T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

YAKIN YAKLAŞIM UZAYLARINDA CEBİRSEL YAPILAR

Ebubekir İNAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
MART 2015

Tezin Başlığı: Yakın Yaklaşım Uzaylarında Cebirsel Yapılar

Tezi Hazırlayan: Ebubekir İNAN

Sınav Tarihi: 20.03.2015

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı: **Prof. Dr. Sadık KELEŞ**
İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Sait HALICIOĞLU
Ankara Üniversitesi

Doç. Dr. Erol KILIÇ
İnönü Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK
Adıyaman Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Mustafa UÇKUN
Adıyaman Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

Tez İkinci Danışmanı

Prof. Dr. Alaattin ESEN

Enstitü Müdürü

Onur Sözü

Doktora Tezi olarak sunduğum “Yakın Yaklaşım Uzaylarında Cebirsel Yapılar” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ebubekir İNAN

Sevgili Eşim Sevil'e ve Canım Oğlum Enis'e ...

ÖZET

Doktora Tezi

YAKIN YAKLAŞIM UZAYLARINDA CEBİRSEL YAPILAR

Ebubekir İNAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

114+vii sayfa

2015

Danışmanlar : Prof. Dr. Sadık KELEŞ
Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde; sonraki bölümlerin daha iyi bir şekilde anlaşılabilmesi için yaklaşımlı kümeler, yakın kümeler, temel yaklaşım uzayları ve yakın yaklaşım uzayları ile ilgili tanım ve teoremler verildi. Ayrıca, bu bölümün son kısmı tanımsal tabanlı küme işlemlerine ayrıldı.

İkinci bölümde; yakın yaklaşım uzaylarında yarı gruplar (yakınlık yarı grupları) incelendi. Bu bölümde, tam ayırt edilemezlik bağıntısı kavramına ve yakın yaklaşım uzaylarında alt ve üst yaklaşımların bazı özelliklerine yer verildi. Yakın yaklaşım uzaylarında bir kümenin üst yaklaşımı dikkate alınarak, yakınlık yarı grupları ve yakınlık yarı gruplarının yakınlık idealleri çalışıldı.

Üçüncü bölümde; yakın yaklaşım uzaylarında tek işlemli cebirsel yapılardan biri olan yakınlık grupları araştırıldı. Bu bölümün ilk kısımlarında yakınlık grupları örnekler verilerek incelendi. Alt yakınlık gruplarının ve normal alt yakınlık gruplarının bazı temel özellikleri ele alındı. Yakınlık grupları dikkate alınarak, zayıf kalan sınıfları tanımlandı ve normal alt yakınlık gruplarına ihtiyaç duymaksızın zayıf kalan sınıflarının yakınlık gruplarının varlığı için gerekli şartlar araştırıldı. Son kısımda ise yakınlık grup homomorfizmaları ve yakınlık grup homomorfizmaları ile ilgili bazı teoremlere yer verildi.

Dördüncü bölümde; iki işlemli yakınlık cebirsel yapılarından olan yakınlık halkaları incelendi. Bu bölümde, yakınlık halkaları ve yakınlık halkalarının yakınlık idealleri örneklerle birlikte verildi. Bir yakınlık halkası üzerinde zayıf eşdeğerlik bağıntısı ve zayıf eşdeğerlik bağıntısının yakınlık halkalarında belirttiği zayıf kalan sınıfları tanımlandı. Zayıf kalan sınıflarının kümesinin, ideal yapısına gerek kalmaksızın yakınlık halkası olması için gereken şartlar araştırıldı. Bu bölümün son kısmında ise yakınlık halkaları arasında tanımlanan yakınlık halka homomorfizması kavramı verilerek; yakınlık halka homomorfizmalarının bazı temel özellikleri incelendi. Son olarak, kısıtlanmış yakınlık halka homomorfizması kavramı ve bu kavramlar yardımı ile yakınlık halkaları için temel yakınlık homomorfizma teoremi ifade edilip, ispatlandı.

ANAHTAR KELİMELER: Yakın yaklaşım uzayı, Yakın küme, Alt yaklaşım, Üst yaklaşım, Yakınlık yarı grubu, Yakınlık grubu, Alt yakınlık grubu, Normal alt yakınlık grubu, Zayıf kalan sınıfı, Zayıf kalan sınıflarının yakınlık grubu, Yakınlık halkası, Yakınlık ideali, Zayıf kalan sınıflarının yakınlık halkası, Yakınlık homomorfizması.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

ALGEBRAIC STRUCTURES ON NEARNESS APPROXIMATION SPACES

Ebubekir İNAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

114+vii pages

2015

Supervisors : Prof. Dr. Sadık KELEŞ
Assist. Prof. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK

This study which is designed as a philosophy doctoral thesis covers four chapters.

In the first chapter, some basic concepts such as rough sets, near sets, fundamental approximation spaces and nearness approximation spaces were given for the rest of the thesis that readers can easily understand. In the last section of this chapter, description based set operators were also given.

Second chapter is devoted to the nearness semigroups. In this chapter, complete indiscernibility relation and some properties of lower and upper approximations on nearness approximation spaces were obtained. Nearness semigroups and nearness ideals of nearness semigroups were studied considering the upper approximation of a nonempty set on nearness approximation spaces.

In the third chapter, nearness groups were investigated which are one of the algebraic stuructures that has only one binary operation on nearness approximation space. In the first section of this chapter, nearness groups were studied with some examples. Some basic properties of nearness subgroups and nearness normal subgroups were given. Weak cosets were introduced taking into consideration nearness groups and necessary conditions were investigated for the existence of the nearness groups of weak cosets without use of nearness normal subgroups. In the last section of this chapter, nearness group homomorphisms and some results related to the nearness group homomorphisms were given.

In the last chapter, nearness rings were investigated which are the nearness algebraic sturucture that have two binary operations. Also in this chapter, nearness rings and nearness ideals of nearness rings were studied by giving some examples. Weak equivalence relation on nearness ring and weak cosets that determined by weak equivalence relation on nearness ring were defined. Necessary conditions were obtained for the existence of the nearness rings of weak cosets without using nearness ideals. In the last section of this chapter, nearness ring homomorphisms and some results related to the nearness ring homomorphisms were investigated. Finally, concept of restricted nearness homomorphism was introduced and fundamental nearness ring homomorphism theorem was obtained by using this concept.

KEY WORDS: Nearness approximation spaces, Near sets, Lower approximations, Upper approximations, Nearness semigroups, Nearness groups, Nearness subgroups, Nearness normal subgroups, Weak cosets, Nearness groups of all weak cosets, Nearness rings, Nearness ideals, Nearness rings of all weak cosets, Nearness homomorphisms.

TEŞEKKÜR

Çalısmalarım boyunca bana destek olan ve her aşamasında tecrübesini ve yakın ilgisini esirgemeyen değerli hocam Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e (İnönü Üniversitesi) şükranlarımı sunuyorum. Tez konumu belirleyerek bana yol gösteren, bilgi ve tecrübesiyle beni yönlendiren ve değerli zamanını hiç bir zaman esirgemeyen hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Mehmet Ali ÖZTÜRK'e (Adıyaman Üniversitesi) teşekkür ediyorum. Yapıcı tavsiyelerinden dolayı değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Mustafa UÇKUN'a (Adıyaman Üniversitesi), desteğinden dolayı Sayın Yrd. Doç. Dr. Bilal Eftal ACET'e (Adıyaman Üniversitesi), TÜBİTAK desteği ile bölümümüze gelerek çalışmalarımın geliştirilmesi için katkıda bulunan hocalarım Sayın Prof. Dr. James Francis PETERS'a (Manitoba Üniversitesi) ve Sayın Prof. Dr. Sheela RAMANNA'ya (Winnipeg Üniversitesi) teşekkürlerimi borç bilirim. Ayrıca, manevi desteklerini esirgemeyen kardeşim Muhammed İNAN'a ve değerli eşim Sevil İNAN'a sonsuz teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Geçmişten geleceğe evrende ilahi düzenin nasıl işlediğini anlamaya çalışan insanoğlu, evrende var olanı taklit ederken karşılaştıkları problemleri çözdükçe teknolojide de ilerleme sağlayabilmişlerdir. Yapılan araştırmaların sınırlarında çalışan kuramcılar sayesinde de, evreni keşfetmede büyük aşamalar kaydedilmiştir. Bu araştırmaların sonunda elde edilen yeni bulgular, bilim insanlarını evrenden esinlenerek yeni buluşlar yapmaya teşvik etmiştir. Bu buluşların temelinde her zaman için matematik vardır. Nesneler dünyasının deneysel değişkenleri ile matematik arasında mükemmel bir uyum görülür.

Gözlemlerimizi matematiksel olarak ifade edebilme gücümüz, mevcut küme teorileri ile mümkün olabilmektedir. Mevcut küme teorilerinin yetkinliğinin sınırları, matematiksel ifade gücümüzü kısıtlayan tek sebeptir. Bu sınırları zorlamak bizi daima bir adım öteye, geleceğin akıllı teknolojilerine taşıyacaktır.

Küme kavramını 1810 larda ilk düşünen ve bu sözcüğü bu günkü anlamıyla ilk kullanan, matematiğe ciddi ölçüde meraklı olup bu alanda sıradışı buluşlar yapan B. Bolzano olmuştur. Bu konu birçok matematikçi tarafından merak edilip çalışılmış olsa da, kümeler teorisine ilişkin ilk matematiksel çalışma ise bu teorinin tartışmasız biçimde kurucusu olarak nitelendirilen G. Cantor'un [1] deki makalesidir [2].

G. Cantor, 1879-1884 yılları arasında yayımlanan altı makalesiyle, kümeler teorisinin ilk temel sonuçlarını kanıtlamıştır. G. Cantor'un son çalışması 1895 ve 1897 yıllarında iki kısım halinde yayımlanmıştır [3,4]. Bu makalelerde, kümeler teorisiyle ilgili bu gün de kullandığımız alt kümeler gibi kavramlara yer verilmiştir. G. Cantor un yaptığı çalışmalar sırasında birçok sorunla yüzleşmek zorunda kalması, kümeler teorisinin 19. yüzyıl matematik anlayışının ötesinde olduğunu göstermektedir. Günümüzde, G. Cantor'un araştırmaları matematikçiler tarafından doğru kabul edilmekte ve matematik tarihinin en önemli, benzersiz değer dizilerinden biri olarak tanınmaktadır. 1810 lardan şimdiye kadar sürekli canlı kalan ve gelişen kümeler teorisi insanlığa her an yeni ufuklar açmaktadır. Kümeler teorisinin gelişmesi için birçok bilim insanı farklı fikirleriyle katkıda bulunmuştur [5, 6].

Kümeler teorisinin aksiyomatikleştirilmesi ise E. Zermelo'nun çabaları ile 1904 ve 1908 de başlamıştır [7, 8]. E. Zermelo, G. Cantor'un toplu yapıtlarını da 1932 de yayımlamıştır. Kümeler teorisinin çağdaş ve kapsamlı biçimde anlatıldığı T. Jech'in kitabı [9], konu ile ilgili en önemli kaynaklardan biridir [10].

G. Cantor ile başlayan küme teorisi matematiğe bir nefes, yeniden kendini ifade edebilme şansı vermiştir. Küme teorisinin uzantıları bu gün hala bilgi işlemenin temel felsefesini oluşturmaktadır. Ancak matematiğin farklı bakış açılarının bilinmesi, farklı yaklaşımların olabileceğini kabullenmemize yardımcı olacaktır.

Kümeler teorisi aslında sembolik mantığın doğal bir sonucu olarak ortaya çıkmıştır. Mantık her ne kadar bir felsefe dalı olarak ortaya çıksa da zamanla kendi başına bir ihtisas alanı olmuştur. Sembolik mantığın matematik ve bilgisayar bilimleri için önemi tartışılmazdır. Mantık, doğada gerçekleşen olayların daha iyi ve daha doğru anlaşılabilmesi için bir disiplin olarak Aristo tarafından M. Ö. 300 lü yıllarda çalışılmıştır. Aristo'nun klasik mantık üzerine kategoriler, önermeler, birinci analitikler, ikinci analitikler, topikler ve sofistik deliller olmak üzere; altı ciltlik kitap serisi vardır. Bu seriye daha sonra Aristo'nun izleyicileri tarafından *Organon* adı verilmiştir. Aristo'dan etkilenen Farabi, mantığı düşünce ve sonuç olarak iki kısımda kategorize etmiştir. İbn-i Sina ise geçicilik ve içerme arasındaki ilişkiyi geliştirmiştir. Aristo mantığı, günümüze kadar uzanan zaman diliminde bilim insanlarının önemli katkılarıyla oldukça popüler hale gelmiştir.

Doğadaki belirsizlikler filozofların dikkatini çektiği kadar matematik ve mantıkla uğraşan bilim insanlarının da dikkatini çekmiştir. Aristo mantığının, doğadaki belirsiz durumların modellenebilmesi konusunda yetersiz kaldığı anlaşıldıktan sonra, L. A. Zadeh 1965 ve 1975 de "*Bulanık Küme*" ve "*Bulanık Mantık*" teorilerini ortaya çıkararak, bilim dünyasına çağ atlatmıştır [11, 12].

Daha sonra 1982 de Z. Pawlak, özellikle bilgi sistemlerindeki tutarsızlıkların modellenebilmesi için, "*Yaklaşımlı Küme*" teorisini geliştirmiştir [13]. Aslında yaklaşımlı kümeler, G. Frege'nin belirsizlikleri modelleyebilme fikrinin özel bir uygulaması olarak dikkate alınabilir [14]. Yaklaşımlı küme teorisi dikkate alınarak, mühendislik alanlarında yapılan çalışmaların yanında cebirsel yapı olarak da bir çok çalışma yapılmıştır. Yaklaşımlı kümelerdeki cebirsel çalışmalar T. B. Iwinski ile başlamıştır [15]. Ardından, R. Biswas ve S. Nanda yaklaşımlı alt grup kavramını [16], N. Kuroki yaklaşımlı alt halka kavramını [17] tanımlamıştır. N. Kuroki ve P. P. Wang [18] normal alt gruplar için alt ve üst yaklaşımların bazı özelliklerini incelemişlerdir. Bu çalışmalarda yöntemler her ne kadar doğru olsa da bazı eksiklikler daha sonraları fark edilmiştir. Bu ve benzeri cebirsel yapılar için [19–29] çalışmalarına bakılabilir.

1999 da D. Molodtsow, farklı bir küme teorisi olarak "*Esnek Küme*" kavramını açıklamıştır [30]. Bu küme teorisi de hem mühendislik hem de teorik alanlarda oldukça rağbet görmüştür [31, 32].

2002 de ise, J. F. Peters tarafından yaklaşımlı kümelerin genelleştirilmesi olarak "*Yakın Küme*" teorisi geliştirilmiştir [33]. Yakın kümelerde veriler, yaklaşımlı kümelerin aksine bilgi tabloları gibi çok yer kaplayan karmaşık araçlar yerine reel değerli fonksiyonlar kullanılarak elde edilir. Bu durum yakın küme teorisini matematiksel modellemeler açısından avantajlı kılar. Özellikle gözlemlenebilen her olayın, olduğu gibi veya ilgili sonuçlarıyla birlikte bilişimsel algısının gerçekleşebilmesini sağlar. Konu ile ilgili [34–39] çalışmalarına bakılabilir.

1875 lerde G. Cantor tarafından verilen küme tanımı dikkate alındığında; bulanık kümeler, yaklaşımlı kümeler ve yakın kümeler Cantor küme kavramını tamamlayan teorilerdir. Tüm bu teorilerin temelinde klasik küme ve aksiyomatik küme teorisi yer almaktadır.

Cantor küme kavramı, bulanık kümeler, yaklaşımlı kümeler, esnek kümeler ve yakın kümeler birbirleri ile ilişkilidirler. Z. Pawlak yaklaşımlı kümeleri, Cantor küme kavramının yeni bir formu olarak tanımlamıştır. Bunun yanında her yaklaşımlı küme bir yakın kümedir. Ancak her yakın küme yaklaşımlı küme değildir. Bu durumda yakın kümeler yaklaşımlı kümelerin genelleştirilmesidir.

Bulanık kümeler, bulanık üyelik fonksiyonları ile karakterize edilir. Yakın kümeler ise 1993 de M. Pavel [40] tarafından görüntülerin topolojisi ve görüntü kayıtlarının çalışılmasının bir parçası olarak tanımlanan reel değerli çıkarım fonksiyonları kullanılarak belirlenir. Yakın küme teorisindeki çıkarım fonksiyonları, her bulanık üyelik fonksiyonu çıkarım fonksiyonunun özel bir durumu olduğundan, bulanık kümeler ve yakın kümeler arasında bir bağ kurar. Böylece her bulanık küme bir yakın küme olarak dikkate alınabilir.

Benzer ilişkiler esnek kümeler ile diğer küme teorileri arasında da vardır. Tüm bu bağlar, farklı küme teorilerinin birbirlerini tamamlar nitelikte olduğunu gösterir.

Yakın yaklaşım uzayı, muhtevası ve kullanılan metotlar itibariyle yakın küme teorisi için zengin bir temel kaynak niteliğindedir. Yaklaşımlı küme teorisi ile olan benzerlikleri teorinin gelişimi dikkate alındığında doğal bir süreçtir. Z. Pawlak ve J. F. Peters'ın kurdukları yakın dostluktan yaklaşımlı kümelerden daha genel olan yakın kümeler çıkmıştır [33]. J. F. Peters daha sonraları yakın kümeler için birçok teknik araştırmıştır. J. F. Peters, topoloji ve topolojik uygulamalar [34], bilgisayarlı uygulamalar [41–45] ve özellikle görüntü analizi üzerine araştırmalar yapmaktadır [46–50].

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sonraki bölümlerin daha iyi bir şekilde anlaşılabilmesi için bazı temel kavram ve teoremlere yer verildi. Bunlar; yakın kümeler, temel yaklaşım uzayları ve yakın yaklaşım uzayları ile ilgili tanım ve teoremlerdir. Bu bölümde özellikle yakın yaklaşım uzayı kavramı yapısal olarak tüm bileşenleriyle detaylı olarak ele alındı. Yakın yaklaşım uzaylarında tanımlanan alt, üst yaklaşım ve sınır bölgesi kavramları örneklerle birlikte verildi. Yakın kümeler ile yakın yaklaşım uzaylarında tanımlanan yaklaşımlar arasındaki ilişkiler incelendi. Ayrıca bu bölümün son kısmında tanımsal tabanlı küme işlemlerine yer verildi.

İkinci bölümde; yakınlık yarı grupları incelendi. İki kısımdan oluşan bu bölümde öncelikle tam ayırt edilemezlik bağıntısı kavramı ve yakın yaklaşım uzaylarında alt ve üst yaklaşımların bazı özellikleri incelendi. İkinci kısımda yakın yaklaşım uzaylarında bir kümenin üst yaklaşımı dikkate alınarak yakınlık yarı grupları ve yakınlık yarı gruplarının yakınlık idealleri tanımlandı. Bu kavramlarla ilgili örnekler verilerek yakınlık yarı grubunun yakınlık sol, sağ ve iki yanlı ideali kavramları ile ilgili bazı özellikler araştırıldı.

Üçüncü bölümde; yakın yaklaşım uzaylarında tek işlemli cebirsel yapılardan biri olan yakınlık grupları verildi. Bu bölüm beş kısma ayrıldı. İlk kısımda yakınlık gruplarının ve alt yakınlık gruplarının tanımları örneklerle birlikte araştırıldı. Yakınlık gruplarının elemanlarının bazı temel özellikleri incelendi. İkinci kısımda normal alt yakınlık grupları verildi. Üçüncü ve dördüncü kısımlarda bir yakınlık grubunun boştan farklı bir alt kümesinin alt yakınlık grubu olabilmesi için gerek ve yeter koşul elde edildi. Yakınlık grupları dikkate alınarak, zayıf kalan sınıfları incelendi. İki zayıf kalan sınıfının çarpımının tanımı verildi. Bu çarpımla birlikte normal alt yakınlık gruplarına gerek kalmadan zayıf kalan sınıflarının yakınlık grubunun hangi şartlar altında var olduğu araştırıldı. Ayrıca, kümeler ailesinin bir alt kümesinin üst yaklaşımının tanımı tanımsal arakesit yardımıyla elde edildi. Bu bölümün son kısmında ise farklı veya aynı yakın yaklaşım uzaylarında verilen yakınlık grupları arasında tanımlanan yakınlık grup homomorfizması kavramı ele alındı. Yakınlık grup homomorfizmalarının bazı temel özellikleri incelendi. Bunlardan başka kısıtlanmış yakınlık grup homomorfizması kavramına ve bu kavramlar yardımı ile yakınlık grupları için temel yakınlık homomorfizma teoremine yer verildi.

Dördüncü bölümde; iki işlemli yakınlık cebirsel yapılarından yakınlık halkaları incelendi. Üç kısımdan oluşan bu bölümün ilk kısmında; yakınlık halkaları, alt yakınlık halkaları ve yakınlık halkalarının yakınlık idealleri kavramları örneklerle birlikte verildi. Bir yakınlık halkasının boştan farklı bir alt kümesinin alt yakınlık halkası ve iki (veya sonlu sayıda) alt yakınlık halkalarının (ideallerinin) arakesitlerinin yine bir alt yakınlık halkası (ideali) olabilmesi için gerek ve yeter koşullar araştırıldı. İkinci kısımda, bir yakınlık halkası üzerinde zayıf eşdeğerlik bağıntısının tanımına ve zayıf eşdeğerlik bağıntısının yakınlık halkalarında belirttiği zayıf kalan sınıflarına yer verildi. İki zayıf kalan sınıfının toplamı ve çarpımı tanımlandı. Bu işlemlerle birlikte yakınlık ideallerine gerek kalmaksızın zayıf kalan sınıflarının yakınlık halkalarının hangi şartlar altında var olduğu gösterilerek örnekler incelendi. Bu bölümün son kısmında ise yakınlık halkaları arasında tanımlanan yakınlık halka homomorfizması kavramı verilerek yakınlık halka homomorfizmalarının bazı temel özellikleri araştırıldı. Son olarak; kısıtlanmış yakınlık halka homomorfizması kavramı ve bu kavramlar yardımı ile yakınlık halkaları için temel yakınlık homomorfizma teoremi elde edildi.

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm beş kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda yaklaşımlı kümeler, ikinci kısımda yakın kümeler, üçüncü kısımda temel yaklaşım uzayları ve dördüncü kısımda yakın yaklaşım uzayları ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verildi. Son kısım ise tanımsal tabanlı küme işlemlerine ayrıldı.

1.1 Yaklaşımlı Kümeler

Yaklaşımlı kümeler kuramı, her nesnenin bilgi ve ölçümlerle tanımlanabildiği varsayılan evren dikkate alınarak tanımlanmıştır [51].

Örneğin, nesneleri belirli bir hastalığa yakalanan bireyler olarak belirlenirse, hastalığın belirtileri hastalara ait bilgi ve ölçümlerdir. Aynı belirtileri gösteren tüm hastalar, mevcut veriler yönüyle benzerlik gösterebilir. Hastaların özellikleriyle ilgili bilgiler, temel birimler olarak yorumlanabilecek parçaları oluştur. Bu birimlere temel kümeler veya kavramlar denilir ve bu birimler bilgilerimizin temel yapıtaşları olarak değerlendirilir. Temel kavramlar, bileşik kavramların bir araya getirilmesiyle oluşur. Temel kümelerin birleşimine klasik küme adı verilir ve diğer kümelere de yaklaşımlı (belirsiz, kararsız) denir.

Yaklaşımlı kümelerde sınır bölgesi kavramı vardır. Örneğin kümenin üyeleri ya da tümleyeninin bileşenleriyle kesinlikle sınıflandırılamayacak nesneler kümesi sınır bölgesi kavramı ile sınıflandırılabilir. Klasik kümelerin sınır bölgeleri tanımlı değildir. Bu ise sınır bölgelerinin mevcut bilgilerle tam olarak sınıflandırılamayacağı anlamına gelir.

Böylece, nesnelerin sadece mevcut verileriyle belirlenebileceği varsayımı, bilgilerin parçalı yapısının fark edilmesini sağlar. Bilgilerin parçalı yapısından dolayı, nesnelerin ayrımı yapılamaz ve aynı veya benzer olarak gözlemlenir. Sonuç olarak belirsiz kavramlar, belirli olanların aksine elemanlarla ilgili bilgiler cinsinden tanımlanamaz.

Bu yüzden önerilen yöntemde herhangi bir belirsiz kavramın, alt ve üst belirsizlik kavramları olarak adlandırılan belirli iki kavramla yer değiştirilebileceği varsayılır.

Alt yaklaşım, nitelik bakımından aynı değerlere sahip nesnelerden oluşur. Üst yaklaşım ise, nitelik bakımından aynı değerlere sahip olması muhtemel tüm nesneleri içerir. Buradan açıkça görülür ki, alt ve üst yaklaşımlar arasındaki fark, belirsizlik kavramının sınır bölgesini oluşturur. Bu iki yaklaşım, yaklaşımlı kümeler teorisinin iki temel kavramıdır.

Yaklaşımlı küme teorisi, diğer birçok matematik teorileriyle belli ölçülerde örtüşür. Özellikle bulanık küme teorisi ve Dempster-Shafer (Evidence) teorisiyle ilişkisi ilgi çekicidir [52, 53]. Ayrıca yaklaşımlı küme teorisi, diskriminant analiz gibi birçok metotla da ilişkilidir [54]. Yaklaşımlı küme teorisi için karar analizi yöntemleri geliştirilmiştir [55, 56].

Bu ilişkilerlerle beraber, yaklaşımlı küme teorisi kendine has özellikleriyle bağımsız bir disiplin olarak karşımıza çıkar. Yaklaşımlı küme teorisi yöntem olarak kuramsal bilimlerin, özellikle de yapay zeka, bilgi öğrenme, karar analizi, veri tabanlarından bilgi seçimi, akıllı simülasyon sistemleri, tümevarımsal düşünme ve örüntü tanıma alanlarının temelinde yer alır.

Bu teoride veriler, genellikle niteliklerin yer aldığı sütunlar ve nesnelerle birlikte bu nesnelerin niteliklerinin aldığı değerlerden oluşan satırlardan meydana gelen, bilgi tabloları biçiminde verilir.

Örnek 1.1.1. *[51]*

Hasta	*Baş Ağrısı*	*Kas Ağrısı*	*Vücut Sıcaklığı*	*Grip*
p_1	*yok*	*var*	*yüksek*	*var*
p_2	*var*	*yok*	*yüksek*	*var*
p_3	*var*	*var*	*çok yüksek*	*var*
p_4	*yok*	*var*	*normal*	*yok*
p_5	*var*	*yok*	*yüksek*	*yok*
p_6	*yok*	*var*	*çok yüksek*	*var*

Tablo 1

Tablo 1 in sütunlarında belirtilere, satırlarında ise hastalığa ait nitelik değerlerine yer verilmiştir. Tablo 1 deki satırların her biri, belirli bir hastaya ait bilgileri gösterir.

Örneğin, p_2 hastası aşağıdaki nitel veriler kümesiyle karakterizedir.

(Baş ağrısı, var), (Kas ağrısı, var), (Vücut sıcaklığı, yüksek), (Grip, var)

Tablo 1 de p_2, p_3 ve p_5 hastaları baş ağrısına göre; p_3 ve p_6 hastaları kas ağrısı ve gribe göre; p_2 ve p_5 baş ağrısı, kas ağrısı ve vücut sıcaklığına göre ayırt edilemezdir. Bu nedenle, örneğin baş ağrısı niteliği, $\{p_2, p_3, p_5\}$ ve $\{p_1, p_4, p_6\}$ olmak üzere iki temel küme oluşturur. Bunun gibi, baş ağrısı ve kas ağrısı da $\{p_1, p_4, p_6\}$, $\{p_2, p_5\}$ ve $\{p_3\}$ temel kümeleri oluşturur. Benzer şekilde, niteliklerin her farklı seçimi için farklı temel kümeler tanımlanabilir.

p_2 hastası grip iken, p_5 hastası grip değildir ve p_2, p_5 hastaları baş ağrısı, kas ağrısı ve vücut sıcaklığına göre ayırt edilemezdir. Bu yüzden grip; baş ağrısı, kas ağrısı ve vücut sıcaklığı nitelikleri ile karakterize değildir. Bu nedenle, p_2 ve p_5 mevcut verilerle tam olarak sınıflandırılamayacak sınır bölgesindedir.

Diğer hastalar; p_1, p_3 ve p_6 kesin olarak grip hastası olduklarını gösteren belirtilere sahiptir. p_2 ve p_5 ise grip hastalarının dışında tutulamayacak belirtilere sahiptir. p_4 kesinlikle grip hastası olmadığını gösteren belirtilere sahiptir. Bu yüzden grip hastaları kümesinin alt yaklaşımı, $\{p_1, p_3, p_6\}$ kümesidir. Kümenin üst yaklaşımı ise $\{p_1, p_2, p_3, p_5, p_6\}$ kümesidir. Bu kümenin sınır bölgesinde p_2 ve p_5 hastaları yer alır. Benzer şekilde; p_4 grip hastası değildir ve p_2 ile p_5 grip hastaları dışında tutulamaz. Bu yüzden bu kavramın (grip hastalığı var) alt yaklaşımı $\{p_4\}$ kümesidir. Üst yaklaşımı ise $\{p_2, p_4, p_5\}$ kümesi olur. Grip hastası olmayanların sınır bölgesi önceki durumdaki gibi $\{p_2, p_5\}$ kümesidir.

1.1.1 Alt, Üst Yaklaşımlar ve Sınır Bölgesi

Boş olmayan, sonlu U ve A kümeleri dikkate alınsın. U evrensel küme, A nitelikler kümesi ve $a \in A$ olmak üzere, V_a niteliklerin değerler kümesi olsun. A kümesinin herhangi bir alt kümesi B olmak üzere, U üzerinde ayırt edilemezlik bağıntısı $I(B)$ şöyle tanımlıdır:

Bir x nesnesinin a niteliğine göre değerlendirilmesi $a(x) \in V_a$ olmak üzere; her $a \in A$ için $a(x) = a(y)$ ise $xI(B)y$ dir, yani x ve y nesneleri B nin nitelikleri ile ayırt edilemezdir.

Açıkça görülüyor ki, $I(B)$ bir denklik bağıntısıdır. $I(B)$ nin bütün denklik sınıflarının ailesi, yani B tarafından belirlenen bölüm kümesi $U/I(B)$ ya da basitçe U/B şeklinde gösterilir. U/B bölüm kümesinde, x in bir denklik sınıfı $B(x)$ ile gösterilir.

Eğer $(x, y) \in I(B)$ ise x ve y, $B-$ayırt edilemezdir. $I(B)$ bağıntısının denklik sınıflarına B-temel kümeleri denir.

Tanım 1.1.1. *[51] U evrensel küme ve $X \subseteq U$ olsun.*

$$B_*(X) = \{x \in U \mid B(x) \subseteq X\}$$

kümesine X kümesinin B-alt yaklaşımı denir.

Tanım 1.1.2. *[51] U evrensel küme ve $X \subseteq U$ olsun.*

$$B^*(X) = \{x \in U \mid B(x) \cap X \neq \emptyset\}$$

kümesine X kümesinin B-üst yaklaşımı denir.

Tanım 1.1.3. *[51] U evrensel küme ve $X \subseteq U$ olsun.*

$$BN_B(X) = B^*(X) - B_*(X)$$

kümesine X kümesinin B-sınır bölgesi denir.

Eğer X kümesinin sınır bölgesi boş küme ise, yani $BN_B(X) = \emptyset$ ise X kümesi B ye göre klasik kümedir. Diğer durumda, yani $BN_B(X) \neq \emptyset$ ise X kümesi B ye göre yaklaşımlı kümedir.

Yaklaşımlı küme, yaklaşımın kesinlik durumunu belirten

$$\alpha_B(X) = \frac{|B_*(X)|}{|B^*(X)|}$$

katsayısı ile ifade edilebilir. $|B_*(X)|$ ifadesi, $B_*(X)$ B-alt yaklaşımındaki nesnelerin sayısıdır. Açıkca $0 \leq \alpha_B(X) \leq 1$ dir. $\alpha_B(X) = 1$ ise X kümesi B ye göre klasiktir. $\alpha_B(X) < 1$ ise X kümesi B ye göre yaklaşımlı kümedir [51].

Bir X kümesinin, B-alt, B-üst yaklaşımları ve α_B katsayısı kavramları için Örnek 1.1.1 dikkate alınarak verilen Örnek 1.1.2 incelenebilir.

Örnek 1.1.2. *[51] Örnek 1.1.1 den, grip kavramı dikkate alınırsa* $X = \{p_1, p_2, p_3, p_6\}$ *ve nitelikler kümesi* $B = \{$*Baş ağrısı, Kas ağrısı, Vücut sıcaklığı*$\}$ *dır. Kolayca görülür ki, grip yaklaşımlı olarak* B*-tanımlanabilirdir. Çünkü* $B_*(X) = \{p_1, p_3, p_6\} \neq \emptyset$ *ve* $B^*(X) = \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_6\} \neq U$ *dur. Bu durum için* $\alpha_B\,(grip) = \frac{3}{5}$ *dir. Bu sonuç, grip hastalığının baş ağrısı, kas ağrısı ve vücut sıcaklığı belirtileri yardımıyla kısmi olarak karakterize edilebileceği anlamına gelir.*

Sadece $B = \{$*Baş ağrısı*$\}$ *belirtisi dikkate alınsın. Bu durumda* $B_*(X) = \emptyset$ *ve* $B^*(X) = U$ *olur. Bu sonuç, grip kavramının baş ağrısı niteliğine göre tamamen ayırt edilemez olduğu anlamına gelir. Bu ise baş ağrısının grip hastalığıyla karakterize bir belirti olmadığını gösterir.* $B = \{$*Vücut sıcaklığı*$\}$ *niteliği ele alınsın. Bu durumda* $B_*(X) = \{p_3, p_6\} \neq \emptyset$ *ve* $B^*(X) = \{p_1, p_2, p_3, p_5, p_6\} \neq U$ *olur. Burada tekrar grip kavramının kolayca tanımlanabileceği görülür. Fakat bu kez* $\alpha_B\,(X) = \frac{2}{5}$ *tir ki bu grip hastalığının diğer tüm belirtilere göre vücut sıcaklığı belirtisiyle daha az karakterize olduğu anlamına gelir. Bu durumda ise* p_1*, grip hastası olarak değerlendirilemez.*

Yaklaşımlı kümeler,

$$\mu_X^B\,(x) = \frac{|X \cap B\,(x)|}{|B\,(x)|}$$

ile belirlenen

$$\mu_X^B : U \longrightarrow [0, 1]$$

yaklaşımlı üyelik fonksiyonu kullanılarak da tanımlanabilir [52]. Buradan açıkça görülür ki $\mu_X^B\,(x) \in [0, 1]$ dir. Yaklaşımlı üyelik fonksiyonu yardımıyla bir kümenin yaklaşımları ve sınır bölgesi aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$\begin{aligned} B_*(X) &= \left\{x \in U \mid \mu_X^B\,(x) = 1\right\}, \\ B^*(X) &= \left\{x \in U \mid \mu_X^B\,(x) > 0\right\}, \\ BN_B(X) &= \left\{x \in U \mid 0 < \mu_X^B\,(x) < 1\right\}. \end{aligned}$$

Üyelik fonksiyonunun değeri $\mu_X^B\,(x)$ bir koşullu olasılıktır ve X kümesine ait x

elemanlarının kesinlik derecesi (veya $1-\mu_X^B(x)$ değeri x elemanlarının kesinsizlik derecesi) olarak yorumlanabilir [52].

1.1.2 Yaklaşımlı Kümelerin Uygulamaları ve Avantajları

Yaklaşımlı küme teorisinin birçok kullanım alanı vardır [51]. Tıp, farmakoloji, bankacılık, pazarlama araştırmaları alanlarında konuyla ilgili çok sayıda uygulamalar vardır. Ayrıca ses bilimleri ve bağımsız konuşma tanıma alanlarında oldukça ilginç sonuçlar elde edilmiştir. Yaklaşımlı küme metodu, ölçümler, cihazların bağımsız karar alabilmesi, yapay zeka, uzman sistemler, malzeme bilimleri ve süreç kontrol gibi birçok mühendislik uygulamasında ayrı bir öneme sahiptir. Dil bilimlerinde ve çevre bilimlerindeki uygulamalar da diğer önemli uygulamalarındandır. Yaklaşımlı küme teorisinin farklı uygulamaları için [21, 52, 55, 56] kaynaklarına bakılabilir.

Yaklaşımlı küme uygulamaları uygun bir yazılım gerektirir. İş istasyonları ve kişisel bilgisayarlarda yaklaşımlı küme teorisine dayalı birçok yazılım geliştirilmeye devam edilmektedir.

Yaklaşımlı küme teorisinin avantajlarından bazıları şunlardır:

- Verilerdeki saklı ilişkilerin fark edilebilmesi için etkili algoritmalar sunar.
- Veri hazırlanmasında kullanılır.
- Verilerin önemini değerlendirir.
- Verilerden karar alma ilkeleri belirleyebilecek algoritmalar oluşturur.
- Anlamayı kolaylaştırır.
- Elde edilen sonuçların yorumlanabilmesini sağlar.

Bugüne kadar, yaklaşımlı küme teorisi ve uygulamalarıyla ilgili çok sayıda yayın yapılmıştır. Yaklaşımlı küme teorisinin bir çok başarılı uygulamalarına rağmen, karşılaşılan birkaç teorik ve pratik problem konuyla ilgili yeni çalışmaları gerektirmektedir. Özellikle verilerdeki yığılmalar, veri analizine dayalı yaklaşımlı küme teorisi için geliştirilecek etkili yazılımların önemini bir kat daha arttırmaktadır.

Verilerden yola çıkarak; uygun karar verme yöntemleri arasında bir çok etkili yöntem olmasına rağmen, yaklaşımlı küme teorisine dayalı yöntemler son yıllarda geliştirilmeye başlanmıştır. Ayrıca, sinir ağları ve örüntü tanıma yöntemleri ile yaklaşımlı kümeler arasındaki ilişkinin araştırılması dikkat çekicidir [51]. Yaklaşımlı küme teorisiyle ilgili temel fikirler için [13, 56, 64] çalışmalarına bakılabilir.

1.2 Yakın Kümeler

Bu kısımda yakın küme kavramının temelleri, çıkarım fonksiyonları, yakın kümeler ve bu kavramlarla ilgili bazı özellikler verilecektir [57].

1.2.1 Yakın Küme Kavramının Temelleri

Yakın küme teorisi, dijital görüntüler arasındaki benzerliklerin karşılaştırılması probleminden ortaya çıkmıştır. Yakın kümelerin basit bir örneğini dijital görüntü çiftlerinde görebiliriz. Örneğin, bir görüntüdeki sınıfın alt görüntüleri, diğer görüntüdeki sınıfın alt görüntüleri ile benzer tanımlamalara sahip olabilir.

Genel olarak, yakın kümeler nesnelerin kendisi ile veya başka bir küme ile benzer tanımlamalar taşıması ile belirlenir.

Yakın küme teorisi, ayrık kümelerdeki nesnelerden elde edilen benzer bilgilerin metot olarak kullanılabilmesini sağlar, yani nesnelerin gözlemlenmesi, karşılaştırılması ve sınıflandırılması için yakın küme teorisi kullanılır. Yakın kümelerin keşfi, gözlemlenen nesneler için uygun bir tanımlama yöntemi seçilmesi ile başlar. Bu ise gözlemlenen nesnelerin özelliklerini temsil eden fonksiyonların seçimi ile mümkün olmaktadır. Bu fonksiyonlar için temel model ilk olarak 1993 te M. Pavel tarafından, dijital görüntülerin sınıflandırılması için verilmiştir [40].

Yakın küme teorisinde nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonları bir nesneden, gözlemlenebilen özelliklerin değerine karşılık gelen bir reel sayıya tanımlıdır [57].

Tanım 1.2.1. ***(Çıkarım Fonksiyonu)*** *[35,57] Algılanabilen nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden reel değerli fonksiyonlara çıkarım fonksiyonu denir.*

Çıkarım fonksiyonları nesneler arasında olduğu gibi benzer nesnelerden oluşan kümeler arasında da benzerlikler kurar [43]. Nesnelerin aralarındaki benzerlikler dikkate alınırsa birbirlerine yakın oldukları gözlemlenir. Benzer şekilde nesnelerin oluşturduğu kümeler de benzerlikler yönüyle birbirlerine belli derecelerde yakın olurlar.

Yakın kümeler, mühendislik ve doğa problemlerinin yanı sıra özellikle görüntü işleme, görüntü analizi gibi insan algısı ile ilgili problemlerin çözümü için ideal bir yapı sunar. Yakın küme teorisindeki algı kavramı, Merleau-Ponty [58] nin çalışmasında bulunan algı fikri ile psikofizikteki [59] algı fikrinin kombinasyonlarından oluşur [60]. Psikofizikte bir nesnenin algılanması (yani bir nesne ile ilgili bizim bildiklerimiz), beynin korteksindeki sinyal değerlerinin (uyartıların) kaynağı olan duyu girişleri ile mümkündür. Bu görüşe göre algılama, algılayıcı (reseptör) aktarımları nasıl ilgili duyunun korteks hücrelerine gidiyorsa, duyularla algılanabilen nesneler kümesinin çıkarım dönüşümleri de, zihnimiz tarafından nesnelerin özelliklerine karşılık gelen sinyal değerlerini temsil eden reel değerler kümesine tanımlıdır. Böyle dönüşümlere *çıkarım fonksiyonları* denir. Bir çıkarım, çevremizdeki nesnelerin gözlemlenebilen fiziksel karakteristiklerini ölçer. Diğer bir ifade ile çıkarım fonksiyonu, genellikle karakteristik özelliklerin çıkarımı olarak adlandırılan işin temelidir [61].

Bir nesnenin duyularla hissedilebilen fiziksel karakteristikleri nesnenin ayırt edici özellikleri ile bilinebilir. Bu anlamda ayırt edici özellik kavramı S. Watanabe tarafından 1985 te "*İnsan ve Mekanik* " çalışmasında kullanılmıştır [62], yani ayırt edici özellik kavramı fiziksel nesnelerin gözlemlenebilir bazı özellikleri demektir. Her bir ayırt edici özellik, çıkarım fonksiyonu olarak adlandırılan reel değerli fonksiyonlarla temsil edilir. Her bir ayırt edici özelliği (renk gibi) temsil eden çıkarım fonksiyonları bir tane olabileceği gibi birden fazla da olabilir (grayscale veya RGB gibi) [60].

Çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve algılanabilen nesnelerin kümesi yakın küme teorisinin temelinde yer alır. Bu iki kavram birlikte düşünüldüğünde ortaya bilgi sistemi dediğimiz yapı çıkar [60].

Aksiyom 1.2.1. *[60] Bir nesne algılanabilirdir ancak ve ancak bu nesne tanımlanabilirdir.*

Merleau-Ponty nin görüşüne göre bir nesne tanımlanabildiği ölçüde algılanabilir. Diğer bir deyimle, bir nesne ne kadar tanımlanabiliyorsa o kadar algılanabilir. J. H.

Poincaré [63] deki bir duyunun kavranması ve yakın küme teorisinden bir çıkarım fonksiyonu için bir fiziksel model [48,64], görsel algı açısından E. C. Zeeman tarafından 1962 de açıklanmıştır [65]. Yapılan bu tespitler yakın küme teorisindeki çıkarım fonksiyonlarının nasıl belirlenebileceği ile ilgili yapısal bir model oluşturur [57,60,64].

Tanım 1.2.2. ***(Görsel Çıkarım Fonksiyonu)*** *[60] Algılanabilen nesneler yansıyan ışığın kaynağındaki görsel cisimlerin ayırt edici özellikleri olmak üzere, $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi olsun. $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, bir φ görsel çıkarım fonksiyonu*

$$\varphi : X \longrightarrow \mathbb{R}$$

şeklinde tanımlıdır. $x \in X$ nesnesi için $\varphi(x)$, x nesnesinin görsel algıdaki zenginliği temsil eder.

Aksiyom 1.2.2. *[60] Nesne tanımlamalarını formülleştirmek nesnelerin matematiksel olarak algılanmasını sağlar.*

Yakın küme kavramında, kümelerin yakınlığı algılanabilen sistemler dikkate alınarak incelenir [64]. J. H. Poincaré'in, bir fiziksel zaman-mekan sürekliliğindeki dijital görüntüler gibi nesnelerin algılanması fikri, algılanabilir bilgi sistemleri ile benzer olan ancak aynı olmayan algılanabilir sistemler ile mümkün olabilmektedir [48, 64].

Tanım 1.2.3. ***(Algılanabilir Sistem)*** *[57] $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin boştan farklı sonlu bir kümesi ve $\mathcal{F}$ nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının boş olmayan bir kümesi olmak üzere, $\langle \mathcal{O}, \mathcal{F} \rangle$ ye bir algılanabilir sistem denir.*

Çıkarım fonksiyonları daha genel olarak reel değerli olmayan fonksiyonlar olarak da dikkate alınabilir, yani V boştan farklı herhangi bir küme, $X \subseteq \mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi olmak üzere, çıkarım fonksiyonu

$$\varphi : X \longrightarrow V$$

şeklinde tanımlanabilir [66]. Reel değerli çıkarım fonksiyonları kullanılarak her ne kadar cebirsel yapılar çalışılabilse de, bu tanım yakın kümeler teorisinde mantık ve cebirsel yapıların teorik olarak da çalışılabilmesine imkan sağlar.

1.2.2 Yakın Kümeler

Sembol	*Anlamı*
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi,
$\mathcal{O}$	Algılanabilir nesnelerin kümesi,
X	$X \subseteq \mathcal{O}$, örnek nesnelerin kümesi,
x	$x \in \mathcal{O}$, örnek nesne,
$\mathcal{F}$	Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi,
B	$B \subseteq \mathcal{F}$,
L	Tanım uzunluğu,
i	$i \leq L$, $L \in \mathbb{Z}^{+}$,
φ_i	$\varphi_i : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$, çıkarım fonksiyonu,
Φ	$\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{L}$, nesne tanımlaması,
$\Phi(x)$	$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), ..., \varphi_i(x), ..., \varphi_L(x))$

Tablo 2

Nesneler ancak matematiksel bir takım tanımlamalar yardımıyla bilgisayar sistemleri tarafından algılanabilirler. Bir $x \in X$ nesnesinin tanımı, çıkarım fonksiyonları yardımıyla belirlenen $\Phi(x)$ fonksiyonu ile belirlenir. Burada önemli konulardan biri de $\varphi_i \in B$ çıkarım fonksiyonlarının, nesnelerin hangi yönüyle tanımlandığı dikkate alınarak belirlenmesidir. $B \subseteq \mathcal{F}$, $X \subseteq \mathcal{O}$ örnek nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $\varphi_i : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $\varphi_i \in B$ olsun. Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden φ_i fonksiyonlarının, $\varphi_i(x)$ değerlerinin bileşimi dikkate alınırsa

$$\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^{L},$$

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), ..., \varphi_i(x), ..., \varphi_L(x))$$

tanım uzunluğu $|\Phi| = L$ olan nesne tanımlamasıdır. Özellikle görüntü analizi gibi bilgisayar uygulamaları dikkate alınırsa, $\Phi(x)$ tanımlamasının altında sezgisel olarak

φ_i fonksiyonları tarafından modellenen her bir sensörün ölçümlerinin kaydedilmesi vardır.

Örnek 1.2.1. ***(Organizmalarda Davranış Tanımlaması)*** *[57]*

x_i	s	a	$p(s,a)$	r
x_1	0	1	0.1	0.75
x_2	0	2	0.1	0.75
x_3	1	2	0.05	0.1
x_4	1	3	0.056	0.1
x_5	0	1	0.03	0.75
x_6	0	2	0.02	0.75
x_7	1	2	0.01	0.9
x_8	1	3	0.025	0.9

Tablo 3

Organizmalarda gözlemlenebilen davranışların matematiksel olarak modellenebilmesi, ilgili çıkarım fonksiyonlarının kullanılması ile mümkün olabilmektedir. $X \subseteq \mathcal{O}$ *organizmaların kümesi ve* $B = \{s, a, p(s,a), r\} \subseteq \mathcal{F}$ *davranışların ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. Davranış tanımlaması, Tablo 3 te verildiği gibi, durum (state)* $s : X \longrightarrow \{0,1\}$*, hareket (action)* $a : X \longrightarrow \{1,2,3\}$*, bir durumdaki hareket tercihi* $p(s,a) : S \times A \longrightarrow [0,1]$*, bir önceki durumda gerçekleştirilen hareketin sonuçları ve* s *durumundaki gözlem* $r : X \longrightarrow [0,1]$ *olmak üzere;*

$$(s, a, p(s,a), r)$$

çıkarım fonksiyonları ile temsil edilebilir. s *durumunda tercih edilen hareket* $p(s,a) + \beta\delta(r,s)$ *kullanılarak hesaplanır. Burada* β *organizmanın öğrenme oranı ve* $\delta(r,s)$ *ise bir hareketin kalitesini değerlendirmek için kullanılır [44]. Bu durumda* $x \in X$ *organizmasının davranış tanımlaması*

$$\Phi(x) = (s(x), a(x), V(s(x)), r(x))$$

dir.

Uyarı 1.2.1. *Bu örnekte kullanılan çıkarım fonksiyonlarının çeşitliliği ve sayısı problemlerin çözümüne yönelik olarak artırılabilir veya azaltılabilir.*

Sembol	*Anlamı*
$\sim_B$	$\sim_B = \{(x,x') \mid \varphi(x) = \varphi(x'), \quad \forall\varphi \in B\}$, ayırt edilemezlik bağıntısı,
$[x]_B$	$[x]_B = \{x' \in X \mid x \sim_B x'\}$, yakınlık sınıfı,
$\mathcal{O}/\sim_B$	$\mathcal{O}/\sim_B = \{[x]_B \mid x \in \mathcal{O}\}$, bölüm kümesi,
ξ_B	$\xi_B = \mathcal{O}/\sim_B$,
Δ_{φ_i}	$\Delta_{\varphi_i} = \lvert\varphi_i(x') - \varphi_i(x)\rvert$, çıkarım fonksiyonlarının farkı.

Tablo 4

$X \subseteq \mathcal{O}$ kümelerindeki nesneler benzer tanımlamalara sahip ise o zaman nesneler birbirlerine yakındırlar. Her bir φ, bir nesnenin ayırt edici bir özelliğini belirtir (Tablo 1). Bu durumda $x, x' \in \mathcal{O}$ olmak üzere, Δ_{φ_i} farkı

$$\Delta_{\varphi_i} = |\varphi_i(x') - \varphi_i(x)|$$

şeklinde tanımlıdır. Δ_φ farkı, Z. Pawlak tarafından tanımlanan ayırt edilemezlik bağıntısını belirler [77].

Tanım 1.2.4. *[57] $x, x' \in \mathcal{O}$ ve $B \subseteq \mathcal{F}$ olsun. $i \leq |\Phi|$ tanım uzunluğu olmak üzere,*

$$\{(x,x') \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} \mid \ \forall\varphi_i \in B, \quad \Delta_{\varphi_i} = 0 \ \}$$

şeklinde tanımlanan bağıntıya $\mathcal{O}$ üzerinde ayırt edilemezlik bağıntısı denir ve "$\sim_B$" ile gösterilir.

Tanım 1.2.5. *[57] $B \subseteq \mathcal{F}$, nesnelerinin tanımlanması ile ilgili çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $x, x' \in \mathcal{O}$ olmak üzere, $x \sim_{\{\varphi_i\}} x'$ ($\Delta_{\varphi_i} = 0$) olacak şekilde en az bir $\varphi_i \in B$ var ise x ve x' nesneleri birbirlerine minimal yakındır denir. Minimal yakınlık, "Yakınlık Tanımlama İlkesi - NDP" olarak da adlandırılır.*

Teorem 1.2.1. *[57] $[x]_B \in \xi_B$ sınıfındaki nesneler yakın nesnelerdir.*

İspat. $\xi_B = \mathcal{O} / \sim_B$, $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin bir ayrışımı ve $[x]_B \in \xi_B$ olmak üzere, $x, x' \in [x]_B$ olsun. Tablo 2 ve ayırt edilemezlik bağıntısının tanımı dikkate alınırsa, her bir $\varphi_i \in B$ için $\Delta_{\varphi_i} = |\varphi_i(x') - \varphi_i(x)| = 0$ dır. Böylece Yakınlık Tanımlama İlkesi - NDP kavramından x ve x' nesneleri yakın nesnelerdir. $\square$

Tanım 1.2.6. ***(Nesne Yakınlığının Ölçümü)*** *[57] $B \subseteq \mathcal{F}$ örnek nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi, $X, X' \subseteq \mathcal{O}$ kümeleri de sırasıyla ilgili nesnelerin ve test nesnelerinin kümeleri ve $i \leq |B|$ olmak üzere, $\varphi_i \in B$ olsun.*

$$\mu_X^B(X') = \frac{\left|\left\{\varphi_i \in B : x \sim_{\{\varphi_i\}} x' \; ; \, x \in X, \, x' \in X'\right\}\right|}{|B|}$$

şeklinde tanımlanan

$$\mu_X^B : \mathcal{P}(\mathcal{O}) \longrightarrow [0,1]$$

fonksiyonuna yakınlık ölçüm fonksiyonu denir.

Örnek 1.2.2. ***(Yakın Nesneler)*** *[57] $\mathcal{O}$, örnek mobilyaların bir kümesi olsun. $X_K, X_L \subseteq \mathcal{O}$ kümeleri sırasıyla K fabrikasında üretilen masaların ve L fabrikasında üretilen sandalyelerin kümesi olsun. Kabul edelim ki, $\varphi_i \in B \subseteq \mathcal{F}$ fonksiyonları, $\mathcal{O}$ daki mobilyaların ayırt edici özelliklerini temsil etsin. Ayrıca, $i \leq |B| = 5$ ve $x \in X_K$ masası ve $x' \in X_L$ sandalyesi sadece φ_i açısından ayırt edilemez olsun. Bu durumda bir $x \in X_K$ masası ve bir $x' \in X_L$ sandalyesi için $x \sim_{\{\varphi_i\}} x'$ olduğundan $\mu_{X_K}^B(X_L) = \frac{1}{5}$ olur.*

Yakın küme yaklaşımında nesnelerin tanınması için temel fikir, nesne tanımlamalarının karşılaştırılmasıdır. X ve X' kümeleri, kısmi olarak aynı tanımlamalara sahip nesneler içeriyorlarsa birbirlerine yakındır.

Tanım 1.2.7. *[57] $X, X' \subseteq \mathcal{O}$ ve $B \subseteq \mathcal{F}$ olsun. Bu durumda $x \in X$, $x' \in X'$ için $x \sim_{\{\varphi_i\}} x'$ olacak şekilde $\varphi_i \in B$ varsa X kümesi X' kümesine yakındır denir.*

Uyarı 1.2.2. *[57] X, X' ile yakın ise, bu durumda X, X' ile ilgili yakın küme ve X' de, X ile ilgili yakın kümedir. Tanım 1.2.7 de X' ile X yer değiştirirse, bu durum yansımalı yakınlık kavramına yol açar.*

Tanım 1.2.8. *[57] $X \subseteq \mathcal{O}$ ve $x, x' \in X$ olsun. x, x' nesnesine yakın ise X kümesine kendisi ile ilgili yakın küme veya bu duruma X kümesinin yansımalı yakınlığı denir.*

Teorem 1.2.2. *[57] $\xi_B = \mathcal{O} / \sim_B$ ayrışımındaki her bir sınıf yakın kümedir.*

İspat. $\xi_B = \mathcal{O} / \sim_B = \{[x]_B \mid x \in \mathcal{O}\}$ ayrışımındaki herhangi bir $[x]_B$ sınıfı aynı tanımlamalara sahip nesnelerin kümesidir, yani $x, x' \in [x]_B$ ise $x \sim_B x'$ (her $\varphi_i \in B$ için $\Delta_{\varphi_i} = |\varphi_i(x') - \varphi_i(x)| = 0$) olur. Yansımalı yakınlık tanımı dikkate alınırsa, $[x]_B \in \xi_B$ sınıfı yakın kümedir. □

Teorem 1.2.3. *[57] ξ_B ayrışımı bir yakın kümedir.*

İspat. "$\sim_B$", $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $\xi_B = \mathcal{O} / \sim_B$ ayrışımını tanımlayan bir ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. $[x]_B \in \xi_B$ sınıfının yakın küme olduğu ve ξ_B ayrışımı birbirleriyle yakın olan nesneler içerdiğinden ξ_B bir yakın kümedir. □

Tanım 1.2.9. ***(Yakın Kümelerin Hiyerarşisi)*** *[57] $X \subseteq \mathcal{O}$ ve $X', X'' \subseteq X$ olsun. Bu durumda X', X'' yakın kümeler ise X bir yakın kümedir. Buna yakın kümelerin hiyerarşisi denir.*

Tanım 1.2.10. ***(Kalıtımsal Yakınlık)*** *[57] Yakın küme içeren herhangi bir küme yakın kümedir. Buna kalıtımsal yakınlık denir.*

Teorem 1.2.4. *[57] Yakın küme içeren bir kümenin kendisi de yakın kümedir.*

İspat. X kümesinin bir yakın küme içerdiğini kabul edelim. Yakın kümelerin hiyerarşisi ve kalıtımsal yakınlık kavramları dikkate alınırsa, X bir yakın kümedir.

□

1.3 Temel Yaklaşım Uzayı

Tanım 1.3.1. *[57] $\mathcal{O}$, algılanabilen nesnelerin kümesi; $\mathcal{F}$, nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $\sim_B$, $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $\xi_B = \mathcal{O} / \sim_B$ ayrışımını belirleyen bir ayırt edilemezlik bağıntısı olmak üzere, $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_B)$ yapısına temel yaklaşım uzayı FAS (Fundamental Approximation Space) denir.*

Temel yaklaşım uzayı, yaklaşımlı küme teorisinin temeli olarak dikkate alınır [77]. Aynı zamanda bir yaklaşım uzayı, var olan algılarımızın yapısal (matematiksel) modelleri olarak gözlemlenebilir.

Yaklaşım uzayı kavramı, $\mathcal{O}$ nesnelerin kümesinin "$\sim_B$" ayırt edilemezlik bağıntısı yardımıyla ξ_B ayrışımının inşası ile başlar. Bunun yanında herhangi bir $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin yaklaşımları için $x \in \mathcal{O}$ olmak üzere, X ile $[x]_B \in \xi_B$ sınıflarının arasındaki bazı durumlar dikkate alınır. $X \subseteq \mathcal{O}$ daki nesneler ile ξ_B ayrışımı arasındaki ilişkiler, X ile ortak nesnelere sahip olan sınıfların belirlenmesi ile tespit edilebilir. Bu durumu daha iyi anlamak için bir kümenin alt yaklaşım kavramı incelenmelidir.

Tanım 1.3.2. ***(Bir Kümenin Alt Yaklaşımı)*** *[57] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi olmak üzere, $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin bir yaklaşımıX in alt kümesi olan $[x]_B \in \mathcal{O}/\sim_B$ sınıflarının birleşiminden oluşur. Bu yaklaşıma X kümesinin B-alt yaklaşımı denir ve*

$$B_*X = \bigcup_{[x]_B \subseteq X} [x]_B$$

ile gösterilir.

Sonuç olarak, B_*X boştan farklı ise B_*X in her bir sınıfındaki nesneler, X deki nesnelerin tanımlamaları ile eşleşen tanımlamalara sahiptir.

Lemma 1.3.1. *[57] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinin B-alt yaklaşımı B_*X bir yakın kümedir.*

Teorem 1.3.1. *[57] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesi boştan farklı bir B_*X alt yaklaşımına sahip ise X bir yakın kümedir.*

İspat. Boştan farklı bir B_*X alt yaklaşımına sahip olan bir X kümesi dikkate alınsın. B_*X alt yaklaşımı yakın küme olduğundan ve Teorem 1.2.4 den yakın küme içeren bir küme yakın küme olduğundan X bir yakın kümedir. □

Tanım 1.3.3. ***(Bir Kümenin Üst Yaklaşımı)*** *[57] $X \subset \mathcal{O}$, algılanabilen nesnelerin kümesi ve B kümesi de $\mathcal{O}$ daki nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin başka bir yaklaşımı, X*

kümesi ile arakesiti boştan farklı olan $[x]_B \in \mathcal{O}/\sim_B$ sınıflarının birleşiminden oluşur. Bu yaklaşıma X in B-üst yaklaşımı denir ve

$$B^*X = \bigcup_{[x]_B \cap X \neq \varnothing} [x]_B$$

ile gösterilir.

Diğer bir ifadeyle B^*X üst yaklaşımı, X deki bir nesnenin tanımıyla eşleşen en az bir nesne tanımı içeren $[x]_B \in \mathcal{O}/\sim_B$ sınıflarının birleşiminden oluşur.

B_*X alt yaklaşımı, B^*X üst yaklaşımının alt kümesidir. B^*X üst yaklaşımının alt kümesi olmayan bir veya birden fazla $[x]_B \in \mathcal{O}/\sim_B$ sınıfları olabilir ya da olmayabilir.

Teorem 1.3.2. *[57] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, B^*X üst yaklaşımı ve X kümesi yakın kümelerdir.*

İspat. Yakın kümelerin hiyerarşisi kavramı dikkate alınırsa, B^*X üst yaklaşımı bir veya birden fazla yakın küme sınıfları içerdiğinden bir yakın kümedir. Üst yaklaşımın tanımından, B^*X ve X bir veya birden fazla ortak nesne içerir ve bu ortak nesneler eşleşen tanımlara sahiptir. Böylece B^*X ve X yakın kümelerdir. □

Tanım 1.3.4. ***(Sınır Bölgesi)*** *[57] Bir $X \subset \mathcal{O}$ yakın kümesinin sınır bölgesi*

$$B^*X \setminus B_*X = \{x \mid x \in B^*X \text{ ve } x \notin B_*X\}$$

şeklinde tanımlıdır ve Bnd_BX ile gösterilir.

Sembol	*Anlamı*
$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_B)$	Temel yaklaşım uzayı (FAS), $B \subseteq \mathcal{F}$,
B_*X	$\bigcup_{[x]_B \subseteq X} [x]_B$, X in B-alt yaklaşımı,
B^*X	$\bigcup_{[x]_B \cap X \neq \varnothing} [x]_B$, X in B-üst yaklaşımı,
Bnd_BX	$Bnd_BX = B^*X \setminus B_*X = \{x \mid x \in B^*X \text{ ve } x \notin B_*X\}$.

Tablo 5

Boştan Farklı Sınır Bölgesi Olan Yakın Küme: Bir yakın kümenin sınırı boştan farklı olduğunda X kümesi alt ve üst yaklaşıma sahip olan küme olarak dikkate alınabilir. $Bnd_B X \neq \emptyset$ ise X, yaklaşıma sahip olan ya da yaklaşık olarak B deki fonksiyonlarla ilişkili olan yakın kümedir. $Bnd_B X \neq \emptyset$ ise $|Bnd_B X| > 0$ dır. Bu durumda X yaklaşıma sahip olan yakın kümedir.

Teorem 1.3.3. ***(Temel Yakın Küme Teoremi)*** *[57] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi, $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, $|Bnd_B X| \geq 0$ ise X kümesi yakın kümedir.*

İspat. $|Bnd_B X| > 0$ ve $|Bnd_B X| = 0$ olmak üzere, iki durum söz konusudur.

(i) $|Bnd_B X| > 0$ $(Bnd_B X \neq \emptyset)$ olsun. Boştan farklı sınır bölgesi olan $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesi dikkate alınsın. Bunun anlamı $B_* X \subsetneq B^* X$, yani $B_* X$ alt yaklaşımı, $B^* X$ üst yaklaşımının bir öz alt kümesidir. $[x]_B \in B_* X$ sınıfları, ξ_B ayrışımının elemanlarıdır. Alt yaklaşımın tanımından X kümesi $B_* X$ alt yaklaşımındaki sınıfları içerir. $B_* X$ alt yaklaşımı yakın küme olduğundan X bir yakın kümedir.

(ii) $|Bnd_B X| = 0$ $(Bnd_B X = \emptyset)$ olsun. $|Bnd_B X| = 0$ ise $B_* X = B^* X$ ve $B_* X \subseteq X$ dir. Buradan $B_* X$ ve X ortak tanımlamalara sahip nesneler içerir. Böylece X bir yakın kümedir. □

1.4 Yakın Yaklaşım Uzayı

Bu kısımda yakın yaklaşım uzayı kavramı yapısal olarak tüm bileşenleri ile dikkate alınacaktır. Yakın yaklaşım uzaylarında tanımlanan alt, üst yaklaşım ve sınır bölgesi kavramları örneklerle birlikte verilecektir. Yakın kümeler ile yakın yaklaşım uzaylarında tanımlanan yaklaşımlar arasındaki ilişkiler incelenecektir.

Sembol	*Anlamı*
B	$B \subseteq \mathcal{F}$,
r	$\binom{\lvert B\rvert}{r}$, yani $\varphi_i \in B$ fonksiyonlarının sayısının r li kombinasyonu,
B_r	$r \leq \lvert B\rvert$,
$\sim_{B_r}$	B_r yardımıyla tanımlanan ayırt edilemezlik bağıntısı,
$[x]_{B_r}$	$[x]_{B_r} = \{x' \in \mathcal{O} \mid x \sim_{B_r} x'\}$, yakınlık sınıfı,
$\mathcal{O}/\sim_{B_r}$	$\mathcal{O}/\sim_{B_r} = \left\{[x]_{B_r} \mid x \in \mathcal{O}\right\}$, bölüm kümesi,
$\xi_{\mathcal{O},B_r}$	$\xi_{\mathcal{O},B_r} = \mathcal{O}/\sim_{B_r}$,
$N_r(B)$	$N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\}$, ayrışımların kümesi,
ν_{N_r}	$\nu_{N_r} : \wp(\mathcal{O}) \times \wp(\mathcal{O}) \longrightarrow [0,1]$, yakınlık fonksiyonu
$N_r(B)_* X$	$N_r(B)_* X = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq X} [x]_{B_r}$, yakın alt yaklaşım,
$N_r(B)^* X$	$N_r(B)^* X = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap X \neq \varnothing} [x]_{B_r}$, yakın üst yaklaşım,
$Bnd_{N_r(B)}(X)$	$N_r(B)^* X \diagdown N_r(B)_* X = \{x \in N_r(B)^* X \mid x \notin N_r(B)_* X\}$
	yakın sınır bölgesi.

Tablo 6

$\mathcal{O}$ algılanabilir nesnelerin kümesi ve $\mathcal{F}$ kümesi de nesnelerin ayırt edici özellikleri-ni temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.

r, kısıtlanmış $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ alt kümesinin kardinalitesi olmak üzere; "$\sim_{B_r}$", yaklaşımlı küme teorisinden $B_r \subseteq B$ alt kümesine kısıtlanmışı olan ayırt edilemezlik bağıntısıdır. B_r kümesinin her seçimi, "$\sim_{B_r}$" ayırt edilemezlik bağıntısının $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin farklı bir ayrışımının tanımlanmasına yol açar. Bu seçim $\lvert B\rvert$, B deki fonksiyonların sayısı ve r, B_r kümesinin kardinalitesi olmak üzere; $\binom{\lvert B\rvert}{r}$ farklı şekilde yapılabilir.

"$\sim_{B_r}$" ayırt edilemezlik bağıntısı, $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesini ikişer ikişer ayrık olan $[x]_{B_r}$ yakınlık sınıflarına ayırır. Bu sınıfların $\mathcal{O}/\sim_{B_r} = \left\{[x]_{B_r} \mid x \in \mathcal{O}\right\}$ kümesi bölüm kümesidir. $\xi_{\mathcal{O},B_r}$ ayrışımı $\xi_{\mathcal{O},B_r} = \mathcal{O}/\sim_{B_r}$ dir. Ayrışımların bir kümeler ailesi olan $N_r(B)$ kümesi de $N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\}$ dir.

Ayrıca, ν_{N_r} yakınlık fonksiyonu $\nu_{N_r} : \wp(\mathcal{O}) \times \wp(\mathcal{O}) \longrightarrow [0,1]$ şeklindedir. Yakınlık fonksiyonu bir küme çiftinden, $[0,1]$ aralığına tanımlı bir fonksiyon olup, ν_{N_r} yakınlık fonksiyonu $B_r \subseteq B$ deki fonksiyonlar yardımıyla özellikleri belli olan nesne kümeleri arasındaki yakınlık derecesini temsil eder [68].

Nesne özelliklerini temsil eden $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ alt kümelerinin herbirinin $\binom{|B|}{r}$ farklı seçimi, birer farklı $\sim_{B_r} = \{(x,x') \in \mathcal{O} \times \mathcal{O} \mid \forall \varphi_i \in B_r,\ \varphi_i(x) = \varphi_i(x')\}$ ayırt edilemezlik bağıntısı, $[x]_{B_r} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \forall \varphi \in B_r,\ \varphi(x') = \varphi(x)\}$ denklik sınıfları, $\xi_{\mathcal{O},B_r}$ ayrışımı, $N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\}$ kümesi ve ν_{N_r} yakınlık fonksiyonu belirler. Bu durumda $(x,x') \in \sim_{B_r}$ ise x ve x' nesnelerine B_r deki tüm çıkarım fonksiyonlarına göre B-ayırt edilemezdir denir.

Tanım 1.4.1. *[57] $\mathcal{O}$, algılanabilen nesnelerin kümesi; $\mathcal{F}$, nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $r \leq |B|$ olmak üzere; "$\sim_{B_r}$", $\mathcal{O}$ nesneler kümesinin $B_r \subseteq B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $\xi_{\mathcal{O},B_r} = \mathcal{O} / \sim_{B_r}$ ayrışımını belirleyen bir ayırt edilemezlik bağıntısı, $N_r(B) = \{\xi_{\mathcal{O},B_r} \mid B_r \subseteq B\}$ ayrışımların kümesi ve ν_{N_r} yakınlık fonksiyonu olsun. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ yapısına yakın yaklaşım uzayı NAS (Nearness Approximation Space) denir.*

Teorem 1.4.1. *[57] Ayrışımların ailesi olan $N_r(B)$ kümesi bir yakın kümedir.*

İspat. $\xi_{\mathcal{O},B_r} \in N_r(B)$ ayrışımı, $[x]_{B_r}$ sınıflarını içerdiğinden ve bu sınıflar birer yakın küme olduklarından $\xi_{\mathcal{O},B_r}$ bir yakın kümedir. Böylece $N_r(B)$ kümesi bir yakın kümedir. □

Tanım 1.4.2. *[57] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinin $B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $N_r(B)$-alt yaklaşımı*

$$N_r(B)_* X = \bigcup_{[x]_{B_r} \subseteq X} [x]_{B_r}$$

şeklinde tanımlıdır.

Tanım 1.4.3. *[57] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinin $B \subseteq \mathcal{F}$ ile ilgili $N_r(B)$-üst yaklaşımı*

$$N_r(B)^* X = \bigcup_{[x]_{B_r} \cap X \neq \varnothing} [x]_{B_r}$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 1.4.2. *[57] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinin $N_r(B)_* X$ alt yaklaşımı bir yakın kümedir.*

İspat. Alt yaklaşımın tanımı dikkate alınırsa, $N_r(B)_* X \subseteq X$ ve $N_r(B)_* X$, X in alt kümeleri olan $[x]_{B_r}$ sınıflarından oluşur. $[x]_{B_r}$ sınıfları yakın küme olduklarından $N_r(B)_* X$ alt yaklaşımı da yakın kümedir. □

Benzer durum üst yaklaşım için de geçerlidir.

Teorem 1.4.3. *[57] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinin $N_r(B)^* X$ üst yaklaşımı bir yakın kümedir.*

Tanım 1.4.4. *[57] Bir $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesinin sınır bölgesi,*

$$\begin{aligned} Bnd_{N_r(B)}(X) &= N_r(B)^* X \diagdown N_r(B)_* X \\ &= \{x \in N_r(B)^* X \mid x \notin N_r(B)_* X\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

Teorem 1.4.4. *[57] $\mathcal{O}$ nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere, X kümesinde $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| \geq 0$ ise X kümesi yakın kümedir.*

İspat. $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| > 0$ ve $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| = 0$ durumları dikkate alınsın.

(i) $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| > 0$ $\left(Bnd_{N_r(B)}(X) \neq \emptyset\right)$ olsun. Boştan farklı sınır bölgesi olan $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesi dikkate alınsın. Bunun anlamı $N_r(B)_* X \subset N_r(B)^* X$, yani $N_r(B)_* X$ alt yaklaşımı, $N_r(B)^* X$ üst yaklaşımının bir alt kümesi ve aynı zamanda $N_r(B)_* X$ alt yaklaşımı X in bir alt kümesidir. Böylece Teorem 1.4.2 den X bir yakın kümedir.

(ii) $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| = 0$ $\left(Bnd_{N_r(B)}(X) = \emptyset\right)$ olsun. $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| = 0$ ise $N_r(B)_* X = N_r(B)^* X$ ve $N_r(B)_* X \subseteq X$ dir. Buradan $N_r(B)_* X$ ve X ortak tanımlamalara sahip nesneler içerir. Her yakınlık sınıfı bir yakın kümedir. Alt yaklaşımın tanımından, $N_r(B)_* X$ deki tüm sınıflar aynı zamanda X in alt kümeleridir. Böylece X bir yakın kümedir. □

Teorem 1.4.5. *[57] Alt veya üst yaklaşıma sahip olan her küme bir yakın kümedir.*

İspat. Teorem 1.4.4 dikkate alınırsa, X kümesi bir yakın kümedir ancak ve ancak $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| \geq 0$ dır. $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| > 0$ ise X kümesi yaklaşıma sahip olan kümedir, yani X kümesi yakın kümedir. $\left|Bnd_{N_r(B)}(X)\right| = 0$ ise X yakın küme olarak dikkate alınabilir, ancak alt veya üst yaklaşıma sahip olamaz. Sonuç olarak, alt veya üst yaklaşıma sahip olan bir küme yakın kümedir, ancak her yakın küme alt veya üst yaklaşıma sahip değildir. □

Örnek 1.4.1. ***(Bir Kümenin Alt ve Üst Yaklaşımları)***
$\mathcal{O} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ çıkarım fonksiyonları

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$
$$\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\},$$
$$\varphi_3 : \mathcal{O} \longrightarrow V_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$$

Tablo 7 deki gibi tanımlansın.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
φ_1	α_2	α_3	α_2	α_2	α_1	α_1	α_3	α_1	α_2	α_3
φ_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_1	α_2	α_1	α_1	α_2
φ_3	α_3	α_1	α_3	α_3	α_4	α_2	α_2	α_4	α_3	α_1

Tablo 7

Bu durumda

$$\begin{aligned}
[a]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(a) = \alpha_2\} \\
&= \{a, c, d, i\} = [c]_{\varphi_1} = [d]_{\varphi_1} = [i]_{\varphi_1}, \\
[b]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(b) = \alpha_3\} \\
&= \{b, g, j\} = [g]_{\varphi_1} = [j]_{\varphi_1}, \\
[e]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(e) = \alpha_1\} \\
&= \{e, f, h\} = [f]_{\varphi_1} = [h]_{\varphi_1}
\end{aligned}$$

dir. O zaman $\xi_{\varphi_1} = \left\{ [a]_{\varphi_1}, [b]_{\varphi_1}, [e]_{\varphi_1} \right\}$ *olur.*

$$\begin{aligned} [a]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(a) = \alpha_1\} \\ &= \{a, c, e, f, h, i\} = [c]_{\varphi_2} = [e]_{\varphi_2} = [f]_{\varphi_2} = [h]_{\varphi_2} = [i]_{\varphi_2}, \\ [b]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(b) = \alpha_2\} \\ &= \{b, d, g, j\} = [d]_{\varphi_2} = [g]_{\varphi_2} = [j]_{\varphi_2} \end{aligned}$$

dir. Buradan $\xi_{\varphi_2} = \left\{ [a]_{\varphi_2}, [b]_{\varphi_2} \right\}$ *olur. Son olarak,*

$$\begin{aligned} [a]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(a) = \alpha_3\} \\ &= \{a, c, d, i\} = [c]_{\varphi_3} = [d]_{\varphi_3} = [i]_{\varphi_3}, \\ [b]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(b) = \alpha_1\} \\ &= \{b, j\} = [j]_{\varphi_3}, \\ [e]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(e) = \alpha_4\} \\ &= \{e, h\} = [h]_{\varphi_3}, \\ [f]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(f) = \alpha_2\} \\ &= \{f, g\} = [g]_{\varphi_3} \end{aligned}$$

tür. O zaman $\xi_{\varphi_3} = \left\{ [a]_{\varphi_3}, [b]_{\varphi_3}, [e]_{\varphi_3}, [f]_{\varphi_3} \right\}$ *olur.*

Böylece $r = 1$ *için* $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi* $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ *tür.*

$X = \{a, c, f, i\} \subseteq \mathcal{O}$ *kümesinin üst yaklaşımı*

$$\begin{aligned} N_1(B)^* X &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap X \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i} \\ &= [a]_{\varphi_1} \cup [e]_{\varphi_1} \cup [a]_{\varphi_2} \cup [a]_{\varphi_3} \cup [f]_{\varphi_3} \\ &= \{a, c, d, i\} \cup \{e, f, h\} \cup \{a, c, e, f, h, i\} \cup \{f, g\} \\ &= \{a, c, d, e, f, g, h, i\} \end{aligned}$$

dir. X kümesinin alt yaklaşımı,

$$\begin{aligned} N_1(B)_* X &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \subseteq X} [x]_{\varphi_i} \\ &= \emptyset \end{aligned}$$

dir. Ayrıca X kümesinin sınır bölgesi de

$$
\begin{aligned}
Bnd_{N_1(B)}(X) &= N_1(B)^* X \diagdown N_1(B)_* X \\
&= \{a,c,d,e,f,g,h,i\} \diagdown \emptyset \\
&= \{a,c,d,e,f,g,h,i\}
\end{aligned}
$$

olur.

1.4.1 Yakınlık Fonksiyonu

İki yakın küme arasındaki yakınlığın derecesini ölçmek için kullanılan yakınlık fonksiyonları farklı yöntemlerle tanımlanabilir. $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ iki yakın küme olmak üzere, yakınlık fonksiyonunun farklı iki formu aşağıdaki gibidir.

$$
\begin{aligned}
\nu_{N_r(B)} &: \wp(\mathcal{O}) \times \wp(\mathcal{O}) \longrightarrow [0,1] \\
\nu_{N_r(B)}(X,Y) &= \begin{cases} \frac{|X \cap Y|}{|Y|}, |X| \le |Y| \\ 1 \ \text{, diğer durumlarda} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.4.1}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu_{N_r(B)} &: \wp(\mathcal{O}) \times \wp(\mathcal{O}) \longrightarrow [0,1] \\
\nu_{N_r(B)}(X,Y) &= \begin{cases} \frac{|X \cap Y|}{|X|}, |Y| \le |X| \\ 1 \ \text{, diğer durumlarda} \end{cases}
\end{aligned}
\tag{1.4.2}
$$

(1.4.1) deki $\nu_{N_r(B)}$ yakınlık fonksiyonu $|X| \le |Y|$ durumunda, (1.4.2) deki $\nu_{N_r(B)}$ yakınlık fonksiyonu ise $|Y| \le |X|$ durumunda kullanılır. Daha fazla örnek için [41,42] çalışmalarına bakılabilir [57].

1.5 Tanımsal Tabanlı Küme İşlemleri

$\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere; bir $x \in X$ algılanabilir nesnesinin tanımı, nesnenin ayırt edici özelliklerini temsil eden çıkarım fonksiyonları yardımıyla belirlenen $\Phi(x)$ fonksiyonu ile belirlidir. $B \subseteq \mathcal{F}$ örnek nesnelerin çıkarım fonksiyonlarının kümesi ve $\varphi_i : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere, $\varphi_i \in B$ olsun. Nesnelerin ayırt edici özelliklerini temsil eden φ_i fonksiyonlarının, $\varphi_i(x)$ değerlerinin bileşimi dikkate alınırsa, tanım uzunluğu $|\Phi| = L$ olan $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow \mathbb{R}^L$,

$$\Phi(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), ..., \varphi_i(x), ..., \varphi_L(x))$$

nesne tanımlaması elde edilir. Algılanabilir elemanlardan oluşan kümelerdeki elemanların tanımlamalarının dikkate alınması, tanımsal tabanlı küme işlemlerinin çıkış noktasıdır. Bu kısımdaki tüm kümeler algılanabilir nesnelerden oluşan kümelerdir. Genel olarak, Φ tanımlama fonksiyonu ve V boştan farklı herhangi bir küme olmak üzere, $\Phi : \mathcal{O} \longrightarrow V^L$ şeklindedir.

Tanım 1.5.1. ***(Küme Tanımlaması)*** *[34, § 4.3] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi, $X \subseteq \mathcal{O}$ ve $\Phi(x) \in V^L$ olsun.*

$$\mathcal{Q}(X) = \{\Phi(x) \mid x \in X\}$$

kümesine X in küme tanımlaması denir.

Tanım 1.5.2. ***(Tanımsal Küme Birleşimi)*** *[50] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olsun.*

$$X \underset{\Phi}{\cup} Y = \{a \in X \cup Y \mid \Phi(a) \in \mathcal{Q}(X) \text{ veya } \Phi(a) \in \mathcal{Q}(Y)\}$$

kümesine X ve Y kümelerinin tanımsal birleşimi denir.

Tanım 1.5.3. ***(Tanımsal Küme Arakesiti)*** *[34, 45] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere,*

$$X \underset{\Phi}{\cap} Y = \{a \in X \cup Y \mid \Phi(a) \in \mathcal{Q}(X) \text{ ve } \Phi(a) \in \mathcal{Q}(Y)\}$$

kümesine X ve Y kümelerinin tanımsal arakesiti denir.

Tanım 1.5.4. ***(Tanımsal Küme Farkı)*** *[50] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olsun.*

$$X \underset{\Phi}{\setminus} Y = \{x \in X \mid \Phi(x) \notin \mathcal{Q}(Y)\}$$

kümesine X kümesinin Y kümesinden tanımsal farkı denir.

Tanım 1.5.5. ***(Göreceli Tanımsal Tümleyen)*** *[50] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi, $X \subseteq \mathcal{O}$ ve $Y \subseteq X$ olsun.*

$$\underset{\Phi}{C_X}(Y) = \{x \in X \mid \Phi(x) \notin \mathcal{Q}(Y)\}$$

kümesine Y kümesinin X kümesine göre tanımsal tümleyeni denir.

Tanım 1.5.6. ***(Tanımsal Tümleyen)*** *[50] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi ve $X \subseteq \mathcal{O}$ olsun. X kümesinin tanımsal tümleyeni*

$$\underset{\Phi}{C}(X) = \underset{\Phi}{C_{\mathcal{O}}}(X) = \mathcal{O} \underset{\Phi}{\setminus} X$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.5.7. ***(Tanımsal Tabanlı Yakınlık Ölçümü)*** *[50] $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesi ve $X, Y \subseteq \mathcal{O}$ olsun.*

$$dNM(X, Y) = 1 - \frac{\left| X \underset{\Phi}{\cap} Y \right|}{|X \cup Y|}$$

şeklinde tanımlanan

$$dNM : \wp(\mathcal{O}) \times \wp(\mathcal{O}) \longrightarrow [0, 1]$$

fonksiyonuna tanımsal tabanlı yakınlık ölçüm fonksiyonu denir.

Burada $dNM(X, Y) = 0$ olması, X ve Y nin tanımsal olarak tamamen yakın oldukları anlamına gelir. $dNM(X, Y) = 1$ olması ise X ve Y nin tanımsal olarak yakın hiçbir eleman içermediklerini, yani yakın olmadıklarını gösterir.

BÖLÜM 2

YAKINLIK YARI GRUPLARI

Bu bölüm iki kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda, yakın yaklaşım uzaylarında tanımlanan alt ve üst yaklaşımların temel özellikleri incelenerek tam ayırt edilemezlik bağıntısının tanımı verildi. İkinci kısımda ise yakın yaklaşım uzaylarında bir kümenin üst yaklaşımı dikkate alınarak, yakınlık yarı grupları ve yakınlık yarı gruplarının yakınlık idealleri tanımlandı. Bu kısımda ayrıca tüm bu kavramlarla ilgili bazı özellikler araştırıldı.

Klasik anlayışa göre; cebirsel yapılar kurmak için soyut noktalardan oluşan boştan farklı kümeler ve ikili işlemler kullanılır. A boştan farklı bir küme ve "$\circ$", A üzerinde bir ikili işlem olsun. Klasik olarak, $(A, \circ)$ (veya $A(\circ)$) yapısının grupoid olabilmesi için "$\circ$" işleminin A üzerinde kapalılık özelliğini sağlaması gerekir, yani her soyut $a, b \in A$ için $a \circ b \in A$ özelliğinin sağlanması gerekir [67].

Yakın yaklaşım uzaylarında ise kümeler soyut noktalar yerine soyut olmayan, özellik vektörleri ile tanımlanabilen, algılanabilir nesnelerden (elemanlardan) oluşur. Soyut olmayan bu elemanlar özellikleri dikkate alınarak kolaylıkla sınıflandırılabilir. Aynı özelliğe sahip elemanlar bir araya getirilerek, yakın elemanlardan oluşan yakınlık sınıfları elde edilir. Yakın yaklaşım uzayından aldığımız boştan farklı bir kümenin elemanları ile belli özellikleri örtüşen elemanların bulunduğu yakınlık sınıfları dikkate alınarak kümenin üst yaklaşımı elde edilir. Yakın yaklaşım uzaylarındaki cebirsel yapılar için temel araç bu üst yaklaşımdır.

$A(\circ)$ yapısının yakın yaklaşım uzayı üzerinde grupoid olabilmesi için "$\circ$" işleminin A nın üst yaklaşımı üzerinde kapalılık özelliğini sağlaması gerekir, yani her soyut olmayan $a, b \in A$ için $a \circ b \in N_r(B)^* A$ özelliğinin sağlanması gerekir.

Cebirsel yapılar ile yakın yaklaşım uzayı üzerindeki cebirsel yapılar arasındaki en önemli farklardan birisi, yakın yaklaşım uzaylarındaki cebirsel yapılarda soyut olmayan noktalarla çalışılmasıdır. Diğeri ise klasik olarak cebirsel yapı oluşturması mümkün olmayan küme ve işlemlerden bu yolla cebirsel yapı elde etmektir.

Yakın yaklaşım uzayından alınan boştan farklı bir kümenin üst yaklaşımı farklı metotlar kullanılarak da hesaplanabilir. Ancak, her zaman temel olarak soyut olmayan noktaların birbiriyle olan yakınlığı dikkate alınır.

2.1 Yaklaşımların Bazı Özellikleri

Teorem 2.1.1. *$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ yakın yaklaşım uzayı ve $X, Y \subset \mathcal{O}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler geçerlidir:*

(1) $N_r(B)_* X \subseteq X \subseteq N_r(B)^* X$.

(2) $N_r(B)^* (X \cup Y) = (N_r(B)^* X) \cup (N_r(B)^* Y)$.

(3) $N_r(B)_* (X \cap Y) = (N_r(B)_* X) \cap (N_r(B)_* Y)$.

(4) $X \subseteq Y$ ise $N_r(B)_* X \subseteq N_r(B)_* Y$ dir.

(5) $X \subseteq Y$ ise $N_r(B)^* X \subseteq N_r(B)^* Y$ dir.

(6) $N_r(B)_* (X \cup Y) \supseteq (N_r(B)_* X) \cup (N_r(B)_* Y)$.

(7) $N_r(B)^* (X \cap Y) \subseteq (N_r(B)^* X) \cap (N_r(B)^* Y)$.

İspat. (1) $x \in N_r(B)_* X$ olsun. Bu durumda $x \in [x]_{B_r} \subseteq X$ olduğundan $N_r(B)_* X \subseteq X$ olur. $x \in X$ olmak üzere, $x \in [x]_{B_r}$ ve $[x]_{B_r} \cap X \neq \varnothing$ dir. O halde $x \in N_r(B)^* X$ olur. Böylece $X \subseteq N_r(B)^* X$ dir.

(2)

$$
\begin{aligned}
x \in N_r(B)^* (X \cup Y) &\Leftrightarrow [x]_{B_r} \cap (X \cup Y) \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow \big([x]_{B_r} \cap X\big) \cup \big([x]_{B_r} \cap Y\big) \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow [x]_{B_r} \cap X \neq \varnothing \text{ veya } [x]_{B_r} \cap Y \neq \varnothing \\
&\Leftrightarrow x \in N_r(B)^* X \text{ veya } x \in N_r(B)^* Y \\
&\Leftrightarrow x \in (N_r(B)^* X) \cup (N_r(B)^* Y)
\end{aligned}
$$

dir. Böylece $N_r(B)^* (X \cup Y) = (N_r(B)^* X) \cup (N_r(B)^* Y)$ elde edilir.

(3)

$$
\begin{aligned}
x \in N_r(B)_* (X \cap Y) &\Leftrightarrow [x]_{B_r} \subseteq X \cap Y \\
&\Leftrightarrow [x]_{B_r} \subseteq X \text{ ve } [x]_{B_r} \subseteq Y \\
&\Leftrightarrow x \in N_r(B)_* X \text{ ve } x \in N_r(B)_* Y \\
&\Leftrightarrow x \in (N_r(B)_* X) \cap (N_r(B)_* Y)
\end{aligned}
$$

dir. Sonuç olarak, $N_r(B)_* (X \cap Y) = (N_r(B)_* X) \cap (N_r(B)_* Y)$ olur.

(4) $X \subseteq Y$ olsun. Bu durumda $X \cap Y = X$ dir. (3) özelliği dikkate alınırsa $N_r(B)_* X = N_r(B)_* (X \cap Y) = (N_r(B)_* X) \cap (N_r(B)_* Y)$ olur. Böylece $N_r(B)_* X \subseteq N_r(B)_* Y$ elde edilir.

(5) $X \subseteq Y$ olsun. Bu durumda $X \cup Y = Y$ olur. (2) özelliği kullanılırsa $N_r(B)^* Y = N_r(B)^* (X \cup Y) = (N_r(B)^* X) \cup (N_r(B)^* Y)$ dir. Buradan $N_r(B)^* X \subseteq N_r(B)^* Y$ olduğu görülür.

(6) $X \subseteq X \cup Y$ ve $Y \subseteq X \cup Y$ olduğundan, (4) özelliği dikkate alınırsa, $N_r(B)_* X \subseteq N_r(B)_* (X \cup Y)$ ve $N_r(B)_* Y \subseteq N_r(B)_* (X \cup Y)$ elde edilir. Böylece $(N_r(B)_* X) \cup (N_r(B)_* Y) \subseteq N_r(B)_* (X \cup Y)$ olur.

(7) $X \cap Y \subseteq X$ ve $X \cap Y \subseteq Y$ olduğundan, (5) özelliği kullanılırsa $N_r(B)^* (X \cap Y) \subseteq N_r(B)^* X$ ve $N_r(B)^* (X \cap Y) \subseteq N_r(B)^* Y$ dir. Buradan $N_r(B)^* (X \cap Y) \subseteq (N_r(B)^* X) \cap (N_r(B)^* Y)$ bulunur. □

Tanım 2.1.1. *$X \subseteq \mathcal{O}$, $r \leq |B|$ ve $B_r \subseteq \mathcal{F}$ olmak üzere; "$\sim_{B_r}$", $\mathcal{O}$ üzerinde bir ayırt edilemezlik bağıntısı ve ".", $\mathcal{O}$ üzerinde tanımlı bir ikili işlem olsun. Her $x, y \in X$ için $[x]_{B_r} [y]_{B_r} = [x.y]_{B_r}$ ise "$\sim_{B_r}$" ayırt edilemezlik bağıntısına $\mathcal{O}$ üzerinde tam ayırt edilemezlik bağıntısı denir.*

Teorem 2.1.2. *$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı olsun. X ve Y, $\mathcal{O}$ nun boştan farklı alt kümeleri olmak üzere*

$$(N_r(B)^* X)(N_r(B)^* Y) \subseteq N_r(B)^* (XY)$$

dir.

İspat. $z \in (N_r(B)^* X)(N_r(B)^* Y)$ olsun. Bu durumda $x \in N_r(B)^* X$ ve $y \in N_r(B)^* Y$ olmak üzere; $z = x.y$ dir. Böylece $k \in [x]_{B_r} \cap X$ ve $l \in [y]_{B_r} \cap Y$ olacak şekilde $k \in X$ ve $l \in Y$ elemanları vardır. Buradan $k \in [x]_{B_r}$, $l \in [y]_{B_r}$ ve "$\sim_{B_r}$", $\mathcal{O}$ üzerinde bir ayırt edilemezlik bağıntısı olduğundan, $k.l \in [x]_{B_r} [y]_{B_r} \subseteq [x.y]_{B_r}$ dir. $k.l \in XY$ olduğundan $k.l \in [x.y]_{B_r} \cap XY$ olur ve böylece $z = x.y \in N_r(B)^* (XY)$ elde edilir.

Sonuç olarak, $(N_r(B)^* X)(N_r(B)^* Y) \subseteq N_r(B)^* (XY)$ dir. □

Teorem 2.1.3. *"$\sim_{B_r}$", $\mathcal{O}$ üzerinde tam ayırt edilemezlik bağıntısı olsun. X ve Y, $\mathcal{O}$ nun boştan farklı alt kümeleri olmak üzere*

$$(N_r(B)_* X)(N_r(B)_* Y) \subseteq N_r(B)_* (XY)$$

dir.

İspat. $z \in (N_r(B)_* X)(N_r(B)_* Y)$ olsun. Bu durumda $x \in N_r(B)_* X$ ve $y \in N_r(B)_* Y$ olmak üzere, $z = x.y$ alınabilir. Böylece $[x]_{B_r} \subseteq X$ ve $[y]_{B_r} \subseteq Y$ olur. "$\sim_{B_r}$", $\mathcal{O}$ üzerinde tam ayırt edilemezlik bağıntısı olduğundan $[x.y]_{B_r} = [x]_{B_r}[y]_{B_r} \subseteq XY$ dir. Buradan $z = x.y \in N_r(B)_* (XY)$ olur.

Dolayısıyla $(N_r(B)_* X)(N_r(B)_* Y) \subseteq N_r(B)_* (XY)$ elde edilir. □

2.2 Yakınlık Yarı Grupları ve İdealleri

Bu kısımda yakınlık yarı grubu ve yakınlık yarı grubunun yakınlık ideali kavramları örneklerle birlikte verilecektir. Ayrıca, yakınlık yarı grubunun yakınlık sol, sağ ve iki yanlı ideali kavramları ile ilgili bazı özellikler incelenecektir.

Tanım 2.2.1. *$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ yakın yaklaşım uzayı; "$\cdot$", $\mathcal{O}$ üzerinde bir ikili işlem ve $S \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa S ye yakın yaklaşım uzayı üzerinde yakın yarı grup veya kısaca yakınlık yarı grubu denir:*

(1) Her $x, y \in S$ için $x \cdot y \in N_r(B)^* S$ dir.

(2) Her $x, y, z \in S$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ özelliği $N_r(B)^* S$ de sağlanır.

Örnek 2.2.1. *$\mathcal{O} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ çıkarım fonksiyonları*

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\},$$

$$\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$

$$\varphi_3 : \mathcal{O} \longrightarrow V_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$$

Tablo 8 deki gibi tanımlansın.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
φ_1	α_1	α_2	α_2	α_3	α_1	α_1	α_4	α_2	α_3	α_2
φ_2	α_3	α_3	α_1	α_1	α_2	α_2	α_2	α_3	α_1	α_3
φ_3	α_2	α_3	α_1	α_3	α_4	α_2	α_1	α_3	α_2	α_3

Tablo 8

$\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde bir "$\cdot$" ikili işlemi Tablo 9 daki gibi verilsin.

$\cdot$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	a	b	a	a	a	a	a	h	a	a
b	b	b	c	d	d	d	g	h	i	j
c	a	c	c	a	a	a	g	a	a	a
d	d	c	d	d	e	a	a	h	i	a
e	a	a	a	e	e	f	a	a	i	j
f	a	f	a	d	f	f	a	h	i	a
g	a	b	a	d	g	g	a	g	c	j
h	h	b	c	d	e	e	f	h	i	a
i	a	b	i	i	a	a	f	i	a	a
j	j	j	a	a	e	a	a	h	a	j

Tablo 9

$S = \{e, f, g\}$, algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olsun. $S \subseteq \mathcal{O}$ üzerinde "$\cdot$" ikili işlemi Tablo 10 daki gibi tanımlıdır.

$\cdot$	e	f	g
e	e	f	a
f	f	f	a
g	g	g	a

Tablo 10

Bu durumda

$$\begin{aligned}
[a]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(a) = \alpha_1\} \\
&= \{a, e, f\} = [e]_{\varphi_1} = [f]_{\varphi_1}, \\
[b]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(b) = \alpha_2\} \\
&= \{b, c, h, j\} = [c]_{\varphi_1} = [h]_{\varphi_1} = [j]_{\varphi_1}, \\
[d]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(d) = \alpha_3\} \\
&= \{d, i\} = [i]_{\varphi_1}, \\
[f]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(g) = \alpha_4\} \\
&= \{g\}
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\xi_{\varphi_1} = \left\{[o]_{\varphi_1}, [b]_{\varphi_1}, [d]_{\varphi_1}, [g]_{\varphi_1}\right\}$ *dir.*

$$\begin{aligned}
[o]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(o) = \alpha_3\} \\
&= \{o, b, g, i\} = [b]_{\varphi_2} = [g]_{\varphi_2} = [i]_{\varphi_2}, \\
[c]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(c) = \alpha_1\} \\
&= \{c, d, i\} = [d]_{\varphi_2} = [i]_{\varphi_2}, \\
[d]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(e) = \alpha_2\} \\
&= \{e, f, g\} = [f]_{\varphi_2} = [g]_{\varphi_2}
\end{aligned}$$

dir. O zaman $\xi_{\varphi_2} = \left\{[a]_{\varphi_2}, [c]_{\varphi_2}, [e]_{\varphi_2}\right\}$ *olur.*

$$\begin{aligned}
[a]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(a) = \alpha_2\} \\
&= \{a, f, i\} = [f]_{\varphi_3} = [i]_{\varphi 3}, \\
[b]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(b) = \alpha_3\} \\
&= \{b, d, h, j\} = [c]_{\varphi_3} = [h]_{\varphi_3} = [j]_{\varphi_3}, \\
[c]_{\varphi_3} & \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(c) = \alpha_1\} \\
&= \{c, g\} = [g]_{\varphi_3}, \\
[e]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(e) = \alpha_4\} \\
&= \{e\}
\end{aligned}$$

dir. Buradan $\xi_{\varphi_3} = \left\{[a]_{\varphi_3}, [b]_{\varphi_3}, [c]_{\varphi_3}, [e]_{\varphi_3}\right\}$ *tür.*

Böylece $r = 1$ *için* $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi* $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ *tür.*

Böylece

$$\begin{aligned} N_1(B)^* S &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap S \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i} \\ &= \{a,e,f\} \cup \{g\} \cup \{e,f,g\} \cup \{a,f,i\} \cup \{c,g\} \cup \{e\} \\ &= \{a,c,e,f,g,i\} \end{aligned}$$

elde edilir. Tanım 2.2.1 dikkate alınırsa S bir yakınlık yarı grubudur.

$N_r(B)$ ayrışımların kümesi $r = 1$ olmak üzere, $N_1(B) = \{\xi_{\mathcal{O},B_1} \mid B_1 \subseteq B\}$ şeklinde tanımlıdır. Burada $N_1(B)$, B deki çıkarım fonksiyonlarının birli kombinasyonları $\binom{|B|}{1}$ kullanılarak elde edilir, yani her bir çıkarım fonksiyonu için tek bir ayrışım elde edilir. $r = 2$ için çıkarım fonksiyonlarının ikili kombinasyonları dikkate alınarak ayrışımlar hesaplanır.

Örnek 2.2.2. *$\mathcal{O} = \{a,b,c,d,e,f,g,h,i,j\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun. $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \varphi_4$ çıkarım fonksiyonları*

$$\begin{aligned} \varphi_1 &: \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, \\ \varphi_2 &: \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\}, \\ \varphi_3 &: \mathcal{O} \longrightarrow V_3 = \{\alpha_1, \alpha_3, \alpha_5\}, \\ \varphi_4 &: \mathcal{O} \longrightarrow V_4 = \{\alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\} \end{aligned}$$

Tablo 11 deki gibi tanımlansın.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
φ_1	α_1	α_2	α_2	α_5	α_1	α_1	α_2	α_4	α_1	α_3
φ_2	α_4	α_2	α_3	α_5	α_4	α_5	α_3	α_5	α_2	α_2
φ_3	α_1	α_5	α_1	α_1	α_1	α_1	α_3	α_1	α_3	α_1
φ_4	α_5	α_5	α_3	α_4	α_5	α_3	α_3	α_5	α_3	α_5

Tablo 11

$\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde bir "$\cdot$" ikili işlemi Tablo 9 daki gibi verilsin.

$S = \{e,f,g\}$, algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olsun. $S \subseteq \mathcal{O}$ üzerinde "$\cdot$" ikili işlemi Tablo 10 daki gibi tanımlıdır. Böylece

$$
\begin{aligned}
[b]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_2(x') = \varphi_1(b) = \varphi_2(b) = \alpha_2\} \\
&= \{b\}, \\
[d]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_2(x') = \varphi_1(d) = \varphi_2(d) = \alpha_5\} \\
&= \{d\}
\end{aligned}
$$

dir. Böylece $\xi_{(\varphi_1,\varphi_2)} = \xi_{(\varphi_2,\varphi_1)} = \left\{[b]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}}, [d]_{\{\varphi_1,\varphi_2\}}\right\}$ *olur.*

$$
\begin{aligned}
[a]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_3(x') = \varphi_1(a) = \varphi_3(a) = \alpha_1\} \\
&= \{a, e, f\} = [e]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}} = [f]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}}
\end{aligned}
$$

tür. O halde $\xi_{(\varphi_1,\varphi_3)} = \xi_{(\varphi_3,\varphi_1)} = \left\{[a]_{\{\varphi_1,\varphi_3\}}\right\}$ *olur.*

$$
\begin{aligned}
[g]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_3(x') = \varphi_2(g) = \varphi_3(g) = \alpha_3\} \\
&= \{g\}
\end{aligned}
$$

dir. Buradan $\xi_{(\varphi_2,\varphi_3)} = \xi_{(\varphi_3,\varphi_2)} = \left\{[g]_{\{\varphi_2,\varphi_3\}}\right\}$ *tür.*

$$
\begin{aligned}
[c]_{\{\varphi_2,\varphi_4\}} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_4(x') = \varphi_2(c) = \varphi_4(c) = \alpha_3\} \\
&= \{c, g\} = [g]_{\{\varphi_2,\varphi_4\}}, \\
[h]_{\{\varphi_2,\varphi_4\}} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_4(x') = \varphi_2(h) = \varphi_4(h) = \alpha_5\} \\
&= \{h\}
\end{aligned}
$$

olur. Böylece $\xi_{(\varphi_2,\varphi_4)} = \xi_{(\varphi_4,\varphi_2)} = \left\{[c]_{\{\varphi_2,\varphi_4\}}, [h]_{\{\varphi_2,\varphi_4\}}\right\}$ *tür. Son olarak*

$$
\begin{aligned}
[b]_{\{\varphi_3,\varphi_4\}} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_4(x') = \varphi_3(b) = \varphi_4(b) = \alpha_5\} \\
&= \{b\}, \\
[g]_{\{\varphi_3,\varphi_4\}} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_4(x') = \varphi_3(g) = \varphi_4(g) = \alpha_3\} \\
&= \{g, i\} = [i]_{\{\varphi_3,\varphi_4\}}
\end{aligned}
$$

olur. Dolayısıyla $\xi_{(\varphi_3,\varphi_4)} = \xi_{(\varphi_4,\varphi_3)} = \left\{[b]_{\{\varphi_3,\varphi_4\}}, [g]_{\{\varphi_3,\varphi_4\}}\right\}$ *bulunur.*

Böylece $r = 2$ *için* $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi* $N_2(B) = \left\{\xi_{(\varphi_1,\varphi_2)}, \xi_{(\varphi_1,\varphi_3)}, \xi_{(\varphi_2,\varphi_3)}, \xi_{(\varphi_2,\varphi_4)}, \xi_{(\varphi_3,\varphi_4)}\right\}$ *tür.*

Böylece

$$\begin{aligned} N_2(B)^* S &= \bigcup_{[x]_{\{\varphi_i,\varphi_j\}} \cap S \neq \varnothing} [x]_{\{\varphi_i,\varphi_j\}} \\ &= \{a,e,f\} \cup \{g\} \cup \{c,g\} \cup \{g,i\} \\ &= \{a,c,e,f,g,i\} \end{aligned}$$

elde edilir. Tanım 2.2.1 dikkate alınırsa S bir yakınlık yarı grubudur.

Tanım 2.2.2. *$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı, S yakınlık yarı grubu ve I, S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $S(N_r(B)^* I) \subseteq N_r(B)^* I$ $((N_r(B)^* I)S \subseteq N_r(B)^* I)$ ise, bu durumda I ya, S yakınlık yarı grubunun bir sol (sağ) yakınlık ideali denir. I hem sağ hem de sol yakınlık ideali ise I ya S yakınlık yarı grubunun iki yanlı yakınlık ideali veya yakınlık ideali denir.*

Teorem 2.2.1. *$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı ve $S \subseteq \mathcal{O}$ olmak üzere*

(1) S bir yarı grup ise S bir yakınlık yarı grubudur.

(2) I, S yakınlık yarı grubunun bir sol (sağ, iki yanlı) ideali ise I, S yakınlık yarı grubunun bir yakınlık sol (sağ, iki yanlı) idealidir.

İspat. (1) S bir yarı grup olsun. $S \subseteq \mathcal{O}$ olduğundan Teorem 2.1.1 (1) den, $\varnothing \neq S \subseteq N_r(B)^* S$ dir. Böylece her $x, y, z \in S$ için $x \cdot y \in N_r(B)^* S$ ve $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ özelliği $N_r(B)^* S$ de sağlanır ve dolayısıyla S bir yakınlık yarı grubudur.

(2) I, S yakınlık yarı grubunun bir sol ideali, yani $SI \subseteq I$ olsun. $S \subseteq N_r(B)^* S$ dir. Bu durumda Teorem 2.1.2 ve Teorem 2.1.1 (5) ten

$$\begin{aligned} S(N_r(B)^* I) &\subseteq (N_r(B)^* S)(N_r(B)^* I) \\ &\subseteq N_r(B)^* (SI) \subseteq N_r(B)^* I \end{aligned}$$

olur ve dolayısıyla $N_r(B)^* I$, S yakınlık yarı grubunun bir sol idealidir. O halde I, S yakınlık yarı grubunun bir yakınlık sol idealidir.

Diğer durumlar benzer yol izlenerek kolayca görülür. □

Teorem 2.2.1 dikkate alınırsa, yakınlık yarı grubu ve yakınlık sol (sağ, iki yanlı) ideal kavramları, yarı grup ve yarı grubun sol (sağ, iki yanlı) ideal kavramlarının genelleştirmeleridir.

Teorem 2.2.2. *"$\sim_{B_r}$", $\mathcal{O}$ üzerinde tam ayırt edilemezlik bağıntısı olmak üzere, $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ bir yakın yaklaşım uzayı, $S \subseteq \mathcal{O}$ bir yarı grup ve $A \subseteq S$ olsun. Bu durumda*

(1) A, S yarı grubunun bir alt yarı grubu ise $N_r(B)_* A$ boştan farklı olmak üzere, S nin bir alt yarı grubudur.

(2) I, S nin bir sol (sağ, iki yanlı) ideali ise $N_r(B)_* I$ boştan farklı olmak üzere, $N_r(B)_* S$ nin bir sol (sağ, iki yanlı) idealidir.

İspat. (1) A, S yarı grubunun bir alt yarı grubu olsun. Bu durumda Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.1.1 (4) kullanılırsa

$$\begin{aligned} (N_r(B)_* A)(N_r(B)_* A) &\subseteq N_r(B)_* (AA) \\ &\subseteq N_r(B)_* A \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $N_r(B)_* A$, S nin bir alt yarı grubudur.

(2) I, S nin bir sol ideali, yani $SI \subseteq I$ olsun. Bu durumda Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.1.1 (4) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} (N_r(B)_* S)(N_r(B)_* I) &\subseteq N_r(B)_* (SI) \\ &\subseteq N_r(B)_* I \end{aligned}$$

bulunur. Buradan $N_r(B)_* I$, $N_r(B)_* S$ nin bir sol idealidir.

Diğer durumlar benzer yol izlenerek kolayca görülür. □

Tanım 2.2.3. *$S \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık yarı grubu ve I, S nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. $(N_r(B)^* I)\, S\, (N_r(B)^* I) \subseteq N_r(B)^* I$ ise I ya S nin bir yakınlık bi-ideali denir.*

Teorem 2.2.3. *"$\sim_{B_r}$", $\mathcal{O}$ üzerinde bir tam ayırt edilemezlik bağıntısı ve $S \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Bu durumda I, S nin bir bi-ideali olmak üzere; I, S nin bir yakınlık bi-idealidir.*

İspat. I, S nin bir bi-ideali olsun. Bu durumda Teorem 2.1.2 ve Teorem 2.1.1 (5) dikkate alınırsa,

$$\begin{aligned} (N_r(B)^* I)\, S\, (N_r(B)^* I) &\subseteq (N_r(B)^* I)(N_r(B)^* S)(N_r(B)^* I) \\ &\subseteq N_r(B)^* (ISI) \\ &\subseteq N_r(B)^* I \end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.2.2 (1) den $N_r(B)^* I$, S nin bir bi-idealidir. Böylece I, S nin bir yakınlık bi-idealidir. □

Teorem 2.2.4. *"$\sim_{B_r}$", $\mathcal{O}$ üzerinde bir tam ayırt edilemezlik bağıntısı ve $S \subseteq \mathcal{O}$ olsun. I, S nin bir bi-ideali ise o zaman $N_r(B)_* I$ boştan farklı olmak üzere, $N_r(B)_* S$ nin bir bi-idealidir.*

İspat. I, S nin bir bi-ideali olsun. Bu durumda Teorem 2.1.3 ve Teorem 2.1.1 (6) dan

$$\begin{aligned}(N_r(B)_* I)(N_r(B)_* S)(N_r(B)_* I) &\subseteq N_r(B)_* (ISI) \\ &\subseteq N_r(B)_* I\end{aligned}$$

elde edilir. Teorem 2.2.2 (1) den $N_r(B)_* I$, $N_r(B)_* S$ nin bir bi-idealidir. □

Teorem 2.2.5. *$S \subseteq \mathcal{O}$ olsun. I ve J, sırasıyla S nin sağ ve sol idealleri olmak üzere*

$$N_r(B)^* (IJ) \subseteq (N_r(B)^* I) \cap (N_r(B)^* J)$$

dir.

İspat. I ve J, sırasıyla S nin sağ ve sol idealleri olsun. Bu durumda $IJ \subseteq IS \subseteq I$ ve $IJ \subseteq SJ \subseteq J$ olur. Buradan $IJ \subseteq I \cap J$ dir. Böylece, Teorem 2.1.1 (5) ve Teorem 2.1.1 (7) kullanılırsa

$$N_r(B)^* (IJ) \subseteq N_r(B)^* (I \cap J) \subseteq (N_r(B)^* I) \cap (N_r(B)^* J)$$

elde edilir. □

Teorem 2.2.6. *$S \subseteq \mathcal{O}$ olsun. I ve J, sırasıyla S nin sağ ve sol idealleri olmak üzere*

$$N_r(B)_* (IJ) \subseteq (N_r(B)_* I) \cap (N_r(B)_* J)$$

dir.

İspat. I ve J, sırasıyla S nin sağ ve sol idealleri olsun. Bu durumda $IJ \subseteq IS \subseteq I$ ve $IJ \subseteq SJ \subseteq J$ dir. Böylece $IJ \subseteq I \cap J$ olur. Sonuç olarak, Teorem 2.1.1 (3) ve Teorem 2.1.1 (4) den

$$N_r(B)_* (IJ) \subseteq N_r(B)_* (I \cap J) \subseteq (N_r(B)_* I) \cap (N_r(B)_* J)$$

bulunur. □

BÖLÜM 3

YAKINLIK GRUPLARI

Yakın yaklaşım uzaylarında tek işlemli cebirsel yapılarından biri olan yakınlık gruplarının araştırıldığı bu bölüm beş kısımdır. İlk kısımda, yakınlık grupları ve alt yakınlık grupları kavramları araştırıldı. İkinci kısımda, normal alt yakınlık gruplarına değinildi. Üçüncü kısımda, yakınlık grupları dikkate alınarak zayıf kalan sınıfları incelendi. Dördüncü kısımda, normal alt yakınlık grupları kullanılmadan zayıf kalan sınıflarının yakınlık gruplarının var olması için gerekli şartlar araştırıldı. Son kısım ise yakınlık grup homomorfizmalarına ve bu kavramlarla ilgili bazı tanım ve teoremlere ayrıldı.

3.1 Yakınlık Grupları ve Alt Yakınlık Grupları

Bu kısımda yakınlık gruplarının ve alt yakınlık gruplarının tanımları örneklerle birlikte verilecektir. Yakınlık gruplarının elemanlarının bazı temel özellikleri incelenecek ve bir yakınlık grubunun boştan farklı bir alt kümesinin alt yakınlık grubu olabilmesi için gerek ve yeter koşula yer verilecektir.

Tanım 3.1.1. $(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ *yakın yaklaşım uzayı; "$\cdot$", $\mathcal{O}$ üzerinde bir ikili işlem ve $G \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa G ye yakın yaklaşım uzayı üzerinde yakın grup veya kısaca yakınlık grubu denir:*

(YG_1) *Her $x, y \in G$ için $x \cdot y \in N_r(B)^* G$ dir.*

(YG_2) *Her $x, y, z \in G$ için $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ özelliği $N_r(B)^* G$ de sağlanır.*

(YG_3) *Her $x \in G$ için $x \cdot e = e \cdot x = x$ olacak biçimde bir $e \in N_r(B)^* G$ vardır (burada e, G nin yakın birim elemanıdır).*

(YG_4) *Her $x \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x = e$ olacak biçimde bir $y \in G$ vardır (burada y, G deki x elemanının yakın tersidir).*

Örnek 3.1.1. $\mathcal{O} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ *algılanabilen nesnelerin kümesi ve* $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathcal{F}$ *çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.* $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$ *çıkarım fonksi-*

yonları

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$
$$\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\alpha_1, \alpha_2\},$$
$$\varphi_3 : \mathcal{O} \longrightarrow V_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$$

Tablo 12 deki gibi tanımlansın.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
φ_1	α_2	α_3	α_2	α_2	α_1	α_1	α_3	α_1	α_2	α_3
φ_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_1	α_2	α_1	α_1	α_2
φ_3	α_3	α_1	α_3	α_3	α_4	α_2	α_2	α_4	α_3	α_1

Tablo 12

$\mathcal{O}$ *algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde bir "$\cdot$" ikili işlemi Tablo 13 teki gibi verilsin.*

$\cdot$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	b	c	d	e	f	g	h	i	j	a
c	c	d	e	f	g	h	i	j	a	b
d	d	e	f	g	h	i	j	a	b	c
e	e	f	g	h	i	j	a	b	c	d
f	f	g	h	i	j	a	b	c	d	e
g	g	h	i	j	a	b	c	d	e	f
h	h	i	j	a	b	c	d	e	f	g
i	i	j	a	b	c	d	e	f	g	h
j	j	a	b	c	d	e	f	g	h	i

Tablo 13

$\mathcal{O}$ *algılanabilen nesneler kümesinin "$\cdot$" işlemi ile bir grup olduğu kolayca görülebilir.* $G = \{a, b, c, f, i, j\}$ *algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere,* $G \subseteq \mathcal{O}$ *üzerinde "$\cdot$" ikili işlemi Tablo 14 deki gibi olur.*

$\cdot$	a	b	c	f	i	j
a	a	b	c	f	i	j
b	b	c	d	g	j	a
c	c	d	d	h	a	b
f	f	g	h	a	d	d
i	i	j	a	d	g	h
j	j	a	b	d	h	i

Tablo 14

Bu durumda

$$\begin{aligned}
[a]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(a) = \alpha_2\} \\
&= \{a, c, d, i\} = [c]_{\varphi_1} = [d]_{\varphi_1} = [i]_{\varphi_1}, \\
[b]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(b) = \alpha_3\} \\
&= \{b, g, j\} = [g]_{\varphi_1} = [j]_{\varphi_1}, \\
[e]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(e) = \alpha_1\} \\
&= \{e, f, h\} = [f]_{\varphi_1} = [h]_{\varphi_1}
\end{aligned}$$

dir. O zaman $\xi_{\varphi_1} = \left\{[a]_{\varphi_1}, [b]_{\varphi_1}, [e]_{\varphi_1}\right\}$ *dir.*

$$\begin{aligned}
[a]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(a) = \alpha_1\} \\
&= \{a, c, e, f, h, i\} = [c]_{\varphi_2} = [e]_{\varphi_2} = [f]_{\varphi_2} = [h]_{\varphi_2} = [i]_{\varphi_2}, \\
[b]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(b) = \alpha_2\} \\
&= \{b, d, g, j\} = [d]_{\varphi_2} = [g]_{\varphi_2} = [j]_{\varphi_2}
\end{aligned}$$

dir. Buradan $\xi_{\varphi_2} = \left\{ [a]_{\varphi_2}, [b]_{\varphi_2} \right\}$ *olur. Son olarak,*

$$\begin{aligned} [a]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(a) = \alpha_3\} \\ &= \{a, c, d, i\} = [c]_{\varphi_3} = [d]_{\varphi_3} = [i]_{\varphi_3}, \\ [b]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(b) = \alpha_1\} \\ &= \{b, j\} = [j]_{\varphi_3}, \\ [e]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(e) = \alpha_4\} \\ &= \{e, h\} = [h]_{\varphi_3}, \\ [f]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(f) = \alpha_2\} \\ &= \{f, g\} = [g]_{\varphi_3} \end{aligned}$$

tür ve dolayısıyla $\xi_{\varphi_3} = \left\{ [a]_{\varphi_3}, [b]_{\varphi_3}, [e]_{\varphi_3}, [f]_{\varphi_3} \right\}$ *elde edilir.*

Böylece $r = 1$ *için* $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi* $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ *tür.*

Bu durumda

$$\begin{aligned} N_1(B)^* G &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap G \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i} \\ &= [a]_{\varphi_1} \cup [b]_{\varphi_1} \cup [e]_{\varphi_1} \cup [a]_{\varphi_2} \cup [b]_{\varphi_2} \cup [a]_{\varphi_3} \cup [b]_{\varphi_3} \cup [f]_{\varphi_3} \\ &= \{a, c, d, i\} \cup \{b, g, j\} \cup \{e, f, h\} \cup \{a, c, e, f, h, i\} \\ &\quad \cup \{b, d, g, j\} \cup \{b, j\} \cup \{f, g\} \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\} = \mathcal{O} \end{aligned}$$

elde edilir. Bununla birlikte

(YG_1) *Her* $x, y \in G$ *için* $x \cdot y \in N_r(B)^* G = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ *dir.*

(YG_2) *Her* $x, y, z \in G$ *için* $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *özelliği* $N_r(B)^* G$ *de sağlanır.*

(YG_3) *Her* $x \in G$ *için* $x \cdot e = e \cdot x = x$ *olacak biçimde en az bir* $e = a \in N_r(B)^* G$ *yakın birim elemanı vardır.*

(YG_4) *Her* $x \in G$ *için* $x \cdot y = y \cdot x = a$ *olacak biçimde en az bir* $y \in G$ *vardır, yani* $a^{-1} = a$, $b^{-1} = j$, $c^{-1} = i$, $f^{-1} = f$, $i^{-1} = c$ *ve* $j^{-1} = b$ *dir.*

O halde $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin* G *alt kümesi bir yakınlık grubudur.*

Uyarı 3.1.1. *Tanım 3.1.1 de* (YG_1) *ve* (YG_2) *özellikleri* G *nin üst yaklaşımı* $N_r(B)^* G$ *de sağlanmak zorundadır. Bazı durumlarda bu özellikler* $\mathcal{O} \setminus N_r(B)^* G$ *de sağlanabilir. Bu durumda* G *bir yakınlık grubu olamaz.*

Örnek 3.1.2. *Örnek 3.1.1 deki* $G = \{a, b, c, f, i, j\}$ *yakın grubunun bir alt kümesi* $H = \{a, c, f, i\}$ *olsun.* $H \subset \mathcal{O}$ *üzerinde "$\cdot$" ikili işlemi Tablo 15 deki gibi tanımlansın.*

$\cdot$	a	c	f	i
a	a	c	f	i
c	c	e	h	a
f	f	h	a	d
i	i	a	d	g

Tablo 15

Örnek 3.1.1 den, $r = 1$ *için* $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin bir ayrışımı* $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ *tür. Böylece*

$$\begin{aligned} N_1(B)^* H &= \textstyle\bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap H \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i} \\ &= \{a, c, d, i\} \cup \{e, f, h\} \cup \{a, c, e, f, h, i\} \cup \{f\} \\ &= \{a, c, d, e, f, h, i\} \neq \mathcal{O} \end{aligned}$$

olur. $c, f \in H \subset \mathcal{O}$ *için* $(c \cdot f) \cdot c = c \cdot (f \cdot c)$ *birleşme özelliğine bakılırsa* $j = j$ *dir. Ancak* $j \in \mathcal{O} \setminus N_1(B)^* H$ *olduğundan birleşme özelliği* $N_1(B)^* H$ *de sağlanmaz. Bu durumda Uyarı 3.1.1 den* H *bir yakınlık grubu olamaz.*

Uyarı 3.1.2. $G \subseteq \mathcal{O}$ *daki elemanların sonlu sayıdaki çarpımları her zaman* $N_r(B)^* G$ *ye ait olmayabilir, yani her* $x \in G$ *ve bazı* $n \in \mathbb{N}$ *için her zaman* $x^n \in N_r(B)^* G$ *geçerli değildir. Eğer* $(N_r(B)^* G, \cdot)$ *grupoid ise o zaman her* $x \in G$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $x^n \in N_r(B)^* G$ *dir.*

Örnek 3.1.3. *Örnek 3.1.2 de* $i \in H \subset G$ *ve* $n = 2$ *için* $i^2 = g \notin N_1(B)^* H$ *dir.*

Örnek 3.1.4. *Örnek 3.1.1 de* $(N_1(B)^* G, \cdot)$ *grupoid olduğundan her* $x \in G$ *ve her* $n \in \mathbb{N}$ *için* $x^n \in N_1(B)^* G$ *dir.*

Önerme 3.1.1. *G bir yakınlık grubu olsun. Bu durumda*

(i) G nin bir ve yalnız bir yakın birim elemanı ($e \in N_r(B)^* G$) *vardır.*

(ii) Her $x \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x = e$ olacak şekilde bir tek $y \in G$ elemanı vardır ve $y = x^{-1}$ şeklinde gösterilir.

(iii) Her $x \in G$ için $\left(x^{-1}\right)^{-1} = x$ dir.

(iv) Her $x, y \in G$ için $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ dir.

İspat. (i) Kabul edelim ki, G nin iki yakın birim elemanı $e, e' \in N_r(B)^* G$ olsun. e yakın birim olduğundan her $x \in G$ için $e \cdot x = x \cdot e = x$ dir. $x = e'$ alınırsa $e \cdot e' = e' \cdot e = e'$ bulunur. Benzer şekilde e' yakın birim olduğundan her $x \in G$ için $e' \cdot x = x \cdot e' = x$ dir. $x = e$ alınırsa $e' \cdot e = e \cdot e' = e$ olur. Böylece $e = e'$ bulunur.

(ii) $x \in G$ nin tersi y ve y' olmak üzere iki tane olsun. Bu durumda $x \cdot y = y \cdot x = e$ ve $x \cdot y' = y' \cdot x = e$ eşitlikleri sağlanır. Böylece $y = y \cdot e = y \cdot (x \cdot y') = (y \cdot x) \cdot y'$ $= e \cdot y' = y'$ olur.

(iii) Her $x \in G$ için $x^{-1} \cdot x = e = x \cdot x^{-1}$ olduğundan x, x^{-1} elemanının tersidir. (ii) dikkate alınırsa, yakınlık grubunda ters elemanın tekliğinden ve $\left(x^{-1}\right)^{-1}$, x^{-1} in tersi olduğundan $x = \left(x^{-1}\right)^{-1}$ bulunur.

(iv) Her $x, y \in G$ için

$$
\begin{aligned}
(x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) &= ((x \cdot y) \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1} \\
&= (x \cdot (y \cdot y^{-1})) \cdot x^{-1} \\
&= (x \cdot e) \cdot x^{-1} \\
&= x \cdot x^{-1} = e
\end{aligned}
$$

olur. Benzer şekilde, $(y^{-1} \cdot x^{-1}) \cdot (x \cdot y) = e$ dir. Böylece $y^{-1} \cdot x^{-1}$, $x \cdot y$ elemanının tersidir. (ii) kullanılırsa, yakınlık grubunda ters elemanın tekliğinden ve $(x \cdot y)^{-1}$, $x \cdot y$ nin tersi olduğundan $(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}$ dir. □

Önerme 3.1.2. *G bir yakınlık grubu olmak üzere, her $a, x, x', y, y' \in G$ için*

(i) $a \cdot x = a \cdot x'$ ise $x = x'$,

(ii) $y \cdot a = y' \cdot a$ ise $y = y'$

dür.

İspat. (i) Her $a, x, x' \in G$ için

$$
\begin{aligned}
a \cdot x = a \cdot x' &\Rightarrow a^{-1} \cdot (a \cdot x) = a^{-1} \cdot (a \cdot x') \\
&\Rightarrow (a^{-1} \cdot a) \cdot x = (a^{-1} \cdot a) \cdot x' \\
&\Rightarrow x = x'
\end{aligned}
$$

olur.

(ii) Her $a, y, y' \in G$ için

$$\begin{aligned} y \cdot a = y' \cdot a \quad &\Rightarrow (y \cdot a) \cdot a^{-1} = (y' \cdot a) \cdot a^{-1} \\ &\Rightarrow y \cdot (a \cdot a^{-1}) = y' \cdot (a \cdot a^{-1}) \\ &\Rightarrow y = y' \end{aligned}$$

bulunur. □

Tanım 3.1.2. *H, G yakınlık grubunun boştan farklı bir alt kümesi olsun. H, G deki "$\cdot$" işlemi ile yakınlık grubu ise H ye G nin alt yakınlık grubu denir.*

Uyarı 3.1.3. *G yakınlık grubunun sadece bir tane aşikar alt yakınlık grubu vardır. Bu aşikar alt yakınlık grubu G nin kendisidir. Ayrıca $\{e\}$ nin G yakınlık grubunun alt yakınlık grubu olması için gerek ve yeter koşul, $e \in G$ olmasıdır.*

Teorem 3.1.1. *G bir yakınlık grubu, H de G nin boştan farklı bir alt kümesi ve $N_r(B)^* H$ grupoid olsun. Bu durumda H nin G yakınlık grubunun bir alt yakınlık grubu olması için gerek ve yeter koşul, her $x \in H$ için $x^{-1} \in H$ olmasıdır.*

İspat. $(\Rightarrow)$: Kabul edelim ki H, G yakınlık grubunun bir alt yakınlık grubu olsun. Bu durumda H bir yakınlık grubudur. Böylece her $x \in H$ için $x^{-1} \in H$ dir.
$(\Leftarrow)$: $N_r(B)^* H$ grupoid ve $H \subseteq G$ olduğundan, her $x, y, z \in H$ için $x \cdot y \in N_r(B)^* H$ ve $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ birleşme özelliği $N_r(B)^* H$ de sağlanır. Ayrıca her $x \in H$ için $x^{-1} \in H$ dir. Bu durumda her $x \in H$ için $x \cdot x^{-1} = e \in N_r(B)^* H$ bulunur. Böylece H, G yakınlık grubunun bir alt yakınlık grubudur. □

Örnek 3.1.5. *$\mathcal{O} = \{o, p, r, s, t, v, w, x\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.*

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\},$$
$$\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

çıkarım fonksiyonları Tablo 16 daki gibi tanımlansın.

	o	p	r	s	t	v	w	x
φ_1	α_4	α_2	α_1	α_2	α_1	α_3	α_4	α_3
φ_2	β_1	β_3	β_2	β_3	β_2	β_3	β_1	β_3

Tablo 16

Bununla birlikte, $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde "+" ikili işlemi Tablo 17 deki gibi verilsin.

$+$	o	p	r	s	t	v	w	x
o	o	p	r	s	t	v	w	x
p	p	r	s	t	v	w	x	o
r	r	s	t	v	w	x	o	p
s	s	t	v	w	x	o	p	r
t	t	v	w	x	o	p	r	s
v	v	w	x	p	p	r	s	t
w	w	x	o	p	r	s	t	v
x	x	o	p	r	s	t	v	w

Tablo 17

Tablo 17 den $v+(s+s) \neq (v+s)+s$ olduğundan $(\mathcal{O},+)$ bir grup değildir.

$G = \{r,t,w\}$ *algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere; G üzerinde "+" ikili işlemi Tablo 18 deki gibi olur.*

$+$	r	t	w
r	t	w	o
t	w	o	r
w	o	r	t

Tablo 18

Bu durumda

$$\begin{aligned}
[o]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(o) = \alpha_4\} \\
&= \{o,w\} \\
&= [w]_{\varphi_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[p]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(p) = \alpha_2\} \\
&= \{p,s\} \\
&= [s]_{\varphi_1},
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[r]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(r) = \alpha_1\} \\ &= \{r, t\} \\ &= [t]_{\varphi_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[v]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(v) = \alpha_3\} \\ &= \{v, x\} \\ &= [x]_{\varphi_1}\end{aligned}$$

dir. Böylece $\xi_{\varphi_1} = \left\{[o]_{\varphi_1}, [p]_{\varphi_1}, [r]_{\varphi_1}, [v]_{\varphi_1}\right\}$ *olur.*

$$\begin{aligned}[o]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(o) = \beta_1\} \\ &= \{o, w\} \\ &= [w]_{\varphi_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[p]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(p) = \beta_3\} \\ &= \{p, s, v, x\} \\ &= [s]_{\varphi_2} = [v]_{\varphi_2} = [x]_{\varphi_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[r]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(r) = \beta_2\} \\ &= \{r, t\} \\ &= [t]_{\varphi_2}\end{aligned}$$

dir. Buradan $\xi_{\varphi_2} = \left\{[o]_{\varphi_2}, [p]_{\varphi_2}, [r]_{\varphi_2}\right\}$ *olur ve dolayısıyla* $r = 1$ *için* $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi* $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}\}$ *elde edilir.*

Böylece

$$\begin{aligned}N_1(B)^* G &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap G \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i} \\ &= \{o, w\} \cup \{r, t\} \cup \{o, w\} \cup \{r, t\} \\ &= \{o, r, t, w\} \neq \mathcal{O}\end{aligned}$$

olur.

(YG_1) *Her* $x, y \in G$ *için* $x + y \in N_r(B)^* G$ *dir.*

(YG_2) *Her* $x, y, z \in G$ *için* $(x + y) + z = x + (y + z)$ *özelliği* $N_r(B)^* G$ *de sağlanır.*

(YG_3) *Her* $x \in G$ *için* $x + e = e + x = x$ *olacak biçimde en az bir* $e = o \in N_r(B)^* G$ *yakın birim elemanı vardır.*

(YG_4) *Her* $x \in G$ *için* $x + y = y + x = o$ *olacak biçimde en az bir* $y \in G$ *vardır, yani* $-r = w$, $-t = t$ *ve* $-w = r$ *dir.*

O halde $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin* G *alt kümesi bir yakınlık grubudur.*

G *yakınlık grubunun* $H = \{r, w\}$ *alt kümesi dikkate alınsın. Bu durumda* $N_1(B)^* H = \{o, r, t, w\}$ *ve* $(N_1(B)^* H, +)$ *grupoid olur. Teorem 3.1.1 dikkate alınırsa,* $-r = w$, $-w = r \in H$ *olduğundan* H*,* G *yakınlık grubunun bir alt yakınlık grubudur.*

Yakınlık grupları ile gruplar arasındaki önemli farklardan biri aşağıdaki teoremde verilmiştir.

Teorem 3.1.2. *G bir yakınlık grubu, H_1 ve H_2, G nin iki alt yakınlık grubu olsun. Bu durumda $N_r(B)^* H_1$ ve $N_r(B)^* H_2$ grupoid olmak üzere*

$$(N_r(B)^* H_1) \cap (N_r(B)^* H_2) = N_r(B)^* (H_1 \cap H_2)$$

ise $H_1 \cap H_2$, G nin bir alt yakınlık grubudur.

İspat. H_1 ve H_2, G nin iki alt yakınlık grubu olsun. $H_1 \cap H_2 \subset G$ olduğu açıktır. $N_r(B)^* H_1$, $N_r(B)^* H_2$ grupoid ve $(N_r(B)^* H_1) \cap (N_r(B)^* H_2) = N_r(B)^* (H_1 \cap H_2)$ olduğundan $N_r(B)^* (H_1 \cap H_2)$ de bir grupoid olur. $x \in H_1 \cap H_2$ olmak üzere, H_1 ve H_2 alt yakınlık grupları olduğundan $x^{-1} \in H_1$ ve $x^{-1} \in H_2$, yani $x^{-1} \in H_1 \cap H_2$ dir. Sonuç olarak, Teorem 3.1.1 den $H_1 \cap H_2$, G nin bir alt yakınlık grubudur. □

Tanım 3.1.3. *G bir yakınlık grubu olmak üzere, her $x, y \in G$ için $x \cdot y = y \cdot x$ özelliği $N_r(B)^* G$ de sağlanıyorsa G ye değişmeli yakınlık grubu denir.*

Örnek 3.1.6. *Örnek 3.1.1 deki yakınlık grubu, değişmeli yakınlık grubudur.*

3.2 Normal Alt Yakınlık Grupları

Tanım 3.2.1. *$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ yakın yaklaşım uzayı; "$\cdot$", $\mathcal{O}$ üzerinde bir ikili işlem, $G \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık grubu ve N, G nin bir alt yakınlık grubu olsun. Her $a \in G$ için $a \cdot N = N \cdot a$ ise N ye G nin normal alt yakınlık grubu denir.*

Teorem 3.2.1. *G bir yakınlık grubu ve N, G nin alt yakınlık grubu olsun. N alt yakınlık grubunun G nin normal alt yakınlık grubu olması için gerek ve yeter koşul, her $a \in G$ için $a \cdot N \cdot a^{-1} = N$ olmasıdır.*

İspat. N, G nin bir normal alt yakınlık grubu olsun. Tanım 3.2.1 den her $a \in G$ için $a \cdot N = N \cdot a$ dır. G bir yakınlık grubu olduğundan,

$$
\begin{aligned}
& (a \cdot N) \cdot a^{-1} = (N \cdot a) \cdot a^{-1} \\
\Rightarrow \quad & a \cdot N \cdot a^{-1} = N \cdot (a \cdot a^{-1}) \\
\Rightarrow \quad & a \cdot N \cdot a^{-1} = N
\end{aligned}
$$

olur. Diğer taraftan N, G nin bir alt yakınlık grubu ve her $a \in G$ için $a \cdot N \cdot a^{-1} = N$ olsun. Bu durumda $(a \cdot N \cdot a^{-1}) \cdot a = N \cdot a$, yani $a \cdot N = N \cdot a$ bulunur. Böylece N, G nin bir normal alt yakınlık grubudur. □

Teorem 3.2.2. *G bir yakınlık grubu ve N, G nin alt yakınlık grubu olsun. N alt yakınlık grubunun G nin normal alt yakınlık grubu olması için gerek ve yeter koşul, her $a \in G$ ve her $n \in N$ için $a \cdot n \cdot a^{-1} \in N$ olmasıdır.*

İspat. $(\Rightarrow)$: N, G nin bir normal alt yakınlık grubu olsun. Her $a \in G$ için $a \cdot N \cdot a^{-1} = N$ dir. Böylece herhangi bir $n \in N$ için $a \cdot n \cdot a^{-1} \in N$ olur.

$(\Leftarrow)$: N, G nin bir alt yakınlık grubu ve her $a \in G$ ve her $n \in N$ için $a \cdot n \cdot a^{-1} \in N$ olsun. Bu durumda $a \cdot N \cdot a^{-1} \subset N$ dir. Bununla birlikte $a^{-1} \in G$ olduğundan $a \cdot (a^{-1} \cdot N \cdot a) \cdot a^{-1} \subset a \cdot N \cdot a^{-1}$, yani $N \subset a \cdot N \cdot a^{-1}$ olur. $a \cdot N \cdot a^{-1} \subset N$ ve $N \subset a \cdot N \cdot a^{-1}$ olduğundan $a \cdot N \cdot a^{-1} = N$ elde edilir. Böylece Teorem 3.2.1 den N bir normal alt yakınlık grubudur. □

3.3 Zayıf Kalan Sınıfları

Bu kısımda G yakınlık grubu üzerinde zayıf eşdeğerlik bağıntısı ve zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yakınlık gruplarında belirttiği zayıf kalan sınıfları verilecektir.

Tanım 3.3.1. *Boştan farklı bir $X \subseteq \mathcal{O}$ kümesi üzerinde tanımlanan bağıntı yansıyan ve simetrik ise, bu bağıntıya zayıf eşdeğerlik bağıntısı denir.*

$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ yakın yaklaşım uzayı, $G \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık grubu ve H, G nin bir alt yakınlık grubu olsun. $a, b \in G$ olmak üzere, G nin elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "$\sim_r$" bağıntısı tanımlanabilir:

$$a \sim_r b :\Longleftrightarrow a \cdot b^{-1} \in H \cup \{e\}.$$

Teorem 3.3.1. *G bir yakınlık grubu olmak üzere, "$\sim_r$" bağıntısı G üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.*

İspat. G bir yakınlık grubu olduğundan her $a \in G$ için $a^{-1} \in G$ dir. $a \cdot a^{-1} = e \in H \cup \{e\}$ olduğundan $a \sim_r a$ olur. Her $a, b \in G$ için $a \sim_r b$ ise $a \cdot b^{-1} \in H \cup \{e\}$, yani $a \cdot b^{-1} \in H$ veya $a \cdot b^{-1} \in \{e\}$ olur. $a \cdot b^{-1} \in H$ ise H, G nin bir alt yakınlık grubu olduğundan $(a \cdot b^{-1})^{-1} = b \cdot a^{-1} \in H$ dir. Böylece $b \sim_r a$ bulunur. Ayrıca $a \cdot b^{-1} \in \{e\}$ ise $a \cdot b^{-1} = e$ dir. Buradan $b \cdot a^{-1} = (a \cdot b^{-1})^{-1} = e^{-1} = e$ ve böylece $b \sim_r a$ olur. Sonuç olarak, "$\sim_r$" bağıntısı G üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır. □

Herhangi bir $a \in G$ için "$\sim_r$" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yakınlık grubunda belirttiği sınıf:

$$\begin{aligned}
\tilde{a} &= \{b \in G \mid b \sim_r a\} \\
&= \{b \in G \mid b \cdot a^{-1} \in H \cup \{e\}\} \\
&= \{b \in G \mid b \cdot a^{-1} \in H \text{ veya } b \cdot a^{-1} \in \{e\}\} \\
&= \{b \in G \mid b \in H \cdot a \text{ veya } b \cdot a^{-1} = e\} \\
&= \{b \in G \mid b \in H \cdot a \text{ veya } a = b\} \\
&= \{h \cdot a \mid h \in H,\ a \in G,\ h \cdot a \in G\} \cup \{a\}
\end{aligned}$$

dır.

Tanım 3.3.2. *G bir yakınlık grubu ve H, G nin alt yakınlık grubu olsun. "$\sim_r$" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yakınlık grubunda belirttiği sınıflara sağ zayıf kalan sınıfı denir. Herhangi bir a elemanı için sağ zayıf kalan sınıfı $H \cdot a$ ile gösterilir, yani*

$$H \cdot a = \{h \cdot a \mid h \in H,\ a \in G,\ h \cdot a \in G\} \cup \{a\}$$

dır.

$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ yakın yaklaşım uzayı, $G \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık grubu ve H, G nin bir alt yakınlık grubu olsun. Bu durumda G yakınlık grubunun elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "$\sim_\ell$" bağıntısı tanımlanabilir:

$$a \sim_\ell b : \iff a^{-1} \cdot b \in H \cup \{e\}.$$

Teorem 3.3.2. *G bir yakınlık grubu ve H, G nin alt yakınlık grubu olsun. G bir yakınlık grubu olmak üzere, "$\sim_\ell$" bağıntısı G üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.*

İspat. G bir yakınlık grubu olduğundan her $a \in G$ için $a^{-1} \in G$ dir. $a \cdot a^{-1} = e$ olduğundan $a \sim_\ell a$ olur. Her $a, b \in G$ için $a \sim_\ell b$ ise $a^{-1} \cdot b \in H \cup \{e\}$, yani $a^{-1} \cdot b \in H$ veya $a^{-1} \cdot b \in \{e\}$ olur. $a^{-1} \cdot b \in H$ ise H, G nin bir alt yakınlık grubu olduğundan $(a^{-1} \cdot b)^{-1} = b^{-1} \cdot a \in H$ dir. Böylece $b \sim_\ell a$ bulunur. Ayrıca $a^{-1} \cdot b \in \{e\}$ ise $a^{-1} \cdot b = e$ dir. Buradan $b^{-1} \cdot a = (a^{-1} \cdot b)^{-1} = e^{-1} = e$ ve böylece $b \sim_\ell a$ olur. Sonuç olarak, "$\sim_\ell$" bağıntısı G üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır. □

Tanım 3.3.3. *G bir yakınlık grubu ve H, G nin alt yakınlık grubu olsun. "$\sim_\ell$" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının G yakınlık grubunda belirttiği sınıflara sol zayıf kalan sınıfları denir. Herhangi bir a elemanı için sol zayıf kalan sınıfı $a \cdot H$ ile gösterilir, yani*

$$a \cdot H = \{a \cdot h \mid h \in H,\ a \in G,\ a \cdot h \in G\} \cup \{a\}$$

dır.

Uyarı 3.3.1. *Genel olarak, yakınlık grubunun ikili işlemi her zaman değişme özelliğini sağlamayabilir. Bundan dolayı "$\sim_r$" ve "$\sim_\ell$" zayıf eşdeğerlik bağıntıları farklıdır. Sonuç olarak, sağ zayıf ve sol zayıf kalan sınıfları da farklı olabilir.*

G bir yakınlık grubu; H, G nin bir alt yakınlık grubu ve $a \in G$ olmak üzere, bundan sonraki kısımlarda G nin H ile belirlenen tüm sol zayıf kalan sınıflarının kümesi için "$a \cdot H$" yerine "aH" kullanılmıştır.

Teorem 3.3.3. *G bir yakınlık grubu ve H, G nin bir alt yakınlık grubu olmak üzere, sağ zayıf ve sol zayıf kalan sınıflarının eleman sayıları aynıdır.*

İspat. S_1 ve S_2 sırasıyla sağ zayıf ve sol zayıf kalan sınıf ailelerinin kümesi olsun. $\varphi : S_1 \longrightarrow S_2$ fonksiyonu $\varphi(Ha) = a^{-1}H$ şeklinde tanımlansın. φ fonksiyonunun birebir ve örten olduğu gösterilebilir. $a, b \in G$ olmak üzere, $Ha = Hb$ $(a \neq b)$ ise $ab^{-1} \in H$ dir. H bir yakınlık grubu olduğundan $ba^{-1} \in H$ dir. Böylece $a^{-1} \in b^{-1}H$, yani $a^{-1}H = b^{-1}H$ olur. Buradan φ iyi tanımlıdır. S_2 nin herhangi bir $a \cdot H$ elemanı için Ha^{-1}, S_1 in elemanıdır. Böylece φ örten bir fonksiyondur. $Ha \neq Hb$ ise $ab^{-1} \notin H$ dir, yani $a^{-1}H \neq b^{-1}H$ olur. Buradan φ birebir bir fonksiyondur.

Böylece sağ zayıf ve sol zayıf kalan sınıflarının eleman sayılarının birbirine eşit olduğu görülür. □

Tanım 3.3.4. *G bir yakınlık grubu ve H, G nin bir alt yakınlık grubu olmak üzere, sol zayıf kalan sınıflarının (veya sağ zayıf kalan sınıflarının sayısına) H alt yakınlık grubunun G deki indeksi denir ve $[G : H]_\ell$ (veya $[G : H]_r$) ile gösterilir.*

3.4 Zayıf Kalan Sınıflarının Yakınlık Grupları

Bu kısımda iki zayıf kalan sınıfının çarpımının tanımı verilecektir. Bu çarpımla birlikte normal alt yakınlık gruplarına gerek kalmadan zayıf kalan sınıflarının yakınlık grubunun hangi şartlar altında var olduğu gösterilecektir. Ayrıca sol zayıf kalan sınıflarının ailesinin bir alt kümesinin üst yaklaşımı tanımsal arakesit yardımıyla tanımlanacaktır.

G nin H ile belirlenen tüm sol zayıf kalan sınıflarının kümesi

$$G/_{\sim_L} = \{aH \mid a \in G\}$$

dir. Burada G yerine $N_r(B)^* G$ alınırsa

$$(N_r(B)^* G)/_{\sim_L} = \{aH \mid a \in N_r(B)^* G\}$$

elde edilir. Bu durumda

$$aH = \{a \cdot h \mid h \in H,\ a \in N_r(B)^* G,\ a \cdot h \in G\} \cup \{a\}$$

olur.

Tanım 3.4.1. *G bir yakınlık grubu ve H, G nin bir alt yakınlık grubu olsun. $a, b \in G$ olmak üzere, aH ve bH sırasıyla a ve b elemanlarının belirlediği sol zayıf kalan sınıflar olsun. Bu durumda $a \cdot b \in N_r(B)^* G$ elemanının belirlediği sol zayıf kalan sınıfı*

$$(a \cdot b) H = \{(a \cdot b) h \mid h \in H,\ a \cdot b \in N_r(B)^* G,\ \ (a \cdot b) \cdot h \in G\} \cup \{a \cdot b\}$$

dır. Buna sol zayıf kalan sınıflarının carpımı denir ve

$$aH \odot bH = (a \cdot b) H$$

ile gösterilir.

Tanım 3.4.2. *$\mathcal{O}$ algılanabilen nesneler kümesi, $G \subset \mathcal{O}$ bir yakınlık grubu ve H, G nin bir alt yakınlık grubu olsun. $G/_{\sim_L}$, G nin H ile belirlenen tüm sol zayıf kalan sınıflarının kümesi ve $\xi_\Phi(A)$, $A \in \mathcal{P}(\mathcal{O})$ kümesinin tanımsal yakınlık küme ailesi olmak üzere,*

$$N_r(B)^* (G/_{\sim_L}) = \bigcup_{\xi_\Phi(A) \underset{\Phi}{\cap} G/_{\sim_L} \neq \emptyset} \xi_\Phi(A)$$

kümesine $G/_{\sim_L}$ nin üst yaklaşımı denir.

Teorem 3.4.1. *G bir yakınlık grubu; H, G nin bir alt yakınlık grubu ve $G/_{\sim_L}$, G nin H ile belirlenen tüm sol zayıf kalan sınıflarının kümesi olsun. Bu durumda*

$$(N_r(B)^* G)/_{\sim_L} \subseteq N_r(B)^* (G/_{\sim_L})$$

ise her $a, b \in G$ için

$$aH \odot bH = (a \cdot b) H$$

şeklinde tanımlı "$\odot$" işlemine göre $G/_{\sim_L}$ bir yakınlık grubudur.

İspat. (YG_1) : G bir yakınlık grubu olduğundan, her aH, $bH \in G/_{\sim_L}$ için $a \cdot b \in N_r(B)^* G$ ve $aH \odot bH = (a \cdot b) H \in (N_r(B)^* G)/_{\sim_L}$ dir. Hipotezden, her aH, $bH \in G/_{\sim_L}$ için $aH \odot bH = (a \cdot b) H \in N_r(B)^* (G/_{\sim_L})$ olur.

(YG_2) : G bir yakınlık grubu olduğundan, her $a, b, c \in G$ için, birleşme özelliği $N_r(B)^* G$ de geçerlidir. Bu durumda, her aH, bH, $cH \in G/_{\sim_L}$ için

$$\begin{aligned}(aH \odot bH) \odot cH &= (a \cdot b) H \odot cH = ((a \cdot b) \cdot c) H \\ &= (a \cdot (b \cdot c)) H = aH \odot (b \cdot c) H \\ &= aH \odot (bH \odot cH)\end{aligned}$$

eşitliği hipotezden $N_r(B)^* (G/_{\sim_L})$ de sağlanır.

(YG_3) : G bir yakınlık grubu olduğundan, her $a \in G$ için $a \cdot e = e \cdot a = a$ olacak şekilde bir $e \in N_r(B)^* G$ vardır. Bu durumda her $aH \in G/_{\sim_L}$ için

$$\begin{aligned}aH \odot eH &= (a \cdot e) H = aH, \\ eH \odot aH &= (e \cdot a) H = aH\end{aligned}$$

bulunur. Böylece $eH \in (N_r(B)^* G)/_{\sim_L} \subseteq N_r(B)^* (G/_{\sim_L})$, $G/_{\sim_L}$ nin yakın birim elemanıdır.

(YG_4) : G bir yakınlık grubu olduğundan, her $a \in G$ için $a \cdot a' = a' \cdot a = e$ olacak şekilde bir $a' \in G$ vardır. Bu durumda her $aH \in G/_{\sim_L}$ için

$$\begin{aligned}aH \odot a'H &= (a \cdot a') H = eH, \\ a'H \odot aH &= (a' \cdot a) H = eH\end{aligned}$$

olur. Buradan $a'H$, aH nin yakın tersidir. Böylece $G/_{\sim_L}$ yakınlık grubudur. □

Tanım 3.4.3. *G bir yakınlık grubu ve H, G nin bir alt yakınlık grubu olsun. $G/_{\sim_L}$ yakınlık grubuna G nin H ile belirlenen tüm sol zayıf kalan sınıflarının yakınlık grubu denir ve $G/_w H$ şeklinde gösterilir.*

Örnek 3.4.1. *$\mathcal{O} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.*

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_5\},$$

$$\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\},$$

$$\varphi_3 : \mathcal{O} \longrightarrow V_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$$

çıkarım fonksiyonları Tablo 19 daki gibi tanımlansın.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
φ_1	α_1	α_2	α_1	α_3	α_1	α_5	α_1	α_3	α_1	α_2
φ_2	α_1	α_1	α_1	α_4	α_1	α_4	α_2	α_4	α_2	α_1
φ_3	α_2	α_3	α_2	α_4	α_2	α_1	α_3	α_3	α_3	α_4

Tablo 19

Bununla birlikte, $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde bir "$\cdot$" ikili işlemi Tablo 20 deki gibi verilsin.

$\cdot$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
a	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
b	b	c	d	e	f	g	h	i	j	a
c	c	d	e	f	g	h	i	j	a	b
d	d	e	f	g	h	i	j	a	b	c
e	e	f	g	h	i	j	a	b	c	d
f	f	g	h	i	j	a	b	c	d	e
g	g	h	i	j	a	b	c	d	e	f
h	h	i	j	a	b	c	d	e	f	g
i	i	j	a	b	c	d	e	f	g	h
j	j	a	b	c	d	e	f	g	h	i

Tablo 20

$G = \{c, i\}$ algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere, G üzerinde "$\cdot$" ikili işlemi Tablo 21 deki gibi olur.

$\cdot$	c	i
c	e	a
i	a	g

Tablo 21

Bu durumda

$$
\begin{aligned}
[a]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(a) = \alpha_1\} \\
&= \{a, c, e, g, i\} \\
&= [c]_{\varphi_1} = [e]_{\varphi_1} = [g]_{\varphi_1} = [i]_{\varphi_1},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[b]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(b) = \alpha_2\} \\
&= \{b, j\} \\
&= [j]_{\varphi_1},
\end{aligned}
$$

$$
[f]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(f) = \alpha_5\} = \{f\},
$$

$$
\begin{aligned}
[h]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(h) = \alpha_3\} \\
&= \{d, h\} \\
&= [d]_{\varphi_1}
\end{aligned}
$$

dir. Böylece $\xi_{\varphi_1} = \left\{[a]_{\varphi_1}, [b]_{\varphi_1}, [f]_{\varphi_1}, [h]_{\varphi_1}\right\}$ *olur.*

$$
\begin{aligned}
[a]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(a) = \alpha_1\} \\
&= \{a, b, c, e, j\} \\
&= [b]_{\varphi_2} = [c]_{\varphi_2} = [e]_{\varphi_2} = [j]_{\varphi_2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[d]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(d) = \alpha_4\} \\
&= \{d, f, h\} \\
&= [f]_{\varphi_2} = [h]_{\varphi_2},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[i]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(i) = \alpha_2\} \\
&= \{i, g\} \\
&= [g]_{\varphi_2}
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $\xi_{\varphi_2} = \left\{[a]_{\varphi_2}, [d]_{\varphi_2}, [i]_{\varphi_2}\right\}$ *dir. Son olarak,*

$$
\begin{aligned}
[a]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(a) = \alpha_2\} \\
&= \{a, c, e\} \\
&= [c]_{\varphi_3} = [e]_{\varphi_3},
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}[b]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(b) = \alpha_3\} \\ &= \{b, g, h, i\} \\ &= [g]_{\varphi_3} = [h]_{\varphi_3} = [i]_{\varphi_3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[d]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(d) = \alpha_4\} \\ &= \{d, j\} \\ &= [j]_{\varphi_3},\end{aligned}$$

$$[f]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(f) = \alpha_1\} = \{f\}$$

bulunur. Dolayısıyla $\xi_{\varphi_3} = \left\{[a]_{\varphi_3}, [b]_{\varphi_3}, [d]_{\varphi_3}, [f]_{\varphi_3}\right\}$ *tür.*

Böylece $r = 1$ *için* $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi* $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ *tür. Bu durumda*

$$\begin{aligned}N_1(B)^* G &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap G \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i} \\ &= \{a, c, e, g, i\} \cup \{a, b, c, e, j\} \cup \{g, i\} \cup \{a, c, e\} \cup \{b, g, h, i\} \\ &= \{a, b, c, e, g, h, i, j\} \neq \mathcal{O}\end{aligned}$$

elde edilir. Tanım 3.1.1 den $(G, \cdot)$ *nin bir yakınlık grubu olduğu görülebilir.*

$G = \{c, i\}$*,* G *nin bir alt kümesidir.* G *yakınlık grubu, kendisinin aşikar alt yakınlık grubudur. O halde* G *nin* G *ile belirlenen tüm sol zayıf kalan sınıfları, sol zayıf kalan sınıfının tanımından*

$$cG = \emptyset \cup \{c\} = \{c\}, \; iG = \emptyset \cup \{i\} = \{i\}$$

olur. Böylece $G/_w G = \{cG, iG\}$ *dir.*

$N_1(B)^* G = \{a, b, c, e, g, h, i, j\}$ *olduğundan,* $N_1(B)^* G$ *nin* G *ile belirlenen tüm sol zayıf kalan sınıfları*

$$aG = \{c, i\} \cup \{a\} = \{a, c, i\}, \; bG = \emptyset \cup \{b\} = \{b\},$$

$$eG = \{c\} \cup \{e\} = \{c, e\}, \; gG = \{i\} \cup \{g\} = \{g, i\},$$

$$hG = \emptyset \cup \{h\} = \{h\}, \; jG = \emptyset \cup \{j\} = \{j\}$$

şeklinde yazılır. Bu durumda

$(N_1(B)^* G)/_{\sim_L} = \{aG, bG, cG, eG, gG, hG, iG, jG\} \subset P(\mathcal{O})$ *elde edilir.*

$G/_wG$ *üzerinde "$\odot$" işlemi, Tanım 3.4.1 kullanılarak, Tablo 22 deki gibi tanımlansın.*

$\odot$	cG	iG
cG	eG	aG
iG	aG	gG

Tablo 22

$(N_r(B)^* G)/_{\sim_L} \subseteq N_r(B)^*(G/_wG)$ *olduğunu göstermek için* $(N_1(B)^* G)/_{\sim_L}$ *den alınan her elemanın* $N_1(B)^*(G/_wG)$ *de olduğunu göstermek yeterlidir.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(G/_wG) &= \{\Phi(A) \mid A \in G/_wG\} \\
&= \{\Phi(cG), \Phi(iG)\} \\
&= \{\{\Phi(c)\}, \{\Phi(i)\}\} \\
&= \{\{(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2)\}, \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\}\}
\end{aligned}$$

olur. $cG \in G/_wG$ *için*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Q}(cG) = \{\Phi(c)\} = \{(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2)\}, \\
&\mathcal{Q}(aG) = \{\Phi(a), \Phi(c), \Phi(i)\} = \{(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\}, \\
&\mathcal{Q}(eG) = \{\Phi(c), \Phi(e)\} = \{(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2), (\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2)\}
\end{aligned}$$

dir. $\mathcal{Q}(cG) \cap \mathcal{Q}(aG) = \{(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2)\} \neq \emptyset$ *ve* $\mathcal{Q}(cG) \cap \mathcal{Q}(eG) = \{(\alpha_1, \alpha_1, \alpha_2)\} \neq \emptyset$ *olduğundan* $aG, eG \in \xi_\Phi(cG)$ *olur. Böylece Tanım 3.4.2 den* $\xi_\Phi(cG) \underset{\Phi}{\cap} G/_wG \neq \emptyset$ *ve* $cG, aG, eG \in N_1(B)^*(G/_wG)$ *bulunur.*

$iG \in G/_wG$ *için*

$$\begin{aligned}
&\mathcal{Q}(iG) = \{\Phi(i)\} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\}, \\
&\mathcal{Q}(gG) = \{\Phi(g), \Phi(i)\} = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\}
\end{aligned}$$

tür. $\mathcal{Q}(iG) \cap \mathcal{Q}(gG) = \{(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)\} \neq \emptyset$ *olduğundan* $gG \in \xi_\Phi(iG)$ *dir. Bu durumda Tanım 3.4.2 den* $\xi_\Phi(iG) \underset{\Phi}{\cap} G/_wG \neq \emptyset$ *ve* $iG, gG \in N_1(B)^*(G/_wG)$ *olur. Dolayısıyla* $(N_r(B)^* G)/_{\sim_L} \subseteq N_r(B)^*(G/_wG)$ *dir.*

Sonuç olarak, Teorem 3.4.1 den $G/_{w}G$, Tablo 22 ile verilen işlemle birlikte, G nin G ile belirlenen tüm sol zayıf kalan sınıflarının yakınlık grubudur.

Aşağıdaki örnek Teorem 3.4.1 deki $\left(N_r\left(B\right)^{*}G\right)/_{\sim_L} \subseteq N_r\left(B\right)^{*}\left(G/_{\sim_L}\right)$ koşulunun önemini belirtmektedir.

Örnek 3.4.2. *$\mathcal{O} = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.*

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\},$$
$$\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_4\},$$
$$\varphi_3 : \mathcal{O} \longrightarrow V_3 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\}$$

çıkarım fonksiyonları Tablo 23 teki gibi tanımlansın.

	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j
φ_1	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_1	α_3	α_3	α_1	α_2
φ_2	α_1	α_2	α_2	α_4	α_4	α_4	α_4	α_4	α_2	α_1
φ_3	α_2	α_3	α_2	α_4	α_4	α_1	α_2	α_3	α_2	α_3

Tablo 23

Bununla birlikte, $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde bir "$\cdot$" ikili işlemi Tablo 20 deki gibi verilsin. Bu durumda $G = \{b, c, i, j\}$ algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere, G üzerinde "$\cdot$" ikili işlemi Tablo 24 deki gibi olur.

$\cdot$	b	c	i	j
b	c	d	j	a
c	d	e	a	b
i	j	a	g	h
j	a	b	h	i

Tablo 24

Bu durumda

$$\begin{aligned}
[a]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(a) = \alpha_1\} \\
&= \{a, c, e, f, i\} \\
&= [c]_{\varphi_1} = [e]_{\varphi_1} = [f]_{\varphi_1} = [i]_{\varphi_1}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[b]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(b) = \alpha_2\} \\
&= \{b, d, j\} \\
&= [d]_{\varphi_1} = [j]_{\varphi_1}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[g]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(g) = \alpha_3\} \\
&= \{g, h\} \\
&= [h]_{\varphi_1}
\end{aligned}$$

olur. Böylece $\xi_{\varphi_1} = \left\{[a]_{\varphi_1}, [b]_{\varphi_1}, [g]_{\varphi_1}\right\}$ *dir.*

$$\begin{aligned}
[a]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(a) = \alpha_1\} \\
&= \{a, j\} \\
&= [j]_{\varphi_2}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[b]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(b) = \alpha_2\} \\
&= \{b, c, i\} \\
&= [c]_{\varphi_2} = [i]_{\varphi_2}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[d]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(d) = \alpha_4\} \\
&= \{d, e, f, g, h\} \\
&= [e]_{\varphi_2} = [f]_{\varphi_2} = [g]_{\varphi_2} = [h]_{\varphi_2}
\end{aligned}$$

dir. O halde $\xi_{\varphi_2} = \left\{[a]_{\varphi_2}, [b]_{\varphi_2}, [d]_{\varphi_2}\right\}$ *olur. Son olarak,*

$$\begin{aligned}
[a]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(a) = \alpha_2\} \\
&= \{a, c, g, i\} \\
&= [c]_{\varphi_3} = [g]_{\varphi_3} = [i]_{\varphi_3}\,,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[b]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(b) = \alpha_3\} \\ &= \{b, h, j\} \\ &= [h]_{\varphi_3} = [j]_{\varphi_3},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[d]_{\varphi_3} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(d) = \alpha_4\} \\ &= \{d, e\} \\ &= [e]_{\varphi_3},\end{aligned}$$

$$[f]_{\varphi_3} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_3(x') = \varphi_3(f) = \alpha_1\} = \{f\}$$

bulunur. Böylece $\xi_{\varphi_3} = \left\{[a]_{\varphi_3}, [b]_{\varphi_3}, [d]_{\varphi_3}, [f]_{\varphi_3}\right\}$ *elde edilir. Dolayısıyla* $r = 1$ *için* $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi* $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}, \xi_{\varphi_3}\}$ *tür. Bu durumda*

$$\begin{aligned}N_1(B)^* G &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap G \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i} \\ &= \{a, c, e, f, i\} \cup \{b, d, j\} \cup \{a, c, g, i\} \cup \{b, h, j\} \cup \{a, j\} \cup \{b, c, i\} \\ &= \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}\end{aligned}$$

elde edilir. Tanım 3.1.1 den G *nin yakınlık grubu olduğu kolayca görülür.*

$G = \{b, c, i, j\}$ *nin* $H = \{b, j\}$ *alt kümesi dikkate alınsın.* H *kümesi üzerinde bir "$\cdot$" ikili işlemi Tablo 25 deki gibi verilsin.*

$\cdot$	b	j
b	c	a
j	a	i

Tablo 25

$H \subseteq G$ *nin üst yaklaşımı*

$$\begin{aligned}N_1(B)^* H &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap H \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i} \\ &= \{b, d, j\} \cup \{b, h, j\} \cup \{a, j\} \cup \{b, c, i\} \\ &= \{a, b, c, d, h, i, j\}\end{aligned}$$

olur. H nin G yakınlık grubunun alt yakınlık grubu olduğu kolayca görülür. Bu durumda G nin H ile belirlenen tüm sol zayıf kalan sınıfları, sol zayıf kalan sınıfının tanımından

$$bH = \{c\} \cup \{b\} = \{b, c\}\,,\ cH = \{b\} \cup \{c\} = \{b, c\}\,,$$
$$iH = \{j\} \cup \{i\} = \{i, j\}\,,\ jH = \{i\} \cup \{j\} = \{i, j\}$$

olur. Böylece $G/_wH = \{bH, cH, iH, jH\}$ elde edilir.

$N_1(B)^* G = \{a, b, c, d, e, f, g, h, i, j\}$ olduğundan $N_1(B)^* G$ nin H ile belirlenen tüm sol zayıf kalan sınıfları

$$aH = \{b, j\} \cup \{a\} = \{a, b, j\}\,,\ dH = \{c\} \cup \{d\} = \{c, d\}\,,$$
$$eH = \emptyset \cup \{e\} = \{e\}\,,\ fH = \emptyset \cup \{f\} = \{f\}\,,$$
$$gH = \emptyset \cup \{g\} = \{g\}\,,\ hH = \{i\} \cup \{h\} = \{h, i\}$$

dir. Böylece $(N_1(B)^* G)/_{\sim_L} = \{aH, bH, cH, dH, eH, fH, gH, hH, iH, jH\} \subset P(\mathcal{O})$ olur.

$G/_wH$ üzerinde "$\odot$" işlemi, Tanım 3.4.1 kullanılarak, Tablo 26 daki gibi tanımlansın.

$\odot$	bH	cH	iH	jH
bH	cH	dH	jH	aH
cH	dH	eH	aH	bH
iH	jH	aH	gH	hH
jH	aH	bH	hH	iH

Tablo 26

$(N_1(B)^* G)/_{\sim_L}$ ye ait olup $N_1(B)^*(G/_{\sim_L})$ kümesine ait olmayan en az bir eleman bulunabilirse $(N_1(B)^* G)/_{\sim_L} \nsubseteq N_1(B)^*(G/_{\sim_L})$ olduğu görülür.

$gH \in (N_1(B)^* G)/_{\sim_L}$ için $\mathcal{Q}(gH) = \{\Phi(g)\} = \{(\alpha_3, \alpha_4, \alpha_2)\}$ dir. $\xi_\Phi(gH) \underset{\Phi}{\cap} G/_{\sim_L} = \emptyset$ olduğundan, Tanım 3.4.2 den $gH \notin N_1(B)^*(G/_{\sim_L})$ dir. Böylece $iH \in G/_{\sim_L}$ için $iH \odot iH = gH \notin N_1(B)^*(G/_{\sim_L})$ olur. Dolayısıyla (YG_1) sağlanmaz. Sonuç olarak, $(N_1(B)^* G)/_{\sim_L} \subseteq N_1(B)^*(G/_{\sim_L})$ koşulu sağlanmaz ise $G/_{\sim_L}$, G nin H ile belirlenen tüm sol zayıf kalan sınıflarının yakınlık grubu olamaz.

3.5 Yakınlık Grup Homomorfizmaları

Bu kısımda farklı veya aynı yakın yaklaşım uzaylarında verilen yakın gruplar arasında tanımlanan yakınlık grup homomorfizması kavramı verilecektir. Yakınlık grup homomorfizmalarının bazı temel özellikleri teoremlerle incelenecektir. Bunlardan başka kısıtlanmış yakınlık grup homomorfizması kavramına ve bu kavramlar yardımı ile yakınlık grupları için temel yakınlık homomorfizma teoremine yer verilecektir.

$\left(\mathcal{O}_1, \mathcal{F}_1, \sim_{B_{r_1}}, N_{r_1}(B), \nu_{N_{r_1}}\right)$, $\left(\mathcal{O}_2, \mathcal{F}_2, \sim_{B_{r_2}}, N_{r_2}(B), \nu_{N_{r_2}}\right)$ iki yakın yaklaşım uzayı ve "$\cdot$", "$\circ$" sırasıyla $\mathcal{O}_1$ ve $\mathcal{O}_2$ üzerinde iki ikili işlem olsun.

Tanım 3.5.1. *$(G_1, \cdot) \subset \mathcal{O}_1$ ve $(G_2, \circ) \subset \mathcal{O}_2$ iki yakınlık grubu olsun. Her $x, y \in N_{r_1}(B)^* G_1$ için*

$$\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$$

olacak şekilde örten bir

$$\varphi : N_{r_1}(B)^* G_1 \longrightarrow N_{r_2}(B)^* G_2$$

fonksiyonu varsa φ ye yakınlık grup homomorfizması denir. G_1 ve G_2 yakınlık gruplarına da yakın homomorfiktir denir ve $G_1 \simeq_n G_2$ ile gösterilir.

Bu kısım boyunca, her $x, y \in N_{r_1}(B)^* G_1$ için $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ olmak üzere

$$\varphi : N_{r_1}(B)^* G_1 \longrightarrow N_{r_2}(B)^* G_2$$

bir yakınlık grup homomorfizması olarak dikkate alınmıştır.

Teorem 3.5.1. *$(G_1, \cdot) \subset \mathcal{O}_1$ ve $(G_2, \circ) \subset \mathcal{O}_2$ yakın homomorfik gruplar olsun. G_1 değişmeli yakınlık grubu ise G_2 de değişmeli yakınlık grubudur.*

İspat. G_1 ve G_2 yakın homomorfik olduğundan, her $x, y \in N_{r_1}(B)^* G_1$ için $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ dir. φ örten olduğundan, her $x', y' \in N_{r_2}(B)^* G_2$ için $x' = \varphi(x)$, $y' = \varphi(y)$ olacak biçimde en az bir $x, y \in N_{r_1}(B)^* G_1$ vardır. Böylece $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \circ \varphi(y)$ ve $\varphi(y \cdot x) = \varphi(y) \circ \varphi(x)$ olur. Son olarak, $x \cdot y = y \cdot x$ olduğu dikkate alınırsa $\varphi(x) \circ \varphi(y) = \varphi(y) \circ \varphi(x)$ elde edilir. Sonuç olarak, G_2 değişmeli yakınlık grubudur. □

Teorem 3.5.2. *$(G_1, \cdot) \subset \mathcal{O}_1$ ve $(G_2, \circ) \subset \mathcal{O}_2$ yakın homomorfik gruplar ve $N_{r_1}(B)^* \varphi(G_1) = N_{r_2}(B)^* G_2$ olsun. Bu durumda $\varphi(G_1)$ de bir yakınlık grubudur.*

İspat. (YG_1) : Her $x', y' \in \varphi(G_1)$ için $x' = \varphi(x)$, $y' = \varphi(y)$ olacak biçimde en az bir $x, y \in G_1$ vardır. Böylece $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \circ \varphi(y) \in N_{r_1}(B)^* G_2 = N_{r_2}(B)^* \varphi(G_1)$ olur. Buradan $x' \circ y' \in N_{r_2}(B)^* \varphi(G_1)$ elde edilir.

(YG_2) : $e \in N_{r_1}(B)^* G_1$, $\varphi(e) \in N_{r_2}(B)^* G_2$ ve her $x \in G_1$ için $\varphi(x) \in \varphi(G_1)$ olduğundan $\varphi(e) \circ \varphi(x) = \varphi(e \cdot x) = \varphi(x)$ olur.

(YG_3) : G_1 bir yakınlık grubu olduğundan her $x, y, z \in G_1$ için $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$ dir. Böylece

$$\varphi(x \cdot (y \cdot z)) = \varphi(x) \circ \varphi(y \cdot z) = \varphi(x) \circ (\varphi(y) \circ \varphi(z)),$$
$$\varphi((x \cdot y) \cdot z) = \varphi(x \cdot y) \circ \varphi(z) = (\varphi(x) \circ \varphi(y)) \circ \varphi(z)$$

ve

$$(\varphi(x) \circ \varphi(y)) \circ \varphi(z) = \varphi(x) \circ (\varphi(y) \circ \varphi(z))$$

bulunur.

(YG_4) : Her $x' \in \varphi(G_1)$ için $x' = \varphi(x)$ olacak biçimde en az bir $x \in G_1$ vardır. G_1 bir yakınlık grubu olduğundan $x^{-1} \in G_1$ dir. Böylece $\varphi(x^{-1}) \in \varphi(G_1)$ ve $\varphi(x) \circ \varphi(x^{-1}) = \varphi(x^{-1}) \circ \varphi(x) = \varphi(e)$ olur ve dolayısıyla $(x')^{-1} = \varphi(x^{-1})$ dir. Sonuç olarak, $\varphi(G_1)$ bir yakınlık grubudur. □

Teorem 3.5.3. *$(G_1, \cdot) \subset \mathcal{O}_1$ ve $(G_2, \circ) \subset \mathcal{O}_2$ yakın homomorfik gruplar ve e ile e' sırasıyla G_1 ve G_2 yakınlık gruplarının yakın birim elemanları olsun. Bu durumda*

(1) $\varphi(e) = e'$,

(2) Her $x \in G_1$ için $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$

dir.

İspat. (1) φ yakınlık grup homomorfizması olduğundan $\varphi(e) \circ \varphi(e) = \varphi(e \cdot e) = \varphi(e) = \varphi(e) \circ e'$ olur. Önerme 3.1.2 (i) den $\varphi(e) = e'$ elde edilir.

(2) φ yakınlık grup homomorfizması ve $x \cdot x^{-1} = e$ olduğundan $\varphi(x \cdot x^{-1}) = \varphi(e)$ ve dolayısıyla (1) den $\varphi(x) \circ \varphi(x)^{-1} = e'$ olur. Öte yandan, $\varphi(x)^{-1} \circ \varphi(x) = e'$ olduğundan ve Önerme 3.1.1 (ii) den $\varphi(x^{-1}) = \varphi(x)^{-1}$ dir. □

Tanım 3.5.2. *$(G_1,\cdot)\subset\mathcal{O}_1$ ve $(G_2,\circ)\subset\mathcal{O}_2$ iki yakınlık grubu ve φ, $N_{r_1}(B)^* G_1$ den $N_{r_2}(B)^* G_2$ ye yakınlık grup homomorfizması olsun. e', G_2 nin yakın birim elemanı olmak üzere,*

$$\{x\in G_1 \mid \varphi(x)=e'\}$$

kümesine, φ yakınlık grup homomorfizmasının çekirdeği denir ve $Ker\varphi$ ile gösterilir.

Teorem 3.5.4. *$(G_1,\cdot)\subset\mathcal{O}_1$ ve $(G_2,\circ)\subset\mathcal{O}_2$ yakın homomorfik gruplar ve $Ker\varphi$, φ yakınlık grup homomorfizmasının çekirdeği olsun. $N_{r_1}(B)^*(Ker\varphi)$ grupoid olmak üzere; $Ker\varphi$, G_1 in bir normal alt yakınlık grubudur.*

İspat. Tanım 3.5.2 den, her $x\in Ker\varphi$ için $\varphi(x)=e'$ olur. Böylece her $x\in Ker\varphi$ için $\varphi(x)=e'$ ve $\varphi(x^{-1})=\varphi(x)^{-1}=(e')^{-1}=e'$ olduğundan $x^{-1}\in Ker\varphi$ dir. Teorem 3.1.1 den $Ker\varphi$, G_1 in bir alt yakınlık grubudur. $y\in G_1$ ve $x\in Ker\varphi$ olsun. Bu durumda her $y\in G_1$ ve her $x\in Ker\varphi$ için

$$\begin{aligned}\varphi(y\cdot x\cdot y^{-1}) &= \varphi(y)\circ\varphi(x)\circ\varphi(y^{-1})\\ &= \varphi(y)\circ\varphi(x)\circ\varphi(y)^{-1}\\ &= \varphi(y)\circ e'\circ\varphi(y)^{-1}=e'\end{aligned}$$

olur. Böylece $y\cdot x\cdot y^{-1}\in Ker\varphi$ dir. Sonuç olarak, Teorem 3.2.2 den $Ker\varphi$, G_1 in bir normal alt yakınlık grubudur. □

Teorem 3.5.5. *$(G_1,\cdot)\subset\mathcal{O}_1$ ve $(G_2,\circ)\subset\mathcal{O}_2$ yakın homomorfik gruplar, H_1 ve N_1 sırasıyla G_1 in bir alt yakınlık grubu ve normal alt yakınlık grubu ve $N_{r_1}(B)^* H_1$ grupoid olsun. Bu durumda*

(1) $\varphi(N_{r_1}(B)^* H_1)=N_{r_2}(B)^*\varphi(H_1)$ ise $\varphi(H_1)$, G_2 nin bir alt yakınlık grubudur.

(2) $\varphi(G_1)=G_2$ ve $\varphi(N_{r_1}(B)^* N_1)=N_{r_2}(B)^*\varphi(N_1)$ ise $\varphi(N_1)$, G_2 nin bir normal alt yakınlık grubudur.

İspat. (1) φ örten olduğundan, her $x',y'\in\varphi(H_1)$ için $x'=\varphi(x)$, $y'=\varphi(y)$ olacak biçimde en az bir $x,y\in H_1$ vardır ve her $x,y\in N_{r_1}(B)^* H_1$ için $\varphi(x)\circ\varphi(y)=\varphi(x\cdot y)\in\varphi(N_{r_1}(B)^* H_1)$ dir. $\varphi(N_{r_1}(B)^* H_1)=N_{r_1}(B)^*\varphi(H_1)$ olduğundan $\varphi(x)\circ\varphi(y)\in N_{r_1}(B)^*\varphi(H_1)$ olur.

Bununla birlikte, φ örten olduğundan her $x' \in \varphi(H_1)$ için $x' = \varphi(x)$ olacak biçimde en az bir $x \in H_1$ vardır.

H_1, G_1 in bir alt yakınlık grubu olduğundan $x^{-1} \in H_1$ dir. Böylece $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1}) \in \varphi(H_1)$ olur. Sonuç olarak, Teorem 3.2.1 den $\varphi(H_1)$, G_2 nin bir alt yakınlık grubudur.

(2) $\varphi(N_{r_1}(B)^* N_1) = N_{r_2}(B)^* \varphi(N_1)$ olduğundan ve (1) den $\varphi(N_1)$, G_2 nin bir alt yakınlık grubudur. $x' \in G_2 = \varphi(G_1)$ ve $n' \in \varphi(N_1)$ ise o zaman $x' = \varphi(g)$ ve $n' = \varphi(n)$ olacak şekilde $g \in G_1$ ve $n \in N_1$ vardır. N_1, G_1 in normal alt yakınlık grubu olduğundan $g \cdot n \cdot g^{-1} \in N_1$ dir. O halde $x' \circ n' \circ (x')^{-1} = \varphi(g) \circ \varphi(n) \circ \varphi(g^{-1}) = \varphi(g \cdot n \cdot g^{-1}) \in \varphi(N_1)$ olur. Sonuç olarak, Teorem 3.2.2 den $\varphi(N_1)$, G_2 nin bir normal alt yakınlık grubudur. □

Teorem 3.5.6. *$(G_1, \cdot) \subset \mathcal{O}_1$ ve $(G_2, \circ) \subset \mathcal{O}_2$ yakın homomorfik gruplar, H_2 ve N_2 sırasıyla G_2 nin bir alt yakınlık grubu ve normal alt yakınlık grubu olsun. Bu durumda*

(1) H_1, H_2 nin ön görüntüsü ve $N_{r_1}(B)^* H_1$ grupoid olmak üzere, $\varphi(N_{r_1}(B)^* H_1) = N_{r_2}(B)^* H_2$ ise H_1, G_1 yakınlık grubunun bir alt yakınlık grubudur.

(2) N_1, N_2 nin ön görüntüsü olmak üzere, $\varphi(G_1) = G_2$ ve $\varphi(N_{r_1}(B)^* N_1) = N_{r_2}(B)^* N_2$ ise N_1, G_1 yakınlık grubunun bir normal alt yakınlık grubudur.

İspat. (1) H_1, H_2 nin ön görüntüsü olduğundan $\varphi(H_1) = H_2$ dir. Böylece her $x, y \in H_1$ için $\varphi(x)$, $\varphi(y) \in H_2$ olur. H_2, G_2 nin bir alt yakınlık grubu olduğundan $\varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \circ \varphi(y) \in N_{r_2}(B)^* H_2 = \varphi(N_{r_1}(B)^* H_1)$ dir. Buradan $x \cdot y \in N_{r_1}(B)^* H_1$ olur. Her $x \in H_1$ için $\varphi(x) \in H_2$ dir. H_2, G_2 nin bir alt yakınlık grubu olduğundan $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1}) \in H_2$ bulunur. Böylece $x^{-1} \in H_1$ olur ve dolayısıyla Teorem 3.2.1 den H_1, G_1 yakınlık grubunun bir alt yakınlık grubudur.

(2) $\varphi(N_{r_1}(B)^* N_1) = N_{r_2}(B)^* \varphi(N_1)$ olduğundan ve (1) den N_1, G_1 yakınlık grubunun bir alt yakınlık grubudur. $\varphi(G_1) = G_2$ ve N_1 in N_2 normal alt yakınlık grubunun ön görüntüsü olduğu dikkate alınırsa her $x \in G_1$, $n \in N_1$ için $\varphi(x) \in \varphi(G_1) = G_2$ ve $\varphi(n) \in N_2$ olur. Ayrıca φ yakınlık grup homomorfizması olduğundan $\varphi(x)^{-1} = \varphi(x^{-1}) \in \varphi(G_1) = G_2$ dir. N_2, G_2 nin bir normal alt yakınlık grubu olduğundan $\varphi(x \cdot n \cdot x^{-1}) = \varphi(x) \circ \varphi(n) \circ \varphi(x^{-1}) \in N_2$ dir. Böylece $x \cdot n \cdot x^{-1} \in N_1$

olur. Sonuç olarak, Teorem 3.2.2 den N_1, G_1 yakınlık grubunun bir normal alt yakınlık grubudur. $\square$

Yakınlık grup homomorfizmaları, farklı yakın yaklaşım uzaylarındaki yakın gruplar yerine aynı yakın yaklaşım uzayındaki farklı yakın gruplar dikkate alınarak da tanımlanabilir.

Tanım 3.5.3. *$G_1, G_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık grubu ve χ, $N_r(B)^* G_1$ den $N_r(B)^* G_2$ ye tanımlı bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in G_1$ için*

$$\chi(x \cdot y) = \chi(x) \cdot \chi(y)$$

ise χ dönüşümüne yakınlık homomorfizması denir. Bu durumda G_1, G_2 ye yakın homomorfiktir denir ve $G_1 \simeq_n G_2$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.5.7. *$G \subset \mathcal{O}$ bir yakınlık grubu ve H, G nin alt yakınlık grubu olsun. Bu durumda her $x \in N_r(B)^* G$ için*

$$\Pi(x) = xH$$

ile tanımlı

$$\Pi : N_r(B)^* G \to N_r(B)^* (G/_w H)$$

fonksiyonu bir yakınlık grup homomorfizmasıdır.

İspat. Tanım 3.3.3 dikkate alınırsa Π iyi tanımlıdır. Tanım 3.4.1 kullanılırsa her $x, y \in G$ için

$$\Pi(x \cdot y) = (x \cdot y) H = xH \odot yH = \Pi(x) \odot \Pi(y)$$

olur. Böylece Tanım 3.5.3 ten Π bir yakınlık grup homomorfizmasıdır. $\square$

Tanım 3.5.4. *$G \subset \mathcal{O}$ bir yakınlık grubu ve H, G nin alt yakınlık grubu olmak üzere, her $x \in N_r(B)^* G$ için*

$$\Pi(x) = xH$$

ile tanımlı

$$\Pi : N_r(B)^* G \to N_r(B)^* (G/_w H)$$

yakınlık grup homomorfizmasına doğal yakınlık grup homomorfizması denir.

Örnek 3.5.1. *Örnek 3.4.1 den G nin G ile belirlenen tüm sol zayıf kalan sınıflarının $G/_wG$ yakınlık grubu dikkate alınsın. Her $x \in N_r(B)^* G$ için*

$$\begin{array}{rcl} \Pi : N_r(B)^* G & \longrightarrow & N_r(B)^* (G/_wG) \\ x & \longmapsto & \Pi(x) = xG \end{array}$$

fonksiyonu tanımlansın. Tanım 3.3.3 dikkate alınırsa Π iyi tanımlıdır ve Tanım 3.4.1 den her $x, y \in G$ için

$$\Pi(x \cdot y) = (x \cdot y) G = xG \odot yG = \Pi(x) \odot \Pi(y)$$

dir. Sonuç olarak Π, $N_r(B)^* G$ den $N_r(B)^* (G/_wG)$ ye tanımlı bir doğal yakınlık grup homomorfizmasıdır.

Tanım 3.5.5. *$G_1, G_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık grubu ve H, G_1 in boştan farklı bir alt kümesi olsun.*

$$\chi : N_r(B)^* G_1 \longrightarrow N_r(B)^* G_2$$

bir fonksiyon ve

$$\chi_H = \chi\big|_H : H \longrightarrow N_r(B)^* G_2$$

kısıtlanmış fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in H$ için

$$\chi(x \cdot y) = \chi_H(x \cdot y) = \chi_H(x) \cdot \chi_H(y) = \chi(x) \cdot \chi(y)$$

ise χ dönüşümüne kısıtlanmış yakınlık grup homomorfizması denir. Bu durumda G_1, G_2 ye kısıtlanmış yakın homomorfiktir denir ve $G_1 \simeq_{rn} G_2$ şeklinde gösterilir.

Teorem 3.5.8. *$G_1, G_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık grubu ve χ, $N_r(B)^* G_1$ den $N_r(B)^* G_2$ ye tanımlı bir yakınlık homomorfizması olsun. $(N_r(B)^* Ker\chi, \cdot)$ bir grupoid ve $(N_r(B)^* G_1)/_{\sim_L}$, $N_r(B)^* G_1$ in $Ker\chi$ tarafından belirlenen sol zayıf kalan sınıfları-nın kümesi olmak üzere,*

$$(N_r(B)^* G_1)/_{\sim_L} \subseteq N_r(B)^* (G_1/_wKer\chi)$$

ve

$$N_r(B)^* \chi(G_1) = \chi(N_r(B)^* G_1)$$

ise

$$G_1/_w Ker\chi \simeq_{rn} \chi(G_1)$$

dir.

İspat. $(N_r(B)^* Ker\chi, \cdot)$ bir grupoid olduğundan Teorem 3.5.4 dikkate alınırsa $Ker\chi$, G_1 in bir alt yakınlık grubudur. $(N_r(B)^* G_1)/_{\sim_L} \subseteq N_r(B)^* (G_1/_w Ker\chi)$ olduğundan ve Teorem 3.4.1 den $G_1/_w Ker\chi$, G_1 in $Ker\chi$ tarafından belirlenen sol zayıf kalan sınıflarının yakınlık grubudur. Ayrıca Teorem 3.5.5 ten $N_r(B)^* \chi(G_1)$
$= \chi(N_r(B)^* G_1)$ olduğu dikkate alınırsa $\chi(G_1)$, G_2 nin bir alt yakınlık grubudur.

Her $xKer\chi \in G_1/_w Ker\chi$ için

$$\begin{aligned} \eta_{G_1/_w Ker\chi} : \chi|_{G_1/_w Ker\chi} &\longrightarrow N_r(B)^* \chi(G_1) \\ xKer\chi &\longmapsto \eta_{G_1/_w Ker\chi}(xKer\chi) = \chi(x) \end{aligned}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} \eta : N_r(B)^* (G_1/_w Ker\chi) &\longrightarrow N_r(B)^* \chi(G_1) \\ A &\longmapsto \eta(A) = \begin{cases} \eta_{G_1/_w Ker\chi}(A) & , A \in (N_r(B)^* G_1)/_{\sim_L} \\ e_{\chi(G_1)} & , A \notin (N_r(B)^* G_1)/_{\sim_L} \end{cases} \end{aligned}$$

fonksiyonu tanımlansın.

$$xKer\chi = \{x \cdot k \mid k \in Ker\chi, x \cdot k \in G_1\} \cup \{x\},$$

$$yKer\chi = \{y \cdot k' \mid k' \in Ker\chi, y \cdot k' \in G_1\} \cup \{y\}$$

ve χ fonksiyonu bir yakınlık grup homomorfizması olduğundan

$$\begin{aligned} xKer\chi = yKer\chi \Rightarrow\ & x \in yKer\chi \\ \Rightarrow\ & x \in \{y \cdot k' \mid k' \in Ker\chi, y \cdot k' \in G_1\} \text{ veya } x \in \{y\} \\ \Rightarrow\ & x = y \cdot k',\ k' \in Ker\chi,\ y \cdot k' \in G_1 \text{ veya } x = y \\ \Rightarrow\ & y^{-1} \cdot x = (y^{-1} \cdot y)\, k',\ k' \in Ker\chi \text{ veya } \chi(x) = \chi(y) \\ \Rightarrow\ & y^{-1} \cdot x = k',\ k' \in Ker\chi \\ \Rightarrow\ & y^{-1} \cdot x \in Ker\chi \\ \Rightarrow\ & \chi(y^{-1} \cdot x) = e_{\chi(G_1)} \\ \Rightarrow\ & \chi(y^{-1}) \cdot \chi(x) = e_{\chi(G_1)} \\ \Rightarrow\ & \chi(y)^{-1} \cdot \chi(x) = e_{\chi(G_1)} \\ \Rightarrow\ & \chi(x) = \chi(y) \end{aligned}$$

dir. Böylece $\eta_{G_1/_w Ker\chi}$ iyi tanımlıdır. Kabul edelim ki, $A, B \in N_r(B)^*(G_1/_w Ker\chi)$ için $A = B$ olsun. $\eta_{G_1/_w Ker\chi}$ iyi tanımlı olduğundan

$$\begin{aligned}
\eta(A) &= \begin{cases} \eta_{G_1/_w Ker\chi}(A) & , A \in (N_r(B)^* G_1)/_{\sim_L} \\ e_{\chi(G_1)} & , A \notin (N_r(B)^* G_1)/_{\sim_L} \end{cases} \\
&= \begin{cases} \eta_{G_1/_w Ker\chi}(B) & , B \in (N_r(B)^* G_1)/_{\sim_L} \\ e_{\chi(G_1)} & , B \notin (N_r(B)^* G_1)/_{\sim_L} \end{cases} \\
&= \eta(B)
\end{aligned}$$

olur. Böylece η iyi tanımlıdır. Her $xKer\chi, yKer\chi \in G_1/_w Ker\chi$ için

$$\begin{aligned}
\eta(xKer\chi \odot yKer\chi) &= \eta((x \cdot y)Ker\chi) \\
&= \eta_{G_1/_w Ker\chi}((x \cdot y)Ker\chi) \\
&= \chi(x \cdot y) \\
&= \chi(x) \cdot \chi(y) \\
&= \eta_{G_1/_w Ker\chi}(xKer\chi) \cdot \eta_{G_1/_w Ker\chi}(yKer\chi) \\
&= \eta(xKer\chi) \cdot \eta(yKer\chi)
\end{aligned}$$

dir. Bu durumda Tanım 3.5.5 ten η bir kısıtlanmış yakınlık homomorfizmasıdır. O halde $G_1/_w Ker\chi \simeq_{rn} \chi(G_1)$ dir. □

BÖLÜM 4

YAKINLIK HALKALARI

Bu bölümde iki işlemli yakınlık cebirsel yapılarından biri olan yakınlık halkaları incelendi. Üç kısımdan oluşan bu bölümün ilk kısmında yakınlık halkaları ve yakınlık halkalarının yakınlık idealleri kavramları verildi. İkinci kısımda yakınlık ideali kavramına gerek kalmaksızın, zayıf kalan sınıflarının yakınlık halkalarının hangi şartlar altında var olduğu araştırıldı. Üçüncü kısımda da yakınlık halka homomorfizmaları ve bu kavramlarla ilgili bazı temel tanımlar ve teoremler incelendi.

4.1 Yakınlık Halkaları ve İdealleri

Bu kısımda yakınlık halkaları ve alt yakınlık halkaları kavramları örneklerle birlikte verilecektir. Bir yakınlık halkasının boştan farklı bir alt kümesinin alt yakınlık halkası ve iki (veya sonlu sayıda) alt yakınlık halkasının (idealinin) arakesitinin yine bir alt yakınlık halkası (ideali) olabilmesi için gerek ve yeter koşullara yer verilecektir.

Tanım 4.1.1. *$(\mathcal{O}, \mathcal{F}, \sim_{B_r}, N_r(B), \nu_{N_r})$ yakın yaklaşım uzayı, "$+$" ve "$\cdot$" $\mathcal{O}$ üzerinde ikili işlemler ve $R \subseteq \mathcal{O}$ olsun. Aşağıdaki özellikler sağlanıyorsa R ye yakın yaklaşım uzayı üzerinde yakın halka veya kısaca yakınlık halkası denir:*

(YH_1) *R, "$+$" ikili işlemi ile birlikte bir değişmeli yakınlık grubudur.*

(YH_2) *R, "$\cdot$" ikili işlemi ile birlikte bir yakınlık yarı grubudur.*

(YH_3) *Her $x, y, z \in R$ için,*

$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ *ve*

$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ *özellikleri $N_r(B)^* R$ de sağlanır.*

Buna ek olarak,

(YH_4) *Her* $x, y \in R$ *için* $x \cdot y = y \cdot x$ *ise* R *ye değişmeli (komütatif) yakınlık halkası,*

(YH_5) *Her* $x \in R$ *için* $1_R \cdot x = x \cdot 1_R = x$ *olacak şekilde* $1_R \in N_r(B)^* R$ *varsa* R *ye birimli yakınlık halkası denir.*

Bir R yakınlık halkasında, $(YH_1) - (YH_5)$ özelliklerinden bazıları $N_r(B)^* R$ de sağlanmak zorundadır. Bu özellikler bazı durumlarda $\mathcal{O} \backslash N_r(B)^* R$ de sağlanabilir. Bu durumda R yakınlık halkası olamaz. R deki elemanların sonlu tane toplamı veya çarpımı her zaman $N_r(B)^* R$ ye ait olmayabilir. Böylece her zaman, her $x \in R$ ve bazı $n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^n \in N_r(B)^* R$ veya $nx \in N_r(B)^* R$ olduğu söylenemez. $(N_r(B)^* R, +)$ ve $(N_r(B)^* R, \cdot)$ grupoid ise, o zaman her $x \in R$ ve her $n \in \mathbb{Z}^+$ için $x^n \in N_r(B)^* R$ veya her $x \in R$ ve her $n \in \mathbb{Z}$ için $nx \in N_r(B)^* R$ olur.

R birimli bir yakınlık halkası ve $x \in R$ olmak üzere, $y \cdot x = 1_R$ $(x \cdot z = 1_R)$ olacak şekilde bir $y \in N_r(B)^* R$ $(z \in N_r(B)^* R)$ varsa x elemanına *sol (sağ) yakın tersinirdir* denir. y (z) elemanına x elemanının *sol (sağ) yakın tersi* denir. $x \in R$ hem sol hem de sağ yakın tersinir ise x elemanına *yakın tersinirdir (birimsel unit)* denir. Birimli bir R yakınlık halkasının yakın tersinir elemanlarından oluşan küme, "$\cdot$" işlemi ile bir yakınlık grubudur.

Tanım 4.1.2. *Bir* R *yakınlık halkasında* $(R \backslash \{0\}, \cdot)$ *bir yakınlık grubu, yani* R *deki sıfırdan farklı her eleman yakın tersinir (birimsel unit) ise* R *ye yakınlık bölüm (division) halkası denir.*

Tanım 4.1.3. *Bir* R *yakınlık halkasında* $(R \backslash \{0\}, \cdot)$ *bir değişmeli yakınlık grubu ise* R *ye yakınlık cismi denir.*

Yakınlık halkasının elemanlarının ikili işlemlerle ilgili bazı temel özellikleri, klasik halkalarda olduğu gibi her zaman sağlanmayabilir. $N_r(B)^* R$ yaklaşımı klasik halka olarak dikkate alınırsa bu durumda yakınlık halkasının elemanları ikili işlemlerle ilgili temel özellikleri sağlar.

Lemma 4.1.1. *Yakın yaklaşım uzayı üzerindeki her halka yakınlık halkasıdır.*

İspat. $R \subseteq \mathcal{O}$ yakın yaklaşım uzayı üzerinde bir halka olmak üzere, $R \subseteq N_r(B)^* R$ olduğundan $(YH_1) - (YH_3)$ sağlanır. Böylece R bir yakınlık halkasıdır. $\square$

Örnek 4.1.1. *$\mathcal{O} = \{o, p, r, s, t, v, w, x\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.*

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4\},$$
$$\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$$

çıkarım fonksiyonları Tablo 27 deki gibi tanımlansın.

	o	p	r	s	t	v	w	x
φ_1	α_4	α_2	α_1	α_2	α_1	α_3	α_4	α_3
φ_2	β_1	β_3	β_2	β_3	β_2	β_3	β_1	β_3

Tablo 27

Bununla birlikte, $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde "+" ve "·" ikili işlemleri Tablo 28 ve Tablo 29 daki gibi verilsin.

$+$	o	p	r	s	t	v	w	x
o	o	p	r	s	t	v	w	x
p	p	r	s	t	v	w	x	o
r	r	s	t	v	w	x	o	p
s	s	t	v	w	x	o	p	r
t	t	v	w	x	o	p	r	s
v	v	w	x	p	p	r	s	t
w	w	x	o	p	r	s	t	v
x	x	o	p	r	s	t	v	w

Tablo 28

$\cdot$	o	p	r	s	t	v	w	x
o	o	o	o	o	o	o	o	o
p	o	p	r	s	t	v	w	x
r	o	r	t	w	o	r	t	w
s	o	s	w	p	t	o	r	v
t	o	t	o	t	o	t	o	t
v	o	v	r	x	t	p	w	s
w	o	w	t	r	o	w	t	r
x	o	x	w	v	t	s	r	p

Tablo 29

Tablo 28 den $r + (s + s) \neq (r + s) + s$ olduğundan $(\mathcal{O}, +)$ bir grup değildir. O halde $(\mathcal{O}, +, \cdot)$ bir halka değildir.

$R = \{r, t, w\}$ algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere, R üzerinde "+" ve "·" ikili işlemleri Tablo 30 ve Tablo 31 deki gibi olur.

$+$	r	t	w
r	t	w	o
t	w	o	r
w	o	r	t

Tablo 30

$\cdot$	r	t	w
r	t	o	t
t	o	o	o
w	t	o	t

Tablo 31

Örnek 3.1.5 ten $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}\}$ dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} N_1(B)^* R &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap R \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i} \\ &= \{o, r, t, w\} \neq \mathcal{O} \end{aligned}$$

elde edilir. Bunununla birlikte Tanım 4.1.1 den

(YH_1) *R, "+" işlemi ile bir yakınlık grubudur.*

(YH_2) *R, "·" işlemi ile bir yakınlık yarı grubudur.*

(YH_3) *Her $x, y, z \in R$ için*

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z) \text{ ve}$$

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

özellikleri $N_r(B)^* R$ de sağlanır. O halde $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin R alt kümesi bir yakınlık halkasıdır.

Aşağıdaki önermede verilen özelliklerin geçerli olduğu kolayca gösterilebilir.

Önerme 4.1.1. *$R \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık halkası ve $0_R \in R$ olsun. $0_R \cdot x, x \cdot 0_R \in R$ ise her $x, y \in R$ için*

(i) $x \cdot 0_R = 0_R \cdot x = 0_R$,

(ii) $x \cdot (-y) = (-x) \cdot y = -(x \cdot y)$,

(iii) $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

dir.

Tanım 4.1.4. *R bir yakınlık halkası ve S, R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. S, R deki "+" ve "·" ikili işlemleri ile yakınlık halkası ise S ye R nin alt yakınlık halkası denir.*

Tanım 4.1.5. *R bir yakınlık cismi ve S, R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. S, R deki işlemler ile bir yakınlık cismi ise S ye R nin alt yakınlık cismi denir.*

Teorem 4.1.1. *R bir yakınlık halkası; S, R nin boştan farklı bir alt kümesi ve $(N_r(B)^* S, +)$, $(N_r(B)^* S, \cdot)$ iki grupoid olsun. Bu durumda S nin R yakınlık halkasının bir alt yakınlık halkası olması için gerek ve yeter koşul, her $x \in S$ için $-x \in S$ olmasıdır.*

İspat. $(\Rightarrow)$: Kabul edelim ki; S, R yakınlık halkasının bir alt yakınlık halkası olsun. Bu durumda S bir yakınlık halkasıdır. Böylece her $x \in S$ için $-x \in S$ dir.

$(\Leftarrow)$: Hipotezden $(N_r(B)^* S, +)$ grupoid ve $S \subseteq R$ olduğundan ve Teorem 3.1.1 den $(S, +)$ değişmeli yakınlık grubudur. $(N_r(B)^* S, \cdot)$ grupoid ve $S \subseteq R$ olduğundan $N_r(B)^* S$ de birleşme özelliği sağlanır. Bu durumda $(S, \cdot)$ bir yakınlık yarı grubudur. Her $x, y, z \in S \subseteq R$ için $y+z \in N_r(B)^* S$, $x \cdot (y+z) \in N_r(B)^* S$ ve $(x \cdot y)+(x \cdot z) \in N_r(B)^* S$ dir. R yakınlık halkası olduğundan $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ özelliği $N_r(B)^* S$ de sağlanır. Benzer olarak, $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ özelliğinin de $N_r(B)^* S$ de sağlandığı görülür. Böylece S, R yakınlık halkasının bir alt yakınlık halkasıdır. □

Örnek 4.1.2. *Örnek 4.1.1 deki $R = \{r, t, w\}$ yakınlık halkası dikkate alınsın. $S = \{r, w\}$, R yakınlık halkasının bir alt kümesi olmak üzere, $S \subseteq R$ üzerinde "+" ve "·" ikili işlemleri Örnek 4.1.1 deki Tablo 28 ve Tablo 29 dikkate alınırsa Tablo 32 ve Tablo 33 teki gibidir.*

$+$	r	w
r	t	o
w	o	t

Tablo 32

$\cdot$	r	w
r	t	t
w	t	t

Tablo 33

Örnek 4.1.1 den $r = 1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}\}$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} N_1(B)^* S &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap S \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i} \\ &= \{r,t\} \cup \{o,w\} \cup \{r,t\} \\ &= \{o,r,t,w\} \neq \mathcal{O} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $(N_r(B)^* S, +)$ ve $(N_r(B)^* S, \cdot)$ grupoid, $-r = w, -w = r \in N_r(B)^* S$ olur. Böylece Teorem 4.1.1 den S, R yakınlık halkasının bir alt yakınlık halkasıdır.

Teorem 4.1.2. *R bir yakınlık halkası, S_1 ve S_2, R nin iki alt yakınlık halkası olsun. Bu durumda $N_r(B)^* S_1$ ve $N_r(B)^* S_2$, "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri ile birlikte grupoid olmak üzere*

$$(N_r(B)^* S_1) \cap (N_r(B)^* S_2) = N_r(B)^* (S_1 \cap S_2)$$

ise $S_1 \cap S_2$, R nin bir alt yakınlık halkasıdır.

İspat. S_1 ve S_2, R nin iki alt yakınlık halkası olsun. $S_1 \cap S_2 \subset R$ olduğu açıktır. $N_r(B)^* S_1$ ve $N_r(B)^* S_2$, "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri ile birlikte grupoid ve $(N_r(B)^* S_1) \cap (N_r(B)^* S_2) = N_r(B)^* (S_1 \cap S_2)$ olduğundan $N_r(B)^* (S_1 \cap S_2)$ de "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri ile birlikte bir grupoid olur. $x \in S_1 \cap S_2$ olmak üzere, S_1 ve S_2 alt yakınlık halkası olduğundan $-x \in S_1$ ve $-x \in S_2$, yani $-x \in S_1 \cap S_2$ dir. Sonuç olarak, Teorem 4.1.1 den $S_1 \cap S_2$, R nin bir alt yakınlık halkasıdır. □

Sonuç 4.1.1. *R bir yakınlık halkası ve R nin alt yakınlık halkalarının boştan farklı bir ailesi $\{S_i \mid i \in \Delta\}$ olsun. Bu durumda $N_r(B)^* S_i$ ler "$+$" ve "$\cdot$" işlemleri ile birlikte grupoid olmak üzere*

$$\bigcap_{i \in \Delta} (N_r(B)^* S_i) = N_r(B)^* \left(\bigcap_{i \in \Delta} S_i \right)$$

ise $\bigcap_{i \in \Delta} S_i$, R nin bir alt yakınlık halkasıdır.

Tanım 4.1.6. *R bir yakınlık halkası ve I, R nin boştan farklı bir alt kümesi olsun. Her $x, y \in I$ ve her $r \in R$ için $x - y \in N_r(B)^* I$, $r \cdot x \in N_r(B)^* I$ ($x \cdot r \in N_r(B)^* I$) ise I ya R nin sol (sağ) yakınlık ideali denir. I hem sol hem de sağ yakınlık ideali ise I ya R nin yakınlık ideali denir.*

Uyarı 4.1.1. *R yakınlık halkasının sadece bir tane aşikar yakınlık ideali vardır. Bu aşikar yakınlık ideali R nin kendisidir. Ayrıca $\{0_R\}$ nin R yakınlık halkasının alt yakınlık halkası olması için gerek ve yeter koşul, $0_R \in R$ olmasıdır.*

Lemma 4.1.2. *I, R yakınlık halkasının bir yakınlık ideali olsun. $(N_r(B)^* I, +)$ ve $(N_r(B)^* I, \cdot)$ grupoid ise I, R yakınlık halkasının bir alt yakınlık halkasıdır.*

Bazı durumlarda yakınlık halkasının bir alt yakınlık halkası, yakınlık ideali olabilir.

Örnek 4.1.3. *Örnek 4.1.1 ve Örnek 4.1.2 deki $R = \{r, t, w\}$ yakınlık halkası ve R nin $S = \{r, w\}$ alt yakınlık halkası dikkate alınsın. Her $x, y \in S$ ve her $r \in R$ için $x - y \in N_r(B)^* S$, $r \cdot x \in N_r(B)^* S$ ve $x \cdot r \in N_r(B)^* S$ olduğu görülür. Böylece Tanım 4.1.6 dan S, R nin bir yakınlık idealidir.*

Teorem 4.1.3. *R bir yakınlık halkası; I_1 ve I_2, R nin iki yakınlık ideali olsun. Bu durumda $N_r(B)^* I_1$ ve $N_r(B)^* I_2$, "+" ve "·" işlemleri ile birlikte grupoid olmak üzere*

$$(N_r(B)^* I_1) \cap (N_r(B)^* I_2) = N_r(B)^* (I_1 \cap I_2)$$

ise $I_1 \cap I_2$, R nin bir yakınlık idealidir.

İspat. I_1 ve I_2, R nin iki yakınlık ideali olsun. $I_1 \cap I_2 \subset R$ olduğu açıktır. $x, y \in I_1 \cap I_2$ olmak üzere, I_1 ve I_2 yakınlık idealleri olduğundan her $x, y \in I_1 \cap I_2$ ve $r \in R$ için $x - y$, $r \cdot x \in N_r(B)^* I_1$ ve $x - y$, $r \cdot x \in N_r(B)^* I_2$, yani $x - y$, $r \cdot x \in (N_r(B)^* I_1) \cap (N_r(B)^* I_2)$ olur. $(N_r(B)^* I_1) \cap (N_r(B)^* I_2) = N_r(B)^* (I_1 \cap I_2)$ olduğundan $x - y$, $r \cdot x \in N_r(B)^* (I_1 \cap I_2)$ dir. Benzer şekilde $I_1 \cap I_2$ nin sağ yakınlık ideali olduğu da görülür. Böylece Tanım 4.1.6 dan $I_1 \cap I_2$, R nin bir yakınlık idealidir. □

Sonuç 4.1.2. *R bir yakınlık halkası ve R nin yakınlık ideallerinin boştan farklı bir ailesi $\{I_i \mid i \in \Delta\}$ olsun. Bu durumda $N_r(B)^* I_i$ ler "+" ve "·" işlemleri ile birlikte grupoid olmak üzere*

$$\bigcap_{i \in \Delta} (N_r(B)^* I_i) = N_r(B)^* \left(\bigcap_{i \in \Delta} I_i \right)$$

ise $\bigcap_{i \in \Delta} I_i$, R nin bir yakınlık idealidir.

4.2 Zayıf Kalan Sınıflarının Yakınlık Halkaları

Bu kısımda $R \subseteq \mathcal{O}$ yakınlık halkası üzerinde zayıf eşdeğerlik bağıntısının tanımına ve zayıf eşdeğerlik bağıntısının R yakınlık halkalarında belirttiği zayıf kalan sınıflarına yer verilecektir. İki zayıf kalan sınıfının toplamının ve çarpımının tanımları verilecektir. Bu işlemlerle birlikte yakınlık ideallerine gerek kalmaksızın zayıf kalan sınıflarının yakınlık halkalarının hangi şartlar altında var olduğu gösterilerek, örnekler incelenecektir.

$R \subseteq \mathcal{O}$ bir yakınlık halkası ve S, R nin bir alt yakınlık halkası olsun. Bu durumda $x, y \in R$ olmak üzere, R nin elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "$\sim_R$" bağıntısı tanımlanabilir:

$$x \sim_R y :\Leftrightarrow x + (-y) \in S \cup \{0_R\}\,.$$

Teorem 4.2.1. *R bir yakınlık halkası olmak üzere, "$\sim_R$" bağıntısı R üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.*

İspat. R bir yakınlık grubu olduğundan her $x \in R$ için $-x \in R$ dir. $x + (-x) = 0_R$ olduğundan $x \sim_R x$ olur. Her $x, y \in R$ için $x \sim_R y$ ise $x + (-y) \in S \cup \{0_R\}$, yani $x + (-y) \in S$ veya $x + (-y) \in \{0_R\}$ olur. $x + (-y) \in S$ ise S, R nin bir alt yakınlık halkası olduğundan $-(x + (-y)) = y + (-x) \in S$ dir. Böylece $y \sim_R x$ bulunur. Ayrıca $x + (-y) \in \{0_R\}$ ise $x + (-y) = 0_R$ dir. Buradan $y + (-x) = -(x + (-y)) = -0_R = 0_R$ ve böylece $y \sim_R x$ olur. Sonuç olarak, "$\sim_R$" bağıntısı R üzerinde bir sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır. □

Herhangi bir $x \in R$ için "$\sim_R$" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının R yakınlık halkasında belirttiği sınıflar:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_R &= \{y \in R \mid y \sim_R x\} \\
&= \{y \in R \mid y + (-x) \in S \cup \{0_R\}\} \\
&= \{y \in R \mid y + (-x) \in S \text{ veya } y + (-x) \in \{0_R\}\} \\
&= \{y \in R \mid y \in S + x \text{ veya } y + (-x) = 0_R\} \\
&= \{y \in R \mid y \in S + x \text{ veya } x = y\} \\
&= \{s + x \mid s \in S,\ x \in R,\ s + x \in R\} \cup \{x\}
\end{aligned}$$

dir.

Tanım 4.2.1. *R bir yakınlık halkası olmak üzere, "$\sim_R$" sağ zayıf eşdeğerlik bağıntısının R de belirttiği sınıflara sağ zayıf kalan sınıflar denir.*

Herhangi bir $x \in R$ için sağ zayıf kalan sınıfı $S + x$ ile gösterilir, yani

$$S + x = \{s + x \mid s \in S,\ x \in R,\ s + x \in R\} \cup \{x\}$$

olur.

Benzer şekilde $x, y \in R$ olmak üzere, R yakınlık halkasının elemanları arasında aşağıdaki gibi bir "$\sim_L$" bağıntısı tanımlanabilir:

$$x \sim_L y :\Leftrightarrow (-x) + y \in S \cup \{0_R\}.$$

Teorem 4.2.2. *R bir yakınlık halkası olmak üzere, "$\sim_L$" bağıntısı R üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır.*

İspat. R bir yakınlık halkası olduğundan her $x \in R$ için $-x \in R$ dir. $x+(-x) = 0_R$ olduğundan $x \sim_L x$ olur. Her $x, y \in R$ için $x \sim_L y$ ise $(-x) + y \in S \cup \{0_R\}$, yani $(-x)+y \in S$ veya $(-x)+y \in \{0_R\}$ olur. $(-x)+y \in S$ ise S, R nin bir alt yakınlık halkası olduğundan $-((-x) + y) = (-y) + x \in S$ dir. Böylece $y \sim_L x$ bulunur. Ayrıca $(-x)+y \in \{0_R\}$ ise $(-x)+y = 0_R$ dir. Buradan $(-y)+x = -((-x) + y) = -0_R = 0_R$ ve böylece $y \sim_L x$ olur. Sonuç olarak, "$\sim_L$" bağıntısı R üzerinde bir sol zayıf eşdeğerlik bağıntısıdır. □

Tanım 4.2.2. *R bir yakınlık halkası olmak üzere, "$\sim_L$" eşdeğerlik bağıntısının R de belirttiği sınıflara sol zayıf kalan sınıflar denir.*

Herhangi bir $x \in R$ için sol zayıf kalan sınıfı $x + S$ ile gösterilir, yani

$$x + S = \{x + s \mid s \in S,\ x \in R,\ x + s \in R\} \cup \{x\}$$

dir.

Herhangi bir $x \in R$ için "$\sim_L$" sol zayıf eşdeğerlik bağıntısının R yakınlık halkasında belirttiği sınıflar:

$$\begin{aligned}
\tilde{x}_L &= \{y \in R \mid x \sim_L y\} \\
&= \{y \in R \mid (-x) + y \in S \cup \{0_R\}\} \\
&= \{y \in R \mid (-x) + y \in S \text{ veya } (-x) + y \in \{0_R\}\} \\
&= \{y \in R \mid y \in x + S \text{ veya } -x + (y) = 0_R\} \\
&= \{y \in R \mid y \in x + S \text{ veya } y = x\} \\
&= \{x + s \mid s \in S,\ x \in R,\ x + s \in R\} \cup \{x\}
\end{aligned}$$

dir.

Burada $\tilde{x}_L = x + S$ ve $\tilde{x}_R = S + x$ olduğu kolayca görülür. $(R, +)$ değişmeli yakınlık grubu olduğundan $\tilde{x}_L = \tilde{x}_R$ olur. Bu durumda $\tilde{x}_L$ ve $\tilde{x}_R$ notasyonları yerine sadece $\tilde{x}$ kullanılabilir.

R bir yakınlık halkası ve S, R nin bir alt yakınlık halkası olmak üzere

$$R/_{\sim} = \{x + S \mid x \in R\}$$

R nin S ile belirlenen tüm sol zayıf kalan sınıflarının kümesidir. Burada R yerine $N_r\,(B)^*\,R$ alınırsa

$$(N_r\,(B)^*\,R)\,/_{\sim} = \{x + S \mid x \in N_r\,(B)^*\,R\}$$

elde edilir. Bu durumda

$$x + S = \{x + s \mid s \in S,\ x \in N_r\,(B)^*\,R,\ x + s \in R\} \cup \{x\}$$

olur.

Tanım 4.2.3. *R bir yakınlık halkası ve S, R nin bir alt yakınlık halkası olsun. $x, y \in R$ olmak üzere, $x + S$ ve $y + S$ sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği sol zayıf kalan sınıflar olsun. Bu durumda $x + y \in N_r\,(B)^*\,R$ elemanının belirlediği sol zayıf kalan sınıfı*

$$\{(x + y) + s \mid s \in S,\ x + y \in N_r\,(B)^*\,R,\ (x + y) + s \in R\} \cup \{x + y\}$$

ile tanımlıdır. Buna sol zayıf kalan sınıflarının toplamı denir ve

$$(x+S)\oplus(y+S)=(x+y)+S$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 4.2.4. *R bir yakınlık halkası ve S, R nin bir alt yakınlık halkası olsun. $x,y\in R$ olmak üzere, $x+S$ ve $y+S$ sırasıyla x ve y elemanlarının belirlediği sol zayıf kalan sınıflar olsun. Bu durumda $x\cdot y\in N_r(B)^* R$ elemanının belirlediği sol zayıf kalan sınıfı*

$$\{(x\cdot y)+s \mid s\in S,\ x\cdot y\in N_r(B)^* R,\ \ (x\cdot y)+s\in R\}\cup\{x\cdot y\}$$

ile tanımlıdır. Buna sol zayıf kalan sınıflarının çarpımı denir ve

$$(x+S)\odot(y+S)=(x\cdot y)+S$$

şeklinde gösterilir.

Tanım 4.2.5. *$\mathcal{O}$ algılanabilen nesneler kümesi, $R\subset\mathcal{O}$ bir yakınlık halkası ve S, R nin bir alt yakınlık halkası olsun. $R/_\sim$, R nin S ile belirlenen tüm zayıf kalan sınıflarının kümesi ve $\xi_\Phi(A)$, $A\in\mathcal{P}(\mathcal{O})$ kümesinin tanımsal yakınlık küme ailesi olmak üzere*

$$N_r(B)^*(R/_\sim)=\bigcup_{\xi_\Phi(A)\underset{\Phi}{\cap} R/_\sim\neq\emptyset}\xi_\Phi(A)$$

kümesine $R/_\sim$ nin üst yaklaşımı denir.

Teorem 4.2.3. *R bir yakınlık halkası; S, R nin bir alt yakınlık halkası ve $R/_\sim$, R nin S ile belirlenen tüm zayıf kalan sınıflarının kümesi olsun. Bu durumda*

$$(N_r(B)^* R)/_\sim\subseteq N_r(B)^*(R/_\sim)$$

ise $R/_\sim$, her $x,y\in R$ için

$$(x+S)\oplus(y+S)=(x+y)+S \text{ ve}$$
$$(x+S)\odot(y+S)=(x\cdot y)+S$$

ile tanımlı işlemlerle birlikte bir yakınlık halkasıdır.

İspat. (YH_1) R bir yakınlık halkası olduğundan ve Teorem 3.4.1 den $(R/_\sim, \oplus)$, R nin S ile belirlenen tüm zayıf kalan sınıflarının değişmeli yakınlık grubudur.

(YH_2) $(R, \cdot)$ bir yakınlık yarı grubu olduğundan her $x, y \in R$ için $x{\cdot}y \in N_r(B)^* R$ ve her $(x+S), (y+S) \in R/_\sim$ için $(x+S) \odot (y+S) = (x \cdot y) + S \in (N_r(B)^* R)/_\sim$ dir. Hipotezden her $(x+S), (y+S) \in R/_\sim$ için $(x+S) \odot (y+S) = (x \cdot y) + S$ $\in N_r(B)^* (R/_\sim)$ bulunur.

Her $x, y, z \in R/_\sim$ için $N_r(B)^* R$ de birleşme özelliği sağlanır. Bu durumda her $(x+S), (y+S), (z+S) \in R/_\sim$ için

$$\begin{aligned}((x+S) \odot (y+S)) \odot (z+S) &= ((x \cdot y) + S) \odot (z+S) \\ &= ((x \cdot y) \cdot z) + S \\ &= (x \cdot (y \cdot z)) + S \\ &= (x+S) \odot ((y \cdot z) + S) \\ &= (x+S) \odot ((y+S) \odot (z+S))\end{aligned}$$

eşitliği $(N_r(B)^* R)/_\sim$ de sağlanır. Böylece hipotezden, her $(x+S), (y+S)$, $(z+S) \in R/_\sim$ için $N_r(B)^* (R/_\sim)$ de birleşme özelliği sağlanır. Sonuç olarak, $(R/_\sim, \odot)$, R nin S ile belirlenen tüm zayıf kalan sınıflarının yakınlık yarı grubudur.

(YH_3) R bir yakınlık halkası olduğundan $N_r(B)^* R$ de soldan dağılma özelliği sağlanır. Her $(x+S), (y+S), (z+S) \in R/_\sim$ için

$$\begin{aligned}(x+S) \odot ((y+S) \oplus (z+S)) &= (x+S) \odot ((y+z) + S) \\ &= (x \cdot (y+z)) + S \\ &= ((x \cdot y) + (x \cdot z)) + S \\ &= ((x \cdot y) + S) \oplus ((x \cdot z) + S) \\ &= ((x+S) \odot (y+S)) \oplus ((x+S) \odot (z+S))\end{aligned}$$

olur. Böylece $(N_r(B)^* R)/_\sim$ de soldan dağılma özelliği sağlanır. Benzer şekilde her $(x+S), (y+S), (z+S) \in R/_\sim$ için

$$((x+S) \oplus (y+S)) \odot (z+S) = ((x+S) \odot (z+S)) \oplus ((x+S) \odot (z+S))$$

$(N_r(B)^* R)/_\sim$ de sağdan dağılma özeliğinin de sağlandığı görülür.

Böylece hipotezden $N_r(B)^* (R/_\sim)$ de dağılma özelliği sağlanır. Sonuç olarak, $R/_\sim$ bir yakınlık halkasıdır. $\square$

Tanım 4.2.6. *R bir yakınlık halkası ve S, R nin bir alt yakınlık halkası olsun. $R/_{\sim}$ yakınlık halkasına R nin S ile belirlenen tüm zayıf kalan sınıflarının yakınlık halkası denir ve $R/_{w}S$ şeklinde gösterilir.*

Örnek 4.2.1. *$S = \{r, w\}$, $R = \{r, t, w\}$ nin bir alt kümesi olsun. Örnek 4.1.2 den S, R yakınlık halkasının alt yakınlık halkasıdır.*

Bu durumda R nin S ile belirlenen tüm zayıf kalan sınıfları yazılabilir.

Sol zayıf kalan sınıfının tanımından,

$$r + S = \{t\} \cup \{r\} = \{r, t\},$$
$$t + S = \{w, r\} \cup \{t\} = \{w, r, t\},$$
$$w + S = \{t\} \cup \{w\} = \{t, w\}$$

elde edilir. Böylece $R/_{w}S = \{r + S, t + S, w + S\}$ olur.

$N_1(B)^* R = \{o, r, t, w\}$ olduğundan $N_1(B)^* R$ nin S ile belirlenen tüm sol zayıf kalan sınıfları

$$o + S = \{r, w\} \cup \{o\} = \{r, w, o\}$$

dur. Böylece $(N_1(B)^* R)/_{\sim} = \{o + S, r + S, t + S, w + S\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{O})$ elde edilir.

$R/_{w}S$ üzerinde "$\oplus$" ve "$\odot$" ikili işlemleri, Tanım 4.2.3 ve Tanım 4.2.4 kullanılarak, Tablo 34 ve Tablo 35 deki gibi tanımlansın.

$\oplus$	$r+S$	$t+S$	$w+S$
$r+S$	$t+S$	$w+S$	$o+S$
$t+S$	$w+S$	$o+S$	$r+S$
$w+S$	$o+S$	$r+S$	$t+S$

Tablo 34

$\odot$	$r+S$	$t+S$	$w+S$
$r+S$	$t+S$	$o+S$	$t+S$
$t+S$	$o+S$	$o+S$	$o+S$
$w+S$	$t+S$	$o+S$	$t+S$

Tablo 35

$(N_r(B)^* R)/_{\sim} \subseteq N_r(B)^* (R/_{w}S)$ olduğunu göstermek için $(N_1(B)^* R)/_{\sim}$ den

alınan her elemanın $N_1(B)^*(R/_wS)$ *de olduğunu göstermek yeterlidir.*

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(R/_wS) &= \{\Phi(A) \mid A \in R/_wS\} \\ &= \{\Phi(r+S), \Phi(t+S), \Phi(w+S)\} \\ &= \{\{\Phi(r), \Phi(t)\}, \{\Phi(w), \Phi(r), \Phi(t)\}, \{\Phi(t), \Phi(w)\}\} \\ &= \{\{(\alpha_1,\beta_2), (\alpha_1,\beta_2)\}, \{(\alpha_4,\beta_1), (\alpha_1,\beta_2), (\alpha_1,\beta_2)\}, \{(\alpha_1,\beta_2), (\alpha_4,\beta_1)\}\}\end{aligned}$$

dir. $r+S \in R/_wS$ *için*

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(r+S) &= \{\Phi(r), \Phi(t)\} = \{(\alpha_1,\beta_2), (\alpha_1,\beta_2)\}, \\ \mathcal{Q}(o+S) &= \{\Phi(r), \Phi(w), \Phi(o)\} = \{(\alpha_1,\beta_2), (\alpha_4,\beta_1), (\alpha_4,\beta_1)\}\end{aligned}$$

dir. $\mathcal{Q}(r+S) \cap \mathcal{Q}(o+S) = \{(\alpha_1,\beta_2)\} \neq \emptyset$ *olduğundan* $o+S \in \xi_\Phi(r+S)$ *olur. Buradan* $\xi_\Phi(r+S) \underset{\Phi}{\cap} R/_wS \neq \emptyset$ *ve Tanım 4.2.5 ten* $r+S, o+S \in N_1(B)^*(R/_wS)$ *olur.*

$t+S, w+S \in R/_wS$ *için*

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(t+S) &= \{\{\Phi(w), \Phi(r), \Phi(t)\}\} = \{(\alpha_4,\beta_1), (\alpha_1,\beta_2), (\alpha_1,\beta_2)\}, \\ \mathcal{Q}(w+S) &= \{\{\Phi(t), \Phi(w)\}\} = \{(\alpha_1,\beta_2), (\alpha_4,\beta_1)\}\end{aligned}$$

bulunur.

$$\mathcal{Q}(t+S) \cap \mathcal{Q}(t+S) = \{(\alpha_4,\beta_1), (\alpha_1,\beta_2), (\alpha_1,\beta_2)\} \neq \emptyset$$

ve

$$\mathcal{Q}(w+S) \cap \mathcal{Q}(w+S) = \{(\alpha_1,\beta_2), (\alpha_4,\beta_1)\} \neq \emptyset$$

olduğundan, $t+S \in \xi_\Phi(t+S)$, $w+S \in \xi_\Phi(w+S)$ *olduğu görülür. Böylece* $\xi_\Phi(t+S) \underset{\Phi}{\cap} R/_wS \neq \emptyset$, $\xi_\Phi(w+S) \underset{\Phi}{\cap} R/_wS \neq \emptyset$ *ve Tanım 4.2.5 ten* $t+S, w+S \in N_1(B)^*(R/_wS)$ *dir. Sonuç olarak,* $(N_r(B)^* R)/_{\sim_L} \subseteq N_r(B)^*(R/_wS)$ *elde edilir.*

O halde Teorem 4.2.3 dikkate alınırsa $R/_wS$*, Tablo 34 ve Tablo 35 ile verilen işlemlerle birlikte,* R *nin* S *ile belirlenen tüm zayıf kalan sınıflarının yakınlık halkasıdır.*

Uyarı 4.2.1. *Genel olarak, yakınlık halkası değişmeli olmayabilir. Bundan dolayı "*$\sim_R$*" ve "*$\sim_L$*" zayıf eşdeğerlik bağıntıları farklıdır. Sonuç olarak, sol zayıf ve sağ zayıf kalan sınıfları da farklı olabilir.*

Örnek 4.2.1 de S, R nin yakınlık idealidir. Ancak R nin S ile belirlenen tüm zayıf kalan sınıflarının yakınlık halkasını elde etmek için S, R nin yakınlık ideali olmak zorunda değildir.

Örnek 4.2.2. *$\mathcal{O} = \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P\}$ algılanabilen nesnelerin kümesi ve $B = \{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\} \subseteq \mathcal{F}$ çıkarım fonksiyonlarının kümesi olsun.*

$$\varphi_1 : \mathcal{O} \longrightarrow V_1 = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5\},$$
$$\varphi_2 : \mathcal{O} \longrightarrow V_2 = \{\beta_1, \beta_2, \beta_3, \beta_4\}$$

çıkarım fonksiyonları Tablo 36 daki gibi tanımlansın.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
φ_1	α_3	α_3	α_4	α_1	α_2	α_4	α_5	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2	α_1	α_2
φ_2	β_3	β_4	β_4	β_1	β_3	β_4	β_2	β_2	β_3	β_2	β_3	β_3	β_3	β_2	β_1	β_2

Tablo 36

Bununla birlikte, $\mathcal{O}$ algılanabilen nesnelerin kümesi üzerinde "+" ve "·" ikili işlemleri Tablo 37 ve Tablo 38 deki gibi verilsin.

$+$	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
A	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
B	B	A	F	G	J	C	D	N	M	E	L	K	I	H	P	O
C	C	F	A	K	I	B	L	O	E	M	D	G	J	P	H	N
D	D	G	K	A	H	L	B	E	O	N	C	F	P	J	I	M
E	E	J	I	H	A	M	N	D	C	B	O	P	F	G	K	L
F	F	C	B	L	M	A	K	P	J	I	G	D	E	O	N	H
G	G	D	L	B	N	K	A	J	P	H	F	C	O	E	M	I
H	H	N	O	E	D	P	J	A	K	G	I	M	L	B	C	F
I	I	M	E	O	C	J	P	K	A	F	H	N	B	L	D	G
J	J	E	M	N	B	I	H	G	F	A	P	O	C	D	L	K
K	K	L	D	C	O	G	F	I	H	P	A	B	N	M	E	J
L	L	K	G	F	P	D	C	M	N	O	B	A	H	I	J	E
M	M	I	J	P	F	E	O	L	B	C	N	H	A	K	G	D
N	N	H	P	J	G	O	E	B	L	D	M	I	K	A	F	C
O	O	P	H	I	K	N	M	C	D	L	E	J	G	F	A	B
P	P	O	N	M	L	H	I	F	G	K	J	E	D	C	B	A

Tablo 37

$\cdot$	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A	A
B	A	B	C	A	A	F	B	A	C	B	C	F	F	B	C	F
C	A	A	A	B	C	A	B	F	C	C	B	B	C	F	F	F
D	A	D	E	A	A	H	D	A	E	D	E	H	H	D	E	H
E	A	A	A	D	E	A	D	H	E	E	D	D	E	H	H	H
F	A	B	C	B	C	F	A	F	A	F	F	C	B	C	B	A
G	A	G	I	A	A	P	G	A	I	G	I	P	P	G	I	P
H	A	D	E	D	E	H	A	H	A	H	H	E	D	E	D	A
I	A	A	A	G	I	A	G	P	I	I	G	G	I	P	P	P
J	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
K	A	D	E	B	C	H	G	F	I	K	J	N	O	L	M	P
L	A	G	I	B	C	P	D	F	E	E	M	O	N	K	J	H
M	A	B	C	G	I	F	D	P	E	M	L	K	J	O	N	H
N	A	G	I	D	E	P	B	H	C	N	O	M	L	J	K	F
O	A	D	E	G	I	H	B	P	C	O	N	J	K	M	L	F
P	A	G	I	G	I	P	A	P	A	P	P	I	G	I	G	A

Tablo 38

Tablo 37 ve 38 den $(\mathcal{O},+,\cdot)$ *nın değişmeli olmayan bir halka olduğu kolayca görülür.*

$\mathcal{R}=\{B,C,D,F,J\}$ *algılanabilen nesneler kümesinin bir alt kümesi olmak üzere;* $\mathcal{R}$ *üzerinde "+" ve "·" ikili işlemleri Tablo 39 ve Tablo 40 daki gibi olur.*

$+$	B	C	D	F	J
B	A	F	G	C	E
C	F	A	K	B	M
D	G	K	A	L	N
F	C	B	L	A	I
J	E	M	N	I	A

Tablo 39

$\cdot$	B	C	D	F	J
B	B	C	A	F	B
C	A	A	B	A	C
D	D	E	A	H	D
F	B	C	B	F	F
J	B	C	D	F	J

Tablo 40

Bu durumda

$$\begin{aligned}[A]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(A) = \alpha_3\} \\ &= \{A, B\} \\ &= [B]_{\varphi_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[C]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(C) = \alpha_4\} \\ &= \{C, F\} \\ &= [F]_{\varphi_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[D]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(D) = \alpha_1\} \\ &= \{D, I, K, M, O\} \\ &= [I]_{\varphi_1} = [K]_{\varphi_1} = [M]_{\varphi_1} = [O]_{\varphi_1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[E]_{\varphi_1} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(E) = \alpha_2\} \\ &= \{E, H, J, L, N, P\} \\ &= [H]_{\varphi_1} = [J]_{\varphi_1} = [L]_{\varphi_1} = [N]_{\varphi_1} = [P]_{\varphi_1},\end{aligned}$$

$$[G]_{\varphi_1} = \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_1(x') = \varphi_1(G) = \alpha_5\} = \{G\}$$

dir. Böylece $\xi_{\varphi_1} = \left\{[A]_{\varphi_1}, [C]_{\varphi_1}, [D]_{\varphi_1}, [E]_{\varphi_1}, [G]_{\varphi_1}\right\}$ *olur.*

Benzer olarak

$$\begin{aligned}[A]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(A) = \beta_3\} \\ &= \{A, E, I, K, L, M\} \\ &= [E]_{\varphi_2} = [I]_{\varphi_2} = [K]_{\varphi_2} = [L]_{\varphi_2} = [M]_{\varphi_2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[B]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(B) = \beta_4\} \\ &= \{B, C, F\} \\ &= [C]_{\varphi_2} = [F]_{\varphi_2},\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[D]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(D) = \beta_1\} \\
&= \{D, O\} \\
&= [O]_{\varphi_2} \ ,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[G]_{\varphi_2} &= \{x' \in \mathcal{O} \mid \varphi_2(x') = \varphi_2(G) = \beta_2\} \\
&= \{G, H, J, N, P\} \\
&= [H]_{\varphi_2} = [J]_{\varphi_2} = [N]_{\varphi_2} = [P]_{\varphi_2}
\end{aligned}
$$

olur. Buradan $\xi_{\varphi_2} = \left\{[A]_{\varphi_2}, [B]_{\varphi_2}, [D]_{\varphi_2}, [G]_{\varphi_2}\right\}$ *dir. Böylece,* $r = 1$ *için* $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi* $N_1(B) = \{\xi_{\varphi_1}, \xi_{\varphi_2}\}$ *dikkate alınırsa*

$$
\begin{aligned}
N_1(B)^* \mathcal{R} &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i} \cap \mathcal{R} \neq \varnothing} [x]_{\varphi_i} \\
&= \{A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L, M, N, O, P\} = \mathcal{O}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bununla birlikte Tanım 4.1.1 den,

(YH_1) $\mathcal{R}$, *"+" işlemi ile bir yakınlık grubudur.*

(YH_2) $\mathcal{R}$, *"·" işlemi ile bir yakınlık yarı grubudur.*

(YH_3) *Her* $x, y, z \in \mathcal{R}$ *için,* $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$ *ve* $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$ *özellikleri* $N_r(B)^* \mathcal{R}$ *de sağlanır.*

O halde, $\mathcal{O}$ *algılanabilir nesneler kümesinin* $\mathcal{R}$ *alt kümesi bir yakınlık halkasıdır.* $\mathcal{S} = \{B, C, F\}$, $\mathcal{R}$ *yakınlık halkasının bir alt kümesi olmak üzere;* $S \subseteq \mathcal{R}$ *üzerinde "+" ve "·" ikili işlemleri Tablo 37 ve Tablo 38 dikkate alınırsa Tablo 41 ve Tablo 42 deki gibidir.*

$+$	B	C	F
B	A	F	C
C	F	A	B
F	C	B	A

Tablo 41

$\cdot$	B	C	F
B	B	C	F
C	A	A	A
F	B	C	F

Tablo 42

$r=1$ için $\mathcal{O}$ algılanabilir nesneler kümesinin ayrışımlarının kümesi $N_1(B)=\{\xi_{\varphi_1},\xi_{\varphi_2}\}$ dir. Bu durumda

$$\begin{aligned} N_1(B)^*\mathcal{S} &= \bigcup_{[x]_{\varphi_i}\cap\mathcal{S}\neq\varnothing}[x]_{\varphi_i} \\ &= \{A,B\}\cup\{C,F\}\cup\{B,C,F\} \\ &= \{A,B,C,F\}\neq\mathcal{O} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada $(N_r(B)^*\mathcal{S},+)$ ve $(N_r(B)^*\mathcal{S},\cdot)$ grupoid, $-B=B$, $-C=C$ ve $-F=F\in N_r(B)^*\mathcal{S}$ olur. Böylece Teorem 4.1.1 den $\mathcal{S}$, $\mathcal{R}$ yakınlık halkasının bir alt yakınlık halkasıdır. Ancak $D\in\mathcal{R}$ ve $B\in\mathcal{S}$ için $D\cdot B=D\notin N_1(B)^*\mathcal{S}$ olduğundan $\mathcal{S}$, $\mathcal{R}$ yakınlık halkasının bir yakınlık ideali değildir.

$\mathcal{S}$, $\mathcal{R}$ yakınlık halkasının alt yakınlık halkası olduğundan $\mathcal{R}$ nin $\mathcal{S}$ ile belirlenen tüm sol zayıf kalan sınıfları yazılabilir.

Sol zayıf kalan sınıfının tanımından

$$\begin{aligned} &B+\mathcal{S}=\{F,C\}\cup\{B\}=\{B,C,F\}, \\ &C+\mathcal{S}=\{F,B\}\cup\{C\}=\{B,C,F\}, \\ &D+\mathcal{S}=\emptyset\cup\{D\}=\{D\}, \\ &F+\mathcal{S}=\{B,C\}\cup\{F\}=\{B,C,F\}, \\ &J+\mathcal{S}=\emptyset\cup\{J\}=\{J\} \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\mathcal{R}/_w\mathcal{S}=\{B+\mathcal{S},C+\mathcal{S},D+\mathcal{S},F+\mathcal{S},J+\mathcal{S}\}$ olur.

$N_1(B)^*\mathcal{R}=\{A,B,C,D,E,F,G,H,I,J,K,L,M,N,O,P\}$ olduğundan $N_1(B)^*\mathcal{R}$ nin $\mathcal{S}$ ile belirlenen tüm sol zayıf kalan sınıfları

$$\begin{aligned} A+\mathcal{S} &= \{B,C,F\}\cup\{A\}=\{A,B,C,F\},\ E+\mathcal{S}=\{J\}\cup\{E\}=\{J,E\}, \\ G+\mathcal{S} &= \{D\}\cup\{G\}=\{D,G\},\ H+\mathcal{S}=\emptyset\cup\{H\}=\{H\}, \\ I+\mathcal{S} &= \{J\}\cup\{I\}=\{I,J\},\ K+\mathcal{S}=\{D\}\cup\{K\}=\{D,K\}, \\ L+\mathcal{S} &= \{D\}\cup\{L\}=\{D,L\},\ M+\mathcal{S}=\{J\}\cup\{M\}=\{J,M\}, \\ N+\mathcal{S} &= \emptyset\cup\{N\}=\{N\},\ O+\mathcal{S}=\emptyset\cup\{O\}=\{O\}, \\ P+\mathcal{S} &= \emptyset\cup\{P\}=\{P\} \end{aligned}$$

dir. Böylece

$(N_1(B)^{*}\mathcal{R})/_{\sim} = \{A+\mathcal{S}, B+\mathcal{S}, C+\mathcal{S}, D+\mathcal{S}, E+\mathcal{S}, F+\mathcal{S}, G+\mathcal{S},$

$H+\mathcal{S}, I+\mathcal{S}, J+\mathcal{S}, K+\mathcal{S}, L+\mathcal{S}, M+\mathcal{S}, N+\mathcal{S}, O+\mathcal{S}, P+\mathcal{S}\} \subset \mathcal{P}(\mathcal{O})$ *elde edilir.*

$\mathcal{R}/_w\mathcal{S}$ *üzerinde "$\oplus$" ve "$\odot$" ikili işlemleri, Tanım 4.2.3 ve Tanım 4.2.4 kullanılarak, Tablo 43 ve Tablo 44 deki gibi tanımlansın.*

$\oplus$	$B+\mathcal{S}$	$C+\mathcal{S}$	$D+\mathcal{S}$	$F+\mathcal{S}$	$J+\mathcal{S}$
$B+\mathcal{S}$	$A+\mathcal{S}$	$F+\mathcal{S}$	$G+\mathcal{S}$	$C+\mathcal{S}$	$E+\mathcal{S}$
$C+\mathcal{S}$	$F+\mathcal{S}$	$A+\mathcal{S}$	$K+\mathcal{S}$	$B+\mathcal{S}$	$M+\mathcal{S}$
$D+\mathcal{S}$	$G+\mathcal{S}$	$K+\mathcal{S}$	$A+\mathcal{S}$	$L+\mathcal{S}$	$N+\mathcal{S}$
$F+\mathcal{S}$	$C+\mathcal{S}$	$B+\mathcal{S}$	$L+\mathcal{S}$	$A+\mathcal{S}$	$I+\mathcal{S}$
$J+\mathcal{S}$	$E+\mathcal{S}$	$M+\mathcal{S}$	$N+\mathcal{S}$	$I+\mathcal{S}$	$A+\mathcal{S}$

Tablo 43

$\odot$	$B+\mathcal{S}$	$C+\mathcal{S}$	$D+\mathcal{S}$	$F+\mathcal{S}$	$J+\mathcal{S}$
$B+\mathcal{S}$	$B+\mathcal{S}$	$C+\mathcal{S}$	$A+\mathcal{S}$	$F+\mathcal{S}$	$B+\mathcal{S}$
$C+\mathcal{S}$	$A+\mathcal{S}$	$A+\mathcal{S}$	$B+\mathcal{S}$	$A+\mathcal{S}$	$C+\mathcal{S}$
$D+\mathcal{S}$	$D+\mathcal{S}$	$E+\mathcal{S}$	$A+\mathcal{S}$	$H+\mathcal{S}$	$D+\mathcal{S}$
$F+\mathcal{S}$	$B+\mathcal{S}$	$C+\mathcal{S}$	$B+\mathcal{S}$	$F+\mathcal{S}$	$F+\mathcal{S}$
$J+\mathcal{S}$	$B+\mathcal{S}$	$C+\mathcal{S}$	$D+\mathcal{S}$	$F+\mathcal{S}$	$J+\mathcal{S}$

Tablo 44

$(N_r(B)^{*}\mathcal{R})/_{\sim} \subseteq N_r(B)^{*}(\mathcal{R}/_w\mathcal{S})$ *olduğunu göstermek için* $(N_1(B)^{*}\mathcal{R})/_{\sim}$ *den alınan her elemanın* $N_1(B)^{*}(\mathcal{R}/_w\mathcal{S})$ *de olduğunu göstermek yeterlidir.*

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(R/_w\mathcal{S}) &= \{\Phi(X) \mid X \in \mathcal{R}/_w\mathcal{S}\} \\
&= \{\Phi(B+\mathcal{S}), \Phi(C+\mathcal{S}), \Phi(D+\mathcal{S}), \Phi(F+\mathcal{S}), \Phi(J+\mathcal{S})\} \\
&= \{\{\Phi(B), \Phi(C), \Phi(F)\}, \{\Phi(B), \Phi(C), \Phi(F)\}, \\
&\quad \{\Phi(D)\}, \{\Phi(B), \Phi(C), \Phi(F)\}, \{\Phi(J)\}\} \\
&= \{\{(\alpha_3, \beta_4), (\alpha_4, \beta_4), (\alpha_4, \beta_4)\}, \{(\alpha_1, \beta_1)\}, \{(\alpha_2, \beta_2)\}\}
\end{aligned}$$

dir. $B+\mathcal{S}\in\mathcal{R}/_w\mathcal{S}$ *için,*

$$\mathcal{Q}(B+\mathcal{S})=\{\Phi(B),\Phi(C),\Phi(F)\}=\{(\alpha_3,\beta_4),(\alpha_4,\beta_4),(\alpha_4,\beta_4)\}$$

ve

$$\mathcal{Q}(A+\mathcal{S})=\{\Phi(A),\Phi(B),\Phi(C),\Phi(F)\}=\{(\alpha_3,\beta_3),(\alpha_3,\beta_4),(\alpha_4,\beta_4),(\alpha_4,\beta_4)\}$$

olduğundan $\mathcal{Q}(A+\mathcal{S})\cap\mathcal{Q}(B+\mathcal{S})=\{(\alpha_3,\beta_4),(\alpha_4,\beta_4),(\alpha_4,\beta_4)\}\neq\emptyset$ *olur. Böylece* $A+\mathcal{S}\in\xi_\Phi(B+\mathcal{S})$ *dir. Buradan* $\xi_\Phi(B+\mathcal{S})\underset{\Phi}{\cap}\mathcal{R}/_w\mathcal{S}\neq\emptyset$ *ve Tanım 4.2.5 den* $A+\mathcal{S},B+\mathcal{S}\in N_1(B)^*(\mathcal{R}/_w\mathcal{S})$ *olur.*

$D+\mathcal{S}\in\mathcal{R}/_w\mathcal{S}$ *için,*

$$\mathcal{Q}(D+\mathcal{S})=\{\Phi(D)\}=\{(\alpha_1,\beta_1)\}$$

ve

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(G+\mathcal{S}) &= \{\Phi(D),\Phi(G)\}=\{(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_5,\beta_2)\},\\ \mathcal{Q}(L+\mathcal{S}) &= \{\Phi(D),\Phi(L)\}=\{(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_2,\beta_3)\},\\ \mathcal{Q}(K+\mathcal{S}) &= \{\Phi(D),\Phi(K)\}=\{(\alpha_1,\beta_1),(\alpha_1,\beta_3)\},\\ \mathcal{Q}(O+\mathcal{S}) &= \{\Phi(O)\}=\{(\alpha_1,\beta_1)\}\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(G+\mathcal{S})\cap\mathcal{Q}(D+\mathcal{S}) &= \{(\alpha_1,\beta_1)\}\neq\emptyset,\\ \mathcal{Q}(L+\mathcal{S})\cap\mathcal{Q}(D+\mathcal{S}) &= \{(\alpha_1,\beta_1)\}\neq\emptyset,\\ \mathcal{Q}(K+\mathcal{S})\cap\mathcal{Q}(D+\mathcal{S}) &= \{(\alpha_1,\beta_1)\}\neq\emptyset,\\ \mathcal{Q}(O+\mathcal{S})\cap\mathcal{Q}(D+\mathcal{S}) &= \{(\alpha_1,\beta_1)\}\neq\emptyset\end{aligned}$$

olur. Böylece $G+\mathcal{S},L+\mathcal{S},K+\mathcal{S},O+\mathcal{S}\in\xi_\Phi(D+\mathcal{S})$ *dir. Buradan* $\xi_\Phi(D+\mathcal{S})\underset{\Phi}{\cap}\mathcal{R}/_w\mathcal{S}\neq\emptyset$ *ve Tanım 4.2.5 den* $D+\mathcal{S},G+\mathcal{S},L+\mathcal{S},K+\mathcal{S},O+\mathcal{S}\in N_1(B)^*(\mathcal{R}/_w\mathcal{S})$ *olur.*

$J+\mathcal{S}\in\mathcal{R}/_w\mathcal{S}$ *için,*

$$\mathcal{Q}(J+\mathcal{S})=\{\Phi(J)\}=\{(\alpha_2,\beta_2)\}$$

ve

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(E+\mathcal{S}) &= \{\Phi(J),\Phi(E)\} = \{(\alpha_2,\beta_2),(\alpha_2,\beta_3)\},\\
\mathcal{Q}(H+\mathcal{S}) &= \{\Phi(H)\} = \{(\alpha_2,\beta_2)\},\\
\mathcal{Q}(I+\mathcal{S}) &= \{\Phi(I),\Phi(J)\} = \{(\alpha_1,\beta_3),(\alpha_2,\beta_2)\},\\
\mathcal{Q}(M+\mathcal{S}) &= \{\Phi(J),\Phi(M)\} = \{(\alpha_2,\beta_2),(\alpha_1,\beta_3)\},\\
\mathcal{Q}(N+\mathcal{S}) &= \{\Phi(N)\} = \{(\alpha_2,\beta_2)\},\\
\mathcal{Q}(P+\mathcal{S}) &= \{\Phi(P)\} = \{(\alpha_2,\beta_2)\}
\end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}(E+\mathcal{S})\cap\mathcal{Q}(J+\mathcal{S}) &= \{(\alpha_2,\beta_2)\}\neq\emptyset,\\
\mathcal{Q}(H+\mathcal{S})\cap\mathcal{Q}(J+\mathcal{S}) &= \{(\alpha_2,\beta_2)\}\neq\emptyset,\\
\mathcal{Q}(I+\mathcal{S})\cap\mathcal{Q}(J+\mathcal{S}) &= \{(\alpha_2,\beta_2)\}\neq\emptyset,\\
\mathcal{Q}(M+\mathcal{S})\cap\mathcal{Q}(J+\mathcal{S}) &= \{(\alpha_2,\beta_2)\}\neq\emptyset,\\
\mathcal{Q}(N+\mathcal{S})\cap\mathcal{Q}(J+\mathcal{S}) &= \{(\alpha_2,\beta_2)\}\neq\emptyset,\\
\mathcal{Q}(P+\mathcal{S})\cap\mathcal{Q}(J+\mathcal{S}) &= \{(\alpha_2,\beta_2)\}\neq\emptyset
\end{aligned}$$

olur. Böylece $E+\mathcal{S},H+\mathcal{S},I+\mathcal{S},M+\mathcal{S},N+\mathcal{S},P+\mathcal{S}\in\xi_\Phi(J+\mathcal{S})$ *dir. Buradan* $\xi_\Phi(J+\mathcal{S})\underset{\Phi}{\cap}\mathcal{R}/_w\mathcal{S}\neq\emptyset$ *ve Tanım 4.2.5 den* $J+\mathcal{S},E+\mathcal{S},H+\mathcal{S},I+\mathcal{S},M+\mathcal{S},N+\mathcal{S},P+\mathcal{S}\in N_1(B)^*(\mathcal{R}/_w\mathcal{S})$ *olur.*

$C+\mathcal{S},F+\mathcal{S}\in\mathcal{R}/_w\mathcal{S}$ *için,*

$$\mathcal{Q}(C+\mathcal{S})\cap\mathcal{Q}(C+\mathcal{S})=\mathcal{Q}(C+\mathcal{S})\neq\emptyset$$

ve

$$\mathcal{Q}(F+\mathcal{S})\cap\mathcal{Q}(F+\mathcal{S})=\mathcal{Q}(F+\mathcal{S})\neq\emptyset$$

olduğundan, $C+\mathcal{S}\in\xi_\Phi(C+\mathcal{S})$, $F+\mathcal{S}\in\xi_\Phi(F+\mathcal{S})$ *olduğu görülür. Böylece* $\xi_\Phi(C+\mathcal{S})\underset{\Phi}{\cap}\mathcal{R}/_wS\neq\emptyset$, $\xi_\Phi(F+\mathcal{S})\underset{\Phi}{\cap}\mathcal{R}/_w\mathcal{S}\neq\emptyset$ *ve Tanım 4.2.5 den* $C+\mathcal{S},F+\mathcal{S}\in N_1(B)^*(\mathcal{R}/_w\mathcal{S})$ *dir.*

Sonuç olarak $(N_r(B)^*\mathcal{R})/_{\sim_L}\subseteq N_r(B)^*(\mathcal{R}/_w\mathcal{S})$ *elde edilir.*

O halde Teorem 4.2.3 dikkate alınırsa $\mathcal{R}/_w\mathcal{S}$*, Tablo 43 ve Tablo 44 ile verilen işlemlerle birlikte,* $\mathcal{R}$ *nin* $\mathcal{S}$ *ile belirlenen tüm zayıf kalan sınıflarının yakınlık halkasıdır.*

4.3 Yakınlık Halka Homomorfizmaları

Bu kısımda yakınlık halkaları arasında tanımlanan yakınlık halka homomorfizması kavramı verilecektir. Yakınlık halka homomorfizmalarının bazı temel özellikleri teoremlerle incelenecektir. Ayrıca kısıtlanmış yakınlık halka homomorfizması kavramına ve bu kavramlar yardımı ile yakınlık halkaları için temel yakınlık homomorfizma teoremine yer verilecektir.

Tanım 4.3.1. *$R_1, R_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık halkası olsun. Her $x, y \in R_1$ için*

$$\eta(x+y) = \eta(x) + \eta(y)$$

ve

$$\eta(x \cdot y) = \eta(x) \cdot \eta(y)$$

olacak şekilde bir örten

$$\eta : N_r(B)^* R_1 \longrightarrow N_r(B)^* R_2$$

fonksiyonu varsa η ya yakınlık halka homomorfizması denir. R_1 ve R_2 yakınlık halkalarına da yakın homomorfiktir denir ve $R_1 \simeq_n R_2$ şeklinde gösterilir.

η, $N_r(B)^* R_1$ den $N_r(B)^* R_2$ ye tanımlı bir yakınlık halka homomorfizması olmak üzere

(i) η birebir ise η ya yakınlık halka monomorfizması,

(ii) η örten ise η ya yakınlık halka epimorfizması,

(iii) η birebir ve örten ise η ya yakınlık halka izomorfizması

denir.

Teorem 4.3.1. *$R_1, R_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık halkası ve η, $N_r(B)^* R_1$ den $N_r(B)^* R_2$ ye bir yakınlık halka homomorfizması olsun. Bu durumda*

(1) $0_{R_2} \in N_r(B)^* R_2$, R_2 nin yakınlık sıfır elemanı olmak üzere, $\eta(0_{R_1}) = 0_{R_2}$ dir.

(2) Her $x \in R_1$ için $\eta(-x) = -\eta(x)$ dir.

İspat. (1) η yakınlık halka homomorfizması ve $0_{R_1}+0_{R_1}=0_{R_1}$ olduğundan $\eta\left(0_{R_1}+0_{R_1}\right)=\eta\left(0_{R_1}\right)+\eta\left(0_{R_1}\right)=\eta\left(0_{R_1}\right)$ dir. Böylece Önerme 3.1.2 (ii) dikkate alınırsa $\eta\left(0_{R_1}\right)=0_{R_2}$ bulunur.

(2) $x\in R_1$ olsun. Bu durumda (1) den $\eta(x)+\eta(-x)=\eta(x+(-x))=\eta\left(0_{R_1}\right)=0_{R_2}$ olur. Benzer olarak, her $x\in R_1$ için $\eta(-x)+\eta(x)=0_{R_2}$ dir. $\eta(x)$ in toplama işlemine göre tersi mevcut olduğundan her $x\in R_1$ için $\eta(-x)=-\eta(x)$ bulunur. □

Teorem 4.3.2. *$R_1,R_2\subset\mathcal{O}$ iki yakınlık halkası ve η, $N_r(B)^{*}R_1$ den $N_r(B)^{*}R_2$ ye bir yakınlık halka homomorfizması olsun.S, R_1 in alt yakınlık halkası ve $N_r(B)^{*}S$ grupoid olmak üzere aşağıdaki özellikler sağlanır:*

(1) $\eta\left(N_r(B)^{*}S\right)=N_r(B)^{*}\eta(S)$ ise $\eta(S)=\{\eta(x)\mid x\in S\}$, R_2 nin alt yakınlık halkasıdır.

(2) S değişmeli ve $\eta\left(N_r(B)^{*}S\right)=N_r(B)^{*}\eta(S)$ ise $\eta(S)$, R_2 nin değişmeli alt yakınlık halkasıdır.

İspat. (1) S, R_1 in alt yakınlık halkası olduğundan $0_{R_1}\in N_r(B)^{*}S$ ve Teorem 4.3.1 (1) den $0_{R_2}\in N_r(B)^{*}R_2$ olup; $\eta\left(0_{R_1}\right)=0_{R_2}$ dir. Buradan $0_{R_2}=\eta\left(0_{R_1}\right)\in\eta\left(N_r(B)^{*}S\right)=N_r(B)^{*}\eta(S)$ olur. O halde $\eta(S)\neq\emptyset$ dir. $x\in S$ olmak üzere, $\eta(x)\in\eta(S)$ dir. Bu durumda S, R_1 in alt yakınlık halkası olduğundan $-x\in N_r(B)^{*}S$ dir. Böylece her $\eta(x)\in\eta(S)$ için $-\eta(x)=\eta(-x)\in\eta\left(N_r(B)^{*}S\right)=N_r(B)^{*}\eta(S)$ olur. Sonuç olarak, Teorem 4.1.1 den $\eta(S)$, R_2 nin alt yakınlık halkasıdır.

(2) S, R_1 in değişmeli alt yakınlık halkası ve $\eta(x),\eta(y)\in\eta(S)$ olsun. (1) den $\eta(S)$, R_2 nin alt yakınlık halkasıdır, yani $\eta(S)$ yakınlık halkasıdır. Bu durumda her $\eta(x),\eta(y)\in\eta(S)$ için $\eta(x)\cdot\eta(y)=\eta(x\cdot y)=\eta(y\cdot x)=\eta(y)\cdot\eta(x)$ olur. Böylece $\eta(S)$, R_2 nin değişmeli alt yakınlık halkasıdır. □

Tanım 4.3.2. *$R_1,R_2\subset\mathcal{O}$ iki yakınlık halkası ve η, $N_r(B)^{*}R_1$ den $N_r(B)^{*}R_2$ ye yakınlık halka homomorfizması olsun. 0_{R_2}, R_2 nin yakınlık sıfır elemanı olmak üzere*

$$\{x\in R_1\mid\eta(x)=0_{R_2}\}$$

kümesine η yakınlık halka homomorfizmasının çekirdeği denir ve $Ker\eta$ ile gösterilir.

Teorem 4.3.3. *$R_1, R_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık halkası ve η, $N_r(B)^* R_1$ den $N_r(B)^* R_2$ ye yakınlık halka homomorfizması olsun. $N_r(B)^* Ker\eta$, "$+$" ve "$\cdot$" ikili işlemleri ile bir grupoid olmak üzere, $Ker\eta$, R_1 in yakınlık idealidir.*

İspat. $x, y \in Ker\eta$ olmak üzere, $\eta(x-y) = \eta(x) - \eta(y) = 0_{R_2} - 0_{R_2} = 0_{R_2} \in N_r(B)^* R_2$ dir, yani $x - y \in N_r(B)^* (Ker\eta)$ olur. $r \in R_1$ olmak üzere, $\eta(r \cdot x) = \eta(r) \cdot \eta(x) = \eta(r) \cdot 0_{R_2} = 0_{R_2} \in N_r(B)^* R_2$ olur. Buradan $r \cdot x \in N_r(B)^* (Ker\eta)$ bulunur. Benzer şekilde $x \cdot r \in N_r(B)^* (Ker\eta)$ olduğu görülür. Böylece Tanım 4.1.6 dan $Ker\eta$, R_1 in yakınlık idealidir. □

Teorem 4.3.4. *$R \subset \mathcal{O}$ bir yakınlık halkası ve S, R nin alt yakınlık halkası olsun. Bu durumda her $x \in N_r(B)^* R$ için*

$$\Pi(x) = x + S$$

ile tanımlı

$$\Pi : N_r(B)^* R \to N_r(B)^* (R/_w S)$$

fonksiyonu bir yakınlık halka homomorfizmasıdır.

İspat. Π nin tanımı dikkate alınırsa Π iyi tanımlıdır. Tanım 4.2.3 ve Tanım 4.2.4 gereğince her $x, y \in R$ için

$$\Pi(x+y) = (x+y) + S = (x+S) \oplus (y+S) = \Pi(x) \oplus \Pi(y),$$

$$\Pi(x \cdot y) = (x \cdot y) + S = (x+S) \odot (y+S) = \Pi(x) \odot \Pi(y)$$

olur. Böylece Tanım 4.3.1 den Π yakınlık halka homomorfizmasıdır. □

Tanım 4.3.3. *$R \subset \mathcal{O}$ bir yakınlık halkası ve S, R nin alt yakınlık halkası olmak üzere, her $x \in N_r(B)^* R$ için*

$$\Pi(x) = x + S$$

ile tanımlı

$$\Pi : N_r(B)^* R \to N_r(B)^* (R/_w S)$$

yakınlık halka homomorfizmasına doğal yakınlık halka homomorfizması denir.

Örnek 4.3.1. *Örnek 4.2.1 den R nin S ile belirlenen tüm zayıf kalan sınıflarının $R/_wS$ yakınlık halkası dikkate alınsın. Her $x \in N_r(B)^* R$ için*

$$\begin{array}{rcl} \Pi : N_r(B)^* R & \longrightarrow & N_r(B)^* (R/_wS) \\ x & \longmapsto & \Pi(x) = x + S \end{array}$$

fonksiyonu dikkate alınsın. Tanım 4.2.3 ve Tanım 4.2.4 gereğince her $x, y \in R$ için

$$\Pi(x+y) = (x+y) + S = (x+S) \oplus (y+S) = \Pi(x) \oplus \Pi(y)$$

ve

$$\Pi(x \cdot y) = (x \cdot y) + S = (x+S) \odot (y+S) = \Pi(x) \odot \Pi(y)$$

olur. Sonuç olarak, Π bir doğal yakınlık halka homomorfizmasıdır.

Tanım 4.3.4. *$R_1, R_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık halkası ve S, R_1 in boştan farklı bir alt kümesi olsun. Bu durumda*

$$\chi : N_r(B)^* R_1 \longrightarrow N_r(B)^* R_2$$

bir fonksiyon ve

$$\chi_S = \chi\big|_S : S \longrightarrow N_r(B)^* R_2$$

kısıtlanmış fonksiyon olmak üzere, her $x, y \in S$ için

$$\chi(x+y) = \chi_S(x+y) = \chi_S(x) + \chi_S(y) = \chi(x) + \chi(y)$$

ve

$$\chi(x \cdot y) = \chi_S(x \cdot y) = \chi_S(x) \cdot \chi_S(y) = \chi(x) \cdot \chi(y)$$

ise χ fonksiyonuna kısıtlanmış yakınlık halka homomorfizması denir. O zaman R_1, R_2 ye kısıtlanmış yakın homomorfiktir denir ve $R_1 \simeq_{rn} R_2$ şeklinde gösterilir.

Teorem 4.3.5. *$R_1, R_2 \subset \mathcal{O}$ iki yakınlık halkası ve χ, $N_r(B)^* R_1$ den $N_r(B)^* R_2$ ye tanımlı bir yakınlık halka homomorfizması olsun. $(N_r(B)^* Ker\chi, +)$, $(N_r(B)^* Ker\chi, \cdot)$ birer grupoid ve $(N_r(B)^* R_1)/_\sim$, $N_r(B)^* R_1$ in $Ker\chi$ tarafından belirlenen zayıf kalan sınıflarının kümesi olmak üzere,*

$$(N_r(B)^* R_1)/_\sim \subseteq N_r(B)^* (R_1/_wKer\chi)$$

ve

$$N_r\,(B)^*\,\chi\,(R_1) = \chi\,(N_r\,(B)^*\,R_1)$$

ise

$$R_1/_w Ker\chi \simeq_{rn} \chi\,(R_1)$$

dir.

İspat. $(N_r\,(B)^*\,Ker\chi, +)$ ve $(N_r\,(B)^*\,Ker\chi, \cdot)$ grupoid olduğundan ve Teorem 4.3.3 ten $Ker\chi$, R_1 in bir alt yakınlık halkasıdır. $Ker\chi$, R_1 in bir alt yakınlık halkası ve $(N_r\,(B)^*\,R_1)/_\sim \subseteq N_r\,(B)^*\,(R_1/_w Ker\chi)$ olduğundan ve Teorem 4.2.3 ten $R_1/_w Ker\chi$, R_1 in $Ker\chi$ tarafından belirlenen zayıf kalan sınıflarının bir yakınlık halkasıdır. Ayrıca $N_r\,(B)^*\,\chi\,(R_1) = \chi\,(N_r\,(B)^*\,R_1)$ olduğu dikkate alınırsa $\chi\,(R_1)$, R_2 nin bir alt yakınlık halkasıdır.

Her $x + Ker\chi \in R_1/_w Ker\chi$ için

$$\begin{array}{rcl} \eta_{R_1/_w Ker\chi} : \eta|_{R_1/_w Ker\chi} & \longrightarrow & N_r\,(B)^*\,\chi\,(R_1) \\ x + Ker\chi & \longmapsto & \eta_{R_1/_w Ker\chi}\,(x + Ker\chi) = \chi\,(x) \end{array}$$

olmak üzere

$$\begin{array}{rcl} \eta : N_r\,(B)^*\,(R_1/_w Ker\chi) & \longrightarrow & N_r\,(B)^*\,\chi\,(R_1) \\ A & \longmapsto & \eta(A) = \begin{cases} \eta_{R_1/_w Ker\chi}\,(A) & , A \in (N_r\,(B)^*\,R_1)/_\sim \\ e_{\chi(R_1)} & , A \notin (N_r\,(B)^*\,R_1)/_\sim \end{cases} \end{array}$$

fonksiyonu tanımlansın.

$$x + Ker\chi = \{x + k \mid k \in Ker\chi, x + k \in R_1\} \cup \{x\}\,,$$

$$y + Ker\chi = \{y + k' \mid k' \in Ker\chi, y + k' \in R_1\} \cup \{y\}$$

ve χ yakınlık halka homomorfizması olduğundan

$$\begin{aligned}
x+Ker\chi=y+Ker\chi \Rightarrow \quad & x\in y+Ker\chi \\
\Rightarrow \quad & x\in\{y+k' \mid k'\in Ker\chi, y+k'\in R_1\} \ veya \ x\in\{y\} \\
\Rightarrow \quad & x=y+k',\ k'\in Ker\chi,\ y+k'\in R_1 \ veya \ x=y \\
\Rightarrow \quad & -y+x=(-y+y)+k',\ k'\in Ker\chi \ veya \ \chi(x)=\chi(y) \\
\Rightarrow \quad & -y+x=k',\ k'\in Ker\chi \\
\Rightarrow \quad & -y+x\in Ker\chi \\
\Rightarrow \quad & \chi(-y+x)=e_{\chi(R_1)} \\
\Rightarrow \quad & \chi(-y)+\chi(x)=e_{\chi(R_1)} \\
\Rightarrow \quad & -\chi(y)+\chi(x)=e_{\chi(R_1)} \\
\Rightarrow \quad & \chi(x)=\chi(y) \\
\Rightarrow \quad & \eta_{R_1/_wKer\chi}(x+Ker\chi)=\eta_{R_1/_wKer\chi}(y+Ker\chi)
\end{aligned}$$

dir. Böylece $\eta_{R_1/_wKer\chi}$ iyi tanımlıdır.

$A,B\in N_r(B)^*(R_1/_wKer\chi)$ için $A=B$ olsun. $\eta_{R_1/_wKer\chi}$ iyi tanımlı olduğundan

$$\begin{aligned}
\eta(A) &= \begin{cases} \eta_{R_1/_wKer\chi}(A) & ,A\in(N_r(B)^*R_1)/_\sim \\ e_{\chi(R_1)} & ,A\notin(N_r(B)^*R_1)/_\sim \end{cases} \\
&= \begin{cases} \eta_{R_1/_wKer\chi}(B) & ,B\in(N_r(B)^*R_1)/_\sim \\ e_{\chi(R_1)} & ,B\notin(N_r(B)^*R_1)/_\sim \end{cases} \\
&= \eta(B)
\end{aligned}$$

olur. Bu durumda η iyi tanımlıdır.

Her $x+Ker\chi, y+Ker\chi\in R_1/_wKer\chi\subset N_r(B)^*(R_1/_wKer\chi)$ için

$$\begin{aligned}
\eta((x+Ker\chi)\oplus(y+Ker\chi)) &= \eta_{R_1/_wKer\chi}((x+Ker\chi)\oplus(y+Ker\chi)) \\
&= \eta_{R_1/_wKer\chi}((x+y)+Ker\chi) \\
&= \chi(x+y) \\
&= \chi(x)+\chi(y) \\
&= \eta_{R_1/_wKer\chi}(x+Ker\chi)+\eta_{R_1/_wKer\chi}(y+Ker\chi) \\
&= \eta(x+Ker\chi)+\eta(y+Ker\chi)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\eta\left(\left(x+Ker\chi\right)\odot\left(y+Ker\chi\right)\right) &= \eta_{R_1/_wKer\chi}\left(\left(x+Ker\chi\right)\odot\left(y+Ker\chi\right)\right)\\
&= \eta_{R_1/_wKer\chi}\left(\left(x\cdot y\right)+Ker\chi\right)\\
&= \chi\left(x\cdot y\right)\\
&= \chi\left(x\right)\cdot\chi\left(y\right)\\
&= \eta_{R_1/_wKer\chi}\left(x+Ker\chi\right)\cdot\eta_{R_1/_wKer\chi}\left(y+Ker\chi\right)\\
&= \eta\left(x+Ker\chi\right)\cdot\eta\left(y+Ker\chi\right)
\end{aligned}$$

dir. Böylece Tanım 4.3.4 ten η kısıtlanmış yakınlık halka homomorfizmasıdır. Sonuç olarak, $R_1/_wKer\chi \simeq_{rn} \chi\left(R_1\right)$ olur. □

KAYNAKLAR

[1] G. Cantor, Ueber eine Eigenschaft des Inbegriffes aller reellen algebraischen Zahlen, **J. Reine Angew. Math.**, 77 (1874) 258-262.

[2] P. Johnson, A History of Set Theory, Prindle, Weber & Schmidt, ISBN 0-87150-154-6, 1972.

[3] G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, **Math. Ann.**, 46 (1895) 481-512.

[4] G. Cantor, Beiträge zur Begründung der transfiniten Mengenlehre, **Math. Ann.,** 49 (1897) 207-246.

[5] B. Russell, The principles of mathematics, London, George Allen & Unwin Ltd., 1^{st} Ed. 1903 (2^{nd} Ed. in 1937).

[6] A. N. Whitehead and B. Russell, Principia Mathematica, 3 vols, Cambridge University Press, 1910, 1912, and 1913. 2^{nd} Ed., 1925 (Vol. 1), 1927 (Vols 2, 3). Abridged as Principia Mathematica to 56, Cambridge University Press, 1962.

[7] E. Zermelo, Beweiss, dass jede Menge wohlgeordnet werden kann, **Math. Ann.**, 59 (1904) 514-516.

[8] E. Zermelo, Untersuchungen über die Grundlagen der Mengenlehre I, **Math. Ann.**, 65:2 (1908) 261-281. English translation: Heijenoort, Jean Van, Investigations in the foundations of set theory, 1967.

[9] J. J. Thomas, Set Theory, First Edition, Academic Press, 1978, 3^{th} Ed., Springer-Verlag, 2003.

[10] N. Ergun, Kümeler teorisine giriş, Nobel Yayın Dağıtım, II. Baskı, Ankara, 2006.

[11] L. A. Zadeh, Fuzzy Sets, **Information and Control**, 8 (1965) 338-353.

[12] L. A. Zadeh, Fuzzy logic and approximate reasoning, **Kluwer Academic Publishers**, 30:3-4 (1975) 407-428.

[13] Z. Pawlak, Rough sets, **Int. J. Comput. Inform. Sci.**, 11:5 (1982) 341-356.

[14] G. Frege, Grundgesetze der Arithmetik, 2, Verlag von Hermann Pohle, Jena, 1893.

[15] T. B. Iwinski, Algebraic approach to rough sets, **Bull. Pol. Acad. Sci. Math.**, 35 (1987) 673-683.

[16] R. Biswas and S. Nanda, Rough groups and rough subgroups, **Bull. Pol. Acad. Sci. Math.**, 42 (1994) 251-254.

[17] N. Kuroki, Rough ideals in semigroups, **Inform. Sci.**, 100 (1997) 139-163.

[18] N. Kuroki and P. P. Wang, The lower and upper approximations in a fuzzy group, **Inform. Sci.**, 90 (1996) 203-220.

[19] B. Davvaz, Roughness in rings, **Inform. Sci.,** 164 (2004) 147-163.

[20] B. Davvaz and M. Mahdavipour, Roughness in modules, **Inform. Sci.**, 176 (2006) 3658-3674.

[21] Z. Pawlak, Rough sets-theoretical aspects of reasoning about data, Kluwer Academic Puplishers, Boston, London, Dordrecht, 1991.

[22] Y. Y. Yao, On generalizing Pawlak approximation operators, **Lecture Notes in Artificial Intelligence**, 1424 (1994) 298-307.

[23] M. Wolski, Perception and classification. A note on near sets and rough sets, **Fund. Inform.**, 101 (2010) 143-155.

[24] M. Wolski, Gauges, pregauges and completions: Some theoretical aspects of near and rough set approaches to data, Rough Sets and Knowledge Technology, LNCS 6954, Springer, Berlin, (2011) 559-568.

[25] S. S. Ahn, Y. B. Jun and K. J. Lee, Roughness in subtraction algebras, **Commun. Korean Math. Soc.,** 21:4 (2006) 653-664.

[26] C. Wang and D. Chen, A short note on some properties of rough groups, **Comput. Math. Appl.**, 59 (2010) 431-436.

[27] S. Rasouli and B. Davvaz, Roughness in MV-algebras, **Inform. Sci.**, 180 (2010) 737-747.

[28] S. Yamak, O. Kazanç and B. Davvaz, Generalized lower and upper approximations in a ring, **Inform. Sci.**, 180 (2010) 1759-1768.

[29] S. B. Hosseinia and V. Ghaffari, Some results on rough (prime) modules, **International Journal of Algebra and Statistics**, 1:1 (2012) 17-21.

[30] D. Molodtsov, Soft set theory- First results, **Comput. Math. Appl.**, 37 (1999) 19-31.

[31] P. K. Maji, R. Biswas and A. R. Roy, Soft set theory, **Comput. Math. Appl.**, 45 (2003) 555-562.

[32] P. K. Maji, A. R. Roy and R. Biswas, An application of soft sets in a decision making problem, **Comput. Math. Appl.**, 44 (2002) 1077-1083.

[33] Z. Pawlak and J. F. Peters, Jak Blisko (how near), Systemy Wspomagania Decyzji I, 57, 109, ISBN:83-920730-4-5, 2002-2007.

[34] S. A. Naimpally and J. F. Peters, Topology with applications. Topological spaces via near and far, World Scientific, Singapore, 2012.

[35] J. F. Peters, Classification of perceptual objects by means of features, **Int. J. Info. Technol. Intell. Comput.**, 3:2 (2008) 1-35.

[36] J. F. Peters, Sufficiently near sets of neighbourhoods, **Rough Sets ad Knowledge Technology**, LNCS 6954, Springer, Berlin, (2011) 17-24.

[37] J. F. Peters and S. Naimpally, Approach spaces for near filters, **Gen. Math. Notes**, 2:1 (2011) 159-164.

[38] J. F. Peters, Topology of Digital Images. Visual Pattern Discovery in Proximity Spaces, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, 2014.

[39] J. F. Peters and S. Tiwari, Approach merotopies and near filters, **Gen. Math. Notes**, 3:1 (2011) 1-15.

[40] M. Pavel, Fundamentals of pattern recognition, 2^{nd} Ed. N.Y., Marcel Dekker, Inc., 1993.

[41] J. F. Peters, Rough ethology: Towards a biologically-inspired study of collective behaviour in intelligent systems with approximation spaces, **Transactions on Rough Sets**, III, LNCS 3400 (2005) 153-174.

[42] J. F. Peters and C. Henry, Reinforcement learning with approximation spaces, **Fund. Inform.**, 71:2-3 (2006) 323-349.

[43] J. F. Peters and S. Ramanna, Affinities between perceptual granules: Foundations and perspectives. In Human-centric information processing through granular modelling sci 182, Eds. A. Bargiela and W. Pedrycz, Springer-Verlag, Berlin, 2009.

[44] J. F. Peters, C. Henry and D. S. Gunderson, Biologically-inspired approximate adaptive learning control strategies: A rough set approach, **International Journal of Hybrid Intelligent Systems**, 4:4 (2007) 203-216.

[45] J. F. Peters and S. A. Naimpally, Applications of near sets, **Notices Amer. Math. Soc.**, 59:4 (2012) 536-542.

[46] A. Hassanien, A. Abraham, J. F. Peters, G. Schaefer and C. Henry, Rough sets and near sets in medical imaging: A review, **IEEE Trans Info. Tech. in Biomedicine**, 13:6 (2009) 955-968.

[47] C. Henry, Near sets: Theory and applications, PhD Thesis, Department of Electrical & Computer Engineering, 2010.

[48] J. F. Peters, Corrigenda and addenda: Tolerance near sets and image correspondence, **Int. J. Bio-Inspired Comput.**, 2:5 (2010) 310-318.

[49] C. Henry and J. F. Peters, Near set evaluation and recognition (NEAR) system V2.0, University of Manitoba Computational Intelligence Laboratory Technical Report, TR-2010-017.

[50] C. Henry and G. Smith, Proximity System, University of Manitoba Computational Intelligence Laboratory Technical Report, TR-2012-021.

[51] Z. Pawlak, Why rough sets?, the 5th IEEE International conference on fuzzy systems (FUZZ-IEEE 96), New Orleans, Louisiana, Sept. (1996) 738-743.

[52] Z. Pawlak and A. Skowron, Rough membership function, in eds: R.E Yeager, M. Fedrizzi and J. Kacprzyk, Advaces in the Dempster-Schafer of Evidence, Wiley, New York, (1994) 251-271.

[53] A. Skowron and C. Rauszer, The indiscernibility matrices and functions in information systems, Handbook of advances and applications of rough set theory, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1992, 331-362.

[54] E. Krusińska, R. Slowiński and J. Stefanowski, Discriminant versus rough set approach to vague data analysis, **J. Appl. Stat. and Data Analysis**, 8 (1992) 43-56.

[55] Z. Pawlak and R. Slowiński, Decision analysis using rough sets, **International Transactions on Operational Research**, 1 (1994) 107-104.

[56] R. Slowiński, Rough set approach to decision analysis, AI Expert, 10 (1995) 18-25.

[57] J. F. Peters, Near sets. General theory about nearness of objects, **Appl. Math. Sci.**, 1:53-56 (2007) 2609-2629.

[58] Merleau-Ponty, Maurice, Phenomenology of perception, Paris and New York: Smith, Gallimard, Paris and Routledge & Kegan Paul, Trans. by Colin Smith, 1945 & 1965.

[59] A. Hoogs, R. Collins, R. Kaucic and J. Mundy, A common set of perceptual observables for grouping, figure-ground discrimination, and texture classification, **IEEE Transactions on Pattern Analysis and Machine Intelligence**, 25:4 (2003) 458-474.

[60] S. K. Pal and J. F. Peters, Rough Fuzzy Image Analysis. Foundations and Methodologies, CRC Press, Taylor & Francis Group, Sept., 2010, ISBN 13:9781439803295 ISBN 10: 1439803293.

[61] I. Guyon, S. Gunn, M. Nikravesh and L. A. Zadeh, Feature extraction, foundations and applications, Berlin, Springer, 2006.

[62] S. Watanabe, Pattern recognition: Human and mechanical. John Wiley & Sons: Chichester, 1985.

[63] J. H. Poincaré and Dernières Pensées, translated by J. W. Bolduc as mathematics and Science: Last Essays. Paris & NY: Flammarion & Kessinger Pub., 1913 & 2009.

[64] J. F. Peters and P. Wasilewski, Foundations of near sets, **Inform. Sci.**, 179 (2009) 3091-3109.

[65] E. C. Zeeman, The topology of the brain and the visual perception, New Jersey: Prentice Hall. In K. M. 4^{th} Ed., Topology of 3-manifolds and Selected Topics, (1962) 240-256.

[66] L. Polkowski, Rough Sets, Mathematical Foundations, Springer-Verlag, Heidelberg, 2002.

[67] A. Clifford and G. Preston, The Algebraic Theory of Semigroups I, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1961, Mathematical Surveys.

[68] A. Skowron and J. Stepaniuk, Tolerance approximation spaces, **Fund. Inform.**, 27:2-3 (1996) 245-253.

[69] B. Davvaz, Rough sets in a fundamental ring, **Bull. Iranian Math. Soc.**, 24:2 (1998) 49-61.

[70] D. Miao, S. Han, D. Li and L. Sun, Rough group, rough subgroup and their properties, **Springer-Verlag, Heidelberg**, (2005) 104-113.

[71] J. F. Peters, Near sets. Special theory about nearness of objects, **Fund. Inform.**, 75:1-4 (2007) 407-433.

[72] J. F. Peters, E. İnan and M. A. Öztürk, Spatial and descriptive isometries in proximity spaces, **Gen. Math. Notes**, 21:2 (2014) 125-134.

[73] J. F. Peters, Fuzzy sets, near sets and rough sets for your computational intelligence toolbox, **Foundations of Comput. Intel.**, 2 (2009) 3-25.

[74] J. F. Peters, Near sets: An introduction, **Math. Comput. Sci.**, 7 (2013) 3-9.

[75] J. M. Howie, Fundamentals of semigroups theory, Clarendon Press, Oxford, 1995.

[76] M. A. Öztürk and E. İnan, Soft nearness approximation spaces, **Fund. Inform.**, 124:1 (2013) 231-250.

[77] Z. Pawlak, Classification of objects by means of attributes, Institute for Computer Science, Polish Academy of Sciences, Report 429, 1981.

[78] Z. Pawlak, J. Grzymala-Busse, R. Slowiński and W. Ziarko, Rough sets, **Communication of the A.C.M.**, 38 (1995) 88-95.

[79] X. Liang, D. Li, On rough subgroup of a group, **Formalized Math.**, 17:3 (2009) 215-219.

[80] W. Cheng, Z. W. Mo and J. Wang, Notes on "the lower and upper approximations in a fuzzy group" and "rough ideals in semigroups", **Inform. Sci.**, 177 (2007) 5134-5140.

[81] K. S. Patnaik and A. Mustafi, Perceptual resenblance of facial images: A near set approach, **Indian J. Comp. Sci. Engineering**, 1:3 (2010) 152-156.

[82] I. N. Herstein, Abstract algebra, Macmillan Pub., 2^{nd} Ed., 1990.

[83] I. N. Herstein, Topics in ring theory, Univ. of Chicago Press, Chicago, 1969.

[84] T. W. Hungerford, Algebra, Springer-Verlag, New York, 1974.

[85] J. B. Fraleigh, A first course in abstract algebra, Pearson Education, Limited, 7^{th} Ed., 2013.

[86] N. H. McCoy, The theory of rings, The Macmillan Company, New York, 1^{st} Ed., 1964.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Ebubekir İNAN

Doğum Yeri ve Tarihi: Malatya / 24.08.1987

Adres: Adıyaman Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü.

E-Posta: einan@adiyaman.edu.tr, ebubekir.inan@gmail.com

Lisans: İnönü Üniversitesi, Fen Edebiyat Fakültesi, Matematik Bölümü (2005 - 2009).

Yüksek Lisans: Adıyaman Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı (2009 - 2011).

Mesleki Deneyim ve Ödüller:

Collaborative Researcher at Computational Intelligence Laboratory.

http://home.cc.umanitoba.ca/~petersii/wren/group-members.html

Yayın Listesi:

M. A. Öztürk and E. İnan, Soft Γ-rings and idealistic soft Γ-rings, **Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics**, 1:1 (2011) 71- 80.

E. İnan and M. A. Öztürk, Fuzzy soft rings and fuzzy soft ideals, **Neural Computing and Applications**, 21 (Suppl. 1) (2012) 1-8.

M. A. Öztürk and E. İnan, Fuzzy soft subnear-rings and $(\in, \in \vee q)$-fuzzy soft subnear-rings, **Computers and Mathematics with Applications**, 63:3 (2012) 617-628.

E. İnan, H. Yazarlı and M. A. Öztürk, Homomorphism theorems in the new view of fuzzy gamma rings, **Journal of Combinatorial Math. And Combinatorial Comp.** 87 (2013) 159-172.

M. A. Öztürk and E. İnan, Soft nearness approximation spaces, **Fundamenta Informaticae**, 124:1-2 (2013) 231-250.

J. F. Peters, E. İnan and M. A. Öztürk, Spatial and descriptive isometries in proximity spaces, **General Mathematics Notes**, 21:2 (2014) 125-134.

J. F. Peters, E. İnan and M. A. Öztürk, Monoids in Proximal Banach Spaces, **International Journal of Algebra**, 8:18 (2014) 869-872.

TEZDEN TÜRETİLEN SUNUMLAR

E. İnan and M. A. Öztürk, Near groups on nearness approximation spaces, XIV. Ulusal Mat. Semp. Bursa Uludağ Üniversitesi (7-10 Eylül 2011), 48.

M. A. Öztürk, M. Uçkun and E. İnan, Isomorphism theorems on near groups, XV. International Antalya Algebras Days, Nesin Mathematics Village (22-26 May, 2013), 25-26.

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR

E. İnan and M. A. Öztürk, Near groups on nearness approximation spaces, **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics**, 41:4 (2012) 545–558. (SCI-E)

E. İnan and M. A. Öztürk, Erratum and notes for near groups on nearness approximation spaces, **Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics**, 43:2 (2014) 279-281. (SCI-E)

M. A. Öztürk, M. Uçkun and E. İnan, Near groups of weak cosets on nearness approximation spaces, **Fundamenta Informaticae**, 133 (2014) 433-448. (SCI-E)

E. İnan and M. A. Öztürk, Near semigroups on nearness approximation spaces, **Annals of Fuzzy Mathematics and Informatics**, X:X (2015) XX-XX.

M. A. Öztürk and E. İnan, Nearness rings on Nearness Approximation Spaces, submitted.

Konu İndeksi

Yazar İndeksi