T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNE İLİŞKİN VARLIK TEOREMLERİ

Ümit ÇAKAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şubat 2015

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNE İLİŞKİN VARLIK TEOREMLERİ

Ümit ÇAKAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Şubat 2015

Tezin Başlığı: Lineer Olmayan Bazı İntegral Denklemlerin Çözümlerine İlişkin Varlık Teoremleri

Tezi Hazırlayan: Ümit ÇAKAN

Sınav Tarihi: 05/02/ 2015

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: **Prof. Dr. İsmet ÖZDEMİR** ....
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Ö. Faruk TEMİZER ....
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ ....
İnönü Üniversitesi

Doç. Dr. Erdal BAŞ ....
Fırat Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. M. Habil GÜRSOY ....
İnönü Üniversitesi

....

Prof. Dr. Alaattin ESEN

Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Lineer Olmayan Bazı İntegral Denklemlerin Çözümlerine İlişkin Varlık Teoremleri" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ümit ÇAKAN

ÖZET

Doktora Tezi

LİNEER OLMAYAN BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNE İLİŞKİN VARLIK TEOREMLERİ

Ümit ÇAKAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

v+105 sayfa

2015

Danışman: Prof. Dr. İsmet ÖZDEMİR

Beş bölümden oluşan bu tezin ilk bölümünde, integral denklemlerin tanımı, kullanım alanları, sınıflandırılması ve bu alanda yapılmış çalışmalar hakkında genel bilgiler verildi.

İkinci bölümde, daha sonraki bölümlerde kullanılan bazı temel kavramlar ve teoremler verildi.

Üçüncü bölümde, $C[a,b]$ uzayında lineer olmayan integral denklemlerin bir sınıfının çözümlerine ilişkin bir varlık teoremi ifade ve ispat edildi.

Dördüncü bölümde, üçüncü bölümde ele alınan denklem sınıfının $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında çözülebilirliğini sağlayan yeter şartlar verildi. Ayrıca çözümlerin karakterlerine ilişkin bazı sonuçlar verilip buradaki denklem sınıfı ile daha önceden incelenen bazı denklemler arasındaki ilişkiler örnekler ile açıklandı.

Son bölümde ise, $C[a,b]$ ve $BC(\mathbb{R}_+)$ Banach cebirlerinde bir denklem sınıfı ele alındı ve bu denklem sınıfının asimptotik kararlı en az bir çözüme sahip olmasını garanti eden yeter şartlar verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Lineer olmayan integral denklemler, Kesirli integral denklemler, Kompaktsızlık ölçüsü, Darbo sabit nokta teoremi, Asimptotik kararlılık.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

EXISTENCE THEOREMS FOR SOLUTIONS OF SOME NONLINEAR INTEGRAL EQUATIONS

Ümit ÇAKAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

v+105 pages

2015

Supervisor: Prof. Dr. İsmet ÖZDEMİR

In the first chapter of this thesis consisting of five chapters, definition, usage areas, classification of integral equations and general information about studies carried out in this area are given.

In the second chapter, some basic definitions and theorems used in later chapters are given.

In the third chapter, in space $C[a,b]$, an existence theorem for solutions of a class of nonlinear integral equations is presented with its proof.

In the fourth chapter, in space $BC(\mathbb{R}_+)$, the class of integral equations considered in the third chapter is examined and the solvability of this equation is discussed under some sufficient conditions. Also, some results about of properties of the solutions are given. Furthermore the some relations between this equation and some previous equations are explained with some examples.

In the last chapter, in Banach algebras $C[a,b]$ and $BC(\mathbb{R}_+)$, a class of integral equations is handled and some sufficient conditions which guarantee that this class has at least one asymptotically stable solution are given.

KEYWORDS**:** Nonlinear integral equations, Integral equations of fractional order, Measure of noncompactness, Darbo fixed point theorem, Asymtotic stability.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca hem bilimsel hem de sosyal alandaki bilgi ve tecrübelerinden istifade ettiğim saygıdeğer hocam Sayın Prof. Dr. İsmet ÖZDEMİR'e, açmış olduğu lisansüstü dersler ve yönlendirmeleri ile bana yardımcı olan değerli hocam Sayın Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER'e, gösterdiği yakın ilgi ve alaka dolayısıyla Matematik Anabilim Dalı Başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e, maddi ve manevi desteğini her zaman hissettiğim değerli eşim ve kıymetli meslektaşım Arş. Gör. Sümeyye ÇAKAN'a ve katkılarından dolayı değerli jüri üyelerine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER DİZİNİ

Bu çalışmada kullanılan bazı simgeler, açıklamaları ile birlikte aşağıda sunulmuştur.

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi,
$\mathbb{R}_+$	:	Negatif olmayan reel sayılar cümlesi,
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar cümlesi,
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar cümlesi,
$C[a,b]$	:	$[a,b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı,
$B[a,b]$	:	$[a,b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sınırlı fonksiyonların uzayı,
$BC(\mathbb{R}_+)$	:	$\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı, reel değerli, sınırlı ve sürekli fonksiyonların uzayı,
$L^1(\mathbb{R}_+)$	:	$\mathbb{R}_+$ üzerinde tanımlı, reel değerli ve Lebesque anlamında integrallenebilen fonksiyonların uzayı,
sup	:	Supremum,
inf	:	İnfimum,
maks	:	Maksimum,
min	:	Minimum,
E	:	Banach uzayı,
$\mathfrak{M}_E$	:	E Banach uzayının boştan farklı ve sınırlı alt cümlelerinin ailesi,
$\mathfrak{N}_E$	:	$\mathfrak{M}_E$'deki kapanışı kompakt olan cümlelerin ailesi,
$\overline{X}$	:	X cümlesinin kapanışı,
$\operatorname{Conv} X$	:	X cümlesinin konveks kapanışı,
B_r	:	θ (sıfır) merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar,
Γ	:	Gamma fonksiyonu,
$\operatorname{diam} X$	:	X cümlesinin çapı,
$X(t)$	:	$X \neq \emptyset$, $X \subset BC(\mathbb{R}_+)$ ve $t \in \mathbb{R}_+$ olmak üzere, $\{x(t) : x \in X\}$ cümlesi,
$\omega(x,\cdot)$	:	x fonksiyonunun süreklilik modülü,
ω_0	:	$C[a,b]$ uzayı üzerindeki kompaktsızlık ölçüsü,
μ	:	$BC(\mathbb{R}_+)$ uzayı üzerindeki kompaktsızlık ölçüsü.

1. GİRİŞ

İntegral işareti altında bir bilinmeyen fonksiyonu ihtiva eden denklemler olarak tanımlanan integral denklemler, fizik, mekanik, biyoloji, mühendislik ve ekonomi gibi bir çok alanda karşılaşılan problemlerin matematiksel olarak modellenmesinde önemli bir yere sahiptir, [1].

İntegral denklemlere ilişkin ilk çalışmalar 19. yüzyılın ilk yarısında başlamıştır. Önceleri dağınık ve rastgele araştırmalar yapılmışken, aynı yüzyılın sonlarına doğru daha sistematik ve bilinçli araştırmaların yapıldığı ve bir takım sonuçların alınmaya başlandığı görülmektedir. Abel'in 1823 yılında bir mekanik problemini incelediği esnada ilk defa integral denkleme rastladığı bilinmektedir. Ancak integral denklem tabirini ilk olarak Du Bois Reymond'un 1888 yılında yayınlanan bir çalışmasında kullandığı anlaşılmaktadır, [2], [3].

Lineer olmayan analizin en kapsamlı branşlarından biri olan ve ekonomide, optimal kontrol teorisi [4−6]; tıpta, insan kalbindeki aortun mitral kapakları gibi yapıların modellenmesi [7]; mekanikte, viskoelastik malzemelerin yapısının modellenmesi [8] gibi daha bir çok problemin matematiksel zemine taşınmasına imkan sağlayan lineer olmayan integral denklemler ayrı bir öneme sahiptir.

Birçok araştırmacı bugüne kadar bazı tipteki lineer olmayan integral denklemlerin ele alınan uzayda çözüme sahip olması için yeter şartları araştırmış ve bu şartlar altında söz konusu çözüm ya da çözümlerin karakterine ilişkin sonuçlar vermişlerdir.

J. Banaś [9] 2003 yılında, $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli ve sürekli olan fonksiyonların uzayı $C\,[a,b]$'de,

$$x(t) = f\left(t, \int_0^t u(t,s,x(s))ds, x\left(\alpha(t)\right)\right) g\left(t, \int_0^a u(t,s,x(s))ds, x\left(\beta(t)\right)\right)$$

denkleminin en az bir çözüme sahip olmasını garanti eden bir takım yeter şartlar vermiştir. Diğer taraftan K. Maleknejad [10], [11] 2009 yılında, $C\,[a,b]$ uzayında,

$$x(t) = f(t, x(\alpha(t))) \int_0^t u(t,s,x(s))ds, \ t \in [0,1]$$

ve

$$x(t) = f(t, x(t)) + g\left(t, \int_0^t u(t,s,x(s))ds, x(\alpha(t))\right), \ t \in [0,a]$$

denklemlerinin çözülebilirliklerini incelemiştir. Kapalı ve sınırlı bir aralık üzerinde yukarıdaki denklemlere benzer tipte daha bir çok denklem ele alınmış, bu denklemlerin çözümlerinin varlığı araştırılmış ve çözümlerin pozitif, negatif veya monoton olması gibi bazı özellikleri irdelenmiştir. Ancak lineer olmayan integral denklemler sadece sınırlı bir aralık üzerinde incelenmemiş, sınırsız bir aralık üzerinde de bu tipten bir çok integral denklem ele alınmıştır. $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$ cümlesi üzerinde tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı $C(\mathbb{R}_+)$ ile bu uzaydaki sınırlı fonksiyonların uzayı olan $BC(\mathbb{R}_+)$, bu denklemlerin ele alındığı uzayların başında gelmektedir. Sınırsız bir aralık üzerinde ele alınan denklemlerin (eğer varsa) çözümleri, sınırlı aralık üzerinde ele alınan denklemlerinkine ek olarak, asimptotik kararlılık ve global asimptotik kararlılık gibi önemli özelliklere de sahip olabilmektedir. $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında, J. Banaś 'ın [12] 2003 yılında ele aldığı

$$x(t) = f(t, x(t)) \int_0^t u(t, s, x(s))ds$$

denklem, Z. Liu ve S. M. Kang [13] tarafından 2007 yılında ele alınan

$$x(t) = f(t, x(t)) + g(t, x(t)) \int_0^t u(t, s, x(s))ds$$

denklemi ve yine J. Banaś [14] tarafından 2013 yılında incelenen

$$x(t) = f(t, x(\alpha_1(t)), ..., x(\alpha_n(t))) + \int_0^{\phi(t)} u(t, s, x(\gamma_1(s)), ..., x(\gamma_m(s)))ds \tag{1.1}$$

denklemi bu türdeki çalışmaların bazılarıdır.

Diğer taraftan bazı problemlere karşılık gelen integral denklemler, yapısında Γ fonksiyonunu da bulundururlar. Bu tipteki denklemler de çok geniş uygulama alanlarına sahiptirler. J. Banaś tarafından incelenen denklemlerin bazıları aşağıda verilmiştir, [15−22].

$$\begin{aligned} x(t) &= h(t) + \frac{g(t, x(t))}{\Gamma(\beta)} \int_0^t \frac{v(s, x(s))}{(t-s)^{1-\beta}} ds, \ t \in [0, 1], \qquad (1.2) \\ x(t) &= h(t) + \frac{g(t, x(t))}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(t, s, x(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \ t \in [0, \infty), \\ x(t) &= g_1(t, x(t)) + \frac{g_2(t, x(t))}{\Gamma(\alpha)} \int_0^t \frac{u(t, s, x(s))}{(t-s)^{1-\alpha}} ds, \ t \in [0, \infty), \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
x(t) &= g(t,x(t))\left(p(t)+\frac{1}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u(t,s,(Gx)(s))}{(t-s)^{1-\alpha}}ds\right),\ t\in[0,1]\,,\\
x(t) &= f_1(t,x(t))+\frac{f_2(t,x(t))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u(t,s,x(s))}{(t-s)^{1-\alpha}}ds,\ t\in[0,\infty)\,,\\
x(t) &= f_1\left(t,\int_0^t u(t,s,x(s))ds,x(t)\right),\ t\in[0,\infty)\,, && (1.3)\\
x(t) &= (Tx)(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau,\ t\in[0,\infty)\,, && (1.4)\\
x(t) &= p(t)+(Tx)(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau,\ t\in[0,a]\,. && (1.5)
\end{aligned}
$$

Ayrıca K. Balachandran [23],

$$
x(t)=g(t,x(\alpha(t)))+\frac{f(t,x(\beta(t)))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u(t,s,x(\gamma(s)))}{(t-s)^{1-\alpha}}ds,\ t\in[0,\infty)
$$

denkleminin, J. Caballero [24],

$$
x(t)=p(t)+(Tx)(t)\int_0^{\sigma(t)} v(t,\tau,x(\tau),x(\lambda\tau))d\tau,\ 0<\lambda<1,\ t\in[0,1] \qquad (1.6)
$$

denkleminin ve M. A. Darwish [25−31] ise aşağıdaki denklemlerin çözülebilirliklerine ve çözümlerin karakterlerine dair hükümler vermişlerdir.

$$
\begin{aligned}
x(t) &= g(t)+\frac{x(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u(t,x(t))}{(t-s)^{1-\alpha}}ds,\ t\in[0,T]\,, && (1.7)\\
x(t) &= f(t,x(t))+\frac{g(t,x(t))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u(t,s,x(s))}{(t-s)^{1-\alpha}}ds,\ t\in[0,\infty)\,, && (1.8)\\
x(t) &= a(t)+\frac{f(t,x(t))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{g(k(t,s))}{(t-s)^{1-\alpha}}\left|x(s)\right|ds,\ t\in[0,1]\,,\\
x(t) &= a(t)+\frac{f(t,x(t))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u(t,s,x(s),x(\lambda s))}{(t-s)^{1-\alpha}}ds,\ 0<\lambda<1,\ t\in[0,\infty)\,, && (1.9)\\
x(t) &= a(t)+\frac{g(t,x(t))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{k(t,s)u(t,s,x(s),x(\lambda s))}{(t-s)^{1-\alpha}}ds,\ 0<\lambda<1,\ t\in[0,1]\,,\\
x(t) &= g(t,x(t))+\frac{(Tx)(t)}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{h(u(t,s))}{(t-s)^{1-\alpha}}(Hx)(s)ds,\ t\in[0,1]\,,\\
x(t) &= g(t,x(t))+\frac{f(t,x(t))}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t \frac{u(t,s,(Hx)(s))}{(t-s)^{1-\alpha}}ds,\ t\in[0,1]\,.
\end{aligned}
$$

Bunlara ek olarak 2013 yılında, [32] ve [33] numaralı çalışmalarda,

$$
x(t)=g(t,x(\beta(t)))+f(t,x(\alpha(t)))\int_0^{\varphi(t)} u(t,s,x(\gamma(s)))ds
$$

denkleminin ve [34] numaralı çalışmada ise,

$$
x(t)=g(t,x(\alpha(t)))+f\left(t,\int_0^{\varphi(t)} u(t,s,x(\gamma(s)))ds,x(\beta(t))\right)
$$

denkleminin $C\left[a,b\right]$ uzayında çözülebilirlikleri incelenmiştir.

Bu tezde ise, $0<\beta,\beta_1,\beta_2\leq 1$ ve gösterimde kısalık olması amacıyla

$$H\left(t,s,x\left(\tau\right)\right)=\frac{u(t,\tau,x(\gamma_1(\tau)),...,x(\gamma_n(\tau)))}{(\varphi(s)-\tau)^{1-\beta}},$$

$$H_1\left(t,s,x\left(\tau\right)\right)=\frac{u(t,\tau,x(\gamma_1(\tau)),...,x(\gamma_{n_1}(\tau)))}{(\varphi_1(s)-\tau)^{1-\beta_1}}$$

ve

$$H_2\left(t,s,x\left(\tau\right)\right)=\frac{v(t,\tau,x(\eta_1(\tau)),...,x(\eta_{n_2}(\tau)))}{(\varphi_2(s)-\tau)^{1-\beta_2}}$$

olmak üzere, $C\left[a,b\right]$ ve $BC(\mathbb{R}_+)$ uzaylarında şu ana kadar ele alınmış bir çok denklemden daha genel formda olan

$$x(t)=f\left(t,\left(T_1x\right)(t),\left(T_2x\right)(t)\int_0^{\varphi(t)}H\left(t,t,x\left(\tau\right)\right)d\tau,x(\alpha_1(t)),...,x(\alpha_m(t))\right)\tag{1.10}$$

denklemi ile

$$(Fx)(t)=f\left(t,\left(T_1x\right)(t),\left(T_2x\right)(t)\int_0^{\varphi_1(t)}H_1\left(t,t,x\left(\tau\right)\right)d\tau,x(\alpha_1(t)),...,x(\alpha_{m_1}(t))\right)$$

ve

$$(Gx)(t)=g\left(t,\left(T_3x\right)(t),\left(T_4x\right)(t)\int_0^{\varphi_2(t)}H_2\left(t,t,x\left(\tau\right)\right)d\tau,x(\phi_1(t)),...,x(\phi_{m_2}(t))\right)$$

olmak üzere,

$$x(t)=(Fx)(t)(Gx)(t)\tag{1.11}$$

denkleminin çözülebilirlikleri incelenecektir.

Dikkat edilirse (1.10) denklemi, daha önceden ele alınmış, yukarıda verilen denklemlerin birçoğundan daha genel bir yapıya sahiptir. Bu durum bazı denklemler için aşağıda açıklanmıştır.

(1.10) denkleminde;

$$f(t,x_1,x_2,...,x_{m+2})=g(t,x_3,...,x_{m+2})+x_2,\ \varphi(t)=\phi(t),\left(T_2x\right)(t)=\beta=1,$$

olarak seçilirse (1.1) denklemi,

$$f(t,x_1,x_2,...,x_{m+2})=h\left(t\right)+x_2,\ \ \left(T_2x\right)(t)=\frac{g(t,x(t))}{\Gamma\left(\alpha\right)}$$

ve

$$n=1,\ u\left(t,\tau,x_1\right)=v\left(t,x_1\right),\ \gamma_1\left(\tau\right)=\tau,\ \varphi\left(t\right)=t$$

olarak seçilirse (1.2) denklemi,

$$f(t,x_1,x_2,...,x_{m+2})=f_1\left(t,x_2,x_3\right),$$

$$\varphi(t)=t,\gamma_1(\tau)=\tau \text{ ve } \left(T_2x\right)(t)=\beta=m=n=1$$

olarak seçilirse (1.3) denklemi,

$$f(t,x_1,x_2,...,x_{m+2})=x_2,\ \ \left(T_2x\right)(t)=\left(Tx\right)(t)$$

ve

$$n=\beta=1,\ u\left(t,\tau,x_1,...,x_n\right)=v\left(t,\tau,x_1\right),\ \varphi\left(t\right)=t,\ \gamma_1\left(\tau\right)=\tau$$

olarak seçilirse (1.4) denklemi,

$$f(t,x_1,x_2,...,x_{m+2})=p(t)+x_2,$$

$$\beta=n=1,\ \ \left(T_2x\right)(t)=\left(Tx\right)(t),\ \gamma(\tau)=\tau,\varphi(t)=t$$

ve

$$u(t,\tau,x_1,x_2,...,x_n)=v(t,\tau,x_1)$$

olarak seçilirse (1.5) denklemi,

$$f(t,x_1,x_2,...,x_{m+2})=p(t)+x_2,$$

$$\beta=1,\ n=2,\ \ \left(T_2x\right)(t)=\left(Tx\right)(t),\ \gamma_1(\tau)=\tau,\ \gamma_2\left(\tau\right)=\lambda\tau,\ \varphi(t)=\sigma(t)$$

ve

$$u(t,\tau,x_1,x_2,...,x_n)=v(t,\tau,x_1,x_2)$$

olarak seçilirse (1.6) denklemi elde edilebilir. Benzer olarak bilinen fonksiyonların özel seçimleri ile (1.10) denkleminden $(1.7)-(1.9)$ denklemleri ve diğer bazı denklemler de elde edilebilir.

1.1. İntegral Denklemlerin Sınıflandırılması

Bu bölümde, *lineer ve lineer olmayan integral denklemler*, *tekil ve tekil olmayan integral denklemler*, *birinci, ikinci ve üçüncü çeşit integral denklemler*, *homojen ve homojen olmayan integral denklemler* ve son olarak *Volterra ve Fredholm integral denklemleri* tanıtılacak ve bu tür denklemlere ilişkin örnekler verilecektir.

İntegral denklemler farklı özelliklerine göre aşağıdaki gibi sınıflandırılabilirler.

1.1.1. Lineer ve Lineer Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemler temel kavramlar açısından öncelikle, lineer ve lineer olmayan integral denklemler olarak iki sınıfa ayrılır. Genel olarak f, k ve ϕ bilinen fonksiyonlar ve $a \leq t, s \leq b$ olmak üzere,

$$\phi(t)x(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)x(s)ds$$

yapısında olan denklemlere *lineer integral denklem* denir.

$$x(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)x^n(s)ds, \qquad (n \neq 1)$$

ve

$$x(t) = \int_a^t k(t,s)\cos x(s)ds$$

denklemleri ise *lineer olmayan* integral denklemlere birer örnektir. Bunun gibi, daha genel olarak,

$$x(t) = f(t) + \int_a^t u(t,s,x(s))ds$$

denklemi de lineer olmayan bir integral denklemdir, [35].

1.1.2. Tekil ve Tekil Olmayan İntegral Denklemler

İntegral denklemlerin sınıflandırılmasında çekirdek fonksiyon olarak adlandırılan k fonksiyonunun sürekliliği önemlidir. k fonksiyonu tanım aralığında sürekli ise integral denklem *tekil olmayan (singüler olmayan)* bir integral denklemdir. Eğer k bu aralıkta sürekli değilse veya integral sınırlarından en az biri sonsuz ise, integral denklem *tekil (singüler)* integral denklem sınıfına girmektedir.

Örneğin, $0 < \alpha < 1$ olmak üzere,

$$f(t) = \int_0^t \frac{x(s)ds}{(t-s)^\alpha}$$

veya

$$f(t) = \int_0^\infty \cos(ts)x(s)ds$$

şeklindeki bir integral denklem tekil integral denklem sınıfına girmektedir, [3].

1.1.3. İntegral Denklemlerin Yapılarına Göre Sınıflandırılması

İntegral denklemler, yapılarına göre üç sınıfa ayrılır. x bilinmeyen fonksiyon, ϕ bilinen bir fonksiyon ve k çekirdek fonksiyon olmak üzere, bilinmeyen fonksiyonun sadece integral içinde mevcut olması durumunda, integral denkleme *I. çeşit integral denklem* denir.

$$\phi(t) = \int_a^t k(t,s)x(s)ds$$

denklemi bu sınıfa bir örnektir. Benzer şekilde f bilinen bir fonksiyon olmak üzere,

$$\phi(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)x(s)ds$$

şeklindeki bir integral denklem de yine *I. çeşit integral denklemdir.*

$$x(t) = \int_a^t k(t,s)x(s)ds$$

veya

$$x(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)x(s)ds$$

şeklindeki integral denklemler ise *II. çeşit integral denklemler* sınıfına girmektedir. Görüldüğü gibi bu tip denklemlerde, bilinmeyen x fonksiyonu integralin hem içinde hem de dışında bulunmaktadır. Bu iki çeşit integral denklemden başka ϕ, f ve k bilinen fonksiyonlar ve x bilinmeyen fonksiyon olmak üzere,

$$\phi(t)x(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)x(s)ds$$

şeklindeki integral denklemlere ise *III. çeşit integral denklemler* denir, [3].

1.1.4. Homojen ve Homojen Olmayan İntegral Denklemler

Bir integral denklemde integralin dışında, bilinmeyen x fonksiyonundan başka, herhangi bir fonksiyon mevcut değilse bu integral denkleme *homojen integral denklem,* aksi durumda ise *homojen olmayan integral denklem* denir.

$$x(t) = \int_a^t k(t,s)x(s)ds$$

denklemi homojen iken,

$$x(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)x(s)ds$$

homojen olmayan bir integral denklemdir.

Homojen integral denkleminin, kolayca görülebildiği gibi, $x(t) = 0$ olan bir çözümü vardır. Buna *aşikar* çözüm veya *trivial* çözüm denir. Ancak bu denklemin bunun dışında çözümlerinin bulunup bulunmadığının veya hangi şartlar altında çözümünün olabileceğinin araştırılması başlı başına bir konudur, [3].

1.1.5. Volterra ve Fredholm İntegral Denklemleri

İntegral denklemler, integral sınırlarının değişken veya sabit olmasına göre de sınıflandırılırlar. İntegral sınırlarından en az birinin değişken olması durumunda elde edilen,

$$\phi(t) = \int_a^t k(t,s)x(s)ds,$$

$$x(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)x(s)ds,$$

$$\phi(t)x(t) = f(t) + \int_a^t k(t,s)x(s)ds$$

ve

$$x(t) = \int_a^t k(t,s)x(s)ds$$

formundaki denklemlere *Volterra integral denklemleri* denilmektedir. İntegral sınırlarının her ikisinin de sabit olması halinde elde edilen,

$$\phi(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds,$$

$$x(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s)x(s)ds,$$

$$\phi(t)x(t) = f(t) + \int_a^b k(t,s)x(s)ds$$

ve

$$x(t) = \int_a^b k(t,s)x(s)ds$$

formundaki denklemlere ise *Fredholm integral denklemleri* denilmektedir. Ayrıca integral sınırlarından birinin sonsuz, birinin sabit veya her ikisinin sonsuz olması durumunda da integral denklem Fredholm integral denklemleri sınıfındandır, [3]. Volterra ve Fredholm integral denklemleri arasındaki fark bu sınır yapısında ortaya çıkmaktadır.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde sonraki bölümlerde ihtiyaç duyulacak bazı kavramlar ve teoremler verilecektir.

Tanım 2.1 *X boş olmayan herhangi bir cümle olmak üzere, $d : X \times X \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu verilsin. Her x, y, $z \in X$ için aşağıdaki şartların sağlanması durumunda d fonksiyonuna X cümlesi üzerinde bir "metrik" ve (X, d) ikilisine ise bir "metrik uzay" denir. Metrik yerine "uzaklık fonksiyonu" ifadesi de kullanılmaktadır, [36].*

(M1) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y,$

(M2) $d(x, y) = d(y, x)\,,$

(M3) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)\,.$

Örnek 2.1 *Bir $[a, b]$ aralığı üzerinde tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların oluşturduğu cümle olarak tanımlanan $C[a, b]$, $d(x, y) = \underset{t \in [a,b]}{\text{maks}} |x(t) - y(t)|$ şeklinde tanımlı d fonksiyonu ile bir metrik uzaydır ve bu d metriği $C[a, b]$'nin alışılmış metriği olarak bilinir, [36].*

Örnek 2.2 *Negatif olmayan reel sayılar cümlesi $\mathbb{R}_+$'dan $\mathbb{R}^n$'ye tanımlı, sürekli ve sınırlı olan fonksiyonların cümlesi $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^n)$ ile gösterilir. Özel olarak $n = 1$ olması durumunda $BC(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$ yerine genellikle $BC(\mathbb{R}_+)$ yazılır. $BC(\mathbb{R}_+)$ üzerinde, $d(x, y) = \sup_{t \geq 0} |x(t) - y(t)|$ şeklinde tanımlı d fonksiyonu bir metriktir, [5].*

Örnek 2.3 *(X, d) bir metrik uzay olmak üzere, X'in boş olmayan, kapalı ve sınırlı alt cümlelerinin ailesi $\mathcal{H}$ olsun. Bu durumda her $A, B \in \mathcal{H}$ için,*

$$D(A, B) = \text{maks}\left\{\sup_{x \in A} d(x, B)\,, \sup_{y \in B} d(y, A)\right\}$$

şeklinde tanımlı D fonksiyonu $\mathcal{H}$ üzerinde metrik aksiyomlarını sağlar ve "Hausdorff metriği" olarak adlandırılır, [37].

Tanım 2.2 *(X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olmak üzere, X cümlesinin*

$$\begin{aligned} B(x_0, r) &= \{x \in X : d(x_0, x) < r\}\,, \\ B[x_0, r] &= \{x \in X : d(x_0, x) \leq r\} \end{aligned}$$

ve

$$S(x_0, r) = \{x \in X : d(x_0, x) = r\}$$

şeklinde tanımlı alt cümlelerine sırasıyla, "x_0 merkezli, r yarıçaplı açık yuvar", "x_0 merkezli, r yarıçaplı kapalı yuvar" ve "x_0 merkezli, r yarıçaplı yuvar yüzeyi" denir, [36].

Tanım 2.3 *(X, d) bir metrik uzay, $A \subseteq X$ ve $x_0 \in A$ olmak üzere, $B(x_0, r) \subseteq A$ olacak şekilde bir $r > 0$ sayısı mevcut ise A cümlesine x_0 elemanının bir "komşuluğu" denir. Her elemanının komşuluğu olan cümleye "açık cümle", tümleyeni açık olan cümleye ise "kapalı cümle" denir,* [36].

Tanım 2.4 *(X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $A \subseteq X$ olmak üzere, verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $(B(x_0, \varepsilon) \setminus \{x_0\}) \cap A \neq \emptyset$ ise x_0 elemanına A cümlesinin bir "yığılma noktası" denir. A'nın bütün yığılma noktalarının cümlesi A' ile gösterilir,* [38].

Tanım 2.5 *(X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, $A \cup A'$ cümlesine A'nın kapanışı denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir,* [38].

Tanım 2.6 *(X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ boş olmayan bir cümle olmak üzere, $\operatorname{diam} A = \sup\{d(x, y) : x, y \in A\}$ değerine "A cümlesinin çapı" denir,* [36].

Tanım 2.7 *(X, d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, her x, $y \in A$ için $d(x, y) \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcut ise A cümlesine "sınırlıdır" denir,* [39].

Tanım 2.8 *(X, d), (Y, d') metrik uzaylar, $f : A \subseteq X \to Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in A$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $d(x, x_0) < \delta$ olan her $x \in A$ için $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise, f fonksiyonu "x_0 noktasında süreklidir" denir. Eğer f fonksiyonu A cümlesinin her noktasında sürekli ise, bu durumda f fonksiyonu "A üzerinde (veya A'da) süreklidir" denir. Eğer buradaki δ sayısı bir $B \subseteq A$ cümlesi üzerinde sadece ε'a bağlı ($x_0 \in B$ noktasının seçiminden bağımsız) ise bu durumda f fonksiyonu B üzerinde "düzgün süreklidir" denir,* [38].

Tanım 2.9 (X,d) *bir metrik uzay,* $S \subseteq X$ *ve* $\varepsilon > 0$ *olsun. Her* $x \in X$ *için* $d(x,y) < \varepsilon$ *olacak şekilde bir* $y \in S$ *elemanı mevcut ise* S *cümlesine* X *için bir "*$\varepsilon-$*ağı" denir. Başka bir ifade ile* $X \subset \bigcup \{B(y,\varepsilon) : y \in S\}$ *kapsaması sağlanıyor ise* S *cümlesi "*X *için bir* $\varepsilon-$*ağıdır" denir. Özel olarak* S *sonlu ise* S*'ye* X*'in "sonlu bir* $\varepsilon-$*ağı" denir, [38].*

Tanım 2.10 (X,d) *bir metrik uzay olsun. Her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık* X *sonlu bir* $\varepsilon-$*ağına sahip ise* A *"tamamen sınırlıdır" (total sınırlıdır veya prekompakttır) denir, [38].*

Tanım 2.11 (X,d) *bir metrik uzay ve* (x_n) X*'te bir dizi olmak üzere, her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık* $m,n > n_0$ *olan her* $m,n \in \mathbb{N}$ *için* $d(x_n,x_m) < \varepsilon$ *olacak şekilde bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mevcut ise* (x_n) *dizisine bir "Cauchy" dizisi denir, [36].*

Tanım 2.12 (X,d) *bir metrik uzay,* (x_n) X *'te bir dizi ve* $x \in X$ *olmak üzere, her* $\varepsilon > 0$ *sayısına karşılık,* $n > n_0$ *olan her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $d(x_n,x) < \varepsilon$ *olacak şekilde bir* $n_0 \in \mathbb{N}$ *mevcut ise "*(x_n) *dizisi* x *noktasına yakınsaktır" veya "*(x_n) *dizisinin limiti* x *tir" denir ve* $(x_n) \to x$ *veya* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *ile gösterilir, [38].*

Tanım 2.13 (X,d) *metrik uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise* (X,d)*'ye "tam metrik uzay" denir, [36].*

Tanım 2.14 (X,d) *bir metrik uzay,* $A \subseteq X$ *ve* I *herhangi bir indis cümlesi olmak üzere,* X*'in alt cümlelerinin bir* $\mathcal{G} = \{G_i : i \in I\}$ *ailesi* $A \subseteq \bigcup\limits_{i\in I} G_i$ *koşulunu sağlıyorsa* $\mathcal{G}$ *ailesine* A *için bir "örtüdür" denir.* $\mathcal{G}$ *ailesinin sayılabilir olması durumunda* $\mathcal{G}$*'ye "sayılabilir örtü", sonlu olması durumunda "sonlu örtü" ve benzer olarak her elemanının açık olması halinde "açık örtü" denir. Eğer bir* $J \subseteq I$ *için* $A \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} G_i$ *ise* $\{G_i : i \in J\}$ *ailesine* $\mathcal{G}$ *örtüsünün bir "alt örtüsü" denir, [38].*

Örnek 2.4 $\mathbb{R}$ *alışılmış metrik ile düşünüldüğünde* $\mathcal{G} = \{(-n,n) : n \in \mathbb{N}\}$ *ailesi* $\mathbb{R}$ *için bir örtü (hatta açık örtü) ve* $\{(-k,k) : k = 2n \text{ ve } n \in \mathbb{N}\}$ *ailesi de* $\mathcal{G}$ *'nin bir alt örtüsüdür.*

Tanım 2.15 (X,d) *bir metrik uzay ve* $A \subseteq X$ *olmak üzere,* A*'nın her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü mevcut ise* A *cümlesi "kompakttır" denir, [38].*

Tanım 2.16 *(X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, A cümlesinden alınan her dizi yakınsak bir alt diziye sahip ise A cümlesi "dizisel kompakttır" denir,* [38].

Tanım 2.17 *(X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, A'nın her sayılabilir açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü mevcut ise A cümlesi "sayılabilir kompakttır" denir,* [38].

Metrik uzaylara ilişkin yukarıda verilen kompaktlık, dizisel kompaktlık ve sayılabilir kompaktlık kavramları birbirine denktir, [38].

Teorem 2.1 (Heine-Borel Teoremi) *$S \subset \mathbb{R}^n$ cümlesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart kapalı ve sınırlı olmasıdır,* [40].

Teorem 2.2 *$S \subset \mathbb{R}^n$ kompakt bir cümle ve $f : S \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda f fonksiyonu S üzerinde düzgün süreklidir,* [41].

Tanım 2.18 *(X,d) bir metrik uzay ve $A \subseteq X$ olmak üzere, $\overline{A}$ cümlesi kompakt ise A'ya "ön-kompakt (relatif kompakt)" cümle denir,* [42].

Teorem 2.3 *(X,d) bir metrik olsun. Bu durumda $A \subseteq X$ relatif kompakt ise prekompakttır. Özel olarak (X,d) bir tam metrik uzay ise, $A \subseteq X$ cümlesinin relatif kompakt olması için gerek ve yeter şart prekompakt olmasıdır,* [43].

Tanım 2.19 *Boş olmayan bir X cümlesi ve bir $\mathcal{F}$ cismi verilsin. Eğer $+(x,y) = x+y$ ve $\cdot(\lambda,x) = \lambda x$ şeklinde tanımlı $+ : X \times X \to X$ ve $\cdot : \mathcal{F} \times X \to X$ fonksiyonları her $x,y,z \in X$ ve her $\lambda, \beta \in \mathcal{F}$ için aşağıdaki koşulları sağlıyorsa X'e "$\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı (lineer uzay)" ve X 'in elemanlarına ise vektör denir. Hangi cismin söz konusu olduğunun bilindiği durumlarda X'e sadece vektör uzayı demek yeterlidir. $\mathcal{F} = \mathbb{R}$ alınması durumunda X'e reel vektör uzayı, $\mathcal{F} = \mathbb{C}$ durumunda ise kompleks vektör uzayı denir,* [38].

(V1) $x+y = y+x$,

(V2) $(x+y)+z = x+(y+z)$,

(V3) $\forall x \in X$ *için* $x+\theta = \theta+x = x$ *olacak şekilde bir* $\theta \in X$ *vardır,*

(V4) $\forall x \in X$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ *olacak şekilde bir* $(-x) \in X$ *vardır,*

(V5) $\lambda(x+y) = \lambda x + \lambda y$,

(V6) $(\lambda + \beta) x = \lambda x + \beta x$,

(V7) $(\lambda\beta) x = \lambda(\beta x)$,

(V8) $\forall x \in X$ *için* $1x = x$ *olacak şekilde bir* $1 \in \mathcal{F}$ *vardır.*

Örnek 2.5 $\mathbb{C}$ *kompleks sayılar cümlesinin hem reel hem de kompleks bir vektör uzayı olmasına karşılık* $\mathbb{R}$ *reel sayılar cümlesi sadece reel vektör uzayıdır.*

Tanım 2.20 X *bir vektör uzayı,* $x_1,\ x_2, ...,\ x_n \in X$ *ve* $\alpha_1,\ \alpha_2, ...,\ \alpha_n \in \mathcal{F}$ *olmak üzere,* $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n$ *ifadesine* $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$ *elemanlarının bir "lineer kombinasyonu" denir, [44].*

Tanım 2.21 *Bir* X *vektör uzayındaki,* $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$ *vektörlerinden oluşan bir* M *cümlesi verilsin.* $\alpha_1,\ \alpha_2, ...,\ \alpha_n \in \mathcal{F}$ *olmak üzere,*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_n x_n = \theta$$

eşitliği, ancak ve ancak, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0$ *olması halinde gerçekleniyorsa,* $x_1,\ x_2, ...,\ x_n$ *vektörleri veya* M *cümlesi "lineer bağımsızdır", aksi halde ise "lineer bağımlıdır" denir.*

X'in sonsuz bir M alt cümlesi verildiğinde, M'nin boş olmayan her sonlu alt cümlesi lineer bağımsız ise M'ye lineer bağımsız, aksi halde ise lineer bağımlıdır denir, [44].

Tanım 2.22 n *pozitif bir tamsayı olmak üzere, bir* X *vektör uzayı lineer bağımsız* n *tane vektör içeriyor ve* $n+1$ *tane lineer bağımsız vektör bulunamıyorsa,* X *vektör uzayı "sonlu boyutludur" denir.* n *sayısına ise "X'in boyutu" adı verilir ve* $\dim X = n$ *yazılır. Eğer bir* X *uzayı sonlu boyutlu değilse, sonsuz boyutlu uzay olarak adlandırılır, [44].*

Tanım 2.23 X *bir vektör uzayı ve* $M \subseteq X$ *olsun. Her* $x,\ y \in M$ *için*

$$\{\alpha x + (1-\alpha) y : 0 \leq \alpha \leq 1\}$$

cümlesi M *tarafından kapsanıyorsa* M*'ye "konveks cümle" denir, [44].*

Tanım 2.24 *X bir vektör uzayı ve $M \subseteq X$ olsun. X'in, M cümlesini kapsayan bütün konveks alt cümlelerinin arakesitine "M'nin konveks hull'u" denir ve $\operatorname{co} M$ ile gösterilir. M cümlesini kapsayan bütün konveks ve kapalı cümlelerin arakesitine ise "M'nin konveks kapanışı" denir ve $\operatorname{Conv} M$ ile gösterilir.*

Ayrıca $\overline{\operatorname{co} M} = \operatorname{Conv} M$ dir ve herhangi bir $x \in \operatorname{co} M$ için $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$ ve $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = x$ eşitlikleri sağlanacak şekilde $\lambda_i \in \mathcal{F}$ skalerleri ve $x_i \in M$ vektörleri mevcuttur, [45].

Tanım 2.25 *$\mathcal{F}$ reel veya kompleks bir cisim ve X $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olmak üzere, her $x, y \in X$ ve her $\lambda \in \mathcal{F}$ için, aşağıdaki şartların sağlanması halinde, $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonuna X üzerinde bir "norm", $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise "normlu uzay" denir, [42].*

(N1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta,$

(N2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\| \, ,$

(N3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \, .$

Örnek 2.6 *$C\,[a, b]$ ve $BC(\mathbb{R}_+)$ cümleleri,*

$$(x + y)\,(t) = x(t) + y(t) \;\; ve \;\; (\lambda x)\,(t) = \lambda x(t)$$

işlemleri ile reel vektör uzayları olup, sırasıyla,

$$\|x\| = \operatorname*{maks}_{t \in [a,\, b]} |x(t)| \;\; ve \;\; \|x\| = \sup_{t \geq 0} |x(t)|$$

normları ile birer normlu uzaydır, [44], [5].

Tanım 2.26 *$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ olmak üzere, X cümlesinin*

$$\begin{aligned} B\,(x_0, r) &= \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}\,, \\ B\,[x_0, r] &= \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\} \end{aligned}$$

ve

$$S\,(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| = r\}$$

şeklinde tanımlı alt cümlelerine sırasıyla, "x_0 merkezli, r yarıçaplı açık yuvar", "x_0 merkezli, r yarıçaplı kapalı yuvar" ve "x_0 merkezli, r yarıçaplı yuvar yüzeyi" denir, [42].

Bu tezde aksi belirtilmedikçe θ merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvar kısaca B_r ile gösterilecektir.

Tanım 2.27 *$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $\emptyset \neq A \subseteq X$ olmak üzere, her $x \in A$ için $\|x\| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcut ise A cümlesine "sınırlıdır" denir, [38].*

Tanım 2.28 *X ve Y aynı cisim üzerinde vektör uzayları ve $A \subseteq X$ olsun. A'nın her elemanını Y'nin bir tek elemanı ile eşleyen T kuralına X'ten Y'ye bir operatör denir ve $T : X \to Y$ ile gösterilir. Burada A'ya T operatörünün tanım bölgesi denir ve $D(T)$ ile gösterilir, $R(T) = \{T(x) \in Y : x \in A\}$ cümlesine ise T operatörünün görüntü bölgesi denir, [44].*

Genellikle, herhangi bir karışıklık söz konusu olmayacak ise x'in T altındaki görüntüsünü temsil etmek için $T(x)$ yerine Tx yazılır.

Tanım 2.29 *$(X, \|\cdot\|_1)$, $(Y, \|\cdot\|_2)$ normlu uzaylar, $T : X \to Y$ bir operatör ve $x_0 \in D(T)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\|_1 < \delta$ olan her $x \in D(T)$ için $\|Tx - Tx_0\|_2 < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(x_0, \varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise, "T operatörü x_0 noktasında süreklidir" denir. Eğer T operatörü $D(T)$ cümlesinin her noktasında sürekli ise, bu durumda "T operatörü $D(T)$ üzerinde (veya $D(T)$ 'de) süreklidir" denir, [42].*

Tanım 2.30 *$X \subseteq C[a, b]$ olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|t_1 - t_2| < \delta$ koşulunu sağlayan her t_1, $t_2 \in [a, b]$ ve her $x \in X$ için $|x(t_1) - x(t_2)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise X cümlesine "eşsüreklidir" denir, [42].*

Tanım 2.31 *$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve (x_n) X'te bir dizi olmak üzere, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $m, n > n_0(\varepsilon)$ olan her $m, n \in \mathbb{N}$ için $\|x_n - x_m\| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ mevcut ise (x_n) dizisine bir "Cauchy" dizisi denir, [42].*

Tanım 2.32 *$(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, (x_n) X'te bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$ ise "(x_n) dizisi x_0 noktasına yakınsaktır" veya "(x_n) dizisinin limiti x_0 dır" denir ve $(x_n) \to x_0$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ ile gösterilir, [42].*

Tanım 2.33 $(X, \|\cdot\|)$ *normlu uzayından alınan her Cauchy dizisi yakınsak ise* $(X, \|\cdot\|)$*'e (veya kısaca* X*'e) "Banach uzayı" denir, [42].*

Örnek 2.7 $C\,[a,b]$ *ve* $BC(\mathbb{R}_+)$ *uzayları, sırasıyla,*

$$\|x\| = \underset{t\in[a,\,b]}{\text{maks}}\,|x(t)| \ \ \textit{ve} \ \ \|x\| = \sup_{t\geq 0}|x(t)|$$

normları ile birer Banach uzaydır, [44], [5].

Tanım 2.34 X*,* $\mathcal{F}$ *cismi üzerinde bir vektör uzayı ve* $\cdot : X \times X \to X$ *bir dönüşüm olmak üzere, her* $x,\ y,\ z \in X$ *ve* $\alpha \in \mathcal{F}$ *için*

(1) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$

(2) $x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z$

(3) $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$

(4) $\alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y)$

özellikleri sağlanıyorsa X*'e (*$\mathcal{F}$ *cismi üzerinde) bir "cebir" denir, [46].*

Tanım 2.35 X $\mathcal{F}$ *cismi üzerinde bir cebir olmak üzere,* X *üzerindeki* $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}_+$ *norm fonksiyonu her* $x,\ y \in X$ *için,*

$$\|xy\| \leq \|x\|\,\|y\|$$

eşitsizliğini sağlıyorsa $(X, \|\cdot\|)$*'e "norm cebiri" denir, [46].*

Tanım 2.36 $(X, \|\cdot\|)$ *bir norm cebiri olmak üzere,* X*'teki her Cauchy dizisi yakınsak ise* $(X, \|\cdot\|)$*'e (veya kısaca* X*'e) "Banach cebiri" denir, [46].*

Örnek 2.8 $C\,[a,b]$ *ve* $BC(\mathbb{R}_+)$ *cümleleri,*

$$(x + y)\,(t) = x(t) + y(t), \ \ (\lambda x)\,(t) = \lambda x(t)$$

ve

$$(x \cdot y)\,(t) = x\,(t)\,y\,(t)$$

işlemleri ile birer reel cebirdir. Ayrıca $C\,[a,b]$ *ve* $BC(\mathbb{R}_+)$*, sırasıyla,*

$$\|x\| = \underset{t\in[a,\,b]}{\text{maks}}\,|x(t)| \ \ \textit{ve} \ \ \|x\| = \sup_{t\geq 0}|x(t)|$$

normları ile birer Banach cebiridir, [18].

Tanım 2.37 *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer*

$$\lim_{t\to\infty}\left[\sup_{s\geq t} f(s)\right]$$

limiti mevcut ise bu limit değerine f'nin $t\to\infty$ için limit superior'u denir ve

$$\limsup_{t\to\infty} f(t)$$

ile gösterilir, [47].

Tanım 2.38 *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer*

$$\lim_{t\to\infty}\left[\inf_{s\geq t} f(s)\right]$$

limiti mevcut ise bu limit değerine f'nin $t\to\infty$ için limit inferior'u denir ve

$$\liminf_{t\to\infty} f(t)$$

ile gösterilir, [47].

Önerme 2.1 *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için,*

$$\liminf_{t\to\infty} f(t)\leq\limsup_{t\to\infty} f(t)$$

dir, [47].

Önerme 2.2 *$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için,*

$$\lim_{t\to\infty} f(t)=L\Leftrightarrow\liminf_{t\to\infty} f(t)=\limsup_{t\to\infty} f(t)=L$$

dir, [47].

2.1. Kompaktsızlık Ölçüleri

Bu bölümde fonksiyonel analizde önemli bir yere sahip olan ve ilk olarak 1930 yılında Kuratowski [48] tarafından tanımlanan kompaktsızlık ölçüsü kavramı tanıtılıp, $C[a,b]$ ve $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayları için bazı kompaktsızlık ölçüleri ile bu ölçüler arasındaki bazı ilişkiler verilecektir.

Tanım 2.39 *(X,d) bir metrik uzay ve $\mathfrak{M}_X$, X'in boştan farklı ve sınırlı alt cümlelerinin ailesi olmak üzere,*

$$\alpha(A)=\inf\left\{\varepsilon>0 : A\subset\bigcup_{k=1}^{n}S_k,\ \ S_k\subset X\ \ ve\ \operatorname{diam}S_k<\varepsilon\right\}$$

şeklinde tanımlanan $\alpha:\mathfrak{M}_X\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonuna X üzerinde "Kuratowski kompaktsızlık ölçüsü" denir, [48].

Bu tanım göz önüne alınırsa, α fonksiyonu kullanılarak, (X,d) metrik uzayındaki sınırlı cümleler için bir derecelendirme yapmak mümkündür. (X,d) metrik uzayındaki kompakt cümleler için α fonksiyonu sıfır değerini alacağından, bu derecelendirmenin kompakt olmayan cümleler için daha anlamlı olduğu düşünülebilir. Dolayısıyla sınırlı bir cümlenin Kuratowski kompaktsızlık ölçüsünden o cümlenin kompakt olmayışının derecesi anlaşılabilir. Bu sebeple bazı kaynaklarda [49] kompaktsızlık ölçüsü yerine "kompaktlık kusuru" ifadesi de kullanılmaktadır.

Teorem 2.4 *(X,d) bir metrik uzay olmak üzere, her A, $B\in\mathfrak{M}_X$ için aşağıdaki özellikler sağlanır, [50].*

(1) $0\le\alpha(A)\le\operatorname{diam}A$,

(2) $A\subseteq B\Rightarrow\alpha(A)\le\alpha(B)$,

(3) $\alpha\left(\overline{A}\right)=\alpha(A)$, $\alpha(A)=0\Leftrightarrow\overline{A}$ *kompakttır,*

(4) $d(x,A)=\inf\{d(x,y):y\in A\}$ *ve* $V_\varepsilon(A)=\{x\in X: d(x,A)<\varepsilon\}$ *olmak üzere,* $\alpha(V_\varepsilon(A))\le\alpha(A)+2\varepsilon$,

(5) $\alpha(A\cup B)=\operatorname{maks}\{\alpha(A),\alpha(B)\}$,

(6) $\alpha(A\cap B)\le\min\{\alpha(A),\alpha(B)\}$.

Teorem 2.5 *(X,d) bir tam metrik uzay olmak üzere, (F_n) X'teki boş olmayan, kapalı ve sınırlı cümlelerin, $\lim_{n\to\infty}\alpha(F_n)=0$ olacak şekildeki azalan bir dizisi olsun. Bu durumda $F_\infty=\bigcap\limits_{n=1}^{\infty}F_n$ arakesit cümlesi X'in boş olmayan kompakt bir alt cümlesidir, [48].*

İspat. F_∞, tanımı gereği kapalı bir cümledir. Ayrıca her $n \in \mathbb{N}$ için $F_\infty \subset F_n$ kapsaması ile bir önceki teoremde (2) ve (3) göz önüne alınırsa, F_∞'nin kompakt bir cümle olduğu sonucu elde edilir.

Diğer taraftan her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \in F_n$ ve $X_n = \{x_i : i \geq n\}$ olmak üzere, $X_n \subseteq F_n$ dir. $n \geq 2$ için $X_1 = \{x_1, x_2, ..., x_{n-1}\} \cup X_n$ olduğu göz önüne alınırsa, bir önceki teoremin (2), (3) ve (5) özelliklerinden

$$\alpha(X_1) = \alpha(X_n) \leq \alpha(F_n)$$

yazılabilir. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} \alpha(F_n) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa $\alpha(X_1) = 0$ elde edilir. Böylece X_1 relatif kompakt bir cümle olacağından, X cümlesinde (x_n) dizisinin $(x_{n_k}) \to x$ olacak şekilde yakınsak bir (x_{n_k}) alt dizisi vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için F_n kapalı olduğundan $x \in F_n$ sonucu elde edilir. Böylece $x \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} F_n = F_\infty$ olup $F_\infty \neq \emptyset$ dir. ■

Kuratowski'nin tanımladığı α kompaktsızlık ölçüsü, özel metrik uzaylar olarak, normlu uzaylarda da düşünülebilir; fakat bu durumda aşağıdaki sonuç son derece önemlidir.

Sonuç 2.1 *Sınırlı bir cümlenin kapanışı da sınırlı olacağından, sonlu boyutlu normlu uzaylarda sınırlı her cümle relatif kompakttır. Böylece, sonlu boyutlu normu uzaylarda α kompaktsızlık ölçüsü sadece sıfır değerini alır.*

Teorem 2.6 *X $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir normlu uzay olmak üzere, her A, $B \in \mathfrak{M}_X$, $\lambda \in \mathcal{F}$ ve $x \in X$ için aşağıdaki özellikler sağlanır,* [*51*].

(1) $\alpha(A + B) \leq \alpha(A) + \alpha(B)$,

(2) $\alpha(A + x) = \alpha(A)$,

(3) $\alpha(\lambda A) = |\lambda|\, \alpha(A)$,

(4) $\alpha(A) = \alpha(\mathrm{Conv}\, A)$.

Örnek 2.9 *X sonsuz boyutlu bir normlu uzay ve B_1, X'in kapalı birim yuvarı olmak üzere, $\alpha(B_1) = 2$ dir,* [*52*].

Diğer taraftan 1957 yılında Gohberg, Goldenštein ve Markus [53] tarafından aşağıdaki kompaktsızlık ölçüsü tanımı verilmiştir.

Tanım 2.40 *(X,d) bir metrik uzay olmak üzere,*

$$\chi(A) = \inf\left\{\varepsilon > 0 : A \subset \bigcup_{k=1}^{n} B(x_k, r_k),\ x_k \in X \text{ ve } r_k < \varepsilon\right\}$$

şeklinde tanımlanan $\chi : \mathfrak{M}_X \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonuna X üzerinde "Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü" denir.

Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü bazı kaynaklarda *yuvar kompaktsızlık ölçüsü* olarak da isimlendirilmektedir, [49].

Sonuç 2.2 *Dikkat edilecek olursa $\chi(A)$ değeri, "A X'te sonlu bir ε-ağına sahiptir" önermesini doğru kılan ε sayılarının infimumudur. Diğer taraftan, X metrik uzayının kompakt bir A cümlesi tamamen sınırlı (prekompakt) olduğundan $\chi(A) = 0$ dır.*

Teorem 2.7 *(X,d) bir metrik uzay olmak üzere, her A, $B \in \mathfrak{M}_X$ için aşağıdaki özellikler sağlanır, [45].*

(1) $\chi(A) = 0 \Leftrightarrow A$ *tamamen (total) sınırlıdır,*

(2) $\chi(A) = \chi(\overline{A})$,

(3) $A \subseteq B \Rightarrow \chi(A) \leq \chi(B)$,

(4) $\chi(A \cup B) = \text{maks}\{\chi(A), \chi(B)\}$,

(5) $\chi(A \cap B) \leq \min\{\chi(A), \chi(B)\}$,

(6) $\chi(A) \leq \alpha(A) \leq 2\chi(A)$.

Dikkat edilirse, Kuratowski kompaktsızlık ölçüsünde olduğu gibi, Hausdorff kompaktsızlık ölçüsünün de sonlu boyutlu normlu uzaylarda sadece sıfır değerini alacağı görülür.

Teorem 2.8 *X $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir normlu uzay olmak üzere, her A, $B \in \mathfrak{M}_X$, $\lambda \in \mathcal{F}$ ve $x \in X$ için Teorem 2.6'da verilen özellikler Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü χ için de sağlanır, [45].*

Örnek 2.10 *X sonsuz boyutlu bir normlu uzay ve B_1 X'in kapalı birim yuvarı olmak üzere, $\chi(B_1) = 1$ dir, [45].*

Örnek 2.11 *Sınırlı dizilerin reel normlu uzayı l_∞'da, her $A \in \mathfrak{M}_{l_\infty}$ için $\alpha(A) = 2\chi(A)$ dır, [54].*

Metrik uzaylar üzerinde tanımlanan Kuratowski ve Hausdorff kompaktsızlık ölçülerinin özel olarak normlu uzaylarda yukarıda verilen bir takım ilave özellikleri sağlaması üzerine, yukarıdaki özelliklere sahip olan, α ve χ'den farklı fonksiyonların olabileceği fikrinden hareketle, Banach uzayları üzerinde Kuratowski ve Hausdorff kompaktsızlık ölçülerinden daha kapsamlı olacak şekilde bir kompaktsızlık ölçüsü tanımının verilmesi fikri gelişmiştir. Böyle bir tanıma zemin oluşması adına Banaś ve Goebel [55] aşağıdaki tanımı vermişlerdir.

Tanım 2.41 *$(E, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı, E'nin boş olmayan kompakt alt cümlelerinin ailesi $CO(E)$ ve $\mathfrak{M}_E$'deki relatif kompakt cümlelerin ailesi $\mathfrak{N}_E$ olmak üzere, aşağıdaki şartların sağlanması durumunda, $K \subseteq \mathfrak{N}_E$ cümlesine E'de bir "çekirdek" denir.*

(1) $A \in K \Rightarrow \overline{A} \in K$,

(2) $A \in K$, $B \subset A$ *ve* $B \neq \emptyset \Rightarrow B \in K$,

(3) $A, B \in K \Rightarrow$ *her* $\lambda \in [0,1]$ *için* $\lambda A + (1-\lambda) B \in K$,

(4) $A \in K \Rightarrow \operatorname{Conv} A \in K$,

(5) $K^c = \{A \in K : A \text{ kompakttır}\}$ *cümlesi, Hausdorff metriği tarafından üretilen topolojiye göre $CO(E)$'de kapalıdır.*

1980 yılında Banaś ve Goebel'in [55] Banach uzayları üzerinde verdiği kompaktsızlık ölçüsü tanımı aşağıdaki gibidir.

Tanım 2.42 *$(E, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı olmak üzere, her $A, B \in \mathfrak{M}_E$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için, aşağıdaki şartların sağlanması halinde $\mu : \mathfrak{M}_E \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonuna E üzerinde, $K = \ker \mu \subseteq \mathfrak{N}_E$ çekirdeği ile, bir "kompaktsızlık ölçüsü" denir.*

(1) $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow A \in \ker \mu$

(**2**) $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$,

(**3**) $\mu(\overline{A}) = \mu(A)$,

(**4**) $\mu(\mathrm{Conv}\, A) = \mu(A)$,

(**5**) $\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda\mu(A) + (1-\lambda)\mu(B)$,

(**6**) (X_n) *$\mathfrak{M}_E$'deki kapalı cümlelerin $X_{n+1} \subset X_n$ olacak şekildeki bir dizisi ve* $\lim_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$ *ise* $X_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n$ *arakesit cümlesi boştan farklıdır.*

Özel olarak $\ker \mu = \mathfrak{N}_E$ *ise μ fonksiyonuna "tam kompaktsızlık ölçüsü" denir.*

Sonuç 2.3 *Tanım 2.42'deki X_∞ cümlesi her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(X_\infty) \leq \mu(X_n)$ eşitsizliğini sağlayacağından $\mu(X_\infty) = 0$ ve $X_\infty \in \ker\mu \subseteq \mathfrak{N}_E$ dir. Ayrıca kapalı cümlelerin sayılabilir arakesitinin de kapalı bir cümle olacağı göz önüne alınırsa X_∞ cümlesinin kompakt olduğu sonucuna ulaşılır.*

Sonuç 2.4 *Sonlu boyutlu bir Banach uzayı üzerindeki herhangi bir tam kompaktsızlık ölçüsü sadece sıfır değerini alır.*

Örnek 2.12 *Herhangi bir Banach uzayı üzerinde α ve χ birer tam kompaktsızlık ölçüsüdür, [55].*

Örnek 2.13 *$(E, \|\cdot\|)$ bir Banach uzayı ve $K \subseteq \mathfrak{N}_E$, E'de bir çekirdek olmak üzere, her $A \in \mathfrak{M}_E$ için,*

$$\mu(A) = \inf\{D(A,B) : B \in K\}$$

şeklinde tanımlı μ fonksiyonu E üzerinde bir kompaktsızlık ölçüsüdür, [56].

Teorem 2.9 (Cantor Arakesit Teoremi) *Bir (X,d) metrik uzayının tam olması için gerek ve yeter şart, X'in*

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq ... \supseteq A_n \supseteq ...$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{diam}\,(A_n) = 0$$

özelliğine sahip, boş olmayan ve kapalı alt cümlelerinin her (A_n) dizisi için, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A_n$ arakesit cümlesinin bir tek noktadan oluşmasıdır, [38].

Örnek 2.14 *Herhangi bir E Banach uzayı için $\mu : \mathfrak{M}_E \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu, $\mu(A) = \operatorname{diam} A$ şeklinde tanımlansın. Bu durumda,*

(1) $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \operatorname{diam} A = 0 \Leftrightarrow A = \{x\}$ *dir. Dolayısıyla* $\ker \mu = \{\{x\} : x \in E\}$ *olup* $\ker \mu \subseteq \mathfrak{N}_E$ *dir.*

(2) $A \subset B$ *ise* $\sup\{\|x-y\| : x,\ y \in A\} \leq \sup\{\|x-y\| : x,\ y \in B\}$ *olacağından* $\mu(A) \leq \mu(B)$ *dir.*

(3) $A \subset \overline{A}$ *olduğundan* (2)*'den* $\mu(A) \leq \mu(\overline{A})$ *olur. Özel olarak* $\mu(A) < \mu(\overline{A})$ *olduğu kabul edilirse,* $\operatorname{diam} A < \|x-y\|$ *olacak şekilde* $x,\ y \in \overline{A}$ *elemanları mevcuttur. Bu durumda her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $x_n,\ y_n \in A$ *olmak üzere,* $(x_n) \to x$ *ve* $(y_n) \to y$ *olacak şekilde* (x_n) *ve* (y_n) *dizileri bulunabilir.*
Böylece $(x_n - y_n) \to (x-y)$ *ve dolayısıyla* $\lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| = \|x-y\|$ *dir.*

Diğer taraftan, $\operatorname{diam} A = \sup\{\|x-y\| : x,\ y \in A\}$ *olduğu göz önüne alınırsa,*

$$\|x-y\| = \lim_{n\to\infty} \|x_n - y_n\| \leq \lim_{n\to\infty} \operatorname{diam} A = \operatorname{diam} A$$

elde edilir ki; bu çelişki $\mu(A) = \mu(\overline{A})$ *olmasını gerektirir.*

(4) *Herhangi bir* $x,\ y \in \operatorname{co} A$ *için* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = \sum_{j=1}^{m} k_j = 1$ *ve* $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i = x$, $\sum_{j=1}^{m} k_j y_j = y$ *eşitlikleri sağlanacak şekilde* $\lambda_i,\ k_j \in \mathcal{F}$ *skalerleri ve* $x_i,\ y_j \in A$ *elemanları mevcuttur. Böylece*

$$\begin{aligned}
\|x-y\| &= \left\| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i - \sum_{j=1}^{m} k_j y_j \right\| = \left\| \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} k_j \lambda_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \lambda_i k_j y_j \right\| \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_j \|x_i - y_j\| \leq \operatorname{diam} A \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=1}^{n} \lambda_i k_j \\
&\leq \operatorname{diam} A
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan her $x,\ y \in A$ *için* $\|x-y\| \leq \operatorname{diam} A$ *olduğu göz önüne alınırsa* $\mu(A) = \mu(\operatorname{co} A)$ *sonucuna ulaşılır. Bu sonuç* (3) *ile birlikte düşünülürse* $\mu(A) = \mu(\operatorname{Conv} A)$ *elde edilir.*

(5) *Herhangi $A,\ B \in \mathfrak{M}_E$ ve her $\lambda \in [0,1]$ için,*

$$\begin{aligned} & \operatorname{diam}(\lambda A + (1-\lambda)B) \\ = \; & \sup\{\|\lambda x + (1-\lambda)z - (\lambda y + (1-\lambda)w)\| : x,\ y \in A \text{ ve } z,\ w \in B\} \\ \leq \; & \sup\{\lambda\|x-y\| + (1-\lambda)\|z-w\| : x,\ y \in A \text{ ve } z,\ w \in B\} \\ \leq \; & \lambda \sup\{\|x-y\| : x,\ y \in A\} + (1-\lambda)\sup\{\|z-w\| : z,\ w \in B\} \\ = \; & \lambda \operatorname{diam} A + (1-\lambda)\operatorname{diam} B \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanacağından $\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \leq \lambda\mu(A) + (1-\lambda)\mu(B)$ dir.

(6) *Cantor arakesit teoremi gereği, E bir tam metrik uzay olduğundan, $\mathfrak{M}_E$ deki kapalı cümlelerin $\lim_{n\to\infty}\mu(X_n) = 0$ olacak şekildeki azalan bir (X_n) dizisi için $X_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} X_n = \{x\}$ olacak şekilde bir $x \in E$ elemanı vardır.*

Böylece $\mu(A) = \operatorname{diam} A$ şeklinde tanımlı μ fonksiyonu E üzerinde bir kompaktsızlık ölçüsüdür, [57].

Örnek 2.15 *E sonsuz boyutlu bir Banach uzayı ve $F \subset E$ kapalı bir cümle olsun. $\ker\mu = \mathfrak{N}_E$ ve $d_H(A,F) = \sup\{\inf\{\|x-y\| : y \in A\} : x \in F\}$ olmak üzere,*

$$\mu(A) = \chi(A) + d_H(A,F)$$

şeklinde tanımlı μ fonksiyonu bir kompaktsızlık ölçüsüdür, [49].

Tanım 2.43 *Her $\alpha \in \mathbb{R}$ ve her $A,\ B \in \mathfrak{M}_E$ için, aşağıdaki özelliklere sahip bir kompaktsızlık ölçüsüne "altlineer kompaktsızlık ölçüsü" denir, [55].*

(1) $\mu(\alpha X) = |\alpha|\,\mu(X)$,

(2) $\mu(A+B) \leq \mu(A) + \mu(B)$.

Tanım 2.44 *Bir μ kompaktsızlık ölçüsü her $A,\ B \in \mathfrak{M}_E$ için*

$$\mu(A \cup B) = \text{maks}\{\mu(A), \mu(B)\}$$

eşitliğini sağlıyorsa, μ'ye "maksimum özelliğine sahip bir kompaktsızlık ölçüsü" denir, [55].

Tanım 2.45 *Maksimum özelliğine sahip, altlineer ve tam olan kompaktsızlık ölçüsüne "regüler kompaktsızlık ölçüsü" denir,* [55].

Tanım 2.46 $1 \leq p < \infty$ *olmak üzere,* $L^p[a,b] = \left\{ x : [a,b] \to \mathbb{C} : \int_a^b |x(t)|^p \, dt < \infty \right\}$ *cümlesi* $\|x\|_p = \left(\int_a^b |x(t)|^p \, dt \right)^{\frac{1}{p}}$ *normu ile Banach uzayıdır. Ayrıca* $\beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, $\lim_{t\to 0} \beta(t) = \beta(0) = 0$ *özelliğine sahip bir fonksiyon ve her* $t \in [a,b]$ *için,* $x_h(t) = h + t$ *olmak üzere, bir* $x \in L^p[a,b]$ *fonksiyonunun* β*'ya göre Kolmogorov süreklilik modülü,*

$$\omega_\beta(x,\varepsilon) = \sup \left\{ \|x_h - x\|_p - \beta(|h|) : |h| \leq \varepsilon \right\}$$

şeklinde tanımlıdır, [49].

Örnek 2.16 *Yukarıda verilen* $L^p[a,b]$ *Banach uzayı üzerinde,*

$$\omega_\beta(A,\varepsilon) = \sup \{ \omega_\beta(x,\varepsilon) : x \in A \}$$

olmak üzere,

$$\mu_\beta(A) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega_\beta(A,\varepsilon)$$

şeklinde tanımlı μ_β *fonksiyonu bir regüler kompaktsızlık ölçüsüdür,* [49].

Tanım 2.47 $C[a,b]$*'nin bir* x *elemanına ve bir* $\varepsilon \geq 0$ *sayısına karşılık,*

$$\omega(x,\varepsilon) = \sup \{ |x(t) - x(s)| : t,s \in [a,b] \text{ ve } |t-s| \leq \varepsilon \}$$

şeklinde tanımlı $\omega(x,\cdot) : [0, b-a] \to \mathbb{R}_+$ *fonksiyonuna "x'in süreklilik modülü" denir,* [55].

Bir diğer ifade ile x'in süreklilik modülü, $0 \leq \varepsilon \leq b-a$ olmak üzere, $[a,b]$'nin boyu ε'u geçmeyen bütün kapalı alt aralıkları üzerinde x'in salınımlarının supremum değeridir, [59].

Örnek 2.17 $C[0,1]$ *uzayında* $x(t) = \exp t$ *fonksiyonu verilsin.* x*'in artan bir fonksiyon olduğu göz önüne alınırsa,*

$$\begin{aligned} \omega(x,\varepsilon) &= \sup \{ |\exp t - \exp s| : t,s \in [0,1] \text{ ve } |t-s| \leq \varepsilon \} \\ &= \sup \{ \exp(s+\varepsilon) - \exp s : s \in [0, 1-\varepsilon] \} \qquad (2.1.1) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $h(s) = \exp(s+\varepsilon) - \exp s$ *ile tanımlı* $h : [0, 1-\varepsilon] \to \mathbb{R}$ *fonksiyonunun da artan olduğu göz önüne alınırsa,* (2.1.1) *eşitliğinden* x*'in süreklilik modülü*

$$\omega(x, \varepsilon) = \exp 1 - \exp(1-\varepsilon)$$

olarak elde edilir.

Örnek 2.18 $X \in \mathfrak{M}_{C[a,b]}$ *için*

$$\omega(X, \varepsilon) = \sup\{\omega(x, \varepsilon) : x \in X\}$$

olmak üzere,

$$\omega_0(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega(X, \varepsilon) \tag{2.1.2}$$

şeklinde tanımlı $\omega : \mathfrak{M}_{C[a,b]} \to \mathbb{R}_+$ *fonksiyonu* $C[a,b]$ *üzerinde bir regüler kompaktsızlık ölçüsüdür,* [55].

Önerme 2.3 *Her* $X \in \mathfrak{M}_{C[a,b]}$ *için*

$$\chi(X) = \frac{\omega_0(X)}{2}$$

dir, [58].

Tanım 2.48 *Bir* $x \in B[a,b]$ *elemanına karşılık,*

$$d(x, \varepsilon) = \sup\{|x(t) - x(s)| - [x(t) - x(s)] : t, s \in [a,b],\ t \geq s \text{ ve } t - s \leq \varepsilon\}$$

ve

$$i(x, \varepsilon) = \sup\{|x(t) - x(s)| - [x(s) - x(t)] : t, s \in [a,b],\ t \geq s \text{ ve } t - s \leq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlı $d(x, \cdot)$, $i(x, \cdot) : [0, b-a] \to \mathbb{R}_+$ *fonksiyonlarına, sırasıyla, "*x*'in azalış modülü" ve "*x*'in artış modülü" denir. Özel olarak* $\varepsilon = b - a$ *olması durumunda* $d(x, \varepsilon)$ *yerine* $d(x)$ *ve benzer olarak* $i(x, \varepsilon)$ *yerine ise* $i(x)$ *yazılır.* $d(x)$*'e* x*'in azalış derecesi ve* $i(x)$*'e ise* x*'in artış derecesi denir,* [58].

Teorem 2.10 $x \in B[a,b]$ *ve herhangi bir* $\varepsilon > 0$ *verilsin. Bu durumda*

$$\begin{aligned} d(x, \varepsilon) &= 0 \Leftrightarrow x, [a,b] \text{ de azalmayandır,} \\ i(x, \varepsilon) &= 0 \Leftrightarrow x, [a,b] \text{ de artmayandır} \end{aligned}$$

önermeleri doğrudur, [58].

Sonuç 2.5 *$X \in \mathfrak{M}_{B[a,b]}$ ve $\varepsilon > 0$ için $d(X,\cdot)$ ve $i(X,\cdot) : [0, b-a] \to \mathbb{R}$ fonksiyonları*

$$d(X,\varepsilon) = \sup\{d(x,\varepsilon) : x \in X\}$$

ve

$$i(X,\varepsilon) = \sup\{i(x,\varepsilon) : x \in X\}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$d(X,\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow X \text{ cümlesindeki bütün fonksiyonlar } [a,b] \text{ de azalmayandır}$$

ve

$$i(X,\varepsilon) = 0 \Leftrightarrow X \text{ cümlesindeki bütün fonksiyonlar } [a,b] \text{ de artmayandır}$$

önermeleri doğrudur, [58].

Sonuç 2.6 *$X \in \mathfrak{M}_{C[a,b]}$ için,*

$$d_0(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} d(X,\varepsilon) \text{ ve } i_0(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} i(X,\varepsilon)$$

olmak üzere,

$$d_0(X) \leq 2\omega_0(X) \tag{2.1.3}$$

ve

$$i_0(X) \leq 2\omega_0(X) \tag{2.1.4}$$

eşitsizlikleri sağlanır, [58].

Sonuç 2.7 *$C[a,b]$ uzayının, eşsürekli ve sınırlı bir X alt cümlesi için $d_0(X) = i_0(X) = 0$ dır, [58].*

Örnek 2.19 *$C[0,\pi]$ uzayında $X = \left\{ x_n : x_n(t) = \dfrac{\sin(nt)}{n},\ n = 1, 2, ... \right\}$ cümlesi verilsin. Herhangi bir $x_n \in X$ için,*

$$\begin{aligned}
\omega(x_n,\varepsilon) &= \sup\{|x_n(t) - x_n(s)| : t, s \in [0,\pi] \text{ ve } |t-s| \leq \varepsilon\} \\
&= \sup\left\{ \frac{|\sin(nt) - \sin(ns)|}{n} : t, s \in [0,\pi] \text{ ve } |t-s| \leq \varepsilon \right\} \\
&\leq \sup\left\{ \frac{|nt - ns|}{n} : t, s \in [0,\pi] \text{ ve } |t-s| \leq \varepsilon \right\} \\
&= \sup\{|t-s| : t, s \in [0,\pi] \text{ ve } |t-s| \leq \varepsilon\} \\
&= \varepsilon
\end{aligned}$$

olacağından $\omega(X,\varepsilon) \leq \varepsilon$ *ve buradan* $\omega_0(X) = 0$ *elde edilir. Ayrıca* (2.1.3) *ve* (2.1.4) *eşitsizliklerinden* $d_0(X) = i_0(X) = 0$ *sonucuna ulaşılır,* [58].

Örnek 2.20 $x_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $x_n(t) = t^n$ *olmak üzere,* $C[0,1]$*'in*

$$X = \{x_n : n = 1, 2, ...\}$$

alt cümlesi verilsin. Her $x_n \in X$ *azalmayan olduğundan herhangi bir* $\varepsilon > 0$ *için,* $d(x_n, \varepsilon) = 0$ *ve dolayısıyla* $d_0(X) = 0$ *dır.*

Diğer taraftan $t, s \in [0,1]$, $0 < \varepsilon \leq 1$ *ve* $|t - s| \leq \varepsilon$ *olmak üzere, her* $n = 1, 2, ...$ *için,*

$$(t, s \in [0,1] \text{ } ve \text{ } |t-s| \leq \varepsilon) \Leftrightarrow (t \in [0,1] \text{ } ve \text{ } s \in [t-\varepsilon, t+\varepsilon] \cap [0,1])$$

önermesi doğru olduğundan, $0 < \varepsilon \leq 1$ *olan* ε *sayısı için,*

$$\begin{aligned} \omega(x_n, \varepsilon) &= \sup\{|t^n - s^n| : t, \ s \in [0,1] \text{ } ve \text{ } |t-s| \leq \varepsilon\} \\ &= \sup\{t^n - (t-\varepsilon)^n : t \in [\varepsilon, 1]\} \\ &= \sup\{(t+\varepsilon)^n - t^n : t \in [0, 1-\varepsilon]\} \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $f(t) = t^n - (t-\varepsilon)^n$ *ve* $g(t) = (t+\varepsilon)^n - t^n$ *şeklinde tanımlı* $f : [\varepsilon, 1] \to \mathbb{R}_+$ *ve* $g : [0, 1-\varepsilon] \to \mathbb{R}_+$ *fonksiyonları artan olduğundan herhangi bir* $x_n \in X$ *için,*

$$\begin{aligned} \omega(x_n, \varepsilon) &= \sup\{f(t) : t \in [\varepsilon, 1]\} = f(1) \\ &= \sup\{g(t) : t \in [0, 1-\varepsilon]\} = g(1-\varepsilon) \end{aligned}$$

olur. Böylece,

$$\omega(X, \varepsilon) = \sup\{\omega(x_n, \varepsilon) : n = 1, 2, ...\} = 1$$

ve

$$\omega_0(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega(X, \varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} 1 = 1$$

sonucuna varılır.

Benzer olarak, $0 < \varepsilon \leq 1$ *olmak üzere,*

$$(t, s \in [0,1], \ s \leq t \text{ } ve \text{ } t - s \leq \varepsilon) \Leftrightarrow (t \in [0,1] \text{ } ve \text{ } s \in [t-\varepsilon, 1] \cap [0,1])$$

önermesi doğru olduğundan her $n = 1, 2, ...$ *için,*

$$\begin{aligned} i(x_n, \varepsilon) &= \sup\{|t^n - s^n| - [s^n - t^n] : t,\ s \in [0,1],\ t \geq s \text{ ve } t - s \leq \varepsilon\} \\ &= \sup\{2(t^n - s^n) : t,\ s \in [0,1],\ t \geq s \text{ ve } t - s \leq \varepsilon\} \\ &= \sup\{2[t^n - (t-\varepsilon)^n] : t \in [\varepsilon, 1]\} \\ &= 2[1 - (1-\varepsilon)^n] \end{aligned}$$

elde edilir ve n'ler üzerinden supremum alınırsa $i(X, \varepsilon) = 2$ *olacağından* $i_0(X) = 2$ *sonucuna ulaşılır,* [58].

Sonuç 2.8 *Örnek 2.20'deki* X *cümlesi göz önüne alınırsa,* $\overline{X}$ *cümlesindeki* $(x_n) = (x_1, x_2, ...)$ *dizisi hiçbir yakınsak alt diziye sahip olmadığından* $\overline{X}$ *kompakt değildir. Böylece* $d_0(X) = 0$ *olmasına rağmen* $X \notin \mathfrak{N}_{C[0,1]}$ *dir. Bu durumda* d_0 *fonksiyonu Tanım 2.42'deki* (1) *şartını sağlamadığından,* $C[a,b]$ *uzayı üzerinde bir kompaktsızlık ölçüsü değildir. Benzer olarak* i_0 *fonksiyonunun da* $C[a,b]$ *uzayı üzerinde bir kompaktsızlık ölçüsü olmadığı görülebilir,* [58].

Örnek 2.21 $C[-1,1]$ *uzayında* $X = \{x_n : x_n(t) = t^{2n},\ n = 1, 2, ...\}$ *cümlesi için* $\omega_0(X) = 1$ *ve* $d_0(X) = i_0(X) = 2$ *dir,* [60].

Önerme 2.4 *Herhangi bir* $X \in \mathfrak{M}_{C[a,b]}$ *için,*

$$\frac{1}{4}(d_0(X) + i_0(X)) \leq \omega_0(X) \leq \frac{1}{2}(d_0(X) + i_0(X))$$

eşitsizliği sağlanır, [58].

Örnek 2.22 $\mu(X) = d_0(X) + i_0(X)$ *şeklinde tanımlı* $\mu : \mathfrak{M}_{C[a,b]} \to \mathbb{R}_+$ *fonksiyonu* $C[a,b]$ *uzayında bir regüler kompaktsızlık ölçüsüdür. Ayrıca* μ, $C[a,b]$ *üzerindeki Hausdorff kompaktsızlık ölçüsüne denktir, yani her* $X \in \mathfrak{M}_{C[a,b]}$ *için* $m\chi(X) \leq \mu(X) \leq M\chi(X)$ *olacak şekilde* m *ve* M *sayıları vardır,* [58].

Örnek 2.23 $\mu_d(X) = \omega_0(X) + d_0(X)$ *ve* $\mu_i(X) = \omega_0(X) + i_0(X)$ *şeklinde tanımlı* $\mu_d : \mathfrak{M}_{C[a,b]} \to \mathbb{R}_+$ *ve* $\mu_i : \mathfrak{M}_{C[a,b]} \to \mathbb{R}_+$ *fonksiyonları* $C[a,b]$ *uzayında Hausdorff kompaktsızlık ölçüsüne denk olan birer kompaktsızlık ölçüsüdürler. Diğer taraftan* μ_d *ve* μ_i *fonksiyonları Tanım 2.43 teki* (1) *şartını sağlamazlar,* [58].

Örnek 2.24 *$BC(\mathbb{R}_+)$ uzayının boş olmayan ve sınırlı bir X alt cümlesi ve bir $T>0$ sayısı verilsin. $\varepsilon \geq 0$ olmak üzere, herhangi bir $x \in X$ elemanının $[0,T]$ aralığı üzerindeki süreklilik modülü,*

$$\omega^T(x,\varepsilon) = \sup\{|x(t)-x(s)| : t,s \in [0,T] \ \ ve \ \ |t-s| \leq \varepsilon\}$$

şeklinde tanımlı $\omega^T(x,\cdot) : [0,T] \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu olsun. Ayrıca,

$$\omega^T(X,\varepsilon) = \sup\left\{\omega^T(x,\varepsilon) : x \in X\right\},$$

$$\omega_0^T(X) = \lim_{\varepsilon \to 0} \omega^T(X,\varepsilon)$$

ve

$$\omega_0(X) = \lim_{T \to \infty} \omega_0^T(X) \tag{2.1.5}$$

olsun. Bu durumda, herhangi bir $t \in \mathbb{R}_+$ için $X(t)$ cümlesi ve $\operatorname{diam} X(t)$ fonksiyonu,

$$X(t) = \{x(t) : x \in X\}$$

ve

$$\operatorname{diam} X(t) = \sup\{|x(t)-y(t)| : x,y \in X\}$$

olmak üzere,

$$\mu(X) = \omega_0(X) + \limsup_{t \to \infty} \operatorname{diam} X(t) \tag{2.1.6}$$

şeklinde tanımlı $\mu : \mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}_+)} \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayı üzerinde bir kompaktsızlık ölçüsüdür, [55].

2.2. Darbo Sabit Nokta Teoremi ve Genelleştirilmesi

Bu bölümde Darbo Sabit Nokta Teoremi'ne ek olarak, Schauder Sabit Nokta Teoremi ile bu tezin orijinal kısımlarında temel araç olarak kullanılacak olan Darbo Sabit Nokta Teoreminin bir genelleştirilmesi verilecektir.

Tanım 2.49 *X boş olmayan herhangi bir cümle ve $T : X \to X$ bir dönüşüm olmak üzere, $Tx = x$ olacak şekilde bir $x \in X$ mevcut ise bu x elemanına T dönüşümünün bir "sabit noktası (T dönüşümünün sabit bıraktığı nokta)" denir, [36].*

Teorem 2.11 (Schauder Sabit Nokta Teoremi) *E bir Banach uzayı, $C \subset E$ boş olmayan, kompakt ve konveks bir cümle ve $T : C \to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. Bu durumda T dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir,* [*61*].

Dikkat edilirse, Schauder Sabit Nokta Teoremi kullanılarak bir E Banach uzayının kompakt olmayan bir cümlesi üzerinde tanımlı ve sürekli bir dönüşümün bir sabit noktaya sahip olup olmadığı konusunda herhangi bir sonuca varılamaz. Ancak Darbo'nun [51] 1955 yılında Kuratowski kompaktsızlık ölçüsünden yararlanarak verdiği aşağıdaki teorem ile Schauder Sabit Nokta Teoreminin bu eksikliği bir anlamda giderilmiştir.

Teorem 2.12 (Darbo Sabit Nokta Teoremi) *E bir Banach uzayı, $C \subset E$ boş olmayan, kapalı, sınırlı ve konveks bir cümle ve $T : C \to C$ sürekli bir dönüşüm olsun. α, E üzerinde Kuratowski kompaktsızlık ölçüsü olmak üzere, her $A \subset C$ için,*

$$\alpha(TA) \leq k\alpha(A)$$

olacak şekilde bir $k \in [0, 1)$ sayısı mevcut ise T dönüşümü en az bir sabit noktaya sahiptir.

İspat. $C_0 = C$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $C_{n+1} = \operatorname{Conv} T(C_n)$ olarak tanımlansın. Bu durumda Kuratowski kompaktsızlık ölçüsünün tanımı ve sağladığı özellikler kullanılarak,

$$\alpha(C_{n+1}) = \alpha(\operatorname{Conv} T(C_n)) = \alpha(T(C_n)) \leq k\alpha(C_n) \leq k^{n+1}\alpha(C_0)$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $n \to \infty$ için limit alınırsa, $k \in [0, 1)$ olduğundan, $\lim_{n\to\infty} \alpha(C_n) = 0$ olur. Böylece $C_\infty = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} C_n$, E'nin boş olmayan, kompakt ve konveks bir alt cümlesidir. Ayrıca,

$$T(C_n) \subseteq \operatorname{Conv} T(C_n) = C_{n+1}$$

kapsaması göz önüne alınırsa,

$$T(C_\infty) = T\left(\bigcap_{n=0}^{\infty} C_n\right) \subseteq \bigcap_{n=0}^{\infty} T(C_n) = T(C_0) \cap T(C_1) \cap \cdots \subseteq C_1 \cap C_2 \cap \cdots = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = C_\infty$$

yazılabilir. Böylece $T(C_\infty) \subseteq C_\infty$ olup Schauder Sabit Nokta Teoremi gereği, T dönüşümü C üzerinde bir sabit noktaya sahiptir. ■

Dikkat edilirse, boş olmayan, kompakt ve konveks bir cümle için Darbo Sabit Nokta Teoreminin hipotezleri sağlanır. Bu nedenle Darbo Sabit Nokta Teoremi Schauder Sabit Nokta Teoreminin bir genelleştirmesi olarak düşünülebilir.

Darbo'nun verdiği bu teoremden sonra, kompaktsızlık ölçüsü gibi, küme değerli dönüşümler kullanılarak farklı sabit nokta teoremleri verilmiştir, [62], [63]. Daha sonra 1980 yılında Banaś ve Goebel [55], Tanım 2.42'de verilen genel kompaktsızlık ölçüsünü kullanarak, aşağıdaki tanımı ve Darbo Sabit Nokta Teoreminin bir genelleştirmesi olan, Teorem 2.13'ü vermişlerdir.

Tanım 2.50 *C bir E Banach uzayının boş olmayan bir alt cümlesi ve $F : C \to E$ sınırlı ve sürekli bir dönüşüm olsun. μ E üzerinde bir kompaktsızlık ölçüsü olmak üzere, C'nin boş olmayan ve sınırlı her X alt cümlesi için*

$$\mu(FX) \leq k\mu(X)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $k \geq 0$ sabiti mevcut ise, F dönüşümü μ kompaktsızlık ölçüsüne göre k sabiti ile Darbo şartını sağlar denir. Özel olarak $k < 1$ ise F dönüşümüne, C üzerinde "μ kompaktsızlık ölçüsüne göre bir daralma dönüşümü" denir, [55].

Teorem 2.13 *C bir E Banach uzayının boş olmayan, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt cümlesi, $F : C \to C$ sürekli bir dönüşüm ve μ E üzerinde bir kompaktsızlık ölçüsü olsun. Eğer F dönüşümü, C üzerinde μ kompaktsızlık ölçüsüne göre bir daralma dönüşümü ise C üzerinde en az bir sabit noktaya sahiptir, [55].*

İspat. Sonuç 2.3 de kullanılarak, Darbo Sabit Nokta Teoreminin ispatına benzer bir yol ile ispat yapılabilir. ■

2.3. Asimptotik Kararlılık

Genel olarak bir denklemin çözüm veya çözümlerinin niteliksel özellikleri ile ilgilenen kalitatif teori, özellikle integral denklemler, diferensiyel denklemler ve dinamik sistemlerde önemli bir yere sahiptir. Bazen ele alınan bir denklemin, varlığı kesin olarak bilinen çözüm veya çözümlerinin ne olduğu tam olarak bilinemese de bu çözümlerin karakterlerine ilişkin bazı verilerin mevcut olması, karşılaşılan problemleri aşmak için yeterli olabilir. Çözüm fonksiyonunun monotonluğu, pozitif veya negatif olması veya diğer çözümler ile ilişkileri önemli niteliksel özelliklerden bazılarıdır.

Bu kısımda bir denklemin çözüm veya çözümleri için önemli bir özellik olan asimptotik kararlılık kavramı üzerinde durulacaktır.

Tanım 2.51 *$\Omega \neq \emptyset$ ve $F : \Omega \subset BC(\mathbb{R}_+) \to BC(\mathbb{R}_+)$ bir operatör olmak üzere, $Fx = x$ denkleminin herhangi x ve y çözümleri için,*

$$\lim_{t\to\infty} (x(t) - y(t)) = 0$$

sağlanıyorsa, bu çözümlere (ve herbir çözüme) "global attractive" denir. Buna ek olarak yukarıdaki limit Ω cümlesine göre düzgün ise, yani herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $x, y \in \Omega$ için, $t > T(\varepsilon)$ iken, $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $T(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise, $Fx = x$ denkleminin çözümlerine (ve herbir çözüme) "düzgün global attractive" veya "global asimptotik kararlı" denir, [66].

Tanım 2.52 *$\Omega \neq \emptyset$ ve $F : \Omega \subset BC(\mathbb{R}_+) \to BC(\mathbb{R}_+)$ bir operatör olmak üzere, $Fx = x$ denkleminin herhangi $x, y \in B(x_0, r) \cap \Omega$ çözümleri için,*

$$\lim_{t\to\infty} (x(t) - y(t)) = 0$$

olacak şekilde bir $B(x_0, r) \subset BC(\mathbb{R}_+)$ yuvarı bulunabiliyorsa, bu çözümlere (ve herbir çözüme) "lokal attractive" denir. Buna ek olarak yukarıdaki limit $B(x_0, r) \cap \Omega$ cümlesine göre düzgün ise, yani herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, her $x, y \in B(x_0, r) \cap \Omega$ için, $t > T(\varepsilon)$ iken, $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $T(\varepsilon) > 0$ sayısı mevcut ise, $Fx = x$ denkleminin çözümlerine (ve herbir çözüme) "düzgün lokal attractive" veya "asimptotik kararlı" denir, [66].

Bir başka ifade ile bir denklemin çözümlerinin global attractive olması, denklemin ele alınan cümledeki bütün çözümlerinin aynı asimptota sahip olması demektir. Benzer olarak çözümlerin lokal attractive olması ise, denklemin ele alınan cümlenin bir öz alt cümlesinde kalan bütün çözümlerinin aynı asimptota sahip olması olarak yorumlanabilir. Ayrıca yukarıdaki tanımlardan da anlaşılabileceği gibi lokal veya global attractive kavramları ele alınan denklemin birden fazla çözüme sahip olması durumunda daha anlamlı olur.

Örnek 2.25 *$BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında,*

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \left(x^2(s) - x(s)\right) ds \tag{2.3.1}$$

denklemi verilsin.

Kolayca görülebileceği gibi, $x(t) = 0$ ve $x(t) = 1$ (2.3.1) denkleminin birer çözümüdür. Bu denklemin diğer çözümleri ise $0 < x(0) < 1$ olmak üzere,

$$x(t) = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{x(0)} - 1\right) \exp t}$$

şeklindedir.

Dikkat edilirse $x(t) = 1$ haricindeki herhangi iki $x(t)$ ve $y(t)$ çözümleri için

$$\lim_{t \to \infty} (x(t) - y(t)) = 0 \tag{2.3.2}$$

dır. Böylece $0 < r < 1$ olan herhangi bir r için, (2.3.1) denkleminin $B_r \cap BC(\mathbb{R}_+)$ cümlesindeki herhangi iki $x(t)$ ve $y(t)$ çözümleri için (2.3.2) sağlanacağından (2.3.1) denkleminin çözümleri lokal attractive dir.

Buna ek olarak, $0 < r < 1/2$ olmak üzere, (2.3.1) denkleminin $B_r \cap BC(\mathbb{R}_+)$ cümlesindeki herhangi iki $x(t)$ ve $y(t)$ çözümleri için,

$$\begin{aligned} & |x(t) - y(t)| \\ = & \left| \frac{(x(0) - y(0)) \exp t}{[1 + x(0) y(0) - x(0) - y(0)] \exp(2t) + [x(0) + y(0) - 2x(0) y(0)] \exp t + x(0) y(0)} \right| \\ \leq & \left| \frac{2r \exp t}{(1 - 2r) \exp(2t)} \right| \end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca

$$\frac{2r \exp t}{(1 - 2r) \exp(2t)}$$

fonksiyonunun $t \to \infty$ için limiti 0 olacağından, her $\varepsilon > 0$ için, $t > T(\varepsilon)$ iken

$$|x(t) - y(t)| \leq \left| \frac{2r \exp t}{(1 - 2r) \exp(2t)} \right| \leq \varepsilon$$

olacak şekilde bir $T(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabilir. Dolayısıyla (2.3.2) limiti $B_r \cap BC(\mathbb{R}_+)$ cümlesine göre düzgündür ve böylece (2.3.1) denkleminin çözümleri asimptotik kararlıdır.

Diğer taraftan (2.3.1) denkleminin $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayındaki bütün çözümleri için (2.3.2) eşitliği sağlanmayacağından, (2.3.1) denkleminin çözümleri global attractive değildir.

Örnek 2.26 *$BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında, $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere,*

$$x(t) = x(0) + \lambda \int_0^t x(s)\,ds \tag{2.3.3}$$

denklemi verilsin.

$x(t) = 0$ bu denklemin aşikār çözümüdür. Ayrıca (2.3.3) denkleminin bütün çözümleri

$$x(t) = x(0)\exp(\lambda t)$$

formundadır. λ katsayısına göre (2.3.3) denkleminin çözümleri için aşağıdaki durumlar söz konusudur.

(i) *$\lambda < 0$ ise, (2.3.3) denkleminin $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayındaki herhangi iki $x(t)$, $y(t)$ çözümleri için (2.3.2) sağlanır. Böylece (2.3.3) denkleminin çözümleri global attractive dir. Ayrıca herhangi bir $0 < r < \infty$ sayısı için (2.3.3) denkleminin $B_r \cap BC(\mathbb{R}_+)$ cümlesindeki herhangi iki $x(t)$, $y(t)$ çözümleri için de (2.3.2) sağlanacağından, (2.3.3) denkleminin çözümleri aynı zamanda lokal attractive dir.*

Diğer taraftan, (2.3.3) denkleminin $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayındaki herhangi iki $x(t)$, $y(t)$ çözümleri için, $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $t > T$ iken;

$$|x(t) - y(t)| = |x(0) - y(0)|\exp(\lambda t) \le \varepsilon \tag{2.3.4}$$

olacak şekildeki T sayısı $x(t)$ ve $y(t)$ çözümlerine bağlıdır. Dolayısıyla (2.3.2) limiti $BC(\mathbb{R}_+)$ cümlesine göre düzgün olmadığından çözümler global asimptotik kararlı değildir. Ancak (2.3.3) denkleminin $B_r \cap BC(\mathbb{R}_+)$ cümlesindeki herhangi iki $x(t)$, $y(t)$ çözümleri için

$$|x(t) - y(t)| = |x(0) - y(0)|\exp(\lambda t) \le 2r\exp(\lambda t)$$

yazılabileceği ve $\lim_{t\to\infty} 2r\exp(\lambda t) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa, (2.3.2) limitinin $B_r \cap BC(\mathbb{R}_+)$ cümlesine göre düzgün olduğu ve dolayısıyla (2.3.1) denkleminin çözümlerinin asimptotik kararlı olduğu görülür.

(ii) *$\lambda = 0$ ise, (2.3.3) denkleminin çözüm ailesi bütün sabit fonksiyonların ailesi olacağından, bu çözümler lokal attractive dahi olamaz.*

(iii) $\lambda > 0$ *ise,* (2.3.3) *denkleminin* $BC(\mathbb{R}_+)$ *uzayındaki herhangi iki* $x(t)$, $y(t)$ *çözümleri için*

$$\lim_{t\to\infty} (x(t) - y(t)) = \mp\infty$$

olacağından, bu durumda çözümler için herhangi bir kararlılıktan bahsedilemez.

3. $C[a,b]$ UZAYINDA BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI

Bir çok araştırmacı bugüne kadar farklı formlarda, lineer olmayan fonksiyonel integral denklemlerin en az bir çözüme sahip olmasına imkân veren yeter şartları araştırmıştır. 1996 yılında T. A. Burton [67]

$$V(t,x) = S\left(t, \int_0^t u(t,s,x(s))ds\right),\ t \in [-a,a]$$

denkleminin, İ. Özdemir, Ü. Çakan ve B. İlhan [32]

$$x(t) = g(t, x(\beta(t))) + f(t, x(\alpha(t))) \int_0^{\varphi(t)} u(t,s,x(\gamma(s)))ds,\ t \in [0,a]$$

yapısındaki integral denklemin çözülebilirliğine ilişkin bazı sonuçlar vermişlerdir.

Ayrıca J. Banaś vd. [68] 2005 yılında

$$x(t) = p(t) + (Tx)(t) \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau,\ t \in [0,a]$$

denkleminin, 2006 yılında [20]

$$x(t) = g\left(t, \int_0^t u(t,s,x(s))ds, x(t)\right),\ t \in [0,\infty) \tag{3.1}$$

denkleminin ve daha sonra 2010 ve 2013 yıllarında ise [69], [14]

$$x(t) = g(t, x(\alpha_1(t)), ..., x(\alpha_m(t))) + \int_0^{\phi(t)} u(t,s,x(\gamma_1(s)), ..., x(\gamma_n(s)))ds,\ t \in [0,\infty) \tag{3.2}$$

denkleminin çözülebilirlikleri ile ilgilenmişlerdir.

Diğer taraftan farklı araştırmacılar tarafından [70], [71], [11], [24] aşağıdaki denklemler sırasıyla ele alınmıştır.

$$x(t) = F\left(t, g(t, x(\alpha(t))), \int_0^{\varphi(t)} u(t,s,x(\gamma(s)))ds\right),\ t \in [0,\infty), \tag{3.3}$$

$$x(t) = h(t) + p(t, x(\alpha_1(t)), x(\alpha_2(t))) + \int_0^{\varphi(t)} u(t,s,x(\gamma_1(s)), x(\gamma_2(s)))ds,\ t \in [0,\infty), \tag{3.4}$$

$$x(t) = p(t, x(t)) + g\left(t, \int_0^t u(t,s,x(s))ds, x(\alpha(t))\right),\ t \in [0,a], \tag{3.5}$$

$$x(t) = p(t) + (Tx)(t) \int_0^{\sigma(t)} v(t, \tau, x(\tau), x(\lambda\tau)) d\tau, \ 0 < \lambda < 1, \ t \in I.$$

Bu bölümde, $t \in [0, a]$, $0 < \beta \leq 1$ ve gösterimde kısalık olması amacıyla

$$H(t, s, x(\tau)) = \frac{u(t, \tau, x(\gamma_1(\tau)), ..., x(\gamma_n(\tau)))}{(\varphi(s) - \tau)^{1-\beta}}$$

olmak üzere,

$$x(t) = f\left(t, (T_1x)(t), (T_2x)(t) \int_0^{\varphi(t)} H(t, t, x(\tau)) d\tau, x(\alpha_1(t)), ..., x(\alpha_m(t))\right) \quad (3.6)$$

denkleminin $C[0, a]$ uzayında en az bir çözüme sahip olmasını garanti eden bir takım yeter şartlar verilecektir. Ayrıca (3.6) denkleminin, farklı yazarlar tarafından ele alınan, yukarıdaki denklemler ile ilişkisi üzerinde durulacak ve bu durum bazı örnekler ile açıklanacaktır.

Dikkat edilmelidir ki, (3.6) denklemi yukarıda bahsedilen bir çok denklemden daha genel bir yapıya sahiptir. Örneğin;

$$\varphi(t) = t, \ \gamma_1(\tau) = \tau, \ \beta = m = n = 1 \text{ ve } f(t, x_1, x_2, x_3) = g(t, x_2, x_3)$$

alınırsa (3.6) denkleminden (3.1) denklemi,

$$f(t, x_1, x_2, ..., x_{m+2}) = g(t, x_3, ..., x_{m+1}) + x_2, \ \ (T_2x)(t) = \beta = 1 \text{ ve } \varphi(t) = \phi(t)$$

olarak seçilirse (3.2) denklemi ve

$$(T_1x)(t) = g(t, x(\alpha(t))), \ \ (T_2x)(t) = 1, \ n = \beta = 1 \text{ ve } f(t, x_1, x_2, x_3) = F(t, x_1, x_2)$$

seçimi ile (3.3) denklemi elde edilebilir. Benzer olarak (3.4) ve (3.5) denklemleri, sırasıyla,

$$f(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = h(t) + p(t, x_3, x_4) + x_2, \ \ (T_2x)(t) = \beta = 1, \ n = 2$$

ve

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = x_1 + g(t, x_2, x_3), \ \ (T_1x)(t) = p(t, x(t)),$$

$$\varphi(t) = t, \ \beta = n = (T_2x)(t) = 1$$

seçimleri ile (3.6) denkleminden elde edilebilir.

Ayrıca T_2 operatörünün bazı özel seçimleri ile (3.6) denkleminden elde edilen denklemlerin yapısında, tanımı aşağıda verilen *kesirli integral* de bulunabilir.

Tanım 3.1 *$x \in C[a,b]$ ve $a < t < b$ olmak üzere,*

$$I_{a^+}^{\beta} x(t) = \frac{1}{\Gamma(\beta)} \int_a^t \frac{x(s)}{(t-s)^{1-\beta}} ds, \ \beta \in (-\infty, \infty)$$

ifadesine x'in β. dereceden kesirli Riemann-Liouville integrali denir, [72]. Buradaki Γ sembolü ile,

$$\Gamma(\beta) = \int_0^{\infty} t^{\beta-1} e^{-t} dt$$

eşitliği ile tanımlanan Gamma fonksiyonu kastedilmektedir.

$(E, \|.\|)$ sonsuz boyutlu bir Banach uzayı olmak üzere, bundan sonraki kısımda E'nin θ (sıfır) merkezli ve r yarıçaplı kapalı yuvarı kısaca B_r ile ve $[0, a]$ aralığı ise, aksi belirtilmedikçe I ile gösterilecektir.

(3.6) denkleminin çözülebilirliği J. Banaś ve K. Goebel [55] tarafından verilen, ω_0 kompaktsızlık ölçüsü ile birleştirilmiş, genelleştirilmiş Darbo sabit nokta teoremi kullanılarak aşağıdaki şartlar altında araştırılacaktır.

($\mathbf{a}_1$) $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere, $\alpha_i : I \to I$, $\gamma_j : [0, C] \to I$ ve $\varphi : I \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonları süreklidir. Buradaki C, her $t \in I$ için $\varphi(t) \leq C$ şartını sağlayacak şekildeki pozitif bir sayıdır.

($\mathbf{a}_2$) $f : I \times \mathbb{R}^{m+2} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir ve $1 \leq i \leq m+2$ olmak üzere, her $t \in I$ ve her x_i, $y_i \in \mathbb{R}$ için,

$$|f(t, x_1, x_2, ..., x_{m+2}) - f(t, y_1, y_2, ..., y_{m+2})| \leq \sum_{i=1}^{m+2} k_i |x_i - y_i|$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde negatif olmayan k_i sabitleri mevcuttur.

($\mathbf{a}_3$) $T_1 : C(I) \to C(I)$ ve $T_2 : C(I) \to C(I)$ operatörleri süreklidir. Ayrıca her $x \in C(I)$ ve $t \in I$ için

$$|(T_1 x)(t)| \leq b_1(\|x\|)$$

ve

$$|(T_2 x)(t)| \leq b_2(\|x\|)$$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde azalmayan $b_1 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ve $b_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonları mevcuttur.

($\mathbf{a}_4$) $u : I \times [0,C] \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, her $t \in I$, $\tau \in [0,C]$ ve her $x_i \in \mathbb{R}$ için

$$|u(t,\tau,x_1,x_2,...,x_n)| \leq h(|x_1|,|x_2|,...,|x_n|)$$

eşitsizliğini sağlayan ve herbir değişkenine göre azalmayan bir $h : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu mevcuttur.

($\mathbf{a}_5$) M, her $t \in I$ için $|f(t,0,0,...,0)| \leq M$ olacak şekildeki negatif olmayan bir sayı olmak üzere,

$$k_1 b_1(r) + \frac{k_2 b_2(r) C^{\beta}}{\beta} h(r,r,...,r) + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} r + M \leq r \tag{3.7}$$

eşitsizliğinin pozitif bir r_0 çözümü vardır. Ayrıca

$$U = \sup\{|u(t,\tau,x_1,...,x_n)| : t \in I,\ \tau \in [0,C],\ x_i \in [-r_0,r_0],\ 1 \leq i \leq n\}$$

ve

$$k_1 q_1 + \frac{k_2 q_2 U C^{\beta}}{\beta} + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} < 1 \tag{3.8}$$

olmak üzere, T_1 ve T_2 operatörleri, sırasıyla, q_1 ve q_2 katsayıları ile B_{r_0} yuvarında ω_0 kompaktsızlık ölçüsüne göre Darbo şartını sağlarlar.

Teorem 3.1 ($\mathbf{a}_1$) $-$ ($\mathbf{a}_5$) *şartlarının sağlanması durumunda* (3.6) *denkleminin* $B_{r_0} \subset C(I)$ *yuvarına ait olan en az bir çözümü vardır.*

İspat. Üç aşamada yapılacak olan bu ispatın 1. adımında, (3.6) denklemi yardımıyla bir F operatörü tanımlanacak ve $F : B_{r_0} \to B_{r_0}$ olduğu gösterilecektir.

2. adımda, F operatörünün B_{r_0} yuvarında sürekli olduğu gösterilecektir.

3. adımda ise F operatörünün B_{r_0} yuvarı üzerinde (2.1.2) ile verilen ω_0 kompaktsızlık ölçüsüne göre bir daralma dönüşümü olduğu gösterilecektir.

Böylece Teorem 2.13 gereğince F operatörünün B_{r_0} yuvarı üzerinde en az bir sabit noktasının var olduğu sonucuna ulaşılacaktır ve bu sabit noktanın aynı zamanda (3.6) denkleminin bir çözümü olduğu görülecektir.

1. Adım: Herhangi bir $x \in C(I)$ için F operatörü,

$$(Fx)(t) = f\left(t, (T_1x)(t), (T_2x)(t)\int_0^{\varphi(t)} H(t,t,x(\tau))\,d\tau, x(\alpha_1(t)), ..., x(\alpha_m(t))\right)$$

şeklinde tanımlansın.

$(\mathbf{a}_1)-(\mathbf{a}_5)$ kabullerinden hareketle, her $x \in C(I)$ için Fx fonksiyonunun I üzerinde sürekli olduğu sonucu çıkar. Böylece $F : C(I) \to C(I)$ dir.

Diğer taraftan herhangi bir $x \in B_{r_0}$ için,

$$
\begin{aligned}
& |(Fx)(t)| \\
= & \left| f\left(t, (T_1x)(t), (T_2x)(t) \int_0^{\varphi(t)} H(t, t, x(\tau))\, d\tau, x(\alpha_1(t)), ..., x(\alpha_m(t))\right)\right| \\
\leq & \left| f\left(t, (T_1x)(t), (T_2x)(t) \int_0^{\varphi(t)} H(t, t, x(\tau))\, d\tau, x(\alpha_1(t)), ..., x(\alpha_m(t))\right)\right. \\
& \left. -f(t, 0, ..., 0)\right| + |f(t, 0, ..., 0)| \\
\leq & \; k_1 |(T_1x)(t)| + k_2 |(T_2x)(t)| \int_0^{\varphi(t)} |H(t, t, x(\tau))|\, d\tau + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} |x(\alpha_i(t))| + M \\
\leq & \; k_1 |(T_1x)(t)| + k_2 |(T_2x)(t)| \int_0^{\varphi(t)} \frac{h(|x(\gamma_1(\tau))|, |x(\gamma_2(\tau))|, ..., |x(\gamma_n(\tau))|)}{(\varphi(t)-\tau)^{1-\beta}} d\tau \\
& + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} |x(\alpha_i(t))| + M \\
\leq & \; k_1 b_1(\|x\|) + k_2 b_2(\|x\|) \int_0^{\varphi(t)} \frac{h(\|x\|, \|x\|, ..., \|x\|)}{(\varphi(t)-\tau)^{1-\beta}} d\tau + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} \|x\| + M \\
\leq & \; k_1 b_1(\|x\|) + \frac{k_2 b_2(\|x\|) C^{\beta}}{\beta} h(\|x\|, \|x\|, ..., \|x\|) + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} \|x\| + M \\
\leq & \; k_1 b_1(r_0) + \frac{k_2 b_2(r_0) C^{\beta}}{\beta} h(r_0, r_0, ..., r_0) + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} r_0 + M \\
\leq & \; r_0
\end{aligned}
$$

yazılabileceğinden $F : B_{r_0} \to B_{r_0}$ olduğu görülür.

2. Adım: T_1 ve T_2 operatörleri sürekli olduklarından, herhangi bir $x_0 \in B_{r_0}$ elemanına ve $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| \leq \delta_1(\varepsilon, x_0)$ olan her $x \in B_{r_0}$ için $\|T_1x - T_1x_0\| \leq \varepsilon$ ve $\|x - x_0\| \leq \delta_2(\varepsilon, x_0)$ olan her $x \in B_{r_0}$ için $\|T_2x - T_2x_0\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta_1(\varepsilon, x_0) < \varepsilon$ ve $\delta_2(\varepsilon, x_0) < \varepsilon$ sayıları bulunabilir.

Böylece $\delta(\varepsilon, x_0) = \min\{\delta_1(\varepsilon, x_0),\ \delta_2(\varepsilon, x_0)\}$ olarak seçilirse, $R = [-r_0, r_0]$,

$$
\begin{aligned}
\omega_{u_n}(I, \varepsilon) \;=\; & \sup\{|u(t, \tau, x_1, ..., x_n) - u(t, \tau, y_1, ..., y_n)| : t \in I,\ \tau \in [0, C], \\
& x_i,\ y_i \in R,\ 1 \leq i \leq n \text{ ve } |x_i - y_i| \leq \varepsilon\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
U = \sup\{|u(t, \tau, x_1, ..., x_n)| : t \in I,\ \tau \in [0, C],\ x_i \in R,\ 1 \leq i \leq n\}
$$

olmak üzere, $\|x-x_0\| \leq \delta(\varepsilon, x_0)$ olan her $x \in B_{r_0}$ için

$$\begin{aligned}
& |(Fx)(t)-(Fx_0)(t)| \\
= & \left| f\left(t, (T_1x)(t), (T_2x)(t)\int_0^{\varphi(t)} H(t,t,x(\tau))\,d\tau, x(\alpha_1(t)), ..., x(\alpha_m(t))\right)\right. \\
& \left. -f\left(t, (T_1x_0)(t), (T_2x_0)(t)\int_0^{\varphi(t)} H(t,t,x_0(\tau))\,d\tau, x_0(\alpha_1(t)), ..., x_0(\alpha_m(t))\right)\right| \\
\leq & \ k_1\left|(T_1x)(t)-(T_1x_0)(t)\right| + k_2\left|(T_2x)(t)-(T_2x_0)(t)\right|\int_0^{\varphi(t)}\left|H(t,t,x(\tau))\right| d\tau \\
& +k_2\left|(T_2x_0)(t)\right|\int_0^{\varphi(t)}\left|H(t,t,x(\tau))-H(t,t,x_0(\tau))\right| d\tau \\
& +\sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\left|x(\alpha_i(t))-x_0(\alpha_i(t))\right| \\
\leq & \ k_1\|T_1x-T_1x_0\| + k_2\|T_2x-T_2x_0\|\int_0^{\varphi(t)}\frac{U}{(\varphi(t)-\tau)^{1-\beta}}d\tau \\
& +k_2b_2(\|x_0\|)\int_0^{\varphi(t)}\frac{\omega_{u_n}(I,\delta(\varepsilon,x_0))}{(\varphi(t)-\tau)^{1-\beta}}d\tau + \left(\sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\right)\|x-x_0\| \\
\leq & \ k_1\|T_1x-T_1x_0\| + \frac{k_2\|T_2x-T_2x_0\|UC^\beta}{\beta} \\
& +\frac{k_2b_2(\|x_0\|)C^\beta}{\beta}\omega_{u_n}(I,\delta(\varepsilon,x_0)) + \left(\sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\right)\delta(\varepsilon,x_0) \\
\leq & \ k_1\varepsilon + \frac{k_2\varepsilon UC^\beta}{\beta} + \frac{k_2b_2(r_0)C^\beta}{\beta}\omega_{u_n}(I,\varepsilon) + \left(\sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\right)\varepsilon
\end{aligned} \tag{3.9}$$

yazılabilir.

Diğer taraftan $u = u(t, \tau, x_1, ..., x_n)$ fonksiyonunun $I \times [0, C] \times R^n$ cümlesi üzerinde düzgün sürekli olmasından, $\varepsilon \to 0$ için $\omega_{u_n}(I, \varepsilon) \to 0$ elde edilir. Bu durum (3.9) eşitsizliği ile birlikte düşünüldüğünde F operatörünün $x_0 \in B_{r_0}$ noktasında sürekli olduğu anlaşılır. $x_0 \in B_{r_0}$ noktası keyfi olduğundan F operatörü B_{r_0} yuvarında süreklidir.

3. Adım: B_{r_0} yuvarının boş olmayan herhangi bir X alt cümlesi verilsin. Genelliği bozmayacağından $\varphi(t_2) \leq \varphi(t_1)$ olduğu kabul edilirse, herhangi bir $x \in X$, $\varepsilon > 0$ ve $|t_1 - t_2| \leq \varepsilon$ olan her $t_1, t_2 \in I$ için,

$$\begin{aligned}
& |(Fx)(t_1)-(Fx)(t_2)| \\
= & \left| f\left(t_1, (T_1x)(t_1), (T_2x)(t_1)\int_0^{\varphi(t_1)} H(t_1,t_1,x(\tau))\,d\tau, x(\alpha_1(t_1)), ..., x(\alpha_m(t_1))\right)\right. \\
& \left. -f\left(t_2, (T_1x)(t_2), (T_2x)(t_2)\int_0^{\varphi(t_2)} H(t_2,t_2,x(\tau))\,d\tau, x(\alpha_1(t_2)), ..., x(\alpha_m(t_2))\right)\right|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & \Bigg|f\left(t_1,(T_1x)(t_1),(T_2x)(t_1)\int_0^{\varphi(t_1)}H\left(t_1,t_1,x\left(\tau\right)\right)d\tau,x(\alpha_1(t_1)),...,x(\alpha_m(t_1))\right)\\
& -f\left(t_1,(T_1x)(t_2),(T_2x)(t_2)\int_0^{\varphi(t_2)}H\left(t_2,t_2,x\left(\tau\right)\right)d\tau,x(\alpha_1(t_2)),...,x(\alpha_m(t_2))\right)\Bigg|\\
& +\Bigg|f\left(t_1,(T_1x)(t_2),(T_2x)(t_2)\int_0^{\varphi(t_2)}H\left(t_2,t_2,x\left(\tau\right)\right)d\tau,x(\alpha_1(t_2)),...,x(\alpha_m(t_2))\right)\\
& -f\left(t_2,(T_1x)(t_2),(T_2x)(t_2)\int_0^{\varphi(t_2)}H\left(t_2,t_2,x\left(\tau\right)\right)d\tau,x(\alpha_1(t_2)),...,x(\alpha_m(t_2))\right)\Bigg|\\
\leq\ & k_1\left|(T_1x)(t_1)-(T_1x)(t_2)\right|\\
& +k_2\left|(T_2x)(t_1)\int_0^{\varphi(t_1)}H\left(t_1,t_1,x\left(\tau\right)\right)d\tau-(T_2x)(t_2)\int_0^{\varphi(t_2)}H\left(t_2,t_2,x\left(\tau\right)\right)d\tau\right|\\
& +\sum_{i=1}^{m}k_{i+2}\left|x(\alpha_i(t_1))-x(\alpha_i(t_2))\right|+\omega_f(I,\varepsilon)\\
\leq\ & k_1\left|(T_1x)(t_1)-(T_1x)(t_2)\right|\\
& +k_2\left|(T_2x)(t_1)\right|\int_0^{\varphi(t_1)}\left|H\left(t_1,t_1,x\left(\tau\right)\right)-H\left(t_2,t_1,x\left(\tau\right)\right)\right|d\tau\\
& +k_2\left|(T_2x)(t_1)\right|\int_0^{\varphi(t_2)}\left|H\left(t_2,t_1,x\left(\tau\right)\right)-H\left(t_2,t_2,x\left(\tau\right)\right)\right|d\tau\\
& +k_2\left|(T_2x)(t_1)-(T_2x)(t_2)\right|\int_0^{\varphi(t_2)}\left|H\left(t_2,t_2,x\left(\tau\right)\right)\right|d\tau\\
& +k_2\left|(T_2x)(t_1)\right|\int_{\varphi(t_2)}^{\varphi(t_1)}\left|H\left(t_2,t_1,x\left(\tau\right)\right)\right|d\tau+\sum_{i=1}^{m}k_{i+2}\left|x(\alpha_i(t_1))-x(\alpha_i(t_2))\right|\\
& +\omega_f(I,\varepsilon)\\
\leq\ & k_1\left|(T_1x)(t_1)-(T_1x)(t_2)\right|\\
& +k_2\left|(T_2x)(t_1)\right|\left(\omega_{u_1}(I,\varepsilon)\int_0^{\varphi(t_1)}\frac{1}{(\varphi(t_1)-\tau)^{1-\beta}}\right)+k_2\left|(T_2x)(t_1)\right|\times\\
& \times\left(\int_0^{\varphi(t_2)}\left|u(t_2,\tau,x(\gamma_1(\tau)),...,x(\gamma_n(\tau)))\right|\left(\frac{1}{(\varphi(t_2)-\tau)^{1-\beta}}-\frac{1}{(\varphi(t_1)-\tau)^{1-\beta}}\right)d\tau\right)\\
& +k_2\left|(T_2x)(t_1)-(T_2x)(t_2)\right|\int_0^{\varphi(t_2)}\left|H\left(t_2,t_2,x\left(\tau\right)\right)\right|d\tau\\
& +k_2\left|(T_2x)(t_1)\right|\int_{\varphi(t_2)}^{\varphi(t_1)}\left|H\left(t_2,t_1,x\left(\tau\right)\right)\right|d\tau+\sum_{i=1}^{m}k_{i+2}\left|x(\alpha_i(t_1))-x(\alpha_i(t_2))\right|\\
& +\omega_f(I,\varepsilon)\\
\leq\ & k_1\left|(T_1x)(t_1)-(T_1x)(t_2)\right|\\
& +k_2b_2\left(\|x\|\right)\left(\omega_{u_1}(I,\varepsilon)\frac{C^\beta}{\beta}+U\frac{\left[\varphi(t_1)-\varphi(t_2)\right]^\beta-\left(\left[\varphi(t_1)\right]^\beta-\left[\varphi(t_2)\right]^\beta\right)}{\beta}\right)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+k_2\left|(T_2x)(t_1)-(T_2x)(t_2)\right|\frac{UC^\beta}{\beta}+k_2b_2(\|x\|)U\frac{[\varphi(t_1)-\varphi(t_2)]^\beta}{\beta}\\
&+\sum_{i=1}^{m}k_{i+2}\omega(x,\omega(\alpha_i,\varepsilon))+\omega_f(I,\varepsilon)\\
\leq\ & k_1\omega(T_1x,\varepsilon)+k_2b_2(r_0)\left(\omega_{u_1}(I,\varepsilon)\frac{C^\beta}{\beta}+U\frac{[\omega(\varphi,\varepsilon)]^\beta}{\beta}\right)\\
&+\frac{k_2UC^\beta}{\beta}\omega(T_2x,\varepsilon)+k_2b_2(r_0)U\frac{[\omega(\varphi,\varepsilon)]^\beta}{\beta}\\
&+\sum_{i=1}^{m}k_{i+2}\omega(x,\omega(\alpha_i,\varepsilon))+\omega_f(I,\varepsilon)
\end{aligned}
\tag{3.10}
$$

elde edilir. Burada

$$
\begin{aligned}
\omega_{u_1}(I,\varepsilon) &= \sup\{|u(t_1,\tau,x_1,...,x_n)-u(t_2,\tau,x_1,...,x_n)|:t_1,t_2\in I,\ \tau\in[0,C],\\
&\qquad x_\xi\in R,\ 1\leq\xi\leq n \text{ ve } |t_1-t_2|\leq\varepsilon\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_f(I,\varepsilon) &= \sup\{|f(t_1,x_1,...,x_{m+2})-f(t_2,x_1,...,x_{m+2})|:t_1,t_2\in I,\ x_1\in B_1,\\
&\qquad x_2\in B_2,\ x_i\in R,\ 3\leq i\leq m+2 \text{ ve } |t_1-t_2|\leq\varepsilon\}
\end{aligned}
$$

ve

$$
B_1=[-b_1(r_0),b_1(r_0)],\ B_2=\left[-\frac{b_2(r_0)UC^\beta}{\beta},\frac{b_2(r_0)UC^\beta}{\beta}\right]
$$

dir. Ayrıca, $1\leq i\leq m$ için, $\omega(\alpha_i,\varepsilon)$ ve $\omega(\varphi,\varepsilon)$ fonksiyonları,

$$
\omega(\alpha_i,\varepsilon)=\sup\{|\alpha_i(t_1)-\alpha_i(t_2)|:t_1,t_2\in I \text{ ve } |t_1-t_2|\leq\varepsilon\}
$$

ve

$$
\omega(\varphi,\varepsilon)=\sup\{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)|:t_1,t_2\in I \text{ ve } |t_1-t_2|\leq\varepsilon\}
$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece (3.10) eşitsizliği kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
\omega(FX,\varepsilon) \leq\ & k_1\omega(T_1X,\varepsilon)+k_2b_2(r_0)\omega_{u_1}(I,\varepsilon)\frac{C^\beta}{\beta}+2k_2b_2(r_0)U\frac{[\omega(\varphi,\varepsilon)]^\beta}{\beta}\\
&+\frac{k_2UC^\beta}{\beta}\omega(T_2X,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{m}k_{i+2}\omega(X,\omega(\alpha_i,\varepsilon))+\omega_f(I,\varepsilon)
\end{aligned}
\tag{3.11}
$$

yazılabilir.

Diğer taraftan, α_i ve φ fonksiyonlarının I üzerinde düzgün sürekliliğinden, $\varepsilon\to0$ için, $\omega(\alpha_i,\varepsilon)\to0$ ve $\omega(\varphi,\varepsilon)\to0$ elde edilir. Benzer olarak f fonksiyonunun $I\times B_1\times B_2\times R^m$ üzerinde ve u fonksiyonunun ise $I\times[0,C]\times R^n$ üzerindeki düzgün sürekliliği göz önüne alınırsa $\varepsilon\to0$ için, $\omega_f(I,\varepsilon)\to0$ ve $\omega_{u_1}(I,\varepsilon)\to0$ dır.

Böylece, (3.11) eşitsizliğinden

$$\omega_0(FX) \leq \left(k_1 q_1 + \frac{k_2 q_2 U C^{\beta}}{\beta} + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\right)\omega_0(X) \tag{3.12}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.8) ve (3.12) eşitsizlikleri göz önüne alınırsa, F operatörünün B_{r_0} yuvarı üzerinde ω_0 kompaktsızlık ölçüsüne göre bir daralma dönüşümü olduğu ve dolayısıyla B_{r_0} yuvarında en az bir $x = x(t)$ sabit noktasına sahip olduğu sonucuna ulaşılır.

Son olarak, F operatörünün tanımı hatırlanırsa, (3.6) denkleminin $B_{r_0} \subset C(I)$ yuvarında en az bir $x = x(t)$ çözümünün var olduğu görülmüş olur. ■

3.1. Örnekler ve Bazı Sonuçlar

Bu kısımda Teorem 3.1'in uygulanabilirliğini ve daha önceden verilen bazı teoremler ile ilişkisini göstermek amacıyla bir takım örnekler ve sonuçlar verilecektir.

Örnek 3.1 $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı* $C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$*'de aşağıdaki kesirli integral denklemin en az bir çözümü vardır.*

$$x(t) = \frac{tx(\sqrt{t}) + x(t)}{7 + \cos t} + \frac{\exp x(t)}{12\Gamma(\frac{1}{4})} \int_0^t \frac{tx(\sqrt{\tau})\sin t + \tau \ln(1 + |x(\tau)|)}{3\sqrt[4]{(t-\tau)^3}} d\tau. \tag{3.1.1}$$

Dikkat edilirse, Teorem 3.1*'e göre*

$$\begin{aligned} f(t, x_1, x_2, x_3, x_4) &= x_2 + \frac{tx_3 + x_4}{7 + \cos t},\ u(t, \tau, x_1, x_2) = \frac{tx_1 \sin t + \tau \ln(1 + |x_2|)}{3}, \\ (T_2 x)(t) &= \frac{\exp x(t)}{12\Gamma(\frac{1}{4})},\ \alpha_1(t) = \sqrt{t},\ \alpha_2(t) = \varphi(t) = t, \end{aligned}$$

$$\gamma_1(\tau) = \sqrt{\tau},\ \gamma_2(\tau) = \tau$$

ve

$$h(x_1, x_2) = \frac{\pi}{6}(x_1 + \ln(1 + x_2)),\ b_2(r) = \frac{\exp r}{12\Gamma(\frac{1}{4})},\ n = m = 2,\ \beta = \frac{1}{4},\ a = \frac{\pi}{2},$$

$$k_2 = 1,\ k_3 = \frac{\pi}{14},\ k_4 = \frac{1}{7},\ M = 0,\ C = \frac{\pi}{2}$$

dir.

Diğer taraftan herhangi bir $r_0 \in (0, 2.0271...]$ *sayısı,* (3.1.1) *denklemi için*

$$\frac{\sqrt[4]{\pi^5}\exp r(\ln(1 + r) + r)}{72\sqrt[4]{2}\Gamma(\frac{5}{4})} + \frac{(\pi + 2)r}{14} \leq r$$

formunda olan (3.7) *eşitsizliğinin bir çözümüdür. Ayrıca* $r_0 = 1/2$ *ve* $X \subset B_{r_0}$ *boş olmayan ve sınırlı herhangi bir cümle olmak üzere, her* $p \in \mathbb{R}$ *için* $|\exp p - 1| \leq |p| \exp |p|$ *eşitsizliği de dikkate alınırsa, her* $x \in X$ *ve her* $t_1,\, t_2 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *için*

$$\begin{aligned}
|(T_2x)(t_1) - (T_2x)(t_2)| &= \left| \frac{\exp x(t_1)}{12\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} - \frac{\exp x(t_2)}{12\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \right| \\
&= \frac{\exp x(t_2)}{12\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} |\exp[x(t_1) - x(t_2)] - 1| \\
&\leq \frac{\exp x(t_2)}{12\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} |x(t_1) - x(t_2)| \exp(|x(t_1) - x(t_2)|) \\
&\leq \frac{\exp x(t_2)}{12\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} |x(t_1) - x(t_2)| \exp(|x(t_1)| + |x(t_2)|) \\
&\leq \frac{\exp \|x\|}{12\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} |x(t_1) - x(t_2)| \exp(2\|x\|) \\
&\leq \frac{\exp(3r_0)}{12\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} |x(t_1) - x(t_2)| \\
&= \frac{\exp\left(\frac{3}{2}\right)}{12\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} |x(t_1) - x(t_2)| .
\end{aligned}$$

$r_0 = 1/2$ *için*

$$U = \frac{\pi + 2\pi \ln\left(\frac{3}{2}\right)}{12} \quad ve \ q_2 = \frac{\exp\left(\frac{3}{2}\right)}{12\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

olup,

$$\frac{k_2 q_2 U C^{\beta}}{\beta} + \sum_{i=1}^{2} k_{i+2} = 0.5859... < 1$$

dir. Böylece Teorem 3.1*'in bütün şartları sağlanır ve* (3.1.1) *denkleminin* $C\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *uzayında,* $B_{\frac{1}{2}}$ *yuvarına düşen, en az bir çözümü vardır.*

Örnek 3.2 $C[0,1]$ *uzayında aşağıdaki denklem verilmiş olsun.*

$$\begin{aligned}
x(t) &= \frac{x(t^2)}{5} + \frac{x^2(t)}{13} + \frac{1+t}{8} + \frac{x(\sin t)}{18} \times \\
&\times \int_0^t \left(\frac{2t^2 + \tau^3}{9} + \sqrt[3]{x(\tau)} + \ln\left(1 + \left|x(\tau^2)\right|\right) + \frac{x^2(\tau)}{6} \right) d\tau. \quad (3.1.2)
\end{aligned}$$

(3.1.2) *denklemi için,*

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1+t}{8} + x_1 + x_2 + \frac{x_3}{5},$$

$$u(t, \tau, x_1, x_2, x_3) = \frac{2t^2 + \tau^3}{9} + \sqrt[3]{x_1} + \ln(1 + |x_2|) + \frac{x_3^2}{6},$$

$$(T_1x)(t) = \frac{x^2(t)}{13}, \ \ (T_2x)(t) = \frac{x(\sin t)}{18}, \ n = 3, \ m = 1,$$

$$\alpha_1(t) = t^2,\ \varphi(t) = t,\ \gamma_1(\tau) = \gamma_3(\tau) = \tau,\ \gamma_2(\tau) = \tau^2$$

ve

$$b_1(r) = \frac{r^2}{13},\ b_2(r) = \frac{r}{18},\ h(x_1, x_2, x_3) = \sqrt[3]{x_1} + \ln(1 + x_2) + \frac{x_3^2}{6}$$

olduğu görülebilir. Ayrıca bu denkleme ilişkin sabitler aşağıdaki gibidir.

$$\beta = a = m = C = 1,\ n = 3,\ M = \frac{1}{4},\ k_1 = k_2 = 1,\ k_3 = \frac{1}{5}.$$

Diğer taraftan

$$\frac{r^2}{13} + \frac{r}{108}\left(6\ln(1 + r) + r^2 + 6\sqrt[3]{r}\right) + \frac{r}{5} + \frac{1}{4} \leq r$$

yapısında olan (3.7) *eşitsizliği için herhangi bir* $r_0 \in [0.349027, 4.64645]$ *sayısı bir çözümdür.* $r_0 = 1$ *için* $U = (9 + 6\ln 2)/6$, $q_1 = 2/13$, $q_2 = 1/18$ *ve*

$$k_1 q_1 + \frac{k_2 q_2 U C^\beta}{\beta} + k_3 = 0.4756... < 1$$

olduğu da göz önüne alınırsa Teorem 3.1, (3.1.2) *denkleminin en az bir* $x = x(t) \in B_1 \subset C[0, 1]$ *çözümünün varlığını garanti eder.*

J. Banás vd. [68] aşağıdaki (**i**) – (**vi**) şartları altında $t \in I = [0, a]$ için,

$$x(t) = p(t) + (Tx)(t)\int_0^t v(t, \tau, x(\tau))d\tau \tag{3.1.3}$$

denkleminin çözülebilirliğini incelemişlerdir.

(**i**) $p \in C(I)$ azalmayan ve negatif olmayan bir fonksiyondur.

(**ii**) $v : I \times I \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir ve ilk değişkenine göre azalmayandır.

(**iii**) Her $t, \tau \in I$ ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$|v(t, \tau, x)| \leq g(|x|)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde azalmayan bir $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu vardır.

(**iv**) $T : C(I) \to C(I)$ pozitif operatörü süreklidir ve Örnek 2.23'de verilen μ_d kompaktsızlık ölçüsüne göre Q katsayısı ile Darbo şartını sağlar.

(v) Her $x \in C(I)$ ve $t \in I$ için

$$|(Tx)(t)| \leq c + d\,\|x\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde negatif olmayan c ve d sayıları vardır.

(vi) $\|p\| + (c + dr)ag(r) \leq r$ eşitsizliğinin $ag(r_0)Q < 1$ olacak şekilde pozitif bir r_0 çözümü vardır.

Teorem 3.2 $(\mathbf{i}) - (\mathbf{vi})$ *şartları altında* (3.1.3) *denkleminin* $C(I)$ *uzayında en az bir azalmayan* $x = x(t)$ *çözümü vardır, [68].*

Sonuç 3.1 *Teorem* 3.2*'nin uygulanabildiği bütün denklemlere Teorem* 3.1 *de uygulanabilir; fakat bunun karşıtı doğru olmayabilir.*

İspat. (3.6) denkleminde,

$$f(t, x_1, x_2, ..., x_{m+2}) = p(t) + x_2,$$

$$\beta = 1, \;\; (T_2x)(t) = (Tx)(t)\,, \;\; \gamma(\tau) = \tau, \varphi(t) = t$$

ve

$$u(t, \tau, x_1, x_2, ..., x_n) = v(t, \tau, x)$$

olarak seçilirse (3.1.3) denklemi elde edilir. $(\mathbf{i}) - (\mathbf{vi})$ şartlarının sağlanması halinde,

$$b_2(r) = c + dr, \;\; h(x) = g(x)\,, \;\; k_2 = 1 \text{ ve } |f(t, 0, ..., 0)| = |p(t)| \leq \|p\| = M$$

alınırsa, (3.7) eşitsizliği

$$(c + dr)\,ah(r) + \|p\| \leq r$$

eşitsizliğine dönüşür. Böylece Teorem 3.1'in $(\mathbf{a}_1) - (\mathbf{a}_5)$ şartları sağlanmış olur. ■

Aşağıdaki denklem bu sonucun karşıtının doğru olmayabileceğine dair bir örnektir.

Örnek 3.3 $C[0, 1]$ *uzayında*

$$x(t) = t^3 + \left(\frac{1}{10}x^2(t) + \frac{1}{10}\right)\int_0^t \left(t + \cos\left(\frac{x^2(\tau)}{1 + x^2(\tau)}\right)\right)d\tau \qquad (3.1.4)$$

denklemi ele alınırsa,

$$\begin{aligned} f(t, x_1, x_2, x_3) &= t^3 + x_2, \;\; u(t, \tau, x_1) = t + \cos\left(\frac{x_1^2}{1 + x_1^2}\right), \\ (T_2x)(t) &= \frac{1}{10}\left(x^2(t) + 1\right), \;\; \varphi(t) = t, \;\; \gamma_1(\tau) = \tau \end{aligned}$$

ve

$$h(x_1) = 2,\ b_2(r) = \frac{1}{10}\left(r^2+1\right),\ \beta = C = k_2 = M = 1$$

olduğu görülür. Diğer taraftan herhangi bir $r_0 \in [2,3]$ *sayısı,* (3.1.4) *denklemi için*

$$\frac{1}{5}\left(r^2+1\right)+1 \leq r$$

formunda olan (3.7) *eşitsizliğinin bir çözümüdür. Ayrıca* $r_0 = 2$ *için* $U = 2$, $q_2 = 2/5$ *ve*

$$\frac{k_2 q_2 U C^{\beta}}{\beta} = \frac{4}{5} < 1$$

olduğu dikkate alınırsa Teorem 3.1*'in bütün şartlarının sağlandığı görülebilir. Böylece* (3.1.4) *denkleminin en az bir* $x = x(t) \in B_2 \subset C[0,1]$ *çözümü vardır.*

Her $x \in C[0,1]$ *ve* $t \in [0,1]$ *için*

$$|(Tx)(t)| \leq c + d\,\|x\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde c *ve* d *sayıları bulunamayacağından Teorem* 3.2*'nin* (**v**) *şartı sağlanmaz. Böylece* (3.1.4) *denkleminin çözülebilirliği için Teorem* 3.2 *kullanılarak bir sonuç çıkarılamaz.*

2007 yılında J. Caballero vd. [24] $C[0,1]$ uzayında, $0 < \lambda < 1$ olmak üzere,

$$x(t) = p(t) + (Tx)(t)\int_0^{\sigma(t)} v(t,\tau,x(\tau),x(\lambda\tau))d\tau \qquad (3.1.5)$$

denklemini aşağıdaki şartlar altında ele almışlardır.

(i) Negatif değerler almayan $p \in C(I)$ fonksiyonu azalmayandır.

(ii) $\sigma : I \to I$ sürekli ve azalmayan bir fonksiyondur.

(iii) $T : C(I) \to C(I)$ pozitif operatörü süreklidir ve Örnek 2.23 de verilen μ_d kompaktsızlık ölçüsüne göre Q katsayısı ile Darbo şartını sağlar.

(iv) Her $x \in C(I)$ ve $t \in I$ için

$$|(Tx)(t)| \leq c + d\,\|x\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde negatif olmayan c ve d sayıları vardır.

(v) $v : I \times I \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir ve ilk değişkenine göre azalmayandır.

(vi) Her $t, \tau \in I$ ve $x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|v(t, \tau, x, y)| \leq g(|x|, |y|)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde azalmayan bir $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu vardır.

(vii)

$$\|p\| + (c + dr)g(r, r) \leq r$$

eşitsizliğinin $g(r_0, r_0)Q < 1$ olacak şekilde pozitif bir r_0 çözümü vardır.

Teorem 3.3 (**i**) − (**vii**) *şartları altında* (3.1.5) *denkleminin* $C(I)$ *uzayında en az bir azalmayan* $x = x(t)$ *çözümü vardır.*

Sonuç 3.2 *Teorem* 3.3*'ün uygulanabildiği bütün denklemlere Teorem* 3.1 *de uygulanabilir; fakat bunun karşıtı doğru olmayabilir.*

İspat. (3.6) denkleminde,

$$f(t, x_1, x_2, ..., x_{m+2}) = p(t) + x_2,\ \beta = 1,\ \ (T_2x)(t) = (Tx)(t), \gamma_1(\tau) = \tau,\ \gamma_2(\tau) = \lambda\tau$$

ve

$$\varphi(t) = \sigma(t),\ u(t, \tau, x_1, x_2, ..., x_n) = v(t, \tau, x_1, x_2)$$

olarak seçilirse (3.1.5) denklemi elde edilir. (**i**) − (**vii**) şartlarının sağlanması halinde,

$$b_2(r) = c + dr,\ h(x, y) = g(x, y),\ k_2 = 1 \text{ ve } |f(t, 0, ..., 0)| = |p(t)| \leq \|p\| = M$$

alınırsa,

$$k_1 b_1(r) + \frac{k_2 b_2(r) C^\beta}{\beta} h(r, r, ..., r) + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} r + M \leq r$$

eşitsizliği

$$(c + dr) g(r, r) + \|p\| \leq r$$

halini alır. Böylece Teorem 3.1'in $(\mathbf{a}_1) - (\mathbf{a}_5)$ şartları sağlanmış olur. ■

Aşağıdaki denklem bu sonucun karşıtının doğru olmayabileceğine ilişkin bir örnektir.

Örnek 3.4 *$C\,[0,1]$ uzayında*

$$x\,(t) = \frac{t^3}{6} + \left(1 + x^2\,(t)\right) \int_0^{\frac{t}{t^2+1}} t\tau x(\tau)x(\lambda\tau)d\tau,\ 0 < \lambda < 1. \tag{3.1.6}$$

denklemi verilmiş olsun. Bu durumda

$$f\,(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{t^3}{6} + x_2,\ u(t, \tau, x_1, x_2) = t\tau x_1 x_2,$$

$$(T_2 x)\,(t) = \left(1 + x^2\,(t)\right),\ \varphi\,(t) = \frac{t}{t^2+1},\ \gamma_1(\tau) = \tau,\ \gamma_2\,(\tau) = \lambda\tau$$

ve

$$h\,(x_1, x_2) = x_1 x_2,\ b_2\,(r) = 1 + r^2,\ n = 2,\ \beta = k_2 = 1,\ C = \frac{1}{2},\ M = \frac{1}{6}$$

dır.

Diğer taraftan herhangi bir $r_0 \in [0.184209, 0.900209]$ sayısı, (3.1.6) denklemi için

$$\frac{(1+r^2)}{2} r^2 + \frac{1}{6} \leq r$$

eşitsizliğine denk olan (3.7) eşitsizliğinin bir çözümüdür. Ayrıca $r_0 = 9/10$ için $U = 81/200$, $q_2 = 9/5$ ve

$$\frac{k_2 q_2 U C^\beta}{\beta} = 0.3645 < 1$$

olduğu da dikkate alınırsa Teorem 3.1'in bütün şartlarının sağlandığı görülebilir. Böylece (3.1.6) denkleminin $C\,[0,1]$ uzayında en az bir $x = x(t) \in B_{\frac{9}{10}}$ çözümü vardır.

Bir önceki örnekte olduğu gibi, her $x \in C\,[0,1]$ ve $t \in [0,1]$ için

$$|(Tx)\,(t)| \leq c + d\,\|x\|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde c ve d sayıları bulunamayacağından Teorem 3.3, (3.1.6) denklemine uygulanamaz.

4. $BC(\mathbb{R}_+)$ UZAYINDA BAZI İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN VARLIĞI VE ASİMPTOTİK KARARLILIĞI

Bu bölümde, bir önceki bölümde (3.6) ile verilen

$$x(t) = f\left(t, (T_1x)(t), (T_2x)(t)\int_0^{\varphi(t)} H(t,t,x(\tau))\,d\tau, x(\alpha_1(t)), ..., x(\alpha_m(t))\right) \quad (4.1)$$

denklemi aşağıdaki şartlar altında, $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında ele alınacak ve bu denklemin çözülebilirliğine ilişkin bazı sonuçlar verilecektir. Ayrıca (4.1) denkleminin (4.1.2) ve (4.1.6) denklemleriyle olan ilişkisi de incelenecektir.

($\mathbf{a}_1$) $1 \leq i \leq m$ ve $1 \leq j \leq n$ olmak üzere, α_i, $\gamma_j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ve $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonları süreklidir. Ayrıca $t \to \infty$ için $\alpha_i(t) \to \infty$ dur.

($\mathbf{a}_2$) $f(t, 0, ..., 0)$, $\mathbb{R}_+$ üzerinde sınırlı, $f : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{m+2} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli ve $1 \leq i \leq m+2$ olmak üzere, her $t \in \mathbb{R}_+$ ve x_i, $y_i \in \mathbb{R}$ için

$$|f(t, x_1, x_2, ..., x_{m+2}) - f(t, y_1, y_2, ..., y_{m+2})| \leq \sum_{i=1}^{m+2} k_i |x_i - y_i|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde negatif olmayan k_i sabitleri mevcuttur.

($\mathbf{a}_3$) $T_1 : BC(\mathbb{R}_+) \to BC(\mathbb{R}_+)$ ve $T_2 : BC(\mathbb{R}_+) \to BC(\mathbb{R}_+)$ operatörleri süreklidir ve her $x \in BC(\mathbb{R}_+)$ ve $t \in \mathbb{R}_+$ için

$$|(T_1x)(t)| \leq b_1(\|x\|) \text{ ve } |(T_2x)(t)| \leq b_2(\|x\|)$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde azalmayan b_1, $b_2 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonları mevcuttur.

($\mathbf{a}_4$) $u : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir ve $1 \leq i \leq n$ olmak üzere, her $t, \tau \in \mathbb{R}_+$ ve $x_i \in \mathbb{R}$ için

$$|u(t, \tau, x_1, x_2, ..., x_n)| \leq p(t,\tau) + \sigma(t)\rho(\tau)h(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$$

eşitsizliğini sağlayan ve herbir değişkenine göre azalmayan bir $h : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$ ve sürekli $p : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$, $\rho, \sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonları mevcuttur. Ayrıca

$$U_1(t) = \int_0^{\varphi(t)} \frac{p(t,\tau)}{(\varphi(t)-\tau)^{1-\beta}} d\tau \text{ ve } U_2(t) = \sigma(t)\int_0^{\varphi(t)} \frac{\rho(\tau)}{(\varphi(t)-\tau)^{1-\beta}} d\tau$$

olmak üzere,

$$\lim_{t\to\infty} U_1(t) = \lim_{t\to\infty} U_2(t) = 0$$

dır.

$(\mathbf{a}_5)$ M_1, M_2 ve M, her $t \in \mathbb{R}_+$ için $U_1(t) \le M_1$, $U_2(t) \le M_2$ ve $|f(t,0,0,...,0)| \le M$ olacak şekildeki negatif olmayan sayılar olmak üzere,

$$k_1 b_1(r) + k_2 b_2(r)\{M_1 + h(r,r,...,r) M_2\} + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} r + M \le r \tag{4.2}$$

eşitsizliğinin pozitif bir r_0 çözümü vardır. Ayrıca,

$$k_1 q_1 + k_2 q_2 [M_1 + h(r_0,...,r_0) M_2] + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} < 1 \tag{4.3}$$

olmak üzere, T_1 operatörü q_1 katsayısı ile (2.1.6)'da verilen μ kompaktsızlık ölçüsüne göre B_{r_0} yuvarında Darbo şartını sağlar ve ω_0, (2.1.5)'te verilen dönüşüm olmak üzere, T_2 operatörü de B_{r_0} yuvarının boş olmayan her X alt cümlesi için

$$\omega_0(T_2 X) \le q_2 \omega_0(X)$$

eşitsizliğini sağlar.

Teorem 4.1 $(\mathbf{a}_1) - (\mathbf{a}_5)$ *şartları sağlansın. Bu durumda* (4.1) *denkleminin* $B_{r_0} \subset BC(\mathbb{R}_+)$ *yuvarında en az bir asimptotik kararlı çözümü vardır.*

İspat. Teorem 3.1'in ispatındaki yol izlenerek ispat yapılacaktır. Ayrıca ispat boyunca gösterimde kısalık olması amacıyla,

$$H(t,s,x(\tau)) = \frac{u(t,\tau,x(\gamma_1(\tau)),...,x(\gamma_n(\tau)))}{(\varphi(s)-\tau)^{1-\beta}}$$

yazılacaktır.

1. Adım: Herhangi bir $x \in BC(\mathbb{R}_+)$ için F operatörü

$$(Fx)(t) = f\left(t, (T_1 x)(t), (T_2 x)(t) \int_0^{\varphi(t)} H(t,t,x(\tau))\, d\tau, x(\alpha_1(t)),...,x(\alpha_m(t))\right)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $(\mathbf{a}_1) - (\mathbf{a}_5)$ kabullerinden, her $x \in BC(\mathbb{R}_+)$ için Fx fonksiyonunun $\mathbb{R}_+$ üzerinde sürekli olduğu sonucu çıkar.

Diğer taraftan herhangi bir $x \in BC(\mathbb{R}_+)$ ve her $t \in \mathbb{R}_+$ için,

$$\begin{aligned}
& |(Fx)(t)| \\
= & \left| f\left(t, (T_1x)(t), (T_2x)(t)\int_0^{\varphi(t)} H(t,t,x(\tau))\,d\tau, x(\alpha_1(t)), ..., x(\alpha_m(t))\right)\right| \\
\leq & \left| f\left(t, (T_1x)(t), (T_2x)(t)\int_0^{\varphi(t)} H(t,t,x(\tau))\,d\tau, x(\alpha_1(t)), ..., x(\alpha_m(t))\right)\right. \\
& \left. -f(t,0,...,0)\right| + |f(t,0,...,0)| \\
\leq & k_1 |(T_1x)(t)| + k_2 |(T_2x)(t)| \int_0^{\varphi(t)} |H(t,t,x(\tau))|\,d\tau + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} |x(\alpha_i(t))| + M \\
\leq & k_1 |(T_1x)(t)| + k_2 |(T_2x)(t)| \times \\
& \times \int_0^{\varphi(t)} \frac{p(t,\tau) + \sigma(t)\rho(\tau) h(|x(\gamma_1(\tau))|, |x(\gamma_2(\tau))|, ..., |x(\gamma_n(\tau))|)}{(\varphi(t)-\tau)^{1-\beta}} d\tau \\
& + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} |x(\alpha_i(t))| + M \\
\leq & k_1 |(T_1x)(t)| + k_2 |(T_2x)(t)| \left\{ \int_0^{\varphi(t)} \frac{p(t,\tau)}{(\varphi(t)-\tau)^{1-\beta}} d\tau \right. \\
& \left. + \int_0^{\varphi(t)} \frac{\rho(\tau) h(|x(\gamma_1(\tau))|, |x(\gamma_2(\tau))|, ..., |x(\gamma_n(\tau))|)}{(\varphi(t)-\tau)^{1-\beta}} d\tau \right\} \\
& + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} |x(\alpha_i(t))| + M \\
\leq & k_1 b_1(\|x\|) + k_2 b_2(\|x\|) [M_1 + h(\|x\|, \|x\|, ..., \|x\|) M_2] \\
& + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} \|x\| + M
\end{aligned} \tag{4.4}$$

yazılabileceğinden Fx fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde sınırlıdır.

Böylece $F : BC(\mathbb{R}_+) \to BC(\mathbb{R}_+)$ dir. Özel olarak $x \in B_{r_0}$ alınırsa, (4.2) ve (4.4) eşitsizliklerinden,

$$\begin{aligned}
\|Fx\| & \leq k_1 b_1(r_0) + k_2 b_2(r_0) \{M_1 + h(r_0, r_0, ..., r_0) M_2\} + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} r_0 + M \\
& \leq r_0
\end{aligned}$$

yazılabilir. Dolayısıyla $F : B_{r_0} \to B_{r_0}$ olduğu görülür.

2. Adım: T_1 ve T_2 operatörleri sürekli olduklarından, herhangi bir $x_0 \in B_{r_0}$ elemanına ve $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| \leq \delta_1(\varepsilon, x_0)$ olan her $x \in B_{r_0}$ için $\|T_1x - T_1x_0\| \leq \varepsilon$ ve $\|x - x_0\| \leq \delta_2(\varepsilon, x_0)$ olan her $x \in B_{r_0}$ için $\|T_2x - T_2x_0\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta_1(\varepsilon, x_0) < \varepsilon$ ve $\delta_2(\varepsilon, x_0) < \varepsilon$ sayıları bulunabilir. Diğer taraftan, $\lim_{t\to\infty} U_1(t) = \lim_{t\to\infty} U_2(t) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa, $t > T'(\varepsilon)$ iken $U_1(t) \leq \varepsilon$

ve $t > T''(\varepsilon)$ iken $U_2(t) \leq \varepsilon$ olacak şekilde $T'(\varepsilon)$ ve $T''(\varepsilon)$ pozitif sayıları bulunabilir. Böylece $\delta(\varepsilon, x_0) = \min\{\delta_1(\varepsilon, x_0),\ \delta_2(\varepsilon, x_0)\}$ ve $T(\varepsilon) = \text{maks}\{T'(\varepsilon), T''(\varepsilon)\}$ olarak seçilirse, $(\mathbf{a}_1) - (\mathbf{a}_5)$ kabulleri altında, $\|x - x_0\| \leq \delta(\varepsilon, x_0)$ olan her $x \in B_{r_0}$ için,

$$\begin{aligned}
& |(Fx)(t) - (Fx_0)(t)| \\
= & \left| f\left(t, (T_1x)(t), (T_2x)(t) \int_0^{\varphi(t)} H(t, t, x(\tau))\, d\tau, x(\alpha_1(t)), ..., x(\alpha_m(t))\right)\right. \\
& \left. -f\left(t, (T_1x_0)(t), (T_2x_0)(t) \int_0^{\varphi(t)} H(t, t, x_0(\tau))\, d\tau, x_0(\alpha_1(t)), ..., x_0(\alpha_m(t))\right)\right| \\
\leq & \ k_1 |(T_1x)(t) - (T_1x_0)(t)| + k_2 |(T_2x)(t) - (T_2x_0)(t)| \int_0^{\varphi(t)} |H(t, t, x(\tau))|\, d\tau \\
& +k_2 |(T_2x_0)(t)| \int_0^{\varphi(t)} |H(t, t, x(\tau)) - H(t, t, x_0(\tau))|\, d\tau \\
& +\sum_{i=1}^{m} k_{i+2} |x(\alpha_i(t)) - x_0(\alpha_i(t))| \qquad (4.5)
\end{aligned}$$

elde edilir. (4.5) eşitsizliğinden hareketle,

$$J = [0, T(\varepsilon)],\ R = [-r_0, r_0],\ C_{(J,\varphi)} = \sup\{\varphi(t) : t \in J\},$$

$$\begin{aligned}
\omega_{u_n}(J, \varepsilon) = & \sup\big\{|u(t, \tau, x_1, ..., x_n) - u(t, \tau, y_1, ..., y_n)| : t \in J,\ \tau \in \left[0, C_{(J,\varphi)}\right], \\
& x_i,\ y_i \in R,\ 1 \leq i \leq n \text{ ve } |x_i - y_i| \leq \varepsilon\big\}
\end{aligned}$$

ve

$$U_J = \sup\left\{|u(t, \tau, x_1, ..., x_n)| : t \in J,\ \tau \in \left[0, C_{(J,\varphi)}\right],\ x_i \in R,\ 1 \leq i \leq n\right\}$$

olmak üzere, $\|x - x_0\| \leq \delta(\varepsilon, x_0)$ olan her $x \in B_{r_0}$ ve $t \in J$ için,

$$\begin{aligned}
& |(Fx)(t) - (Fx_0)(t)| \\
\leq & \ k_1 \|T_1x - T_1x_0\| + k_2 \|T_2x - T_2x_0\| \int_0^{\varphi(t)} \frac{U_J}{(\varphi(t) - \tau)^{1-\beta}} d\tau \\
& +k_2 b_2(\|x_0\|) \int_0^{\varphi(t)} \frac{\omega_{u_n}(J, \delta(\varepsilon, x_0))}{(\varphi(t) - \tau)^{1-\beta}} d\tau + \left(\sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\right) \|x - x_0\| \\
\leq & \ k_1 \|T_1x - T_1x_0\| + \frac{k_2 \|T_2x - T_2x_0\| U_J C_{(J,\varphi)}^{\beta}}{\beta} + \frac{k_2 b_2(\|x_0\|) C_{(J,\varphi)}^{\beta}}{\beta} \omega_{u_n}(J, \delta(\varepsilon, x_0)) \\
& + \left(\sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\right) \delta(\varepsilon, x_0) \\
\leq & \ k_1\varepsilon + \frac{k_2 \varepsilon U_J C_{(J,\varphi)}^{\beta}}{\beta} + \frac{k_2 b_2(r_0) C_{(J,\varphi)}^{\beta}}{\beta} \omega_{u_n}(J, \varepsilon) + \left(\sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\right) \varepsilon \qquad (4.6)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Ayrıca $u = u(t, \tau, x_1, ..., x_n)$ fonksiyonun $J \times \left[0, C_{(J,\varphi)}\right] \times R^n$ cümlesinde düzgün sürekli olmasından $\varepsilon \to 0$ için $\omega_{u_n}(I, \varepsilon) \to 0$ dır.

Diğer taraftan, yine (4.5) eşitsizliği kullanılarak, $\|x - x_0\| \leq \delta(\varepsilon, x_0)$ olan her $x \in B_{r_0}$ ve $t > T(\varepsilon)$ olan her t için,

$$
\begin{aligned}
& |(Fx)(t) - (Fx_0)(t)| \\
\leq\ & k_1 \|T_1 x - T_1 x_0\| + k_2 \|T_2 x - T_2 x_0\| \int_0^{\varphi(t)} |H(t, t, x(\tau))| \, d\tau \\
& + k_2 b_2 (\|x_0\|) \int_0^{\varphi(t)} |H(t, t, x(\tau)) - H(t, t, x_0(\tau))| \, d\tau + \left(\sum_{i=1}^{m} k_{i+2} \right) \|x - x_0\| \\
\leq\ & k_1 \|T_1 x - T_1 x_0\| + k_2 \|T_2 x - T_2 x_0\| \{U_1(t) + h(\|x\|, \|x\|, ..., \|x\|) U_2(t)\} \\
& + k_2 b_2 (\|x_0\|) \{2U_1(t) + [h(\|x\|, ..., \|x\|) + h(\|x_0\|, ..., \|x_0\|)] U_2(t)\} \\
& + \left(\sum_{i=1}^{m} k_{i+2} \right) \|x - x_0\| \\
\leq\ & k_1 \varepsilon + k_2 (\varepsilon + 2b_2(r_0)) (\varepsilon + h(r_0, r_0, ..., r_0) \varepsilon) + \left(\sum_{i=1}^{m} k_{i+2} \right) \varepsilon
\end{aligned}
\tag{4.7}
$$

elde edilir. Böylece, (4.6) ve (4.7) eşitsizliklerinden F operatörünün B_{r_0} yuvarında sürekli olduğu sonucuna varılır.

3. Adım: B_{r_0} yuvarının boş olmayan herhangi bir X alt cümlesi verilsin. İspatın genelliğini bozmayacağından $\varphi(t_2) \leq \varphi(t_1)$ olduğu kabul edilirse, herhangi bir $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $T > 0$ ve $|t_1 - t_2| \leq \varepsilon$ olan her $t_1, t_2 \in I = [0, T]$ için,

$$
\begin{aligned}
& |(Fx)(t_1) - (Fx)(t_2)| \\
=\ & \Bigg| f\left(t_1, (T_1 x)(t_1), (T_2 x)(t_1) \int_0^{\varphi(t_1)} H(t_1, t_1, x(\tau)) \, d\tau, x(\alpha_1(t_1)), ..., x(\alpha_m(t_1)) \right) \\
& - f\left(t_2, (T_1 x)(t_2), (T_2 x)(t_2) \int_0^{\varphi(t_2)} H(t_2, t_2, x(\tau)) \, d\tau, x(\alpha_1(t_2)), ..., x(\alpha_m(t_2)) \right) \Bigg| \\
\leq\ & \Bigg| f\left(t_1, (T_1 x)(t_1), (T_2 x)(t_1) \int_0^{\varphi(t_1)} H(t_1, t_1, x(\tau)) \, d\tau, x(\alpha_1(t_1)), ..., x(\alpha_m(t_1)) \right) \\
& - f\left(t_1, (T_1 x)(t_2), (T_2 x)(t_2) \int_0^{\varphi(t_2)} H(t_2, t_2, x(\tau)) \, d\tau, x(\alpha_1(t_2)), ..., x(\alpha_m(t_2)) \right) \Bigg| \\
& + \Bigg| f\left(t_1, (T_1 x)(t_2), (T_2 x)(t_2) \int_0^{\varphi(t_2)} H(t_2, t_2, x(\tau)) \, d\tau, x(\alpha_1(t_2)), ..., x(\alpha_m(t_2)) \right) \\
& - f\left(t_2, (T_1 x)(t_2), (T_2 x)(t_2) \int_0^{\varphi(t_2)} H(t_2, t_2, x(\tau)) \, d\tau, x(\alpha_1(t_2)), ..., x(\alpha_m(t_2)) \right) \Bigg|
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\leq\ & k_1 \left|(T_1x)(t_1) - (T_1x)(t_2)\right| \\
&+k_2 \left|(T_2x)(t_1)\int_0^{\varphi(t_1)} H(t_1,t_1,x(\tau))\,d\tau - (T_2x)(t_2)\int_0^{\varphi(t_2)} H(t_2,t_2,x(\tau))\,d\tau\right| \\
&+\sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\left|x(\alpha_i(t_1)) - x(\alpha_i(t_2))\right| + \omega_f(I,\varepsilon) \\
\leq\ & k_1 \left|(T_1x)(t_1) - (T_1x)(t_2)\right| \\
&+k_2 \left|(T_2x)(t_1)\right| \int_0^{\varphi(t_1)} \left|H(t_1,t_1,x(\tau)) - H(t_2,t_1,x(\tau))\right| d\tau \\
&+k_2 \left|(T_2x)(t_1)\right| \int_0^{\varphi(t_2)} \left|H(t_2,t_1,x(\tau)) - H(t_2,t_2,x(\tau))\right| d\tau \\
&+k_2 \left|(T_2x)(t_1) - (T_2x)(t_2)\right| \int_0^{\varphi(t_2)} \left|H(t_2,t_2,x(\tau))\right| d\tau \\
&+k_2 \left|(T_2x)(t_1)\right| \int_{\varphi(t_2)}^{\varphi(t_1)} \left|H(t_2,t_1,x(\tau))\right| d\tau \\
&+\sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\left|x(\alpha_i(t_1)) - x(\alpha_i(t_2))\right| + \omega_f(I,\varepsilon) \\
\leq\ & k_1 \left|(T_1x)(t_1) - (T_1x)(t_2)\right| \\
&+k_2 \left|(T_2x)(t_1)\right| \left(\omega_{u_1}(I,\varepsilon)\int_0^{\varphi(t_1)} \frac{d\tau}{(\varphi(t_1)-\tau)^{1-\beta}}\right) + k_2\left|(T_2x)(t_1)\right| \times \\
&\times \left(\int_0^{\varphi(t_2)} \left|u(t_2,\tau,x(\gamma_1(\tau)),...,x(\gamma_n(\tau)))\right| \left(\frac{1}{(\varphi(t_2)-\tau)^{1-\beta}} - \frac{1}{(\varphi(t_1)-\tau)^{1-\beta}}\right) d\tau\right) \\
&+k_2 \left|(T_2x)(t_1) - (T_2x)(t_2)\right| \int_0^{\varphi(t_2)} \left|H(t_2,t_2,x(\tau))\right| d\tau \\
&+k_2 \left|(T_2x)(t_1)\right| \int_{\varphi(t_2)}^{\varphi(t_1)} \left|H(t_2,t_1,x(\tau))\right| d\tau \\
&+\sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\left|x(\alpha_i(t_1)) - x(\alpha_i(t_2))\right| + \omega_f(I,\varepsilon) \\
\leq\ & k_1 \left|(T_1x)(t_1) - (T_1x)(t_2)\right| \\
&+k_2 b_2(\|x\|) \left(\omega_{u_1}(I,\varepsilon)\frac{C^{\beta}_{(I,\varphi)}}{\beta} + U\frac{[\varphi(t_1)-\varphi(t_2)]^{\beta} - \left([\varphi(t_1)]^{\beta} - [\varphi(t_2)]^{\beta}\right)}{\beta}\right) \\
&+k_2 \left|(T_2x)(t_1) - (T_2x)(t_2)\right| \left[U_1(t_2) + h(\|x\|,...,\|x\|)\,U_2(t_2)\right] \\
&+k_2 b_2(\|x\|)\,U\frac{[\varphi(t_1)-\varphi(t_2)]^{\beta}}{\beta} + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\omega^T(x,\omega(\alpha_i,\varepsilon)) + \omega_f(I,\varepsilon) \\
\leq\ & k_1\omega^T(T_1x,\varepsilon) + k_2 b_2(r_0)\left(\omega_{u_1}(I,\varepsilon)\frac{C^{\beta}_{(I,\varphi)}}{\beta} + U\frac{[\omega(\varphi,\varepsilon)]^{\beta}}{\beta}\right) \\
&+k_2\omega^T(T_2x,\varepsilon)\left[U_1(t_2) + h(r_0,...,r_0)\,U_2(t_2)\right] \\
&+k_2 b_2(r_0)\,U\frac{[\omega(\varphi,\varepsilon)]^{\beta}}{\beta} + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\omega^T(x,\omega(\alpha_i,\varepsilon)) + \omega_f(I,\varepsilon)
\end{aligned}
\tag{4.8}
$$

elde edilir. Burada,

$$U = \sup\left\{|u(t,\tau,x_1,...,x_n)| : t \in I,\ \tau \in \left[0, C_{(I,\varphi)}\right],\ x_i \in R,\ 1 \le i \le n\right\},$$

$$B_1 = [-b_1(r_0), b_1(r_0)],\ B_2 = \left[-\frac{b_2(r_0)\,UC_{(I,\varphi)}^{\beta}}{\beta}, \frac{b_2(r_0)\,UC_{(I,\varphi)}^{\beta}}{\beta}\right],$$

$$C_{(I,\varphi)} = \sup\{\varphi(t) : t \in I\}$$

ve

$$\begin{aligned}\omega_{u_1}(I,\varepsilon) &= \sup\left\{|u(t_1,\tau,x_1,...,x_n) - u(t_2,\tau,x_1,...,x_n)| : t_1,t_2 \in I,\ \tau \in \left[0, C_{(I,\varphi)}\right],\right.\\ &\qquad \left. x_\xi \in R,\ 1 \le \xi \le n \text{ ve } |t_1 - t_2| \le \varepsilon\right\},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\omega_f(I,\varepsilon) &= \sup\{|f(t_1,x_1,...,x_{m+2}) - f(t_2,x_1,...,x_{m+2})| : t_1,t_2 \in I,\ x_1 \in B_1,\\ &\qquad x_2 \in B_2,\ x_i \in R,\ 3 \le i \le m+2 \text{ ve } |t_1 - t_2| \le \varepsilon\}\end{aligned}$$

dur.

(4.8) eşitsizliğinde, her $t \in I$ için $U_1(t) \le M_1$ ve $U_2(t) \le M_2$ olduğu gerçeği kullanılarak $x \in X$ elemanları üzerinden supremum alınırsa,

$$\begin{aligned}&\omega(FX,\varepsilon)\\ \le\ & k_1\omega^T(T_1X,\varepsilon) + k_2b_2(r_0)\left(\omega_{u_1}(I,\varepsilon)\frac{C_{(I,\varphi)}^{\beta}}{\beta} + U\frac{[\omega(\varphi,\varepsilon)]^{\beta}}{\beta}\right)\\ &+k_2\omega^T(T_2X,\varepsilon)\left[M_1 + h(r_0,...,r_0)M_2\right] + k_2b_2(r_0)\,U\frac{[\omega(\varphi,\varepsilon)]^{\beta}}{\beta}\\ &+\sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\omega^T(X,\omega(\alpha_i,\varepsilon)) + \omega_f(I,\varepsilon) \qquad (4.9)\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $1 \le i \le m$ olmak üzere, α_i ve φ fonksiyonlarının I üzerindeki, f ve u fonksiyonlarının ise, sırasıyla, $I \times B_1 \times B_2 \times R^m$ ve $I \times \left[0, C_{(I,\varphi)}\right] \times R^n$ cümleleri üzerindeki düzgün sürekliliklerinden $\varepsilon \to 0$ için $\omega(\alpha_i,\varepsilon) \to 0$, $\omega(\varphi,\varepsilon) \to 0$, $\omega_f(I,\varepsilon) \to 0$ ve $\omega_{u_1}(I,\varepsilon) \to 0$ dır. Böylece (4.9) eşitsizliğinde $\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa,

$$\begin{aligned}\omega_0^T(FX) \ \le\ & k_1\omega_0^T(T_1X) + k_2\omega_0^T(T_2X)\left[M_1 + h(r_0,...,r_0)M_2\right]\\ &+\left(\sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\right)\omega_0^T(X) \qquad (4.10)\end{aligned}$$

ve daha sonra (4.10) eşitsizliğinde $T \to \infty$ için limit alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\omega_0(FX) \\
\leq\ & k_1\omega_0(T_1X) + k_2\omega_0(T_2X)\left[M_1 + h\left(r_0, ..., r_0\right)M_2\right] + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\omega_0(X) \\
\leq\ & k_1\omega_0(T_1X) + k_2q_2\omega_0(X)\left[M_1 + h\left(r_0, ..., r_0\right)M_2\right] + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\omega_0(X) \quad (4.11)
\end{aligned}$$

elde edilir. Diğer taraftan, x_0 yerine y alınarak (4.5) eşitsizliği yeniden dikkate alınırsa, herhangi bir $t \in \mathbb{R}_+$ ve $x,\ y \in X$ için

$$\begin{aligned}
&\left|(Fx)(t) - (Fy)(t)\right| \\
=\ & \left| f\left(t, (T_1x)(t), (T_2x)(t)\int_0^{\varphi(t)} H\left(t,t,x\left(\tau\right)\right)d\tau, x(\alpha_1(t)), ..., x(\alpha_m(t))\right)\right. \\
& \left. -f\left(t, (T_1y)(t), (T_2y)(t)\int_0^{\varphi(t)} H\left(t,t,y\left(\tau\right)\right)d\tau, y(\alpha_1(t)), ..., y(\alpha_m(t))\right)\right| \\
\leq\ & k_1\left|(T_1x)(t) - (T_1y)(t)\right| + k_2\left|(T_2x)(t) - (T_2y)(t)\right|\int_0^{\varphi(t)} \left|H\left(t,t,x\left(\tau\right)\right)\right|d\tau \\
& +k_2\left|(T_2y)(t)\right|\int_0^{\varphi(t)} \left|H\left(t,t,x\left(\tau\right)\right) - H\left(t,t,y\left(\tau\right)\right)\right|d\tau \\
& +\sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\left|x(\alpha_i(t)) - y(\alpha_i(t))\right| \\
\leq\ & k_1\left|(T_1x)(t) - (T_1y)(t)\right| + k_2\left|(T_2x)(t) - (T_2y)(t)\right|\left(U_1(t) + h\left(\|x\|, ..., \|x\|\right)U_2(t)\right) \\
& +k_2b_2\left(\|y\|\right)\left(2U_1(t) + \left[h\left(\|x\|, ..., \|x\|\right) + h\left(\|y\|, ..., \|y\|\right)\right]U_2(t)\right) \\
& +\sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\left|x(\alpha_i(t)) - y(\alpha_i(t))\right| \\
\leq\ & k_1\left|(T_1x)(t) - (T_1y)(t)\right| \\
& +\left\{k_2\left|(T_2x)(t) - (T_2y)(t)\right| + 2k_2b_2\left(r_0\right)\right\}\left[U_1(t) + h\left(r_0, ..., r_0\right)U_2(t)\right] \\
& +\sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\left|x(\alpha_i(t)) - y(\alpha_i(t))\right|
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Buradan $x,\ y \in X$ elemanları üzerinden supremum alınırsa,

$$\begin{aligned}
&\text{diam}\ (FX)(t) \\
\leq\ & k_1\text{diam}\ (T_1X)(t) + \left(k_2\text{diam}\ (T_2X)(t) + 2k_2b_2\left(r_0\right)\right)\left[U_1(t) + h\left(r_0, ..., r_0\right)U_2(t)\right] \\
& +\sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\text{diam}\ \left(X\left(\alpha_i\left(t\right)\right)\right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $(\mathbf{a}_1)$ ve $(\mathbf{a}_4)$ hipotezlerinden,

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam}\left(FX\right)(t) \\
\leq\ & \limsup_{t\to\infty} k_1 \operatorname{diam}\left(T_1X\right)(t) + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam}\left(X\left(\alpha_i\left(t\right)\right)\right) \\
=\ & k_1 \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam}\left(T_1X\right)(t) + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam} X\left(t\right)
\end{aligned} \tag{4.12}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Ayrıca, (4.11) ve (4.12) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$\kappa = k_1 q_1 + k_2 q_2 \left[M_1 + h\left(r_0, ..., r_0\right) M_2\right] + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2}$$

olmak üzere,

$$\mu\left(FX\right) \leq \kappa \mu\left(X\right) \tag{4.13}$$

elde edilir ve (4.3) eşitsizliğiden F operatörünün B_{r_0} yuvarı üzerinde μ kompaktsızlık ölçüsüne göre bir daralma dönüşümü olduğu sonucuna ulaşılır.

Bu sonuç genelleştirilmiş Darbo sabit nokta teoremi ile birleştirilirse, (4.1) denkleminin $B_{r_0} \subset BC\left(\mathbb{R}_+\right)$ yuvarında en az bir çözüme sahip olduğu söylenebilir.

Ayrıca (4.13) eşitsizliği B_{r_0} yuvarının boş olmayan her alt cümlesi için sağlanacağından ve

$$A = \{x \in B_{r_0} : Fx = x\}$$

cümlesi boş olmadığından,

$$\mu(FA) \leq \kappa\ \mu(A)$$

yani,

$$\mu(A) \leq \kappa\ \mu(A)$$

eşitsizliği elde edilir ki; $\kappa < 1$ olması $\mu(A) = 0$ olmasını gerektirir. Böylece

$$\omega_0(A) + \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam} A(t) = 0$$

ve dolayısıyla

$$\limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam} A(t) = 0$$

dır. Diğer taraftan her $t \in \mathbb{R}_+$ için $\operatorname{diam} A(t)$ fonksiyonunun negatif olmadığı hatırlanır ve

$$0 \leq \liminf_{t\to\infty} \operatorname{diam} A(t) \leq \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam} A(t) = 0$$

eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{diam} A(t) = 0$$

elde edilir. Böylece, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $t > T(\varepsilon)$ olan her t için

$$\operatorname{diam} A(t) = \sup \{|x(t) - y(t)| : x,\ y \in A\} \leq \varepsilon$$

olacak şekilde, yani her x, $y \in A$ için $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $T(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabilir. Dolayısıyla,

$$\lim_{t\to\infty} (x(t) - y(t)) = 0$$

eşitliği A'ya göre düzgün olarak sağlanır. Sonuç olarak (4.1) denkleminin B_{r_0} yuvarındaki çözümleri asimptotik kararlıdır. ■

4.1. Örnekler ve Bazı Sonuçlar

Örnek 4.1 $\mathbb{R}_+$ *üzerinde tanımlı, reel değerli, sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı* $BC(\mathbb{R}_+)$*'da aşağıdaki kesirli integral denklem verilmiş olsun.*

$$\begin{aligned} x(t) &= \frac{x(t^2)}{5} + \frac{x(t)}{13} + \frac{1}{8+t} + \frac{x(t)}{18\Gamma(\frac{1}{3})} \times \\ &\times \int_0^{t+1} \left(\frac{1}{\sqrt[3]{(t+1-\tau)^2}} \right) \left(\frac{\exp(-\tau)}{9t+1} + \frac{2\sqrt[3]{x(\tau)}}{2t+1} + \frac{x^2(\tau^2)\cos t}{6t+4} \right) d\tau. \end{aligned} \tag{4.1.1}$$

Bu denklem için,

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{8+t} + x_1 + x_2 + \frac{x_3}{5},$$

$$u(t, \tau, x_1, x_2) = \frac{\exp(-\tau)}{9t+1} + \frac{2\sqrt[3]{x_1}}{2t+1} + \frac{x_2^2 \cos t}{6t+4},$$

$$(T_1 x)(t) = \frac{x(t)}{13},\ \ (T_2 x)(t) = \frac{x(t)}{18\Gamma(\frac{1}{3})},\ n = 2,\ m = 1,\ \beta = \frac{1}{3},$$

$$\alpha_1(t) = t^2,\ \varphi(t) = t+1,\ \gamma_1(\tau) = \tau,\ \gamma_2(\tau) = \tau^2$$

ve

$$b_1(r) = \frac{r}{13},\ b_2(r) = \frac{r}{18\Gamma(\frac{1}{3})},$$

$$p(t, \tau) = \frac{1}{9t+1},\ \sigma(t) = \frac{2}{2t+1},\ \rho(\tau) = 1,\ h(x_1, x_2) = \sqrt[3]{x_1} + \frac{x_2^2}{6}$$

olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca U_1 ve U_2 fonksiyonları,

$$U_1(t) = \int_0^{t+1} \frac{d\tau}{(9t+1)\sqrt[3]{(t+1-\tau)^2}} = \frac{3\sqrt[3]{t+1}}{9t+1}$$

ve

$$U_2(t) = \frac{2}{2t+1}\int_0^{t+1} \frac{d\tau}{\sqrt[3]{(t+1-\tau)^2}} = \frac{6\sqrt[3]{t+1}}{2t+1}$$

şeklinde olup,

$$M_1 = 3,\ M_2 = 6,\ M = \frac{1}{8},\ k_1 = k_2 = 1,\ k_3 = \frac{1}{5}$$

tir.

Diğer taraftan $r_0 = 1$, (4.1.1) denklemi için

$$\frac{18r}{65} + \frac{r\left(3 + r^2 + 6\sqrt[3]{r}\right)}{18\Gamma\left(\frac{1}{3}\right)} + \frac{1}{8} \le r$$

formunda olan (4.2) eşitsizliğinin bir çözümüdür. Ayrıca $r_0 = 1$ için

$$q_1 = \frac{1}{13},\ q_2 = \frac{1}{18\Gamma(\frac{1}{3})} \text{ ve } k_1q_1 + k_2q_2\left[M_1 + h(1,1)M_2\right] + k_3 = 0.48430... < 1$$

dir.

Teorem 4.1'in bütün şartları sağlandığından (4.1.1) denkleminin asimptotik kararlı olan en az bir $x = x(t) \in B_1 \subset BC(\mathbb{R}_+)$ çözümü vardır.

J. Banás vd. [73]

$$x(t) = (Tx)(t)\int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau \qquad (4.1.2)$$

denklemini aşağıdaki $(i)-(v)$ şartları altında ele almışlardır.

(i) $T : BC(\mathbb{R}_+) \to BC(\mathbb{R}_+)$ operatörü süreklidir ve (2.1.6) ile verilen μ kompaktsızlık ölçüsüne göre Q katsayısı ile Darbo şartını sağlar.

(ii) Her $x \in BC(\mathbb{R}_+)$ için

$$|(Tx)(t)| \le c + d\,|x(t)|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde negatif olmayan c ve d sayıları vardır.

(iii) $v : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. Ayrıca sürekli $a, b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonları için $b \in L^1(\mathbb{R}_+)$ fonksiyonu sınırlı ve $\lim_{t\to\infty} a(t) = 0$ olmak üzere, her $x \in \mathbb{R}$ ve $t, \tau \in \mathbb{R}_+$ için

$$|v(t, \tau, x)| \leq a(t)\, b(\tau)$$

eşitsizliği sağlanır.

(iv) Her $t_1, t_2, \tau \in \mathbb{R}_+$ ve $x \in \mathbb{R}$ için

$$|v(t_1, \tau, x) - v(t_2, \tau, x)| \leq |t_1 - t_2|\, \phi(\tau)$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde, negatif değerler almayan ve $L^1(\mathbb{R}_+)$ sınıfından olan bir ϕ fonksiyonu vardır.

(v) $\alpha = \text{maks}\{c, d\}$ ve $\|a\| = \sup\{a(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ olmak üzere, $Q\|a\|\|b\|_1 < 1$ ve $\alpha\|a\|\|b\|_1 < 1$ dir.

Teorem 4.2 (**i**)$-$(**v**) *kabulleri altında* (4.1.2) *integral denkleminin* $BC(\mathbb{R}_+)$ *uzayında en az bir* $x = x(t)$ *çözümü vardır,* [73].

Önerme 4.1 *c ve d, her* $x \in BC(\mathbb{R}_+)$ *için*

$$|(Tx)(t)| \leq c + d\,|x(t)|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde negatif olmayan sayılar olmak üzere, $\alpha = \text{maks}\{c, d\}$, $\|a\| = \sup\{a(t) : t \in \mathbb{R}_+\}$ *ve* $\alpha\|a\|\|b\|_1 < 1$ *ise*

$$(c + dr)\|a\|\|b\|_1 \leq r$$

eşitsizliğinin en az bir pozitif r_0 *çözümü vardır.*

İspat. $(c + dr)\|a\|\|b\|_1 \leq r$ ve $d\|a\|\|b\|_1 < 1$ eşitsizlikleri göz önüne alınırsa,

$$0 < \frac{c\|a\|\|b\|_1}{1 - d\|a\|\|b\|_1} \leq r$$

elde edilir. Böylece

$$r_0 \geq \frac{c\|a\|\|b\|_1}{1 - d\|a\|\|b\|_1}$$

olan her r_0 sayısı $(c + dr)\|a\|\|b\|_1 \leq r$ eşitsizliğinin bir pozitif çözümüdür. ■

Sonuç 4.1 *Teorem* 4.2*'nin uygulanabildiği bütün denklemlere Teorem* 4.1 *de uygulanabilir; fakat bunun karşıtı doğru olmayabilir.*

İspat. (3.8) denkleminde,

$$f(t, x_1, x_2, ..., x_{m+2}) = x_2, \ \beta = n = 1, \ (T_2 x)(t) = (Tx)(t)$$

ve

$$\gamma_1(\tau) = \tau, \varphi(t) = t, \ u(t, \tau, x_1) = v(t, \tau, x)$$

olarak alınırsa (4.1.2) denklemi elde edilir.

(**i**) − (**v**) kabulleri ile birlikte

$$b_2(r) = c + dr, \ h(x_1) = k_2 = 1,$$

$$M = M_1 = U_1(t) = p(t, \tau) = 0, \ \sigma(t) = a(t), \ \rho(\tau) = b(\tau)$$

ve

$$U_2(t) = a(t) \int_0^t b(\tau) \, d\tau, \ M_2 = \|a\| \, \|b\|_1$$

alınırsa,

$$k_1 b_1(r) + \frac{k_2 b_2(r)}{\Gamma(\beta)} \{M_1 + h(r, r, ..., r) M_2\} + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} r + M \leq r$$

eşitsizliği

$$(c + dr) \|a\| \, \|b\|_1 \leq r \tag{4.1.3}$$

eşitsizliğine dönüşür ve Önerme 4.1 gereğince (4.1.3) eşitsizliğinin en az bir pozitif r_0 çözümü vardır. Diğer taraftan $Q = q_2$ ve $Q \|a\| \, \|b\|_1 < 1$ olduğundan (4.3) eşitsizliği de sağlanır. Böylece Teorem 4.1'in $(\mathbf{a}_1) - (\mathbf{a}_5)$ şartları sağlanmış olur. ∎

Aşağıdaki denklem bu sonucun karşıtının doğru olmayabileceğine dair bir örnektir.

Örnek 4.2 *2003 yılında, J. Banaś, J. Rocha ve K. B. Sadarangani [73] tarafından hazırlanan, "Lineer olmayan bir Volterra İntegral Denkleminin Çözülebilirliği" isimli çalışmada (Örnek 2) $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında ele alınan*

$$x(t) = (x(t) + 1) \int_0^t \frac{d\tau}{(t + 1)(\tau^2 + 1)} \tag{4.1.4}$$

denklemi, Teorem 4.1 *ışığında yeniden ele alınırsa,*

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = x_2,\ u(t, \tau, x_1) = \frac{1}{(t+1)(\tau^2+1)},$$

$$(T_2 x)(t) = x(t) + 1,\ \varphi(t) = t,\ b_2(r) = r + 1,$$

$$\sigma(t) = \frac{1}{t+1},\ \rho(\tau) = \frac{1}{\tau^2+1},\ p(t,\tau) = U_1(t) = M_1 = M = 0,$$

$$U_2(t) = \frac{1}{t+1}\int_0^t \frac{d\tau}{\tau^2+1} = \frac{\arctan t}{t+1},\ M_2 = \frac{2}{5}$$

ve

$$h(x_1) = \beta = k_2 = 1$$

olduğu görülebilir.

Diğer taraftan, bu denklem için

$$\frac{2(r+1)}{5} \leq r$$

formunda olan (4.2) *eşitsizliği için* $r_0 = 2/3$ *bir çözüm olup* T_2 *operatörü* $B_{\frac{2}{3}}$ *yuvarında* ω_0 *kompaktsızlık ölçüsüne göre* $q_2 = 1$ *katsayısı ile Darbo şartını sağlar. Ayrıca,*

$$k_2 q_2 h(1) M_2 = \frac{2}{5} < 1$$

dir.

Böylece Teorem 4.1, (4.1.4) *denkleminin en az bir* $x = x(t) \in B_{\frac{2}{3}} \subset BC(\mathbb{R}_+)$ *çözümünün olduğunu garanti eder. Oysa ki, J. Banaś vd.* [73] *çalışmalarında,*

$$Q\|a\|\|b\|_1 = \frac{\pi}{2} > 1$$

olduğundan, Teorem 4.2*'nin* (v) *şartının sağlanmadığını va hatta bu denklemin* $BC(\mathbb{R}_+)$ *uzayında bir çözümünün olmadığı sonucunu ifade etmişlerdir.*

$$\int_0^t \frac{d\tau}{(t+1)(\tau^2+1)} = \frac{\arctan t}{t+1}$$

olduğu dikkate alınırsa (4.1.4) *denklemi,*

$$(t+1)x(t) = (x(t)+1)\arctan t \tag{4.1.5}$$

denklemine dönüşür. Dikkat edilirse (4.1.5) *eşitliğini sağlayan yegâne fonksiyon*

$$x(t) = \frac{\arctan t}{t+1-\arctan t}$$

olup x fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde süreklidir ve $\|x\| \leq 2/3$ tür. Dolayısıyla (4.1.4) *denkleminin $B_{\frac{2}{3}} \subset BC(\mathbb{R}_+)$ yuvarında ve asimptotik karalı olan en az bir çözümü vardır denilebilir.*

J. Banaś vd. [14] $t \in [0, \infty)$ için $(\mathbf{i}) - (\mathbf{vi})$ kabulleri altında aşağıdaki denklemin çözülebilirliği ile ilgilenmiş ve Teorem 4.3'ü vermişlerdir.

$$x(t) = g(t, x(\alpha_1(t)), ..., x(\alpha_m(t))) + \int_0^{\phi(t)} u(t, s, x(\gamma_1(s)), ..., x(\gamma_n(s)))ds \quad (4.1.6)$$

(i) $g : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir ve $1 \leq i \leq m$ olmak üzere, her $t \in \mathbb{R}_+$ ve $(x_1, x_2, ..., x_m), (y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$ için

$$|g(t, x_1, x_2, ..., x_m) - g(t, y_1, y_2, ..., y_m)| \leq \sum_{i=1}^{m} k_i' |x_i - y_i|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde $k_i' \in [0, 1)$ sabitleri mevcuttur.

(ii) $t \to g(t, 0, ..., 0)$ fonksiyonu $\mathbb{R}_+$ üzerinde sınırlıdır ve $F_0 = \sup\{|g(t, 0, ..., 0)| : t \in \mathbb{R}_+\}$ dır.

(iii) $i = 1, 2, ..., m$ ve $j = 1, 2, ..., n$ için $\alpha_i, \gamma_j : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonları süreklidir ve $t \to \infty$ için $\alpha_i(t) \to \infty$ dur.

(iv) $\sigma : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu süreklidir.

(v) $u : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir ve her $t, s \in \mathbb{R}_+$ ve $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$|u(t, s, x_1, ..., x_n)| \leq q(t, s) + a(t) b(s) \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde sürekli $a, b : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ ve $q : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonları vardır. Ayrıca

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^{\phi(t)} q(t, s) ds = 0 \text{ ve } \lim_{t\to\infty} a(t) \int_0^{\phi(t)} b(s) ds = 0$$

dır.

(vi) $k = \sum_{i=1}^{m} k_i'$ ve $M_2 = \sup\left\{a(t) \int_0^{\phi(t)} b(s) ds : t \in \mathbb{R}_+\right\}$ olmak üzere, $k + nM_2 < 1$ dir.

Teorem 4.3 $(\mathbf{i}) - (\mathbf{vi})$ *kabulleri altında* (4.1.6) *denkleminin $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında global attractive olan en az bir çözümü vardır.*

Önerme 4.2 *$k + nM_2 < 1$ olsun. Bu durumda*

$$M_1 + (nM_2 + k)\, r + F_0 \le r \tag{4.1.7}$$

eşitsizliğinin en az bir pozitif r_0 çözümü vardır.

İspat. Dikkat edilirse (4.1.7) eşitsizliği

$$\frac{M_1 + F_0}{1 - (nM_2 + k)} \le r \tag{4.1.8}$$

eşitsizliğine denktir. Diğer taraftan $k + nM_2 < 1$ olduğundan (4.1.8) eşitsizliğinin en az bir pozitif r_0 çözümü vardır. Dolayısıyla (4.1.7) eşitsizliğinin de en az bir pozitif r_0 çözümü vardır. ■

Sonuç 4.1 *Teorem 4.3'ün uygulanabildiği bütün denklemlere Teorem 4.1 de uygulanabilir; fakat bunun karşıtı doğru olmayabilir.*

İspat. (**i**) – (**vi**) şartları sağlansın. Bu durumda,

$$f(t, x_1, x_2, ..., x_{m+2}) = g(t, x_3, x_4, ..., x_{m+2}) + x_2$$

ve

$$(T_2 x)(t) = \beta = 1, \ \varphi(t) = \phi(t)$$

olarak alınırsa, (4.1) denklemi (4.1.6) denklemine dönüşür.

Diğer taraftan

$$\begin{aligned} & |f(t, x_1, x_2, ..., x_{m+2}) - f(t, y_1, y_2, ..., y_{m+2})| \\ = \ & |(g(t, x_3, x_4, ..., x_{m+2}) + x_2) - (g(t, y_3, y_4, ..., y_{m+2}) + y_2)| \\ \le \ & |x_2 - y_2| + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2}\, |x_i - y_i| \end{aligned}$$

eşitsizliği ve

$$k_2 = b_2(r) = 1, \ n \ge 3 \text{ için } k_n = k'_{n-2}, \ M = F_0$$

$$p(t,\tau) = q(t,\tau), \ \sigma(t) = a(t), \ \rho(\tau) = b(\tau),$$

$$U_1(t) = \int_0^{\phi(t)} q(t,\tau)\, d\tau, \ U_2(t) = a(t) \int_0^{\phi(t)} b(\tau)\, d\tau$$

eşitlikleri ile birlikte

$$h(|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|) = \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

şeklinde tanımlı h fonksiyonunun her bir değişkenine göre azalmayan olduğu göz önüne alınırsa, $(\mathbf{a}_1) - (\mathbf{a}_4)$ şartları sağlanır. Ayrıca

$$k_1 b_1(r) + k_2 b_2(r)\{M_1 + h(r, r, ..., r) M_2\} + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} r + M \leq r$$

eşitsizliği (4.1.6) denklemi için (4.1.7) eşitsizliğine dönüşür ve $k+nM_2 < 1$ olduğundan Önerme 4.2 gereğince bu eşitsizliğin,

$$k_1 q_1 + k_2 q_2 [M_1 + h(r_0, ..., r_0) M_2] + \sum_{i=1}^{m} k_{i+2} < 1$$

olacak şekilde en az bir pozitif r_0 çözümü vardır.

Böylece Teorem 4.1'in bütün şartları sağlanmış olur. ■

Aşağıdaki denklem bu sonucun karşıtının doğru olmayabileceğine ilişkin bir örnektir.

Örnek 4.3 *$BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında*

$$x(t) = \frac{\exp(-t)\, x(t^2) + x(t)}{7 + \cos t} + \int_0^t \frac{x(\sqrt{\tau}) \sin t + \ln(2 + x^2(\tau)) + \tau}{2(t+1)^3} d\tau \qquad (4.1.9)$$

denklemi ele alınırsa,

$$f(t, x_1, x_2, x_3, x_4) = x_2 + \frac{\exp(-t)\, x_3 + x_4}{7 + \cos t},$$

$$u(t, \tau, x_1, x_2) = \frac{x_1 \sin t + \ln(2 + x_2^2) + \tau}{2(t+1)^3},$$

$$(T_2 x)(t) = b_2(r) = \rho(\tau) = \beta = 1,$$

$$\alpha_1(t) = t^2,\ \alpha_2(t) = \varphi(t) = t,\ \gamma_1(\tau) = \sqrt{\tau},\ \gamma_2(\tau) = \tau$$

ve

$$\begin{aligned} h(x_1, x_2) &= x_1 + \ln\left(2 + x_2^2\right),\ p(t, \tau) = \frac{\tau}{2(t+1)^3},\ \sigma(t) = \frac{1}{2(t+1)^3}, \\ U_1(t) &= \frac{t^2}{4(t+1)^3},\ U_2(t) = \frac{t}{2(t+1)^3},\ M_1 = \frac{1}{12},\ M_2 = \frac{1}{6} \\ k_2 &= 1,\ k_3 = k_4 = \frac{1}{7},\ M = q_2 = 0,\ n = m = 2 \end{aligned}$$

olduğu görülebilir. Ayrıca, (4.1.9) *denklemi için* (4.2) *eşitsizliği*

$$\frac{1}{12} + \frac{(r + \ln(2 + r^2))}{6} + \frac{2}{7} \leq r$$

formunda olup $r_0 = 1$ *bu eşitsizliğin bir çözümüdür.*

Böylece Teorem 4.1 *gereğince* (4.1.9) *denkleminin asimptotik kararlı olan en az bir* $x = x(t) \in B_1 \subset BC(\mathbb{R}_+)$ *çözümü vardır.*

Diğer taraftan her $t, s \in \mathbb{R}_+$ *ve* $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ *için*

$$|u(t, s, x_1, ..., x_n)| \le q(t, s) + a(t)\, b(s) \sum_{i=1}^{n} |x_i|$$

eşitsizliği sağlanmaz. Dolayısıyla (4.1.9) *denklemi için Teorem* 4.3 *uygulanamaz.*

Örnek 4.4 $BC(\mathbb{R}_+)$ *uzayında*

$$x(t) = \frac{x^2(t) + x\left(\sqrt{t}\right)}{7 + \cos t} + \frac{\exp x(t)}{12\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} \int_0^t \frac{x\left(\sqrt{\tau}\right)\sin t + \ln\left(1 + |x(\tau)|\right)}{\left(1 + t^2\right)\sqrt[4]{(t-\tau)^3}} d\tau \qquad (4.1.10)$$

kesirli integral denklemi verilsin. Dikkat edilirse, (4.1.10) *denklemi için*

$$f(t, x_1, x_2, x_3) = \frac{x_1 + x_3}{7 + \cos t} + \frac{x_2}{12},$$

$$u(t, \tau, x_1, x_2) = \frac{x_1 \sin t + \ln\left(1 + |x_2|\right)}{1 + t^2},$$

$$(T_1 x)(t) = x^2(t), \ \ (T_2 x)(t) = \frac{\exp x(t)}{\Gamma(\frac{1}{4})}, \ n = 2, \ m = 1, \ \beta = \frac{1}{4}$$

$$\alpha_1(t) = \sqrt{t}, \ \varphi(t) = t, \ \gamma_1(\tau) = \sqrt{\tau}, \ \gamma_2(\tau) = \tau$$

ve

$$b_1(r) = r^2, \ b_2(r) = \frac{\exp r}{\Gamma(\frac{1}{4})},$$

$$p(t, \tau) = 0, \ \sigma(t) = \frac{1}{t^2 + 1}, \ \rho(\tau) = 1, \ h(x_1, x_2) = x_1 + \ln(1 + x_2)$$

dir. Ayrıca U_1 *ve* U_2 *fonksiyonları,*

$$U_1(t) = 0 \ \textit{ve}\ U_2(t) = \frac{1}{t^2 + 1} \int_0^t \frac{d\tau}{\sqrt[4]{(t-\tau)^3}} = \frac{4\sqrt[4]{t}}{t^2 + 1}$$

şeklinde olup

$$M = M_1 = 0, \ M_2 = 2.75, \ k_1 = k_3 = \frac{1}{7}, \ k_2 = \frac{1}{12}$$

alınabilir.

Diğer taraftan herhangi bir $r_0 \in [0, 1.79841]$ *sayısı,* (4.1.10) *denklemi için*

$$\frac{r^2}{7} + \frac{2.75 \exp r \left[r + \ln(1 + r)\right]}{12\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} + \frac{r}{7} \le r$$

formunda olan (4.2) eşitsizliğinin bir çözümüdür.

Ayrıca $r_0 = 1/2$, $T > 0$ *ve* $X \subset B_{r_0}$ *boş olmayan ve sınırlı herhangi bir cümle olmak üzere, her* $p \in \mathbb{R}$ *için* $|\exp p - 1| \leq |p| \exp |p|$ *eşitsizliği de dikkate alınırsa, her* x, $y \in X$ *ve her* t, t_1, $t_2 \in [0, T]$ *için*

$$\begin{aligned} |(T_1x)(t_1) - (T_1x)(t_2)| &= \left|x^2(t_1) - x^2(t_2)\right| \\ &= |x(t_1) - x(t_2)|\,|x(t_1) + x(t_2)| \\ &\leq |x(t_1) - x(t_2)|\,(|x(t_1)| + |x(t_2)|) \\ &\leq 2\|x\|\,|x(t_1) - x(t_2)| \\ &\leq 2r_0\,|x(t_1) - x(t_2)| \\ &= |x(t_1) - x(t_2)|, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |(T_1x)(t) - (T_1y)(t)| &= \left|x^2(t) - y^2(t)\right| \\ &= |x(t) - y(t)|\,|x(t) + y(t)| \\ &\leq |x(t) - y(t)|\,(|x(t)| + |y(t)|) \\ &\leq (\|x\| + \|y\|)\,|x(t) - y(t)| \\ &\leq 2r_0\,|x(t) - y(t)| \\ &= |x(t) - y(t)| \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} |(T_2x)(t_1) - (T_2x)(t_2)| &= \left|\frac{\exp x(t_1)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)} - \frac{\exp x(t_2)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\right| \\ &= \frac{\exp x(t_2)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\,|\exp[x(t_1) - x(t_2)] - 1| \\ &\leq \frac{\exp x(t_2)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\,|x(t_1) - x(t_2)|\exp(|x(t_1) - x(t_2)|) \\ &\leq \frac{\exp x(t_2)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\,|x(t_1) - x(t_2)|\exp(|x(t_1)| + |x(t_2)|) \\ &\leq \frac{\exp\|x\|}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\,|x(t_1) - x(t_2)|\exp(2\|x\|) \\ &\leq \frac{\exp(3r_0)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\,|x(t_1) - x(t_2)| \\ &= \frac{\exp\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\,|x(t_1) - x(t_2)| \end{aligned}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Dolayısıyla B_{r_0} yuvarının boş olmayan ve sınırlı herhangi bir X alt cümlesi için

$$\mu\left(T_1X\right) \leq \mu\left(X\right)$$

ve

$$\omega_0\left(T_2X\right) \leq \frac{\exp\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}\omega_0\left(X\right)$$

sonucuna varılır. Böylece

$$q_1 = 1,\ q_2 = \frac{\exp\left(\frac{3}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

ve

$$k_1q_1 + k_2q_2\left[M_1 + h\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)M_2\right] + k_3 = 0.542212... < 1$$

dir.

Teorem 4.1*'in bütün şartları sağlandığından* (4.1.10) *denkleminin, asimptotik kararlı olan, en az bir* $x = x(t) \in B_{\frac{1}{2}} \subset BC\left(\mathbb{R}_+\right)$ *çözümü vardır.*

5. $C[a,b]$ VE $BC(\mathbb{R}_+)$ BANACH CEBİRLERİNDE BAZI İNTEGRAL DENKLEMLER

Bu bölümde, $0 < \beta_1, \beta_2 \leq 1$, gösterimde kısalık olması bakımından

$$H_1(t,s,x(\tau)) = \frac{u(t,\tau,x(\gamma_1(\tau)),...,x(\gamma_{n_1}(\tau)))}{(\varphi_1(s)-\tau)^{1-\beta_1}},$$

$$H_2(t,s,x(\tau)) = \frac{v(t,\tau,x(\eta_1(\tau)),...,x(\eta_{n_2}(\tau)))}{(\varphi_2(s)-\tau)^{1-\beta_2}}$$

ve

$$(Fx)(t) = f\left(t, (T_1x)(t), (T_2x)(t)\int_0^{\varphi_1(t)} H_1(t,t,x(\tau))\,d\tau, x(\alpha_1(t)),...,x(\alpha_{m_1}(t))\right),$$

$$(Gx)(t) = g\left(t, (T_3x)(t), (T_4x)(t)\int_0^{\varphi_2(t)} H_2(t,t,x(\tau))\,d\tau, x(\phi_1(t)),...,x(\phi_{m_2}(t))\right)$$

olmak üzere,

$$x(t) = (Fx)(t)(Gx)(t) \tag{5.1}$$

denkleminin $C(I)$ ve $BC(\mathbb{R}_+)$ Banach cebirlerindeki çözümlerinin varlığı incelenecektir. Aksi belirtilmedikçe I ile $[0,a]$ aralığı temsil edilecektir.

Teorem 5.1 [74] *E bir Banach cebiri, $D \subset E$ boş olmayan, sınırlı, kapalı ve konveks bir cümle ve μ D üzerinde bir kompaktsızlık ölçüsü olmak üzere, $P : D \to E$, $T : D \to E$ operatörleri sürekli ve $P(D) = \{Px : x \in D\}$ ve $T(D) = \{Tx : x \in D\}$ cümleleri sınırlı olsun. Ayrıca $S : D \to D$ operatörü her $x \in D$ için $S(x) = P(x)T(x)$ şeklinde tanımlansın. Eğer P ve T operatörleri D üzerinde μ kompaktsızlık ölçüsüne göre, sırasıyla, k_1 ve k_2 katsayıları ile Darbo şartını sağlıyorsa, S operatörü de D üzerinde μ kompaktsızlık ölçüsüne göre*

$$k_1\|T(D)\| + k_2\|P(D)\|$$

katsayısı ile Darbo şartını sağlar. Özel olarak $k_1\|T(D)\| + k_2\|P(D)\| < 1$ ise S operatörü D üzerinde en az bir sabit noktaya sahiptir.
Burada $\|T(D)\|$ ve $\|P(D)\|$ değerleri, $\|T(D)\| = \sup\{\|Tx\| : x \in D\}$ ve $\|P(D)\| = \sup\{\|Px\| : x \in D\}$ eşitlikleri ile tanımlanmaktadır.

(5.1) denkleminin $C\left(I\right)$ Banach cebirinde çözülebilirliği aşağıdaki kabuller altında araştırılacaktır.

($\mathbf{a}_1$) $1 \leq i \leq m_1$, $1 \leq j \leq n_1$, $1 \leq \lambda \leq n_2$, $1 \leq \xi \leq m_2$ ve $1 \leq p \leq 2$ olmak üzere,

$$\alpha_i,\ \phi_\xi : I \to I,\ \gamma_j : [0, C_1] \to I,\ \eta_\lambda : [0, C_2] \to I \text{ ve } \varphi_p : I \to \mathbb{R}_+$$

fonksiyonları süreklidir. Burada C_1 ve C_2, her $t \in I$ için $\varphi_1\left(t\right) \leq C_1$ ve $\varphi_2\left(t\right) \leq C_2$ olacak şekilde pozitif sayılardır.

($\mathbf{a}_2$) $f : I \times \mathbb{R}^{m_1+2} \to \mathbb{R}$ ve $g : I \times \mathbb{R}^{m_2+2} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları süreklidir. Ayrıca $1 \leq i \leq m_1 + 2$ ve $1 \leq j \leq m_2 + 2$ olmak üzere, her $t \in I$ ve $x_i,\ x_j,\ y_i,\ y_j \in \mathbb{R}$ için,

$$|f(t, x_1, x_2, ..., x_{m_1+2}) - f(t, y_1, y_2, ..., y_{m_1+2})| \leq \sum_{i=1}^{m_1+2} k_i \left|x_i - y_i\right|$$

ve

$$|g(t, x_1, x_2, ..., x_{m_2+2}) - g(t, y_1, y_2, ..., y_{m_2+2})| \leq \sum_{j=1}^{m_2+2} l_j \left|x_j - y_j\right|$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde negatif olmayan k_i ve l_j sayıları mevcuttur.

($\mathbf{a}_3$) $u : I \times [0, C_1] \times \mathbb{R}^{n_1} \to \mathbb{R}$, $v : I \times [0, C_2] \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları süreklidir ve $1 \leq i \leq n_1$, $1 \leq j \leq n_2$ olmak üzere, her $t \in I$, $\tau_1 \in [0, C_1]$, $\tau_2 \in [0, C_2]$ ve $x_i,\ x_j \in \mathbb{R}$ için

$$|u(t, \tau_1, x_1, x_2, ..., x_{n_1})| \leq h_1(\left|x_1\right|, \left|x_2\right|, ..., \left|x_{n_1}\right|)$$

ve

$$|v(t, \tau_2, x_1, x_2, ..., x_{n_2})| \leq h_2(\left|x_1\right|, \left|x_2\right|, ..., \left|x_{n_2}\right|)$$

eşitsizliklerini sağlayan ve herbir değişkenine göre azalmayan $h_1 : \mathbb{R}_+^{n_1} \to \mathbb{R}_+$ ve $h_2 : \mathbb{R}_+^{n_2} \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonları vardır.

($\mathbf{a}_4$) $T_1, T_2, T_3, T_4 : C\left(I\right) \to C\left(I\right)$ operatörleri süreklidir. Ayrıca her $x \in C\left(I\right)$ için

$$|(T_1 x)(t)| \leq b_1(\|x\|),\ \ |(T_2 x)(t)| \leq b_2(\|x\|)$$

ve

$$|(T_3 x)(t)| \leq b_3(\|x\|),\ \ |(T_4 x)(t)| \leq b_4(\|x\|)$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde azalmayan $b_1,\ b_2,\ b_3,\ b_4 : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonları mevcuttur.

($\mathbf{a}_5$) M ve N, her $t \in I$ için $|f(t,0,...,0)| \leq M$ ve $|g(t,0,...,0)| \leq N$ olacak şekilde negatif olmayan sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\left(k_1 b_1(r) + \frac{k_2 b_2(r) C_1^{\beta_1}}{\beta_1} h_1(r,r,...,r) + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2} r + M\right) \times \\
&\times \left(l_1 b_3(r) + \frac{l_2 b_4(r) C_2^{\beta_2}}{\beta_2} h_2(r,r,...,r) + \sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2} r + N\right) \\
\leq\ & r
\end{aligned} \tag{5.2}$$

eşitsizliğinin pozitif bir r_0 çözümü vardır.

Ayrıca $R = [-r_0, r_0]$,

$$\begin{aligned}
U &= \sup\{|u(t,\tau,x_1,...,x_{n_1})| : t \in I,\ \tau \in [0,C_1]\ x_i \in R,\ 1 \leq i \leq n_1\}, \\
V &= \sup\{|v(t,\tau,x_1,...,x_{n_2})| : t \in I,\ \tau \in [0,C_2]\ x_i \in R,\ 1 \leq i \leq n_2\}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
&\left(k_1 b_1(r_0) + \frac{k_2 b_2(r_0) C_1^{\beta_1}}{\beta_1} h_1(r_0,r_0,...,r_0) + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2} r_0 + M\right) \times \\
&\times \left(l_1 q_3 + \frac{l_2 q_4 V C_2^{\beta_2}}{\beta_2} + \sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2}\right) \\
&+ \left(l_1 b_3(r_0) + \frac{l_2 b_4(r_0) C_2^{\beta_2}}{\beta_2} h_2(r_0,r_0,...,r_0) + \sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2} r_0 + N\right) \times \\
&\times \left(k_1 q_1 + \frac{k_2 q_2 U C_1^{\beta_1}}{\beta_1} + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2}\right) \\
<\ & 1
\end{aligned} \tag{5.3}$$

olmak üzere, B_{r_0} yuvarında T_1, T_2, T_3 ve T_4 operatörleri sırasıyla q_1, q_2, q_3 ve q_4 katsayıları ile (2.1.2) ile verilen ω_0 kompaktsızlık ölçüsüne göre Darbo şartını sağlarlar.

Teorem 5.2 ($\mathbf{a}_1$) $-$ ($\mathbf{a}_5$) *şartlarının sağlanması halinde* (5.1) *denkleminin* $B_{r_0} \subset C(I)$ *yuvarına ait olan en az bir* $x = x(t)$ *çözümü vardır.*

İspat. İspat dört adımda yapılacaktır.

1. Adım: Her $x = x(t) \in C(I)$ için

$$(Fx)(t) = f\left(t, (T_1 x)(t), (T_2 x)(t) \int_0^{\varphi_1(t)} H_1(t,t,x(\tau))\, d\tau, x(\alpha_1(t)), ..., x(\alpha_{m_1}(t))\right),$$

ve

$$(Gx)(t)=g\left(t,(T_3x)(t),(T_4x)(t)\int_0^{\varphi_2(t)}H_2(t,t,x(\tau))\,d\tau,x(\phi_1(t)),...,x(\phi_{m_2}(t))\right)$$

olmak üzere, T operatörü

$$(Tx)(t)=(Fx)(t)(Gx)(t)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda her $x\in C(I)$ için, Teorem 5.2'nin kabulleri gereği Fx, Gx ve dolayısıyla Tx fonksiyonları I üzerinde süreklidirler.

Diğer taraftan herhangi bir $x\in B_{r_0}$ ve her $t\in I$ için,

$$\begin{aligned}
&|(Fx)(t)|\\
&\left|f\left(t,(T_1x)(t),(T_2x)(t)\int_0^{\varphi_1(t)}H_1(t,t,x(\tau))\,d\tau,x(\alpha_1(t)),...,x(\alpha_{m_1}(t))\right)\right|\\
\leq\ &\left|f\left(t,(T_1x)(t),(T_2x)(t)\int_0^{\varphi_1(t)}H_1(t,t,x(\tau))\,d\tau,x(\alpha_1(t)),...,x(\alpha_{m_1}(t))\right)\right.\\
&\left.-f(t,0,...,0)\right|+|f(t,0,...,0)|\\
\leq\ &k_1|(T_1x)(t)|+k_2|(T_2x)(t)|\int_0^{\varphi_1(t)}|H_1(t,t,x(\tau))|\,d\tau+\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}|x(\alpha_i(t))|+M\\
\leq\ &k_1|(T_1x)(t)|+k_2|(T_2x)(t)|\int_0^{\varphi_1(t)}\frac{h_1\left(|x(\gamma_1(\tau))|,|x(\gamma_2(\tau))|,...,|x(\gamma_{n_1}(\tau))|\right)}{(\varphi_1(t)-\tau)^{1-\beta_1}}d\tau\\
&+\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}|x(\alpha_i(t))|+M\\
\leq\ &k_1b_1(\|x\|)+k_2b_2(\|x\|)\int_0^{\varphi_1(t)}\frac{h_1(\|x\|,\|x\|,...,\|x\|)}{(\varphi_1(t)-\tau)^{1-\beta_1}}d\tau+\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}\|x\|+M\\
\leq\ &k_1b_1(\|x\|)+\frac{k_2b_2(\|x\|)\,C_1^{\beta_1}}{\beta_1}h_1(\|x\|,\|x\|,...,\|x\|)+\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}\|x\|+M\\
\leq\ &k_1b_1(r_0)+\frac{k_2b_2(r_0)\,C_1^{\beta_1}}{\beta_1}h_1(r_0,r_0,...,r_0)+\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}r_0+M
\end{aligned}\tag{5.4}$$

ve

$$\begin{aligned}
&|(Gx)(t)|\\
=\ &\left|g\left(t,(T_3x)(t),(T_4x)(t)\int_0^{\varphi_2(t)}H_2(t,t,x(\tau))\,d\tau,x(\phi_1(t)),...,x(\phi_{m_2}(t))\right)\right|\\
\leq\ &\left|g\left(t,(T_3x)(t),(T_4x)(t)\int_0^{\varphi_2(t)}H_2(t,t,x(\tau))\,d\tau,x(\phi_1(t)),...,x(\phi_{m_2}(t))\right)\right.\\
&\left.-g(t,0,...,0)\right|+|g(t,0,...,0)|
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\leq\; l_1\left|(T_3x)(t)\right|+l_2\left|(T_4x)(t)\right|\int_0^{\varphi_2(t)}\left|H_2\left(t,t,x\left(\tau\right)\right)\right|d\tau+\sum_{i=1}^{m_2}l_{i+2}\left|x(\phi_i(t))\right|+N\\
&\leq\; l_1\left|(T_3x)(t)\right|+l_2\left|(T_4x)(t)\right|\int_0^{\varphi_2(t)}\frac{h_2\left(\left|x(\eta_1(\tau))\right|,\left|x(\eta_2(\tau))\right|,...,\left|x(\eta_{n_2}(\tau))\right|\right)}{(\varphi_2(t)-\tau)^{1-\beta_2}}d\tau\\
&\quad+\sum_{i=1}^{m_2}l_{i+2}\left|x(\phi_i(t))\right|+N\\
&\leq\; l_1b_3\left(\|x\|\right)+l_2b_4\left(\|x\|\right)\int_0^{\varphi_2(t)}\frac{h_2\left(\|x\|,\|x\|,...,\|x\|\right)}{(\varphi_2(t)-\tau)^{1-\beta_2}}d\tau+\sum_{i=1}^{m_2}l_{i+2}\|x\|+N\\
&\leq\; l_1b_3\left(\|x\|\right)+\frac{l_2b_4\left(\|x\|\right)C_2^{\beta_2}}{\beta_2}h_2\left(\|x\|,\|x\|,...,\|x\|\right)+\sum_{i=1}^{m_2}l_{i+2}\|x\|+N\\
&\leq\; l_1b_3\left(r_0\right)+\frac{l_2b_4\left(r_0\right)C_2^{\beta_2}}{\beta_2}h_2\left(r_0,r_0,...,r_0\right)+\sum_{i=1}^{m_2}l_{i+2}r_0+N \qquad (5.5)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece $F(B_{r_0})$ ve $G(B_{r_0})$ cümlelerinin $C\left(I\right)$ uzayında sınırlı oldukları görülür. Ayrıca her $x\in B_{r_0}$ için

$$
\begin{aligned}
\left|(Tx)(t)\right| &= \left|(Fx)(t)(Gx)(t)\right|\\
&\leq \left(k_1b_1\left(r_0\right)+\frac{k_2b_2\left(r_0\right)C_1^{\beta_1}}{\beta_1}h_1\left(r_0,r_0,...,r_0\right)+\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}r_0+M\right)\times\\
&\quad\times\left(l_1b_3\left(r_0\right)+\frac{l_2b_4\left(r_0\right)C_2^{\beta_2}}{\beta_2}h_2\left(r_0,r_0,...,r_0\right)+\sum_{i=1}^{m_2}l_{i+2}r_0+N\right)\\
&\leq r_0
\end{aligned}
$$

olduğu göz önüne alınırsa, $(5.4),(5.5)$ ve (5.2) eşitsizliklerinden, $T:B_{r_0}\to B_{r_0}$ olduğu anlaşılır.

2. Adım: T_1 ve T_2 operatörleri sürekli olduklarından, herhangi bir $x_0\in B_{r_0}$ elemanına ve $\varepsilon>0$ sayısına karşılık, $\|x-x_0\|\leq\delta_1(\varepsilon,x_0)$ olan her $x\in B_{r_0}$ için $\|T_1x-T_1x_0\|\leq\varepsilon$ ve $\|x-x_0\|\leq\delta_2(\varepsilon,x_0)$ olan her $x\in B_{r_0}$ için $\|T_2x-T_2x_0\|\leq\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta_1(\varepsilon,x_0)<\varepsilon$ ve $\delta_2(\varepsilon,x_0)<\varepsilon$ sayıları bulunabilir. Benzer olarak T_3 ve T_4 operatörleri de sürekli olduklarından, herhangi bir $x_0\in B_{r_0}$ elemanına ve $\varepsilon>0$ sayısına karşılık, $\|x-x_0\|\leq\delta_3(\varepsilon,x_0)$ olan her $x\in B_{r_0}$ için $\|T_3x-T_3x_0\|\leq\varepsilon$ ve $\|x-x_0\|\leq\delta_4(\varepsilon,x_0)$ olan her $x\in B_{r_0}$ için $\|T_4x-T_4x_0\|\leq\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta_3(\varepsilon,x_0)<\varepsilon$ ve $\delta_4(\varepsilon,x_0)<\varepsilon$ sayıları bulunabilir.

Böylece $\delta(\varepsilon,x_0)=\min\left\{\delta_1(\varepsilon,x_0),\ \delta_2(\varepsilon,x_0),\delta_3(\varepsilon,x_0),\ \delta_4(\varepsilon,x_0)\right\}$ olarak seçilirse,

$$R=\left[-r_0,r_0\right],$$

$$
\begin{aligned}
\omega_{u_{n_1}}(I,\varepsilon) &= \sup\left\{\left|u(t,\tau,x_1,...,x_{n_1})-u(t,\tau,y_1,...,y_{n_1})\right|:t\in I,\ \tau\in\left[0,C_1\right],\right.\\
&\qquad \left. x_i,\ y_i\in R,\ 1\leq i\leq n_1 \text{ ve } \left|x_i-y_i\right|\leq\varepsilon\right\},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}\omega_{v_{n_2}}(I,\varepsilon) &= \sup\{|v(t,\tau,x_1,...,x_{n_2})-v(t,\tau,y_1,...,y_{n_2})| : t\in I,\ \tau\in[0,C_2],\\ &\qquad x_i,\ y_i\in R,\ 1\le i\le n_2 \text{ ve } |x_i-y_i|\le\varepsilon\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}U &= \sup\{|u(t,\tau,x_1,...,x_{n_1})| : t\in I,\ \tau\in[0,C_1],\ x_i\in R,\ 1\le i\le n_1\},\\ V &= \sup\{|v(t,\tau,x_1,...,x_{n_2})| : t\in I,\ \tau\in[0,C_2],\ x_i\in R,\ 1\le i\le n_2\}\end{aligned}$$

olmak üzere, $\|x-x_0\|\le\delta(\varepsilon,x_0)$ olan her $x\in B_{r_0}$ için,

$$\begin{aligned}&|(Fx)(t)-(Fx_0)(t)|\\
=&\ \Bigg|f\left(t,(T_1x)(t),(T_2x)(t)\int_0^{\varphi_1(t)}H_1(t,t,x(\tau))\,d\tau,x(\alpha_1(t)),...,x(\alpha_{m_1}(t))\right)\\
&-f\left(t,(T_1x_0)(t),(T_2x_0)(t)\int_0^{\varphi_1(t)}H_1(t,t,x_0(\tau))\,d\tau,x_0(\alpha_1(t)),...,x_0(\alpha_{m_1}(t))\right)\Bigg|\\
\le&\ k_1|(T_1x)(t)-(T_1x_0)(t)|\\
&+k_2|(T_2x)(t)-(T_2x_0)(t)|\int_0^{\varphi_1(t)}|H_1(t,t,x(\tau))|\,d\tau\\
&+k_2|(T_2x_0)(t)|\int_0^{\varphi_1(t)}|H_1(t,t,x(\tau))-H_1(t,t,x_0(\tau))|\,d\tau\\
&+\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}|x(\alpha_i(t))-x_0(\alpha_i(t))|\\
\le&\ k_1\|T_1x-T_1x_0\|+k_2\|T_2x-T_2x_0\|\int_0^{\varphi_1(t)}\frac{U}{(\varphi_1(t)-\tau)^{1-\beta_1}}d\tau\\
&+k_2b_2(\|x_0\|)\int_0^{\varphi_1(t)}\frac{\omega_{u_{n_1}}(I,\delta(\varepsilon,x_0))}{(\varphi_1(t)-\tau)^{1-\beta_1}}d\tau+\left(\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}\right)\|x-x_0\|\\
\le&\ k_1\|T_1x-T_1x_0\|+\frac{k_2\|T_2x-T_2x_0\|UC_1^{\beta_1}}{\beta_1}\\
&+\frac{k_2b_2(\|x_0\|)C_1^{\beta_1}}{\beta_1}\omega_{u_{n_1}}(I,\delta(\varepsilon,x_0))+\left(\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}\right)\delta(\varepsilon,x_0)\\
\le&\ k_1\varepsilon+\frac{k_2\varepsilon UC_1^{\beta_1}}{\beta_1}+\frac{k_2b_2(r_0)C_1^{\beta_1}}{\beta_1}\omega_{u_{n_1}}(I,\varepsilon)+\left(\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}\right)\varepsilon\end{aligned}\tag{5.6}$$

yazılabilir. Diğer taraftan $u=u(t,\tau,x_1,...,x_{n_1})$ fonksiyonunun $I\times[0,C_1]\times R^{n_1}$ cümlesi üzerinde düzgün sürekli olmasından, $\varepsilon\to0$ için $\omega_{u_{n_1}}(I,\varepsilon)\to0$ elde edilir. Bu durum (5.6) eşitsizliği ile birlikte düşünüldüğünde F operatörünün B_{r_0} yuvarında sürekli olduğu sonucuna ulaşılır.

Benzer olarak,

$$\begin{aligned}
& |(Gx)(t)-(Gx_0)(t)| \\
= & \left| g\left(t,(T_3x)(t),(T_4x)(t)\int_0^{\varphi_2(t)} H_2(t,t,x(\tau))\,d\tau, x(\phi_1(t)),...,x(\phi_{m_2}(t))\right)\right. \\
& \left. -\,g\left(t,(T_3x_0)(t),(T_4x_0)(t)\int_0^{\varphi_2(t)} H_2(t,t,x_0(\tau))\,d\tau, x_0(\phi_1(t)),...,x_0(\phi_{m_2}(t))\right)\right| \\
\leq & \; l_1|(T_3x)(t)-(T_3x_0)(t)| + l_2|(T_4x)(t)-(T_4x_0)(t)|\int_0^{\varphi_2(t)} |H_2(t,t,x(\tau))|\,d\tau \\
& + l_2|(T_4x_0)(t)|\int_0^{\varphi_2(t)} |H_2(t,t,x(\tau))-H_2(t,t,x_0(\tau))|\,d\tau \\
& + \sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2}|x(\phi_i(t))-x_0(\phi_i(t))| \\
\leq & \; l_1\|T_3x-T_3x_0\| + l_2\|T_2x-T_2x_0\|\int_0^{\varphi_2(t)} \frac{V}{(\varphi_2(t)-\tau)^{1-\beta_2}}\,d\tau \\
& + l_2b_4(\|x_0\|)\int_0^{\varphi_2(t)} \frac{\omega_{v_{n_2}}(I,\delta(\varepsilon,x_0))}{(\varphi_2(t)-\tau)^{1-\beta_2}}\,d\tau + \left(\sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2}\right)\|x-x_0\| \\
\leq & \; l_1\|T_1x-T_1x_0\| + \frac{l_2\|T_2x-T_2x_0\|VC_2^{\beta_2}}{\beta_2} \\
& + \frac{l_2b_4(\|x_0\|)C_2^{\beta_2}}{\beta_2}\omega_{v_{n_2}}(I,\delta(\varepsilon,x_0)) + \left(\sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2}\right)\delta(\varepsilon,x_0) \\
\leq & \; l_1\varepsilon + \frac{l_2\varepsilon VC_2^{\beta_2}}{\beta_2} + \frac{l_2b_4(r_0)C_2^{\beta_2}}{\beta_2}\omega_{v_{n_2}}(I,\varepsilon) + \left(\sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2}\right)\varepsilon
\end{aligned} \tag{5.7}$$

elde edilir. Ayrıca $v=v(t,\tau,x_1,...,x_{n_2})$ fonksiyonunun $I\times[0,C_2]\times R^{n_2}$ cümlesi üzerinde düzgün sürekliliği $\varepsilon\to 0$ için $\omega_{v_{n_2}}(I,\varepsilon)\to 0$ olmasını gerektirir. Böylece (5.7) eşitsizliğinden G operatörünün B_{r_0} yuvarında sürekli olduğu görülür.

3. Adım: B_{r_0} yuvarının boş olmayan herhangi bir X alt cümlesi verilsin. Genelliği bozmayacağından $\varphi_1(t_2)\leq\varphi_1(t_1)$ kabul edilmek üzere, herhangi bir $x\in X$, $\varepsilon>0$ ve $|t_1-t_2|\leq\varepsilon$ olan her $t_1,t_2\in I$ için,

$$\begin{aligned}
& |(Fx)(t_1)-(Fx)(t_2)| \\
= & \left| f\left(t_1,(T_1x)(t_1),(T_2x)(t_1)\int_0^{\varphi_1(t_1)} H_1(t_1,t_1,x(\tau))\,d\tau, x(\alpha_1(t_1)),...,x(\alpha_{m_1}(t_1))\right)\right. \\
& \left. -f\left(t_2,(T_1x)(t_2),(T_2x)(t_2)\int_0^{\varphi_1(t_2)} H_1(t_2,t_2,x(\tau))\,d\tau, x(\alpha_1(t_2)),...,x(\alpha_{m_1}(t_2))\right)\right| \\
\leq & \left| f\left(t_1,(T_1x)(t_1),(T_2x)(t_1)\int_0^{\varphi_1(t_1)} H_1(t_1,t_1,x(\tau))\,d\tau, x(\alpha_1(t_1)),...,x(\alpha_{m_1}(t_1))\right)\right.
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&-f\left(t_1,(T_1x)(t_2),(T_2x)(t_2)\int_0^{\varphi_1(t_2)}H_1(t_2,t_2,x(\tau))\,d\tau,x(\alpha_1(t_2)),...,x(\alpha_{m_1}(t_2))\right)\Bigg|\\
&+\Bigg|f\left(t_1,(T_1x)(t_2),(T_2x)(t_2)\int_0^{\varphi_1(t_2)}H_1(t_2,t_2,x(\tau))\,d\tau,x(\alpha_1(t_2)),...,x(\alpha_{m_1}(t_2))\right)\\
&-f\left(t_2,(T_1x)(t_2),(T_2x)(t_2)\int_0^{\varphi_1(t_2)}H_1(t_2,t_2,x(\tau))\,d\tau,x(\alpha_1(t_2)),...,x(\alpha_{m_1}(t_2))\right)\Bigg|\\
\leq\;& k_1\left|(T_1x)(t_1)-(T_1x)(t_2)\right|\\
&+k_2\left|(T_2x)(t_1)\int_0^{\varphi_1(t_1)}H_1(t_1,t_1,x(\tau))\,d\tau-(T_2x)(t_2)\int_0^{\varphi_1(t_2)}H_1(t_2,t_2,x(\tau))\,d\tau\right|\\
&+\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}\left|x(\alpha_i(t_1))-x(\alpha_i(t_2))\right|+\omega_f(I,\varepsilon)\\
\leq\;& k_1\left|(T_1x)(t_1)-(T_1x)(t_2)\right|\\
&+k_2\left|(T_2x)(t_1)\right|\int_0^{\varphi_1(t_1)}\left|H_1(t_1,t_1,x(\tau))-H_1(t_2,t_1,x(\tau))\right|d\tau\\
&+k_2\left|(T_2x)(t_1)\right|\int_0^{\varphi_1(t_2)}\left|H_1(t_2,t_1,x(\tau))-H_1(t_2,t_2,x(\tau))\right|d\tau\\
&+k_2\left|(T_2x)(t_1)-(T_2x)(t_2)\right|\int_0^{\varphi_1(t_2)}\left|H_1(t_2,t_2,x(\tau))\right|d\tau\\
&+k_2\left|(T_2x)(t_1)\right|\int_{\varphi_1(t_2)}^{\varphi_1(t_1)}\left|H_1(t_2,t_1,x(\tau))\right|d\tau\\
&+\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}\left|x(\alpha_i(t_1))-x(\alpha_i(t_2))\right|+\omega_f(I,\varepsilon)\\
\leq\;& k_1\left|(T_1x)(t_1)-(T_1x)(t_2)\right|\\
&+k_2\left|(T_2x)(t_1)\right|\left(\omega_{u_1}(I,\varepsilon)\int_0^{\varphi_1(t_1)}\frac{d\tau}{(\varphi_1(t_1)-\tau)^{1-\beta_1}}\right)+k_2\left|(T_2x)(t_1)\right|\times\\
&\times\left(\int_0^{\varphi_1(t_2)}\left|u(t_2,\tau,x(\gamma_1(\tau)),...,x(\gamma_{n_1}(\tau)))\right|\left(\frac{1}{(\varphi_1(t_2)-\tau)^{1-\beta_1}}-\frac{1}{(\varphi_1(t_1)-\tau)^{1-\beta_1}}\right)d\tau\right)\\
&+k_2\left|(T_2x)(t_1)-(T_2x)(t_2)\right|\int_0^{\varphi_1(t_2)}\left|H_1(t_2,t_2,x(\tau))\right|d\tau\\
&+k_2\left|(T_2x)(t_1)\right|\int_{\varphi_1(t_2)}^{\varphi_1(t_1)}\left|H_1(t_2,t_1,x(\tau))\right|d\tau+\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}\left|x(\alpha_i(t_1))-x(\alpha_i(t_2))\right|\\
&+\omega_f(I,\varepsilon)\\
\leq\;& k_1\left|(T_1x)(t_1)-(T_1x)(t_2)\right|\\
&+k_2b_2(\|x\|)\left(\omega_{u_1}(I,\varepsilon)\frac{C_1^{\beta_1}}{\beta_1}+U\frac{[\varphi_1(t_1)-\varphi_1(t_2)]^{\beta_1}-\left([\varphi_1(t_1)]^{\beta_1}-[\varphi_1(t_2)]^{\beta_1}\right)}{\beta_1}\right)\\
&+k_2\left|(T_2x)(t_1)-(T_2x)(t_2)\right|\frac{UC_1^{\beta_1}}{\beta_1}+k_2b_2(\|x\|)\,U\frac{[\varphi_1(t_1)-\varphi_1(t_2)]^{\beta_1}}{\beta_1}\\
&+\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}\omega(x,\omega(\alpha_i,\varepsilon))+\omega_f(I,\varepsilon)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
&\leq \quad k_1\omega(T_1x,\varepsilon)+k_2b_2\left(r_0\right)\left(\omega_{u_1}(I,\varepsilon)\frac{C_1^{\beta_1}}{\beta_1}+U\frac{[\omega(\varphi_1,\varepsilon)]^{\beta_1}}{\beta_1}\right)\\
&\quad +\frac{k_2UC_1^{\beta_1}}{\beta_1}\omega(T_2x,\varepsilon)+k_2b_2\left(r_0\right)U\frac{[\omega(\varphi_1,\varepsilon)]^{\beta_1}}{\beta_1}\\
&\quad +\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}\omega(x,\omega\left(\alpha_i,\varepsilon\right))+\omega_f(I,\varepsilon) \qquad (5.8)
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}
\omega_{u_1}(I,\varepsilon) &= \sup\left\{|u(t_1,\tau,x_1,...,x_{n_1})-u(t_2,\tau,x_1,...,x_{n_1})| : t_1,t_2\in I,\ \tau\in[0,C_1]\right.,\\
&\qquad \left. x_\xi\in R,\ 1\leq\xi\leq n_1 \text{ ve } |t_1-t_2|\leq\varepsilon\right\},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\omega_f(I,\varepsilon) &= \sup\left\{|f(t_1,x_1,...,x_{m_1+2})-f(t_2,x_1,...,x_{m_1+2})| : t_1,t_1\in I,\ x_1\in B_1,\right.\\
&\qquad \left. x_2\in B_2,\ x_i\in R,\ 3\leq i\leq m_1+2 \text{ ve } |t_1-t_2|\leq\varepsilon\right\}
\end{aligned}$$

ve

$$B_1=[-b_1(r_0),b_1(r_0)]\,,\ B_2=\left[-\frac{b_2\left(r_0\right)UC_1^{\beta_1}}{\beta_1},\frac{b_2\left(r_0\right)UC_1^{\beta_1}}{\beta_1}\right]$$

dir. Ayrıca, $1\leq i\leq m_1$ için, $\omega(\alpha_i,\varepsilon)$ ve $\omega(\varphi,\varepsilon)$ fonksiyonları,

$$\omega(\alpha_i,\varepsilon)=\sup\left\{|\alpha_i(t_1)-\alpha_i(t_2)| : t_1,t_2\in I \text{ ve } |t_1-t_2|\leq\varepsilon\right\}$$

ve

$$\omega(\varphi,\varepsilon)=\sup\left\{|\varphi(t_1)-\varphi(t_2)| : t_1,t_2\in I \text{ ve } |t_1-t_2|\leq\varepsilon\right\}$$

şeklinde tanımlıdır. Böylece (5.8) eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}
\omega(FX,\varepsilon) &\leq k_1\omega(T_1X,\varepsilon)+k_2b_2\left(r_0\right)\left(\omega_{u_1}(I,\varepsilon)\frac{C_1^{\beta_1}}{\beta_1}+2U\frac{[\omega(\varphi,\varepsilon)]^{\beta_1}}{\beta_1}\right)\\
&\quad +\frac{k_2UC_1^{\beta_1}}{\beta_1}\omega(T_2X,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{m}k_{i+2}\omega(X,\omega\left(\alpha_i,\varepsilon\right))+\omega_f(I,\varepsilon) \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

yazılabilir.

Diğer taraftan, α_i ve φ fonksiyonlarının I üzerinde düzgün sürekliliğinden, $\varepsilon\to 0$ için, $\omega(\alpha_i,\varepsilon)\to 0$ ve $\omega(\varphi,\varepsilon)\to 0$ elde edilir. Benzer olarak f fonksiyonunun $I\times B_1\times B_2\times R^{m_1}$ üzerinde, u fonksiyonunun ise $I\times[0,C_1]\times R^{n_1}$ üzerindeki düzgün süreklilikleri göz önüne alınırsa $\varepsilon\to 0$ için, $\omega_f(I,\varepsilon)\to 0$ ve $\omega_{u_1}(I,\varepsilon)\to 0$ olur.

Böylece, $(\mathbf{a}_5)$ kabulünden ve (5.9) eşitsizliğinden,

$$\omega_0(FX)\leq\left(k_1q_1+\frac{k_2q_2UC_1^{\beta_1}}{\beta_1}+\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}\right)\omega_0(X) \qquad (5.10)$$

elde edilir.

Benzer olarak, $\varphi_2(t_2) \leq \varphi_2(t_1)$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
& \left|(Gx)(t_1) - (Gx)(t_2)\right| \\
= & \left| g\left(t_1, (T_3x)(t_1), (T_4x)(t_1) \int_0^{\varphi_2(t_1)} H_2(t_1, t_1, x(\tau))\, d\tau, x(\phi_1(t_1)), ..., x(\phi_{m_2}(t_1))\right)\right. \\
& \left. -g\left(t_2, (T_3x)(t_2), (T_4x)(t_2) \int_0^{\varphi_2(t_2)} H_2(t_2, t_2, x(\tau))\, d\tau, x(\phi_1(t_2)), ..., x(\phi_{m_2}(t_2))\right)\right| \\
\leq & \left| g\left(t_1, (T_3x)(t_1), (T_4x)(t_1) \int_0^{\varphi_2(t_1)} H_2(t_1, t_1, x(\tau))\, d\tau, x(\phi_1(t_1)), ..., x(\phi_{m_2}(t_1))\right)\right. \\
& \left. -g\left(t_1, (T_3x)(t_2), (T_4x)(t_2) \int_0^{\varphi_2(t_2)} H_2(t_2, t_2, x(\tau))\, d\tau, x(\phi_1(t_2)), ..., x(\phi_{m_2}(t_2))\right)\right| \\
& + \left| g\left(t_1, (T_3x)(t_2), (T_4x)(t_2) \int_0^{\varphi_2(t_2)} H_2(t_2, t_2, x(\tau))\, d\tau, x(\phi_1(t_2)), ..., x(\phi_{m_2}(t_2))\right)\right. \\
& \left. -g\left(t_2, (T_3x)(t_2), (T_4x)(t_2) \int_0^{\varphi_2(t_2)} H_2(t_2, t_2, x(\tau))\, d\tau, x(\phi_1(t_2)), ..., x(\phi_{m_2}(t_2))\right)\right| \\
\leq & \; l_1 \left|(T_3x)(t_1) - (T_3x)(t_2)\right| \\
& + l_2 \left|(T_4x)(t_1) \int_0^{\varphi_2(t_1)} H_2(t_2, t_2, x(\tau))\, d\tau - (T_4x)(t_2) \int_0^{\varphi_2(t_2)} H_2(t_2, t_2, x(\tau))\, d\tau\right| \\
& + \sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2} \left|x(\phi_i(t_1)) - x(\phi_i(t_2))\right| + \omega_g(I, \varepsilon) \\
\leq & \; l_1 \left|(T_3x)(t_1) - (T_3x)(t_2)\right| \\
& + l_2 \left|(T_4x)(t_1)\right| \int_0^{\varphi_2(t_1)} \left|H_2(t_1, t_1, x(\tau)) - H_2(t_2, t_1, x(\tau))\right| d\tau \\
& + l_2 \left|(T_4x)(t_1)\right| \int_0^{\varphi_2(t_2)} \left|H_2(t_2, t_1, x(\tau)) - H_2(t_2, t_2, x(\tau))\right| d\tau \\
& + l_2 \left|(T_4x)(t_1) - (T_4x)(t_2)\right| \int_0^{\varphi_2(t_2)} \left|H_2(t_2, t_2, x(\tau))\right| d\tau \\
& + l_2 \left|(T_4x)(t_1)\right| \int_{\varphi_2(t_2)}^{\varphi_2(t_1)} \left|H_2(t_2, t_1, x(\tau))\right| d\tau \\
& + \sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2} \left|x(\phi_i(t_1)) - x(\phi_i(t_2))\right| + \omega_g(I, \varepsilon) \\
\leq & \; l_1 \left|(T_3x)(t_1) - (T_3x)(t_2)\right| \\
& + l_2 \left|(T_4x)(t_1)\right| \left(\omega_{v_1}(I, \varepsilon) \int_0^{\varphi_2(t_1)} \frac{d\tau}{(\varphi_2(t_1) - \tau)^{1-\beta_2}}\right) + l_2 \left|(T_4x)(t_1)\right| \times \\
& \times \left(\int_0^{\varphi_2(t_2)} \left|v(t_2, \tau, x(\eta_1(\tau)), ..., x(\eta_{n_2}(\tau)))\right| \left(\frac{1}{(\varphi_2(t_2) - \tau)^{1-\beta_2}} - \frac{1}{(\varphi_2(t_1) - \tau)^{1-\beta_2}}\right) d\tau\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
& +l_2 \left|(T_4 x)(t_1) - (T_4 x)(t_2)\right| \int_0^{\varphi_2(t_2)} \left|H_2(t_2, t_2, x(\tau))\right| d\tau \\
& +l_2 \left|(T_4 x)(t_1)\right| \int_{\varphi_2(t_2)}^{\varphi_2(t_1)} \left|H_2(t_2, t_1, x(\tau))\right| d\tau \\
& +\sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2} \left|x(\phi_i(t_1)) - x(\phi_i(t_2))\right| + \omega_g(I, \varepsilon) \\
\leq\ & l_1 \left|(T_3 x)(t_1) - (T_3 x)(t_2)\right| + l_2 b_4(\|x\|)\, \omega_{v_1}(I, \varepsilon) \frac{C_2^{\beta_2}}{\beta_2} \\
& +l_2 b_4(\|x\|)\, V \frac{[\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_2)]^{\beta_2} - \left([\varphi_2(t_1)]^{\beta_2} - [\varphi_2(t_2)]^{\beta_2}\right)}{\beta_2} \\
& +l_2 \left|(T_4 x)(t_1) - (T_4 x)(t_2)\right| \frac{V C_2^{\beta_2}}{\beta_2} \\
& +l_2 b_4(\|x\|)\, V \frac{[\varphi_2(t_1) - \varphi_2(t_2)]^{\beta_2}}{\beta_2} + \sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2} \omega(x, \omega(\phi_i, \varepsilon)) + \omega_g(I, \varepsilon) \\
\leq\ & l_1 \omega(T_3 x, \varepsilon) + l_2 b_4(r_0)\, \omega_{v_1}(I, \varepsilon) \frac{C_2^{\beta_2}}{\beta_2} + l_2 b_4(r_0)\, V \frac{[\omega(\varphi_2, \varepsilon)]^{\beta_2}}{\beta_2} \\
& + \frac{V C_2^{\beta_2} l_2}{\beta_2} \omega(T_4 x, \varepsilon) + l_2 b_4(r_0)\, V \frac{[\omega(\varphi_2, \varepsilon)]^{\beta_2}}{\beta_2} \\
& +\sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2} \omega(x, \omega(\phi_i, \varepsilon)) + \omega_g(I, \varepsilon) \qquad (5.11)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Burada,

$$
\begin{aligned}
\omega_{v_1}(I, \varepsilon) &= \sup\left\{|v(t_1, \tau, x_1, ..., x_{n_2}) - v(t_2, \tau, x_1, ..., x_{n_2})| : t_1, t_2 \in I,\ \tau \in [0, C_2]\,,\right. \\
&\qquad \left. x_\xi \in R,\ 1 \leq \xi \leq n_2 \text{ ve } |t_1 - t_2| \leq \varepsilon\right\},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\omega_g(I, \varepsilon) &= \sup\left\{|g(t_1, x_1, ..., x_{m_2+2}) - f(t_2, x_1, ..., x_{m_2+2})| : t_1, t_2 \in I,\ x_1 \in B_3,\right. \\
&\qquad \left. x_2 \in B_4,\ x_i \in R,\ 3 \leq i \leq m_2 + 2 \text{ ve } |t_1 - t_2| \leq \varepsilon\right\},
\end{aligned}
$$

ve

$$
B_3 = [-b_3(r_0), b_3(r_0)]\,,\ B_4 = \left[-\frac{b_4(r_0)\, V C_2^{\beta_2}}{\beta_2}, \frac{b_4(r_0)\, V C_2^{\beta_2}}{\beta_2}\right]
$$

dir. Ayrıca, $1 \leq i \leq m_2$ için, $\omega(\phi_i, \varepsilon)$ ve $\omega(\varphi, \varepsilon)$ fonksiyonları,

$$
\omega(\phi_i, \varepsilon) = \sup\left\{|\phi_i(t_1) - \phi_i(t_2)| : t_1, t_2 \in I \text{ ve } |t_1 - t_2| \leq \varepsilon\right\}
$$

ve

$$
\omega(\varphi, \varepsilon) = \sup\left\{|\varphi(t_1) - \varphi(t_2)| : t_1, t_2 \in I \text{ ve } |t_1 - t_2| \leq \varepsilon\right\}
$$

eşitlikleri ile tanımlıdır. Böylece (5.11) eşitsizliği kullanılarak,

$$\begin{aligned}\omega(GX,\varepsilon) &\leq l_1\omega(T_3X,\varepsilon)+l_2b_4\left(r_0\right)\left(\omega_{v_1}(I,\varepsilon)\frac{C_2^{\beta_2}}{\beta_2}+2V\frac{[\omega(\varphi_2,\varepsilon)]^{\beta_2}}{\beta_2}\right)\\ &\quad +\frac{l_2VC_2^{\beta_2}}{\beta_2}\omega(T_4X,\varepsilon)+\sum_{i=1}^{m_2}l_{i+2}\omega(X,\omega\left(\phi_i,\varepsilon\right))+\omega_g(I,\varepsilon) \qquad (5.12)\end{aligned}$$

yazılabilir.

Diğer taraftan, ϕ_i ve φ I üzerinde düzgün sürekli olduğundan $\varepsilon \to 0$ için, $\omega(\phi_i,\varepsilon)\to 0$ ve $\omega(\varphi,\varepsilon)\to 0$ elde edilir. Benzer olarak g fonksiyonunun $I\times B_3\times B_4\times R^{m_2}$ üzerinde, v fonksiyonunun ise $I\times[0,C_2]\times R^{n_2}$ üzerindeki düzgün sürekliliği göz önüne alınırsa $\varepsilon\to 0$ için $\omega_g(I,\varepsilon)\to 0$ ve $\omega_{v_1}(I,\varepsilon)\to 0$ olur.

Böylece, (5.12) eşitsizliğinden ve ($\mathbf{a}_5$) kabulünden,

$$\omega_0(GX)\leq\left(l_1q_3+\frac{l_2q_4VC_2^{\beta_2}}{\beta_2}+\sum_{i=1}^{m_2}l_{i+2}\right)\omega_0(X) \qquad (5.13)$$

eşitsizliği elde edilir.

Ayrıca, (5.4) , (5.5) , (5.10) , (5.13) ve (5.3) eşitsizliklerinden,

$$\|F(B_{r_0})\|\left(l_1q_3+\frac{VC_2^{\beta_2}k_2q_4}{\beta_2}+\sum_{i=1}^{m_2}l_{i+2}\right)+\|G(B_{r_0})\|\left(k_1q_1+\frac{UC_1^{\beta_1}k_2q_2}{\beta_1}+\sum_{i=1}^{m_1}k_{i+2}\right)<1$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 5.1 gereğince T dönüşümü B_{r_0} yuvarı üzerinde bir daralma dönüşümüdür ve bu yuvarda en az bir sabit noktaya sahiptir.

Sonuç olarak (5.1) denkleminin $C\left(I\right)$ Banach cebirinde, B_{r_0} yuvarında olan, en az bir çözümü vardır. ■

$BC\left(\mathbb{R}_+\right)$ Banach cebirinde (5.1) denklemi aşağıdaki kabuller altında incelenecektir.

($\mathbf{a}_1$) $1\leq i\leq m_1$, $1\leq j\leq n_1$, $1\leq\lambda\leq n_2$, $1\leq\xi\leq m_2$ ve $1\leq p\leq 2$ olmak üzere, α_i, γ_j, η_λ, ϕ_ξ, $\varphi_p:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonları süreklidir. Ayrıca $t\to\infty$ için $\alpha_i\left(t\right)\to\infty$ ve $\phi_\xi\left(t\right)\to\infty$ dur.

($\mathbf{a}_2$) $f\left(t,0,...,0\right)$ ve $g\left(t,0,...,0\right)$, $\mathbb{R}_+$ üzerinde sınırlı olmak üzere, $f:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{m_1+2}\to\mathbb{R}$ ve $g:\mathbb{R}_+\times\mathbb{R}^{m_2+2}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları süreklidir. Ayrıca $1\leq i\leq m_1+2$ ve $1\leq j\leq m_2+2$ olmak üzere, her $t\in\mathbb{R}_+$ ve $x_i,x_j,y_i,y_j\in\mathbb{R}$ için

$$|f(t,x_1,x_2,...,x_{m_1+2})-f(t,y_1,y_2,...,y_{m_1+2})|\leq\sum_{i=1}^{m_1+2}k_i\left|x_i-y_i\right|$$

ve

$$|g(t,x_1,x_2,...,x_{m_2+2})-f(t,y_1,y_2,...,y_{m_2+2})|\leq\sum_{j=1}^{m_2+2}l_j\left|x_j-y_j\right|$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde negatif olmayan k_i ve l_j sabitleri mevcuttur.

$(\mathbf{a}_3)$ $u:\mathbb{R}_+^2\times\mathbb{R}^{n_1}\to\mathbb{R}$ ve $v:\mathbb{R}_+^2\times\mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları süreklidir.

$1\leq i\leq n_1$ ve $1\leq j\leq n_2$ olmak üzere, her $t,\tau\in\mathbb{R}_+$ ve $x_i,y_j\in\mathbb{R}$ için

$$|u(t,\tau,x_1,x_2,...,x_{n_1})|\leq p_1\left(t,\tau\right)+\sigma_1\left(t\right)\rho_1\left(\tau\right)h_1(\left|x_1\right|,\left|x_2\right|,...,\left|x_{n_1}\right|)$$

ve

$$|v(t,\tau,y_1,y_2,...,y_{n_2})|\leq p_2\left(t,\tau\right)+\sigma_2\left(t\right)\rho_2\left(\tau\right)h_2(\left|y_1\right|,\left|y_2\right|,...,\left|y_{n_2}\right|)$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde herbir değişkenine göre azalmayan $h_1:\mathbb{R}_+^{n_1}\to\mathbb{R}_+$ ve $h_2:\mathbb{R}_+^{n_2}\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonları ile, sürekli $p_1,p_2:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}_+$ ve $\rho_1,\sigma_1,\rho_2,\sigma_2:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonları mevcuttur. Ayrıca

$$U_1(t)=\int_0^{\varphi_1(t)}\frac{p_1\left(t,\tau\right)}{(\varphi_1(t)-\tau)^{1-\beta_1}}d\tau,\ U_2\left(t\right)=\sigma_1\left(t\right)\int_0^{\varphi_1(t)}\frac{\rho_1\left(\tau\right)}{(\varphi_1(t)-\tau)^{1-\beta_1}}d\tau$$

ve

$$V_1(t)=\int_0^{\varphi_2(t)}\frac{p_2\left(t,\tau\right)}{(\varphi_2(t)-\tau)^{1-\beta_2}}d\tau,\ V_2\left(t\right)=\sigma_2\left(t\right)\int_0^{\varphi_2(t)}\frac{\rho_2\left(\tau\right)}{(\varphi_2(t)-\tau)^{1-\beta_2}}d\tau$$

olmak üzere,

$$\lim_{t\to\infty}U_1(t)=\lim_{t\to\infty}U_2(t)=\lim_{t\to\infty}V_1(t)=\lim_{t\to\infty}V_2(t)=0$$

dır.

$(\mathbf{a}_4)$ T_1, T_2, T_3, $T_4:BC\left(\mathbb{R}_+\right)\to BC\left(\mathbb{R}_+\right)$ operatörleri süreklidir. Ayrıca her $x\in BC\left(\mathbb{R}_+\right)$ ve her $t\in\mathbb{R}_+$ için

$$|(T_1x)(t)|\leq b_1(\|x\|),\ \ |(T_2x)(t)|\leq b_2(\|x\|)$$

ve

$$|(T_3x)(t)|\leq b_3(\|x\|),\ \ |(T_4x)(t)|\leq b_4(\|x\|)$$

eşitsizlikleri sağlanacak şekilde azalmayan b_1, b_2, b_3, $b_4:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonları mevcuttur.

($\mathbf{a}_5$) M, N, M_1, M_2, N_1 ve N_2, her $t \in I$ için $|f(t,0,...,0)| \leq M$, $|g(t,0,...,0)| \leq N$, $U_1(t) \leq M_1$, $U_2(t) \leq M_2$, $V_1(t) \leq N_1$ ve $V_2(t) \leq N_2$ olacak şekildeki negatif olmayan sayılar olmak üzere,

$$\begin{aligned}
&\left(k_1 b_1(r) + k_2 b_2(r)\left[M_1 + h_1(r,r,...,r) M_2\right] + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2} r + M\right) \times \\
&\times \left(l_1 b_3(r) + l_2 b_4(r)\left[N_1 + h_2(r,r,...,r) N_2\right] + \sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2} r + N\right) \\
\leq\ & r
\end{aligned} \tag{5.14}$$

eşitsizliğinin pozitif bir r_0 çözümü vardır. Ayrıca

$$\begin{aligned}
Q &= \|F(B_{r_0})\| \left(l_1 q_3 + l_2 q_4\left[N_1 + h_2(r_0,...,r_0) N_2\right] + \sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2}\right) + \\
&\quad \|G(B_{r_0})\| \left(k_1 q_1 + k_2 q_2\left[M_1 + h_1(r_0,...,r_0) M_2\right] + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2}\right) \\
&< 1
\end{aligned} \tag{5.15}$$

olmak üzere, T_1 ve T_3 operatörleri, B_{r_0} yuvarında, sırasıyla, q_1 ve q_3 katsayıları ile (2.1.6) eşitsizliği ile verilen μ kompaktsızlık ölçüsüne göre Darbo şartını sağlarlar ve ω_0 (2.1.5)'te verilen dönüşüm olmak üzere, T_2 ve T_4 operatörleri ise B_{r_0} yuvarının boş olmayan her X alt cümlesi için

$$\omega_0(T_2 X) \leq q_2 \omega_0(X) \text{ ve } \omega_0(T_4 X) \leq q_4 \omega_0(X)$$

eşitsizliklerini sağlarlar.

Teorem 5.3 ($\mathbf{a}_1$) $-$ ($\mathbf{a}_5$) *kabulleri altında* (5.1) *denkleminin* $BC(\mathbb{R}_+)$ *Banach cebirinde asimptotik kararlı olan en az bir çözümü vardır.*

İspat. Her $x = x(t) \in BC(\mathbb{R}_+)$ için

$$(Fx)(t) = f\left(t, (T_1 x)(t), (T_2 x)(t) \int_0^{\varphi_1(t)} H_1(t,t,x(\tau))\, d\tau, x(\alpha_1(t)), ..., x(\alpha_{m_1}(t))\right)$$

ve

$$(Gx)(t) = g\left(t, (T_3 x)(t), (T_4 x)(t) \int_0^{\varphi_2(t)} H_2(t,t,x(\tau))\, d\tau, x(\phi_1(t)), ..., x(\phi_{m_2}(t))\right)$$

olmak üzere, T operatörü,

$$(Tx)(t) = (Fx)(t)(Gx)(t)$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda ispat dört aşamadan oluşacaktır.

1. Adım: $(\mathbf{a}_1)-(\mathbf{a}_5)$ kabulleri gereği, her $x \in BC(\mathbb{R}_+)$ için Fx ve Gx fonksiyonları $\mathbb{R}_+$ üzerinde süreklidir. Ayrıca (4.4) eşitsizliğinden hareketle, her $x \in BC(\mathbb{R}_+)$ ve her $t \in \mathbb{R}_+$ için

$$\begin{aligned} |(Fx)(t)| &\leq k_1 b_1(\|x\|) + k_2 b_2(\|x\|)[M_1 + h_1(\|x\|, \|x\|, ..., \|x\|) M_2] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2}\|x\| + M \end{aligned} \tag{5.16}$$

ve benzer yol izlenerek

$$\begin{aligned} |(Gx)(t)| &\leq l_1 b_3(\|x\|) + l_2 b_4(\|x\|)[N_1 + h_2(\|x\|, \|x\|, ..., \|x\|) N_2] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2}\|x\| + N \end{aligned} \tag{5.17}$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece F, $G : BC(\mathbb{R}_+) \to BC(\mathbb{R}_+)$ olduğu sonucuna varılır. Özel olarak $x \in B_{r_0}$ alınırsa, (5.16) ve (5.17) eşitsizlikleri yardımıyla,

$$|(Fx)(t)| \leq k_1 b_1(r_0) + k_2 b_2(r_0)[M_1 + h_1(r_0, r_0, ..., r_0) M_2] + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2} r_0 + M \tag{5.18}$$

ve

$$|(Gx)(t)| \leq l_1 b_3(r_0) + l_2 b_4(r_0)[N_1 + h_2(r_0, r_0, ..., r_0) N_2] + \sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2} r_0 + N \tag{5.19}$$

yazılabilir. Böylece, $F(B_{r_0})$ ve $G(B_{r_0})$ cümleleri $BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında sınırlıdır. Ayrıca (5.14) eşitsizliği de kullanılarak her $x \in B_{r_0}$ için elde edilen

$$\begin{aligned} |(Tx)(t)| &= |(Fx)(t)(Gx)(t)| \\ &\leq \left(k_1 b_1(r_0) + \frac{k_2 b_2(r_0)}{\Gamma(\beta)}[M_1 + h_1(r_0, r_0, ..., r_0) M_2] + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2} r_0 + M\right) \times \\ &\quad \times \left(l_1 b_3(r_0) + \frac{l_2 b_4(r_0)}{\Gamma(\beta)}[N_1 + h_2(r_0, r_0, ..., r_0) N_2] + \sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2} r_0 + N\right) \\ &\leq r_0 \end{aligned}$$

eşitsizliği göz önüne alınırsa $T : B_{r_0} \to B_{r_0}$ sonucu elde edilir.

2. Adım: Teorem 4.1'in ispatından hatırlanacağı üzere, T_1 ve T_2 operatörleri sürekli olduklarından, herhangi bir $x_0 \in B_{r_0}$ elemanına ve $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| \leq \delta_1(\varepsilon, x_0)$ olan her $x \in B_{r_0}$ için $\|T_1 x - T_1 x_0\| \leq \varepsilon$ ve $\|x - x_0\| \leq \delta_2(\varepsilon, x_0)$ olan her $x \in B_{r_0}$ için $\|T_2 x - T_2 x_0\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta_1(\varepsilon, x_0) < \varepsilon$ ve $\delta_2(\varepsilon, x_0) < \varepsilon$ sayıları bulunabilir. Diğer taraftan, $\lim_{t\to\infty} U_1(t) = \lim_{t\to\infty} U_2(t) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa, $t > S_1(\varepsilon)$ olan her t için $U_1(t) \leq \varepsilon$ ve $t > S_2(\varepsilon)$ olan her t için $U_2(t) \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $S_1(\varepsilon)$ ve $S_2(\varepsilon)$ pozitif sayıları bulunabilir. Böylece $\delta(\varepsilon, x_0) = \min\{\delta_1(\varepsilon, x_0),\ \delta_2(\varepsilon, x_0)\}$ ve $S(\varepsilon)$ =maks$\{S_1(\varepsilon), S_2(\varepsilon)\}$ olarak seçilirse,

$$J_1 = [0, S(\varepsilon)],\ R = [-r_0, r_0],\ C_{(J_1,\varphi_1)} = \sup\{\varphi_1(t) : t \in J_1\},$$

$$\begin{aligned}\omega_{u_{n_1}}(J_1, \varepsilon) &= \sup\left\{|u(t, \tau, x_1, ..., x_{n_1}) - u(t, \tau, y_1, ..., y_{n_1})| : t \in J_1,\ \tau \in \left[0, C_{(J_1,\varphi_1)}\right],\right. \\ &\qquad \left. x_i,\ y_i \in R,\ 1 \leq i \leq n_1 \text{ ve } |x_i - y_i| \leq \varepsilon\right\}\end{aligned}$$

ve

$$U_{J_1} = \sup\left\{|u(t, \tau, x_1, ..., x_{n_1})| : t \in J_1,\ \tau \in \left[0, C_{(J_1,\varphi_1)}\right],\ x_i \in R,\ 1 \leq i \leq n_1\right\}$$

olmak üzere, $(\mathbf{a}_1) - (\mathbf{a}_5)$ kabulleri ışığında, $\|x - x_0\| \leq \delta(\varepsilon, x_0)$ olan her $x \in B_{r_0}$ ve $t \in J_1$ için,

$$|(Fx)(t) - (Fx_0)(t)| \leq k_1\varepsilon + \frac{k_2\varepsilon U_{J_1} C_1^{\beta_1}}{\beta_1} + \frac{k_2 b_2(r_0) C_1^{\beta_1}}{\beta_1}\omega_{u_{n_1}}(J_1, \varepsilon) + \left(\sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2}\right)\varepsilon$$

ve şu hâlde (4.7) eşitsizliğinin elde edilişinden hareketle $\|x - x_0\| \leq \delta(\varepsilon, x_0)$ olan her $x \in B_{r_0}$ ve $t > S(\varepsilon)$ olan her t için,

$$|(Fx)(t) - (Fx_0)(t)| \leq k_1\varepsilon + k_2(\varepsilon + 2b_2(r_0))(\varepsilon + h_1(r_0, r_0, ..., r_0)\varepsilon) + \left(\sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2}\right)\varepsilon$$

yazılabilir. Bu son iki eşitsizlik F operatörünün B_{r_0} yuvarında sürekli olduğu anlamına gelir.

Benzer olarak, T_3 ve T_4 operatörleri sürekli olduklarından, herhangi bir $x_0 \in B_{r_0}$ elemanına ve $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - x_0\| \leq \delta_3(\varepsilon, x_0)$ olan her $x \in B_{r_0}$ için $\|T_3x - T_3x_0\| \leq \varepsilon$ ve $\|x - x_0\| \leq \delta_4(\varepsilon, x_0)$ olan her $x \in B_{r_0}$ için $\|T_4x - T_4x_0\| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta_3(\varepsilon, x_0) < \varepsilon$ ve $\delta_4(\varepsilon, x_0) < \varepsilon$ sayıları bulunabilir. Diğer taraftan, $\lim_{t\to\infty} V_1(t) = \lim_{t\to\infty} V_2(t) = 0$ olduğu göz önüne alınırsa, $t > P_1(\varepsilon)$ olan her t için $V_1(t) \leq \varepsilon$ ve $t > P_2(\varepsilon)$ olan her t için $V_2(t) \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $P_1(\varepsilon)$ ve $P_2(\varepsilon)$ pozitif sayıları bulunabilir. Böylece $\delta(\varepsilon, x_0) = \min\{\delta_3(\varepsilon, x_0),\ \delta_4(\varepsilon, x_0)\}$ ve $P(\varepsilon)$ =maks$\{P_3(\varepsilon), P_4(\varepsilon)\}$ olarak seçilirse,

$$J_2 = [0, P(\varepsilon)],\ C_{(J_2,\varphi_2)} = \sup\{\varphi_2(t) : t \in J_2\},$$

$$\begin{aligned}\omega_{v_{n_2}}(J_2, \varepsilon) &= \sup\left\{|v(t, \tau, x_1, ..., x_{n_2}) - v(t, \tau, y_1, ..., y_{n_2})| : t \in J_2,\ \tau \in \left[0, C_{(J_2,\varphi_2)}\right],\right. \\ &\qquad \left. x_i,\ y_i \in R,\ 1 \leq i \leq n_2 \text{ ve } |x_i - y_i| \leq \varepsilon\right\}\end{aligned}$$

ve

$$V_{J_2} = \sup\left\{|v(t,\tau,x_1,...,x_{n_2})| : t \in J_2,\ \tau \in \left[0, C_{(J_2,\varphi_2)}\right],\ x_i \in R,\ 1 \le i \le n_2\right\}$$

olmak üzere, $(\mathbf{a}_1) - (\mathbf{a}_5)$ şartları altında, $\|x - x_0\| \le \delta(\varepsilon, x_0)$ olan her $x \in B_{r_0}$ ve $t \in J_2$ için,

$$|(Gx)(t) - (Gx_0)(t)| \le l_1\varepsilon + \frac{l_2 \varepsilon V_{J_2} C_2^{\beta_2}}{\beta_2} + \frac{l_2 b_4(r_0) C_2^{\beta_2}}{\beta_2}\omega_{v_{n_2}}(J_2,\varepsilon) + \left(\sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2}\right)\varepsilon$$

ve $\|x - x_0\| \le \delta(\varepsilon, x_0)$ olan her $x \in B_{r_0}$ ve $t > P(\varepsilon)$ olan her t için,

$$|(Gx)(t) - (Gx_0)(t)| \le l_1\varepsilon + l_2(\varepsilon + 2b_4(r_0))(\varepsilon + h_2(r_0, r_0, ..., r_0)\varepsilon) + \left(\sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2}\right)\varepsilon$$

yazılabilir. Böylece G operatörü de B_{r_0} yuvarında süreklidir.

3. Adım: B_{r_0} yuvarının boş olmayan herhangi bir X alt cümlesi verilsin. İspatın genelliğini bozmayacağından $\varphi_1(t_2) \le \varphi_1(t_1)$ olduğu kabul edilirse, Teorem 4.1'in ispatındaki gibi, herhangi bir $x \in X$, $\varepsilon > 0$, $S > 0$ ve $|t_1 - t_2| \le \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayan her $t_1, t_2 \in I_1 = [0, S]$ için,

$$\begin{aligned} & |(Fx)(t_1) - (Fx)(t_2)| \\ \le\ & k_1\omega^S(T_1x,\varepsilon) + k_2b_2(r_0)\left(\omega_{u_1}(I_1,\varepsilon)\frac{C_{(I_1,\varphi_1)}^{\beta_1}}{\beta_1} + U\frac{[\omega(\varphi_1,\varepsilon)]^{\beta_1}}{\beta_1}\right) \\ & + k_2\omega^S(T_2x,\varepsilon)\left[U_1(t_2) + h_1(r_0,...,r_0)U_2(t_2)\right] \\ & + k_2b_2(r_0)U\frac{[\omega(\varphi_1,\varepsilon)]^{\beta_1}}{\beta_1} + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2}\omega^S(x,\omega(\alpha_i,\varepsilon)) + \omega_f(I_1,\varepsilon) \end{aligned} \tag{5.20}$$

elde edilir. Burada, $C_{(I_1,\varphi_1)} = \sup\{\varphi_1(t) : t \in I_1\}$ olmak üzere,

$$U = \sup\left\{|u(t,\tau,x_1,...,x_{n_1})| : t \in I_1,\ \tau \in \left[0, C_{(I_1,\varphi_1)}\right]\ x_i \in R,\ 1 \le i \le n_1\right\}$$

ve

$$B_1 = [-b_1(r_0), b_1(r_0)],\ B_2 = \left[-\frac{b_2(r_0)UC_{(I_1,\varphi_1)}^{\beta_1}}{\beta_1}, \frac{b_2(r_0)UC_{(I_1,\varphi_1)}^{\beta_1}}{\beta_1}\right]$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \omega_{u_1}(I,\varepsilon) &= \sup\{|u(t_1,\tau,x_1,...,x_{n_1}) - u(t_2,\tau,x_1,...,x_{n_1})| : t_1,t_2 \in I_1, \\ &\qquad \tau \in \left[0, C_{(I_1,\varphi_1)}\right],\ x_\xi \in R,\ 1 \le \xi \le n_1 \text{ ve } |t_1 - t_2| \le \varepsilon\right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_f(I,\varepsilon) &= \sup\{|f(t_1,x_1,...,x_{m_1+2}) - f(t_2,x_1,...,x_{m_1+2})| : t_1,t_2 \in I_1,\ x_1 \in B_1, \\ &\qquad x_2 \in B_2,\ x_i \in R,\ 3 \le i \le m_1+2 \text{ ve } |t_1 - t_2| \le \varepsilon\} \end{aligned}$$

dur.

(5.20) eşitsizliğinde $x \in X$ elemanları üzerinden supremum alınır ve her $t \in I_1$ için $U_1(t) \leq M_1$ ve $U_2(t) \leq M_2$ olduğu kullanılırsa,

$$\begin{aligned}
&\omega(FX,\varepsilon) \\
\leq\ & k_1\omega^S(T_1X,\varepsilon) + k_2b_2(r_0)\left(\omega_{u_1}(I_1,\varepsilon)\frac{C^{\beta_1}_{(I_1,\varphi_1)}}{\beta_1} + U\frac{[\omega(\varphi_1,\varepsilon)]^{\beta_1}}{\beta_1}\right) \\
& + k_2\omega^S(T_2x,\varepsilon)[M_1 + h_1(r_0,...,r_0)M_2] + k_2b_2(r_0)U\frac{[\omega(\varphi_1,\varepsilon)]^{\beta_1}}{\beta_1} \\
& + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2}\omega^S(X,\omega(\alpha_i,\varepsilon)) + \omega_f(I_1,\varepsilon) \qquad (5.21)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$1 \leq i \leq m_1$ olmak üzere, α_i ve φ_1 fonksiyonlarının I_1 üzerindeki, f ve u fonksiyonlarının ise, sırasıyla, $I_1 \times B_1 \times B_2 \times R^{m_1}$ ve $I_1 \times \left[0, C_{(I_1,\varphi_1)}\right] \times R^{n_1}$ cümleleri üzerindeki düzgün sürekliliklerinden $\varepsilon \to 0$ için $\omega(\alpha_i,\varepsilon) \to 0$, $\omega(\varphi_1,\varepsilon) \to 0$, $\omega_f(I,\varepsilon) \to 0$ ve $\omega_{u_1}(I,\varepsilon) \to 0$ dir. Böylece (5.21) eşitsizliğinde $\varepsilon \to 0$ için limit alınırsa,

$$\begin{aligned}
\omega_0^S(FX) \leq\ & k_1\omega_0^S(T_1X) + k_2[M_1 + h_1(r_0,...,r_0)M_2]\omega_0^S(T_2X) \\
& + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2}\omega_0^S(X) \qquad (5.22)
\end{aligned}$$

ve (5.22)'de $S \to \infty$ için limit alınırak $(\mathbf{a}_5)$ kabulü hatırlanırsa,

$$\begin{aligned}
&\omega_0(FX) \\
\leq\ & k_1\omega_0(T_1X) + k_2[M_1 + h_1(r_0,...,r_0)M_2]\omega_0(T_2X) + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2}\omega_0(X) \\
\leq\ & k_1\omega_0(T_1X) + k_2q_2[M_1 + h_1(r_0,...,r_0)M_2]\omega_0(X) + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2}\omega_0(X) \qquad (5.23)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Diğer taraftan, Teorem 4.1'in ispatına benzer yol izlenerek,

$$\begin{aligned}
\text{diam}\,(FX)(t) \leq\ & k_1\text{diam}\,(T_1X)(t) \\
& + (k_2\text{diam}\,(T_2X)(t) + 2k_2b_2(r_0))[U_1(t) + h_1(r_0,...,r_0)U_2(t)] \\
& + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2}\text{diam}\,(X(\alpha_i(t)))
\end{aligned}$$

elde edilir. Daha sonra $(\mathbf{a}_1)$ ve $(\mathbf{a}_4)$ kabulleri de dikkate alınarak, bu son eşitsizlikten

$$\begin{aligned}
&\limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam}\,(FX)\,(t) \\
\leq\ & k_1 \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam}\,(T_1X)\,(t) + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2} \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam}\,(X\,(\alpha_i\,(t))) \\
=\ & k_1 \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam}\,(T_1X)\,(t) + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2} \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam} X\,(t) \qquad (5.24)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece (5.23) ve (5.24) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanarak,

$$\mu\,(FX) \leq \left(k_1q_1 + k_2q_2\,[M_1 + h_1\,(r_0,...,r_0)\,M_2] + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2}\right)\mu\,(X) \qquad (5.25)$$

elde edilir.

Benzer işlemler G operatörü için yapılırsa, B_{r_0} yuvarının boş olmayan herhangi bir X alt cümlesi çin,

$$\mu\,(GX) \leq \left(l_1q_3 + l_2q_4\,[N_1 + h_2\,(r_0,...,r_0)\,N_2] + \sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2}\right)\mu\,(X) \qquad (5.26)$$

sonucuna ulaşılır.

Böylece (5.18) , (5.19) , (5.25), (5.26) eşitsizlikleri ve Teorem 5.1'den, T dönüşümünün B_{r_0} yuvarı üzerinde μ kompaktsızlık ölçüsüne göre

$$\begin{aligned}
Q\ =\ & \|F(B_{r_0})\|\left(l_1q_3 + l_2q_4\,[N_1 + h_2\,(r_0,...,r_0)\,N_2] + \sum_{i=1}^{m_2} l_{i+2}\right) + \\
& \|G(B_{r_0})\|\left(k_1q_1 + k_2q_2\,[M_1 + h_1\,(r_0,...,r_0)\,M_2] + \sum_{i=1}^{m_1} k_{i+2}\right)
\end{aligned}$$

katsayısı ile Darbo şartını sağladığı görülür. Yani B_{r_0} yuvarının boş olmayan herhangi bir X alt cümlesi çin,

$$\mu\,(TX) \leq Q\mu\,(X) \qquad (5.27)$$

dir. Diğer taraftan (5.15) eşitsizliği gereği $Q < 1$ olduğu göz önüne alınırsa, T dönüşümünün B_{r_0} yuvarı üzerinde μ kompaktsızlık ölçüsüne göre bir daralma dönüşümü olduğu görülür. Böylece, T dönüşümü Teorem 5.1 gereğince B_{r_0} yuvarında en az bir sabit noktaya sahiptir. Sonuç olarak (5.1) denkleminin $BC\,(\mathbb{R}_+)$ Banach cebirinde, B_{r_0} yuvarında olan en az bir çözümü vardır.

Ayrıca (5.27) eşitsizliği B_{r_0} yuvarının boş olmayan her alt cümlesi için sağlanacağından ve

$$E = \{x \in B_{r_0} : Tx = x\}$$

cümlesi boş olmadığından,

$$\mu(TE) \leq Q\ \mu(E)$$

ve şu hālde

$$\mu(E) \leq Q\ \mu(E)$$

eşitsizliği elde edilir ki; bu durum, $Q < 1$ olduğundan, $\mu(E) = 0$ olmasını gerektirir. Böylece

$$\omega_0(E) + \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam} E(t) = 0$$

ve dolayısıyla

$$\limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam} E(t) = 0$$

dır. Diğer taraftan her $t \in \mathbb{R}_+$ için $\operatorname{diam} E(t)$ fonksiyonunun negatif olmadığı ve

$$0 \leq \liminf_{t\to\infty} \operatorname{diam} E(t) \leq \limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam} E(t) = 0$$

eşitsizliği göz önüne alınırsa,

$$\lim_{t\to\infty} \operatorname{diam} E(t) = 0$$

elde edilir. Böylece, her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık, $t > T(\varepsilon)$ olan her t sayısı için

$$\operatorname{diam} E(t) = \sup\{|x(t) - y(t)| : x,\ y \in E\} \leq \varepsilon$$

olacak şekilde, yani her $x, y \in E$ için $|x(t) - y(t)| \leq \varepsilon$ olacak şekilde bir $T(\varepsilon) > 0$ sayısı bulunabilir. Dolayısıyla, E'ye göre düzgün olarak,

$$\lim_{t\to\infty} (x(t) - y(t)) = 0$$

dır.

Sonuç olarak (5.1) denkleminin B_{r_0} yuvarındaki çözümleri asimptotik kararlıdır. ■

5.1. Örnekler

Örnek 5.1 $C[0,1]$ *Banach cebirinde*

$$x(t) = \left(\frac{1}{10}\sin\left(\frac{1}{1+t}\right) + \frac{t}{9}\int_0^t \tau \arctan x(\tau) d\tau\right)\left(t - 1 + \cos t + \int_0^t \sin x(\tau) d\tau\right) \tag{5.1.1}$$

denklemi ele alınırsa,

$$f(t,x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{10}\sin\left(\frac{1}{1+t}\right)+\frac{tx_2}{9},\ g(t,x_1,x_2,x_3)=t-1+\cos t+x_2,$$

$$u(t,\tau,x_1)=\tau\arctan x_1,\ v(t,\tau,x_1)=\sin x_{1,}\ \gamma_1(\tau)=\xi_1(\tau)=\tau,\ \varphi_1(t)=\varphi_2(t)=t$$

ve

$$h_1(r)=\arctan r,\ h_2(r)=b_2(r)=b_4(r)=C_1=C_2=\beta_1=\beta_2=1$$

olduğu görülebilir. Ayrıca bu denklem için

$$(T_2x)(t)=(T_4x)(t)=1,\ k_2=\frac{1}{9},\ l_2=1,\ M=\frac{1}{10},\ N=1$$

dir. (5.2) *eşitsizliği ise bu denklem için*

$$2\left(\frac{\arctan r}{9}+\frac{1}{10}\right)\leq r$$

formundadır. $r_0=1$, *yukarıdaki eşitsizliğin bir çözümü olup*

$$\left(\frac{\arctan 1}{9}+\frac{1}{10}\right)+\frac{2}{9}=0.40948...<1$$

olduğu göz önüne alınırsa (5.3) *sağlanmış olur.*

Böylece Teorem 5.2*'nin bütün şartları sağlandığından* (5.1.1) *denkleminin* $C(I)$ *Banach cebirinde en az bir* $x=x(t)\in B_1\subset BC(\mathbb{R}_+)$ *çözümü vardır.*

Örnek 5.2 (5.1) *denkleminde* $g(t,x_1,x_2,...,x_{m_2+2})=1$ *ve*

$$f(t,x_1,x_2,...,x_{m_1+2})=\frac{1}{10}\sin\left(\frac{1}{1+t}\right)+\frac{tx_2}{9}$$

alınırsa, K. Maleknejad vd. [75] *(Örnek 5) tarafından daha önceden ele alınan aşağıdaki denklem elde edilir.*

$$x(t)=\frac{1}{10}\sin\left(\frac{1}{1+t}\right)+\frac{t}{9}\int_0^t\tau\arctan x(\tau)d\tau \tag{5.1.2}$$

Dikkat edilirse (5.1.2) *denklemi için* (5.2) *eşitsizliği,*

$$\frac{\arctan r}{9}+\frac{1}{10}\leq r \tag{5.1.3}$$

şeklinde olup herhangi bir $r_0\geq 0.11244...$ *sayısı* (5.1.3) *eşitsizliğinin bir çözümüdür. Diğer taraftan* $r_0=1$ *için, Teorem* 5.2*'nin diğer bütün şartları sağlandığından,* (5.1.2) *denkleminin en az bir* $x=x(t)\in B_1\subset C[0,1]$ *çözümü vardır.*

Örnek 5.3 *$BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında*

$$x(t)=\frac{t^2+\arctan x\left(\frac{t}{2}\right)}{4+5t^2}+\frac{x^2(t)}{3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^t\frac{\tau\exp(-t)\ln\left(1+\sqrt{\left|x\left(\frac{\tau}{4}\right)\right|}\right)}{\sqrt{t-\tau}}d\tau \qquad (5.1.4)$$

kesirli integral denklemi için

$$g(t,x_1,...,x_{m_2+2})=1,\ f(t,x_1,x_2,x_3)=\frac{t^2+x_1}{4+5t^2}+x_2$$

$$(T_1x)(t)=\arctan x\left(\frac{t}{2}\right),\ (T_2x)(t)=\frac{x^2(t)}{3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}$$

ve

$$b_1(r)=r,\ b_2(r)=\frac{r^2}{3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},\ \beta=\frac{1}{2},\ N=n=1,\ M=\frac{1}{5},\ \gamma_1(\tau)=\frac{\tau}{4}$$

dir. Ayrıca

$$u(t,\tau,x_1)=\tau\exp(-t)\ln\left(1+\sqrt{|x_1|}\right)$$

$$p_1(t,\tau)=0,\ \sigma_1(t)=\exp(-t),\ \rho_1(\tau)=\tau,\ h_1(r)=\ln\left(1+\sqrt{r}\right)$$

ve

$$U_1(t)=0,\ U_2(t)=\exp(-t)\int_0^t\frac{\tau}{\sqrt{t-\tau}}d\tau=\frac{4\exp(-t)\,t^{3/2}}{3},\ M_1=0,\ M_2=\frac{\sqrt{6}}{\exp\left(\frac{3}{2}\right)}$$

dir. Diğer taraftan $k_1=1/4$, $k_2=1$ *ve* $l_1=\cdots=l_{m_2+2}=0$ *alınırsa* (5.1.4) *denklemi için* (5.14) *eşitsizliği*

$$\frac{r}{4}+\frac{r^2\sqrt{6}\ln(1+\sqrt{r})}{3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\exp\left(\frac{3}{2}\right)}+\frac{1}{5}\le r$$

formunda olup $r_0=1$ *bu eşitsizliğin bir çözümüdür.* T_1 *ve* T_2 *operatörleri, sırasıyla,* $q_1=1$ *ve* $q_2=2/\left(3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)$ *katsayıları ile* $(\mathbf{a}_5)$ *şartını sağlarlar ve*

$$Q\le\frac{1}{4}+\frac{2\sqrt{6}\ln 2}{3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\exp\frac{3}{2}}=0.39249...<1$$

dir. Dolayısıla Teorem 5.3*'e göre* (5.1.4) *denkleminin asimptotik kararlı en az bir çözümü vardır.*

Örnek 5.4 *$BC(\mathbb{R}_+)$ uzayında*

$$\begin{aligned}x(t)\ &=\ \left(\frac{\exp(-t)}{4}+\frac{1}{4\left|\int_0^t\frac{\exp(-\tau)\cos x(\tau)d\tau}{t+1}\right|+4}+\frac{|x(t)|}{3}\right)\times\\ &\times\left(\frac{\cos t}{3}-\frac{\cos\left(\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\int_0^{t^2}\left(\frac{\cos x(\tau)+\sqrt[3]{x(\tau^2)}}{(t^2+1)\sqrt{t^2-\tau}}\right)d\tau\right)}{3}+\frac{\cos x(t)}{3}\right)\end{aligned} \qquad (5.1.5)$$

kesirli integral denklemi verilsin. Burada

$$f(t,x_1,x_2,x_3)=\frac{\exp(-t)}{4}+\frac{1}{4|x_2|+4}+\frac{|x_3|}{3},$$

$$g(t,x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{3}(\cos t-\cos x_2+\cos x_3)$$

ve

$$(T_2x)(t)=b_2(r)=\beta_1=m_1=m_2=n_1=1,\ n_2=2,$$

$$(T_4x)(t)=b_4(r)=\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)},\ M=\beta_2=\frac{1}{2},\ N=\frac{1}{3}$$

dir. Ayrıca her $t\in\mathbb{R}_+$ *ve* $1\leq i,j\leq 3$ *olmak üzere, her* $x_i,\ y_j\in\mathbb{R}$ *için*

$$\begin{aligned}
&|f(t,x_1,x_2,x_3)-f(t,y_1,y_2,y_3)|\\
\leq\ &\left|\frac{1}{4|x_2|+4}-\frac{1}{4|y_2|+4}\right|+\frac{||x_3|-|y_3||}{3}\\
=\ &\frac{4||x_2|-|y_2||}{16(|x_2||y_2|+|x_2|+|y_2|+1)}+\frac{||x_3|-|y_3||}{3}\\
\leq\ &\frac{|x_2-y_2|}{4}+\frac{|x_3-y_3|}{3}
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
|g(t,x_1,x_2,x_3)-g(t,y_1,y_2,y_3)| &\leq \frac{|\cos x_2-\cos y_2|}{3}+\frac{|\cos x_3-\cos y_3|}{3}\\
&\leq \frac{|x_2-y_2|}{3}+\frac{|x_3-y_3|}{3}
\end{aligned}$$

olacağından, $k_2=1/4$ *ve* $k_3=l_2=l_3=1/3$ *olarak alınabilir.*

Diğer taraftan

$$u(t,\tau,x_1)=\frac{\exp(-\tau)\cos x_1}{t+1},\ v(t,\tau,x_1,x_2)=\frac{1}{t^2+1}\left(\cos x_1+\sqrt[3]{x_2}\right),$$

$$p_1(t,\tau)=p_2(t,\tau)=0,\ \sigma_1(t)=\frac{1}{t+1},\ \sigma_2(t)=\frac{1}{t^2+1}$$

$$\rho_1(\tau)=\exp(-\tau),\ \rho_2(t)=h_1(r)=1,\ h_2(r)=1+\sqrt[3]{r}$$

ve

$$U_1(t)=0,\ U_2(t)=\frac{1}{t+1}\int_0^t\exp(-\tau)d\tau=\frac{1-\exp(-t)}{t+1},$$

$$V_1(t)=0,\ V_2(t)=\frac{1}{t^2+1}\int_0^{t^2}\frac{d\tau}{\sqrt{t^2-\tau}}=\frac{2t}{t^2+1}$$

olduğu görülebilir. Her $t \in \mathbb{R}_+$ *için* $U_2(t) \leq 0.32 = M_2$ *ve* $V_2(t) \leq 1 = N_2$ *olduğu göz önüne alınırsa* (5.1.5) *denklemi için* (5.14) *eşitsizliği*

$$\left(\frac{0.32}{4} + \frac{r}{3} + \frac{1}{2}\right)\left(\frac{r+1}{3} + \frac{1+\sqrt[3]{r}}{3\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}\right) \leq r$$

şeklinde olup herhangi bir $r_0 \in [0.845535, 3.67168]$ *sayısı bu eşitsizliğin bir çözümüdür. Ayrıca* $r_0 = 1$ *ve* $q_2 = 1,\ q_4 = 1/\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ *için* $Q < 1$ *dir. Böylece Teorem* 5.3 *gereğince* (5.1.5) *denkleminin,* $BC(\mathbb{R}_+)$ *uzayının birim yuvarında olan, asimptotik kararlı en az bir çözümü vardır.*

KAYNAKLAR

[1] S. Hu, M. Khavanin and W. Zhuang, *Integral equations arising in the kinetic theory of gases*, **Appl. Anal.**, 34 (1989) 261-266.

[2] M. Bocher, *An Introduction to the study of integral equations*, Cambridge University Press Werahouse, 1909.

[3] Y. Aksoy, *İntegral Denklemler*, Cilt 1, Y.T.Ü. yayınları, 1998.

[4] D. O'Regan, *Existence theory for nonlinear Volterra integrodifferential and integral equations*, **Nonlinear Anal.** 31 (1998) 317–341.

[5] J. Banaś, B. Rzepka, *On existence and asymptotic stability of solutions of a nonlinear integral equation*, **J. Math. Anal. Appl.,** 284 (2003) 165–173.

[6] I. K. Argyros, *Quadratic equations and applications to Chandrasekhars and related equations*, **Bull. Austral. Math. Soc.,** 32 (1985) 275–292.

[7] A. D. Freed, K. Diethelm,Y. Luchko, *Fractional-order viscoelasticity (FOV): Constitutive developments using the fractional calculus: First annual report*, Technical Memorandum, TM-2002-211914, NASA Glenn Research Center, Cleveland, 2002.

[8] P. J. Torvik, R. L. Bagley, *On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real materials*, **J. Appl. Mech.,** 51 (1984) 294–298.

[9] J. Banaś and K. B. Sadarangani, *Solutions of some functional-integral equations in Banach algebra*, **Math. Comput. Modelling**, 38 (2003) 245-250.

[10] K. Maleknejad, K. Nouri and R. Mollapourasl, *Investigation on the existence of solutions for some nonlinear functional-integral equations*, **Nonlinear Anal.**, 71**:**12 (2009) 1575–1578.

[11] K. Maleknejad, K. Nouri and R. Mollapourasl, *Existence of solutions for some nonlinear integral equations*, **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simulat**., 14 (2009) 2559–2564.

[12] J. Banaś, B. Rzepka, *On existence and asymptotic stability of solutions of a nonlinear integral equation*, **J. Math. Anal. Appl.**, 284 (2003) 165–173.

[13] Z. Liu and S. M. Kang, *Existence and Asymptotic Stability of Solutions to a Functional-Integral Equations*, **Taiwanese J. Math.,** 11 (2007) 187-196.

[14] J. Banaś and K. B. Sadarangani, *Compactness conditions in the study of functional, differential and integral equations*, **Abstr. Appl. Anal.**, 2013 (2013), Article ID 819315, 14 pages.

[15] J. Banaś and B. Rzepka, *Monotonic solutions of a quadratic integral equation of fractional order*, **J. Math. Anal. Appl.**, 332 (2007) 1371–1379.

[16] J. Banaś and D. O'Regan, *On existence and local attractivity of solutions of a quadratic Volterra integral equation of fractional order*, **J. Math. Anal. Appl.**, 345 (2008) 573–582.

[17] J. Banaś and T. Zając, *Solvability of a functional integral equation of fractional order in the class of functions having limits at infinity*, **Nonlinear Anal.**, 71 (2009) 5491–5500.

[18] J. Banaś and L. Olszowy, *On a class of measures of noncompactness in Banach algebras and their application to nonlinear integral equations*, **J. Appl. Anal.**, 28 (2009) 1-24.

[19] J. Banaś, *Measures of noncompactness in the study of solutions of nonlinear differential and integral equations*, **Cent. Eur. J. Math.**, 10:6 (2012) 2003-2011.

[20] J. Banaś, *Solutions of a functional integral equation in* $BC(\mathbb{R}^+)$, **Int. Math. Forum**, 1:24 (2006) 1181-1194.

[21] J. Banaś, J. Rocha and K. B. Sadarangani, *Solvability of a nonlinear integral equation of Volterra type*, **J. Comput. Appl. Math.**, 157 (2003) 31–48.

[22] J. Banaś, J. Caballero, J. Rocha and K. Sadarangani, *Monotonic solutions of a class of quadratic integral equations of Volterra type*, **Comput. Math. Applic.**, 49 (2005) 943-952.

[23] K. Balachandran, J. Y. Park and M. Diana Julie, *On local attractivity of solutions of a functional integral equation of fractional order with deviating arguments*, **Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.**, 15 (2010) 2809–2817.

[24] J. Caballero, B. López, K. Sadarangani, *Existence of nondecreasing and continuous solutions of an integral equation with linear modification of the argument*, **Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)**, 23:9 (2007) 1719–1728.

[25] M. Abdalla Darwish, *On quadratic integral equation of fractional orders*, **J. Math. Anal. Appl.**, 311 (2005) 112–119.

[26] M. Abdalla Darwish and J. Henderson, *Existence and asymptotic stability of solutions of a perturbed quadratic fractional integral equation*, **Fract. Calc. Appl. Anal.**, 12:1 (2009) 71-86.

[27] M. Abdalla Darwish, *On monotonic solutions of an integral equation of Abel type*, **Math. Bohem.**, 133:4 (2008) 407-420.

[28] M. Abdalla Darwish, *On existence and asymptotic behaviour of solutions of a fractional integral equation*, **Appl. Anal.**, 88:2 (2009) 169–181.

[29] M. Abdalla Darwish and S. K. Ntouyas, *On a quadratic fractional Hammerstein–Volterra integral equation with linear modification of the argument*, **Nonlinear Anal.**, 74 (2011) 3510–3517.

[30] M. Abdalla Darwish, *On a perturbed quadratic fractional integral equation of Abel type*, **Comput. Math. Applic.**, 61 (2011) 182–190.

[31] M. Abdalla Darwish, *Nondecreasing solutions of a fractional quadratic integral equation of Abel type*, **Dynam. Systems Appl.**, 20 (2011) 423-438.

[32] İ. Özdemir, Ü. Çakan and B. İlhan, *On the existence of the solutions for some nonlinear Volterra integral equations*, **Abstr. Appl. Anal.**, 2013 (2013), Article ID 689234, 5 pages.

[33] Ü. Çakan and İ. Özdemir, *An application of the measure of noncompactness to some nonlinear functional integral equations in* $C[0,a]$, **Adv. Math. Sci. Appl.**, 23:2 (2013) 575-584.

[34] İ. Özdemir and Ü. Çakan, *On the solutions of a class of nonlinear functional integral equations in space* $C[0,a]$, **J. Math. Appl.**, 38 (2015) 115-124.

[35] V. G. Maz'ya and S.M. Nikol'skii, *Analysis IV: Linear and Boundary Integral Equations*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences Vol. 27, Springer, 1991.

[36] E. Kreyszig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley, 1989.

[37] J. M. Munkres, *Topology (Second Edition)*, Prentice Hall, 2000.

[38] Y. Soykan, *Metrik Uzaylar ve Topolojisi*, Nobel Yayıncılık, 2012.

[39] R. Johnsonbaugh and W. E. Pfaffenberger, *Foundations of Mathematical Analysis*, Dover Publications, New York, 2010.

[40] P. Dugac, *Sur la correspondance de Borel et le théorème de Dirichlet–Heine–Weierstrass–Borel–Schoenflies–Lebesgue*, **Arch. Internat. Hist. Sci.**, 39 (1989) 69–110.

[41] G. McCarty, *An Introduction with Application to Topological Groups*, Dover Publications, 1988.

[42] Binali Musayev ve Murat Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Balcı Yayınları, 2000.

[43] A. E. Taylor, *General Theory of Functions and Integration*, Dover Publications, New York, 1985.

[44] Ö. Çakar, *Fonksiyonel Analize Giriş*, A.Ü. Fen Fakültesi Döner Sermaye İşletmesi Yayınları No:13, 2007.

[45] E. Malkowsky and V. Rakočević, *An introduction into the theory of sequence spaces and measures of noncompactness*, **Zb. Rad. (Beogr.)**, 9:17 (2000) 143-234.

[46] W. Jing, *Frames in Hilbert C*-modules*, University of Central Florida, Orlando 2006.

[47] M. J. Neely, *Some Background Math. Notes on Limsups, Sets, and Convexity*, Stochastic Network Optimization Notes, University of Southern California, 2008.

[48] K. Kuratowski, *Sur les espaces complets*, **Fund. Math.**, 15 (1930) 301–309.

[49] A. I. Ban and S. G. Gal, *Defects of Properties in Mathematics*, World Scientific, 2002.

[50] I. A. Rus, *Principles and Applications of Fixed Point Theory*, Ed. Dacia, Cluj-Napoca, (Romence) 1979.

[51] G. Darbo, *Punti uniti in transformazioni a codominio non compacto*, **Rend. Semin. Mat. Univ. Padova**, 24 (1955) 84-92.

[52] M. Furi and A. Vignoli, *On a property of the unit sphere in a linear normed space*, **Bull. Polish Acad. Sci. Math.**, 18 (1970) 333-334.

[53] I. Gohberg, L. S. Goldenštein and A. S. Markus, *Investigations of some properties of linear bounded operators with connection their to q-norms*, **Uch. zap. Kishinev Univ.**, 29 (Rusça) (1957) 29-36.

[54] T. Dominguez Benavides, *Set-contractions and ball contractions in some class of spaces*, **J. Math. Anal. Appl.**, 136 (1988) 131-140.

[55] J. Banaś and K. Goebel, *Measures of noncompactness in Banach space*, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics, Vol. 60. New York: Dekker; 1980.

[56] J. Banaś, *On measures of noncompactness in Banach spaces*, **Comment. Math. Univ. Carolin.**, 21:1 (1980) 131-143.

[57] J. M. Ayerbee Toledano, T. Dominguez Benavides, G. Lopez Acedo, *Measures of Noncompactness in Metric Fixed Point Theory*, Oper. Theory Adv. Appl., 99, Birkhäuser, Basel, 1997.

[58] J. Banaś nad K. Sadarangani, *On some measures of noncompactness in the space of continuous functions*, **Nonlinear Anal.**, 68 (2008) 377–383.

[59] U. Kaya, *Dirac Sistemi İçin Bir Sınır Değer Problemi,* Yüksek lisans tezi, Mersin Üniversitesi Türkiye, 2008.

[60] B. İlhan, *Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemlerin Çözümlerinin Asimptotik Kararlılığı*, Yüksek lisans tezi, İnönü Üniversitesi Türkiye, 2012.

[61] J. Schauder, *Der Fixpunktsatz in Funktionalriiumen*, **Studia Math.**, 2 (1930) 171-180.

[62] B. N. Sadowskii, *A fixed-point principle*, **Funct. Anal. Appl.**, 1:2 (1967) 151-153.

[63] W. V. Petryshyn, *Remarks on condensing and k-set-contmctive mappings*, **J. Math. Anal. Appl.**, 39 (1972) 717-741.

[64] J. Caballero, A. B. Mingarelli, K. Sadarangani, *Existence of Solutions an Integral Equations of Chandrasekhar Type in the Theory of Radiative Transfer*, **Electron. J. Differential Equations**, 2006:57 **(**2006) 1–11.

[65] M. A. Krasnosel'skii, *Some problems of nonlinear analysis*, **Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2,** 10**,** (1958), 345–409.

[66] J. Banaś, B. C. Dhage, *Global asymptotic stability of solutions of a functional integral equation*, **Nonlinear Anal**., 69 (2008) 1945–1952.

[67] T. A. Burton, *Integral equations, implicit functions and fixed points*, **Proc. Amer. Math. Soc.**, 124:8 (1996) 2383-2390.

[68] J. Banaś, J. Caballero, J. Rocha and K. Sadarangani, *Monotonic solutions of a class of quadratic integral equations of Volterra type*, **Comput. Math. Applic.**, 49 (2005) 943-952.

[69] J. Banaś, K. Balachandran, D. Julie, *Existence and global attractivity of solutions of a nonlinear functional integral equation*, **Appl. Math. Comput.**, 216 (2010) 261-268.

[70] B. C. Dhage and V. Lakshmikantham, *On global existence and attractivity results for nonlinear functional integral equations*, **Nonlinear Anal.**, 72 (2010) 2219-2227.

[71] B. C. Dhage, *Attractivity and positivity results for nonlinear functional integral equations via measure of noncompactness*, **Differ. Equ. Appl.**, 2:3 (2010) 299-318.

[72] J. D. Munkhammar, *Riemann-Liouville fractional derivatives and the Taylor-Riemann series*, UUDM project report, Vol. 7, 2004, 1-18.

[73] J. Banaś, J. Rocha, K. B. Sadarangani, *Solvability of a nonlinear integral equation of Volterra type*, **J. Comput. Appl. Math.**, 157 (2003) 31–48.

[74] J. Banaś and L. Olszowy, *On a class of mesures of noncompactness in Banach algebras and their application to nonlinear integral equations*, **J. for Analy. and its Appl.**, 28 (2009) 1-24.

[75] K. Maleknejad, R. Mollapourasl and M. Shahabi, *On the solution of a nonlinear integral equation on the basis of a fixed point technique and cubic B-spline scaling functions*, **J. Comput. Appl. Math.**, 239 (2013) 346–358.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Ümit ÇAKAN

Doğum Yeri ve Tarihi: Elazığ / 10.02.1988

Adres: Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

E-Posta: umitcakan@gmail.com

Lisans: İnönü Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü (2005-2009)

Yüksek Lisans: Fırat Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik A.B.D. (2009-2011)

Mesleki Deneyim: Nevşehir Hacı Bektaş Veli Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Araştırma Görevlisi (2011-...)

Yayın Listesi:

1) Ü. Çakan and İ. Özdemir, *An application of Darbo fixed point theorem to a class of functional integral equations*, Numer. Funct. Anal. Optim., 36(1), 2015, 29-40.

2) İ. Özdemir, B. İlhan and **Ü. Çakan**, *On the Solutions of a class of Nonlinear Integral Equations in the Banach Algebra of the Continuous Functions and Some Examples*, An. Univ. Vest Timiş. Ser. Mat.-Inform., LII(1), 2014, 121-140.

3) İ. Özdemir, **Ü. Çakan** and B. İlhan, *On the existence of the solutions for some nonlinear Volterra integral equations*, Abstr. Appl. Anal., 2013, 2013, Article ID 689234, 5 pages.

4) Ü. Çakan and İ. Özdemir, *An application of the measure of noncompactness to some nonlinear functional integral equations in* $C[0,a]$, Adv. Math. Sci. Appl., 23(2), 2013, 575-584.

5) Ü. Çakan and Y. Altın, *Some classes of statistical convergent sequences of fuzzy numbers generated by a modulus function*, Iran. J. Fuzzy Syst., (Kabul edildi).

6) İ. Özdemir and **Ü. Çakan**, *On the solutions of a class of nonlinear functional integral equations in space* $C[0,a]$, J. Math. Appl., 38 (2015) 115-124.

7) Ü. Çakan and İ. Özdemir, *An Application of Krasnoselskii Fixed Point Theorem to Some Nonlinear Functional Integral Equations*, Nevsehir Journal of Science and Technology, 3(2), 2014, 66-73.