32, Teorem 12.2.10]*

Y, A Açıklama 4.1.1 deki gibi olsun. Bu durumda $G \subset Y_A^{\beta}$ olması için gerek ve yeter şart $L_a = Y_A$ olmasıdır.

İspat. ($\Rightarrow$:) $t \in Y^\beta$ olsun. $f(x) = t(Ax)$ olacak sekilde $f \in G$ tanımlayalım. Hipotezden her x dizisi için $t(Ax) = \alpha x$ olur. Özel olarak $x = e^k$ alalım. O halde $(tA)_k = \alpha_k$ olup her x dizisi için $t(Ax) = (tA)x$ eşitliği sağlanır.

($\Leftarrow$:) $f \in G$ olsun. Tanımdan dolayı $f(x) = t(Ax)$ olur ve hipotezden bu $(tA)x$ skalerine eşit olur. Böylece $x \in Y_A^\beta$ olup ispat tamamlanır. □

Açıklama 4.1.15. *[32, shf. 193]*

Y bir AK-uzay ve A, $Y_A \supset \varphi$ olacak şekilde bir matris olarak ele alınacaktır.

Teorem 4.1.16. *[32, Teorem 12.3.2]*

Y, A Açıklama 4.1.15 deki gibi olmak üzere $L_e^+ = F^+, \quad L_e = F, \quad L_a = W$ eşitlikleri geçerlidir.

İspat. $z \in L_e^+, \quad g \in Y'$ olsun. Y, AK olduğundan $t_n = g(e^n)$ olacak şekilde $t \in Y^\beta$ vardır. Ayrıca

$$g(Az^{(m)}) = \sum_{k=1}^{m} z_k g(a^k) = \sum_k z_k \sum_n g(e^n) a_{nk} = \sum_{k=1}^{m} \sum_n z_k a_{nk} t_n \to (tA)z$$

olur. Böylece Teorem 4.1.7 (ii) den $z \in F^+$ elde edilir.

Eğer $z \in L_a$ ise $t(Az) = g(Az)$ olur. Böylece Teorem 4.1.8 (iv) dan $z \in W$ dır. Karşıt içermeleri Teorem 4.1.10 den açıktır. Böylece ispat tamamlanır. □

Örnek 4.1.1. [32, Örnek 12.3.4]

$Y = cs, \quad (Ax)_n = x_n - x_{n-1}$ olsun. Bu durumda $Y_A = c$ dir. Üstelik $L_e^+ = F^+ = \ell_\infty, \quad L_e = F = c, \quad L_a = W = c_0$ eşitlikleri sağlanır.

Açıklama 4.1.17. *[32, shf. 194]*

Y, zayıf yakınsak dizilerin yakınsak olduğu FK topolojisine sahip bir FK-uzay, A, $Y_A \supset \varphi$ olacak şekilde bir matris olarak ele alınacaktır.

Eğer Y, AK-özelliğine de sahip bir uzaysa $Y^{\beta\beta} = Y$ olur. Gerçekten de

$$Y^{\beta\beta} = Y^{f\beta} = F^+ = F \subset Y$$

olduğundan $Y = Y^{\beta\beta}$ dır. c_0 Açıklama 4.1.17 de verilen Y uzayının özelliklerine sahip değildir fakat ℓ, bv ve bv_0 uzayları sahiptir.

Teorem 4.1.18. *[32, Teorem 12.4.4]*

Y,A Açıklama 4.1.17 deki gibi ve A satır sonlu olsun. Bu durumda Y_A uzayında zayıf yakınsak diziler yakınsaktır.

İspat. $x^n \xrightarrow{w} 0$ olsun. Bu durumda Y de $Ax^n \xrightarrow{w} 0$ olup Y de $Ax^n \to 0$ olur. Teorem 2.3.5 de verilen Y_A nın yarınormlarından herbir h_n gereksizdir. $q \circ A(x^n) \to 0 \quad (n \to \infty)$ olur. Ayrıca Y_A bir FK-uzay olduğundan herbir k için $p_k(x^n) = |x_k^n| \to 0 \quad (n \to \infty)$ olur. $\square$

Örnek 4.1.2. [32, Örnek 12.4.5]

z bir dizi olsun. $Ax = z.x$ alınırsa $z^\alpha = \ell_A$ olur. Böylece bu uzay Açıklama 4.1.17 deki özelliklere sahiptir.

Örnek 4.1.3. [32, Örnek 12.4.6]

A nın satır sonlu olma şartı Teorem 4.1.18 den çıkarılamaz. Gerçekten $n > 1$ için $a_{1k} = 1, \quad a_{nk} = 0$ olsun. O halde $\ell_A = cs$ dır. $u^n = e^n - e^{n+1}$ olsun. Bu durumda $\| u^n \| = 1$ olur. Eğer $f \in cs'$ ise $\{f(e^n)\} \in cs^f = bv \subset c$ olduğundan $f(u^n) = f(e^n) - f(e^{n+1}) \to 0$ olur. (u_n) dizisi yakınsak değildir.

Teorem 4.1.19. *[32, Teorem 12.4.7]*

Y, A Açıklama 4.1.17 deki gibi olmak üzere $S = W = F = F^+$ eşitlikleri sağlanır.

İspat. Eğer $z \in F^+$ ise $(Az^{(m)})$ Y uzayında zayıf Cauchy böylece Cauchy dizisidir. Bu nedenle $Az^{(m)} \to y$ olur. Teorem 2.3.5 den w_A, AK-uzay olduğundan w_A uzayında $z^{(m)} \to z$ olur. Böylece w da $Az^{(m)} \to Az$ olur. Fakat Y bir FK-uzay olduğundan w uzayında $Az^{(m)} \to y$ olup buradan $y = Az$ elde edilir. Böylece $z \in S$ olur. $\square$

Örnek 4.1.4. [32, Örnek 12.4.8]

$Y = \ell, \quad (Ax)_n = x_n - x_{n-1}$ olsun. Bu durumda $\ell_A = bv$ olur. Ayrıca $B = bv, \quad S = W = F = F^+ = bv_0$ eşitlikleri vardır.

Örnek 4.1.5. [32, Örnek 12.4.9]

$\ell_A = c$ olacak şekilde bir A matrisi yoktur. Gerçekten Teorem 4.1.19 den c uzayı için $F = c, \quad W = c_0$ olur. Üstelik $\ell_A = c_0$ veya ℓ^∞ olacak şekilde A matrisi yoktur. Çünkü $F^+ = \ell^\infty, \quad W = c_0$ şeklindedir.

Örnek 4.1.6. [32, Örnek 12.4.10]

$Y = \ell$ ve bv_0 gibi AK-özelliğine sahip ve zayıf yakınsak dizilerin yakınsak olduğu bir dizi uzayı olsun. Bu durumda sütunları Y de olan herhangi bir A matrisi için $L_e^+ = L_e = L_a = S = W = F = F^+$ dır.

Sonuç 4.1.20. *[32, Remark 12.4.12]*

Y, A Açıklama 4.1.17 deki gibi olmak üzere eğer Y_A sc uzay ise conull uzay olmalıdır.

İspat. Teorem 3.1.7 (iii) den $1 \in F^+$ olup Teorem 4.1.19 den $1 \in W$ elde edilir. □

Tanım 4.1.3. [32, shf. 197]

Bir X uzayı $X^{\beta f}$ uzayında kapalı ve X^β AD olma özelliğine sahipse X uzayına c-benzeri uzay denir. Örneğin; $c_0, c, \ell_\infty, bv, bs$ uzayları c-benzeri uzaylardır.

Eğer X c-benzeri bir uzay ise $X, X^{\beta\beta}$ da kapalıdır. Ayrıca X^β AK ve $X, X^{\beta\beta}$ da kapalı ise X uzayı bir c-benzeri uzaydır.

Teorem 4.1.21. *[32, Teorem 12.5.3]*

Y, c-benzeri uzay olmak üzere

$$L_e^+ = B^+ \cap w_A, \quad L_e = L_a = B$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $z \in L_e^+$ olsun. $t \in Y^\beta$ için $(tA)z = (Az)^T t$ olduğundan $(Az)^T \in (Y^\beta, cs)$ olur. Dolayısıyla $A.z \in (bv, Y^{\beta f})$ olup $A.z \in (bv_0, Y^{\beta f})$ olur. $A.z$, A matrisinin sütunlarının bir skalerle çarpım katları olduğundan Y uzayındadır. Dolayısıyla $A.z \in (bv_0, Y)$ olur. O halde Teorem 4.1.5 (iii) den $z \in B^+$ elde edilir. Sonuçların tersi Teorem 4.1.11 dan elde edilir. □

Örnek 4.1.7. [32, Örnek 12.5.4]

Y, AK-özelliğine sahip c-benzeri bir uzay (Örneğin; $Y = c_0$) olsun. Bu durumda satırları Y de olan herhangi bir A matrisi için $L_e^+ = B^+ = F^+, \quad L_e = L_a = B = F = W$ eşitlikleri sağlanır.

Sonuç 4.1.22. *[32, Remark 12.5.8]*

Y bir c-benzeri uzay ve A, $Y_A \supset \varphi$ olacak şekilde bir matris olsun. Bu durumda

(i) *Y_A, AB uzay,*

(ii) *$A^T \in (Y^\beta, Y_A^\beta)$,*

(iii) *$G \subset X^\beta$*

önermeleri denktir.

İspat. Teoremin ispatı Teorem 4.1.13, Teorem 4.1.14 ve Teorem 4.1.21 den elde edilir. □

4.2 c_A nın Bazı Altuzayları

c_A yakınsaklık etki alanını daha önce tanımlamıştık. Bu kısımda c_A nın bazı altuzaylarını tanımlayıp hangi özelliklere sahip olduğunu göreceğiz.

Öncelikle bu kısımda c_A FK-uzayının $S_{c_A}, W_{c_A}, F_{c_A}, B_{c_A}$ altuzaylarını sırasıyla S_A, W_A, F_A, B_A ile göstereceğiz. Burada A matrisini $\varphi \subset c_A$ olacak şekilde herhangi bir matris olarak alacağız. Yani A matrisinin $a_k = \lim_n a_{nk}$ olmak üzere sütunlarının herbiri vardır.

Tanım 4.2.1. [33, Tanım 8.2.2]

A, $\varphi \subset c_A$ olacak şekilde sonsuz bir matris ve a_k, A matrisinin k. sütununun limiti olsun. Bu durumda

$$I_A = \left\{x = (x_k) \in c_A \,|\, \textstyle\sum_k a_k x_k \text{ yakınsak}\right\},$$
$$\Lambda_A(x) = \lim_A x - \textstyle\sum_k a_k x_k \qquad (x = (x_k) \in I_A),$$
$$\Lambda_A^{\perp} = Kern\Lambda_A = \left\{x \in I_A \,|\, \Lambda_A(x) = 0\right\},$$
$$L_A = \left\{x \in c_A : \forall t \in \ell : (tA)x \quad \text{mevcut } \right\}$$

ve

$$P_A = \left\{x \in c_A \,|\, \forall t \in T_A : (tA)x = t(Ax)\right\}$$

olarak tanımlanır. Burada

$$T_A = \left\{t \in \ell | \forall y \in c_A : (tA)y \quad \text{mevcut}\right\}$$

dır.

Teorem 4.2.1. *[33, Teorem 8.2.4]*

Aşağıdaki şartlar sağlanır.

(a) $L_A = B_A = \left\{(x_k) \in c_A : sup_{n,v} |\sum_{k=0}^{v} a_{nk} x_k| < \infty\right\}$

(b) $\forall t \in \ell, \quad \forall x \in L_A : t(Ax) = (tA)x$

(c) $B_A = L_A \subset P_A$

(d) $\forall x \in c_A : x \in S_A \Leftrightarrow \|A(x - x^{[r]})\|_\infty \to 0 \quad (r \to \infty)$

İspat. (a) c, c-benzeri uzay olduğundan Teorem 4.1.21 den açıktır.

(b) Teorem 4.1.21 den dolayı $L_e = L_a = B$ olduğundan istenen eşitlik sağlanır.

(c) (a) ve (b) den sağlanır.

(d) Teorem 4.1.9 den sağlanır. □

Teorem 4.2.2. *[33, Teorem 8.2.5]*

Aşağıdaki şartlar sağlanır.

(a) $F_A = L_A \cap I_A = B_A \cap I_A$

(b) $W_A = L_A \cap \Lambda_A^{\perp} = F_A \cap \Lambda_A^{\perp}$

(c) Herhangi bir $u \in F_A \setminus W_A = F_A \setminus \Lambda_A{}^{\perp}$ *için* $F_A = W_A$ *veya* $F_A = W_A \oplus < u >$

(d) Eğer $e \in F_A$ *ve* $\chi(A) \neq 0$ *ise* $F_A = W_A \oplus < u >$

A konservatif bir matris ise $e \in F_A$ *özelliğine sahiptir. Ayrıca A coregular bir matrisse* $F_A = W_A \oplus A$ *olur.*

İspat. (a) $F_A \subset B_A = L_A$ ve $F_A \subset L_A$ olduğundan $L_A \cap I_A \subset F_A$ olduğunu ispatlamak yeterlidir. $y = (y_k) \in L_A \cap I_A$ ve $f \in c_A{}'$ olsun. Teorem 2.3.9 (b) den $\mu \in \mathbb{K}$, $t = (t_n) \in \ell$ ve $\alpha = (\alpha_k) \in w_A^{\beta}$ olmak üzere $x = (x_k) \in c_A$ için

$$\begin{aligned} f(x) &= \mu \lim_A x + \sum_n t_n \sum_k a_{nk} x_k + \sum_k a_k x_k \\ &= \mu \lim_A x + t(Ax) + \alpha x \end{aligned} \tag{4.2.1}$$

olur. $x = e^k$ için

$$f(e^k) = \mu a_k + [tA]_k + \alpha_k$$

olup herhangi bir $y \in c_A$ için

$$\sum_k y_k f(e^k) = \mu \sum_k \alpha_k y_k + (tA)y + \alpha x \tag{4.2.2}$$

elde edilir. $y \in I_A, y \in L_A$ ve $\alpha \in w_A^{\beta} \subset c_A^{\beta}$ olduğundan $y \in F_A$ olur. Böylece istenen eşitlik elde edilir.

(b) $W_A \subset B_A = L_A$ ve $W_A \subset \Lambda_A^{\perp}$ olduğu açıktır. $L_A \cap \Lambda^{\perp} \subset W_A$ olduğunu ispatlayalım. $y = (y_k) \in L_A \cap \Lambda_A^{\perp} \subset L_A \cap I_A = F_A$ ve $f \in c_A^{'}$ olsun. f, (a) nın ispatındaki gibi olsun. (4.2.1), (4.2.2) den ve $y \in \Lambda_A^{\perp}$ olduğundan

$$\begin{aligned} f(y) - \sum_k y_k f(e^k) &= \mu\big(\lim_A y - \sum_k \alpha_k y_k\big) + \big(t(Ay) - (tA)y\big) \\ &= \mu\Lambda_A(y) + \big(t(Ay) - (tA)y\big) \\ &= 0 \end{aligned}$$

olur. Böylece $y \in W_A$ elde edilir.

(c) Λ_A, I_A da lineer bir fonksiyonel olduğundan

$$codim_{F_A}\big(Kern\Lambda_A\,|_{F_A}\big) \leq 1$$

olur. Ayrıca $W_A = F_A \cap \Lambda_A^{\perp} = Kern\Lambda_A\,|_{F_A}$ olduğundan istenen eşitlik elde edilir.

(d) $\lim_A \in {c_A}'$ ve $\chi(A) \neq 0$ olduğundan $e \notin W_A$ olup (c) den $W_A = F_A \oplus < e >$ olur. Eğer A konservatif ise $e \in I_A$ olduğundan $e \in F_A$ olur. Çünkü Teorem 4.2.1 den $e \in B_A$, $(a_k) \in \ell$ ve $\sup_{n,v} |\sum_{k=0}^{v} a_{nk}| \leq \|A\|$ dır. Eğer A matrisi coregular ise konservatif ve $\chi(A) \neq 0$ olur.

$\square$

Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.3. *[33, Teorem 8.2.8]*

Keyfi bir şekilde seçilen $u = 0$ veya $u \in F_A \setminus W_A = F_A \setminus {\Lambda_A}^{\perp}$ için

$$\varphi \subset S_A \subset W_A = L_A \cap {\Lambda_A}^{\perp} \subset W_A \oplus < u >= F_A = L_A \cap I_A \subset L_A = B_A \subset P_A$$

sağlanır.

Teorem 4.2.4. *[33, Teorem 8.2.10]*

A matrisi replaceable ise $F_A = L_A = B_A$ eşitlikleri sağlanır.

İspat. A replaceable ise $k \in \mathbb{N}$ için $d_k = 0$ ve $c_D = c_A$ olacak şekilde bir D matrisi vardır. $d_k = 0$ olduğundan $I_D = c_D$ olur. Böylece $F_D = L_D = B_D$ olur. $F_D = F_A$ ve $B_D = B_A$ FK topolojilerinin denkliğinden ve bu cümlelerin tanımından $F_A = L_A = B_A$ elde edilir. $\square$

Teorem 4.2.5. *[33, Teorem 8.3.2-8.3.4]*

$\varphi \subset c_A$ *olsun. Bu durumda aşağıdaki şartlardan herbiri A matrisinin replaceable olması için yeterlidir.*

(a) $\overline{\varphi} \neq P_A$

(b) $\overline{F_A} \neq \overline{W_A}$

(c) $F_A \neq W_A$ *ve* $\Lambda_A{}^{\perp}$ c_A *da kapalıdır.*

(d) A maksimal insettir. (Yani $I_A = c_A$ *dır.)*

(e) $W_A \neq F_A$ *ise A nın replaceable olması için gerek ve yeter şart* $\overline{\varphi} \neq P_A$ *olmasıdır.*

(f) $\varphi \subset Kernf$, $\alpha \in c_A{}^{\beta}$ *ve* $\mu \neq 0$ *olacak şekilde* $f \in c_A{}'$ *vardır.*

Sonuç 4.2.6. *[33, Teorem 8.2.7]*

A konservatif bir matris ise bu durumda

(a) $c_0 \subset S_A$ *ve* $c \subset m \cap c_A \subset F_A = L_A \cap I_A$

(b) $W_A \subset \overline{\varphi} = c_0 \quad (c_A FK - uzayında)$

şartları sağlanır.

Teorem 4.2.7. *[33, Teorem 8.2.12]*

Aşağıdaki şartlar sağlanır.

(a) $\varphi \subset S_A \subset W_A \subset \overline{\varphi}$

(b) $\overline{\varphi} = \overline{S_A} = \overline{W_A}$ *ve* $\overline{F_A} = \overline{B_A} = \overline{L_A}$

(c) $\overline{F_A} = \overline{W_A} \oplus < u > = \overline{\varphi} \oplus < u >$*. Burada* $\overline{F_A} = \overline{W_A}$ *ise* $u = 0$*, aksi halde* $u \in F_A \setminus \overline{W_A}$ *olarak alınır.*

(d) Eğer A coregular bir matris ise $\overline{L_A} = \overline{F_A} = \overline{c}$

olur.

İspat. (a) Açıktır.

(b) ve (c): (a) dan $\overline{\varphi} = \overline{S_A} = \overline{W_A}$ olur. $\overline{F_A} = \overline{B_A} = \overline{L_A}$ olduğunu ispatlamak için iki durum söz konusudur.

(I. Durum:) A matrisi replaceable olmasın. Bu durumda $L_A \subset \overline{W_A}$ olup $\overline{W_A} = \overline{L_A}$ olur. $W_A \subset F_A \subset B_A = L_A$ olduğundan $\overline{F_A} = \overline{B_A} = \overline{L_A}$ olur. $f \in {c_A}'$ ve $\varphi \subset W_A \subset Kernf$ olsun. $L_A \subset Kernf$ olduğunu ispatlayalım. Teorem 4.2.5 (f) den $\mu = 0$ dır. Bu durumda uygun bir $t \in \ell$ ve $\alpha \in {w_A}^\beta$ seçilirse $x \in c_A$ için

$$f(x) = t(Ax) + \alpha x$$

olur. Her bir $x \in L_A$ için $t(Ax) = (tA)x$ olduğundan

$$f(x) = (tA)x + \alpha x = \gamma x$$

elde edilir. Burada $\gamma = \gamma_k = tA + \alpha$ dır. $\varphi \subset W_A \subset Kernf$ için $0 = f(e^k) = \gamma_k \quad (k \in \mathbb{N}^0)$ olur. Böylece $L_A \subset Kernf$ olduğundan Teorem 2.1.11 den $L_A \subset \overline{W_A}$ elde edilir.

(II. Durum:) A matrisi replaceable olsun. Teorem 4.2.4 dan $F_A = L_A = B_A$ olur. Böylece $\overline{F_A} = \overline{L_A} = \overline{B_A}$ olur. Ayrıca $F_A = W_A$ veya keyfi bir $u \in F_A \setminus W_A = F_A \setminus {\Lambda_A}^\perp$ için $F_A = W_A \oplus < u >$ olur. $u \in X$ için

$$\overline{W_A \oplus < u >} = \begin{cases} \overline{W_A} & , \quad u \in \overline{W_A} \\ \overline{W_A} \oplus < u > & , \quad u \notin \overline{W_A} \end{cases} \tag{4.2.3}$$

olarak tanımlandığından $\overline{F_A} = \overline{W_A}$ veya $u \notin \overline{W_A}$ için $\overline{F_A} = \overline{W_A \oplus < u >} = \overline{W_A} \oplus < u >$ elde edilir. Böylece (b)-(c) ispatlanır.

(d) Teorem 4.2.2 (d), Teorem 4.2.7 (b), Teorem 4.2.6 (b) ve (4.2.3) den

$$\overline{F_A} = \overline{W_A \oplus < e >} = \overline{W_A} + < e > = \overline{\varphi} + < e > = \overline{c_0} + < e > = \overline{c_0 + < e >} = \overline{c}$$

elde edilir. □

Teorem 4.2.8. *[33, Teorem 8.2.14]*

c_A FK-uzayında S_A, W_A, F_A, B_A ve L_A altuzaylarından herhangi biri kapalı ise S_A, W_A, F_A, B_A ve L_A altuzayları kapalıdır. Böyle bir durumda hem $\overline{\varphi} = S_A = W_A = F_A = B_A = L_A$ hem de $\overline{\varphi} = S_A = W_A$ ve $u \in F_A \setminus W_A$ keyfi olmak üzere $\overline{\varphi} \oplus < u > = F_A = B_A = L_A$ olur.

İspat. $S_A \subset W_A \subset F_A \subset B_A = L_A$ olduğundan Teorem 4.2.7 (a)-(c) den S_A kapalı ise $W_A, F_A, B_A = L_A$ kapalı olup B_A kapalı ise S_A kapalı olduğundan ilk kısmın ispatı tamamlanır. İkinci kısmın ispatı ise Teorem 4.2.7 (b) ve (c) den sağlanır. □

Tanım 4.2.2. [33, Tanım 8.2.18]

A bir matris olsun. Buna göre,

A matrisinin S_A, W_A, F_A, B_A altuzayı c_A ya eşitse A matrisine sırasıyla AK, SAK, FAK veya AB uzaydır denir. A matrisi için

$L_A = c_A$ ise birleşmelidir,

$I_A = c_A$ ise maksimal insettir,

$F_A = W_A$ ise very conulldur denir.

Teorem 4.2.9. *[33, Teorem 8.2.19]*

Aşağıdaki şartlar denktir.

(a) A,   AB uzaydır.

(b) A, birleşmelidir.

(c) A, FAK dır.

(d) A, SAK veya keyfi $u \in F_A \setminus W_A$ *için* $c_A = W_A \oplus < u >$ *sağlanır.*

(e) A, AK veya keyfi $u \in F_A \setminus W_A$ *için* $c_A = S_A \oplus < u >$ *sağlanır.*

İspat. $\varphi \subset c_A$ olacak şekilde herhangi bir A matrisi için

$$\begin{aligned} A, AB &\Leftrightarrow c_A = B_A \\ &\Leftrightarrow c_A = L_A \Leftrightarrow A, \text{birleşmeli} \\ &\Leftrightarrow c_A = F_A \Leftrightarrow A, FAK \end{aligned}$$

olur. Üstelik Teorem 4.2.8 den $u \in F_A \setminus W_A$ keyfi olmak üzere

$$\begin{aligned} c_A = c_B &\Leftrightarrow c_A = W_A \text{ veya } c_A = W_A \oplus < u > \\ &\Leftrightarrow c_A = S_A \text{ veya } c_A = S_A \oplus < u > \end{aligned}$$

elde edilir. □

5. BAZI MATRİSLERİN ETKİ ALANLARININ BAZI ALTUZAYLARI

Bu bölümde C_1 Cesàro matrisi, $Z_{\frac{1}{2}}$ Zweier matrisi ve fark matrisi gibi özel matrislerin etki alanlarının bazı altuzaylarınını inceleyeceğiz.

5.1 C_1 Cesàro Matris

Tanım 5.1.1. [33, Tanım 3.1.7]

$\alpha \in \mathbb{R}, -\alpha \notin \mathbb{N}$ olsun. $C_\alpha = (c_{nk}^{(n)})$ olmak üzere

$$c_{nk}^{(n)} = \begin{cases} \frac{\binom{n-k+\alpha-1}{n-k}}{\binom{n+\alpha}{n}} & , \quad k \leq n \text{ ise} \\ 0 & , \quad k > n \text{ ise} \end{cases}$$

olarak tanımlanan matrise α. mertebeden Cesàro matris denir. Biz $\alpha = 1$ alarak

$$\mathbf{C_1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0\dots \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0\dots \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0\dots \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4}\dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklinde oluşturulan C_1 Cesàro matrisinin etki alanının bazı altuzaylarını inceleyeceğiz.

$A = C_1$ olsun. Bu durumda A matrisi

(i) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0, \qquad k = 1,2,...$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

şartlarını sağladığından Teorem 2.3.4 den açıkça regülerdir.

Teorem 5.1.1. *[33, shf. 423]*

$A = C_1$ olsun. Bu durumda

(a) $c_A = \overline{\varphi} \oplus < e >= \overline{c} = B_A = L_A = F_A \supseteq m \cap c_A \supseteq c$

(b) $\overline{\varphi} = \overline{c_0} = S_A = W_A = c_A^0$

önermeleri geçerlidir.

İspat. (a) $(-1)^k \in m \cap c_A^0$ olduğundan Teorem 2.3.7 den $c \subseteq m \cap c_A \subset c_A$ elde edilir. Şimdi $B_A = c_A$ olduğunu gösterelim. Her bir $x = (x_k) \in c_A$ ve $n, v \in \mathbb{N}^0$ için

$$\left|\sum_{k=0}^{v} a_{nk} x_k\right| = \begin{cases} \frac{1}{n+1} \left|\sum_{k=0}^{n} x_k\right| & n \leq v \text{ ise} \\ \frac{v+1}{n+1} \frac{1}{v+1} \left|\sum_{k=0}^{v} x_k\right| & v < n \text{ ise} \end{cases} \leq \|C_1(x)\| < \infty$$

olduğundan $B_A = c_A$ olur. Yani A matrisi AB-özelliğine sahiptir. Geriye kalan kısımların ispatı ise Teorem 4.2.9 dan elde edilir.

$b)$ $W_A = B_A \cap \Lambda_A^{\perp} = Kern \lim_A = c_A^0$ olup Teorem 4.2.9 dan $W_A = S_A = c_A^0$ elde edilir. □

5.2 Zweier Matris

Tanım 5.2.1. [33, Tanım 3.3.2]

$\alpha \in \mathbb{K} \setminus 0$ olmak üzere

$$\mathbf{Z}_\alpha = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & \dots \\ 1-\alpha & \alpha & 0 & \dots \\ 0 & 1-\alpha & \alpha & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanan matrise α. mertebeden Zweier matris denir. Biz burada $\alpha = \frac{1}{2}$ olmak üzere $Z_{\frac{1}{2}}$ matrisininin etki alanlarını inceleyeceğiz.

$A = Z_{\frac{1}{2}}$ olsun. Açıkça A matrisi

(i) $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$,

(ii) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0, \qquad k = 1, 2, ...$

(iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

şartlarını sağladığından Teorem 2.3.4 den regülerdir.

Teorem 5.2.1. *[33, shf. 424]*

$A = Z_{\frac{1}{2}}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır.

(a) $c \subseteq m \cap c_A = F_A = B_A = L_A \subset c_A$

(b) $c_0 = S_A = m \cap c_A^0 = W_A \subset c_A^0$

İspat. (a)$\big((-1)^k\big) \in m \cap c_A^0$ olduğundan $c_0 \neq m \cap c_A^0$ ve $c \neq m \cap c_A$ olur. Bu nedenle A matrisi sınırlı ıraksak bir diziyi topladığından 0'a yakınsayan sınırsız bir diziyi de toplar ve genelliği bozmaz. Yani $m \cap c_A^0 \subset c_A^0$ ve $m \cap c_A \subset c_A$ olur. Üstelik $I_A = c_A$ ve $F_A = L_A \cap I_A$ olduğundan $F_A = L_A = B_A$ eşitlikleri sağlanır. Sonuç 4.2.6 den $m \cap c_A \subset F_A$ olduğundan geriye $B_A \subset m \cap c_A$ olduğunu ispatlamak kalır. Teorem 4.2.1 (a) kullanılarak her bir $x = (x_k) \in B_A$ ve $v \in \mathbb{N}$ için

$$\infty > \sup_{n,r} |\sum_{k=0}^{r} a_{nk}x_k| \geq \sup_{n} |\sum_{k=0}^{v} a_{nk}x_k| \geq |\sum_{k=0}^{v} a_{v+1,k}x_k| = \frac{1}{2}|x_v|$$

eşitsizliği sağlandığından $x \in m$ olur ve ispat tamamlanır.

(b) $c \subsetneq m \cap c_A^0 \subsetneq c_A^0$ sağlanır. F_A altuzayında $f \in c_A{}'$ nın temsilinden $m \cap c_A^0 \subset W_A$ olur. O halde $m \cap c_A^0 = W_A$ elde edilir. Ayrıca $m \cap c_A = (m \cap c_A^0) \oplus < e >$ olduğundan $m \cap c_A = F_A = W_A \oplus < e >$ eşitliği sağlanır.

$c_0 \subset S_A$ olduğundan geriye $S_A \subset c_0$ olduğunu göstermek kalır. Herbir $x = (x_k) \in S_A$ ve $r \in \mathbb{N}$ için

$$\|A(x - x^{(r)})\|_\infty = \sup_n \left|\sum_{k=r+1}^{\infty} a_{nk}x_k\right| \geq \left|\sum_{k=r+1}^{\infty} a_{r+1,k}x_k\right| = \tfrac{1}{2}|x_{r+1}|$$

olur. Yani $\|A(x - x^{(r)})\|_\infty \to 0 (r \to \infty)$ olduğundan $S_A \subset c_0$ elde edilir. $\square$

5.3 Fark Matrisi

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \end{pmatrix}$$

olarak tanımlanan A matrisi fark matrisi olarak adlandırılır.

Teorem 5.3.1. *[33, shf. 435]*

A fark matrisi olmak üzere aşağıdaki özelliklere sahiptir.

(a) A matrisi 0-çarpımsal, özel olarak conull ve replaceable bir matristir.

(b) $c \subsetneq m \cap c_A = m \cap c_A^0 \subsetneq c_A^0$

(c) $S_A = c_0$ *ve* $m \cap c_A = W_A = F_A = L_A = B_A$

(d) S_A, W_A, F_A ve L_A cümlelerinden hiçbiri c_A da kapalı değildir.

(e) $u = (n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_A \setminus L_A$ ve $c_A = P_A = \overline{\varphi} \oplus < u >$

İspat. (a)A matrisi her $x \in c$ için $\lim_A x = 0 \lim x$ olduğundan, 0-çarpımsaldır. Ayrıca $c_B = c_A$ olacak şekilde tüm sütunları sıfıra yakınsayan bir B matrisi varolduğundan replaceable ve $\chi(A) = \lim_A e - \sum_k \lim_A e^k = 0$ olduğundan A matrisi conull dur.

(b) A matrisi conull olduğundan Teorem 2.3.6 den $c \subsetneq m \cap c_A$ olur. $m \cap c_A \subset c_A^0$ olduğunu ispatlamak için $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ olarak kabul edelim. (Reel ve imajiner kısımları ayrı bir şekilde hesaba katarak $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ için de ispat yapılır.)

$\alpha = \lim_A x \neq 0$ olacak şekilde $x = (x_k) \in c_A$ verilmiş olsun. Bu durumda genelliği bozmaksızın $\alpha > 0$ (aksi halde $y = -x$ olarak hesaba katılır) ve $n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $x_n - x_{n-1} > \frac{\alpha}{2}(n \geq n_0)$ olduğunu kabul edebiliriz. Böylece herbir $n > n_0$ için

$$\begin{aligned} x_n &= x_n - x_{n-1} + x_{n-1} - x_{n-2} + x_{n-2} - \ldots + x_{n_0+1} - x_{n_0} + x_{n_0} \\ &\geq x_{n_0} + (n - n_0)\frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $\alpha > 0$ olduğundan $x \notin m$ dır. Böylece $m \cap c_A = m \cap c_A^0 \subset c_A^0$ eşitliği ispatlanır. Ayrıca $x = (x_k) \in c_A^0$ için

$$x_k = \textstyle\sum_{v=0}^{k} \frac{1}{v+1} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

olduğundan ikinci kapsama da geçerlidir.

(c) İspatın bu kısmı Teorem 5.2.1 in ilgili kısmına benzer şekilde yapılır.

(d) $S_A \neq W_A$ olduğu için Teorem 4.2.8 den ispat yapılır.

(e) Açıkça $u = (n) \in c_A$ alınırsa $\lim_A u = 1$ olur. Ayrıca

$$\sup_{n,r} \left| \textstyle\sum_{k=0}^{r} a_{nk} u_k \right| \geq \sup_n \left| \textstyle\sum_{k=0}^{n-1} a_{nk} u_k \right| = \sup_n n - 1 = \infty$$

olduğundan $u \notin L_A$ elde edilir.

Şimdi $c_A = P_A$ olduğunu ispatlayalım. ($\varphi \subset Kern \lim_A$ ve $\lim_A u = 1$ olduğundan $u \neq \overline{\varphi}$ olup $P_A = \overline{\varphi} \oplus < u >$ olur.) Bunun için keyfi bir

$$t = (t_n) \in T_A = \left\{ y \in \ell \middle| \forall x \in c_A : (yA)x \text{ mevcut } \right\}$$

dizisini alalım. Herbir $x \in c_A$ için $t(Ax) = (tA)x$ olduğunu biliyoruz. Her $n \in \mathbb{N}$ ve

$x = (x_k) \in c_A$ için

$$\begin{aligned}
\sum_{v=0}^{n} t_v \sum_k a_{vk} x_k &= \sum_{v=0}^{n} t_v (x_v - x_{v-1}) \qquad [x_{-1} = 0] \\
&= \sum_{k=0}^{n} (t_k - t_{k+1}) x_k - t_{n+1} x_n \\
&= \sum_{k=0}^{n} x_k \sum_v t_v a_{vk} - t_{n+1} x_n \qquad (5.3.1)
\end{aligned}$$

olur. $t \in T_A$ olduğundan her bir $x = (x_k) \in c_A$ için

$$(t_{n+1} x_n) \in c,$$

olur. $x = (x_k) \in c_A, \quad y = (y_k) = Ax$ ve

$$t_{n+1} x_n = t_{n+1} \sum_{v=0}^{n} y_v, \qquad (5.3.2)$$

olarak alırsak bu durumda (5.3.2) eşitliği bize

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} t_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ t_2 & t_2 & 0 & 0 & \dots \\ t_3 & t_3 & t_3 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \ddots & & \end{pmatrix}$$

matrisinin konservatif olduğunu söyler. Çünkü A üçgensel bir matris ve bu nedenle $y = Ax$ olur. Böylece $e \in c_T$ için $(nt_n) \in c$ olur. Üstelik $t \in \ell$ için $(nt_n) \in c_0$ olur. Aksi takdirde $\varepsilon > 0$ olmak üzere $|nt_n| \geq \varepsilon$ ($n \geq n_0$ olacak şekilde uygun bir n_0 seçilir) olacaktır ki bu

$$\textstyle\sum_{n=n_0}^{\infty} |t_n| \geq \varepsilon \sum_{n=n_0}^{\infty} \frac{1}{n}$$

anlamına gelir. Bu da $t \in \ell$ olmasıyla çelişir. Bununla birlikte $(nt_n) \in c_0$ için bu T matrisinin 0-çarpımsal olması anlamına geldiğinden $x = (x_k) \in c_A$ ve $y = Ax$ için

$$(t_{n+1} x_n) = Ty \in c_0$$

olur. Bu nedenle (5.3.1) $(x \in c_A)$ için istenen $t(Ax) = (tA)x$ özdeşliğini sağlar. $\square$

Son olarak $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere $(a_k) \in \ell, \quad a_{2k} = 0$ ve $a_{2k+1} \neq 0$ olacak şekildeki

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & a_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & 1 & a_3 & 0 & \dots \\ 0 & a_1 & 0 & a_3 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

matrisini inceleyelim.

Teorem 5.3.2. *[33, shf. 425]*

A matrisi için aşağıdakiler sağlanır.

(a) $\chi(A) = 1$ *ile A coregular bir matristir.*

(b) $\overline{\varphi} = \overline{c_0} = \overline{c} = P_A = c_A$ *eşitlikleri sağlanır ve A matrisi replaceable değildir.*

(c) $c \subseteq m \cap c_A \subset F_A = I_A = \{x = (x_j) \in c_A | (x_{2k}) \in c\} \subseteq L_A \subseteq P_A$

(d) $S_A = W_A = \{x = (x_j) \in c_A | (x_{2k}) \in c_0\}$ *ve* $F_A = W_A \oplus < e >$

$F_A \neq L_A$ *ve* S_A, W_A, F_A, L_A *cümlelerinden hiçbiri* c_A *da kapalı değildir.*

İspat. (a) $A \in (c, c)$ olup $\chi(A) = \lim_A e - \sum_k \lim_A e^k = 1 \neq 0$ olduğundan coregulardır.

(b) $\overline{\varphi} = c_A$ eşitliğini gösterelim. (Geriye kalan ifadeler $\overline{\varphi} = P_A \Leftrightarrow A$ matrisi replaceable, $\varphi \subset c_0 \subset c$ ve $\overline{c} = P_A$ ifadelerinden elde edilir.)

$\varphi \subset Kern f$ olacak şekilde $f \in c_A{}'$ alalım. A üçgensel bir matris olduğundan $x \in c_A$ için

$$f(x) = \mu \lim_A x + t(Ax)$$

olacak şekilde $\mu \in \mathbb{K}$ ve $t = (t_n) \in \ell$ olarak seçebiliriz. olur. Özel olarak her bir $k \in \mathbb{N}$ için

$$0 = f(e^k) = \mu a_k + \sum_n t_n a_{nk} = \begin{cases} t_k + t_{k+1} & , \quad k \quad \text{çift sayı} \\ \mu a_k + a_k \sum_{n=k}^{\infty} t_n & , \quad k \quad \text{tek sayı} \end{cases} \tag{5.3.3}$$

elde edilir. Burada k tek sayı için alalım. Çünkü $a_k \neq 0$ olmak üzere

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{1}{a_k} f(e^k) - \frac{1}{a_{k+2}} f(e^{k+2}) \\ &= \mu - \mu + \sum_{n=k}^{\infty} t_n - \sum_{n=k+2}^{\infty} t_n = t_k + t_{k+1} \end{aligned}$$

olur. Bu nedenle $t_k = -t_{k+1} \quad (k \in \mathbb{N})$ olup $t \in \ell$ olduğundan $t = 0$ dır. Böylece (5.3.3) den dolayı

$$0 = \tfrac{1}{a_1} f(e^1) = \mu + \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} t_n = \mu$$

sağlanır. Böylece $f = 0$ yani $Kernf = c_A$ olur ki Hahn-Banach Teoreminden $\overline{\varphi} = c_A$ sağlanır.

(c) $(1,0,1,0,...) \in c_A$ için $c \subseteq m \cap c_A$ olur. Ayrıca $F_A = L_A \cap I_A$ için $F_A = I_A$ eşitliği

$$\begin{aligned} x \in I_A \quad &\Leftrightarrow \quad x = (x_k) \in c_A \text{ ve } \sum_k a_k x_k \text{ yakınsak} \\ &\Leftrightarrow \quad x = (x_j) \in c_A \text{ ve } (x_{2k}) \in c \\ &\Leftrightarrow \quad \sum_k a_k x_k \text{ yakınsak ve } (x_{2k}) \in c \end{aligned} \tag{5.3.4}$$

olduğundan sağlanır. Üstelik (5.3.5) den $I_A = \{x = (x_j) \in c_A : (x_{2k}) \in c\}$ dır.

Şimdi $I_A \subset L_A$ olduğunu ispatlayalım. Bu $F_A \neq L_A$ olmasını gerektirir.

$$x_{2k} = -\textstyle\sum_{v=0}^{k-1} a_{2v+1} x_{2v+1}, \qquad (x_{2k}) \in m \setminus c \text{ ve } (x_{2k} - x_{2k+2}) \in c_0 \quad (k \in \mathbb{N})$$

olacak şekilde bir dizi inşa edelim.

$\sum_v \frac{1}{2v+1}$ ıraksak serisini hesaba katalım ve $s_v \in \{-1,1\}$ olmak üzere bir (s_v) dizisi seçelim. Öyle ki $\left(\sum_{v=0}^{k} \frac{s_v}{2v+1}\right) \in m \setminus c$ sağlansın. Bu durumda

$$x_{2k+1} = \tfrac{s_k}{(2k+1)a_{2k+1}} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

ve

$$x_0 = 0 \text{ ve } x_{2k} = -\sum_{v=0}^{k-1} a_{2v+1} x_{2v+1} \qquad (k \in \mathbb{N})$$

alırız. Buradan

$$(x_{2k} - x_{2k+2}) = (a_{2k+1} x_{2k+1}) = \left(\tfrac{s_k}{2k+1}\right) \in c_0$$

ve

$$(x_{2k}) = \left(-\textstyle\sum_{v=0}^{k-1} \frac{s_v}{2v+1}\right) \in m \setminus c$$

olur. Sonuç olarak $x \notin I_A$ dır. Fakat

$$\sum_{k=0}^{n} a_{nk} x_k = \begin{cases} 0 & \text{n=2vise} \qquad (n, v \in \mathbb{N}) \\ \frac{s_v}{2v+1} & n = 2v+1 \text{ ise} \end{cases}$$

olduğundan $x \in c_A$ olur. $x \in L_A$ olduğunu ispatlamak yani $\sup_{n,v} \left|\sum_{k=0}^{v} a_{nk} x_k\right| < \infty$ olduğunu göstermek için

$$2v^* - 1 \leq v < 2v^* + 1 \text{ ve } 2n^* - 1 < n \leq 2n^* + 1$$

sağlayan keyfi $n, v \in \mathbb{N}$ ve $n^*, v^* \in \mathbb{N}$ sayıları için "$v < 2n^*$","$v = 2n^*$" ve "$v > 2n^*$" durumlarını inceleyelim.

Eğer $v < 2n^*$ ise bu durumda;

$$\textstyle\sum_{k=0}^{v} a_{nk}x_k = \sum_{k=0}^{v^*-1} a_{2\mu+1}x_{2\mu+1} = \sum_{\mu=0}^{v^*-1} \frac{s_\mu}{2\mu+1},$$

Eğer $v = 2n^*$ ise;

$$\textstyle\sum_{k=0}^{v} a_{nk}x_k = \sum_{\mu=0}^{n^*-1} a_{2\mu+1}x_{2\mu+1} + x_{2n^*} = 0$$

ve eğer $v > 2n^*$ ise;

$$\sum_{k=0}^{v} a_{nk}x_k = \begin{cases} 0 & n = 2n^* \text{ ise} \\ \frac{s_n^*}{2n^*+1} & n = 2n^* + 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olur. Bu $x \in L_A$ olduğunu gösterir ve böylece $L_A \neq I_A$ elde edilir.

Teorem 4.2.8 den dolayı S_A, W_A, F_A veya L_A altuzaylarından hiçbiri c_A da kapalı olmadığından Teorem 4.2.1 (c) den $L_A \subset P_A$ olur. Ayrıca P_A genelde kapalı olduğundan $L_A \subsetneq P_A$ elde edilir.

$m \cap c_A \subsetneq I_A$ olduğunu ispatlayalım. A konservatif bir matris olduğundan $m \cap c_A \subset I_A$ olur. $b_{nk} = a_{2k+1} \quad (n, k \in \mathbb{N})$ olacak şekilde bir $B = (b_{nk})$ matrisini gözönüne alalım. $\chi(B) = 0$ olduğundan B matrisi conull dur ve etki alanı

$$c_B = \left\{(x_k) \in w : \textstyle\sum_k a_{2k+1}x_k \text{ yakınsak } \right\}$$

olup sınırsız diziler içerir. Çünkü

$$I_A = \left\{(x_k) \in w : (x_{2k}) \in c \text{ ve } \textstyle\sum_k a_{2k+1}x_{2k+1} \text{ yakınsak } \right\}$$

olup I_A sınırsız dizileri içerir. Yani $m \cap c_A \subsetneq I_A$ olur.

(d) A matrisi coregular olduğundan $F_A = W_A \oplus < e >$ eşitliği sağlanır. Ayrıca $I_A \subset L_A$ ile $W_A = L_A \cap \Lambda_A^\perp = \Lambda_A^\perp$ olur. Bu nedenle her bir $x = (x_k) \in c_A$ için

$$x \in W_A \Leftrightarrow \lim_A x - \textstyle\sum_k a_k x_k = 0 \Leftrightarrow (x_{2k}) \in c_0$$

olur. Böylece (c) deki ikinci ifade doğrulanır. $x = (x_k) \in W_A$ olsun. $x \in I_A$ ve $(x_{2k}) \in c_0$ olduğundan

$$\|A(x - x^{(r)})\|_\infty \leq \sup_{n>r} \left|\textstyle\sum_{k=r+1}^{n} a_k x_k\right| + \sup_{2k>r} |x_{2k}| \to 0 \qquad (r \to \infty)$$

olur. Böylece $x \in S_A (S_A = W_A)$ elde edilir. Yani c_A da $x^{[r]} \to x$ sağlanır. □

Teorem 5.3.3. *[33, shf. 428]*

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

matrisi aşağıdaki özellikleri sağlar.

(a) A matrisi conull ve 0-çarpımsaldır.

(b) $c \subsetneq m \cap c_A = F_A = L_A = B_A \subsetneq c_A$

(c) $c_0 = S_A \subsetneq c \subsetneq m \cap c_A^0 = W_A \subsetneq c_A^0$ *olur. Özel olarak* S_A, W_A, F_A, L_A *cümlelerinden hiçbiri* c_A *da kapalı değildir.*

(d) $u = (1,0,1,0,...)$ *olmak üzere* $F_A = W_A \oplus < u >$ *eşitliği sağlanır. Yani A coregular bir matristir.*

(e) $u = (1,0,1,0,...)$ *olmak üzere* $\overline{\varphi} = \overline{c} = c_A^0 \subsetneq c_A = P_A = \overline{\varphi} \oplus < u >$ *olur.*

İspat. (a) A matrisi

$$\chi(A) = \lim_A e - \sum_k \lim_A e^k = \lim_n \sum_k a_{nk} - \sum_k \lim_n a_{nk} = 0$$

olduğundan conull dur. Ayrıca $\lim_A x = 0 \lim x$ olduğundan 0-çarpımsal şartını sağlar.

(b)-(e) nin ispatı Teorem 5.2.1 ün ilgili kısmına benzer olarak yapılır. Teorem 5.2.1 de $u = (1,0,1,0,...)$ alınmalıdır. □

KAYNAKLAR

[1] K. Zeller, *Allgemeine Eigenschaften von Limitierungsverfahren*, Math. Z., 53, (1951), 463-487.

[2] K. Zeller, *Abschnittskonvergenz in FK-Rume*, Math. Z, 55, (1951), 55-70.

[3] W. L. C. Sargent, *On sectionally bounded BK-spaces*, Math. Z. 83, (1954), 57-66.

[4] D. J. H. Garling, *On topological sequence spaces*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 63, (1967), 997-1019.

[5] M. Buntinas, *Convergent and bounded Cesàro sections in FK-spaces*, Math. Z., 121, (1971), 191-200.

[6] M. Buntinas, *On Toeplitz sections in sequence spaces*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 78, (1975), 451-460.

[7] J. J. Sember, *On Unconditional Section Boundedness In Sequence Spaces*, J. Math., 7(4),(1977), 699-706.

[8] G. Goes, *Summan von FK-Rumen Funktionale Abschnittskonvergenz und Umkehrsatz*, Tohoku. Math. Journ., 26, (1974), 487-504.

[9] G. Bennett, N. Kalton *FK-space containing* c_0, Duke Math. J., 39,(1972), 561-582.

[10] A. K. Snyder, A. Wilansky, *Inclusion theorems and semiconservative FK spaces*, Rocky Mountain J. Math., 2, (1972), 595-603.

[11] K.-G. Grosse-Erdmann, *On* ℓ_1*-invariant sequence spaces*, J. Math. Anal. Appl., 262, (2001), 112-132.

[12] J. Sember, M. Raphael,*The unrestricted section properties of sequences*, Canad. J. Math., 31(2), (1979), 331-336.

[13] D. Noll,*Toeplitz sections and the Wilansky property*, Analysis, 10,(1990), 27-43.

[14] J. Boos, D. J. Fleming, *Gliding hump properties and some applications*, Int. J. Math. Math. Sci., 18(1), (1995), 121-132.

[15] G. Bennett, J.J. Sember, A. Wilansky, *Sections of sequences in matrix domains,* Trans. N. Y. Acad. Sci., 34(2), (1972), 107?112.

[16] G. Bennett, *The Gliding humps technique for FK-spaces*, Trans. Amer. Math. Soc., 166, (1972), 285-292.

[17] G. Bennett, *A New class of sequence spaces with applications in summability theory*, J. Reine Angew. Math., 266, (1974), 49-75.

[18] G. Bennett, *Sequence spaces with small* β*-duals*, Math. Z., 194, (1987), 321-329.

[19] M. Buntinas, G. Goes, *Products of sequence spaces and multipliers*, Rad. Mat., 3, (1987), 287-300.

[20] İ. Dağadur, *On some subspaces of an FK space*, Math. Commun., 7, (2002), 15-20.

[21] R. Devos, *Combinations of distinguished subsets and conullity*, Math. Z., 192, (1986), 447-451.

[22] D. J. Fleming, *Unconditional Toeplitz sections in sequence spaces*, Math. Z., 194, (1987), 405-414.

[23] D. J. H. Garling, *The* β*- and* γ*-duality of sequence spaces*, Proc. Cambridge Philos. Soc., 63, (Jan. 1967), 963-981.

[24] K. Knopp, G. G. Lorentz, *Beitrage zur absoluten Limitierung,* Arch. Math., 2, (1949), 10-16.

[25] S-Y. Kuan, *On the inset of a convergence domain,* Proc. Amer. Math. Soc., 71, (1978), 241-242.

[26] H. G. İnce, *Combinations of distinguished subsets and Cesàro conullity*, Comm. Math. Anal., 1(2), (2006), 91-96.

[27] A. K. Snyder, *Conull and coregular FK spaces*, Math. Z., 90, (1965),376-381.

[28] M. Raphael, *On Three Types of Sections in Topological Sequence Spaces*, Master Thesis Of Science in the Department of Mathematics, Simon Fraser University, 1977.

[29] A. Wilansky, *Modern Methods in Topological Vector Spaces*, McGraw-Hill International Book Co., New York, 1978.

[30] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, London-New York, 1970.

[31] E. Kreyszig, *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley-Sons, New York, 1978.

[32] A. Wilansky, *Summability Through Functional Analysis*, North-Holland Publishing Co., Amsterdam, 1984.

[33] J. Boos, *Classical and Modern Methods in Summability*, Oxford University Press., Oxford, 2000.

[34] B. Choudhry, S. Nanda *Functional Analysis With Application*, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1989.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Asuman ULU

Doğum Yeri ve Tarihi: DARENDE/MALATYA 25.06.1989

Adres: Heyiketeği Mahallesi Yeşildere Caddesi No:68 Darende/Malatya

E-Posta: hazeyn-asuman@hotmail.com

Lisans: Malatya İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü 2006-2010