T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

QUARTER SİMETRİK KONNEKSİYONLU SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARIN LİGHTLİKE ALTMANİFOLDLARI

Oğuzhan BAHADIR

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Aralık 2012

Tezin Başlığı	:	Quarter Simetrik Konneksiyonlu Semi-Riemann Manifoldların Lightlike Altmanifoldları
Tezi Hazırlayan	:	Oğuzhan BAHADIR
Sınav Tarihi	:	28.12.2012

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Sadık KELEŞ

Doç. Dr. Erol Kılıç (Danışman)

Prof. Dr. Bayram Şahin

Doç. Dr. Erol Yaşar

Yrd. Doç. Dr. M. Kemal Özdemir

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Mehmet ALPASLAN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum ”Quarter Simetrik Konneksiyonlu Semi-Riemann Manifoldların Lightlike Altmanifoldları” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Oğuzhan BAHADIR

Sevgili Eşim Sevim'e, çocuklarım Alperen ve Ceylin'e...

ÖZET

Doktora Tezi

QUARTER SİMETRİK KONNEKSİYONLU SEMİ-RİEMANN MANİFOLDLARIN LİGHTLİKE ALTMANİFOLDLARI

Oğuzhan BAHADIR

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

130+v sayfa

2012
Danışman: Doç. Dr. Erol KILIÇ

Tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm; Riemann manifoldları, çarpım manifoldları, Lightlike hiperyüzeyler ve altmanifoldlar, quarter, semi-simetrik non metrik konneksiyonlar ve kompleks altmanifoldlarla ilgili temel kavramlardan ibaretdir.

Diğer bölümler çalışmanın orjinal kısımlarıdır. İkinci bölümde bir semi-Riemannian çarpım manifoldunun lightlike hiperyüzeyleri incelendi. İlk önce lightlike hiperyüzeyler, $F-$ çarpım yapısından yararlanarak sınflandırıldı (screen semi-invaryant, radikal anti-invaryant, screen invaryant) ve bu tip hiperyüzeylerle ilgili sonuçlar verildi. Daha sonra ise $F-$ çarpım yapısı yardımı ile elde edilen quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre bu tip lightlike hiperyüzeylerin geometrisi gözönüne alındı. Üçüncü bölümde ise Half-lightlike altmanifoldların yeni bir tipi (semi-invaryant) tanımlandı ve bu altmanifoldlar ilk önce Levi-Civita konneksiyonu ve indirgenmiş konneksiyona göre gözönüne alındı. Daha sonra bu altmanifoldlar quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre incelendi. Dördüncü bölümde semi-Riemann çarpım manifoldunun coisotropic ve $r-$ lightlike altmanifoldlarının Levi-Civita ve quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre bazı özellikleri irdelendi. Beşinci bölümde ise belirsiz Kaehler manifoldların semi-invaryant Lightlike altmanifoldları Levi-Civita ve quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre incelendi.

ANAHTAR KELİMELER: Quarter Simetrik Non-metrik Konneksiyon, Lightlike Hiperyüzey, Half-lightlike Altmanifold, Lightlike Altmanifold, Semi-Riemann Çarpım Manifoldu, Coisotropic Altmanifold, Screen invaryant Altmanifold, Radikal anti-invaryant Altmanifold, Semi-invaryant Altmanifold.

ABSTRACT

Ph. D. Thesis

LIGHTLIKE SUBMANIFOLDS OF SEMI-RIEMANN MANIFOLDS WITH QUARTER SYMMETRIC CONNECTION

Oğuzhan BAHADIR

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

130+v pages
2012
Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Erol KILIÇ

This thesis consists of five chapters. The first chapter deals with the basic concepts of Riemann manifolds, product manifolds, lightlike hipersurface and submanifolds, quarter, semi-symmetric non-metric connections and complex submanifolds.

Other chapters are the parts of original study. In the second chapter, lightlike hipersurface of a semi-Riemannian product manifold was investigated. Firstly ightlike hipersurfaces were classified, with the help of $F-$ product structure (screen semi-invariant, radical anti-invariant, screen invariant) and the results of this type of hipersurfaces were given. Later, the geometry of this type of lightlike hypersurfaces was considered with respect to quarter symmetric non-metric connection, which was obtained with the help of $F-$ product structure. In the third chapter, a new type of half-lightlike submanifolds (semi-invariant) was defined and first of all, these submanifolds were considered according to the Levi-Civita connection and induced connection. Subsecuently these submanifolds were investigated with respect to quarter symmetric non-metric connection. In the fourth chapter, some characteristics of coisotropic and $r-$ lightlike submanifolds of semi-Riemannian product manifold were evaluated with respect to Levi-Civita and quarter-symmetric non-metric connection. In the fifth chapter, semi-invariant lightlike submanifolds of indefinite Kaehler manifolds were examined with respect to Levi-Civita and quarter-symmetric non-metric connection.

KEYWORDS: Quarter Symmetric Non-metric connection, Lightlike Hipersurface, Half-lightlike submanifold, Lightlike submanifold, Semi-Riemann product Manifold, Coisotropic submanifold, Screen invariant submanifold, Radical anti-invariant submanifold, Semi-invariant submanifold.

TEŞEKKÜR

Tez konumu bana vererek, bilgisi ve görüşleriyle çalışmamın her safhasında yardım ve desteğini esirgemeden beni yönlendiren danışman hocam sayın Doç. Dr. Erol Kılıç'a

Lisansüstü çalışmalarımda sunduğu olanaklar ve teşviklerinden dolayı matematik bölüm başkanı sayın hocam Prof.Dr.Sadık Keleş'e

Yazdığı "Differential Geometry of Lightlike Submanifolds" adlı kitabıyla çalışmalarından esinlendiğimiz hocam Prof. Dr. Bayram Şahin'e

Seminerlerde beni dinleyerek önerilerde bulunan Matematik bölümü öğretim elemanlarına

Çalışmalarım boyunca gerekli her türlü fedakarlığı gösteren eşim Sevim Bahadır'a

teşekkürlerimi sunarım.

Oğuzhan Bahadır.

İÇİNDEKİLER

ÖZET i

ABSTRACT ii

TEŞEKKÜR iii

İÇİNDEKİLER iv

GİRİŞ 1

1 TEMEL KAVRAMLAR 5
 1.1 Riemannian Manifoldlar 5
  1.1.1 Çarpım Manifoldları 7
 1.2 Quarter Simetrik konneksiyonlar 8
 1.3 Lightlike Altmanifoldlar 9
  1.3.1 Lightlike Hiperyüzeyler 9
  1.3.2 Lightlike Altmanifoldlar 13
 1.4 Kompleks Manifoldlar 30

2 QUARTER SİMETRİK NON-METRİK KONNEKSİYONLU LİGHTLİKE HİPERYÜZEYLER 32
 2.1 Semi-Riemannian Çarpım Manifoldunun Lightlike Hiperyüzeyleri 32
 2.2 Quarter simetrik non-metrik konneksiyonlu Semi-Riemannian Çarpım Manifoldunun Lightlike Hiperyüzeyleri 39

3 QUARTER SİMETRİK NON-METRİK KONNEKSİYONLU HALF-LIGHTLLIKE ALTMANİFOLDLAR 48
 3.1 Semi-Riemannian Çarpım Manifoldunun Half-Lightlike Altmanifoldları . 48
 3.2 Quarter simetrik non-metrik koneksiyonlu Semi-Riemannian Çarpım Manifoldunun Half-lightlike Altmanifoldları 57

3.2.1 Gauss-Codazzi Denklemleri 75

4 QUARTER SİMETRİK NON-METRİK KONNEKSİYONLU LİGHTLİKE ALTMANİFOLDLAR 82

4.1 Semi-Riemannian Çarpım manifoldunun r-lightlike altmanifoldları 82

4.2 Quarter simetrik non-metrik konneksiyonlu Semi-Riemannian Çarpım manifoldunun r-lightlike altmanifoldları 92

5 QUARTER SİMETRİK NON-METRİK KONNEKSİYONLU BELİRSİZ KAEHLER MANİFOLDLARIN LİGHTLİKE ALTMANİFOLDLARI 102

5.1 Belirsiz Kaehler manifoldların screen-transversal anti-holomorfik Lightlike altmanifoldları 103

5.2 Quarter simetrik non-metrik konneksiyonlu screen-transversal anti-holomorfik Kaehler manifoldların Lightlike altmanifoldları 115

ÖZGEÇMİŞ 130

GİRİŞ

(M,g), n- boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\widetilde{\nabla}$, bir lineer konneksiyon olsun. $\widetilde{\nabla}$ nın torsiyon tensörü $\widetilde{T}$,

$$\widetilde{T}(X,Y) = \widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X - [X,Y], \; \forall X,Y,Z \in TM \tag{0.0.1}$$

ile verilir. Eğer torsiyon tensörü $\widetilde{T} = 0$ ise $\widetilde{\nabla}$ ya simetrik konneksiyon aksi halde non simetrik konneksiyon denir. Eğer M de $\widetilde{\nabla} g = 0$ olacak şekilde bir g Riemann metriği varsa $\widetilde{\nabla}$ ya metrik konneksiyon, aksi halde non metrik konneksiyon denir.

1932 de H.A. Hayden bir Riemann manifoldu üzerinde torsiyonu sıfırdan farklı fakat metrik konneksiyon olan bir $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonunu tanımladı. Böyle bir konneksiyona Hayden konneksiyonu denir. Bir Riemann manifoldu üzerinde bir $1-$ form w olmak üzere $\widetilde{\nabla} g = w \otimes g$ olan bir konneksiyona Weyl konneksiyonu denir. Weyl konneksiyonu bir simetrik non-metrik konneksiyondur.

π, M üzerinde bir $1-$ form olmak üzere eğer torsiyon tensörü $\widetilde{T}$,

$$\widetilde{T}(X,Y) = \pi(Y)X - \pi(X)Y \tag{0.0.2}$$

şeklinde ise bu lineer konneksiyona semi-simetrik konneksiyon denir. Bu şartı sağlayan bir Hayden konneksiyonu bir semi-simetrik metrik konneksiyondur [1].

1970 de K. Yano [2] de bir Riemann manifoldu üzerinde semi simetrik metrik konneksiyonu tanımladı ve bu konneksiyonun geometrik özelliklerini çalıştı.

1975 de S.Golab [3] de Riemannian manifoldlarda quarter-simetrik lineer konneksiyon kavramını tanımladı ve bu konneksiyonun özelliklerini çalıştı. Bir lineer konneksiyonun torsiyon tensörü $\widetilde{T}$,

$$\widetilde{T}(X,Y) = \pi(Y)\varphi X - \pi(X)\varphi Y \tag{0.0.3}$$

şeklinde yazılabiliyorsa lineer konneksiyona quarter-simetrik konneksiyon denir, burada π ve φ, sırasıyla, M üzerinde bir $1-$ form ve $(1,1)$ tipinde bir tensör alanıdır.

N. S. Agashe ve M. R. Chafle 1992' de [4] deki çalışmalarında bir Riemann manifoldu üzerinde semi-simetrik non-metrik konneksiyon kavramını tanımladılar ve bu konneksiyonlarla ilgili sonuçlar verdiler. B.B. Chaturvedi ile P. N. Pandey, bir Kaehler manifoldu üzerinde semi-simetrik konneksiyonları incelediler [5].

Bir Riemannian manifoldu üzerinde tanımlanan semi-simetrik metrik, semi-simetrik non-metrik, quarter-simetrik metrik, quarter-simetrik non-metrik konneksiyonların tamamı Mukut Mani Tripathi tarafından bir tek konneksiyonla [6] daki çalışmasında ifade edildi.

Duggal ve Bejancu 1996 da yayınladıkları kitapta [7] bir semi-Riemann manifoldda lightlike (null) alt uzayın varlığını gösterdiler ve altmanifoldların geometrisi için ihtiyaç duyulan önemli bir boşluğu doldurdular. Bu kitabın yayınlanmasından sonra hedef, lightlike geometrideki yeni geometrik sonuçların ispatı ve lightlike geometrinin fizikteki uygulamaları oldu. Böylece geometrinin önemli bir boşluğu dolduruldu ve yeni bir çalışma alanı ortaya çıktı.

K.L. Duggal ve B. Şahin belirsiz Kaehler manifoldlar ve belirsiz Sasakian manifoldlarda lightlike altmanifoldların önemli bir sınıflandırmasını verdiler [8], [9], [10], [11]. Bu altmanifoldlar Screen Cauchy-Riemann (SCR), genelleştirilmiş Cauchy-Riemann (GCR), Kontakt genelleştirilmiş CR-lightlike altmanifoldlardır. Bir başka ifade ile belirsiz Kaehler manifoldlar ve belirsiz Sasakian manifoldlarda ki lightlike altmanifoldların önemli kısımlarını bir şemsiye altında topladılar. 2007 de K.L. Duggal ve D.H Jin, Lightlike eğriler ve Lightlike hiperyüzeyler konusunda çalışan araştırmacılara yararlı olacak şekilde bir kitap yayınladılar [12]. 2010 da K.L. Duggal ve B. Şahin tarafından yayınlanan "Differential Geometry of Lightlike Submanifolds" adlı kitap, lightlike geometrinin ihtiyaç duyulan bütün kavram ve sonuçlarını içermektedir, dolayısıyla bu alanda çalışanlar için iyi bir kaynak oluşturmuştur [13].

F. Massamba belirsiz Sasakian manifoldlarda lightlike hiperyüzeyler için bir seri makale üretmiş ve bu hiperyüzeylerin sonuçlarını ortaya koymuştur [14], [15], [16], [17].

M. Atçeken ve E. Kılıc semi-Riemann çarpım manifoldlarında lightlike altmanifoldların yeni bir sınıfını tanımladılar ve çalıştılar [18]. E. Kılıç and B. Şahin bir semi-

Riemann çarpım manifoldunun radikal anti-invaryant ve Screen Semi-invaryant lightlike altmanifoldları olarak adlandırdıkları yeni bir altmanifold tipi tanımladılar ve bunlarla ilgili sonuçlar verdiler [19], [20]. E. Yasar, A. C. Coken ve A. Yucesan semi-simetrik non-metrik konneksiyonlu bir semi-Riemann manifoldda Lightlike Hiperyüzeyleri incelediler [21]. Başka bir çalışmasında E. Yaşar Ricci Quarter Simetrik Metrik konneksiyonlu bir semi-Riemann manifoldda Lightlike altmanifoldları inceledi [22].

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışmada bir semi-Riemannian çarpım manifoldunun lightlike hiperyüzeyleri ve lightlike altmanifoldları çalışıldı. Bir semi-Riemannian çarpım manfoldunun çarpım yapısı F den yararlanarak bazı lightlike hiperyüzeyler ve altmanifoldlar tanımlandı ve bunların geometrik özellikleri incelendi.

$(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ bir semi-Riemannian çarpım manifoldu ve π, $\widetilde{M}$ üzerinde bir $1-$ form olmak üzere

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \pi(Y)FX \tag{0.0.4}$$

şeklinde tanımlanan $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}$ üzerinde bir lineer konneksiyondur ve bu lineer konneksiyon quarter simetrik non-metrik konneksiyondur. Bu şekilde tanımlanan $\widetilde{\nabla}$ lineer konneksiyonuna göre lightlike hiperyüzeyler ve altmanifoldları inceledik ve bunlarla ilgili geometrik sonuçlar verdik.

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm; Riemann manifoldları, çarpım manifoldları, Lightlike hiperyüzeyler ve altmanifoldlar, quarter, semi-simetrik non metrik konneksiyonlar ve kompleks altmanifoldlarla ilgili temel kavramlardan ibaretdir. Birinci bölüm hariç diğer bölümler tezin orjinal kısımlarını oluşturmaktadır. İkinci bölümde bir semi-Riemannian Çarpım manifoldunun lightlike hiperyüzeyleri incelendi. İlk önce lightlike hiperyüzeyler, $F-$ çarpım yapısından yararlanarak sınflandırıldı (screen semi-invaryant, radikal anti-invaryant, screen invaryant) ve bu tip hiperyüzeylerle ilgili sonuçlar verildi. Daha sonra ise $F-$ çarpım yapısı yardımı ile elde edilen quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre bu tip lightlike hiperyüzeylerin geometrisi gözönüne alındı. Üçüncü bölümde ise Half-lightlike altmanifoldların yeni bir tipi (semi-invaryant) tanımlandı ve bu altmanifoldlar ilk önce Levi-

Civita konneksiyonu ve indirgenmiş konneksiyona göre gözönüne alındı ve daha sonra bu altmanifoldlar quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre incelendi. Dördüncü bölümde semi-Riemann çarpım manifoldunun coisotropik ve $r-$ lightlike altmanifoldları için Levi-Civita ve quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre paralellik, integrallenebilirlik gibi bazı tenel özellikleri irdelendi. Beşinci bölümde ise belirsiz Kaehler manifoldların Lightlike altmanifoldlarıyla ilgili önce bazı tanımlar verildi ve bazı özellikler Levi-Civita konneksiyonuna göre incelendi. Daha sonra ise quarter simetrik non-metrik konneksiyondaki φ yerine yine $(1,1)$ tipinde tensör alanı olan J kompleks yapı alınarak lightlike altmanifoldlar bu konneksiyona göre incelendi.

1. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm dört alt bölümden oluşmaktadır. Bu bölümlerde sırasıyla Riemannian manifoldlar, Quarter simetrik konneksiyonlar, Lightlike altmanifoldlar ve Kompleks manifoldlarla ilgili tezde kullanılan bazı temel kavramlar verilmiştir.

1.1 Riemannian Manifoldlar

Tanım 1.1.1. (M,g) n-boyutlu Riemanian manifoldu ve ∇ da M üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. M nin tanjant demeti TM olmak üzere

$$T:\Gamma(TM)\times\Gamma(TM)\longrightarrow\Gamma(TM)$$

$$T(X,Y)=\nabla_XY-\nabla_YX-[X,Y]$$

şeklinde tanımlanan T tensör alanına M nin torsiyon tensörü denir [23]. Eğer

$$\nabla g=0\ ,\ T=0$$

ise ∇ ya M nin Levi Civita konneksiyonu denir.

Bir Riemann manifoldu üzerinde Levi-Civita konneksiyonu vardır ve tektir [23].

Tanım 1.1.2. (M,g), n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve ∇, g nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için

$$R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_YZ-\nabla_Y\nabla_XZ-\nabla_{[X,Y]}Z$$

ye M nin eğrilik tensör alanı denir [2].

$$K(X,Y,Z,W)=g(R(X,Y)Z,W)$$

şeklinde tanımlanan K ya Riemann Christoffel eğrilik tensörü denir.

Levi-Civita konneksiyonu ∇ nın Riemann eğrilik tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$(i) \quad K(X,Y,Z,W) = -K(X,Y,W,Z),$$
$$(ii) \quad K(X,Y,Z,W) = -K(Y,X,Z,W),$$
$$(iii) \quad R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0,$$
$$(iv) \quad K(X,Y,Z,W) = K(Z,W,X,Y).$$

burada (iii) ye 1. Bianchi Özdeşliği denir.

$(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ bir $m-$ boyutlu Riemann manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nin bir $n-$ boyutlu alt manifoldu olsun. Bu durumda $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\widetilde{g}(X,Y) = g(X,Y),$$

şeklinde tanımlanan g, M üzerinde bir Riemann metriğidir ve (M,g), $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ nin bir Riemann altmanifoldudur. $x \in M$ için

$$T_xM^{\perp} = \{V \mid \widetilde{g}(X,V) = 0, X \in \Gamma(TM)\},$$

alt uzayı T_xM nin ortogonal tümleyenidir. Böylece

$$T\widetilde{M} = TM \oplus TM^{\perp},$$

olarak yazılır. $\widetilde{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonu $\widetilde{\nabla}$ olmak üzere $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y), \tag{1.1.1}$$

olarak yazılır, burada $\nabla_X Y \in \Gamma(TM)$ ve $h(X,Y) \in \Gamma(TM^{\perp})$ dir, burada ∇ ya M üzerindeki indirgenmiş konneksiyon, h ya da M nin ikinci temel formu denir. ∇ indirgenmiş konneksiyonu M üzerinde bir Levi-Civita konneksiyonudur. (1.1.1) bağıntısına da Gauss formülü denir.

$X \in \Gamma(TM)$, $V \in \Gamma(TM^{\perp})$ için

$$\widetilde{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^{\perp}_X V \tag{1.1.2}$$

dir, burada $A_V X \in \Gamma(TM)$, $\nabla^{\perp}_X V \in \Gamma(TM^{\perp})$ dir ve A_V ye M nin V ye bağlı şekil operatörü, $\nabla^{\perp}$ e M nin normal konneksiyonu denir. (1.1.2) bağıntısına Weingarten formülü denir [23].

Tanım 1.1.3. Eğer $\forall X \in \Gamma(TM)$ için $L_X g = 0$ ise X vektör alanına *Killing vektör alanı* denir, burada L_X Lie türevidir ve $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$(L_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g([X,Y],Z) - g(Y,[X,Z])$$

dir.

M üzerinde bir distribüsyon D olsun. Eğer $\forall X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(D)$ için $\nabla_X Y \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna paraleldir denir ve $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X,Y] \in \Gamma(D)$ ise D ye integrallenebilir distribüsyon denir.

1.1.1 Çarpım Manifoldları

Tanım 1.1.4. $\widetilde{M}$, n-boyutlu diferansiyellenebilir manifold ve F, $\widetilde{M}$ üzerinde

$$F^2 = I, \tag{1.1.3}$$

olacak şekilde $(1,1)$ tensör alanı olsun. Bu durumda $\widetilde{M}$ ye hemen hemen çarpım manifoldu ve F ye M üzerinde bir hemen hemen çarpım yapı denir.

Eğer

$$\pi = \frac{1}{2}(I+F),\ \sigma = \frac{1}{2}(I-F),$$

alınırsa

$$\pi + \sigma = I,\ \pi^2 = \pi,\ \sigma^2 = \sigma,\ \pi\sigma = \sigma\pi = 0,\ F = \pi - \sigma$$

elde edilir. Böylece π ve σ biri diğerinin tümleyeni olan iki distribüsyon tanımlar. Ayrıca F nin eigen değeri 1 yada -1 dir.

Bir $\widetilde{M}$ hemen hemen çarpım manifoldunda semi-Riemann $\widetilde{g}$ metriği için aşağıdaki ifade sağlanıyorsa $\widetilde{M}$.ye semi-Riemannian hemen hemen çarpım manifoldu denir:

$$\widetilde{g}(FX,FY) = \widetilde{g}(X,Y),\ \widetilde{g}(FX,Y) = \widetilde{g}(X,FY), \forall X,Y \in \Gamma(\widetilde{M}). \tag{1.1.4}$$

$\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere $\widetilde{\nabla} F = 0$ ise F ye $\widetilde{M}$ üzerinde paraleldir denir. Eğer F paralel ise $\widetilde{M}$ ye semi-Riemannian çarpım manifoldu denir [23].

$\widetilde{M} = M_1 \times M_2$ bir çarpım manifoldu olmak üzere $\widetilde{M}$, M_1 ve M_2 nin total geodezik olması ile karakterize edilir [23].

1.2 Quarter Simetrik konneksiyonlar

Tanım 1.2.1. $(\widetilde{M},\widetilde{g})$, n- boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\widetilde{\nabla}$, bir lineer konneksiyon olsun. $\widetilde{\nabla}$ nın torsiyon tensörü $\widetilde{T}$,

$$\widetilde{T}(X,Y)=\widetilde{\nabla}_XY-\widetilde{\nabla}_YX-[X,Y],\ \forall X,Y\in\Gamma(TM) \tag{1.2.1}$$

ile verilir. Eğer torsiyon tensörü $\widetilde{T}=0$ ise $\widetilde{\nabla}$ ya simetrik konneksiyon aksi halde non simetrik konneksiyon denir. Eğer $\widetilde{\nabla}\widetilde{g}=0$ ise $\widetilde{\nabla}$ ya bir metrik konneksiyon, aksi halde non metrik konneksiyon denir.

π, $\widetilde{M}$ üzerinde bir $1-$ form olmak üzere eğer torsiyon tensörü $\widetilde{T}$,

$$\widetilde{T}(X,Y)=\pi(Y)X-\pi(X)Y,\ X,Y\in\Gamma(T\widetilde{M}), \tag{1.2.2}$$

şeklinde ise bu lineer konneksiyona semi-simetrik konneksiyon denir.

Bir lineer konneksiyonun torsiyon tensörü $\widetilde{T}$,

$$\widetilde{T}(X,Y)=\pi(Y)\varphi X-\pi(X)\varphi Y \tag{1.2.3}$$

şeklinde yazılabiliyorsa lineer konneksiyona quarter-simetrik konneksiyon denir, burada π, $\widetilde{M}$ üzerinde bir $1-$ form ve φ ise $\widetilde{M}$ üzerinde $(1,1)$ tipinde bir tensör alanıdır.

$\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. φ, (1,1) tipine tensör alanı ve π bir $1-$ form olmak üzere

$$\widetilde{\nabla}_XY=\nabla_XY+\pi(Y)\varphi X,\ X,Y\in\Gamma(T\widetilde{M})$$

şeklinde tanımlanırsa kolayca gösterilebilir ki $\widetilde{\nabla}$ nin torsiyon tensörü

$$\widetilde{T}(X,Y)=\pi(Y)\varphi X-\pi(X)\varphi Y,$$

dir ve böylece $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}$ üzerinde bir quarter simetrik konneksiyondur. Ayrıca

$$(\widetilde{\nabla}_Xg)(Y,Z)=-\pi(Y)g(\varphi X,Z)-\pi(Z)g(\varphi X,Y)$$

olduğundan $\widetilde{\nabla}$ bir quarter simetrik non-metrik konneksiyondur.

1.3 Lightlike Altmanifoldlar

Bu kısımda ilk önce lightlike hiperyüzeyler ve daha sonra da lightlike altmanifoldlar hakkında temel kavramları vereceğiz.

1.3.1 Lightlike Hiperyüzeyler

Tanım 1.3.1. $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ bir $(m+2)$ boyutlu semi-Riemannian manifold, $index(\widetilde{g}) = q \geq 1$ ve (M,g), $\widetilde{M}$ nin bir hiperyüzeyi olsun. Eğer M üzerine indirgenen metrik dejenere ise bu durumda M ye lightlike (null veya dejenere) hiperyüzey denir [7].

M, $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ semi-Riemanian manifoldun bir lightlike hiperyüzeyi ise $\forall X \in \Gamma(TM)$ için $g(\xi,X) = 0$ olacak şekilde $\xi \neq 0$ bir $\xi \in \Gamma(TM)$ vektör alanı vardır. $\forall x \in M$ için T_xM nin *radikal yada null uzayı* aşağıdaki gibi tanımlıdır:

$$RadT_xM = \{\xi \in T_xM \mid g(X,\xi) = 0,\ \forall X \in T_xM\}. \tag{1.3.1}$$

Radikal uzayın boyutuna g nin *nulluk derecesi* denir. Bir lightlike hiperyüzeyde g metriğinin nulluk derecesi 1 dir. g dejenere olduğundan ve her null vektörün kendisiyle iç çarpımı sıfır olduğundan $RadT_xM \subseteq T_xM^{\perp}$ dir. O halde

$$RadT_xM = T_xM \cap T_xM^{\perp}, \tag{1.3.2}$$

elde edilir. $boyT_xM^{\perp} = boyRadT_xM = 1$ olduğundan $RadT_xM = T_xM^{\perp}$ olur. $RadTM$ ye M nin *radikal distribüsyonu* denir ve $RadTM = Sp\{\xi\}$ dir. $RadTM$ nin TM de tümleyen vektör demeti $s(TM)$ ye M nin *ekran (screen) demeti* denir ve ekran (screen) demet M nin bir non-dejenere alt demetidir. Böylece

$$TM = RadTM \perp s(TM), \tag{1.3.3}$$

olarak yazılabilir[7]. Burada $\perp$ ise ortogonal direkt toplam kastedilmektedir. $T\widetilde{M}$ de $s(TM)$ nin tümleyeni olan $s(TM)^{\perp}$ vektör demetine *screen transversal demet* denir.

Screen transversal demet bir non-dejenere demetdir ve rankı 2 dir. $RadTM$, $s(TM)^{\perp}$ nin lightlike alt demeti olduğundan

$$g(N,N)=0,\ g(\xi,N)=1, \tag{1.3.4}$$

olacak şekilde bir null N vektör alanı vardır [7]. Bu durumda $s(TM)^{\perp}$, $\{N,\xi\}$ tarafından gerilir. Bu null vektör N nin germiş olduğu demete lightlike transversal demet denir ve $ltrTM$ ile gösterilir. Buradan ise

$$T\widetilde{M}=TM\oplus ltrTM=s(TM)\perp\{RadTM\oplus ltrTM\}, \tag{1.3.5}$$

ayrışımına sahip oluruz, burada $\oplus$ direkt toplamdır ancak ortogonal değildir.

$\{E_1,E_2,...,E_n\}$, $s(TM)$ nin bir ortonormal bazı olmak üzere

$$\{E_1,E_2,...,E_n,\xi,N\},$$

ye $\widetilde{M}$ nin M boyunca quasi ortonormal çatısı denir.

(1.3.5) den Gauss ve Weingarten formüllerini

$$\widetilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+h(X,Y),\ X,Y\in\Gamma(TM),\ X,Y\in\Gamma(TM) \tag{1.3.6}$$

$$\widetilde{\nabla}_X N=-A_N X+\nabla^t_X N,\ N\in\Gamma(ltrTM), \tag{1.3.7}$$

olarak ifade edebiliriz, burada $\nabla_X Y$ ve $A_N X$ $\Gamma(TM)$ ye $h(X,Y)$ ve $\nabla^t_X N$ ise $\Gamma(ltrTM)$ ye aittir. Kolayca gösterilebilir ki ∇, M üzerinde torsiyonsuz indirgenmiş lineer konneksiyon ve h, $\Gamma(TM)$ üzerinde simetrik $\Gamma(ltrTM)$ değerli bir bilineer dönüşümdür. A_N ise $\Gamma(TM)$ üzerinde bir lineer operatördür ve ∇^t ye $ltrTM$ üzerinde bir indirgenmiş lineer konneksiyondur. h ve A_N ye, sırasıyla, M nin ikinci temel formu ve şekil operatörü denir. Eğer

$$B(X,Y)=g(h(X,Y),\xi)\ ve\ \tau(X)=g(\nabla^t_X N,\xi)$$

denilirse (1.3.6) ve (1.3.7) denklemleri

$$\widetilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+B(X,Y)N,\ X,Y\in\Gamma(TM), \tag{1.3.8}$$

$$\widetilde{\nabla}_X N=-A_N X+\tau(X)N,\ N\in\Gamma(ltrTM), \tag{1.3.9}$$

olarak ifade edilebilir. P, TM den $s(TM)$ üzerine projeksiyon olsun. Bu durumda $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = PX + \eta(X)\xi, \tag{1.3.10}$$

olarak yazabiliriz, burada η bir formu

$$\eta(X) = g(X,N), \tag{1.3.11}$$

şeklinde tanımlanır. (1.3.8) ve (1.3.10) dan

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = B(X,Y)\eta(Z) + B(X,Z)\eta(Y), \forall X,Y,Z \in \Gamma(TM), \tag{1.3.12}$$

elde edilir ve böylece ∇, M üzerinde bir non-metrik konneksiyondur. (1.3.12) den kolayca görülür ki ∇ indirgenmiş konneksiyonun bir Levi-Civita konneksiyonu olması için gerek ve yeter şart $B(X,Y) = 0$ olmasıdır [13].

(1.3.3) ayrışımından

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + h^*(X,PY), X,Y \in \Gamma(TM), \tag{1.3.13}$$

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X + \nabla^{*t}_X \xi, \tag{1.3.14}$$

elde ederiz, burada $\nabla^*_X PY$ ve $A^*_\xi X$ $\Gamma(s(TM))$ ye, $h^*(X,PY)$ ve $\nabla^{*t}_X \xi$ ise $\Gamma(ltrTM)$ ye aittir. Ayrıca h^* ve A^*_ξ a, sırasıyla, $s(TM)$ nin ekran (screen) ikinci temel formu ve ekran (screen) şekil operatörü denir. Eğer

$$C(X,PY) = \widetilde{g}(h^*(X,PY),N), \ \varepsilon(X) = \widetilde{g}(\nabla^{*t}_X \xi, N),$$

denilirse ve $\varepsilon(X) = -\tau(X)$ olduğu dikkata alınırsa (1.3.13) ve (1.3.14) denklemleri

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + C(X,PY)\xi, X,Y \in \Gamma(TM) \tag{1.3.15}$$

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X - \tau(X)\xi \tag{1.3.16}$$

olarak ifade edilebilir. Burada C ye $s(TM)$ ni lokal screen temel formu denir. (1.3.8), (1.3.9), (1.3.16) dan

$$g(A^*_\xi X, PY) = B(X,PY), g(A^*_\xi X, N) = 0, B(X,\xi) = 0, g(A_N X, N) = 0, \tag{1.3.17}$$

eşitliklerini elde ederiz. Üstelik (1.3.17) daki üçüncü eşitlikten

$$A_{\xi}^{*}\xi = 0, \tag{1.3.18}$$

elde edilir.

Teorem 1.3.1. *[13] M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:*

(1) *M total geodeziktir.*

(2) *h ikinci temel form M üzerinde sıfırdır.*

(3) *$\xi \in \Gamma(RadTM)$ için A_{ξ}^{*}, M üzerinde sıfırdır.*

(4) *M üzerinde ∇ metrik konneksiyondur.*

(5) *$RadTM$, ∇ ya göre paralel distribüsyondur.*

(6) *$RadTM$, M üzerinde Killing distribüsyonudur.*

Teorem 1.3.2. *[13] M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:*

(1) *$s(TM)$ paralel distribüsyondur.*

(2) *$C(X,PY) = 0$, $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$.*

(2) *$A_N = 0$.*

Teorem 1.3.3. *[13] M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Aşağıdaki ifadeler eşdeğerdir:*

(1) *$s(TM)$ integrallenebilir distribüsyondur.*

(2) *$\forall X,Y \in \Gamma(s(TM))$ için $h^{*}(X,Y) = h^{*}(Y,X)$.*

(2) *M nin şekil operatörü g ye göre simetriktir.*

Şimdi $\widetilde{R}$ ve R sırasıyla $\widetilde{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu $\widetilde{\nabla}$ ve M üzerindeki indirgenmiş konneksiyon ∇ ya göre eğrilik tensörleri olsunlar. Bu durumda (1.3.6), (1.3.7) den

$$\begin{aligned} \widetilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X \\ &+ (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z), \end{aligned} \tag{1.3.19}$$

elde edilir ve bu denkleme Gauss denklemi denir, burada $(\nabla_X h)(Y,Z) = \nabla^t_X (h(Y,Z)) - h(\nabla_X Y,Z) - h(Y,\nabla_X Z)$.

Bu durumda Lightlike hiperyüzeyde $\forall X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için Gauss-Codazzi denklemleri

$$\begin{aligned}
g(\widetilde{R}(X,Y)Z,PW) &= g(R(X,Y)Z,PW) + B(X,Z)C(Y,PW) \\
&- B(Y,Z)C(X,PW), \qquad (1.3.20) \\
g(\widetilde{R}(X,Y)Z,\xi) &= (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) \\
&+ B(Y,Z)\tau(X) - B(X,Z)\tau(Y), \qquad (1.3.21) \\
g(\widetilde{R}(X,Y)Z,N) &= g(R(X,Y)Z,N), \qquad (1.3.22) \\
g(\widetilde{R}(X,Y)\xi,N) &= g(R(X,Y)\xi,N) \\
&= C(Y,A^*_\xi X) - C(X,A^*_\xi Y) - 2d\tau(X,Y), \qquad (1.3.23)
\end{aligned}$$

şeklinde verilir.

Bir M lightlike hiperyüzeyinde Ricci tensörü

$$Ric(X,Y) = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i g(R(X,E_i)Y,E_i) + \widetilde{g}(R(X,\xi)Y,N) \qquad (1.3.24)$$

ile verilir, burada $\{E_i\}$, $s(TM)$ nin bir ortonormal bazıdır ve $\varepsilon_i = g(E_i,E_i) = \mp 1$ dir. Genelde bir lightlike hiperyüzeyin Ricci tensörü simetrik değildir. M hiperyüzeyinin Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şart τ 1- formunun kapalı olmasıdır [7].

1.3.2 Lightlike Altmanifoldlar

$(\widetilde{M},\widetilde{g})$ bir $(m+n)-$ boyutlu semi-Riemannian manifold $m>1$, $n>1$ ve $indeks\widetilde{g} = q$, $q \in \{1,...,m+n-1\}$ olsun. M, $\widetilde{M}$' nin m- boyutlu bir altmanifoldu olsun. Eğer M üzerine indirgenen g metriği dejenere ise bu durumda M ye *lightlike (null yada dejenere) altmanifold* denir. Böylece her $x \in M$ için $T_x\widetilde{M}$ nin

$$T_xM^{\perp} = \{U_x \in T_x\widetilde{M} : g(U_x,V_x) = 0, \ \forall V_x \in T_xM, \}$$

alt uzayını gözönüne alalım. g, M üzerinde bir dejenere metrik olduğundan $x \in M$ için T_xM ve $T_xM^{\perp}$ her ikiside dejenere alt uzaylardır. Böylece bir $x \in M$ noktasında Radikal alt uzay $RadT_xM$

$$Rad(T_xM) = T_xM \cap T_xM^{\perp}$$

olarak belirlenir ve

$$RadTM : x \in M \longrightarrow Rad(T_xM),$$

M üzerinde bir smooth distribüsyondur ve $rank(RadTM) = r > 0$ dır. Bu durumda M ye $\widetilde{M}$ nin *r- lightlike altmanifoldu* denir ve $RadTM$ ye M nin *Radikal distribüsyonu* denir. M nin boyutu, ekboyutu ve $RadTM$ nin rankına göre dört farklı durum ortaya çıkar ve bu özelliklerine göre lightlike altmanifoldlar aşağıdaki şekilde de isimlendirilir;.

(1) $r-$ lightlike altmanifold, $0 < r < min\{m,n\}$,

(2) Coisotropic altmanifold, $1 < r = n < m$,

(3) İsotropic altmanifold, $1 < r = m < n$,

(4) Totally lightlike altmanifold $1 < r = m = n$.

Birinci durum olan $r-$ lightlike altmanifoldların geometrik yapısını incelemek yeterli olacaktır. Çünkü diğer durumlar $r-$ lightlike altmanifoldların özel durumlarıdır.

M, $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike altmanifoldu olsun. $s(TM)$ ile TM de $RadTM$ distribüsyonunun ortogonal tümleyenini gösterelim. Bu durumda $s(TM)$ distribüsyonuna M nin ekran (screen) distribüsyonu denir. Screen distribüsyon M üzerinde bir non-dejenere distribüsyondur. Buna göre aşağıdaki ayrışıma sahip oluruz;

$$TM = RadTM \perp s(TM). \tag{1.3.25}$$

Not edelim ki ekran (screen) distribüsyonu tek değildir, fakat $TM^* = TM/RadTM$ ye doğal olarak izomorfiktir. $s(TM)$, $T\widetilde{M}/M$ de bir non-dejenere vektör alt demeti olduğundan

$$T\widetilde{M}/M = s(TM) \perp s(TM^{\perp}), \tag{1.3.26}$$

olarak yazılabilir, burada $s(TM^{\perp})$, $T\widetilde{M}/M$ de $s(TM)$ nin ortagonal tümleyenidir. $s(TM^{\perp})$ ile $TM^{\perp}$ de $RadTM$ nin tümleyen vektör alt demetini gösterelim. Bu durumda

$$s(TM)^{\perp} = s(TM^{\perp}) \perp s(TM^{\perp})^{\perp} \tag{1.3.27}$$

olarak yazılabilir. Bir $r-$ lightlike altmanifoldu $(M, g, s(TM), s(TM^{\perp}))$ ile göstereceğiz.

Teorem 1.3.4. *[13] $(M, g, s(TM), s(TM^{\perp}))$ bir $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun $r-$ lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda lightlike transversal demeti denilen ve $s(TM^{\perp})^{\perp}$ de $RadTM$ nin tümleyeni olan (fakat ortagonal değil) bir $ltrTM$ vektör demeti vardır ve $\Gamma(ltrTM)$, $s(TM^{\perp})^{\perp}$ deki $\{N_1, ..., N_r\}$ vektör alanları tarafından gerilir öyle ki*

$$\widetilde{g}(N_i, \xi_j) = \delta_{ij},\ \widetilde{g}(N_i, N_j) = 0,\ i, j = 1, ..., r,$$

dır, burada $\{\xi_1, ..., \xi_r\}$, $RadTM$ nin bir bazıdır.

$$trTM = ltrTM \perp s(TM^{\perp}), \tag{1.3.28}$$

vektör demetini gözönüne alalım. $tr(TM)$ ye M nin transversal demeti denir. Buna göre

$$\begin{aligned} T\widetilde{M} &= TM \oplus trTM && (1.3.29)\\ &= (RadTM \oplus ltrTM) \perp s(TM) \perp s(TM^{\perp}), && (1.3.30) \end{aligned}$$

olarak yazılabilir.

$\widetilde{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonu $\widetilde{\nabla}$ ve M üzerine indirgenen konneksiyon ∇ olmak üzere

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y),\ \forall X, Y \in \Gamma(TM), \tag{1.3.31}$$

$$\widetilde{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^{\perp}_X V,\ \forall V \in \Gamma(trTM), \tag{1.3.32}$$

olarak yazılabilir, bu denklemlere, sırasıyla, Gauss ve Weingarten formülleri denir. $L : trTM \to ltrTM$ ve $S : trTM \to s(TM^{\perp})$ projeksiyonları kullanılırsa (1.3.31) ve (1.3.32) formüllerinden

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h^l(X,Y) + h^s(X,Y),\ \forall X,Y \in \Gamma(TM), \tag{1.3.33}$$

$$\widetilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^l_X N + D^s(X,N),\ \forall N \in \Gamma(ltr(TM)), \tag{1.3.34}$$

$$\widetilde{\nabla}_X W = -A_W X + \nabla^s_X W + D^l(X,W)\ \forall W \in \Gamma(s(TM^{\perp})), \tag{1.3.35}$$

ifadelerini elde ederiz, burada $h^l(X,Y) = Lh(X,Y)$, $h^s(X,Y) = Sh(X,Y)$, $\{\nabla^l_X N,\ D^l(X,W)\} \in \Gamma(ltrTM)$, $\{\nabla^s_X W,\ D^s(X,N)\} \in \Gamma(s(TM^{\perp})$ ve $\{\nabla_X Y,\ A_N X,\ A_W X\} \in \Gamma(TM)$ dir [13].

Şimdi kabul edelim ki M coisotropic yada totaly lightlike altmanifold olsun. Bu durumda Gauss ve Weingarten formülleri

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h^l(X,Y),\ \forall X,Y \in \Gamma(TM), \tag{1.3.36}$$

$$\widetilde{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^l_X N,\ \forall N \in \Gamma(ltrTM), \tag{1.3.37}$$

şeklinde ifade edilir.

TM nin $s(TM)$ üzerine olan projeksiyonunu P ile gösterelim. Bu durumda $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = PX + \eta(X)\xi,$$

olarak yazılabilir, burada η, $1-$ formu

$$\eta(X) = \widetilde{g}(X,N), \tag{1.3.38}$$

olarak tanımlanır. Ayrıca (1.3.25) ayrışımına göre

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + h^*(X,PY)\ X,Y \in \Gamma(TM), \tag{1.3.39}$$

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X + \nabla^{*t}_X \xi\ \xi \in \Gamma(RadTM), \tag{1.3.40}$$

olarak yazabiliriz, burada $\nabla^*_X PY$ ve $A^*_\xi X$ $s(TM)$ ye $h^*(X,PY)$ ve $\nabla^{*t}_X \xi\}$ de $RadTM$ ye aittir. ∇^*_X ve ∇^{*t}_X, sırasıyla, $s(TM)$ ve $RadTM$ üzerinde lineer konneksiyonlardır. h^* ise $RadTM$ distribüsyonunun ikinci temel formudur. $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için

$$A^*_\xi : \Gamma(TM) \rightarrow \Gamma(s(TM)),\ \forall X \in \Gamma(TM),$$

ve A_ξ^* ya $s(TM)$ nin ξ ye göre şekil operatörü denir ve $A_\xi^*\xi = 0$ dır. Aynı zamanda ∇_X^* ve ∇_X^{*t} sırasıyla $s(TM)$ ve $RadTM$ üzerinde indirgenmiş ve metrik lineer konneksiyonlardır.

$\widetilde{\nabla}$ bir metrik konneksiyon olduğundan $\forall X,Y \in \Gamma(TM), \in \Gamma(RadTM)$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için (1.3.33), (1.3.34), (1.3.35), (1.3.39) ve (1.3.40) dan

$$g(h^s(X,Y),W) + g(Y,D^l(X,W)) = g(A_W X,Y), \tag{1.3.41}$$

$$g(h^l(X,Y),\xi) + g(Y,h^l(X,\xi)) + g(Y,\nabla_X\xi) = 0, \tag{1.3.42}$$

$$g(h^*(X,PY),N) = g(A_N X,PY), \tag{1.3.43}$$

$$g(h^l(X,PY),\xi) = g(A_\xi^* X,PY), \tag{1.3.44}$$

$$g(A_N X,PY) = g(N,\widetilde{\nabla}_X PY), \tag{1.3.45}$$

$$g(h^l(X,\xi),\xi) = 0,\ A_\xi^*\xi = 0, \tag{1.3.46}$$

elde edilir .

Önerme 1.3.1. *[13] M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda RadTM üzerinde $h^l = 0$ dır.*

Lightlike altmanifoldlarda indirgenmiş ∇ konneksiyonu Levi-Civita konneksiyonu değildir. $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ ve $V,V' \in \Gamma(tr(TM))$ için (1.3.32), (1.3.33) ve (1.3.36) dan

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = \widetilde{g}(h^l(X,Y),Z) + \widetilde{g}(h^l(X,Z),Y), \tag{1.3.47}$$

$$(\nabla_X^t \widetilde{g})(V,V') = -\widetilde{g}(A_V X,V') + \widetilde{g}(A_{V'} X,V), \tag{1.3.48}$$

elde edilir. Bu yüzden indirgenmiş konneksiyon bir metrik konneksiyon değildir. (1.3.47) dan $r-$ lightlike veya coisotropic altmanifoldlarda indirgenmiş konneksiyonun Levi-Civita olması için gerek ve yeter şart M üzerinde $h^l = 0$ olmasıdır. Buna karşın bir isotropic veya totally ligtlike altmanifoldda ∇ indirgenmiş konneksiyonu Levi-Civita konneksiyonudur.

Teorem 1.3.5. *[13] M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun bir $r-$ lightlike veya coisotropic altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:*

(i) *M üzerindeki ∇ indirgenmiş konneksiyonu Levi-Civita konneksiyonudur.*

(ii) *Her $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için A^*_ξ, M üzerinde sıfırdır.*

(iii) *$RadTM$ Killing distribüsyonudur.*

(iv) *$RadTM$, ∇ ya göre paralel distribüsyondur.*

Teorem 1.3.6. *[13] M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun bir $r-$ lightlike veya coisotropic altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:*

(i) *$s(TM)$ integrallenebilirdir.*

(ii) *h^*. $\Gamma(s(TM))$ üzerinde simetriktir.*

(iii) *A_N, g ye göre $\Gamma(s(TM))$ üzerinde self-adjointtir.*

Teorem 1.3.7. *[13] M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun bir $r-$ lightlike veya coisotropic altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:*

(i) *$s(TM)$, ∇ ya göre paralel distribüsyondur.*

(ii) *h^*. M üzerinde sıfırdır.*

(iii) *A_N, $\Gamma(RadTM)$ değerli operatördür.*

Teorem 1.3.8. *[13] M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun bir $r-$ lightlike veya coisotropic altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:*

(i) *$RadTM$ integrallenebilirdir.*

(ii) *$h^l(PX,\xi) = 0$, $\forall \xi \in \Gamma(RadTM)$, $X \in \Gamma(TM)$.*

(iii) *$\xi \in \Gamma(RadTM)$ için $s(TM)$ nin şekil operatörü A^*_ξ, $\Gamma(RadTM)$ üzerinde sıfırdır.*

Tanım 1.3.2. $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ bir $(m+2)$ boyutlu semi-Riemannian manifold ve (M,g), $\widetilde{M}$ nin ekboyutu 2 olan bir lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $rank(RadTM) = 1$ ise M ye Half-lightlike altmanifold denir.

M half-lightlike altmanifoldunun ek boyutu 2 ve $rankRadTM = 1$ olduğundan lightlike transversal demet $ltrTM$ ve ekran (screen) transversal demet de $1-$ er boyutlu distribüsyonlardır. Buna göre bir lightlike N ve bir non-null vektör alanı u vardır öyle ki

$$ltrTM = Sp\{N\},$$

$$s(TM^\perp) = Sp\{u\},$$

dur. Aynı zamanda

$$RadTM = Sp\{\xi\},$$

olacak şekilde bir ξ null vektör alanı vardır ve

$$\widetilde{g}(N,\xi) = 1,\ \widetilde{g}(N,N) = 0,\ \widetilde{g}(\xi,\xi) = 0,$$

$$\widetilde{g}(N,u) = \widetilde{g}(\xi,u) = 0,\ \widetilde{g}(u,u) = \varepsilon,\ \varepsilon = \mp 1\ \widetilde{g}(u,\xi) = \widetilde{g}(\xi,X) = 0,\ \ \forall X \in TM,$$

dir.

$\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}$ üzerinde metrik konneksiyon olsun. $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X,Y), \\ \widetilde{\nabla}_X N &= -A_N X + \nabla_X N, \\ \widetilde{\nabla}_X u &= -A_u X + \nabla_X u \end{aligned} \tag{1.3.49}$$

dir. $\nabla_X Y$, $A_N X$ ve $A_u X$ burada $\Gamma(TM)$ ye aitken $h(X,Y)$, $\nabla_X N$ ve $\nabla_X u$ de $trTM$ ye aittir. Şimdi biz D_1, D_2 simetrik $F(M)-$ bilineer formlarını ve $p_1,\ p_2,\ \varepsilon_1$ ve ε_2 $1-$ formlarını $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$D_1(X,Y) = \widetilde{g}(h(X,Y),\xi)$$

$$D_2(X,Y) = \varepsilon\widetilde{g}(h(X,Y),u)$$

$$p_1(X) = \widetilde{g}(\nabla_X N,\xi),\ \ p_2 = \varepsilon\widetilde{g}(\nabla_X N,u)$$

$$\varepsilon_1(X) = \widetilde{g}(\nabla_X u,\xi),\ \ \varepsilon_2(X) = \varepsilon\widetilde{g}(\nabla_X u,u)$$

şeklinde tanımlarsak, (1.3.49) den

$$\begin{aligned} h(X,Y) &= D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u, \\ \nabla_X N &= p_1(X)N + p_2(X), \\ \nabla_X u &= \varepsilon_1(X)N + \varepsilon_2(X)u, \end{aligned} \tag{1.3.50}$$

elde edilir. Böylece Gauss ve Weingarten formülleri;

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u,\ \forall X,Y \in \Gamma(TM), \tag{1.3.51}$$

$$\widetilde{\nabla}_X N = -A_N X + p_1(X)N + p_2(X)u, \tag{1.3.52}$$

$$\widetilde{\nabla}_X u = -A_u X + \varepsilon_1(X)N + \varepsilon_2(X)u, \tag{1.3.53}$$

şeklinde ifade edilebilir, burada D_1 ve D_2 ye, sırasıyla, $ltrTM$ de $s(TM^{\perp})$ e göre *lightlike ikinci temel form* ve *screen ikinci temel form* denir [13]. A_N ve A_u lineer operatörlerdir. A_N ye $\Gamma(s(TM))$ değerli M nin şekil operatörü denir. u birim vektör alanı olduğundan (1.3.52) den $\varepsilon_2(X) = 0$ dir. Benzer şekilde N ve ξ lightlike vektör alanları olduğundan (1.3.50)-(1.3.52) den

$$\begin{aligned} D_1(X,\xi) &= 0, && (1.3.54)\\ \widetilde{g}(A_N X,N) &= 0, && (1.3.55)\\ \widetilde{g}(A_u X,Y) &= \varepsilon D_2(X,Y)+\varepsilon_1(X)\eta(Y), && (1.3.56) \end{aligned}$$

elde edilir. (1.3.38), (1.3.51), (1.3.52) ve (1.3.56) den $\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} p_1(X) &= -\eta(\nabla_X \xi), && (1.3.57)\\ p_2(X) &= \varepsilon\eta(A_u X), && (1.3.58)\\ \varepsilon_1(X) &= -\varepsilon D_2(X,\xi), && (1.3.59) \end{aligned}$$

olduğu sonucuna varılır. $\widetilde{\nabla}$ metrik konneksiyon olduğundan (1.3.51) den $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = D_1(X,Y)\eta(Z) + D_1(X,Z)\eta(Y) \qquad (1.3.60)$$

elde edilir ki bu yüzden indirgenmiş konneksiyon ∇ metrik konneksiyon değildir. (1.3.51) den D_1 ve D_2 simetrik bilineer formları ekran distribüsyonun seçiminden bağımsızdır [13].

Şimdi $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$E_1(X,PY) = \widetilde{g}(h^*(X,PY),N),$$

ve

$$u_1(X) = \widetilde{g}(\nabla^{\perp}_X \xi,N),$$

denilirse

$$h^*(X,PY) = E_1(X,PY)\xi,$$

ve

$$\nabla^{\perp}_X \xi = u_1(X)\xi,$$

olarak elde edilir. Böylece (1.3.39) ve (1.3.40) denklemleri

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + E_1(X, PY)\xi, \tag{1.3.61}$$

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X + u_1(X)\xi, \tag{1.3.62}$$

şeklinde ifade edilebilir, burada h^* ve E_1'e sırasıyla $s(TM)$ ye göre *ikinci temel form*, *lokal ikinci temel form* ve A^*_ξ ya ekran distribüsyonuna göre *şekil operatörü* denir. (1.3.51)-(1.3.53) deki Gauss-Weingarten formülleri ile (1.3.62) ve (1.3.61) kullanılırsa $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$E_1(X, PY) = g(A_N X, PY), \tag{1.3.63}$$

$$D_1(X, PY) = g(A^*_\xi X, PY), \tag{1.3.64}$$

$$u_1(X) = -p_1(X), \tag{1.3.65}$$

elde edilir. Bu durumda (1.3.62) den

$$\nabla_X \xi = -A^*_\xi X - p_1(X)\xi,$$

olduğu sonucuna varılır.

∇ nın torsiyonsuz olduğundan ve (1.3.61) den

$$\begin{aligned} [X, Y] \quad = \quad & \{\nabla^*_X PY - \nabla^*_Y PX + \eta(X)A^*_\xi Y - \eta(Y)A^*_\xi X\} \\ & + \{E_1(X, PY) - E_1(Y, PX) + X(\eta(Y)) \\ & - Y(\eta(X)) + \eta(X)p_1(Y) - \eta(Y)p_1(X)\}\xi, \end{aligned}$$

olarak elde edilir. (1.3.64) ve son eşitlikten

$$\begin{aligned} g(\nabla^*_X PY, PZ) - g(\nabla^*_X PZ, PY) - g([X, Y], PZ) \\ = \eta(Y)D_1(X, PZ) - \eta(X)D_1(Y, PZ) \\ 2d\eta(X, Y) = E_1(Y, PX) - E_1(X, PY) \\ + p_1(X)\eta(Y) - p_1(Y)\eta(X) \end{aligned} \tag{1.3.66}$$

eşitliği bulunur. (1.3.38) ve (1.3.66) nun ikinci eşitliğinden

$$\eta([PX,PY]) = E_1(PX,PY) - E_1(PY,PX), \tag{1.3.67}$$

ifadesine sahip oluruz. Bu durumda (1.3.63) ve son eşitlikten aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 1.3.9. *[13] M, $\widetilde{M}$ nin half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:*

(1) *Ekran distrübüsyonu $s(TM)$ integrallenebilirdir.*

(2) *$\Gamma(s(TM)$ üzerinde ekran distribüsyonunun ikinci temel formu simetriktir.*

(3) *A_N şekil operatörü $\Gamma(s(TM)$ üzerinde g metriğine göre simetriktir.*

(1.3.54), (1.3.60), (1.3.62) ve (1.3.64) kullanılarak aşağıdaki teorem verildi.

Teorem 1.3.10. *[28] M, $\widetilde{M}$ semi-Riemanian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:*

(1) *İndirgenmiş ∇ konneksiyonu metrik konneksiyondur.*

(2) *D_1, M üzerinde sıfırdır.*

(3) *A^*_ξ, M üzerinde sıfırdır.*

(4) *ξ Killing vektör alanıdır.*

(5) *$TM^\perp$, ∇ ya göre paralel distribüsyondur.*

Şimdi sırasıyla ∇ ve $\widetilde{\nabla}$ yee göre R ve $\widetilde{R}$ eğrilik tensörleri (1.3.51)-(1.3.59) den $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)Z \;=\;& R(X,Y)Z + D_1(X,Z)A_NY - D_1(Y,Z)A_NX \\
& + D_2(X,Z)A_uY - D_2(Y,Z)A_uX + \{(\nabla_X D_1)(Y,Z) - (\nabla_Y D_1)(X,Z) \\
& + p_1(X)D_1(Y,Z) - p_1(Y)D_1(X,Z) + \varepsilon_1(X)D_2(Y,Z) - \varepsilon_1(Y)D_2(X,Z)\}N \\
& + \{(\nabla_X D_2)(Y,Z) - (\nabla_Y D_2)(X,Z) + p_2(X)D_1(Y,Z) \\
& - p_2(Y)D_1(X,Z)\}u,
\end{aligned} \tag{1.3.68}$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)N &= -\nabla_X(A_NY)+-\nabla_Y(A_NX)+A_N[X,Y]\\
&\quad +p_1(X)A_NY-p_1(Y)A_NX\\
&\quad +p_2(X)A_uY-p_2(Y)A_uX\\
&\quad +\{D_1(Y,A_NX)-D_1(X,A_NY)\\
&\quad +2dp_1(X,Y)+\varepsilon_1(X)p_2(Y)-\varepsilon_1(Y)p_2(X)\}N\\
&\quad +\{D_2(Y,A_NX)-D_2(X,A_NY)\\
&\quad +2dp_2(X,Y)+p_1(Y)p_2(X)-p_1(X)p_2(Y)\}\}u, \qquad (1.3.69)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)u &= -\nabla_X(A_uY)+-\nabla_Y(A_uX)+A_u[X,Y]\\
&\quad +\varepsilon_1(X)A_NY-\varepsilon_1(Y)A_NX\\
&\quad +\{D_1(Y,A_uX)-D_1(X,A_uY)\\
&\quad +2d\varepsilon_1(X,Y)+p_1(X)\varepsilon_1(Y)-p_1(Y)\varepsilon_1(X)\}\}N\\
&\quad +\{D_2(Y,A_uX)-D_2(X,A_uY)\\
&\quad +\varepsilon_1(Y)p_2(X)-\varepsilon_1(X)p_2(Y)\}u, \qquad (1.3.70)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. (1.3.68)-(1.3.70) den aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz;

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)PZ,PW) &= \widetilde{g}(R(X,Y)PZ,PW)\\
&\quad +D_1(X,PZ)E_1(Y,PW)\\
&\quad -D_1(Y,PZ)E_1(X,PW)\\
&\quad +\varepsilon\{D_2(X,PZ)D_2(Y,PW)\\
&\quad -D_2(Y,PZ)D_2(X,PW), \qquad (1.3.71)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)PZ,\xi) &= \widetilde{g}(R(X,Y)PZ,\xi)\\
&\quad +\varepsilon_1(X)D_2(Y,PZ)-\varepsilon_1(Y)D_2(X,PZ)\\
&= (\nabla_XD_1)(Y,PZ)-(\nabla_YD_1)(X,PZ)\\
&\quad +p_1(X)D_1(Y,PZ)-p_1(Y)D_1(X,PZ)\\
&\quad +\varepsilon_1(X)D_2(Y,PZ)-\varepsilon_1(Y)D_2(X,PZ), \qquad (1.3.72)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)PZ,u) &= g(\nabla_X(A_uY)-\nabla_Y(A_uX)-A_u[X,Y],PZ)\\
&\quad -\varepsilon_1(X)E_1(Y,PZ)+\varepsilon_1(Y)E_1(X,PZ)\\
&= \varepsilon\{(\nabla_X D_2)(Y,PZ)-(\nabla_Y D_2)(X,PZ)\\
&\quad +p_2(X)D_1(Y,PZ)-p_2(Y)D_1(X,PZ)\}, \qquad (1.3.73)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)PZ,N) &= \widetilde{g}(R(X,Y)PZ,N)\\
&\quad +\varepsilon\{p_2(Y)D_2(X,PZ)-p_2(X)D_2(Y,PZ)\}\\
&= g(\nabla_X(A_NY)-\nabla_Y(A_NX)-A_N[X,Y],PZ)\\
&\quad +p_1(Y)E_1(X,PZ)-p_1(X)E_1(Y,PZ)\\
&\quad +\varepsilon\{p_2(Y)D_2(X,PZ)-p_2(X)D_2(Y,PZ)\}, \qquad (1.3.74)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)\xi,u) &= \varepsilon\{(\nabla_X D_2)(Y,\xi)-(\nabla_Y D_2)(X,\xi)\\
&= D_1(X,A_uY)-D_1(Y,A_uX)\\
&\quad -2d\varepsilon_1(X,Y)+p_1(Y)\varepsilon_1X-p_1(X)\varepsilon_1Y, \qquad (1.3.75)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)N,u) &= \varepsilon\{D_2(Y,A_NX)-D_2(X,A_NY)\\
&\quad +2dp_2(X,Y)+p_1(Y)p_2(X)-p_1(X)p_2(Y)\}\\
&= \widetilde{g}(\nabla_X(A_uY),N)-\widetilde{g}(\nabla_Y(A_uX),N)\\
&\quad -\varepsilon p_2([X,Y]). \qquad (1.3.76)
\end{aligned}$$

∇^* konneksiyonuna göre eğrilik tensörü R^* ile gösterilirse (1.3.68)-(1.3.76) ve (1.3.61) ve (1.3.62) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
R(X,Y)PZ &= R^*(X,Y)PZ+E_1(X,PZ)A_\xi Y \qquad (1.3.77)\\
&\quad -E_1(Y,PZ)A_\xi X+\{X(E_1(Y,PZ))\\
&\quad -Y(E_1(X,PZ))-E_1([X,Y],PZ)\\
&\quad +E_1(X,\nabla^*_Y PZ)-E_1(Y,\nabla^*_X PZ)\\
&\quad -p_1(X)E_1(Y,PZ)+p_1(Y)E_1(X,PZ)\}\xi,
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)\xi &= -\nabla^*_X(A_\xi Y)+\nabla^*_Y(A_\xi X)+A_\xi[X,Y] \\
&\quad -p_1(X)A_\xi Y+p_1(y)A_\xi X \\
&\quad +\{E_1(Y,A_\xi X)-E_1(X,A_\xi Y)-2dp_1(X,Y)\}\xi,
\end{aligned} \tag{1.3.78}
$$

$$
\begin{aligned}
g(R(X,Y)PZ,PW) &= g(R^*(X,Y)PZ,PW) \\
&\quad +E_1(X,PZ)D_1(Y,PW) \\
&\quad -E_1(Y,PZ)D_1(X,PW),
\end{aligned} \tag{1.3.79}
$$

$$
\begin{aligned}
g(R(X,Y)PZ,N) &= X(E_1(Y,PZ))-Y(E_1(X,PZ)) \\
&\quad +E_1([X,Y],PZ)+E_1(X,\nabla^*_Y PZ) \\
&\quad -E_1(Y,\nabla^*_X PZ)-p_1(X)E_1(Y,PZ) \\
&\quad +p_1(Y)E_1(X,PZ) \\
&= g(\nabla_X(A_N Y)-\nabla_Y(A_N X) \\
&\quad -A_N[X,Y],PZ)-p_1(X)E_1(Y,PZ) \\
&\quad +p_1(Y)E_1(X,PZ),
\end{aligned} \tag{1.3.80}
$$

$$
\begin{aligned}
g(R(X,Y)PZ,\xi) &= g(\nabla^*_X(A_\xi Y),PZ)-g(\nabla^*_Y(A_\xi X),PZ) \\
&\quad -D_1([X,Y],PZ) \\
&\quad +p_1(X)D_1(Y,PZ)-p_1(Y)D_1(X,PZ) \\
&= (\nabla_X D_1)(Y,PZ)-(\nabla_Y D_1)(X,PZ) \\
&\quad +p_1(X)D_1(Y,PZ)-p_1(Y)D_1(X,PZ),
\end{aligned} \tag{1.3.81}
$$

$$
\begin{aligned}
g(R(X,Y)\xi,N) &= E_1(Y,A_\xi X)-E_1(X,A_\xi Y) \\
&\quad -2dp_1(X,Y) \\
&= D_1(X,A_N Y-D_1(Y,A_N X) \\
&\quad -2dp_1(X,Y),
\end{aligned} \tag{1.3.82}
$$

olarak bulunur.

(M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. M nin total geodezik olması içn gerek ve yeter şart

$$D_i(X,Y)=0.\ i=1,2\ \forall X,Y\in\Gamma(TM),$$

olmasıdır [13].

(M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun total geodezik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda (1.3.56), (1.3.59), (1.3.59) ve (1.3.64) den

$$A_u=A_\xi=\varepsilon_1=p_2=0$$

olarak bulunur.

Tanım 1.3.3. [13] (M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$D_1(X,Y)=H_1\widetilde{g}(X,Y),\qquad D_2(X,Y)=H_2\widetilde{g}(X,Y) \tag{1.3.83}$$

olacak şekilde sırasıyla $ltrTM$ ve $s(TM^\perp)$ de H_1 ve H_2 smooth fonksiyonları varsa M ye *total umbilik half-lightlike altmanifold* denir.

(1.3.56), (1.3.64) ve (1.3.54), (1.3.55) aşağıdaki teoreme sahip oluruz.

Teorem 1.3.11. *[13] (M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. $\forall X\in\Gamma(TM)$ için M nin total umbilik umbilik olması için gerek ve yeter şart*

$$\begin{aligned} A^*_\xi X &= H_1PX,\\ P(A_uX) &= \varepsilon H_2PX, \end{aligned} \tag{1.3.84}$$

olacak şekilde H_1 ve H_2 fonksiyonlarının bulunması ve $\Gamma(TM)$ üzerinde $\varepsilon_1=0$ olmasıdır.

Teorem 1.3.12. *[13] (M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun total umbilik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır;*

$$D_2(X,\xi)=0,\qquad p_2(\xi)=0,\qquad A_u\xi=0, \tag{1.3.85}$$

$$\varepsilon A_uX=H_2PX+p_2(X)\xi,\qquad \forall X\in\Gamma(TM). \tag{1.3.86}$$

M nin total umbilik olması durumunda eğrilik tensörleri arasındaki ilişkiler aşağıdaki gibidir:

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)PZ,\xi) &= \widetilde{g}(R(X,Y)PZ,\xi) \\ &= (\nabla_X D_1)(Y,PZ) - (\nabla_Y D_1)(X,PZ) \\ &\quad + p_1(X)D_1(Y,PZ) - p_1(Y)D_1(X,PZ), \end{aligned} \tag{1.3.87}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)PZ,u) &= g(\nabla_X(A_uY) - \nabla_Y(A_uX) - A_u[X,Y],PZ) \\ &= \varepsilon\{(\nabla_X D_2)(Y,PZ) - (\nabla_Y D_2)(X,PZ) \\ &\quad + p_2(X)D_1(Y,PZ) - p_2(Y)D_1(X,PZ)\}, \end{aligned} \tag{1.3.88}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)\xi,N) &= g(R(X,Y)\xi,N)) \\ &= D_1(X,A_NY) - D_1(Y,A_NX) \\ &\quad -2dp_1(X,Y), \end{aligned} \tag{1.3.89}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)\xi,u) &= \varepsilon\{(\nabla_X D_2)(Y,\xi) - (\nabla_Y D_2)(X,\xi) \\ &= D_1(X,A_uY) - D_1(Y,A_uX). \end{aligned} \tag{1.3.90}$$

Eğer $\widetilde{M}$ sabit eğrilikli ise (1.3.83) ve (1.3.89) den

$$2dp_1(X,Y) = H_1\{g(X,A_NY) - g(Y,A_NX)\}, \tag{1.3.91}$$

ifadesi elde edilir.

Teorem 1.3.13. *[13] (M,g), sabit kesit eğrilikli $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun total umbilik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir;*

***(1)** $s(TM)$ ekran distribüsyonu integrallenebilirdir.*

***(2)** $s(TM)$ ye indirgenen her p_1, $1-$ formu kapalıdır.*

***(3)** $s(TM)$ ye indirgenen her p_2, $1-$ formu*

$$2dp_2(X,Y) = p_1(X)p_2(Y) - p_2(X)p_1(Y), \qquad \forall X,Y \in \Gamma(TM),$$

ifadesini sağlar.

Tanım 1.3.4. (M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. Eğer

$$E_1(X,PY) = Kg(X,PY), \qquad \forall X,Y \in \Gamma(TM), \tag{1.3.92}$$

olacak şekilde bir K fonksiyonu varsa $s(TM)$ ye total umbilik denir [13].

(1.3.55), (1.3.63) ve (1.3.92) denklemleri kullanılırsa $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$A_N X = KPX, \qquad E_1(\xi,PX) = 0, \tag{1.3.93}$$

elde edilir. $s(TM)$ nin total umbilikliği kullanılırsa (1.3.66) denklemi

$$2d\eta(X,Y) = p_1(X)\eta(Y) - p_1(Y)\eta(X),$$

olur.

Teorem 1.3.14. *[13] (M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu ve $s(TM)$ total umbilik olsun. Bu durumda*

$$d\eta = 0 \Leftrightarrow p_1 = 0.$$

Teorem 1.3.15. *[13] (M,g), sabit eğrilikli $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun total umbilik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:*

***(1)** M üzerinde ∇ konneksiyonuna göre Ricci tensörü simetriktir.*

***(2)** $s(TM)$ ekran distribüsyonu integrallenebilirdir.*

***(3)** $s(TM)$ ye indirgenen p_1 1-formu kapalıır.*

***(4)** $s(TM)$ ye indirgenen p_2 1-formu*

$$2d_2(X,Y) = p_1(X)p_2(Y) - p_2(X)p_1(Y), \qquad \forall X,Y \in \Gamma(TM)$$

denklemini sağlar.

Tanım 1.3.5. [13] (M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. Eğer

$$A_N X = \varphi A^*_\xi X, \qquad \forall X \in \Gamma(TM) \tag{1.3.94}$$

olacak şekilde sıfırdan farklı φ smooth fonksiyonu varsa M ye *ekran (screen) konformal half-lightlike altmanifold* denir.

Önerme 1.3.2. *[13] (M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. M nin ekran konformal olması için gerek ve yeter şart*

$$E_1(X,PY) = \varphi D_1(X,PY), \qquad \forall X \in \Gamma(TM), \tag{1.3.95}$$

olmasıdır.

Şimdi M ekran konformal olsun. (1.3.61) ve (1.3.95) den

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + \varphi D_1(X,PY)\xi, \qquad \forall X,Y \in \Gamma(TM), \tag{1.3.96}$$

elde edilir.

Teorem 1.3.16. *[13] (M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun ekran konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin her $s(TM)$ ekran distribüsyonu integrallenebilirdir.*

Tanım 1.3.6. [13] (M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. Eğer aşağıdakiler sağlanıyorsa M ye *minimal half-lightlike altmanifold* denir;

$$\sum_{i=1}^{n-1} D_1(E_i,E_i) = 0, \ \sum_{i=1}^{n-1} D_2(E_i,E_i) = 0 \quad ve \quad \varepsilon_1(\xi) = 0,$$

burada $\{E_i\}_{i=1}^{n-1}$, $s(TM)$ nin bir ortanormal bazıdır.

Teorem 1.3.17. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun ekran konformal half-lightlike altmanifoldu ve M', $s(TM)$ nin lifi olsun. Bu durumda*
***(1)** M total geodeziktir.*
***(2)** M total umbiliktir.*
***(3)** M minimaldir.*
olması için gerek ve yeter şart M', $\widetilde{M}$ ye immersed ve ε_1, M üzerinde sıfırdır.

Tanım 1.3.7. Eğer $\forall X \in \Gamma(TM)$ ve $\forall \xi \in \Gamma(RadTM)$ için $\widetilde{\nabla}_X \xi \in \Gamma(TM)$ ise M lightlike altmanifolda *irrasyonel* denir.

M nin half-lightlike olması durumunda $D_1(X,\xi) = 0$ olduğundan yukarıdaki tanıma göre $\forall X \in \Gamma(TM)$ için $D_2(X,\xi) = 0 = \varepsilon_1(X)$ dır.

Teorem 1.3.18. *[13] M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun ekran konformal half-lightlike altmanifoldu olsun. O zaman aşağıdakiler eşdeğerdir.*
(1) *$s(TM)$ nin her lifi M de total geodeziktir.*
(2) *D_1, M üzerinde sıfırdır.*
(3) *İndirgenmiş konneksiyon ∇, M üzerinde metrik konneksiyondur.*

1.4 Kompleks Manifoldlar

M bir reel $2n$-boyutlu diferansiyellenebilir manifold olsun. Eğer M nin her x elemanı için $J^2 = -I$ olacak şekilde $T_x(M)$ tanjant uzayında J endomorfizmi varsa J ye M üzerinde bir *hemen hemen kompleks yapı* denir. Bir hemen hemen kompleks J yapısına sahip M manifolduna *hemen hemen kompleks manifold* denir. M nin Nijenhius tensor alanı

$$N_J(X,Y) = [JX,JY] - J[X,JY] - J[JX,Y] - [X,Y], X,Y \in \Gamma(TM), \tag{1.4.1}$$

olarak tanımlıdır ve N_J bir $(1,2)$ tipinde tensör alanıdır. Eğer J hemen hemen kompleks yapısı için Nijenhius tensör alanı sıfır ise J ye *kompleks yapı* ve M ye de *kompleks manifold* denir.

Bir hemen hemen kompleks manifoldun kompleks manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla J = 0$ olmasıdır, burada ∇, M üzerinde torsiyonsuz bir lineer konneksiyondur [23].

J hemen hemen kompleks yapı ve M kompleks manifold olsun. Bu durumda

$$g(JX,JY) = g(X,Y), \forall X,Y \in \Gamma(TM), \tag{1.4.2}$$

olacak şekilde M üzerinde bir g metriğine Hermityen *metrik* denir.

Bir hemen hemen kompleks manifold hermityen metrikle verilirse manifolda hemen hemen hemityen manifold denir. $J^2 = -I$ olduğundan (1.4.2) eşitliğinden

$$g(X,JY) = -g(JX,Y), \tag{1.4.3}$$

elde edillr. Bir hemen hemen kompleks manifoldda M üzerinde temel $2-$ form ϕ

$$\phi(X,Y) = g(X,JY), \forall X,Y \in \Gamma(TM), \tag{1.4.4}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 1.4.1. *[23] M bir hemen hemen kompleks manifoldu için J hemen hemen kompleks yapı ve g hermityen metrik olsun. Bu durumda her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için aşağıdakiler eşdeğerdir;*
(i) $\nabla J = 0.$
(ii) $\nabla\phi = 0.$
(iii) $N = 0$ *ve* $d\phi = 0.$

Bir hemen hemen kompleks manifoldu bir hermityen g metrikle verilsin. Eğer temel $2-$ form ϕ kapalı $(d\phi = 0)$ ise g ye *Kaehler metrik* ve manifolda *hemen hemen Kaehler manifold* denir. Bir kompleks manifold Kaehler metrik ile verilirse manifolda *Kaehler manifold* denir [23].

Teorem(1.4.1)'e göre bir hermityen manifoldun Kaehler manifold olması için gerek ve yeter şart $\nabla J = 0$ olmasıdır.

2. QUARTER SİMETRİK NON-METRİK KONNEKSİYONLU LİGHTLİKE HİPERYÜZEYLER

Bu bölümde bir semi-Riemannian Çarpım manifoldunun lightlike hiperyüzeyleri incelendi. İlk önce F çarpım yapısından yararlanarak yeni lightlike hiperyüzey türleri tanımlandı ve bu hiperyüzeylerin geometrik özellikleri incelendi (screen semi-invaryant, radikal anti-invaryant, screen invaryant). Daha sonra yine aynı bölümde (0.0.4) deki konneksiyon alınarak, bu tip lightlike hiperyüzeyler quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre incelendi ve bazı sonuçlar verildi.

2.1 Semi-Riemannian Çarpım Manifoldunun Lightlike Hiperyüzeyleri

$(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$, $(m+2)-$ boyutlu bir semi-Riemann çarpım manifoldu ve M de $\widetilde{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$FX = fX + w(X)N, \tag{2.1.1}$$

olarak yazabiliriz, burada f, M üzerinde $(1,1)$ tipinde bir tensör alanı ve w

$$w(X) = \widetilde{g}(FX,\xi) = \widetilde{g}(X,F\xi),$$

şeklinde tanımlanan M üzerinde bir $1-$ formdur.

Tanım 2.1.1. (M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ semi-Riemann çarpım manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer;

(i) $FRadTM \subset s(TM)$ ve $FltrTM \subset s(TM)$ ise M ye screen semi-invaryant lightlike hiperyüzey

(ii) $Fs(TM) = s(TM)$ ise M ye screen invaryant lightlike hiperyüzey

(iii) $FRadTM = ltrTM$ ise M ye radikal anti-invaryant lightlike hiperyüzey denir.

Yukarıdaki tanıma göre bir radikal anti-invaryant lightlike hiperyüzey bir screen invaryant lightlike hiperyüzeydir.

Şimdi M bir semi-Riemannian manifoldun screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer

$$L_1 = FRadTM,\ L_2 = FltrTM,$$

olarak alınırsa aşağıdaki ayrışımlara sahip oluruz;

$$s(TM) = L \perp \{L_1 \oplus L_2\}, \tag{2.1.2}$$

$$TM = L \perp \{L_1 \oplus L_2\} \perp RadTM, \tag{2.1.3}$$

$$T\widetilde{M} = L \perp \{L_1 \oplus L_2\} \perp \{RadTM \oplus ltrTM\}, \tag{2.1.4}$$

burada L, $(m-2)$ boyutlu distribüsyondur.

Önerme 2.1.1. *L distribüsyonu F ye göre invaryant distribüsyondur.*

İspat. Her $X \in \Gamma(L)$ and $U \in \Gamma(L_1), V \in \Gamma(L_2)$ için

$$g(FX,U) = g(X,FU) = 0,$$

$$g(FX,V) = g(X,FV) = 0,$$

olduğu için FX in L_1 and L_2 de bileşeni yoktur. Üstelik

$$g(FX,\xi) = g(X,F\xi) = 0,$$

$$g(FX,N) = g(X,FN) = 0,$$

olduğundan ispat tamamlanır. □

Örnek 2.1.1. $\widetilde{M} = (R^5_2, \widetilde{g})$ bir $(-,+,-,+,+)$ işaretli semi-Öklityen uzay ve (x,y,z,s,t), R^5_2 in standart koordinat sistemi olsun. Eğer $F(x,y,z,s,t) = (x,y,-z,-s,-t)$ olarak tanımlanırsa $F^2 = I$ dır ve F, R^5_2 üzerinde bir çarpım yapıdır.

$$t = x+y+z,$$

ile verilen M hiperyüzeyini gözönüne alalım. Bu durumda

$$TM = Sp\{U_1,U_2,U_3,U_4\},$$

dır, burada

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial t},\ U_2 = \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial t},\ U_3 = \frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t},\ U_4 = \frac{\partial}{\partial s}.$$

dır ve M bir lightlike hiperyüzeydir ve

$$TM^{\perp} = Sp\{\xi = U_1 - U_2 + U_3\}.$$

dir. Bu durumda lightlike transversal vektör demetini

$$ltr(TM) = Span\{N = -\frac{1}{4}\{\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t}\},$$

şeklinde belirleyebiliriz. Buna göre ekran (screen) distribüsyonu

$$S(TM) = Sp\{W_1, W_2, W_3\},$$

olarak ifade edilebilir, burada

$$\{W_1 = U_4,\ W_2 = U_1 - U_2 - U_3, W_3 = U_1 + U_2 - U_3\},$$

dır.

Eğer $L = Sp\{W_1\}$, $L_1 = Sp\{W_2\}$ ve $L_2 = Sp\{W_3\}$ denilirse

$$FL = L,\ FL_1 \subset s(TM),\ FL_2 \subset s(TM),$$

elde edilir ve böylece M, $\overline{M}$ nin bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyidir.

Örnek 2.1.2. [7] (x, y, z, t), R^4 ün standart koordinat sistemi ve R^4 üzerindeki g metriği

$$ds^2 = -dx - dy + dz + dt$$

ile verilen $2-$ indeksli semi-Riemann metrik olur. R^4 üzerindeki F çarpım yapı

$$F(x, y, z, t) = (z, t, x, y)$$

olarak tanımlansın. R_2^4 de

$$t = x + \frac{1}{2}(y + z)^2$$

ile verilen hiperyüzeyi gözönüne alalım. Bu durumda M bir lightlike hiperyüzeydir ve

$$RadTM = Sp\{\xi = \frac{\partial}{\partial x} + (y+z)\frac{\partial}{\partial y} - (y+z)\frac{\partial}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial t}\},$$

$$ltrTM = Sp\{N = -\frac{1}{2(1+(y+z)^2)}(\frac{\partial}{\partial x} + (y+z)\frac{\partial}{\partial y} + (y+z)\frac{\partial}{\partial z} - \frac{\partial}{\partial t})\},$$

$$s(TM) = Sp\{W_1 = -(y+z)\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y},\ W_2 = \frac{\partial}{\partial z} + (y+z)\frac{\partial}{\partial t}\},$$

olarak bulunur. Üstelik

$$F\xi = W_1 + W_2,\ FN = \frac{1}{2(1+(y+z)^2)}(W_1 - W_2)$$

olduğu için

$$L = \{0\},\ L_1 = Sp\{F\xi\},\ L_2 = Sp\{FN\}$$

olarak yazılabilir. Bu durumda M screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeydir.

Örnek 2.1.3. [7] $(R_2^4, \widetilde{g})$, $(-,-,+,+)$ işaretli $4-$ boyutlu semi-Öklidyen uzay ve (x_1, x_2, x_3, x_4) standart koordinat sistemi olsun. R_2^4 de

$$x_4 = Ax_1 + Bx_2 + Cx_3,\ A^2 + B^2 - C^2 = 1,\ A, B, C \in R,$$

ile tanımlanan M, Monge hiperyüzeyini gözönüne alalım. Bu durumda M hiperyüzeyinin tanjant demeti

$$TM = Sp\{U_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + A\frac{\partial}{\partial x_4},\ U_2 = \frac{\partial}{\partial x_2} + B\frac{\partial}{\partial x_4},\ U_3 = \frac{\partial}{\partial x_3} + C\frac{\partial}{\partial x_4}\},$$

olarak bulunur. M nin lightlike hiperyüzeydir ve radikal distribüsyon $RadTM$

$$RadTM = Sp\{\xi = AU_1 + BU_2 - CU_3 = A\frac{\partial}{\partial x_1} + B\frac{\partial}{\partial x_2} - C\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4}\},$$

olarak ifade edilebilir. Lightlike transversal vektör demeti $ltrTM$ ise

$$ltrTM = Sp\{N = -\frac{1}{2(C^2+1)}A\frac{\partial}{\partial x_1} + B\frac{\partial}{\partial x_2} + C\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial x_4}\},$$

olarak bulunur. Ekran distribüsyonu $s(TM)$ ise

$$s(TM) = \{s(TM) = W_1 = \frac{1}{A^2+B^2}(B\frac{\partial}{\partial x_1} - A\frac{\partial}{\partial x_2}),\ W_2 = \frac{1}{A^2+B^2}(\frac{\partial}{\partial x_3} + C\frac{\partial}{\partial x_4})\},$$

şeklinde ifade edilebilir. Eğer F dönüşümünü $F(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1,x_2,-x_3,-x_4)$ şeklinde tanımlarsak $F^2 = I$ dır ve F, R^4 üzerinde çarpım yapıdır. Üstelik

$$FRadTM = ltrTM) \qquad ve \qquad Fs(TM) = s(TM),$$

olduğu için M, R^4_2 üzerinde radikal anti-invaryant lightlike hiperyüzeydir. Aynı zamanda bu lightlike hiperyüzey bir screen invaryant lightlike hiperyüzeydir.

Şimdi $\widetilde{L} = L \perp RadTM \perp FRadTM$ olarak tanımlanırsa

$$TM = \widetilde{L} \oplus L_2, \tag{2.1.5}$$

şeklinde bir ayrışıma sahip oluruz.

Sonuç 2.1.1. $\widetilde{L}$ distribüsyonu F ye göre invaryanttır.

Teorem 2.1.1. *$\widetilde{M}, \widetilde{g}$ bir semi-Riemannian çarpım manifoldu ve M, $\widetilde{M}$ nin screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir;*
(i) *M üzerindeki ∇ indirgenmiş konneksiyonuna göre $\widetilde{L}$ distribüsyonu integrallenebilirdir.*
(ii) $B(X, fY) = B(Y, fX), \qquad \forall X,Y \in \Gamma(\widetilde{L})$.
(iii) $g(A^*_\xi X, PfY) = g(A^*_\xi Y, PfX), \qquad \forall X,Y \in \Gamma(\widetilde{L})$.

İspat. Her $X,Y \in \Gamma(\widetilde{L})$ için (1.3.6) ve (2.1.1) den

$$f\nabla_X Y + \omega(\nabla_X Y)N + B(X,Y)FN = \nabla_X fY + B(X, fY)N, \tag{2.1.6}$$

elde edilir. (2.1.6) denkleminde X ile Y nin rollerini değiştirirsek

$$f\nabla_Y X + \omega(\nabla_Y X)N + B(X,Y)FN = \nabla_Y fX + B(Y, fX)N, \tag{2.1.7}$$

denklemine sahip oluruz. (2.1.6) ve (2.1.7) den

$$\omega([X,Y]) = B(X, fY) - B(Y, fX),$$

elde edilir. O halde $(i) \Leftrightarrow (ii)$ dir. (1.3.17) den $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ elde edilir ki buda ispatı tamamlar. □

Teorem 2.1.2. *$\widetilde{M},\widetilde{g}$ bir semi-Riemannian çarpım manifoldu ve M, $\widetilde{M}$ nin radikal anti-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $s(TM)$ distribüsyonunun M üzerinde integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart*

$$B(X,FY)=B(Y,FX),\ \forall X,Y\in\Gamma(TM),$$

olmasıdır.

İspat. M üzerindeki bir X vektör alanının $\Gamma(s(TM))$ ye ait olması için gerek ve yeter şart $\eta(X)=0$ olmasıdır. Radikal anti-invaryant lightlike hiperyüzeyde her $X,Y\in\Gamma(s(TM))$ için $FX\in\Gamma(s(TM))$ olduğunu biliyoruz. Buna göre $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$\widetilde{\nabla}_X FY=\nabla_X FY+B(X,FY)N,$$

olarak yazabiliriz. Bu son eşitlikte X ve Y nin rolleri değiştirilirse

$$\widetilde{\nabla}_Y FX=\nabla_Y FX+B(Y,FX)N,$$

elde edilir. Bu son iki eşitlikten

$$F[X,Y]=\nabla_X FY-\nabla_Y FX+(B(X,FY)-B(Y,FX))N,$$

bulunur. Buradan ise

$$\eta([X,Y])=\widetilde{g}([X,Y],N)=\widetilde{g}(F[X,Y],FN),$$

olduğu için

$$\eta([X,Y])=(B(X,FY)-B(Y,FX))\widetilde{g}(FN,N),$$

elde edilir. $\widetilde{g}(FN,N)\neq 0$ olduğu için $\eta([X,Y])=0$ olması için gerek ve yeter şart $B(X,FY)=B(Y,FX)$ olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır.. □

Tanım 2.1.2. $\widetilde{M},\widetilde{g}$ bir semi-Riemannian çarpım manifoldu ve M, $\widetilde{M}$ üzerinde lightlike hiperyüzey olsun. Eğer her $X\in\Gamma(\widetilde{L})$, $Y\in\Gamma(L_2)$ için $B(X,Y)=0$ ise M ye mixed geodezik lightlike hiperyüzey denir.

Teorem 2.1.3. *$\widetilde{M},\widetilde{g}$ bir semi-Riemannian çarpım manifoldu ve M, $\widetilde{M}$ üzerinde screen semi-invaryant lightlike hiperyüzey olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:*

***(i)** M mixed geodeziktir.*

***(ii)** A_N nin L_2 bileşeni yoktur.*

***(iii)** A^*_ξ nin L_1 bileşeni yoktur.*

İspat. M, $\widetilde{M}$ üzerindeki $\widetilde{\nabla}$ Levi-civita konneksiyonuna göre screen semi-invaryant lightlike hiperyüzey olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(\widetilde{L})$ için $B(X,FN) = 0$ dır. (2.1.1), (1.3.6) ve (1.3.7) den

$$\nabla_X FN + B(X,FN)N = -fA_N X - \omega(A_N X)N + \tau(X)FN,$$

elde edilir. Bu son eşitlik teğet ve transversal bileşenlerine ayrılırsa

$$\nabla_X FN = -fA_N X + \tau(X)FN,$$

ve

$$B(X,FN) = -\omega(A_N X),$$

bulunur. $\omega(A_N X) = g(A_N X, F\xi)$ olduğundan $(i) \Leftrightarrow (ii)$ elde edilmiş olur. $g(FN,\xi) = g(N,F\xi) = 0$ olduğundan

$$g(A_N X, F\xi) = -g(A^*_\xi X, FN),$$

bullunur ve $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ elde edilir. $\square$

(2.1.5) ayrışıma göre aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 2.1.4. *$\widetilde{M},\widetilde{g}$ bir semi-Riemannian çarpım manifoldu ve M, $\widetilde{M}$ üzerinde screen semi-invaryant lightlike hiperyüzey olsun. M nin lokal çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart f nin ∇ indirgenmiş konneksiyonuna göre paralel, yani $\nabla f = 0$ olmasıdır.*

İspat. M bir lokal çarpım yapısına sahip olsun. Bu durumda $\widetilde{L}$ ve L_2 distribüsyonları M de total geodeziktir. $\widetilde{L}$ distribüsyonu F ye göre invaryant olduğundan her $Y \in \widetilde{L}$ için $FY \in \widetilde{L}$ olduğundan her $X \in \Gamma(TM)$ için $\nabla_X Y$ *ve* $\nabla_X fY$, $\Gamma(\widetilde{L})$ ye aittir. Gauss formülünden

$$\nabla_X fY = f\nabla_X Y + \omega(\nabla_X Y)N + B(X,Y)FN, \tag{2.1.8}$$

elde edilir. (2.1.8), $\widetilde{L}$ ye göre teğet ve transversal bileşenlerine ayrılırsa

$$\nabla_X fY = f(\nabla_X Y),\ veya\ (\nabla_X f)Y = 0,$$

ve

$$B(X,Y) = 0, \tag{2.1.9}$$

elde edilir. Her $Z \in \Gamma(L_2)$ için $fZ = 0$ olduğundan $\nabla_X fZ = 0$ ve $f\nabla_X Z = 0$ bulunur ki buda $(\nabla_X f)Z = 0$ olması demektir. Böylece M üzerinde $\nabla f = 0$ olduğu sonucuna ulaşılır.

Tersine M üzerinde $\nabla f = 0$ olsun. Bu durumda her $X,Y \in \widetilde{L}$ için $\nabla_X fY = f\nabla_X Y$ ve $U,V \in \Gamma(L_2)$ için $\nabla_U fV = f\nabla_V U = 0$ dır. Bu yüzden $\nabla_X fY \in \Gamma(\widetilde{L})$ ve $\nabla_U V \in \Gamma(L_2)$ bulunur ki $\widetilde{L}$ ve L_2 distribüsyonları M de total geodeziktir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem2.1.4 ve (2.1.9) dan aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 2.1.2. $\widetilde{M},\widetilde{g}$ bir semi-Riemannian çarpım manifoldu ve M, $\widetilde{M}$ üzerinde screen semi-invaryant lightlike hiperyüzey olsun. M lokal çarpım yapısına sahip ise bu durumda M mixed geodezik lightlike hiperyüzeydir.

2.2 Quarter simetrik non-metrik konneksiyonlu Semi-Riemannian Çarpım Manifoldunun Lightlike Hiperyüzeyleri

(M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ semi-Riemann çarpım manifoldunun lightlike hiperyüzeyi ve $\widetilde{\nabla}$, $\widetilde{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. $\widetilde{M}$ üzerinde $\forall X \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$\widetilde{D}_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y + \pi(Y)FX, \tag{2.2.1}$$

konneksiyonunu tanımlayalım, burada π, $\widetilde{M}$ üzerinde tanımlı bir $1-$ formdur. Eğer π bir formuna karşılık gelen vektör alanı U ise

$$\pi(X) = \widetilde{g}(U,X),$$

olarak yazılır. Böylece $\widetilde{D}$, M üzerinde bir lineer konneksiyondur. $\widetilde{D}$ konneksiyonuna göre torsiyon tensörü $\widetilde{T}$ olmak üzere (2.2.1) den her $X,Y \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$\widetilde{T}(X,Y) = \pi(Y)FX - \pi(X)FY, \tag{2.2.2}$$

$$(\widetilde{D}_X\widetilde{g})(Y,Z) = -\pi(Y)\widetilde{g}(FX,Z) - \pi(Z)\widetilde{g}(FX,Y), \tag{2.2.3}$$

olarak elde edilir. Böylece $\widetilde{D}$, $\widetilde{M}$ üzerinde quarter simetrik non-metrik konneksiyondur. (2.2.1) den

$$(\widetilde{D}_X F)Y = \pi(FY)FX - \pi(Y)X, \tag{2.2.4}$$

elde edilir. (2.2.4) de X yerine FX ve Y yerine FY yazılırsa

$$(\widetilde{D}_{FX} F)FY = \pi(Y)X - \pi(FY)FX, \tag{2.2.5}$$

bulunur. (2.2.4) ve (2.2.5) den

$$(\widetilde{D}_{FX} F)FY + (\widetilde{D}_X F)Y = 0, \tag{2.2.6}$$

elde edilir. Şimdi

$$F'(X,Y) = \widetilde{g}(FX,Y) \tag{2.2.7}$$

olarak tanımlayalım. Her $X,Y \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için (2.2.1) den

$$(\widetilde{D}_X F')(Y,Z) = (\widetilde{\nabla}_X F')(Y,Z) - \pi(Y)\widetilde{g}(X,Z) - \pi(Z)\widetilde{g}(X,Y) \tag{2.2.8}$$

elde edilir.

Şimdi quarter simetrik non-metrik $\widetilde{D}$ konneksiyonuna göre $\widetilde{R}^{\widetilde{D}}$ eğrilik tensörünü hesaplayalım.

$$\widetilde{R}^{\widetilde{D}}(X,Y)Z = \widetilde{D}_X D_Y Z - \widetilde{D}_Y D_X Z - \widetilde{D}_{[X,Y]}Z$$

olduğu için (2.2.1) den her $X,Y \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$\widetilde{R}^{\widetilde{D}}(X,Y)Z = \widetilde{R}(X,Y)Z + \overline{\lambda}(X,Z)FY - \overline{\lambda}(Y,Z)FX, \tag{2.2.9}$$

olarak bulunur, burada $\overline{\lambda}$, $(0,2)$ tipinde tensör alanı olup

$$\overline{\lambda}(X,Z) = (\widetilde{\nabla}_X u)(Z) - \pi(Z)\pi(FX)$$

şeklinde tanımlanır. (2.2.9) dan $\widetilde{K}^{\widetilde{D}}(X,Y,Z,W) = \widetilde{g}(\widetilde{R}^{\widetilde{D}}(X,Y)Z,W)$ olduğu gözönüne alınırsa

$$\widetilde{K}^{\widetilde{D}}(X,Y,Z,W) = -\widetilde{K}^{\widetilde{D}}(Y,X,Z,W), \tag{2.2.10}$$

elde edilir. Ancak quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre $\widetilde{R}^{\widetilde{D}}$ eğrilik tensörü eğrilikle ilgili (2.2.10) den başka diğer özellikleri sağlamaz.

Önerme 2.2.1. *(M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ semi-Riemann çarpım manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda quarter simetrik non-metrik $\widetilde{D}$ konneksiyonuna göre birinci Bianchi özdeşliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart $\overline{\lambda}$ tensörünün simetrik olmasıdır.*

İspat. (2.2.9) den, $\forall X,Y,Z \in \Gamma(T\widetilde{M})$ için

$$\begin{aligned}\widetilde{R}^{\widetilde{D}}(X,Y)Z+\widetilde{R}^{\widetilde{D}}(Y,Z)X+\widetilde{R}^{\widetilde{D}}(Z,X)Y &= \{\overline{\lambda}(Y,Z)-\overline{\lambda}(Z,Y)\}FX \\ &\quad +\{\overline{\lambda}(Z,X)-\overline{\lambda}(X,Z)\}FY \\ &\quad +\{\overline{\lambda}(X,Y)-\overline{\lambda}(Y,X)\}FZ\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise önermedeki iddiaya ulaşılır. □

(M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ semi-Riemann çarpım manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $\widetilde{D}$ quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre Gauss ve Weingarten formülleri, sırasıyla, her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\widetilde{D}_X Y = D_X Y + \widetilde{B}(X,Y)N, \tag{2.2.11}$$

ve

$$\widetilde{D}_X N = -\widetilde{A}_N X + \widetilde{\tau}(X)N, \tag{2.2.12}$$

olarak yazılır, burada $D_X Y, \widetilde{A}_N X \in \Gamma(TM)$ dır. Ayrıca D, $\widetilde{B}$, $\widetilde{A}_N$, sırasıyla, M üzerinde, indirgenmiş konneksiyon, ikinci temel form ve Weingarten dönüşümüdür. Eğer

$$\widetilde{B}(X,Y) = \widetilde{g}(\widetilde{D}_X Y,\xi), \qquad \widetilde{\tau}(X) = \widetilde{g}(\widetilde{D}_X N,\xi),$$

denilirse (1.3.6),(1.3.7),(2.2.1), (2.2.11) ve (2.2.12) den her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için aşağıdaki ifadelere ulaşılır:

$$D_X Y = \nabla_X Y + \pi(Y) f X, \tag{2.2.13}$$

$$\widetilde{B}(X,Y) = B(X,Y) + \pi(Y)\omega(X), \tag{2.2.14}$$

$$\widetilde{A}_N X = A_N X - \pi(N) f X, \tag{2.2.15}$$

$$\widetilde{\tau}(X) = \tau(X) + \pi(N)\omega(X). \tag{2.2.16}$$

(2.2.1) ve (2.2.2) den

$$(D_X g)(Y,Z) = B(X,Y)\eta(Z) + B(X,Z)\eta(Y) \\ - \pi(Y)g(fX,Z) - \pi(Z)g(fX,Y),$$

olarak hesaplanır. Bunun yanısıra D indirgenmiş konneksiyona göre torsiyon tensörü

$$T^D(X,Y) = \pi(Y)fX - \pi(X)fY, \tag{2.2.17}$$

şeklinde bulunur. Bu son iki eşitlikten aşağıdaki önermeye sahip oluruz.

Önerme 2.2.2. *(M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ quarter simetrik non-metrik $\widetilde{D}$ konneksiyonlu semi-Riemannian çarpım manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M hiperyüzeyindeki D indirgenmiş konneksiyonu quarter simetrik non-metrik konneksiyondur.*

Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$D_X PY = D^*_X PY + \widetilde{C}(X,PY)\xi, \tag{2.2.18}$$

ve

$$D_X \xi = -\widetilde{A}^*_\xi X + \varepsilon(X)\xi, \tag{2.2.19}$$

yazılabilir. Burada $D^*_X PY$, $\widetilde{A}^*_\xi X \in \Gamma(s(TM))$ dir. (2.2.18) ve (2.2.19) e göre

$$\widetilde{C}(X,PY) = g(D_X PY, N) \text{ } ve \text{ } \varepsilon(X) = g(D_X \xi, N)$$

dır. (1.3.14), (1.3.13) ve (2.2.13) den

$$\widetilde{C}(X,PY) = C(X,PY) + \pi(PY)\eta(fX), \tag{2.2.20}$$

$$\widetilde{A}^*_\xi X = A^*_\xi X - \pi(\xi)PfX, \ \varepsilon(X) = -\tau(X) + \pi(\xi)\eta(fX), \tag{2.2.21}$$

ve (2.2.14), (2.2.21) ve (1.3.17) eşitliklerinden her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\widetilde{B}(X,PY) = g(\widetilde{A}^*_\xi X, PY) + \pi(PY)\omega(PX) + \pi(\xi)g(FX,PY), \tag{2.2.22}$$

elde edilir. (2.2.14) den ve B ikinci temel formu dejenere olduğundan aşağıdaki önerme verilir.

Önerme 2.2.3. *(M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ quarter simetrik non-metrik $\widetilde{D}$ konneksiyonlu semi-Riemannian çarpım manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. $\widetilde{D}$ quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre $\widetilde{B}$ ikinci temel formu dejeneredir.*

Önerme 2.2.4. *(M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ quarter simetrik non-metrik $\widetilde{D}$ konneksiyonlu semi-Riemannian çarpım manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. $\widetilde{D}$ quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre $\widetilde{B}$ ikinci temel formunun simetrik olması için gerek ve yeter şart $\widetilde{T}$ torsiyonunun TM değerli olmasıdır.*

İspat. (2.2.14) dan

$$\begin{aligned}\widetilde{B}(X,Y)-\widetilde{B}(Y,X) &= \pi(Y)\omega(X)-\pi(X)\omega(Y)\\ &= g(\pi(Y)FX-\pi(X)FY,\xi)\\ &= g(\widetilde{T}(X,Y),\xi),\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamdır. □

$\omega(X)=g(FX,\xi)$ olduğundan her $X\in\Gamma(L)$ için $\omega(X)=0$ dır. Buradan aşağıdaki önermeye sahip oluruz.

Önerme 2.2.5. *(M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ quarter simetrik non-metrik $\widetilde{D}$ konneksiyonlu semi-Riemannian çarpım manifoldunun screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M, $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonuna göre $L-$ total geodezik ise M quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre de $L-$ total geodeziktir.*

Teorem 2.2.1. *(M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ quarter simetrik non-metrik $\widetilde{D}$ konneksiyonlu semi-Riemannian çarpım manifoldunun screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir.*

(i) *Quarter simetrik non-metrik D konneksiyonuna göre $\widetilde{L}$ distribüsyonu integrallenebilirdir.*

(ii) $\widetilde{B}(X,fY)=\widetilde{B}(Y,fX)$, $\forall X,Y\in\Gamma(\widetilde{L})$.

(iii) $g(\widetilde{A}^*_\xi X,PfY)=g(\widetilde{A}^*_\xi Y,PfX)$, $\forall X,Y\in\Gamma(\widetilde{L})$.

İspat. (2.2.11), (2.2.1), (2.2.2), (2.2.4) eşitliklerinden

$$F\left(D_X Y + \overline{B}(X,Y)N\right) = D_X fY + \overline{B}(X, fY)N + u(Y)X - u(FY)fX,$$

yada

$$fD_X Y + w(D_X Y)N + \overline{B}(X,Y)FN = D_X fY + \overline{B}(X, fY)N + u(Y)X - u(FY)fX,$$

elde edilir. X ve Y nin rollerini değiştirirsek

$$fD_Y X + w(D_Y X)N + \overline{B}(Y,X)FN = D_Y fX + \overline{B}(Y, fX)N + u(X)Y - u(FX)fY,$$

bulunur. Her $X \in \Gamma(\widetilde{L})$ için ,$w(X) = 0$ olduğundan son iki eşitlikten

$$w([X,Y]) = \overline{B}(X, fY) - \overline{B}(Y, fX),$$

bulunur. Buradan $(i) \Rightarrow (ii)$ elde edildi. (2.2.22) ve son eşitlikten ispat tamamlanır. □

Her $X \in \Gamma(L)$ için (2.2.22) den $\widetilde{B}(X, fY) = g(\widetilde{A}^*_\xi X, PY)$ elde edilir. Eğer

$$L^{'} = L \perp L_2$$

alınırsa teorem(2.1.3) dan aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 2.2.1. (M,g), $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, F)$ quarter simetrik non-metrik $\widetilde{D}$ konneksiyonlu semi-Riemannian çarpım manifoldunun screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $L^{'}$ disribüsyonunun quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre mixed geodzik olması için gerek ve yeter şart $\widetilde{A}^*_\xi$ ın L_1- bileşeninin olmamasıdır.

(2.2.13) ten indirgenmiş quarter simetrik non-metrik D konneksyonuna göre eğrilik tensörü $\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} R^D(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + \pi(Z)\{(\nabla_X f)Y - (\nabla_Y f)X\} \\ &\quad + \lambda(X,Z)fY - \lambda(Y,Z)fX, \end{aligned} \tag{2.2.23}$$

olarak hesaplanır, burada λ

$$\lambda(X,Z) = (\nabla_X \pi)Z - \pi(Z)\pi(fX)$$

şeklinde tanımlı M üzerinde bir $(0,2)$ tipinde tensördür.

Önerme 2.2.6. *(M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ quarter simetrik non-metrik $\widetilde{D}$ konneksiyonlu semi-Riemannian çarpım manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Kabul edelim ki f, M üzerinde paralel olsun. Bu durumda M üzerindeki quarter simetrik non-metrik D konneksiyonuna göre birinci Bianchi özdeşliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart λ tensörünün simetrik olmasıdır.*

İspat. (2.2.23) ten f, M üzerinde paralel olduğundan

$$R^D(X,Y)Z = R(X,Y)Z + \lambda(X,Z)fY - \lambda(Y,Z)fX$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} R^D(X,Y)Z + R^D(Y,Z)X + R^D(Z,X)Y &= R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y \\ &+ \{\lambda(Y,X) - \lambda(X,Y)\}fZ \\ &+ \{\lambda(X,Z) - \lambda(Z,X)\}fY \\ &+ \{\lambda(Z,Y) - \lambda(Y,Z)\}fX \end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır. □

Şimdi lightlike hiperyüzeyde Gauss-Codazzi denklemlerini hesaplayalım. Her $X,Y,X,W \in \Gamma(TM)$ için (2.2.1), (2.2.11), (2.2.13) ve (2.2.14) den

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\widetilde{R}^D(X,Y)Z,PW) &= g(R(X,Y)Z,PW) \\ &+ B(X,Z)C(Y,PW) - B(Y,z)C(X,PW) \\ &+ \widetilde{\lambda}(X,Z)g(fY,PW) - \widetilde{\lambda}(Y,Z)g(fX,PW), \end{aligned} \tag{2.2.24}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\widetilde{R}^D(X,Y)Z,\xi) &= (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) \\ &+ \widetilde{\lambda}(X,Z)\omega(Y) - \widetilde{\lambda}(Y,Z)\omega(X), \end{aligned} \tag{2.2.25}$$

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\widetilde{R}^D(X,Y)Z,N) &= g(R(X,Y)Z,N) \\ &+ \widetilde{\lambda}(X,Z)\eta(fY) - -\widetilde{\lambda}(Y,Z)\eta(fX), \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

elde edilir.

(M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ quarter simetrik non-metrik $\widetilde{D}$ konneksiyonlu ve $(m+2)$ boyutlu semi-Riemannian çarpım manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Kabul edelim ki

f, M üzerinde paralel olsun. $\widetilde{M}$ de lokal quasi ortanormal bazı $\{E_i, F\xi, FN, \xi, N\}$, $i = 1, 2, ..., (m-1)$ alalım. Burada $E_1, ..., E_{m-2}$, $\Gamma(L)$ nin ortanormal bazıdır. Bu durumda D konneksiyonuna göre Ricci tensörü

$$\begin{aligned} R^{D(0,2)}(X,Y) &= \sum_{i=1}^{m-2} \varepsilon_i g(R^D(X,E_i)Y,E_i) + g(R^D(X,F\xi)Y,FN) \\ &+ g(R^D(X,FN)Y,F\xi) + +g(R^D(X,\xi)Y,N) \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

şeklinde ifade edilir.

Teorem 2.2.2. *(M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ quarter simetrik non-metrik $\widetilde{D}$ konneksiyonlu ve $(m+2)$ boyutlu semi-Riemannian çarpım manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Kabul edelim ki f, M üzerinde paralel olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} R^{D(0,2)}(X,Y) &= R^{(0,2)}(X,Y) + \sum_{i=1}^{m-2} \varepsilon_i \{\lambda(X,Y) g(fE_i,E_i) \\ &- \lambda(E_i,Y) g(fX,E_i)\} \\ &- \lambda(F\xi,Y)\eta(X) - \lambda(\xi,Y)\eta(fX), \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

dir, burada $R^{(0,2)}(X,Y)$, M nin Ricci tensörüdür.

İspat.

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{m-2} \varepsilon_i g(R^D(X,E_i)Y,E_i) &= \sum_{i=1}^{m-2} \varepsilon_i \{g(R(X,E_i)Y,E_i) + \lambda(X,Y)g(fE_i,E_i) - \lambda(E_i,Y)g(fX,E_i)\}, \\ g(R^D(X,F\xi)Y,FN) &= g(R(X,F\xi)Y,FN) - \lambda(F\xi,Y)\eta(X), \\ g(R^D(X,FN)Y,F\xi) &= g(R(X,FN)Y,F\xi), \\ g(R^D(X,\xi)Y,N) &= g(R(X,\xi)Y,N) - \lambda(\xi,Y)\eta(fX), \end{aligned}$$

olduğundan bu dört denklemden ispat tamamlanır. □

Sonuç 2.2.2. (M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ quarter simetrik non-metrik $\widetilde{D}$ konneksiyonlu ve $(m+2)$ boyutlu semi-Riemannian çarpım manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Kabul edelim ki f, M üzerinde paralel ve $R^{(0,2)}(X,Y)$ simetrik olsun. Bu durumda $R^{D(0,2)}(X,Y)$ nin L distribüsyonu üzerinde simetrik olması için gerek ve yeter şart λ nın simetrik ve $\lambda(fX,Y) = \lambda(fY,X)$ olmasıdır.

Sonuç 2.2.3. (M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ quarter simetrik non-metrik $\widetilde{D}$ konneksiyonlu ve $(m+2)$ boyutlu semi-Riemannian çarpım manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Kabul edelim ki f, M üzerinde paralel ve $R^{(0,2)}(X,Y)$ simetrik olsun. Bu durumda $R^{D(0,2)}(X,Y)$ nin L_2 distribüsyonu üzerinde simetrik olması için gerek ve yeter şart λ nın simetrik olmasıdır.

3. QUARTER SİMETRİK NON-METRİK KONNEKSİYONLU HALF-LIGHTLLIKE ALTMANİFOLDLAR

Bu bölümde bir semi-Riemannian Çarpım manifoldunun half-lightlike altmanifoldları incelendi. F çarpım yapısından yararlanarak semi-invaryant half-lightlike altmanifoldların yeni bir sınıfı tanımlandı ve bu tanıma göre elde edilen distribüsyonların geometrik özellikleri incelendi.

3.1 Semi-Riemannian Çarpım Manifoldunun Half-Lightlike Altmanifoldları

Tanım 3.1.1. $(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ semi-Riemannian çarpım manifoldu ve M, $\widetilde{M}$ nin half-lightlike altmanifoldu olsun. Eğer aşağıdakiler sağlanıyorsa M ye *semi-invaryant half-lightlike altmanifold* denir:

(i) $L_1 = FRadTM \subset s(TM)$,

(ii) $L_2 = FltrTM \subset s(TM)$,

(iii) $L_3 = F(s(TM^{\perp})) \subset s(TM)$.

Bu durumda

$$s(TM) = L_3 \perp \{L_1 \oplus L_2\} \perp L_0, \tag{3.1.1}$$

dır, burada L_0, $(n-4)$ boyutlu bir distribüsyondur. Buna göre aşağıdaki ayrışımlara sahip oluruz:

$$TM = L_3 \perp \{L_1 \oplus L_2\} \perp L_0 \perp RadTM, \tag{3.1.2}$$

$$T\widetilde{M} = L_3 \perp \{L_1 \oplus L_2\} \perp L_0 \perp s(TM^{\perp}) \perp \{RadTM \oplus ltrTM\}. \tag{3.1.3}$$

Önerme 3.1.1. *$(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ semi-Riemannian almost product manifold ve M, $\widetilde{M}$ nin semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda L_0 distribüsyonu $F-$ invaryanttır.*

İspat. $X \in \Gamma(L_0)$ için

$$g(FX,N) = g(X,FN) = 0,$$

$$g(FX,\xi) = g(X,F\xi) = 0,$$

$$g(FX,u) = g(X,Fu) = 0,$$

olduğundan FX de sırasıyla $RadTM$, $ltrTM$ ve $s(TM^{\perp})$ bileşeni yoktur.

$$g(FX,FN) = g(X,N) = 0,$$

$$g(FX,F\xi) = g(X,\xi) = 0,$$

$$g(FX,Fu) = g(X,u) = 0,$$

olduğundan FX de L_1, L_2 ve L_3 distribüsyonlarına ait bileşeni yoktur. O halde L_0, $F-$ invaryanttır. □

Örnek 3.1.1. $\widetilde{M} = R_2^4 \times R_2^3$ semi-Riemannian çarpım manifoldu $\widetilde{g} = \pi^* g_1 + \sigma^* g_2$ metrik tensörü olsun. Burada g_1 ve g_2 sırasıyla R_2^4 ve R_2^3 üzerinde standart metrik tensörler, π ve σ sırasıyla R_2^4 ve R_2^3 üzerinde projeksiyon olsunlar. $(x_1,x_2,...,x_7)$, R^7 nin standart koordinat sistemi ve t_i, $i = 1,...,5$ reel parametreler olmak üzere

$$\begin{aligned}
x_1 &= t_1 + t_2 - t_3, \\
x_2 &= t_1 + t_2 + t_3 + \sqrt{2}\arctan t_4, \\
x_3 &= \sqrt{2}(t_1 + t_2 + t_3) + \arctan t_4, \\
x_4 &= t_5, \\
x_5 &= t_1 - t_2 + t_3, \\
x_6 &= \arctan t_4, \\
x_7 &= t_1 - t_2 - t_3,
\end{aligned}$$

ile verilen M alt manifoldunu gözönüne alalım. Bu durumda M nin tanjant demeti için

$$TM = Sp\{U_1,U_2,U_3,U_4\},$$

ifadesine sahip oluruz, burada

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_5}+\frac{\partial}{\partial x_7}, \\
U_2 &= \frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial}{\partial x_5}-\frac{\partial}{\partial x_7}, \\
U_3 &= -\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_5}-\frac{\partial}{\partial x_7}, \\
U_4 &= \frac{\sqrt{2}}{1+t_4^2}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{1}{1+t_4^2}\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{1}{1+t_4^2}\frac{\partial}{\partial x_6}, \\
U_5 &= \frac{\partial}{\partial x_4}.
\end{aligned}$$

dir. Buradan U_1 in bir dejenere vektör olduğu kolayca görülür ve M, $\widetilde{M}$ nin $5-$ boyutlu $1-$ lightlike altmanifoldudur. $U_1=\xi$ ile gösterilirse $RadTM = Sp\{\xi\}$ ve $s(TM) = Sp\{F\xi, FN, U_1, FU_2\}$ olarak yazılabilir. Aynı zamanda

$$ltrTM = Sp\{N = -\frac{\partial}{\partial x_1}+\frac{\partial}{\partial x_2}+\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_3}-\frac{\partial}{\partial x_5}+\frac{\partial}{\partial x_7}\},$$

ve

$$s(TM^{\perp}) = Sp\{V = \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{\partial}{\partial x_3}+\frac{\partial}{\partial x_6}\},$$

ifadeleri elde edilir. Bundan dolayı M, $\widetilde{M}$ nin half-lightlike altmanifoldudur. Aynı zamanda

$$\begin{aligned}
F\xi = U_2 \in \Gamma(s(TM)),\ FN = U_3 \in \Gamma(s(TM)), \\
FV = (1+t_4^2)U_4,\ FU_5 = U_5.
\end{aligned}$$

olarak bulunur. Eğer $L_0 = Span\{U_5\}, L_1 = Span\{U_2\}, L_2 = Span\{U_3\}$ ve $L_3 = Span\{U_4\}$ denilirse M, $\widetilde{M}$ nin semi-invaryant half-lightlike altmanifoldudur.

(M,g), $(\widetilde{M},\widetilde{g})$ semi-Riemann manifoldunun half-lightlike altmanifoldu ve F çarpım yapı olsun.$\forall X \in \Gamma(TM)$ için

$$FX = fX + wX \tag{3.1.4}$$

olarak ifade edilebilir, burada f ve w, sırasıyla, $T\widetilde{M}$ den TM ve $trTM$ ye projeksiyonlardır. Üstelik bu ifade

$$FX = PfX + \eta(fX)\xi + w_1(X)N + w_2(X)u \tag{3.1.5}$$

şeklinde de yazılabilir, burada $w_1(X) = g(FX,\xi)$ ve $w_2(X) = \varepsilon g(FX,u)$ ve P, TM den $s(TM)$ ye projeksiyondur.

F Levi Civita konneksiyonu $\widetilde{\nabla}$ ye göre paralel olduğundan $\widetilde{\nabla}_X FY = F\widetilde{\nabla}_X Y$ dır. Buradan

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X FY &= \widetilde{\nabla}_X fY + \widetilde{\nabla}_X wY \\
&= \nabla_X fY + D_1(X, fY)N + D_2(X, fY)u - A_{wY}X + \nabla^t_X wY, \qquad (3.1.6) \\
F\widetilde{\nabla}_X Y &= F\nabla_X Y + D_1(X,Y)FN + D_2(X,Y)Fu \\
&= f\nabla_X Y + w\nabla_X Y + D_1(X,Y)FN + D_2(X,Y)Fu \qquad (3.1.7)
\end{aligned}$$

bulunur. (3.1.6) ve (3.1.7) teğet ve normal bileşenlerine ayrılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla_X f)Y &= A_{wY}X + D_1(X,Y)FN + D_2(X,Y)Fu, \qquad (3.1.8) \\
w\nabla_X Y &= D_1(X, fY)N + D_2(X, fY)u + \nabla^t_X wY \qquad (3.1.9)
\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 3.1.1. *M, $\widetilde{M}$ nin semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. L_0 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart*
(i) *$D_i(X,FY) = D_i(Y,FX)$, $i = 1,2$, $\forall X,Y \in \Gamma(L_0)$.*
(ii) *FA_N, L_0 üzerinde self-adjointtir, yani $X,Y \in \Gamma(L_0)$ için*

$$g(FA_N X,Y) = g(FA_N Y,X).$$

ifadelerinin sağlanmasıdır.

İspat. L_0 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X,Y \in \Gamma(L_0)$ için $[X,Y] \in \Gamma(L_0)$ olmasıdır. $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için

$$\begin{aligned}
g([X,Y],F\xi) &= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, F\xi) \\
&= g(\nabla_X Y, F\xi) - g(\nabla_Y X, F\xi) \\
&= D_1(X,FY) - D_1(Y,FX),
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca $u \in \Gamma(s(TM^{\perp}))$, $N \in \Gamma(ltrTM)$ için

$$\begin{aligned} g([X,Y],Fu) &= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Fu) \\ &= g(\nabla_X Y, Fu) - g(\nabla_Y X, Fu) \\ &= D_2(X,FY) - D_2(Y,FX), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g([X,Y],FN) &= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, FN) \\ &= g(\widetilde{\nabla}_X Y, FN) - g(\widetilde{\nabla}_Y X, FN) \\ &= -g(FY, \widetilde{\nabla}_X N) + g(FX, \widetilde{\nabla}_Y N) \\ &= g(A_N X, FY) - g(A_N Y, FX) \\ &= g(FA_N X, Y) - g(FA_N Y, X), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g([FX,FY],N) &= g(\nabla_{FX} FY - \nabla_{FY} FX, N) \\ &= g(\widetilde{\nabla}_{FX} FY, N) - g(\widetilde{\nabla}_{FY} FX, N) \\ &= -g(FY, \widetilde{\nabla}_{FX} N) + g(FX, \widetilde{\nabla}_{FY} N) \\ &= g(A_N FX, FY) - g(A_N FY, FX) \\ &= g(FA_N FX, Y) - g(FA_N FY, X), \end{aligned}$$

ifadeleri elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Teorem 3.1.2. *M, $\widetilde{M}$ nin semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. L_0 distribüsyonunun M de paralel distribüsyon olması için gerek ve yeter şart A_N, A_u ve A^*_ξ nun L_0 bileşeni olmamasıdır.*

İspat. $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(L_0)$ için L_0 distribüsyonunun M de paralel olması için gerek ve yeter şart $\nabla_X Y \in \Gamma(L_0)$ olmasıdır. Buna göre

$$g(\nabla_X Y, F\xi) = g(A^*_\xi X, FY),$$

$$g(\nabla_X Y, FN) = g(A_N X, FY),$$

$$g(\nabla_X Y, Fu) = g(A_u X, FY)$$

elde edileceğinden ispat tamamlanır. □

Şimdi semi invaryant half-lightlike manifoldda

$$L = L_2 \perp L_3 \perp L_0 \tag{3.1.10}$$

$$L' = L_0 \perp L_1 \tag{3.1.11}$$

$$L_4^{\perp} = L_2 \perp L_3 \tag{3.1.12}$$

$$L_4 = L_0 \perp L_1 \perp RadTM \tag{3.1.13}$$

distribüsyonlarını tanımlayalım. Buradan

$$L = L_0 \perp L_4^{\perp} \tag{3.1.14}$$

$$s(TM) = L \oplus L_1 \tag{3.1.15}$$

$$TM = \{L \oplus L_1\} \perp RadTM \tag{3.1.16}$$

$$s(TM) = L' \oplus L_4^{\perp} \tag{3.1.17}$$

$$TM = \{L' \oplus L_4^{\perp}\} \perp RadTM \tag{3.1.18}$$

$$TM = L_4 \oplus L_4^{\perp} \tag{3.1.19}$$

ifadeleri elde edilir. Buna göre F ye göre L_4 invaryant ve $L_4^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonlardır.

Teorem 3.1.3. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. $s(TM)$ nin integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart*
(i) $g(A_{FY}X, FN) = g(A_{FX}Y, FN)$, $\quad X, Y \in \Gamma(L_4^{\perp}) \qquad$ *veya* $\qquad (Y \in \Gamma(L_4^{\perp}), X \in \Gamma(L'))$
(ii) $\psi(X,Y) = \psi(Y,X)$,
$X, Y \in \Gamma(L')$ $\quad$ *veya* $\quad (X \in \Gamma(L_4^{\perp}), Y \in \Gamma(L'))$ *, burada* $\psi(X,Y) = g(\nabla_X FY, FN)$ *dir.*

İspat. Teorem 1.3.9 dan biliyoruz ki bir half-lightlike altmanifoldun screen distribüsyonunun integrallanebiir olması için gerek ve yeter şart A_N nin $\Gamma(s(TM)$ üzerinde g ye göre simetrik olmasıdır.

$$s(TM) = L' \oplus L_4^{\perp}$$

olarak gözönüne alınırsa $X, Y \in \Gamma(L_4^{\perp})$ için

$$g(A_N X, Y) = -g(\widetilde{\nabla}_X N, Y) = -g(\widetilde{\nabla}_X FN, FY) = g(FN, \widetilde{\nabla}_X FY)$$

ve

$$g(A_N X, Y) = -g(A_{FY} X, FN) \tag{3.1.20}$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$g(A_N Y, X) = -g(A_{FX} Y, FN) \tag{3.1.21}$$

bulunur. $X, Y \in \Gamma(L^{'})$ için

$$\begin{aligned} g(A_N X, Y) &= -g(\widetilde{\nabla}_X FY, FN) \\ &= g(\nabla_X FY, FN) \end{aligned}$$

dir. Buradan

$$g(A_N X, Y) = -g(\nabla_X FY, FN) \tag{3.1.22}$$

elde edilir. Benzer olarak

$$g(A_N Y, X) = g(\nabla_Y FX, FN), \tag{3.1.23}$$

bulunur. Eğer $\psi(X, Y) = g(\nabla_X FY, FN)$ olduğu düşünülüp, burada (3.1.20)-(3.2.31) ve Teorem (1.3.9) kullanılırsa ispat tamamlanır. □

Teorem 3.1.4. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. L_4 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart*
$D_i(X, FY) = D_i(Y, FX)$, $i = 1, 2$, $X, Y \in \Gamma(L_4)$,
olmasıdır.

İspat. $X, Y \in \Gamma(L_4)$ için $\widetilde{\nabla}_X FY = F\widetilde{\nabla}_X Y$ olduğundan

$$\nabla_X FY + D_1(X, FY)N + D_2(X, FY)u = f\nabla_X Y + w(\nabla_X Y) + D_1(X, Y)FN + D_2(X, Y)Fu$$

elde edilir. Buradan

$$w([X, Y]) = \{D_1(X, FY) - D_1(Y, FX)\}N + \{D_2(X, FY) - D_2(Y, FX)\}u$$

olur. Böylece L_4 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $D_i(X, FY) = D_i(Y, FX)$ olmasıdır. □

Tanım 3.1.2. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $X \in \Gamma(L_4^{\perp})$ ve $Y \in \Gamma(L_4)$ için

$$D_i(X,Y) = 0,\ i = 1,2$$

ise M ye mixed geodezik half-lightlike altmanifold denir.

Teorem 3.1.5. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. M nin (3.1.19) ayrışımına göre mixed geodezik olması için gerek ve yeter şart*

$$A_{FY}X = -f\nabla_X Y$$

olmasıdır.

İspat. $X \in \Gamma(L_4)$ ve $Y \in \Gamma(L_4^{\perp})$ için

$$(\widetilde{\nabla_X} F)Y = 0$$

olduğunu biliyoruz. Ayrıca

$$\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X FY &= F\widetilde{\nabla}_X Y \\
-A_{FY}X + \nabla_X^t FY &= F\nabla_X Y + D_1(X,Y)FN + D_2(X,Y)Fu
\end{aligned}$$

dir ve bu eşitlik teğet ve transversal bileşenlerine ayrılırsa

$$-A_{FY}X = f\nabla_X Y + D_1(X,Y)FN + D_2(X,Y)Fu$$

elde edilir ve bu eşitlikten ispat tamamlanır. □

Şimdi M half-lightlike alt manifoldunun minimal olduğunu varsayalım.

$$E_1 = \frac{FN + F\xi}{2}, \quad E_2 = \frac{FN - F\xi}{2}$$

alırsak

$$g(E_1,E_1) = 1, \quad g(E_2,E_2) = -1, \quad g(E_1,E_2) = 0$$

elde edilir. O halde

$$\{e_1, e_2, ..., e_{n-4}, E_1, E_2, Fu\}$$

semi-invaryant half-lightlike altmanifoldda $s(TM)$ nin ortonormal bazıdır, burada $L_0 = Sp\{e_1, e_2, ..., e_{n-4}\}$ dir. O zaman M minimal ise

$$D_1(E_1, E_1) = D_1(FN, FN) + D_1(F\xi, F\xi) + 2D_1(FN, F\xi) = 0, \tag{3.1.24}$$

$$D_1(E_2, E_2) = D_1(FN, FN) + D_1(F\xi, F\xi) - 2D_1(FN, F\xi) = 0, \tag{3.1.25}$$

dır. (3.1.24) ve (3.1.25) dan

$$D_1(FN, F\xi) = 0,$$
$$D_1(FN, FN) + D_1(F\xi, F\xi) = 0, \tag{3.1.26}$$

bulunur. Benzer olarak $D_2(E_1, E_1) = 0 = D_2(E_2, E_2)$ olduğu için

$$D_2(FN, F\xi) = 0,$$
$$D_2(FN, FN) + D_2(F\xi, F\xi) = 0, \tag{3.1.27}$$

(3.1.26) ve (3.1.27) den aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 3.1.1. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant half-lightlike altmanifold olsun. Eğer M minimal ise $L_1 \perp L_2$ distribüsyonu mixed geodeziktir.

Teorem 3.1.6. *M semi-invaryant half-lightlike altmanifold olsun. Eğer M minimal ise aşağıdakiler sağlanır;*

(i) $D_1(FN, FN) + D_1(F\xi, F\xi) = 0$ *ve* $D_2(FN, FN) + D_2(F\xi, F\xi) = 0$

(ii) A_uFu, $\nabla_{Fu}\xi$ *ve* $\nabla_\xi F\xi$ *nin* L_3 *bileşeni yoktur.*

(iii) $\nabla_\xi Fu$, $\nabla_{FN}\xi$ *ve* A_uFN *nin* L_2 *bileşeni yoktur.*

İspat. (i) yukarıda gösterildi.

$$D_1(FN, F\xi) = g(\widetilde{\nabla}_{FN}F\xi, \xi) = g(F\xi, \widetilde{\nabla}_{FN}\xi) = g(F\xi, \nabla_{FN}\xi) = 0,$$
$$D_2(FN, F\xi) = g(\widetilde{\nabla}_{FN}F\xi, u) = g(F\xi, \widetilde{\nabla}_{FN}u) = -g(F\xi, A_uFN) = 0,$$

olduğundan $\nabla_{FN}\xi$ *ve* A_uFN de L_2 bileşeni yoktur. Minimallik tanımından

$$\varepsilon_1(\xi) = g(\widetilde{\nabla}_\xi u, \xi) = g(\widetilde{\nabla}_\xi Fu, F\xi) = g(\nabla_\xi Fu, F\xi) = 0$$

olduğu için $\nabla_\xi Fu$ da L_2 bileşeni yoktur. Böylece (iii) elde edilmiştir.

$$\varepsilon_1(\xi) = g(\widetilde{\nabla}_\xi Fu, F\xi) = -g(Fu, \widetilde{\nabla}_\xi F\xi) = 0,$$

olduğu için $\nabla_\xi F\xi$ de L_3 bileşeni yoktur. Ayrıca

$$D_1(Fu, Fu) = g(\widetilde{\nabla}_{Fu} Fu, \xi) = -g(Fu, \nabla_{FU}\xi) = 0,$$
$$D_2(Fu, Fu) = g(\widetilde{\nabla}_{Fu} Fu, u) = -g(Fu, \widetilde{\nabla}_{Fu} u) = g(Fu, A_u Fu) = 0,$$

olduğu için $\nabla_{Fu}\xi$ ve $A_u Fu$ da L_3 bileşeni yoktur. (ii) ispatlanmış olur. □

3.2 Quarter simetrik non-metrik koneksiyonlu Semi-Riemannian Çarpım Manifoldunun Half-lightlike Altmanifoldları

Bu alt bölümde $\widetilde{M}, \widetilde{g}$ üzerinde (0.0.4) ile verilen quarter simetrik non-metrik konneksiyon ele alınarak, halflightlike altmanifoldlar incelenmiştir.

M, $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun bir half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $\widetilde{D}$ konneksiyonuna göre $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\widetilde{D}_X Y = D_X Y + \widetilde{D}_1(X,Y)N + \widetilde{D}_2(X,Y)u. \tag{3.2.1}$$

elde ederiz, burada D quarter-simetrik non-metrik konneksiyondan indirgenmiş konneksiyon ve $\widetilde{D}_1$ ve $\widetilde{D}_2$ ise quarter-simetrik non-metrik konneksiyona göre ikinci temel formlardır. Üstelik

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_X Y &= \nabla_X Y + D_1(X,Y)N + D_2(X,Y)u, \\ &\quad +\pi(Y) f X + \pi(Y)\{w_1(X)N + w_2(X)u\} \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

olduğundan (3.2.1) ve (3.2.2) ten

$$D_X Y = \nabla_X Y + \pi(Y) f X, \tag{3.2.3}$$
$$\widetilde{D}_1(X,Y) = D_1(X,Y) + \pi(Y) w_1(X), \tag{3.2.4}$$
$$\widetilde{D}_2(X,Y) = D_2(X,Y) + \pi(Y) w_2(X), \tag{3.2.5}$$

elde edilir. Ayrıca $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\widetilde{D}_X N = -\widetilde{A}_N X + \widetilde{p}_1(X)N + \widetilde{p}_2(X)u, \tag{3.2.6}$$

ve

$$\widetilde{D}_X u = -\widetilde{A}_u X + \widetilde{\varepsilon}_1(X)N + \widetilde{\varepsilon}_2(X)u, \tag{3.2.7}$$

dir, burada $\widetilde{A}_N$ ve $\widetilde{A}_u$ quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre $\Gamma(TM)$ üzerinde lineer operatörlerdir. (0.0.4) ifadesinden $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_X N &= \widetilde{\nabla}_X N + \pi(N)FX \\ &= -A_N X + p_1(X)N + p_2(X)u \\ &\quad +\pi(N)fX + \pi(N)\{w_1(X)N + w_2(X)u\}, \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

elde edilir ki (3.2.6) ve (3.2.8) den de

$$\widetilde{A}_N X = A_N X - \pi(N)fX, \tag{3.2.9}$$

$$\widetilde{p}_1(X) = p_1(X) + \pi(N)w_1(X), \tag{3.2.10}$$

$$\widetilde{p}_2(X) = p_2(X) + \pi(N)w_2(X), \tag{3.2.11}$$

olarak bulunur. Benzer olarak

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_X u &= \nabla_X u + \pi(u)\{fX + w_1(X)N + w_2(X)u\}, \\ \widetilde{D}_X u &= -A_u X + \varepsilon_1(X)N + \varepsilon_2(X)u \\ &+ \pi(u)\{fX + w_1(X)N + w_2(X)u\}, \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

elde edilir ki (3.2.7) ve (3.2.12) dan

$$\widetilde{A}_u X = A_u X - \pi(u)fX, \tag{3.2.13}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_1(X) = \varepsilon_1(X) + \pi(u)w_1(X), \tag{3.2.14}$$

$$\widetilde{\varepsilon}_2(X) = \varepsilon_2(X) + \pi(u)w_2(X), \tag{3.2.15}$$

olur. Şimdi (3.2.3) den

$$\begin{aligned}(D_x g)(Y,Z) &= Xg(Y,Z) - g(D_X Y,Z) - g(Y,D_X Z)\\ &= Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y + \pi(Y)fX,Z)\\ &\quad -g(Y,\nabla_X Z + \pi(Z)fX)\\ &= (\nabla_x g)(Y,Z) - \pi(Y)g(fX,Z) - \pi(Z)g(fX,Y),\end{aligned}$$

elde edilir ve (1.3.60) kullanılırsa

$$\begin{aligned}(D_x g)(Y,Z) &= D_1(X,Y)\eta(Z) + D_1(X,Z)\eta(Y)\\ &\quad -\pi(Y)g(fX,Z) - \pi(Z)g(fX,Y),\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

bulunur. Ayrıca (3.2.3) den

$$T^D(X,Y) = \pi(Y)fX - \pi(X)fY \tag{3.2.17}$$

elde edilir. Bu durumda (3.2.16) ve (3.2.17) den aşağıdaki önerme verilir.

Önerme 3.2.1. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda quarter simetrik non-metrik konneksiyondan indirgenen D konneksiyonuda M üzerinde quarter simetrik non-metrik konneksiyondur.*

Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için

$$D_X PY = D^*_X PY + E^*_1(X,PY)\xi, \tag{3.2.18}$$

$$D_X \xi = -\overline{A}^*_\xi X + \overline{u}_1(X)\xi, \tag{3.2.19}$$

olarak yazabiliriz, burada $E^*_1(X,PY)$ ve $\overline{A}^*_\xi$ quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre, sırasıyla, ekran distribüsyonunun lokal ikinci temel formu ve ekran distribüsyonunun şekil operatörüdür. $D^*_X PY$ ise $\Gamma(s(TM))$ ye aittir. Bunun yanısıra

$$\begin{aligned}D_X PY &= \nabla_X PY + \pi(PY)fX\\ &= \nabla^*_X PY + E_1(X,PY)\xi + \pi(PY)\{PfX + \eta(fX)\xi\}\end{aligned} \tag{3.2.20}$$

elde edilir. Bu durumda (3.2.18) ve (3.2.20) den

$$\begin{aligned} D^*_X PY &= \nabla^*_X PY + \pi(PY)PfX && (3.2.21)\\ E^*_1(X,PY) &= E_1(X,PY) + \pi(PY)\eta(fX) && (3.2.22) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Eğer

$$\begin{aligned} D_X\xi &= -A^*_\xi X + u_1(X)\xi \\ &\quad +\pi(\xi)\{PfX + \eta(fX)\xi\} \end{aligned}$$

olduğu gözönüne alınırsa

$$\begin{aligned} \overline{A}^*_\xi X &= A^*_\xi X - \pi(\xi)PfX \\ \overline{u}_1(X) &= u_1(X) + \pi(\xi)\eta(fX) && (3.2.23) \end{aligned}$$

elde edilir.

Önerme 3.2.2. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda half-lightlike altmanifolddan ekran distribüsyonuna indirgenen D^* konneksiyonu bir semi simetrik non-metrik konneksiyondur.*

İspat. $X,Y,Z \in \Gamma(s(TM))$ için

$$(D^*_X g)(Y,Z) = Xg(Y,Z) - g(D^*_X Y,Z) - g(Y,D^*_X Z)$$

olduğunu biliyoruz. (3.2.21) ten

$$\begin{aligned} (D^*_X g)(Y,Z) &= Xg(Y,Z) - g(\nabla^*_X Y + \pi(Y)fX, Z) \\ &\quad - g(Y, \nabla^*_X Z + \pi(Z)fX) \end{aligned}$$

ve buradan da

$$(D^*_X g)(Y,Z) = -\pi(Y)g(fX,Z) - \pi(Z)g(Y,fX) \qquad (3.2.24)$$

elde edilir. T^{D^*} torsiyon tensörü ise

$$\begin{aligned} T^{D^*}(X,Y) &= D^*_X Y - D^*_Y X - [X,Y]^{D^*} \\ &= \nabla^*_X Y - \nabla^*_Y X + \pi(Y)X - \pi(X)Y - [X,Y] \end{aligned}$$

ve buradan da

$$T^{D^*}(X,Y) = \pi(Y)X - \pi(X)Y \tag{3.2.25}$$

olarak bulunur. Bu durumda (3.2.24) ve (3.2.25) dan ispat tamamlanmış olur. $\square$

$X,Y,Z \in \Gamma(s(TM))$ için

$$\begin{aligned} \eta([X,Y]^D) &= \eta(D_X Y - D_Y X - T^D(X,Y)) \\ &= \eta(\nabla_X Y + \pi(Y) f X - \nabla_Y X + \pi(X) f Y) \\ &\quad -\eta(T^D(X,Y)) \end{aligned}$$

(3.2.17) ve ∇ torsiyon-free lineer konneksiyon olduğundan

$$\eta([X,Y]^D) = \eta(\nabla_X Y - \nabla_Y X)$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$\eta([X,Y]^D) = \eta([X,Y]) \tag{3.2.26}$$

dir. Buradan ise aşağıdaki sonucu elde ederiz.

Sonuç 3.2.1. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda ekran distribüsyonu $s(TM)$ nin quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $s(TM)$ nin ∇ konneksiyonuna göre integrallenebilir olmasıdır.

O halde bu sonuç ve Teorem 1.3.9 dan aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.1. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X,Y \in \Gamma(s(TM))$ için aşağıdakiler eşdeğerdir.*

(i) *$s(TM)$, D konneksiyonuna göre integrallenebilirdir ve $T^D(X,Y)$ nin $RadTM$ bileşeni yoktur.*

(ii) *$s(TM)$ nin quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre ikinci temel formu simetriktir..*

(iii) *Quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre şekil operatörü $\overline{A}_N$, g metriğine göre $\Gamma(s(TM))$ üzerinde simetriktir.*

İspat. (3.2.22) ten $X,Y \in \Gamma(s(TM))$ için

$$E_1^*(X,Y) = E_1(X,Y) + \pi(Y)\eta(fX)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} E_1^*(X,Y) \quad - \quad E_1^*(Y,X) &= E_1(X,Y) - E_1(Y,X) \\ &\quad + \pi(Y)\eta(fX) - \pi(X)\eta(fY) \\ &= \eta([X,Y]) + g(T^D(X,Y),N) \end{aligned}$$

olarak bulunur. O halde (1.3.67) ve (3.2.26) dan $(i) \Leftrightarrow (ii)$ olur. (3.2.9) ve (1.3.63) den

$$g(\overline{A}_N X,Y) = g(A_N X,Y) - \pi(N)g(fX,Y)$$

ve

$$g(\overline{A}_N Y,X) = g(A_N Y,X) - \pi(N)g(fY,X)$$

olduğundan

$$\begin{aligned} g(\overline{A}_N X,Y) - g(\overline{A}_N Y,X) &= E_1(X,Y) - E_1(Y,X) \\ &= E_1^*(X,Y) - E_1^*(Y,X) \end{aligned}$$

bulunur ki $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ elde edilmiş olur. □

Teorem 3.2.2. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre ikinci temel form $\widetilde{D}_1$ nın simetrik olması için gerek ve yeter şart $\widetilde{T}$ torsiyonda $ltrTM$ bileşeni olmamasıdır.*

İspat. (3.2.4) den

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_1(X,Y) &= D_1(X,Y) + \pi(Y)w_1(X) \\ &= D_1(X,Y) + \pi(Y)g(FX,\xi) \\ \widetilde{D}_1(Y,X) &= D_1(Y,X) + \pi(X)w_1(Y) \\ &= D_1(Y,X) + \pi(X)g(FY,\xi) \end{aligned}$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}_1(X,Y)-\widetilde{D}_1(Y,X) &= D_1(X,Y)-D_1(Y,X) \\
&\quad +g(\pi(Y)FX-\pi(X)FY,\xi) \\
&= g(\widetilde{T}(X,Y),\xi)
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. □

Yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 3.2.2. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre screen ikinci temel form $\widetilde{D}_2$ nin simetrik olması için gerek ve yeter şart $\widetilde{T}$ torsiyonda $s(TM^{\perp})$ bileşeni olmamasıdır.

Şimdi F nin quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre paralelliğini inceleyelim

$$\begin{aligned}
(\widetilde{D}_X F)Y &= \widetilde{D}_X FY - F\widetilde{D}_X Y \\
&= \widetilde{\nabla}_X FY + \pi(FY)FX - F\widetilde{\nabla}_X Y + \pi(Y)X,
\end{aligned}$$

ve

$$(\widetilde{D}_X F)Y = \pi(FY)FX - \pi(Y)X, \tag{3.2.27}$$

bulunur. Böylece F, $\widetilde{D}$ ya göre paralel değildir. Üstelik

$$\begin{aligned}
(D_X f)Y &= D_X fY - fD_X Y \\
&= (\nabla_X f)Y + \pi(fY)fX - \pi(Y)f^2X
\end{aligned} \tag{3.2.28}$$

elde edileceğinden f de indirgenmiş quarter simetrik non-metrik konneksiyon D ye göre paralel değildir.

Önerme 3.2.3. *M, $\widetilde{M}$ nin semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. L_0 distribüsyonunun quarter simetrik non-metrik konneksiyon D ye göre M üzerinde paralel olması için gerek ve yeter şart $A^*_\xi X$, $A_u X$ ve A_N de L_0 bileşeni olmamasıdır.*

İspat. $X \in \Gamma(s(TM))$ ve $Y \in \Gamma(L_0)$ için (3.2.3) den

$$\begin{aligned} g(D_XY, F\xi) &= g(\nabla_XY + \pi(Y)fX, F\xi) \\ &= g(\widetilde{\nabla}_XY, F\xi) + \pi(Y)g(fX, F\xi) \\ &= -g(FY, \widetilde{\nabla}_X\xi) \\ &= g(A^*_\xi X, FY) \end{aligned}$$

bulunur. Aynı zamanda

$$\begin{aligned} g(D_XY, Fu) &= g(\nabla_XY + \pi(Y)fX, Fu) \\ &= g(\widetilde{\nabla}_XY, Fu) + \pi(Y)g(fX, Fu) \\ &= -g(\widetilde{\nabla}_Xu, FY) \\ &= g(A_uX, FY) \end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} g(D_XY, FN) &= g(\nabla_XY + \pi(Y)fX, FN) \\ &= g(\widetilde{\nabla}_XY, FN) + \pi(Y)g(fX, FN) \\ &= -g(\widetilde{\nabla}_XN, FY) \\ &= g(A_NX, FY) \end{aligned}$$

olarak bulunur ve böylece ispat tamamlanır. □

$X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} [X,Y]^D &= D_XY - D_YX - T^D(X,Y) \\ &= \nabla_XY + \pi(Y)fX - \nabla_YX - \pi(X)fY - \pi(Y)fX + \pi(X)fY \\ &= \nabla_XY - \nabla_YX \end{aligned}$$

olarak bulunur. Buradan ise

$$[X,Y]^D = [X,Y] \tag{3.2.29}$$

elde edilir. (3.2.29) ve teorem(3.1.1) den aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 3.2.3. M, $\widetilde{M}$ nin semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. L_0 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart L_0 distribüsyonunun quarter simetrik non-metrik konneksiyon D ye göre integrallenebilir olmasıdır.

Lemma 3.2.1. *M, $\widetilde{M}$ nin semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $\forall X \in \Gamma(L_0)$ ve $Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$\widetilde{D}_i(X,Y) = D_i(X,Y),\ i \in \{1,2\}$$

dir.

İspat. (3.2.4) den

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_1(X,Y) &= D_1(X,Y) + \pi(Y)w_1(X)\\ &= D_1(X,Y) + \pi(Y)g(FX,\xi)\\ &= D_1(X,Y)\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.2.5) dan

$$\widetilde{D}_2(X,Y) = D_2(X,Y) + \pi(Y)w_2(X)$$

bulunur, burada $w_2(X) = g(FX,u) = 0$ olduğundan

$$\widetilde{D}_2(X,Y) = D_2(X,Y)$$

elde edilir. □

Bu lemmadan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.4. M, $\widetilde{M}$ nin semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre L_0- total geodezik olması için gerek ve yeter şart M nin ∇ konneksiyonuna göre L_0- total geodezik olmasıdır.

Önerme 3.2.4. *M, $\widetilde{M}$ nin semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. Eğer M total umbilik ise her $X \in \Gamma(TM)$ için aşağıdakiler sağlanır:*
(i)$\widetilde{D}_2(X,\xi) = \pi(\xi)w_2(X)$,
(ii) $\widetilde{p}_2(\xi) = 0$,
(iii) $\overline{A}_u\xi = -\pi(u)f\xi$.

İspat. (3.2.5) dan

$$\begin{aligned} \widetilde{D}_2(X,Y) &= D_2(X,Y)+\pi(Y)w_2(X) \\ \widetilde{D}_2(X,\xi) &= D_2(X,\xi)+\pi(\xi)w_2(X) \\ &= \pi(\xi)g(FX,u) \end{aligned}$$

ve (3.2.11) den

$$\begin{aligned} \overline{p}_2(X) &= p_2(X)+\pi(N)w_2(X) \\ \overline{p}_2(\xi) &= p_2(\xi)+\pi(N)w_2(\xi) \\ &= \pi(N)g(F\xi,u), \end{aligned}$$

bulunur. $p_2(\xi)=0$ olduğu için (3.2.13) den

$$\begin{aligned} \overline{A}_u(X) &= A_u(X)-\pi(u)fX, \\ \overline{A}_u(\xi) &= A_u(\xi)-\pi(u)f\xi, \\ \overline{A}_u(\xi) &= -\pi(u)f\xi, \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Teorem 3.2.3. *$(\widetilde{M}(c),\widetilde{g})$ sabit eğrilikli semi-Riemannian manifold ve M, $\widetilde{M}$ nin bir aşikar olmayan (proper) total umbilik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir;*

(i) *L_0, ∇ ya göre integrallenebilir.*

(ii) *L_0 distribüsyonu quarter simetrik non-metrik konneksiyon D ye göre integrallenebilirdir.*

(iii) *L_0 üzerinde $\overline{p}_1$ bir kapalı formdur.*

(iv) *L_0 üzerinde $\overline{p}_2$ $1-$formu için*

$$2d\overline{p}_2(X,Y)=\overline{p}_1(X)\overline{p}_2(Y)-\overline{p}_2(X)\overline{p}_1(Y), \quad \forall X,Y\in\Gamma(L_0),$$

dir.

İspat. $X,Y \in \Gamma(L_0)$ için

$\eta([X,Y]^D) = \eta([X,Y] = E_1(X,Y) - E_1(Y,X) = 0$ olur ve buradan $(i) \Leftrightarrow (ii)$ elde edilir. $w_1(X) = g(FX,\xi) = 0$ ve $w_2(X) = g(FX,u) = 0$ olduğundan (3.2.10) ve (3.2.11) den

$$\overline{p}_1(X) = p_1(X) \qquad ve \qquad \overline{p}_2(X) = p_1(X) \tag{3.2.30}$$

elde edilir. (1.3.91) den

$$2dp_1(X,Y) = H_1\{g(X,A_NY) - g(Y,A_NX)\}$$

olduğunu bliyoruz. (3.2.30) dan ve L_0 integrallenebilir olduğundan

$$\begin{aligned} X(p_1(Y)) - Y(p_1(X)) - p_1[X,Y] &= H_1\{E_1(Y,X) - E_1(X,Y))\} \\ X(\overline{p}_1(Y)) - Y(\overline{p}_1(X)) - \overline{p}_1[X,Y] &= H_1\eta([X,Y]) \\ 2d\overline{p}_1(X,Y) &= H_1\eta([X,Y]^D) = 0 \end{aligned}$$

olarak bulunur. $d\overline{p}_1 = 0$ olduğu için $\overline{p}_1$ bir formu kapalıdır. Böylece $(i) \Leftrightarrow (iii)$ elde edilir. teorem (1.3.13) ve (3.2.30) dan

$$\begin{aligned} X(p_2(Y)) - Y(p_2(X)) - p_2[X,Y] &= \overline{p}_1(X)\overline{p}_2(Y) - \overline{p}_2(X)\overline{p}_1(Y) \\ X(\overline{p}_2(Y)) - Y(\overline{p}_2(X)) - \overline{p}_2[X,Y] &= \overline{p}_1(X)\overline{p}_2(Y) - \overline{p}_2(X)\overline{p}_1(Y) \\ 2d\overline{p}_2(X,Y) &= \overline{p}_1(X)\overline{p}_2(Y) - \overline{p}_2(X)\overline{p}_1(Y) \end{aligned}$$

bulunur ve $(iii) \Leftrightarrow (iv)$ elde edilmiş olur. □

Lemma 3.2.2. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu ve $s(TM)$ total umbilik olsun. Bu durumda quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre $s(TM)$ nin ikinci temel formu E_1^* için*

$$E_1^*(\xi,PX) = 0,$$

dır.

İspat. (3.2.22) ten

$$E_1^*(\xi,PX) = E_1(\xi,PX) + \pi(PX)\eta(f\xi)$$

olarak bulunur. $s(TM)$ total umbilik olduğundan

$$E_1^*(\xi, PX) = \pi(PX)\eta(f\xi)$$

ve M semi-invaryant olduğundan $\eta(f\xi) = 0$ dır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.2.4. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu ve $s(TM)$ total umbilik olsun. Bu durumda quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre $s(TM)$ nin ikinci temel formunun simetrik olması için gerek ve yeter şart T^D torsiyonun $RadTM$ bileşeni olmamasıdır.*

İspat. (3.2.22) ten ve E_1 simetrik olduğundan $X, Y \in \Gamma(s(TM))$ için

$$E_1^*(X,Y) - E_1^*(Y,X) = \pi(Y)\eta(fX) - \pi(X)\eta(fY) = g(T^D(X,Y), N)$$

olduğundan ispat tamamdır. $\square$

Sonuç 3.2.5. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda L distribüsyonunun quarter simetrik non-metrik konneksiyon D ye göre total umbilik olması için gerek ve yeter şart $s(TM)$ nin ∇ ye göre total umbilik olmasıdır.

Teorem 3.2.5. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir;*
(i) *$L_4^\perp$ integrallenebilirdir.*
(ii) *$X, Y \in \Gamma(L_4^\perp)$ için $\widetilde{A}_{FY}X = \widetilde{A}_{FX}Y$*
(iii) *Quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre s(TM) nin ikinci temel formu E_1^*, $L_4^\perp$ üzerinde simetriktir.*

İspat. $X, Y \in \Gamma(L_4^\perp)$ için

$$\begin{aligned} g([X,Y], FN) &= g(F[X,Y], N) \\ &= g(\widetilde{\nabla}_X FY - \widetilde{\nabla}_Y FX, N) \\ &= g(A_{FX}Y - A_{FY}X, N) \end{aligned}$$

ve $Z \in \Gamma(L_0)$ için

$$\begin{aligned} g([X,Y],Z) &= g(F[X,Y],FZ) \\ &= g(\widetilde{\nabla}_X FY - \widetilde{\nabla}_Y FX, FZ) \\ &= g(A_{FX}Y - A_{FY}X, FZ) \end{aligned}$$

olarak bulunur. Üstelik (3.2.9) ve (3.2.13) den, $L_4^{\perp}$ üzerinde

$$\widetilde{A}_{FY}X = A_{FY}X$$

olduğundan $(i) \Leftrightarrow (ii)$ elde edilir.

Ayrıca (3.2.22) den $E_1^*(X,Y = E_1(X,Y))$ ve teorem (1.3.9) dan $(i) \Leftrightarrow (iii)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.2.6. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu ve $L_4^{\perp}$ distribüsyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda;
(i) $L_4^{\perp}$ üzerinde $E_1 = E_1^*$,
(ii) $L_4^{\perp}$ üzerinde E_1^* simetriktir,
(iii) $L_4^{\perp}$ üzerinde $\widetilde{A}_N = A_N$ dir.

(3.2.4), (3.2.5) ve teorem 3.1.4 den aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 3.2.7. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu ve L_4 distribüsyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda $X,Y \in \Gamma(L_4)$ için

$$\widetilde{D}_1(X,FY) - \widetilde{D}_1(Y,FX) = \pi(FY)w_1(X) - \pi(FX)w_1(Y)$$

$$\widetilde{D}_2(X,FY) - \widetilde{D}_2(Y,FX) = \pi(FY)w_2(X) - \pi(FX)w_2(Y)$$

dir.

Önerme 3.2.5. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. $L_4^{\perp}$ distribüsyonu üzerinde $X,Y \in \Gamma(L_4^{\perp})$ için*

$$\nabla_X g = 0 \text{ } ve \text{ } D_X g = 0$$

dır.

İspat. $X,Y \in \Gamma(L_4^{\perp})$ için

$$(\nabla_X g)(Y,Z) \;=\; D_1(X,Y)\eta(Z) + D_1(X,Z)\eta(Y)$$

ve (3.2.16) den

$$\begin{aligned}(D_X g)(Y,Z) &= D_1(X,Y)\eta(Z) + D_1(X,Z)\eta(Y)\\ &\quad -\pi(Y)g(fX,Z) - \pi(Z)g(fX,Y)\end{aligned}$$

olduğundan $\nabla_X g = 0$ ve $D_X g = 0$ bulunur. □

Sonuç 3.2.8. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda L_4 distribüsyonu üzerinde aşağıdakiler eşdeğerdir.
(i) $\widetilde{D}_1(X,Y) = D_1(X,Y)$, $\quad \widetilde{D}_2(X,Y) = D_2(X,Y)$
(ii) $\widetilde{D}_1$ ve $\widetilde{D}_2$ simetriktir.
(iii) M, L_4 total geodezik ise quarter simetrik non metrik konneksiyona göre de L_4 total geodeziktir.
(iv) M, L_4 total umbilik ise quarter simetrik non metrik konneksiyona göre de L_4 total umbiliktir.

İspat. $X,Y \in \Gamma(L_4)$ için
$w_1(X) = 0 = w_2(X)$ olduğundan

$$\widetilde{D}_1(X,Y) = D_1(X,Y),$$

$$\widetilde{D}_2(X,Y) = D_2(X,Y),$$

ifadeleri elde edilmiş olur ve ispat tamamlanır. □

Teorem 3.2.6. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldu Levi-Civita konneksiyonuna göre mixed geodezik semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(L_4)$ ve $Y \in \Gamma(L_4^{\perp})$ için*

$$\widetilde{D}_i(X,Y) = 0,\; i = 1,2$$

dır.

İspat. $Y \in \Gamma(L_4^\perp)$ ve $X \in \Gamma(L_4)$ için

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_1(X,Y) &= \widetilde{g}(\widetilde{D}_X Y, \xi)\\ &= \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, \xi)\\ &= D_1(X,Y),\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\widetilde{D}_2(X,Y) &= \widetilde{g}(\widetilde{D}_X Y, u)\\ &= \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, u)\\ &= D_2(X,Y),\end{aligned}$$

olduğundan ispat tamamlanır. □

M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldu (3.1.19) ayrışımı için Levi-Civita konneksiyonuna göre mixed geodezik semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(L_4^\perp)$ ve $Y \in \Gamma(L_4)$ için

$$\widetilde{D}_1(X,Y) = \pi(Y) g(FX, \xi),$$

ve

$$\widetilde{D}_2(X,Y) = \pi(Y) g(FX, u)$$

elde edilir. Bu durumda semi-Riemannian manifoldu Levi-Civita konneksiyonuna göre mixed geodezik semi-invaryant half-lightlike altmanifold ise $X \in \Gamma(L_4^\perp)$ ve $Y \in \Gamma(L_4)$ için $\widetilde{D}_i(X,Y) \neq 0,\ i = 1,2$ dır ancak $\widetilde{D}_i(Y,X) = 0,\ i = 1,2$ dır.

(3.2.9) ve (3.2.22) den aşağıdaki önerme verilir.

Önerme 3.2.6. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun ekran konformal semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:*

(i) $\widetilde{A}_N X = \varphi A^*_\xi X - \pi(N) f X.$

(ii) $E_1^*(X, PY) = \varphi D_1(X, PY) + \pi(PY)\eta(fX).$

Teorem 3.2.7. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun ekran konformal semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:*
(i) *Quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre $s(TM)$ integrallenebilirdir.*
(ii) *$s(TM)$ nin quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre ikinci temel formu L distribüsyonu üzerinde simetriktir.*
(iii) *Quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre şekil operatörü $\widetilde{A}_N$, g metriğine göre $L_1 \perp L_4^{\perp}$ distribüsyonu üzerinde simetriktir.*
(iv) *Quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre $L_1 \perp L_4^{\perp}$ distribüsyonu üzerinde M ekran konformaldir.*

İspat. Ekran konformallikten A_N, g metriğine göre simetrik olduğundan (i) elde edilir.

Önerme (3.2.6) dan $X \in \Gamma(L)$ için $\eta(fX) = 0$ olacağından

$$E_1^*(X,Y) = \varphi D_1(X,Y)$$

elde edilir ki D_1 simetrik olduğundan E_1^* da simetriktir, böylece (ii) elde edilir.
Önerme (3.2.6) dan

$$g(\widetilde{A}_N X,Y) = g(\varphi A_\xi^* X,Y) - \pi(N) g(fX,Y),$$

$L_1 \perp L_4^{\perp}$ distribüsyonu üzerinde bu ifade A_N, g metriğine göre simetrik olduğundan,

$$g(\widetilde{A}_N X,Y) = g(\varphi A_\xi^* X,Y) = \varphi g(A_\xi^* X,Y) = g(\widetilde{A}_N Y,X),$$

olarak bulunur ki (iii) elde edilmiş olur.
(3.2.23) den

$$g(\widetilde{A}_\xi^* X,Y) = g(A_\xi^* X,Y) - \pi(\xi) g(PfX,Y),$$

dir. $L_1 \perp L_4^{\perp}$ distribüsyonu üzerinde bu eşitlikten

$$g(\widetilde{A}_N X,Y) = \varphi g(A_\xi^* X,Y) = \varphi g(\widetilde{A}_\xi^* X,Y),$$

elde edilir ki (iv) elde edilmiş olur. □

Tanım 3.2.1. M quarter simetrik non-metrik konneksiyonlu semi-invaryant half-lightlike altmanifold olsun. Eğer

$$\sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{D}_1(e_i,e_i)=0, \quad \sum_{i=1}^{n-1} \widetilde{D}_2(e_i,e_i)=0,\ \widetilde{\varepsilon_1}(\xi)=0,$$

ise M ye quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre minimaldir denir, burada $\{e_i\}_{i=1}^{n-1}$, $s(TM)$ nin ortanormal bazıdır.

Önerme 3.2.7. *M quarter simetrik non-metrik konneksiyonlu semi-invaryant half-lightlike altmanifold olsun. Eğer M quarter simetrik non metrik konneksiyona göre minimal ise aşağıdakiler sağlanır:*

(i) $\widetilde{D}_1(FN,FN)+\widetilde{D}_1(F\xi,F\xi)=0$ *ve* $\widetilde{D}_1(FN,F\xi)+\widetilde{D}_1(F\xi,FN)=0.$

(ii) $D_1(FN,F\xi)+D_1(F\xi,FN)=-\pi(F\xi)$ *ve* $D_1(FN,FN)+D_1(F\xi,F\xi)=-\pi(FN).$

(iii) $\widetilde{D}_2(FN,F\xi)=\widetilde{D}_2(F\xi,FN)=D_2(FN,F\xi)=0.$

(iv) $\widetilde{D}_2(FN,FN)+\widetilde{D}_2(F\xi,F\xi)=D_2(FN,FN)+D_2(F\xi,F\xi)=0.$

(v) $D_1(Fu,Fu)=0$ *ve* $D_2(Fu,Fu)=-\pi(Fu).$

(vi) $\varepsilon_1(\xi)=0.$

İspat. $\{e_1,e_2,...,e_{n-4},E_1,E_2,Fu\}$, $s(TM)$ nin quasi ortonormal bazı olsun, burada

$$E_1=\frac{FN+F\xi}{2}, \quad E_2=\frac{FN-F\xi}{2},$$

ve $\{e_1,e_2,...,e_{n-4}\}$, L_0 ın ortonormal bazıdır. Bu durumda

$$\widetilde{D}_1(E_1,E_1)=\widetilde{D}_1(FN,FN)+\widetilde{D}_1(F\xi,F\xi)+\widetilde{D}_1(FN,F\xi)+\widetilde{D}_1(F\xi,FN)=0$$

ve

$$\widetilde{D}_1(E_2,E_2)=\widetilde{D}_1(FN,FN)+\widetilde{D}_1(F\xi,F\xi)-\widetilde{D}_1(FN,F\xi)-\widetilde{D}_1(F\xi,FN)=0$$

olur ki böylece (i) elde edilmiş olur. (3.2.4) ve (i) den

$$D_1(FN,F\xi)+D_1(F\xi,FN)+\pi(F\xi)=0,$$

$$D_1(FN,FN)+D_1(F\xi,F\xi)+\pi(FN)=0,$$

bulunur ve bu ise (ii) dir.

(i) ve (ii) deki yöntemler uygulanarak (iv) elde edilir. Yukarıdaki ifadelerden $\widetilde{D}_2(FN,F\xi)+\widetilde{D}_2(F\xi,FN)=0$ olduğunu biliyoruz. Üstelik

$$\widetilde{D}_2(F\xi,FN)=D_2(F\xi,FN)+\pi(FN)w_2(F\xi)=D_2(F\xi,FN),$$

$$\widetilde{D}_2(FN,F\xi)=D_2(FN,F\xi)+\pi(F\xi)w_2(FN)=D_2(FN,F\xi),$$

olduğundan ve D_2 nin simetrikliğinden (iii) elde edilir. Ayrıca

$$\widetilde{D}_1(Fu,Fu)=D_1(Fu,Fu)+\pi(Fu)w_1(Fu)=D_1(Fu,Fu)=0,$$

ve

$$\widetilde{D}_2(Fu,Fu)=D_2(Fu,Fu)+\pi(Fu)w_2(Fu)=0,$$

ifadelerinden (v) elde edilir. (3.2.14) den

$$\widetilde{\varepsilon}_1(\xi)=\varepsilon_1(\xi)+\pi(u)w_1(\xi)=0,$$

olduğu için (vi) bulunur ve ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.2.9. M, $\widetilde{M}$ nin Lev,-Civita konneksiyonuna göre minimal semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda L_4 distribüsyonu quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre minimaldir.

İspat. (3.2.14) den

$$\widetilde{\varepsilon}_1(\xi)=\varepsilon_1(\xi)+\pi(u)w_1(\xi)=0,$$

dır. Ayrıca (3.2.4) den

$$\widetilde{D}_1(e_i,e_i)=D_1(e_i,e_i)+\pi(e_i)w_1(e_i)$$

dır.

$\widetilde{D}_1(e_i,e_i)=0$ olması için e_i de L_2 bileşeni olmamalıdır.

Benzer biçimde (3.2.5) dan $\widetilde{D}_2(e_i,e_i)=D_2(e_i,e_i)+\pi(e_i)w_2(e_i)$ olduğu için $\widetilde{D}_2(e_i,e_i)=0$ ifadesinin sağlanması için e_i de L_3 bileşeni olmamalıdır.

Bu yüzden L_4 distribüsyonu üzerinde quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre minimallik şartı sağlanır ve ispat tamamlanır. □

Tanım 3.2.2. Eğer $\xi \in \Gamma(RadTM)$, $X \in \Gamma(TM)$ için $\widetilde{\nabla}_X \xi \in \Gamma(TM)$ ise M lightlike altmanifolda irrasyonel denir.

Half-lightlike altmanifold irrasyonel ise aşağıdaki sağlanır.

$$D_2(X,\xi) = \varepsilon_1(X) = 0, \tag{3.2.31}$$

Bu durumda

$$\widetilde{D}_X \xi = \widetilde{\nabla}_X \xi + \pi(\xi) FX, \tag{3.2.32}$$

olduğundan aşağıdaki önerme verilir.

Önerme 3.2.8. *M semi-invaryant half-lightlike altmanifold olsun. M, $\widetilde{\nabla}$ konneksiyonuna göre irrasyonel olsun. Bu durumda L_4 distribüsyonu $\widetilde{D}$ konneksiyonuna göre L_4-irrasyoneldir.*

İspat. (3.2.32) den $X \in \Gamma(L_4)$ için $\widetilde{D}_X \xi \in \Gamma(TM)$ olacağından ispat tamamlanır. □

3.2.1 Gauss-Codazzi Denklemleri

$\widetilde{R}^D$ ve R^D sırasıyla $\widetilde{D}$ ve $\widetilde{D}$ konneksiyonlarına göre eğrilik tensörleri olsunlar. Bunlar arasındaki ilişkiyi bulalım. $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}_X \widetilde{D}_Y Z &= \widetilde{D}_X (D_Y Z + \widetilde{D}_1(Y,Z)N + \widetilde{D}_2(Y,Z)u) \\
&= D_X D_Y Z + +\widetilde{D}_1(X, D_Y Z)N + \widetilde{D}_2(X, D_Y Z)u + X\widetilde{D}_1(Y,Z)N \\
&\quad + \widetilde{D}_1(Y,Z)\widetilde{D}_X N + X\widetilde{D}_2(Y,Z)u + \widetilde{D}_2(Y,Z)\widetilde{D}_X u \\
&= D_X D_Y Z + [\widetilde{D}_1(X, D_Y Z) + X\widetilde{D}_1(Y,Z)]N + [\widetilde{D}_2(X, D_Y Z) + X\widetilde{D}_2(Y,Z)]u \\
&\quad - \widetilde{D}_1(Y,Z)\widetilde{A}_N X + \widetilde{D}_1(Y,Z)\widetilde{p}_1(X)N + \widetilde{D}_1(Y,Z)\widetilde{p}_2(X)u \\
&\quad - \widetilde{D}_2(Y,Z)\widetilde{A}_u X + \widetilde{D}_2(Y,Z)\widetilde{\varepsilon}_1(X)N + \widetilde{D}_2(Y,Z)\widetilde{\varepsilon}_2(X)u,
\end{aligned}$$

bulunur. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}_Y \widetilde{D}_X Z &= D_Y D_X Z + [\widetilde{D}_1(Y, D_X Z) + Y\widetilde{D}_1(X,Z)]N + [\widetilde{D}_2(Y, D_X Z) + Y\widetilde{D}_2(X,Z)]u \\
&\quad - \widetilde{D}_1(X,Z)\widetilde{A}_N Y + \widetilde{D}_1(X,Z)\widetilde{p}_1(Y)N + \widetilde{D}_1(X,Z)\widetilde{p}_2(Y)u \\
&\quad - \widetilde{D}_2(X,Z)\widetilde{A}_u Y + \widetilde{D}_2(X,Z)\widetilde{\varepsilon}_1(Y)N + \widetilde{D}_2(X,Z)\widetilde{\varepsilon}_2(Y)u,
\end{aligned}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\widetilde{D}_{[X,Y]}Z &= D_{[X,Y]}Z+\widetilde{D}_1([X,Y],Z)N+\widetilde{D}_2([X,Y],Z)u \\
&= D_{[X,Y]}Z+[\widetilde{D}_1(D_XY,Z)-\widetilde{D}_1(D_YX,Z)+\pi(Y)\widetilde{D}_1(fX,Z)-\pi(X)\widetilde{D}_1(fY,Z)]N \\
&\quad +[\widetilde{D}_2(D_XY,Z)-\widetilde{D}_2(D_YX,Z)+\pi(Y)\widetilde{D}_2(fX,Z)-\pi(X)\widetilde{D}_2(fY,Z)]u
\end{aligned}
$$

bulunur. Buradan ise $\widetilde{D}$ konneksiyonuna göre eğrilik tensörü

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}^D(X,Y)Z &= R^D(X,Y)Z+-\widetilde{D}_1(Y,Z)\widetilde{A}_NX-\widetilde{D}_2(Y,Z)\widetilde{A}_uX+\widetilde{D}_1(X,Z)\widetilde{A}_NY+\widetilde{D}_2(X,Z)\widetilde{A}_uY \\
&\quad +[(D_X\widetilde{D}_1)(Y,Z)-(D_Y\widetilde{D}_1)(X,Z)+\widetilde{D}_1(Y,Z)\widetilde{p}_1(X) \\
&\quad +\widetilde{D}_2(Y,Z)\widetilde{\varepsilon}_1(X)-\widetilde{D}_1(X,Z)\widetilde{p}_1(Y)-\widetilde{D}_2(X,Z)\widetilde{\varepsilon}_1(Y) \\
&\quad -\pi(Y)\widetilde{D}_1(fX,Z)+\pi(X)\widetilde{D}_1(fY,Z)]N \\
&\quad +[(D_X\widetilde{D}_2)(Y,Z)-(D_Y\widetilde{D}_2)(X,Z)+\widetilde{D}_1(Y,Z)\widetilde{p}_2(X) \\
&\quad +\widetilde{D}_2(Y,Z)\widetilde{\varepsilon}_2(X)-\widetilde{D}_1(X,Z)\widetilde{p}_2(Y)-\widetilde{D}_2(X,Z)\widetilde{\varepsilon}_2(Y) \\
&\quad -\pi(Y)\widetilde{D}_2(fX,Z)+\pi(X)\widetilde{D}_2(fY,Z)]u \qquad (3.2.33)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. (3.2.33) den aşağıdaki önerme verilir.

Önerme 3.2.9. *M, $\widetilde{M}$ nin semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. Eğer quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre M total geodezik ise*

$$\widetilde{R}^D(X,Y)Z=R^D(X,Y)Z,\ \forall X,Y,Z\in\Gamma(TM)$$

elde edilir.

Gauss-Codazzi denklemleri $X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için,

$$
\begin{aligned}
g(\widetilde{R}^D(X,Y)PZ,PW) &= g(R^D(X,Y)PZ,PW)-\widetilde{D}_1(Y,PZ)g(\widetilde{A}_NX,PW)-\widetilde{D}_2(Y,PZ)g(\widetilde{A}_uX,PW) \\
&\quad +\widetilde{D}_1(X,PZ)g(\widetilde{A}_NY,PW)+\widetilde{D}_2(X,PZ)g(\widetilde{A}_uX,PW), \qquad (3.2.34)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(\widetilde{R}^D(X,Y)PZ,\xi) &= (D_X\widetilde{D}_1)(Y,PZ)-(D_Y\widetilde{D}_1)(X,PZ)+\widetilde{D}_1(Y,PZ)\widetilde{p}_1(X) \\
&\quad +\widetilde{D}_2(Y,PZ)\widetilde{\varepsilon}_1(X)-\widetilde{D}_1(X,PZ)\widetilde{p}_1(Y)-\widetilde{D}_2(X,PZ)\widetilde{\varepsilon}_1(Y) \\
&\quad -\pi(Y)\widetilde{D}_1(fX,PZ)+\pi(X)\widetilde{D}_1(fY,PZ), \qquad (3.2.35)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(\widetilde{R}^D(X,Y)PZ,u) &= \varepsilon\{(D_X\widetilde{D}_2)(Y,PZ)-(D_Y\widetilde{D}_2)(X,PZ)+\widetilde{D}_1(Y,PZ)\widetilde{p}_2(X) \\
&\quad +\widetilde{D}_2(Y,PZ)\widetilde{\varepsilon}_2(X)-\widetilde{D}_1(X,PZ)\widetilde{p}_2(Y)-\widetilde{D}_2(X,PZ)\widetilde{\varepsilon}_2(Y) \\
&\quad -\pi(Y)\widetilde{D}_2(fX,PZ)+\pi(X)\widetilde{D}_2(fY,PZ)\}, \qquad (3.2.36)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(\widetilde{R}^D(X,Y)PZ,N) &= g(R^D(X,Y)PZ,N)-\widetilde{D}_1(Y,PZ)g(\widetilde{A}_NX,N)-\widetilde{D}_2(Y,PZ)g(\widetilde{A}_uX,N) \\
&\quad +\widetilde{D}_1(X,PZ)g(\widetilde{A}_NY,N)+\widetilde{D}_2(X,PZ)g(\widetilde{A}_uY,N), \qquad (3.2.37)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(\widetilde{R}^D(X,Y)\xi,N) &= g(R^D(X,Y)\xi,N)-\widetilde{D}_2(Y,\xi)g(\widetilde{A}_uX,N)+\widetilde{D}_2(X,\xi)g(\widetilde{A}_uY,N) \\
&\quad -\widetilde{D}_1(Y,\xi)g(\widetilde{A}_NX,N)-\widetilde{D}_1(X,\xi)g(\widetilde{A}_NY,N), \qquad (3.2.38)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(\widetilde{R}^D(X,Y)\xi,u) &= \varepsilon\{(D_X\widetilde{D}_2)(Y,\xi)-(D_Y\widetilde{D}_2)(X,\xi)+\widetilde{D}_1(Y,\xi)\widetilde{p}_2(X) \\
&\quad +\widetilde{D}_2(Y,\xi)\widetilde{\varepsilon}_2(X)-\widetilde{D}_1(X,\xi)\widetilde{p}_2(Y)-\widetilde{D}_2(X,\xi)\widetilde{\varepsilon}_2(Y) \\
&\quad -\pi(Y)\widetilde{D}_2(fX,\xi)+\pi(X)\widetilde{D}_2(fY,\xi)\}. \qquad (3.2.39)
\end{aligned}
$$

olarak bulunur. (3.2.18) ve (3.2.19) dan

$$D_XD_Y\xi = D_X(-\widetilde{A}^*_\xi Y+\widetilde{u}_1(Y)\xi) = X\widetilde{u}_1(Y)\xi+\widetilde{u}_1(Y)D_X\xi-D_X\widetilde{A}^*_\xi Y,$$

elde edilir.

$$D_XD_Y\xi = X\widetilde{u}_1(Y)\xi-\widetilde{u}_1(Y)\widetilde{A}^*_\xi X+\widetilde{u}_1(Y)\widetilde{u}_1(X)\xi-D^*_X\widetilde{A}^*_\xi Y-E^*_1(X,\widetilde{A}^*_\xi Y)\xi,$$

$$D_YD_X\xi = X\widetilde{u}_1(X)\xi-\widetilde{u}_1(X)\widetilde{A}^*_\xi Y+\widetilde{u}_1(X)\widetilde{u}_1(Y)\xi-D^*_Y\widetilde{A}^*_\xi X-E^*_1(Y,\widetilde{A}^*_\xi X)\xi,$$

ve

$$D_{[X,Y]}\xi = -\widetilde{A}^*_\xi[X,Y]+\widetilde{u}_1([X,Y])\xi,$$

bulunur ki buradan

$$
\begin{aligned}
R^D(X,Y)\xi &= 2d\widetilde{u}_1(X,Y)\xi+E^*_1(Y,\widetilde{A}^*_\xi X)\xi-E^*_1(X,\widetilde{A}^*_\xi Y)\xi+\widetilde{u}_1(X)\widetilde{A}^*_\xi Y \\
&\quad -\widetilde{u}_1(Y)\widetilde{A}^*_\xi X+D^*_Y\widetilde{A}^*_\xi X-D^*_X\widetilde{A}^*_\xi Y+\widetilde{A}^*_\xi[X,Y], \qquad (3.2.40)
\end{aligned}
$$

ifadesi elde edilir. Üstelik buradan

$$g(R^D(X,Y)\xi,N)=2d\widetilde{u}_1(X,Y)+E_1^*(Y,\widetilde{A}_\xi^*X)-E_1^*(X,\widetilde{A}_\xi^*Y), \tag{3.2.41}$$

bulunur. (3.2.18) ve (3.2.19) dan

$$\begin{aligned} R^D(X,Y)PZ &= R^*(X,Y)PZ+\{E_1^*(X,D_Y^*PZ)-E_1^*(Y,D_X^*PZ)+XE_1^*(Y,PZ) \\ &\quad -YE_1^*(X,PZ)+E_1^*(Y,PZ)\widetilde{u}_1(X)-E_1^*(X,PZ)\widetilde{u}_1(Y)-E_1^*([X,Y],PZ\}\xi \\ &\quad -E_1^*(Y,PZ)\widetilde{A}_\xi^*X+E_1^*(X,PZ)\widetilde{A}_\xi^*Y \end{aligned} \tag{3.2.42}$$

elde edilir, burada

$$R^*(X,Y)PZ=D_X^*D_Y^*PZ-D_Y^*D_X^*PZ-D_{[X,Y]}^*PZ,$$

dir. Ayrıca

$$\begin{aligned} g(R^D(X,Y)PZ,PW) &= g(R^*(X,Y)PZ,PW)-E_1^*(Y,PZ)g(\widetilde{A}_\xi^*X,PW) \\ &\quad +E_1^*(X,PZ)g(\widetilde{A}_\xi^*Y,PW), \end{aligned} \tag{3.2.43}$$

$$\begin{aligned} g(R^D(X,Y)PZ,N) &= E_1^*(X,D_Y^*PZ)-E_1^*(Y,D_X^*PZ)+XE_1^*(Y,PZ)-YE_1^*(X,PZ) \\ &\quad +E_1^*(Y,PZ)\widetilde{u}_1(X)-E_1^*(X,PZ)\widetilde{u}_1(Y)-E_1^*([X,Y],PZ) \end{aligned} \tag{3.2.44}$$

dir. Şimdi M, $\widetilde{M}$ nin $m-$ boyutlu semi-invaryant half-lightlike altmanifoldu olsun. D konneksiyonuna göre Ricci tensörünü hesaplayalım.

$$Ric^D(X,Y)=\sum_{i=1}^{m-1}\varepsilon_i g(R^D(X,E_i)Y,E_i)+g(R^D(X,\xi)Y,N),$$

olduğunu biliyoruz. (3.2.33) den

$$\begin{aligned} g(R^D(X,E_i)Y,E_i) &= g(\widetilde{R}^D(X,E_i)Y,E_i)+\widetilde{D}_1(E_i,Y)g(\widetilde{A}_NX,E_i) \\ &\quad +\widetilde{D}_2(E_i,Y)g(\widetilde{A}_uX,E_i)-\widetilde{D}_1(X,Y)g(\widetilde{A}_NE_i,E_i)-\widetilde{D}_2(X,Y)g(\widetilde{A}_uE_i,E_i), \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(R^D(X,\xi)Y,N) &= g(\widetilde{R}^D(X,\xi)Y,N)+\widetilde{D}_1(\xi,Y)g(\widetilde{A}_NX,N) \\ &\quad +\widetilde{D}_2(\xi,Y)g(\widetilde{A}_uX,N)-\widetilde{D}_1(X,Y)g(\widetilde{A}_N\xi,N)-\widetilde{D}_2(X,Y)g(\widetilde{A}_u\xi,N), \end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$
\begin{aligned}
Ric^D(X,Y) &= \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i \{ g(\widetilde{R}^D(X,E_i)Y,E_i) + \widetilde{D}_1(E_i,Y)g(\widetilde{A}_N X,E_i) \\
&+ \widetilde{D}_2(E_i,Y)g(\widetilde{A}_u X,E_i) - \widetilde{D}_1(X,Y)g(\widetilde{A}_N E_i,E_i) - \widetilde{D}_2(X,Y)g(\widetilde{A}_u E_i,E_i)\} \\
&+ g(\widetilde{R}^D(X,\xi)Y,N) + \widetilde{D}_1(\xi,Y)g(\widetilde{A}_N X,N) \\
&+ \widetilde{D}_2(\xi,Y)g(\widetilde{A}_u X,N) - \widetilde{D}_1(X,Y)g(\widetilde{A}_N \xi,N) - \widetilde{D}_2(X,Y)g(\widetilde{A}_u \xi,N)
\end{aligned} \tag{3.2.45}
$$

elde edilir.

Şimdi $\widetilde{M}$, $(m+1)-$ boyutlu semi-Riemannian çarpım manifoldu ve $\widetilde{D}$, $\widetilde{M}$ üzerindeki quarter simetrik non-metrik konneksiyon olsun. Bu konneksiyona göre $\widetilde{M}$ sabit eğrilikli alınırsa, bu durumda

$$\widetilde{R}^D(X,Y)Z = c\{g(X,Z)Y - g(Y,Z)X\}$$

olduğunu biliyoruz. O zaman

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i \widetilde{g}(\widetilde{R}^D(X,E_i)Y,E_i) &= \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i c(g(X,Y)g(E_i,E_i) - g(E_i,Y)g(X,E_i)) \\
&= c(m-2)g(X,Y)
\end{aligned}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\widetilde{g}(\widetilde{R}^D(X,\xi,Y,N) &= c(g(X,Y)g(\xi,N) - g(\xi,Y)g(X,N)) \\
&= cg(X,Y)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu durumda son iki denklemden aşağıdaki Lemma verilir.

Lemma 3.2.3. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu ve $\widetilde{M}$, $\widetilde{D}$ quarter simetrik non-metrik konneksiyonuna göre sabit eğrilikli olsun. Bu durumda L_4 distribüsyonu üzerinde*

$$
\begin{aligned}
Ric^D(X,Y) - Ric^D(Y,X) &= \sum_{i=1}^{m-1} \varepsilon_i \{ \widetilde{D}_1(E_i,Y)g(\widetilde{A}_N X,E_i) + \widetilde{D}_2(E_i,Y)g(\widetilde{A}_u X,E_i) \\
&- \widetilde{D}_1(E_i,X)g(\widetilde{A}_N Y,E_i) - \widetilde{D}_2(E_i,X)g(\widetilde{A}_u Y,E_i)\} \\
&+ \widetilde{D}_1(\xi,Y)g(\widetilde{A}_N X,N) + \widetilde{D}_2(\xi,Y)g(\widetilde{A}_u X,N) \\
&- \widetilde{D}_1(\xi,X)g(\widetilde{A}_N Y,N) - \widetilde{D}_2(\xi,X)g(\widetilde{A}_u Y,N),
\end{aligned} \tag{3.2.46}
$$

dir.

İspat. $L_4 = L_0 \perp L_1 \perp RadTM$ distribüsyonu üzerinde $\widetilde{D}_1$ ve $\widetilde{D}_2$ ikinci temel formları simetrik olduğundan (3.2.45) den ispat açıktır. $\square$

Önerme 3.2.10. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike altmanifoldu ve $\widetilde{M}$, $\widetilde{D}$ quarter simetrik non-metrik konneksiyonuna göre sabit eğrilikli olsun. Eğer M total umbilik ise bu durumda L_1 distribüsyonu üzerinde quarter simetrik non-metrik D konneksiyonunun Ricci tensörünün simetrik olması için gerek ve yeter şart*

$$E_1(X, A^*_\xi Y) = E_1(Y, A^*_\xi X),$$

olmasıdır.

İspat. $X, Y \in \Gamma(L_1)$ için öncelikle M total umbilik olduğundan

$$\widetilde{D}_1(\xi, Y) = D_1(\xi, Y) = 0,$$

ve

$$\widetilde{D}_2(\xi, Y) = D_2(\xi, Y) = 0,$$

elde edilir. Ayrıca

$$\widetilde{D}_1(E_i, X) = D_1(E_i, X) = g(A^*_\xi X, E_i),$$

olduğundan (3.2.9) dan

$$\widetilde{D}_1(E_i, X) g(\widetilde{A}_N Y, E_i) = g(\widetilde{A}_N Y, A^*_\xi X) = g(A_N Y, A^*_\xi X) = E_1(Y, A^*_\xi X), \tag{3.2.47}$$

bulunur. Benzer olarak

$$\widetilde{D}_1(E_i, Y) g(\widetilde{A}_N X, E_i) = g(\widetilde{A}_N X, A^*_\xi Y) = g(A_N X, A^*_\xi Y) = E_1(X, A^*_\xi Y), \tag{3.2.48}$$

elde edilir. Üstelik

$$\widetilde{D}_2(E_i, X) = D_2(E_i, X) = \varepsilon g(A_u X, E_i),$$

olduğu için (3.2.13) den

$$\widetilde{D}_2(E_i, X) g(\widetilde{A}_u Y, E_i) = g(\widetilde{A}_u Y, A_u X) = g(A_u Y, A_u X), \tag{3.2.49}$$

bulunur. Benzer olarak

$$\widetilde{D}_2(E_i,Y)g(\widetilde{A}_uX,E_i) = g(\widetilde{A}_uX,A_uY) = g(A_uX,A_uY), \tag{3.2.50}$$

elde edilir. (3.2.47), (3.2.48), (3.2.49) ve (3.2.50) ifadeleri (3.2.46) ta yerine yazılırsa

$$Ric^D(X,Y) - Ric^D(Y,X) = E_1(X,A^*_\xi Y) - E_1(Y,A^*_\xi X)$$

elde edilir ki ispat tamamlanmış olur. □

4. QUARTER SİMETRİK NON-METRİK KONNEKSİYONLU LİGHTLİKE ALTMANİFOLDLAR

4.1 Semi-Riemannian Çarpım manifoldunun r-lightlike altmanifoldları

Tanım 4.1.1. $(\widetilde{M},\widetilde{g},F)$ semi-Riemannian çarpım manifoldu ve M, $\widetilde{M}$ nin r-lightlike altmanifoldu olsun. Eğer aşağıdaki üç durum sağlanıyorsa M ye $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun *semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu* denir:

(i) $L_1 = FRadTM \subset s(TM)$,

(ii) $L_2 = FltrTM \subset s(TM)$,

(iii) $L_3 = Fs(TM^{\perp}) \subset s(TM)$.

Bu durumda

$$s(TM) = \{L_1 \oplus L_2\} \perp L_3 \perp L_0 \tag{4.1.1}$$

dır. Buradan aşağıdaki ayrışımları elde ederiz:

$$\begin{aligned} TM &= \{L_1 \oplus L_2\} \perp L_3 \perp L_0 \perp RadTM, & (4.1.2)\\ T\widetilde{M} &= \{L_1 \oplus L_2\} \perp L_3 \perp L_0 \perp \{RadTM \oplus ltrTM\}. & (4.1.3) \end{aligned}$$

Bu tanıma göre

$$L = L_1 \perp L_0 \perp RadTM \tag{4.1.4}$$

ve

$$L^{'} = L_2 \perp L_3 \tag{4.1.5}$$

alınırsa

$$TM = L \oplus L^{'} \tag{4.1.6}$$

elde edilir. Burada L, $F-$invaryant ve $L^{'}$ anti-invaryant distribüsyondur .

Coisotropic altmanifoldda ise $s(TM^{\perp}) = \{0\}$ olduğundan

$$s(TM) = \{L_1 \oplus L_2\} \perp L_0, \tag{4.1.7}$$

$$TM = \{L_1 \oplus L_2\} \perp L_0 \perp RadTM, \quad (4.1.8)$$

$$T\widetilde{M} = \{L_1 \oplus L_2\} \perp L_0 \perp \{RadTM \oplus ltrTM\}, \quad (4.1.9)$$

$$TM = L \oplus L_2, \quad (4.1.10)$$

ayrışımlarını elde ederiz.

Önerme 4.1.1. *$(\widetilde{M}, \widetilde{g}, F)$ semi-Riemannian çarpım manifoldu ve M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike (veya coisotropic) altmanifoldu olsun. O zaman L_0 distribüsyonu F semi-Riemannian çarpım yapısına göre invaryanttır.*

İspat. $N \in \Gamma(ltrTM)$, $\xi \in \Gamma(RadTM)$, $u \in \Gamma(s(TM^{\perp}))$ ve $X \in \Gamma(L_0)$ için

$$g(FX, N) = g(X, FN) = 0,$$

$$g(FX, \xi) = g(X, F\xi) = 0,$$

$$g(FX, u) = g(X, Fu) = 0,$$

olduğundan FX de sırasıyla $RadTM$, $ltrTM$ ve $s(TM^{\perp})$ bileşeni yoktur.

$$g(FX, FN) = g(X, N) = 0,$$

$$g(FX, F\xi) = g(X, \xi) = 0,$$

$$g(FX, Fu) = g(X, u) = 0,$$

olduğundan FX de L_1, L_2 ve L_3 distribüsyonlarına ait bileşeni yoktur. O halde L_0, F ye göre invaryanttır. □

Örnek 4.1.1. $\widetilde{M} = R^5_2 \times R^3_1$ semi-Riemann çarpım manifoldu, $\widetilde{g} = \pi^* g_1 + \sigma^* g_2$ de metrik tensör olsun. g_1 ve g_2 burada, sırasıyla, R^5_2 ve R^3_1 üzerinde standart metrik tensörler; π_* ve σ_* sırasıyla ΓR^5_2 ve ΓR^3_1 üzerinde projeksiyon olsunlar. M altmanifoldu

$$x_1 = t_1 + t_2 + 2t_3 + 2t_4 + (1 + 2\sqrt{2})t_5 - 3t_6,$$

$$x_2 = 2t_1 + 2t_2 + t_3 + (2 - \sqrt{2})t_5 + (2 - \sqrt{2})t_6,$$

$$x_3 = t_3 + t_4 + 3\sqrt{2}t_5 - 6t_6,$$

$$x_4 = t_1 + t_2 + 2t_3 + \sqrt{2}t_4 + t_5 + t_6,$$

$$x_5 = 2t_1 + 2t_2 + t_3 + t_4 + 2t_5 - \sqrt{2}t_6,$$

$$x_6 = \sqrt{2}t_1 - \sqrt{2}t_2 - \sqrt{2}t_3 - 3t_4,$$

$$x_7 = -\sqrt{2}t_3 - t_4,$$

$$x_8 = 2t_1 - 2t_2 - t_3 - 2\sqrt{2}t_4,$$

ile verilsin, burada t_i ler reel parametrelerdir.

Bu durumda $TM = Sp\{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6\}$ elde edilir, burada

$$\begin{aligned}
U_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} + 2\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_4} + 2\frac{\partial}{\partial x_5} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_6} + 2\frac{\partial}{\partial x_8}, \\
U_2 &= \frac{\partial}{\partial x_1} + 2\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_4} + 2\frac{\partial}{\partial x_5} - \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_6} - 2\frac{\partial}{\partial x_8}, \\
U_3 &= 2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + 2\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{\partial}{\partial x_5} - \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_6} - \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_7} - \frac{\partial}{\partial x_8}, \\
U_4 &= 2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{\partial}{\partial x_5} - 3\frac{\partial}{\partial x_6} - \frac{\partial}{\partial x_7} - 2\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_8}, \\
U_5 &= (1 + 2\sqrt{2})\frac{\partial}{\partial x_1} + (2 - \sqrt{2})\frac{\partial}{\partial x_2} + 3\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4} + 2\frac{\partial}{\partial x_5}, \\
U_6 &= -3\frac{\partial}{\partial x_1} + (2 - \sqrt{2})\frac{\partial}{\partial x_2} - 6\frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial x_4} - \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_5},
\end{aligned}$$

olarak verilir. Bu durumda kolayca görülür ki U_1 bir dejenere vektördür. $\xi = U_1$ olarak alınırsa $RadTM = Sp\{\xi\}$ ve $s(TM) = Sp\{U_2, U_3, U_4, U_5, U_6\}$ dır. Bu durumda

$$ltrTM = Sp\{N = 2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{\partial}{\partial x_5} + 3\frac{\partial}{\partial x_6} + \frac{\partial}{\partial x_7} + 2\sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_8}\},$$

ve

$$s(TM^{\perp}) = Sp\{u = 2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_3} + 2\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{\partial}{\partial x_5} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_6} + \sqrt{2}\frac{\partial}{\partial x_7} + \frac{\partial}{\partial x_8}\},$$

olarak elde edilir. Bu yüzden M, $\widetilde{M}$ nin bir $1-$ lightlike altmanifoldudur.

Üstelik

$$F\xi = U_2 \in \Gamma(s(TM)),\ FN = U_4 \in \Gamma(s(TM)),$$

$$Fu = U_3 \in \Gamma(s(TM)),\ FU_5 = U_5,\ FU_6 = U_6,$$

olduğundan

$$L_0 = Sp\{U_5, U_6\},\ L_1 = Sp\{U_2\},$$

$$L_2 = Sp\{U_4\},\ L_3 = Sp\{U_3\},$$

olarak yazılır. Bu durumda M, $\widetilde{M}$ nin bir semi-invaryant lightlike altmanifoldudur.

Örnek 4.1.2. $\widetilde{M} = R^5_2$ de metrik $(-,-,+,+,+)$ işaretli F çarpım yapısı ise

$$F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5) = (x_2,x_1,x_4,x_3,x_5)$$

olsun. M altmanifoldu

$$\begin{aligned}
x_1 &= 2t_1 + t_2 + t_3 - arcsint_4 \\
x_2 &= t_1 + 2t_2 + 2t_3 + arcsint_4 \\
x_3 &= -t_2 + t_3 + 2arcsint_4 \\
x_4 &= -t_1 \\
x_5 &= 2t_1 + 2t_2 + 2t_3 - \frac{1}{2}arcsint_4
\end{aligned}$$

ile verilsin, burada t_i ler reel parametrelerdir. Böylece

$$\begin{aligned}
\xi &= (2,1,0,-1,2), \\
F\xi &= (1,2,-1,0,2), \\
u_1 &= (1,2,1,0,2), \\
u_2 &= (-1,1,2,0,-\frac{1}{2}), \\
N &= (2,1,0,1,2),
\end{aligned}$$

olarak bulunur ve $RadTM = Sp\{\xi\}$ dir. Bu durumda M, $4-$ boyutlu bir coisotropik altmanifolddur. Üstelik $s(TM) = Sp\{F\xi, u_1, u_2\}$ ve lightlike transversal demet $ltrTM = Sp\{N\}$ dir. Eğer $L_0 = Sp\{u_2\}$, $L_1 = Sp\{F\xi\}$, $L_2 = Sp\{u_1\}$ denilirse M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant coisotropik altmanifoldudur.

M, $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun bir semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(TM)$ için

$$FX = fX + wX, \tag{4.1.11}$$

olarak yazılabilir, burada fX ve wX, sırasıyla, FX in teğet ve transversal kısımlarıdır. Benzer şekilde $V \in \Gamma(tr(TM))$ için

$$FV = BV + CV \tag{4.1.12}$$

şeklinde yazabiliriz, burada BV ve CV sırasıyla FV nin teğet ve transversal kısımlarıdır. Semi-invaryant tanımına göre $FtrTM \subset s(TM)$ olduğu için $C = 0$ dır.

F, M üzerinde paralel olduğundan $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X FY &= \widetilde{\nabla}_X fY + \widetilde{\nabla}_X wY \\ &= \nabla_X fY + h(X, fY) - A_{wY}X + \nabla^t_X wY \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

ve

$$\begin{aligned} F\widetilde{\nabla}_X Y &= F\nabla_X Y + Fh(X,Y) \\ &= f\nabla_X Y + w\nabla_X Y + Bh(X,Y) \end{aligned} \tag{4.1.14}$$

bulunur. (4.1.13) ve (4.1.14) teğet ve transversal bileşenlerine ayrılırsa

$$(\nabla_X f)Y = A_{wY}X + Bh(X,Y), \tag{4.1.15}$$

$$w\nabla_X Y = \nabla^t_X wY + h(X, fY) \tag{4.1.16}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(L)$ ve $Y \in \Gamma(L^{'})$ için aşağıdakiler eşdeğerdir:*
***(i)** M mixed geodeziktir.*
***(ii)** $A^*_\xi X$ ve $A_W X$ de L_1 ve L_3 bileşeni yoktur.*
***(iii)** $A_{FY}X$ te L_2 ve L_3 bileşeni yoktur.*

İspat. M nin mixed geodezik olması için gerek ve yeter şart $N \in \Gamma(ltrTM)$, $W \in \Gamma(s(TM^\perp))$, $X \in \Gamma(L)$ ve $Y \in \Gamma(L^{'})$ için $g(h(X,Y),\xi) = 0$ ve $g(h(X,Y),W) = 0$ olmasıdır.

$$g(h(X,Y),\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X Y, \xi) = -g(Y, \widetilde{\nabla}_X \xi) = -g(Y, \nabla_X \xi) = g(Y, A^*_\xi X)$$

ve

$$g(h(X,Y),W) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,W) = -g(Y,\widetilde{\nabla}_X W) = g(Y,A_W X)$$

elde edilir ve $(i) \Leftrightarrow (ii)$ ispatlnmış olur. Benzer şekilde

$$g(h(X,Y),\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X FY,F\xi) = -g(A_{FY}X,F\xi)$$

ve

$$g(h(X,Y),W) = g(\widetilde{\nabla}_X FY,FW) = -g(A_{FY}X,FW)$$

bulunacağından $(i) \Leftrightarrow (iii)$ elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Eğer M coisotropic altmanifold ise aşağıdaki teoreme sahip oluruz.

Teorem 4.1.2. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(L)$ ve $Y \in \Gamma(L_2)$ için aşağıdakile eşdeğerdir.*
(i) *M mixed geodeziktir.*
(ii) *$A^*_\xi X$ de L_1 bileşeni yoktur.*
(iii) *$h^*(X,F\xi) = 0$.*

Teorem 4.1.3. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X,Y \in \Gamma(L)$ için aşağıdakiler eşdeğerdir:*
(i) *M, $L-$ geodeziktir.*
(ii) *$A^*_\xi X \in \Gamma(L_1 \perp L_3)$ ve $g(Y,A_W X) = g(Y,D^l(X,W))$.*
(iii) *$\nabla_X FY$ de L_2 ve L_3 bileşeni yoktur.*

İspat. $N \in \Gamma(ltrTM)$, $W \in \Gamma(s(TM^\perp))$ ve $X,Y \in \Gamma(L)$ için M nin $L-$ geodezik olması için gerek ve yeter şart $g(h(X,Y),\xi) = 0$ ve $g(h(X,Y),W) = 0$ olmasıdır. Buna göre

$$g(h(X,Y),\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi) = -g(Y,\widetilde{\nabla}_X \xi) = g(Y,A^*_\xi X) \tag{4.1.17}$$

ve

$$g(h(X,Y),W) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,W) = -g(Y,\widetilde{\nabla}_X W) = g(Y,A_W X - D^l(X,W)) \tag{4.1.18}$$

elde edilir $(i) \Leftrightarrow (ii)$ ispatlanmış olur. Benzer olarak

$$g(h(X,Y),\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi) = -g(\widetilde{\nabla}_X FY, F\xi) = -g(\nabla_X FY, F\xi)) \tag{4.1.19}$$

ve

$$g(h(X,Y),W) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,W) = -g(\widetilde{\nabla}_X FY, FW) = -g(\nabla_X FY, FW)) \tag{4.1.20}$$

olarak bulunacağından $(i) \Leftrightarrow (iii)$ elde edilir

□

Teorem 4.1.4. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant coisotropic altmanifoldu olsun. Bu durumda $X,Y \in \Gamma(L)$ için aşağıdakile eşdeğerdir:*

(i) *M, $L-$ geodeziktir.*

(ii) *$A^*_\xi X$, bir $\Gamma(L_1)$ değerli operatördür.*

(iii) $\nabla^*_X F\xi \in \Gamma(L_1)$.

Teorem 4.1.5. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X,Y \in \Gamma(L^{'})$ için aşağıdakiler eşdeğerdir:*

(i) *M, $L^{'}-$ geodeziktir.*

(ii) *$A_W X$ ve $A^*_\xi X$ te L_1 ve L_3 bileşeni yoktur.*

(iii) *$A_{FY}X$ te L_2 ve L_3 bileşeni yoktur.*

İspat. $N \in \Gamma(ltrTM)$, $W \in \Gamma(s(TM^{\perp}))$ ve $X,Y \in \Gamma(L)$ için

$$g(h(X,Y),\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi) = -g(Y,\widetilde{\nabla}_X \xi) = g(Y, A^*_\xi X), \tag{4.1.21}$$

ve

$$g(h(X,Y),W) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,W) = -g(Y,\widetilde{\nabla}_X W) = g(Y, A_W X) \tag{4.1.22}$$

elde edileceğinden $(i) \Leftrightarrow (ii)$ elde edilmiş olur. Ayrıca

$$g(h(X,Y),\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X FY, F\xi) = -g(A_{FY}X, F\xi) \tag{4.1.23}$$

ve

$$g(h(X,Y),W) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,W) = g(\widetilde{\nabla}_X FY, FW) = -g(A_{FY}X, FW) \tag{4.1.24}$$

olarak bulunur. (4.1.23) ve (4.1.24) den $(i) \Leftrightarrow (iii)$ elde edildi. □

Benzer şekilde M nin coisotropic altmanifold olması durumunda aşağıdaki teoreme sahip oluruz.

Teorem 4.1.6. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda $X,Y \in \Gamma(L_2)$ için aşağıdakiler eşdeğerdir:*
(i) *M, L_2- geodeziktir.*
(ii) *$A^*_\xi X$ te L_1 bileşeni yoktur.*
(iii) *$A_{FY}X$ te L_2 bileşeni yoktur.*
(iv) *$h^*(X,F\xi) = 0$.*

İspat. $X,Y \in \Gamma(L_2)$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için

$$g(h^l(X,Y),\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi) = -g(Y,\widetilde{\nabla}_X \xi) = g(Y,A^*_\xi X) \tag{4.1.25}$$

eşde edilir. Bu durumda $g(h^l(X,Y),\xi) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $A^*_\xi X$ te L_1 bileşeni olmamasıdır. $(i) \Leftrightarrow (ii)$ elde edilmiş oldu.

$$g(h^l(X,Y),\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X FY,F\xi) = -g(A_{FY}X,F\xi) \tag{4.1.26}$$

olarak bulunur. (4.1.26) den $(i) \Leftrightarrow (iii)$ elde edildi. Bunun yanısıra

$$g(h^l(X,Y),\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X FY,F\xi) = -g(FY,\widetilde{\nabla}_X F\xi) = -g(FY,h^*(X,F\xi)) \tag{4.1.27}$$

ifadesi bulunur ve (4.1.27) den ispat tamamlanır. □

Teorem 4.1.7. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:*
(i) *L paralel distribüsyondur.*
(ii) *M, $L-$ geodeziktir.*
(iii) *$(\nabla_X f)Y = 0$, $X,Y \in \Gamma(L)$*

İspat. $N \in \Gamma(ltrTM)$, $W \in \Gamma(s(TM^\perp))$ ve $X,Y \in \Gamma(L)$ için

$$g(\nabla_X Y,F\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,F\xi) = -g(\widetilde{\nabla}_X FY,\xi) = -g(h^l(X,FY),\xi), \tag{4.1.28}$$

ve

$$g(\nabla_X Y, FW) \;=\; g(\widetilde{\nabla}_X Y, FW) = -g(\widetilde{\nabla}_X FY, W) = -g(h^s(X, FY), W), \quad (4.1.29)$$

bulunacağından (4.1.28) ve (4.1.29) den $(i) \Leftrightarrow (ii)$ elde edilmiş olur. Bunun yanısıra

$$\begin{aligned} h(X, FY) &= \widetilde{\nabla}_X FY - \nabla_X FY = F\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X FY \\ &= F\nabla_X Y + Fh(X, Y) - \nabla_X FY \\ &= f\nabla_X Y + w\nabla_X Y + Fh(X, Y) - \nabla_X fY \\ &= (\nabla_X f)Y + w\nabla_X Y + Fh(X, Y) \qquad (4.1.30) \end{aligned}$$

olarak bulunur. (4.1.30) teğet ve transversal bileşenjerine ayrılırsa

$$(\nabla_X f)Y = -Fh(X, Y)$$

bulunur ve $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ elde edilir. □

Önerme 4.1.2. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $L^{'}$ distribüsyonunun M üzerinde paralel olması için gerek ve yeter şart A_{FY} nin $\Gamma(L^{'})$ değerli bir operatör olmasıdır. olmasıdır.*

İspat. $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(L^{'})$ ve $Z \in \Gamma(L_0)$ için

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, N) &= g(\widetilde{\nabla}_X Y, N) = g(\widetilde{\nabla}_X FY, FN) = -g(A_{FY}X, FN), \qquad (4.1.31) \\ g(\nabla_X Y, FN) &= g(\widetilde{\nabla}_X FY, N) = -g(A_{FY}X, N), \qquad (4.1.32) \\ g(\nabla_X Y, Z) &= g(\widetilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\widetilde{\nabla}_X FY, FZ) = g(A_{FY}X, FZ), \qquad (4.1.33) \end{aligned}$$

elde edilir. (4.1.31), (4.1.32) ve (4.1.33) den istenen ifadeye ulaşılır.. □

Teorem 4.1.8. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(L)$ için aşağıdakiler eşdeğerdir:*
(i) *L distribüsyonu integrallenebilirdir..*
(ii) $h^l(X, FY) = h^l(Y, FX)$.
(iii) $(\nabla_X f)Y = (\nabla_Y f)X$.

İspat. $X,Y \in \Gamma(L)$ için

$$\begin{aligned} g([X,Y],F\xi) &= g(\widetilde{\nabla}_X FY - \widetilde{\nabla}_Y FX, \xi) \\ &= g(h^l(X,FY) - h^l(Y,FX), \xi), \end{aligned} \tag{4.1.34}$$

bulunur ve (4.1.34) dan $(i) \Leftrightarrow (ii)$ elde edilmiş olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} h^l(X,FY) &= h^l(Y,FX), \\ \widetilde{\nabla}_X FY - \nabla_X FY &= \widetilde{\nabla}_Y FX - \nabla_Y FX, \\ F\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X FY &= F\widetilde{\nabla}_Y X - \nabla_Y FX, \\ F\nabla_X Y + Fh(X,Y) - \nabla_X FY &= F\nabla_Y X + Fh(Y,X) - \nabla_Y FX, \\ (\nabla_X f)Y - (\nabla_Y f)X &= w(\nabla_X Y - \nabla_Y X) \\ &= w([X,Y]) \end{aligned} \tag{4.1.35}$$

olduğundan (4.1.35) teğet ve transversal bileşenlerine ayrılırsa $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ bulunur. □

Önerme 4.1.3. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda L' distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart*

$$A_{FX}Y = A_{FY}X,\ X,Y \in \Gamma(L'),$$

olmasıdır.

İspat. $X,Y \in \Gamma(L')$ için

$$\begin{aligned} g([X,Y],FN) &= g(\widetilde{\nabla}_X FY - \widetilde{\nabla}_Y FX, N),\ N \in \Gamma(ltrTM) \\ &= g(A_{FX}Y - A_{FY}X, N) \end{aligned} \tag{4.1.36}$$

bulunur. Benzer olarak

$$\begin{aligned} g([X,Y],Z) &= g(\widetilde{\nabla}_X FY - \widetilde{\nabla}_Y FX, FZ),\ Z \in \Gamma(L_0) \\ &= g(A_{FX}Y - A_{FY}X, FZ) \end{aligned} \tag{4.1.37}$$

elde edilir. (4.1.36) ve (4.1.37) dan ispat tamamlanır. □

Teorem 4.1.9. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. $X \in \Gamma(TM)$ için M nin (4.1.6) ayışımına göre lokal çarpım yapı olması için gerek ve yeter şart*

$$\nabla f = 0$$

olmasıdır.

İspat. M lokal çarpım yapı ise L ve $L^{'}$, M de total geodeziktir. $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(L)$ için $\widetilde{\nabla} F = 0$ olduğundan

$$\nabla_X FY + h(X,FY) = F\nabla_X Y + Fh(X,Y),$$
$$\nabla_X fY + h(X,fY) = f\nabla_X Y + w\nabla_X Y + Fh(X,Y),$$

bulunur. Bu eşitlik teğet ve transversal bileşenlerine ayrılırsa

$$(\nabla_X f)Y = Fh(X,Y), \tag{4.1.38}$$

elde edilir.

Eğer M nin lokal product olduğu kabul edilirse $f\nabla_X Y \in \Gamma(L)$ olduğundan (4.1.38) den $(\nabla_X f)Y = 0$ elde edilmiş olur.

$X \in \Gamma(TM)$ ve $Z \in \Gamma(L^{'})$ için $fZ = 0$ olduğundan $(\nabla_X f)Z = 0$ elde edilmiş olur.

Aksine

$$\nabla f = 0$$

olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(L)$ için $\nabla_X fY = f\nabla_X Y$ olduğundan $\nabla_X Y \in \Gamma(L)$ dir. $X \in \Gamma(TM)$ ve $Z \in \Gamma(L^{'})$ için ise $\nabla_X fZ = f\nabla_X Z$ olduğundan $f\nabla_X Z = 0$ dır ve $\nabla_X Z \in \Gamma(L^{'})$ elde edilir. böylece ispat tamamlanır. □

4.2 Quarter simetrik non-metrik konneksiyonlu Semi-Riemannian Çarpım manifoldunun r-lightlike altmanifoldları

M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu ve $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu olsun. Eğer $\widetilde{D}$ koneksiyonunu

$$\widetilde{D}_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y + \pi(Y)FX \tag{4.2.1}$$

gibi tanımlanırsa

$$
\begin{aligned}
(\widetilde{D}_X g)(Y,Z) &= Xg(Y,Z) - g(\widetilde{D}_X Y, Z) - g(Y, \widetilde{D}_X Z) \\
&= Xg(Y,Z) - g(\widetilde{\nabla}_X Y + \pi(Y)FX, Z) - g(Y, \widetilde{\nabla}_X Z + \pi(Z)FX) \\
&= -\pi(Y)g(FX,Z) - \pi(Z)g(FX,Y) \qquad (4.2.2)
\end{aligned}
$$

ve

$$\widetilde{T}(X,Y) = \pi(Y)FX - \pi(X)FY \qquad (4.2.3)$$

olarak elde edileceğinden $\widetilde{D}$ quarter simetrik non-metrik konneksiyondur.

Buna göre $\widetilde{D}$ için Gauss denklemi

$$\widetilde{D}_X Y = D_X Y + \widetilde{h}(X,Y),\ X,Y \in \Gamma(TM) \qquad (4.2.4)$$

dir ve $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y)$ olduğundan

$$D_X Y + \widetilde{h}(X,Y) = \nabla_X Y + h(X,Y) + \pi(Y)fX + \pi(Y)wX \qquad (4.2.5)$$

olarak elde edilir. O halde (4.2.5) den ise

$$D_X Y = \nabla_X Y + \pi(Y)fX, \qquad (4.2.6)$$

$$\widetilde{h}(X,Y) = h(X,Y) + \pi(Y)wX, \qquad (4.2.7)$$

sonucuna ulaşılır. Ayrıca Weingarten denklemleri $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\widetilde{D}_X N = -\widetilde{A}_N X + \widetilde{\nabla}^l_X N + \widetilde{D}^s(X,N),\ N \in \Gamma(ltrTM), \qquad (4.2.8)$$

ve

$$\widetilde{D}_X W = -\widetilde{A}_W X + \widetilde{\nabla}^s_X W + \widetilde{D}^l(X,W),\ W \in \Gamma(s(TM^\perp)) \qquad (4.2.9)$$

olur. Ayrıca (4.2.1) den

$$\widetilde{D}_X N = \widetilde{\nabla}_X N + \pi(N)FX = -A_N X + \nabla^l_X N + \pi(N)fX + \pi(N)wX$$

ve

$$\widetilde{D}_X W = \widetilde{\nabla}_X W + \pi(W)FX = -A_W X + \nabla^l_X W + \pi(W)fX + \pi(W)wX$$

olduğundan son iki denklem ile (4.2.8) ve (4.2.9) den

$$-\widetilde{A}_N X + \widetilde{\nabla}^l_X N = -A_N X + \nabla^l_X N + D^s(X,N) + \pi(N)fX + \pi(N)wX \tag{4.2.10}$$

ve

$$-\widetilde{A}_W X + \widetilde{\nabla}^l_X W = -A_W X + \nabla^s_X W + D^l(X,W) + \pi(W)fX + \pi(W)wX, \tag{4.2.11}$$

şeklinde elde edilir. Buradan

$$\widetilde{A}_N X = A_N X - \pi(N)fX, \tag{4.2.12}$$

$$\widetilde{\nabla}^l_X N = \nabla^l_X N + \pi(N)w_l X, \tag{4.2.13}$$

$$\widetilde{D}^s(X,N) = D^s(X,N) + \pi(N)w_s X, \tag{4.2.14}$$

ve

$$\widetilde{A}_W X = A_W X - \pi(W)fX, \tag{4.2.15}$$

$$\widetilde{\nabla}^s_X W = \nabla^s_X W + \pi(W)w_s X, \tag{4.2.16}$$

$$\widetilde{D}^l(X,W) = D^l(X,W) + \pi(W)w_l X, \tag{4.2.17}$$

elde edilir. Burada w_l ve w_s, sırasıyla, $ltrTM$ ve $s(TM^{\perp})$ üzerinde projeksiyonlardır.

M üzerine $\widetilde{D}$ den indirgenen D konneksiyonu için

$$D_X PY = D^*_X PY + \widetilde{h}^*(X,PY),\ X,Y \in \Gamma(TM) \tag{4.2.18}$$

ifadesine sahip oluruz, burada $D^*_X PY \in \Gamma(s(TM))$ ve $\widetilde{h}^*(X,PY) \in \Gamma(RadTM)$ dir. (4.2.6) dan

$$D_X PY = \nabla_X PY + \pi(PY)fX = \nabla^*_X PY + h^*(X,PY) + \pi(PY)fX \tag{4.2.19}$$

elde edilir. Bu durumda (4.2.18) ve (4.2.19) dan

$$D^*_X PY + \widetilde{h}^*(X,PY) = \nabla^*_X PY + h^*(X,PY) + \pi(PY)\{PfX + \sum_i^r \eta_i(fX)\xi_i\}, \tag{4.2.20}$$

elde edilir, burada $i \in \{1,...,r\}$ ve $\{\xi_1,...,\xi_r\}$, $RadTM$ nin bazıdır. Ayrıca $\eta_i(fX) = g(fX,N)$ dir. (4.2.20) ifadesi teğet ve normal bileşenlerine ayrılırsa

$$D^*_X PY = \nabla^*_X PY + \pi(PY)PfX, \tag{4.2.21}$$

$$\widetilde{h}^*(X,PY) = h^*(X,PY) + \pi(PY)\sum_i^r \eta_i(fX)\xi_i, \tag{4.2.22}$$

elde edilir. Ayrıca $X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için

$$D_X\xi = -\widetilde{A}^*_\xi X + \widetilde{\nabla}^{*t}_X \xi \tag{4.2.23}$$

olarak yazılır. (4.2.6) dan

$$D_X\xi = \nabla_X\xi + \pi(\xi)fX = -A^*_\xi X + \nabla^{*t}_X\xi + \pi(\xi)fX \tag{4.2.24}$$

olduğundan (4.2.23) den

$$-\widetilde{A}^*_\xi X + \widetilde{\nabla}^{*t}_X\xi = -A^*_\xi X + \nabla^{*t}_X\xi + \pi(\xi)\{PfX + \sum_i^r \eta_i(fX)\xi\} \tag{4.2.25}$$

bulunur. (4.2.25) den

$$\widetilde{A}^*_\xi X = A^*_\xi X - \pi(\xi)PfX, \tag{4.2.26}$$

$$\widetilde{\nabla}^{*t}_X\xi = \nabla^{*t}_X\xi + \pi(\xi)\sum_i^r \eta_i(fX)\xi, \tag{4.2.27}$$

elde edilir.

(4.2.6) dan

$$\begin{aligned}
(D_X g)(Y,Z) &= Xg(Y,Z) - g(D_XY,Z) - g(Y,D_XZ) \\
&= Xg(Y,Z) - g(\nabla_XY + \pi(Y)fX,Z) - g(Y,\nabla_XZ + \pi(Z)fX) \\
&= (\nabla_X g)(Y,Z) - \pi(Y)g(fX,Z) - \pi(Z)g(fX,Y) \\
&= g(h^l(X,Y),Z) + g(h^l(X,Z),Y) - \pi(Y)g(fX,Z) - \pi(Z)g(fX,Y),
\end{aligned} \tag{4.2.28}$$

olur ve D konneksiyonuna göre T^D torsiyon tensörü

$$T^D(X,Y) = D_XY - D_YX - [X,Y] = \pi(Y)fX - \pi(X)fY \tag{4.2.29}$$

olduğundan indirgenmiş D konneksiyonu da quarter simetrik non-metrik konneksiyondur.

(4.2.7) ve (4.2.27) den

$$\begin{aligned} g(\widetilde{h}^l(X,PY),\xi) &= g(h^l(X,PY),\xi)+\pi(Y)g(w_lX,\xi) \\ &= g(A^*_\xi X,PY)+\pi(Y)g(w_lX,\xi) \\ &= g(\widetilde{A}^*_\xi X,PY)+\pi(\xi)g(PfX,PY)+\pi(Y)g(w_lX,\xi), \end{aligned} \tag{4.2.30}$$

ve (4.2.22) den

$$\begin{aligned} g(\widetilde{h}^*(X,PY),N) &= g(h^*(X,PY),N)+\pi(PY)\eta(fX) \\ &= g(A_NX,PY)+\pi(PY)\eta(fX) \\ &= g(\widetilde{A}_NX,PY)+\pi(N)g(fX,PY)+\pi(PY)\eta(fX), \end{aligned} \tag{4.2.31}$$

bulunur. (4.2.12) ve (4.2.26) den

$$\begin{aligned} g(\widetilde{A}^*_\xi PX,PY) &= g(A^*_\xi PX,PY)-\pi(\xi)g(PfX,PY) \\ &= g(A^*_\xi PY,PX)-\pi(\xi)g(PfX,PY), \end{aligned}$$

ve

$$g(\widetilde{A}^*_\xi PY,PX) = g(A^*_\xi PY,PX)-\pi(\xi)g(PfY,PX),$$

bulunacağından bu son iki eşitlikten

$$g(\widetilde{A}^*_\xi PX,PY)-g(\widetilde{A}^*_\xi PY,PX)=\pi(\xi)g(PfY,PX)-\pi(\xi)g(PfX,PY), \tag{4.2.32}$$

elde edilir. Ayrıca (4.2.26) dan

$$\widetilde{A}^*_\xi\xi=-\pi(\xi)f\xi, \tag{4.2.33}$$

bulunur.

Lemma 4.2.1. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X\in\Gamma(L)$ ve $Y\in\Gamma(L^{'})$ için*

$$g(\widetilde{h}^l(X,Y),\xi)=g(A^*_\xi X,Y)=g(\widetilde{A}^*_\xi X,Y)+\pi(\xi)g(PfX,Y),\ \xi\in\Gamma(RadTM), \tag{4.2.34}$$

dir.

İspat. $X \in \Gamma(L)$ ve $Y \in \Gamma(L')$ için (4.2.7) dan $\widetilde{h}^l(X,Y) = h^l(X,Y) + \pi(Y)wX = h^l(X,Y)$ olduğundan (4.2.26) den

$$g(\widetilde{h}^l(X,Y),\xi) = g(h^l(X,Y),\xi) = g(A^*_\xi,Y) = g(\widetilde{A}^*_\xi,Y) + \pi(\xi)g(PfX,Y),$$

elde edilir. □

Yukarıdaki Lemma ve Teorem(4.1.1) den aşağıdaki teoreme sahip oluruz.

Teorem 4.2.1. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. $X \in \Gamma(L)$ ve $Y \in \Gamma(L')$ için aşağıdakiler eşdeğerdir:*
(i) *M mixed geodeziktir.*
(ii) *M quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre mixed geodeziktir.*
(iii) *$A^*_\xi X$ ve $A_W X$ te L_1 ve L_3 bileşeni yoktur.*
(iv) *$A_{FY}X$ te L_2 ve L_3 bileşeni yoktur.*

Teorem 4.2.2. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. $X,Y \in \Gamma(L)$ için Aşağıdakiler eşdeğerdir:*
(i) *M nin quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre $L-$ geodeziktir.*
(ii) *$A^*_\xi X \in \Gamma(L_1 \perp L_3)$ ve $g(Y,A_W X) = g(Y,D^l(X,W))$.*
(iii) *$\nabla_X FY$ de L_2 ve L_3 bileşeni yoktur.*
(iv) *M, $L-$ geodeziktir.*

İspat. $X,Y \in \Gamma(L)$ için

$$\widetilde{h}(X,Y) = h(X,Y)$$

elde edileceğinden Teorem(4.1.3) den ispat tamamlanır. □

Teorem 4.2.3. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. $X,Y \in \Gamma(L')$ için M nin quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre $L'-$ geodezik olması için gerek ve yeter şart*

$$A_{FY}X = -\pi(Y)X$$

olmasıdır.

İspat. $X,Y \in \Gamma(L^{'})$ ve $W \in \Gamma(s(TM^{\perp}))$ için

$$\begin{aligned}
g(\widetilde{h}(X,Y),W) &= g(\widetilde{D}_X Y,W) = g(\widetilde{\nabla}_X Y + \pi(Y)FX,W) \\
&= g(\widetilde{\nabla}_X FY,FW) - \pi(Y)g(X,FW) \\
&= -g(A_{FY}X,FW) - \pi(Y)g(X,FW) \\
&= -g(A_{FY}X + \pi(Y)X,FW),
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
g(\widetilde{h}(X,Y),\xi) &= g(\widetilde{D}_X Y,\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X Y + \pi(Y)FX,\xi) \\
&= g(\widetilde{\nabla}_X FY,F\xi) - \pi(Y)g(X,F\xi) \\
&= -g(A_{FY}X,F\xi) - \pi(Y)g(X,F\xi) \\
&= -g(A_{FY}X + \pi(Y)X,F\xi),
\end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Teorem 4.2.4. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. L distribüsyonunun quarter simetrik non-metrik D konneksiyonuna göre paralel olması için gerek ve yeter şart L distribüsyonunun ∇ konneksiyonuna göre paralel olmasıdır.*

İspat. $X,Y \in \Gamma(L)$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{h}(X,FY) &= h(X,FY) + \pi(FY)wX \\
&= h(X,FY)
\end{aligned}$$

olduğundan teorem(4.1.7) den ispat tamamlanır. □

Bu durumda teorem(4.1.7) den aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.2.1. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir;

(i) L distribüsyonu quarter simetrik non-metrik D konneksiyonuna göre paraleldir.

(ii) L distribüsyonu ∇ konneksiyonuna göre paraleldir.

(iii) $h(X,FY)=0,\ X,Y\in\Gamma(L)$.

(iv) $\widetilde{h}(X,FY)=0,\ X,Y\in\Gamma(L)$.

(v) $(\nabla_X f)Y=0,\ X,Y\in\Gamma(L)$.

Teorem 4.2.5. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. $X,Y\in\Gamma(L^{'})$ için $L^{'}$ distribüsyonunun quarter simetrik non-metrik konneksiyonuna göre paralel olması için gerek ve yeter şart $\widetilde{A}_{FY}X$ in $\Gamma(L^{'})$ değerli bir vektör alanı olmasıdır.*

İspat. $X,Y\in\Gamma(L^{'})$ için $fX=0$ dir. $\widetilde{A}_{FY}X=A_{FY}X-\pi(FY)fX$ olduğu için

$$\widetilde{A}_{FY}X=A_{FY}X$$

elde edilir. önerme(4.1.2) den ispat tamamlanır. □

Teorem 4.2.6. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. L distribüsyonunun quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre integrallenebilr olması için gerek ve yeter şart*

$$\widetilde{h}(X,FY)=\widetilde{h}(Y,FX),\ X,Y\in\Gamma(L),$$

olmasıdır.

İspat. $X,Y\in\Gamma(L)$ için $wX=0$ olduğu için $\widetilde{h}(X,Y)=h(X,Y)$ elde edilir. teorem(4.1.8) den ispat tamamlanır. □

Bu durumda teorem(4.1.8) den aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 4.2.7. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir:*

(i) *L distribüsyonu quarter simetrik non-metrik konneksiyonuna göre integrallenebilirdir.*

(ii) *L distribüsyonu ∇ konneksiyonuna göre integrallenebilirdir.*

(iii) $\widetilde{h}(X,FY)=\widetilde{h}(Y,FX),\ X,Y\in\Gamma(L)$.

(iv) $h(X,FY)=h(Y,FX),\ X,Y\in\Gamma(L)$.

(v) $(\nabla_X f)Y=(\nabla_Y f)X,\ X,Y\in\Gamma(L)$.

Önerme 4.2.1. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. $L^{'}$ distribüsyonunun quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre integrallenebilr olması için gerek ve yeter şart*

$$\widetilde{A}_{FY}X = \widetilde{A}_{FX}Y,\ X,Y \in \Gamma(L^{'}),$$

olmasıdır.

İspat. $X,Y \in \Gamma(L^{'})$ için $fX = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu yüzden $\widetilde{A}_{FY}X = A_{FY}X$ elde edileceğinden önerme(4.1.3) den ispat tamamlanır. □

O halde önerme(4.1.3) den aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.2.2. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir:
(i) $L^{'}$ distribüsyonu quarter simetrik non-metrik konneksiyonuna göre integrallenebilirdir.
(ii) $L^{'}$ distribüsyonu ∇ konneksiyonuna göre integrallenebilirdir.
(iii) $\widetilde{A}_{FY}X = \widetilde{A}_{FX}Y,\ X,Y \in \Gamma(L^{'})$.
(iv) $A_{FY}X = A_{FX}Y,\ X,Y \in \Gamma(L^{'})$.

Teorem 4.2.8. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian çarpım manifoldunun semi-invaryant r-lightlike altmanifoldu olsun. M nin quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre lokal çarpım yapıya sahip olması için gerek ve yeter şart*
(i) *$(D_X f)Y = \pi(fY)fX - \pi(Y)X,\ X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(L)$,*
(ii) *$(D_X f)Z = 0,\ X \in \Gamma(TM)$ ve $Z \in \Gamma(L^{'})$,*
olmasıdır.

İspat. $\widetilde{\nabla}F = 0$ olduğundan $X \in \Gamma(TM)$ *ve* $Y \in \Gamma(L)$ için

$$\begin{aligned}
\widetilde{D}_X FY - \pi(FY)FX &= F\widetilde{D}_Y X - \pi(Y)X, \\
D_X FY + \widetilde{h}(X,FY) - \pi(FY)fX - \pi(FY)wX &= fD_X Y + wD_X Y + F\widetilde{h}(X,Y) - \pi(Y)X, \\
D_X fY + \widetilde{h}(X,fY) - \pi(FY)fX - \pi(FY)wX &= fD_X Y + wD_X Y + F\widetilde{h}(X,Y) - \pi(Y)X,
\end{aligned} \tag{4.2.35}$$

elde edilir.

Kabul edelim ki M lokal çarpım yapıya sahip olsun. Bu durmda L, M de total geodeziktir. O zaman (4.2.35), L ye göre bileşenlerine ayrılırsa

$$(D_X f)Y = \pi(fY)fX - \pi(Y)X$$

elde edilir.

Tersini kabul edelim yani (i) ve (ii) sağlansın. Bu durumda $(D_X f)Y \in \Gamma(L)$, olacağından $D_X fY \in \Gamma(L)$ bulunur ve L, M de total geodeziktir.

$X \in \Gamma(TM)$ *ve* $Z \in \Gamma(L^{'})$ olsun. Bu durumda $(D_X f)Z = D_X fZ - fD_X Z$ ve $fZ = 0$ olduğundan $L^{'}$ nün M de total geodezik olması için gerek ve yeter şart $(D_X f)Z = 0$ olmasıdır. Böylece ispat tamamlanır.

□

5. QUARTER SİMETRİK NON-METRİK KONNEKSİYONLU BELİRSİZ KAEHLER MANİFOLDLARIN LİGHTLİKE ALTMANİFOLDLARI

Bu bölümde belirsiz Kaehler manifoldların lightlike altmanifoldları quarter-simetrik non-metrik konneksiyona göre incelenecektir. Belirsiz Kaehler manifoldlarda lightlike altmanifoldlar K. L. Duggal ve B. Şahin tarafından aşağıdaki şekilde sınıflandırılmıştır ve [8], [9], [10],[11] deki makalelerinde çalışılmıştır.

$(\widetilde{M},\widetilde{g},J)$ belirsiz Kaehler manifold ve M, $\widetilde{M}$ nin lightlike altmanifoldu olsun.

(i) Eğer $JRadTM = RadTM$ ve $Js(TM) = s(TM)$ ise M ye $\widetilde{M}$ nin invaryant lightlike altmanifold denir.

(ii) Eğer $JRadTM = RadTM$ ve $Js(TM) \subseteq s(TM^{\perp})$ ise M ye $\widetilde{M}$ nin screen reel altmanifold denir.

(iii) Eğer $JRadTM \subset s(TM^{\perp})$ ise M ye $\widetilde{M}$ nin screen transversal lightlike altmanifold denir.

(iv) Eğer aşağıdaki iki şart sağlanıyorsa M ye $\widetilde{M}$ nin screen Cauchy-Riemann lightlike (SCR) altmanifoldu denir.

(A) $s(TM) = L \perp L^{\perp}$, $L \cap L^{\perp} = \{0\}$

$JL = L$, $JL^{\perp} \subseteq s(TM^{\perp})$

(B) $RadTM$, J ye göre invaryanttır.

(iv) Eğer aşağıdaki iki şart sağlanıyorsa M ye $\widetilde{M}$ nin Cauchy-Riemann lightlike (CR) altmanifoldu denir.

(A) $RadTM \cap JRadTM = \{0\}$,

(B) $s(TM) = (JRadTM \oplus L^{'}) \perp L_0$,

$JL_0 = L_0$ ve $JL^{'} = L_1 \perp L_2$, burada $L_1 \subseteq s(TM^{\perp})$ ve $L_2 = ltrTM$ dir. $s(TM^{\perp}) = L_1 \perp L_1^{\perp}$ olsun.

$(\widetilde{M},J,\widetilde{g})$ bir belirsiz Kaehler manifold ve M de $\widetilde{M}$ nin bir CR-altmanifoldu olsun. Eğer $L_1^{\perp} = 0$ ise M ye $\widetilde{M}$ nin bir screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu denir.

Bu bölümde semi-invaryant lightlike altmanifoldların geometrisini inceleyeceğiz.

5.1 Belirsiz Kaehler manifoldların screen-transversal anti-holomorfik Lightlike altmanifoldları

Tanım 5.1.1. $(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ belirsiz Kaehler manifold ve M, $\widetilde{M}$ nin lightlike altmanifoldu olsun. Eğer aşağıdakiler sağlanıyorsa M ye $\widetilde{M}$ Kaehler manifoldunun *screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu* denir;
(i) $L_1 = JRadTM \subset s(TM)$,
(ii) $L_2 = JltrTM \subset s(TM)$,
(iii) $L_3 = J(s(TM^{\perp})) \subset s(TM)$.

Bu durumda M nin ekran demeti

$$s(TM) = L_3 \perp \{L_1 \oplus L_2\} \perp L_0 \tag{5.1.1}$$

olarak ifade edilebilir. Buradan aşağıdaki ayrışımları elde ederiz:

$$\begin{aligned} TM &= L_3 \perp \{L_1 \oplus L_2\} \perp L_0 \perp RadTM, & (5.1.2)\\ T\widetilde{M} &= L_3 \perp \{L_1 \oplus L_2\} \perp L_0 \perp s(TM^{\perp}) \perp \{RadTM \oplus ltrTM\}, & (5.1.3)\end{aligned}$$

Eğer

$$L = L_1 \perp L_0 \perp RadTM \qquad ve \qquad L^{'} = L_2 \perp L_3 \tag{5.1.4}$$

denilirse

$$TM = L \oplus L^{'}, \tag{5.1.5}$$

elde edilir.

Önerme 5.1.1. *$(\widetilde{M}, \widetilde{g}, J)$ belirsiz Kaehler manifold ve M, $\widetilde{M}$ Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. O zaman L_0 distribüsyonu J kompleks yapıya göre invaryant distribüsyondur.*

İspat. $X \in \Gamma(L_0)$ için

$$g(JX, N) = -g(X, JN) = 0,$$
$$g(JX, \xi) = -g(X, J\xi) = 0,$$
$$g(JX, u) = -g(X, Ju) = 0,$$

olduğundan JX de sırasıyla $RadTM$, $ltrTM$ ve $s(TM^{\perp})$ bileşeni yoktur.

$$g(JX,JN) = g(X,N) = 0,$$
$$g(JX,J\xi) = g(X,\xi) = 0,$$
$$g(JX,Ju) = g(X,u) = 0,$$

olduğundan FX de L_1, L_2 ve L_3 distribüsyonlarına ait bileşeni yoktur. O halde L_0, J ye göre invaryanttır. □

Burada L ve $L^{'}$ distribüsyonları J ye göre, sırasıyla, invaryant ve anti invaryant distribüsyonlardır.

Örnek 5.1.1. $\widetilde{M} = R_4^8$ de metrik $(-,-,+,+,-,-,+,+)$ işaretli J kompleks yapı aşağıdaki gibi olsun.

$$J(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6,x_7,x_8) = (-x_2,x_1,-x_4,x_3,-x_6,x_5,-x_8,x_7),$$

M altmanifoldu

$$\begin{aligned}
x_1 &= -\sqrt{2}t_2 + \sqrt{2}t_4 + \sqrt{2}t_5 - \sqrt{2}t_6,\\
x_2 &= \sqrt{2}t_1 - \sqrt{2}t_3 - \sqrt{2}t_4 + \sqrt{2}t_5 + 3\sqrt{2}t_6,\\
x_3 &= t_1 - t_2 + t_3 - t_5 - t_6,\\
x_4 &= t_1 + t_2 - t_3 + t_4 + t_6,\\
x_5 &= -\sqrt{2}t_2 + \sqrt{2}t_4 - \sqrt{2}t_5 - 3\sqrt{2}t_6,\\
x_6 &= \sqrt{2}t_1 + \sqrt{2}t_3 + \sqrt{2}t_4 + \sqrt{2}t_5 - \sqrt{2}t_6,\\
x_7 &= -t_1 - t_2 + t_3 + 3t_4 - 2t_5 - 5t_6,\\
x_8 &= t_1 - t_2 + t_3 + 2t_4 + 3t_5 - t_6,
\end{aligned}$$

ile verilsin, burada t_i ler reel parametrelerdir. Bu durumda

$$TM = Sp\{U_1,U_2,U_3,U_4,U_5,U_6,u_7,u_8\}$$

elde edilir, burada

$$U_1 = (0,\sqrt{2},1,1,0,\sqrt{2},-1,1),$$

$$U_2 = (-\sqrt{2}, 0, -1, 1, -\sqrt{2}, 0, -1, -1),$$

$$U_3 = (0, -\sqrt{2}, 1, -1, 0, \sqrt{2}, 1, 1),$$

$$U_4 = (\sqrt{2}, -\sqrt{2}, 0, 1, \sqrt{2}, \sqrt{2}, 3, 2),$$

$$U_5 = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -1, 0, -\sqrt{2}, \sqrt{2}, -2, 3),$$

$$U_6 = (-\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, -1, 1, -3\sqrt{2}, -\sqrt{2}, -5, -1),$$

dir. Bu durumda kolayca görülür ki U_1 bir dejenere vektördür. $\xi = U_1$ olarak alınırsa $RadTM = Sp\{\xi\}$ ve $s(TM) = Sp\{U_2, U_3, U_4, U_5, U_6\}$ dır. Bu durumda

$$ltrTM = Sp\{N = (-\sqrt{2}, 0, -1, -1, \sqrt{2}, 0, 1, -1)\}$$

ve

$$s(TM^{\perp}) = Sp\{u = (3\sqrt{2}, \sqrt{2}, 1, 1, -\sqrt{2}, 3\sqrt{2}, -1, 5)\}$$

olarak elde edilir. Bu yüzden M, $6-$ boyutlu $1-$ lightlike altmanifolddur. Üstelik

$$J\xi = U_2 \in \Gamma(s(TM)),\ JN = U_3 \in \Gamma(s(TM)),$$

$$Ju = U_6 \in \Gamma(s(TM)),\ JU_4 = U_5,$$

olduğundan $L_0 = Sp\{u_4, u_5\}$, $L_1 = Sp\{J\xi\}$, $L_2 = Sp\{JN\}$, $L_3 = Sp\{Ju\}$ olarak yazılır. Bu durumda M, $\widetilde{M}$ Kaehler manifoldunun bir semi-invaryant $1-$ lightlike altmanifoldudur.

Şimdi M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun bir semi-invaryant lightlike altmanifoldu olsun. Her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$JX = fX + wX = fX + w_l X + w_s X, \tag{5.1.6}$$

ifadesi yazılabilir. Burada fX ve wX sırasıyla FX in teğet ve normal kısmıdır. w_l ve w_s ise de sırasıyla $ltrTM$ ve $s(TM^{\perp})$ üzerinde projeksiyonlardır. $V \in \Gamma(tr(TM))$ için

$$JV = BV, \tag{5.1.7}$$

yazılır, burada JV teğettedir ve JV nin normali sıfırdır.

J, $\widetilde{M}$ üzerinde paralel olduğundan (5.1.6) ve (5.1.7) den $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X JY &= J\widetilde{\nabla}_X Y, \\ \nabla_X JY + h(X,JY) &= f\nabla_X Y + w\nabla_X Y + Bh(X,Y), \end{aligned} \tag{5.1.8}$$

elde edilir. (5.1.8) eşitliği teğet ve normal bileşenlerine ayrılırsa

$$\nabla_X JY = f\nabla_X Y + Bh(X,Y), \tag{5.1.9}$$

ve

$$h(X,JY) = w\nabla_X Y, \tag{5.1.10}$$

ifadelerine sahibiz. Benzer olarak J paralel olduğundan (5.1.6) ve (5.1.7) den $X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X JY &= \widetilde{\nabla}_X fY + \widetilde{\nabla}_X w_l Y + \widetilde{\nabla}_X w_s Y \\ &= \nabla_X fY + h^l(X,fY) + h^s(X,fY) - A_{w_l Y}X + \nabla^l_X w_l Y + D^s(X,w_l Y) \\ &\quad -A_{w_s Y}X + \nabla^s_X w_s Y + D^l(X,w_s Y), \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

ve

$$\begin{aligned} J\widetilde{\nabla}_X Y &= J\nabla_X Y + Jh(X,Y) \\ &= f\nabla_X Y + w_l\nabla_X Y + w_s\nabla_X Y + Bh(X,Y), \end{aligned} \tag{5.1.12}$$

bulunur. (5.1.11) ve (5.1.12) teğet ve transversal bileşenlerine ayrılırsa

$$(\nabla_X f)Y = A_{w_l Y}X + A_{w_s Y}X + Bh(X,Y) \tag{5.1.13}$$

$$D^s(X,w_l Y) = -\nabla^s_X w_s Y + w_s\nabla_X Y - h^s(X,fY) \tag{5.1.14}$$

$$D^l(X,w_s Y) = -\nabla^l_X w_l Y + w_l\nabla_X Y - h^l(X,fY) \tag{5.1.15}$$

elde edilir.

Lemma 5.1.1. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(L)$, $Y \in \Gamma(L^{'})$ ve $W \in \Gamma(trTM)$ için*

$$g(h(X,Y),W) = g(A_W X,Y),$$

ifadesine sahip oluruz.

İspat. $X \in \Gamma(L)$, $Y \in \Gamma(L^{'})$ ve $W \in \Gamma(trTM)$ için

$$\widetilde{g}(h(X,Y),W) = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X Y, W) = -\widetilde{g}(Y, \widetilde{\nabla}_X W) = \widetilde{g}(Y, A_W X)$$

olduğundan ispat tamamlanır. □

Teorem 5.1.1. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(L)$, $Y \in \Gamma(L^{'})$ ve $W \in \Gamma(s(TM^{\perp}))$ için M nin mixed geodezik olması için gerek ve yeter şart*

$$A^*_{\xi} X \in \Gamma(L_0 \perp L_2)$$

ve

$$A_W X \in \Gamma(L_0 \perp L_2 \perp RadTM),$$

olmasıdır.

İspat. $X \in \Gamma(L)$, $Y \in \Gamma(L^{'})$ ve $W \in \Gamma(s(TM^{\perp}))$ için M nin mixed geodezik olması için gerek ve yeter şart $g(h(X,Y),\xi) = 0$ ve $g(h(X,Y),W) = 0$ olmasıdır.

$$g(h(X,Y),\xi) = g(h^l(X,Y),\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X Y, \xi) = -g(Y, \widetilde{\nabla}_X \xi) = -g(Y, \nabla_X \xi) = g(Y, A^*_{\xi} X)$$

ve Lemma 5.1.1 den

$$g(h(X,Y),W) = g(A_W X, Y),$$

olduğundan (5.1.4) den ispat tamamlanır. □

Teorem 5.1.2. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X, Y \in \Gamma(L)$, ve $W \in \Gamma(s(TM^{\perp}))$ için M nin $L-$ geodezik olması için gerek ve yeter şart*

$$\nabla^*_X J\xi \in \Gamma(L_1 \perp L_3) \text{ ve}$$

$$g(A_W X, Y) = g(D^l(X,W),Y)$$

olmasıdır.

İspat. $X,Y \in \Gamma(L)$ ve $W \in \Gamma(s(TM^{\perp}))$ için M nin $L-$ geodezik olması için gerek ve yeter şart $g(h(X,Y),\xi)=0$ ve $g(h(X,Y),W)=0$ olmasıdır.

$$\begin{aligned} g(h^s(X,Y),W) &= g(\widetilde{\nabla}_X Y,W) = -g(Y,\widetilde{\nabla}_X W) \\ &= -g(Y,-A_W X + \nabla^s_X W + D^l(X,W)) \\ &= g(Y,A_W X) - g(D^l(X,W),Y), \end{aligned} \tag{5.1.16}$$

ve

$$\begin{aligned} g(h^l(X,Y),\xi) &= g(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi) = -g(Y,\widetilde{\nabla}_X \xi) = -g(JY,\nabla_X J\xi) \\ &= -g(JY,\nabla^*_X J\xi + h^*(X,J\xi)) \\ &= -g(JY,\nabla^*_X J\xi), \end{aligned} \tag{5.1.17}$$

bulunur. (5.1.17) ten $h^l(X,Y)=0$ olması için

$$g(JY,\nabla^*_X J\xi)=0,$$

olmalıdır. Buradan $g(JY,\nabla^*_X J\xi)=0$ ise $\nabla^*_X J\xi$ de L_2 ve L_0 bileşeni yoktur. O halde (5.1.16) ve (5.1.17) ten ispat elde edilmiş olur. □

Teorem 5.1.3. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir;*

(i) *$A_W X$ ve $A^*_\xi X$ in L_1 ve L_3 bileşeni yoktur.*

(ii) *M, $L^{'}-$ geodeziktir.*

(iii) *$A_{JY} X$ in $L^{'}$ bileşeni yoktur.*

İspat. $X,Y \in \Gamma(L^{'})$ ve $W \in \Gamma(s(TM^{\perp}))$ için,

$$\begin{aligned} g(h(X,Y),\xi) &= g(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi) = -g(Y,\widetilde{\nabla}_X \xi) \\ &= -g(Y,-A^*_\xi X + \nabla^{*\perp}_X \xi) = g(Y,A^*_\xi X). \end{aligned} \tag{5.1.18}$$

elde edilir. O halde (5.1.18) den $g(h(X,Y),\xi)=0$ olması için gerek ve yeter şart $A^*_\xi X$ te L_1 ve L_3 bileşeni olmamasıdır.

$$\begin{aligned} g(h(X,Y),W) &= g(h^s(X,Y),W) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,W) = -g(Y,\widetilde{\nabla}_X W) \\ &= -g(Y,-A_W X + \nabla^s_X W + D^l(X,W)) = g(Y,A_W X) \end{aligned} \tag{5.1.19}$$

dir. Bu durumda (5.1.19) den $g(h(X,Y),W)=0$ olması için gerek ve yeter şart $A_W X$ te L_1 ve L_3 bileşeni olmamasıdır. Böylece $(i) \Leftrightarrow (ii)$ elde edilmiş olur.

$$g(h(X,Y),W) = g(h^s(X,Y),W) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,W) = g(\widetilde{\nabla}_X JY,JW) = -g(A_{JY}X,JW), \tag{5.1.20}$$

$$g(h(X,Y),\xi) = g(h^l(X,Y),\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X JY,J\xi) = -g(A_{JY}X,JW), \tag{5.1.21}$$

olarak bulunur. (5.1.20) ve (5.1.21) den $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ elde edildi. □

Teorem 5.1.4. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:*

(i) *L paralel distribüsyondur.*

(ii) *$h(X,JY)=0$, $X,Y \in \Gamma(L)$.*

(iii) *$(\nabla_X f)Y=0$, $X,Y \in \Gamma(L)$.*

İspat. $X,Y \in \Gamma(L)$ için

$$g(\nabla_X Y,J\xi) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,J\xi) = -g(\widetilde{\nabla}_X JY,\xi) = -g(h^l(X,JY),\xi) \tag{5.1.22}$$

$$g(\nabla_X Y,Ju) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,Ju) = -g(\widetilde{\nabla}_X JY,u) = -g(h^s(X,JY),u) \tag{5.1.23}$$

elde edilir. Böylece (5.1.22) ve (5.1.23) den $(i) \Leftrightarrow (ii)$ elde edilmiş olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} h(X,JY) &= \widetilde{\nabla}_X JY - \nabla_X JY = J\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X JY \\ &= J\nabla_X Y + Jh(X,Y) - \nabla_X JY \\ &= f\nabla_X Y + w\nabla_X Y + Jh(X,Y) - \nabla_X fY \\ &= (\nabla_X f)Y + w\nabla_X Y + Jh(X,Y), \end{aligned} \tag{5.1.24}$$

olarak bulunur. (5.1.24) teğet ve transversal bileşenlerine ayrılırsa

$$(\nabla_X f)Y = Jh(X,Y)$$

bulunur ve $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ elde edilir.

□

Önerme 5.1.2. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X,Y \in \Gamma(L^{'})$ için $L^{'}$ distribüsyonunun paralel olması için gerek ve yeter şart $A_{JY}X$ in $\Gamma(L^{'})$ değerli vektör alanı olmasıdır.*

İspat. $X,Y \in \Gamma(L^{'})$ ve $Z \in \Gamma(L_0)$ için

$$g(\nabla_X Y,N) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,N) = g(\widetilde{\nabla}_X JY,JN) = -g(A_{JY}X,JN), \tag{5.1.25}$$

$$g(\nabla_X Y,JN) = g(\widetilde{\nabla}_X JY,N) = -g(A_{JY}X,N), \tag{5.1.26}$$

$$g(\nabla_X Y,Z) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,Z) = g(\widetilde{\nabla}_X JY,JZ) - g(A_{JY}X,JZ), \tag{5.1.27}$$

ifadeleri elde edilir. (5.2.18), (5.1.26) ve (5.1.27) dan ispat tamamlanır. □

Teorem 5.1.5. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:*

(i) *L distribüsyonu integrallenebilirdir.*

(ii) *$h(X,JY) = h(Y,JX)$, $X,Y \in \Gamma(L)$.*

(iii) *$(\nabla_X f)Y = (\nabla_Y f)X$, $X,Y \in \Gamma(L)$.*

İspat. $X,Y \in \Gamma(L)$ için

$$\begin{aligned} g([X,Y],J\xi) &= -g(\widetilde{\nabla}_X JY - \widetilde{\nabla}_Y JX,\xi) \\ &= g(h(Y,JX) - h(X,JY),\xi) \\ &= g(h^l(Y,JX) - h^l(X,JY),\xi), \end{aligned} \tag{5.1.28}$$

ve

$$\begin{aligned} g([X,Y],Ju) &= -g(\widetilde{\nabla}_X JY - \widetilde{\nabla}_Y JX,u) \\ &= g(h(Y,JX) - h(X,JY),u) \\ &= g(h^s(Y,JX) - h^s(X,JY),u), \end{aligned} \tag{5.1.29}$$

bulunur. Böylece (5.1.28) ve (5.1.29) den $(i) \Leftrightarrow (ii)$ elde edildi. Şimdi (ii) ve (iii) arasındaki ilşkiyi bulalım.

$$h(X,JY) = h(Y,JX)$$

$$
\begin{aligned}
\widetilde{\nabla}_X JY - \nabla_X JY &= \widetilde{\nabla}_Y JX - \nabla_Y JX \\
J\widetilde{\nabla}_X Y - \nabla_X fY &= J\widetilde{\nabla}_Y X - \nabla_Y fX \\
f\nabla_X Y + w\nabla_X Y + Jh(X,Y) - \nabla_X fY &= f\nabla_Y X + w\nabla_Y X + Jh(Y,X) - \nabla_Y fX \\
-(\nabla_X f)Y + w\nabla_X Y &= -(\nabla_Y f)X + +w\nabla_Y X, \qquad (5.1.30)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (5.1.30) teğet ve transversal bileşenlerine ayrılırsa $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ elde edilmiş olur. □

Önerme 5.1.3. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X,Y \in \Gamma(L^{'})$ için $L^{'}$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart*

$$A_{JX}Y = A_{JY}X,$$

olmasıdır.

İspat. $X,Y \in \Gamma(L^{'})$, $Z \in \Gamma(L_0)$ ve $N \in \Gamma(ltrTM)$ için

$$
\begin{aligned}
g([X,Y],JN) &= -g(\widetilde{\nabla}_X JY - \widetilde{\nabla}_Y JX, N) \\
&= g(A_{JY}X - A_{JX}Y, N), \qquad (5.1.31)
\end{aligned}
$$

bulunur. Benzer olarak

$$
\begin{aligned}
g([X,Y],Z) &= -g(\widetilde{\nabla}_X JY - \widetilde{\nabla}_Y JX, JZ) \\
&= g(A_{JY}X + A_{JX}Y, JZ) \qquad (5.1.32)
\end{aligned}
$$

elde edilir. (5.1.31) ve (5.1.32) den ispat tamamlanır. □

Teorem 5.1.6. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. $X \in \Gamma(TM)$ için M nin (5.1.5) ayrışımına göre lokal çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart $\nabla f = 0$ olmasıdır.*

İspat. M lokal çarpım yapıya sahip ise L ve $L^{'}$, M de total geodeziktir. $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(L)$ için $\widetilde{\nabla} J = 0$ olduğundan

$$\nabla_X JY + h(X,JY) = J\nabla_X Y + Jh(X,Y),$$

$$\nabla_X fY + h(X,fY) = f\nabla_X Y + w\nabla_X Y + Jh(X,Y),$$

bulunur. Bu eşitlik teğet ve transversal bileşenlerine ayrılırsa

$$(\nabla_X f)Y = Jh(X,Y) \tag{5.1.33}$$

elde edilir. Bu durumda (5.1.33) den $(\nabla_X f)Y = 0$ elde edilmiş olur.

$X \in \Gamma(TM)$ ve $Z \in \Gamma(L')$ için $fZ = 0$ olduğundan $(\nabla_X f)Z = 0$ elde edilmiş olur.

Aksine $\nabla f = 0$ olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(L)$ için $\nabla_X fY = f\nabla_X Y$ olduğundan $\nabla_X Y \in \Gamma(L)$ dir.

$X \in \Gamma(TM)$ ve $Z \in \Gamma(L')$ için ise $\nabla_X fZ = f\nabla_X Z$ olduğundan $f\nabla_X Z = 0$ dır ve $\nabla_X Z \in \Gamma(L')$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 5.1.7. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Radikal distribüsyonun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart*

(i) $h^*(\xi, J\xi') = h^*(\xi', J\xi)$ $\xi, \xi' \in \Gamma(RadTM)$,

(ii) $A^*_{\xi'}\xi = A^*_{\xi}\xi'$, $\xi, \xi' \in \Gamma(RadTM)$,

(ii) $h(\xi, J\xi') = h(\xi', J\xi)$, $\xi, \xi' \in \Gamma(RadTM)$,

olmasıdır.

İspat. $\xi, \xi' \in \Gamma(RadTM)$ için

$$\begin{aligned}
g([\xi,\xi'],JN) &= g(\nabla_\xi \xi' - \nabla_{\xi'}\xi, JN)\\
&= -g(\widetilde{\nabla}_\xi J\xi' + \widetilde{\nabla}_{\xi'}J\xi, N)\\
&= -g(\nabla_\xi J\xi' + \nabla_{\xi'}J\xi, N)\\
&= -g(h^*(\xi,J\xi') + h^*(\xi',J\xi), N),
\end{aligned} \tag{5.1.34}$$

ve

$$\begin{aligned}
g([\xi,\xi'],J\xi_1) &= g(\nabla_\xi \xi' - \nabla_{\xi'}\xi, J\xi_1)\\
&= -g(\widetilde{\nabla}_\xi J\xi' + \widetilde{\nabla}_{\xi'}J\xi, \xi_1)\\
&= -g(h(\xi,J\xi') + h(\xi',J\xi), \xi_1)\\
&= -g(h^l(\xi,J\xi') + h^l(\xi',J\xi), \xi_1),
\end{aligned} \tag{5.1.35}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\begin{aligned} g([\xi,\xi'],Ju) &= g(\nabla_{\xi}\xi' - \nabla_{\xi'}\xi, Ju) \\ &= -g(\widetilde{\nabla}_{\xi}J\xi' + \widetilde{\nabla}_{\xi'}J\xi, u) \\ &= -g(h(\xi,J\xi') + h(\xi',J\xi), u) \\ &= -g(h^s(\xi,J\xi') + h^s(\xi',J\xi), u), \end{aligned} \tag{5.1.36}$$

bulunur. Üstelik $X \in \Gamma(L_0)$ için

$$\begin{aligned} g([\xi,\xi'],X) &= g(\nabla_{\xi}\xi' - \nabla_{\xi'}\xi, X) \\ &= g(-A^*_{\xi'}\xi + A^*_{\xi}\xi', X), \end{aligned} \tag{5.1.37}$$

olduğundan (5.1.34), (5.1.35), (5.1.36) ve (5.1.37) den ispat tamamlanır. □

Teorem 5.1.8. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) *A^*_{ξ}, M üzerinde sıfırdır.*

(ii) *Radikal distribüsyon M üzerinde ∇ ya göre paraleldir.*

(iii) *$h(X,J\xi) = 0$, $h^*(X,J\xi) = 0$ ve $\nabla^*_X J\xi$ de L_0 bileşeni yoktur.*

İspat. $X,Y \in \Gamma(TM)$, $\xi,\xi_1 \in \Gamma(RadTM)$, $Z \in \Gamma(L_0)$ için $\nabla_X\xi = -A^*_{\xi}X + \nabla^{*\perp}_X\xi$ olduğundan $(i) \Leftrightarrow (ii)$ elde edilir.

$$g(\nabla_X\xi, J\xi_1) = g(\widetilde{\nabla}_X\xi, J\xi_1) = g(\widetilde{\nabla}_X J\xi, \xi_1) = g(h^l(X,J\xi), \xi_1), \tag{5.1.38}$$

$$g(\nabla_X\xi, JN) = g(\widetilde{\nabla}_X\xi, JN) = g(\widetilde{\nabla}_X J\xi, N) = g(h^*(X,J\xi), N), \tag{5.1.39}$$

$$g(\nabla_X\xi, Ju) = g(\widetilde{\nabla}_X\xi, Ju) = g(\widetilde{\nabla}_X J\xi, u) = g(h^s(X,J\xi), u), \tag{5.1.40}$$

$$g(\nabla_X\xi, Z) = g(\widetilde{\nabla}_X\xi, Z) = g(\widetilde{\nabla}_X J\xi, JZ) = g(\nabla^*_X J\xi, Z), \tag{5.1.41}$$

ifadelerine sahip oluruz. Böylece (5.1.38), (5.1.39), (5.1.40) ve (5.1.41) den $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ elde edilir. □

Teorem 5.1.9. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Aşağıdakiler denktir:*

(i) *A_N, $\Gamma(RadTM)$ değerli operatördür.*

(ii) *$s(TM)$, ∇ ya göre paraleldir.*

(iii) *$X,Y \in \Gamma(s(TM))$ için $\nabla_X JY$ nin L_1 bileşeni yoktur.*

İspat. $X,Y \in \Gamma(s(TM))$ için

$$g(\nabla_X Y,N) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,N) = -g(Y,\widetilde{\nabla}_X N) = g(Y,A_N X),$$

olduğundan $(i) \Leftrightarrow (ii)$ elde edilir. Ayrıca

$$g(\nabla_X Y,N) = g(\widetilde{\nabla}_X Y,N) = g(\widetilde{\nabla}_X JY,JN) = g(\nabla_X JY,JN)$$

bulunur. Böylece $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ elde edildi. □

Teorem 5.1.10. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda sşağıdakiler denktir:*

(i) $\nabla_X JY = \nabla_Y JX$, $X,Y \in \Gamma(s(TM))$.

(ii) *$s(TM)$ integrallenebilirdir.*

(iii) *$Y \in \Gamma(L^{'})$ için $A_{JY}X = A_{JX}Y$.*

$Y \in \Gamma(L_0)$ için $\nabla^*_X JY = \nabla^*_Y JX$.

$Y \in \Gamma(L_1)$ için $A^*_{JY}X = A^*_{JX}Y$.

İspat. $X,Y \in \Gamma(s(TM))$ için

$$g([X,Y],N) = g(\widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X,N) = g(\widetilde{\nabla}_X JY - \widetilde{\nabla}_Y JX,JN) = g(\nabla_X JY = \nabla_Y JX,JN), \tag{5.1.42}$$

elde edilir ve (5.1.42) ten $(i) \Leftrightarrow (ii)$ bulunur.

$Y \in \Gamma(L^{'})$ olsun.

$$g([X,Y],N) = g(\widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X,N) = g(\widetilde{\nabla}_X JY - \widetilde{\nabla}_Y JX,JN) = g(A_{JY}X = A_{JX}Y,JN) \tag{5.1.43}$$

bulunur. $Y \in \Gamma(L_0)$ için

$$g([X,Y],N) = g(\widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X,N) = g(\widetilde{\nabla}_X JY - \widetilde{\nabla}_Y JX,JN) = g(\nabla^*_X JY = \nabla^*_Y JX,JN), \tag{5.1.44}$$

ve $Y \in \Gamma(L_1)$ için

$$g([X,Y],N) = g(\widetilde{\nabla}_X Y - \widetilde{\nabla}_Y X, N) = g(\widetilde{\nabla}_X JY - \widetilde{\nabla}_Y JX, JN) = g(A^*_{JY} X = A^*_{JX} Y, JN), \tag{5.1.45}$$

elde edilir. Bu yüzden (5.1.43), (5.1.44) ve (5.1.45) den $(ii) \Leftrightarrow (iii)$ elde edilir. □

5.2 Quarter simetrik non-metrik konneksiyonlu screen-transversal anti-holomorfik Kaehler manifoldların Lightlike altmanifoldları

M, $\widetilde{M}$ Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu ve $\widetilde{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonu olsun. Eğer $\widetilde{D}$ koneksiyonunu

$$\widetilde{D}_X Y = \widetilde{\nabla}_X Y + \pi(Y) JX \tag{5.2.1}$$

gibi tanımlanırsa

$$\begin{aligned}(\widetilde{D}_X g)(Y,Z) &= Xg(Y,Z) - g(\widetilde{D}_X Y, Z) - g(Y, \widetilde{D}_X Z) \\ &= Xg(Y,Z) - g(\widetilde{\nabla}_X Y + \pi(Y)JX, Z) - g(Y, \widetilde{\nabla}_X Z + \pi(Z)JX) \\ &= \pi(Y)g(JX,Z) + \pi(Z)g(JX,Y),\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

ve

$$\widetilde{T}(X,Y) = \pi(Y)JX - \pi(X)JY, \tag{5.2.3}$$

bulunacağından $\widetilde{D}$, $\widetilde{M}$ üzerinde bir quarter simetrik non-metrik konneksiyondur.

Şimdi quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre indirgenmiş ifadeleri hesaplayalım. $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\widetilde{D}_X Y = D_X Y + \widetilde{h}^l(X,Y) + \widetilde{h}^s(X,Y), \tag{5.2.4}$$

olarak ifade edilir, burada $D_X Y \in \Gamma(TM)$, $\widetilde{h}^l(X,Y) \in \Gamma(ltrTM)$ ve $\widetilde{h}^s(X,Y) \in \Gamma(s(TM^\perp))$ dir. $\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h^l(X,Y) + h^s(X,Y)$ olduğundan

$$D_X Y + \widetilde{h}^l(X,Y) + \widetilde{h}^s(X,Y) = \nabla_X Y + h^l(X,Y) + h^s(X,Y) + \pi(Y)fX + \pi(Y)wX \tag{5.2.5}$$

elde edilir. O halde (5.1.6), (5.2.4) ve (5.2.5) den

$$D_X Y = \nabla_X Y + \pi(Y) f X, \tag{5.2.6}$$

$$\widetilde{h}^l(X,Y) = h^l(X,Y) + \pi(Y) w_l X, \tag{5.2.7}$$

$$\widetilde{h}^s(X,Y) = h^s(X,Y) + \pi(Y) w_s X, \tag{5.2.8}$$

elde edilir. $X, Y \in \Gamma(TM)$, $N \in \Gamma(ltrTM)$ ve $W \in \Gamma(s(TM^{\perp}))$ için

$$\widetilde{D}_X N = -\widetilde{A}_N X + \widetilde{\nabla}^l_X N + \widetilde{D}^s(X,N) \tag{5.2.9}$$

$$\widetilde{D}_X W = -\widetilde{A}_W X + \widetilde{\nabla}^s_X W + \widetilde{D}^l(X,W) \tag{5.2.10}$$

olarak yazılabilir. Buna göre

$$\widetilde{D}_X N = -\widetilde{\nabla}_X N + \pi(N) JX = -A_N X + \nabla^l_X N + D^s(X,N) + \pi(N) JX,$$

ve

$$\widetilde{D}_X W = \widetilde{\nabla}_X W + \pi(W) JX = -A_W X + \nabla^s_X W + D^l(X,W) + \pi(W) JX,$$

olduğundan, son iki denklem ve (5.2.9) ile (5.2.10) dan

$$-\widetilde{A}_N X + \widetilde{\nabla}^l_X N + \widetilde{D}^s(X,N) = -A_N X + \nabla^l_X N + D^s(X,N) + \pi(N) JX, \tag{5.2.11}$$

ve

$$-\widetilde{A}_W X + \widetilde{\nabla}^s_X W + \widetilde{D}^l(X,W) = -A_W X + \nabla^s_X W + D^l(X,W) + \pi(W) JX, \tag{5.2.12}$$

bulunur. Buradan

$$\widetilde{A}_N X = A_N X - \pi(N) f X, \tag{5.2.13}$$

$$\widetilde{\nabla}^l_X N = \nabla^l_X N + \pi(N) w_l X, \tag{5.2.14}$$

$$\widetilde{D}^s(X,N) = D^s(X,N) + \pi(N) w_s X, \tag{5.2.15}$$

ve

$$\widetilde{A}_W X = A_W X - \pi(W) f X, \tag{5.2.16}$$

$$\widetilde{\nabla}^s_X W = \nabla^s_X W + \pi(N) w_s X, \tag{5.2.17}$$

$$\widetilde{D}^l(X,N) = D^l(X,N) + \pi(N) w_l X, \tag{5.2.18}$$

elde edilir.

Şimdi de $X,Y \in \Gamma(TM)$ için D konneksiyonuna göre indirgenmiş ifadeleri hesaplayalım. Buna göre

$$D_X PY = D^*_X PY + \widetilde{h}^*(X,PY) \tag{5.2.19}$$

dır ve (5.2.6) dan

$$D_X PY = \nabla_X PY + \pi(PY)fX = \nabla^*_X PY + h^*(X,PY) + \pi(PY)fX, \tag{5.2.20}$$

bulunur. Bu durumda (5.2.19) ve (5.2.20) den

$$D^*_X PY + \widetilde{h}^*(X,PY) = \nabla^*_X PY + h^*(X,PY) + \pi(PY)\{PfX + \sum_i \eta_i(fX)\xi_i\} \tag{5.2.21}$$

elde edilir, burada $\{\xi_1,...,\xi_r\}$, $RadTM$ nin bazı ve $\eta_i(fX) = g(fX,N_i)$ dir. (5.2.21) ifadesi teğet ve transversal bileşenlerine ayrılırsa

$$D^*_X PY = \nabla^*_X PY + \pi(PY)PfX, \tag{5.2.22}$$

$$\widetilde{h}^*(X,PY) = +h^*(X,PY) + \pi(PY)\sum_i \eta_i(fX)\xi_i, \tag{5.2.23}$$

elde edilir. Ayrıca $X \in \Gamma(TM)$ ve $\xi \in \Gamma(RadTM)$ için

$$D_X \xi = -\widetilde{A}^*_\xi X + \widetilde{\nabla}^{*t}_X \xi, \tag{5.2.24}$$

olarak yazılabilir. (5.2.6) den

$$D_X \xi = \nabla_X \xi + \pi(\xi)fX = -A^*_\xi X + \nabla^{*t}_X \xi + \pi(\xi)fX, \tag{5.2.25}$$

olduğundan (5.2.24) den

$$-\widetilde{A}^*_\xi X + \widetilde{\nabla}^{*t}_X \xi = -A^*_\xi X + \nabla^{*t}_X \xi + \pi(\xi)\{PfX + \sum_i \eta_i(fX)\xi_i\} \tag{5.2.26}$$

veya (5.2.26) den

$$\widetilde{A}^*_\xi X = A^*_\xi X - \pi(\xi)PfX, \tag{5.2.27}$$

$$\widetilde{\nabla}^{*t}_X \xi = \nabla^{*t}_X \xi + \pi(\xi)\eta(fX)\xi, \tag{5.2.28}$$

olarak elde edilir.

$X,Y,Z\in\Gamma(TM)$ için (5.2.6) dan

$$\begin{aligned}(D_Xg)(Y,Z) &= Xg(Y,Z)-g(D_XY,Z)-g(Y,D_XZ)\\ &= Xg(Y,Z)-g(\nabla_XY+\pi(Y)fX,Z)-g(Y,\nabla_XZ+\pi(Z)fX)\\ &= (\nabla_Xg)(Y,Z)-\pi(Y)g(fX,Z)-\pi(Z)g(fX,Y)\\ &= g(h(X,Y),Z)+g(h(X,Z),Y)-\pi(Y)g(fX,Z)-\pi(Z)g(fX,Y),\end{aligned} \tag{5.2.29}$$

dir ve D konneksiyonuna göre T^D torsiyon tensörü

$$T^D(X,Y)=D_XY-D_YX-[X,Y]=\pi(Y)fX-\pi(X)fY, \tag{5.2.30}$$

elde edileceğinden indirgenmiş D konneksiyonu da M üzerinde quarter simetrik non-metrik konneksiyondur.

(5.2.7 ve (5.2.27) den

$$\begin{aligned}g(\widetilde{h}^l(X,PY),\xi) &= g(h^l(X,PY),\xi)+\pi(Y)g(w_lX,\xi)\\ &= g(A^*_\xi X,PY)+\pi(Y)g(w_lX,\xi)\\ &= g(\widetilde{A}^*_\xi X,PY)+\pi(\xi)g(PfX,PY)+\pi(Y)g(w_lX,\xi),\end{aligned} \tag{5.2.31}$$

ve (5.2.13) ve (5.2.23) den

$$\begin{aligned}g(\widetilde{h}^*(X,PY),N) &= g(h^*(X,PY),N)+\pi(PY)\eta(fX)\\ &= g(A_NX,PY)+\pi(PY)\eta(fX)\\ &= g(\widetilde{A}_NX,PY)+\pi(N)g(fX,PY)+\pi(PY)\eta(fX)\end{aligned} \tag{5.2.32}$$

olarak elde edilir. (5.2.27) den

$$\begin{aligned}g(\widetilde{A}^*_\xi PX,PY) &= g(A^*_\xi PX,PY)-\pi(\xi)g(fPX,PY)\\ &= g(A^*_\xi PY,PX)-\pi(\xi)g(fPX,PY),\end{aligned}$$

ve

$$g(\widetilde{A}^*_\xi PY, PX) \;=\; g(A^*_\xi PY, PX) - \pi(\xi) g(fPY, PX),$$

bulunacağından bu son iki eşitlikten

$$g(\widetilde{A}^*_\xi PX, PY) \;=\; g(\widetilde{A}^*_\xi PY, PX) - 2\pi(\xi) g(fPX, PY), \tag{5.2.33}$$

elde edilir. Ayrıca (5.2.27) den

$$\widetilde{A}^*_\xi \xi = -\pi(\xi) J\xi, \tag{5.2.34}$$

bulunur.

Lemma 5.2.1. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(L)$ ve $Y \in \Gamma(L^{'})$ için*

$$g(\widetilde{h}(X,Y), W) = g(A_W X, Y) = g(\widetilde{A}_W X, Y) + \pi(N) g(fX, Y),\; W \in \Gamma(s(TM^{\perp})) \tag{5.2.35}$$

dir.

İspat. $X \in \Gamma(L)$ ve $Y \in \Gamma(L^{'})$ için (5.2.7) ve (5.2.8) dan $\widetilde{h}(X,Y) = h(X,Y) + \pi(Y)wX$ olduğundan (5.2.16) den

$$\begin{aligned} g(\widetilde{h}(X,Y), W) &= g(h(X,Y), W) + \pi(Y) g(W, wX) = g(h(X,Y), W) = g(A_W X, Y) \\ &= g(\widetilde{A}_W X, Y) + \pi(N) g(fX, Y), \end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 5.2.2. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(L)$ ve $Y \in \Gamma(L^{'})$ için*

$$g(\widetilde{h}(X,Y), \xi) = g(A^*_\xi X, Y) = g(\widetilde{A}^*_\xi X, Y) + \pi(\xi) g(PfX, Y),\; \xi \in \Gamma(RadTM), \tag{5.2.36}$$

İspat. $X \in \Gamma(L)$ ve $Y \in \Gamma(L^{'})$ için (5.2.7) ve (5.2.8) dan $\widetilde{h}(X,Y) = h(X,Y) + \pi(Y)wX$ olduğundan (5.2.27) den

$$g(\widetilde{h}(X,Y), \xi) = g(h(X,Y), \xi) = g(A^*_\xi, Y) = g(\widetilde{A}^*_\xi, Y) + \pi(\xi) g(PfX, Y)$$

elde edilir. □

Uyarı 5.2.1. *$\widetilde{h}$, simetrik olmadığından dolayı $X \in \Gamma(L)$, $Y \in \Gamma(L^{'})$ için*

$$\widetilde{h}(X,Y) = 0$$

olduğunda $\widetilde{h}(X,Y) \neq 0$ olabilir. Dolayısıyla mixed geodeziklik için şu şekilde yeni bir tanıma ihtiyacımız var.

Tanım 5.2.1. M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun bir screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $\forall X \in \Gamma(L)$ ve $\forall Y \in \Gamma(L^{'})$ için $\widetilde{h}(X,Y) = 0$ ise M ye $L-$ mixed geodezik altmanifold denir.

Bu durumda son iki lemmadan aşağıdaki teoreme sahibiz.

Teorem 5.2.1. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler eşdeğerdir:*

(i) *M, Levi-Civita konneksiyonuna göre mixed geodeziktir.*

(ii) *M quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre $L-$ mixed geodeziktir.*

(iii) *$X \in \Gamma(L)$ ve $Y \in \Gamma(L^{'})$ için*

$g(\widetilde{A}_W X,Y) = -\pi(N) g(fX,Y)$ *ve* $g(\widetilde{A}^*_\xi,Y) = -\pi(\xi) g(PfX,Y)$.

Teorem 5.2.2. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. M nin quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre $L-$ geodezik olması için gerek ve yeter şart*

(i) *$A_W X \in \Gamma(L_1 \perp L_3)$, $W \in \Gamma(s(TM^{\perp}))$,*

(ii) *$\nabla^*_X J\xi \in \Gamma(L_1 \perp L_3)$ ve $\nabla^*_X JY \in \Gamma(L_0 \perp L_1 \perp L_3)$, $\xi \in \Gamma(RadTM)$*

olmasıdır.

İspat. $X,Y \in \Gamma(L)$ için

$$g(\widetilde{h}(X,Y),W) = g(A_W X,Y) = 0,$$

olması için $A_W X$ te L_0 ve L_2 bileşeni olmamalıdır. Böylece (i) elde edildi.

$$g(\widetilde{h}(X,Y),\xi) = g(h(X,Y),\xi) = g(h^l(X,Y),\xi) = 0,$$

elde edilir. Böylece teorem (5.1.2) nin ispatından (ii) elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Teorem 5.2.3. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. M nin quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre $L^{'}-$ geodezik olması için gerek ve yeter şart $X,Y\in\Gamma(L^{'})$ için $A_{JY}X=-\pi(Y)X$ olmasıdır.*

İspat. (5.2.4) den $X,Y\in\Gamma(L^{'})$ ve $W\in\Gamma(s(TM^{\perp}))$ için

$$\begin{aligned} g(\widetilde{h}(X,Y),W) &= g(\widetilde{D}_XY,W)=g(\widetilde{\nabla}_XY+\pi(Y)JX,W) \\ &= g(\widetilde{\nabla}_XJY,JW)-\pi(Y)g(X,JW) \\ &= -g(A_{JY}X+\pi(Y)X,JW) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} g(\widetilde{h}(X,Y),\xi) &= g(\widetilde{D}_XY,\xi)=g(\widetilde{\nabla}_XY+\pi(Y)JX,\xi) \\ &= g(\widetilde{\nabla}_XJY,J\xi)-\pi(Y)g(X,J\xi) \\ &= -g(A_{JY}X+\pi(Y)X,J\xi), \end{aligned}$$

elde edilir. Bu iki eşitlikten teorem ispatlanmış olur. □

Teorem 5.2.4. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. L distribüsyonunun quarter simetrik non-metrik D konneksiyonuna göre paralel olması için gerek ve yeter şart L distribüsyonunun ∇ konneksiyonuna göre paralel olmasıdır.*

İspat. $X,Y\in\Gamma(L)$ için L invaryant distribüsyon olduğundan $wX=0$ dır. Bu yüzden

$$\begin{aligned} \widetilde{h}(X,JY) &= h(X,JY)+\pi(JY)wX \\ &= h(X,JY) \end{aligned}$$

olarak bulunur ve teorem (5.1.4) den ispat tamamlanır. □

Bu durumda teorem (5.1.4) den aşağıdaki teorem verilir.

Teorem 5.2.5. *M, $\widetilde{M}$ Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:*

(i) L distribüsyonu quarter simetrik non-metrik D konneksiyonuna göre paraleldir.
(ii) L distribüsyonu ∇ konneksiyonuna göre paraleldir.
(iii) $h(X,JY)=0,\ X,Y\in\Gamma(L)$.
(iv) $\widetilde{h}(X,JY)=0,\ X,Y\in\Gamma(L)$.
(v) $(\nabla_X f)Y=o,\ X,Y\in\Gamma(L)$.

Sonuç 5.2.1. M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. $L^{'}$ distribüsyonunun quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre paralel olması için gerek ve yeter şart $X,Y\in\Gamma(L^{'})$ için $\widetilde{A}_{JY}X$ in $\Gamma(L^{'})$ değerli bir vektör alanı olmasıdır. olmasıdır.

İspat. $X,Y\in\Gamma(L^{'})$ için $fX=0$ olduğunu biliyoruz. Bu yüzden (5.2.13) ve (5.2.16) ten $\widetilde{A}_{JY}X=A_{JY}X$ elde edilir. O halde önerme (5.1.2) den ispat tamamlanır. □

Teorem 5.2.6. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. L distribüsyonunun quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart*

$$\widetilde{h}(X,JY)=\widetilde{h}(Y,JX),\ X,Y\in\Gamma(L),$$

olmasıdır.

İspat. $X,Y\in\Gamma(L)$ için $wX=0$ olduğu için (5.2.7) ve (5.2.8) dan $\widetilde{h}(X,Y)=h(X,Y)$ elde edilir. Teorem 5.1.5 den ispat tamamlanır. □

Bu durumda Teorem 5.1.5 den aşağıdaki teoreme sahip oluruz.

Teorem 5.2.7. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir:*
(i) L distribüsyonu quarter simetrik non-metrik konneksiyonuna göre integrallenebilirdir.
(ii) L distribüsyonu ∇ konneksiyonuna göre integrallenebilirdir.
(iii) $\widetilde{h}(X,JY)=\widetilde{h}(Y,JX),\ X,Y\in\Gamma(L)$.
(iv) $h(X,JY)=h(Y,JX),\ X,Y\in\Gamma(L)$.
(v) $(\nabla_X f)Y=(\nabla_Y f)X,\ X,Y\in\Gamma(L)$.

Önerme 5.2.1. *M, $\widetilde{M}$ belirsiz Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. $L^{'}$ distribüsyonunun quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre integrallenebilr olması için gerek ve yeter şart*

$$\widetilde{A}_{JY}X = \widetilde{A}_{JX}Y,\ X,Y \in \Gamma(L^{'}),$$

olmasıdır.

İspat. $X,Y \in \Gamma(L^{'})$ için $fX = 0$ olduğunu biliyoruz. Bu yüzden (5.2.13) ve (5.2.16) dan $\widetilde{A}_{JY}X = A_{JY}X$ elde edilir. O halde önerme(5.1.3) den ispat tamamlanır. □

Teorem 5.2.8. *M, $\widetilde{M}$ Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Aşağıdakiler eşdeğerdir:*

(i) *$L^{'}$ distribüsyonu quarter simetrik non-metrik konneksiyonuna göre integrallenebilirdir.*

(ii) *$L^{'}$ distribüsyonu ∇ konneksiyonuna göre integrallenebilirdir.*

(iii) $\widetilde{A}_{JY}X = \widetilde{A}_{JX}Y,\ X,Y \in \Gamma(L^{'})$.

(iv) $A_{JY}X = A_{JX}Y,\ X,Y \in \Gamma(L^{'})$.

Teorem 5.2.9. *M, $\widetilde{M}$ Kaehler manifoldunun screen-transversal anti-holomorfik lightlike altmanifoldu olsun. Radikal distribüsyonun quarter simetrik non-metrik konneksiyona göre integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $\xi,\xi^{'} \in \Gamma(RadTM)$ için*

(i) $\widetilde{h}^{*}(\xi,J\xi^{'}) = \widetilde{h}^{*}(J\xi,\xi^{'})$,

(ii) $\widetilde{h}^{l}(\xi,J\xi^{'}) = \widetilde{h}^{l}(J\xi,\xi^{'})$,

(iii) $\widetilde{A}^{*}_{\xi}\xi^{'} - \widetilde{A}^{*}_{\xi^{'}}\xi = -\pi(\xi)f\xi^{'} + \pi(\xi^{'})f\xi$, *olmasıdır.*

İspat. $\eta(f\xi) = 0$ olduğundan (5.2.23) den

$$\widetilde{h}^{*}(\xi,J\xi^{'}) = h^{*}(\xi,J\xi^{'}), \tag{5.2.37}$$

ve

$$\widetilde{h}^{*}(J\xi,\xi^{'}) = h^{*}(J\xi,\xi^{'}), \tag{5.2.38}$$

bulunur. $w\xi = 0$ olduğundan (5.2.7) den

$$\widetilde{h}^{l}(\xi,J\xi^{'}) = h^{l}(\xi,J\xi^{'}) \tag{5.2.39}$$

ve

$$\widetilde{h}^{l}(J\xi,\xi^{'})=h^{l}(J\xi,\xi^{'}) \tag{5.2.40}$$

bulunur. Teorem 5.1.7 den

$$\widetilde{A}^{*}_{\xi}\xi^{'}+\widetilde{A}^{*}_{\xi^{'}}\xi=A^{*}_{\xi}\xi^{'}+A^{*}_{\xi^{'}}\xi-\pi(\xi)f\xi^{'}-\pi(\xi^{'})f\xi \tag{5.2.41}$$

elde edilir. (5.2.37), (5.2.38), (5.2.39), (5.2.40), (5.2.41) ve Teorem(5.1.7) den ispat tamamlanır. □

KAYNAKLAR

[1] H. A. Hayden, Sub-spaces of a space with torsion, Proceedings of the London Mathematical Society, vol. 34, 1932, 2750.

[2] K.Yano, On semi-symmetric metric connections, Rev. Roumania Math. Pures Appl. 15, 1970 , 1579-1586.

[3] S.Golab, On semi-symmetric metric and quarter-symmetric linear connections, Tensor 29, 1975, 249-254.

[4] N, S. Agashe and M, R, Chafle, A semi symetric non-metric connection in a Riemannian manifold, Indian J. Pure Appl. Math. 23, 1992, 399-409

[5] B.B. Chaturvedi and P. N. Pandey, Semi-symetric non metric connections on a Kahler Manifold, Diferantial Geometry-Dinamical Systems, 10, 2008, 86-90

[6] M. M. Tripathi, A new connection in a Riemannian manifold, International Journal of Geo. 1, 2008, 15-24.

[7] Duggal, Krishan L. and Bejancu, A., Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1996.

[8] Duggal, K. L. and Sahin, B. Screen Cauchy Riemann lightlike submanifolds, Acta Math. Hungar., 2005, 106(1-2) 137165

[9] Duggal, K. L. and Sahin, B. Generalized Cauchy Riemann lightlike submanifolds, Acta Math. Hungar., 112(1-2), 2006, 113136.

[10] Duggal, K. L. and Sahin, B. Lightlike submanifolds of indefinite Sasakian manifolds, Int. J. Math. Math. Sci., 2007, Art ID 57585, 121.

[11] Duggal, K. L. and Sahin, B. Contact generalized CR-lightlike submanifolds of Sasakian submanifolds. Acta Math. Hungar., 122, No. 1-2, 2009, 4558.

[12] Duggal, K.L. and Jin, D.H.: Null Curves and Hypersurfaces of Semi- Riemannian manifolds, World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd., 2007.

[13] Duggal K. L., Sahin B., Differential Geometry of Lightlike Submanifolds, Birkhauser Veriag AG Basel-Boston-Berlin, 2010.

[14] F. Massamba, Killing and geodesic lightlike hypersurfaces of indefinite Sasakian manifolds, Turkish Journal of Mathematics, vol. 32, no. 3, 2008, 325347, .

[15] F. Massamba, Lightlike hypersurfaces of indefinite Sasakian manifolds with parallel symmetric bilinear forms, Differential Geometry Dynamical Systems, vol.10, 2008. 226234.

[16] F. Massamba, Screen Integrable Lightlike Hypersurfaces of Indefinite Sasakian Manifolds, Mediterr. j. math. 6 , 2009, 2746.

[17] F. Massamba, On semi-parallel lightlike hypersurfaces of indefinite Kenmotsu manifolds, J. Geom. 95, 2009, 7389.

[18] Atceken, M. and Kilic, E., Semi-Invariant Lightlike Submanifolds of a Semi- Riemannian Product Manifold, Kodai Math. J., Vol. 30, No. 3, 2007, pp. 361-378.

[19] Kilic, E. and Sahin, B., Radical Anti-Invariant Lightlike Submanifolds of a Semi-Riemannian Product Manifold, Turkish J. Math., 32, 2008, 429-449.

[20] E. Kılıç, B. Sahin and S. Keleş, Screen Semi Invariant Lightlike Submanifolds of semi-Riemannian Product Manifolds, Volume 4 No. 2, 2011, 120-135.

[21] E. Yasar, A. C. Coken and A. Yucesan, Lightlike hypersurfaces in semi-Riemannian manifold with semi-symmetric non-metric connection, Mathematica Scandinavica, vol. 102, no. 2, 2008, 253264.

[22] E. Yaşar, On Lightlike Subamanifolds in semi-Riemannian Manifold with a Ricci Quarter Symmetric Metric connection, International Electronic Journal of Geometry, Volume 4 No. 2 pp, 2011, 155-167.

[23] Yano K., Kon M. Structures on Manifolds, World Scientific Publishing Co. Pte, Ltd., 1984

[24] E. Pak, On the pseudo-Riemannian spaces, J. Korean Math. Soc. 6, 1969, 23-31.

[25] B. G. Schmidt, Conditions on a connection to be a metric connection, Communications in Mathematical Physics, vol. 29, 1973, 5559.

[26] Y. X. Liang, On semi-symmetric recurrent-metric connection, The Tensor Society, vol. 55, no. 2, 1994, 107112.

[27] U. C. De and D. Kamilya, Hypersurfaces of a Riemannian manifold with semi-symmetric non-metric connection, Journal of the Indian Institute of Science, vol. 75, no. 6, 1995, 707710.

[28] Duggal, K. L. and Bejancu, A., Lightlike submanifolds of codimension two, Math. J. Toyama Univ., 15, 1992, 5982.

[29] Duggal, K. L. Riemannian geometry of half lightlike submanifolds, Math. J. Toyama Univ., 25, 2002, 169179.

[30] Duggal, K. L. and Sahin, B. Screen conformal half-lightlike submanifolds, Int.. J. Math., Math. Sci., 68, 2004, 37373753.

[31] Erol Kılıç, Bayram Şahin, H. Bayram Karadağ, Rıfat Güneş, Coisotropic Submanifolds of a Semi-Riemannian Manifold, Turk J Math, 28, 2004 , 335-352.

[32] Sahin, B. Lightlike hypersurfaces of semi-Euclidean spaces satisfying some curvature conditions of semi-symmetric type, Turkish J. Math., 31, 2007, 139162.

[33] Sahin, B. Lightlike submanifolds of indefinite quaternion Kahler manifolds, Demonstratio Math., 40 (3), 2007, 701720.

[34] Sahin, B. Slant lightlike submanifolds of indefinite Hermitian manifolds, Balkan Journal of Geometry and Its Appl., 13(1), 2008, 107119.

[35] Sahin, B. Screen transversal lightlike submanifolds of Kahler manifolds, Chaos, Solitons and Fractals, 38, 2008, 14391448.

[36] Sahin, B. On a submersion between Reinhart lightlike manifolds and semi- Riemannian manifolds. Mediterr. J. Math., 5, 2008, No. 3, 273284.

[37] Sahin, B., Screen slant lightlike submanifolds, Int. Electronic J. Geom., vol:2, no:1, 2009, 4154.

[38] Sahin, B and Gunes, R. Geodesic CR-lightlike submanifolds. Beitrage Algebra Geom., 42, 2001, No. 2, 583594.

[39] Sahin, B. and Gunes, R., Integrability of distributions in CR-lightlike submanifolds, Tamkang J. Math., 33, 2002, No. 3, 209221.

[40] Beem, J. K. and Ehrlich, P. E. Global Lorentzian Geometry, Marcel Dekker, Inc. New York, First Edition, 1981. Second Edition (with Easley, K. L.), 1996.

[41] Dae Ho Jin, Jae Won Lee, Generic Lightlike Submanifolds of an Indefinite Cosymplectic Manifold, Mathematical Problems in Engineering, 2011, Vol. 2011.

[42] Jae Won Lee, Characteristic Lightlike Submanifolds of an Indefinite S-Manifold, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2011, Vol. 2011.

[43] Rakesh Kumar, Varun Jain, R. K. Nagaich, GCR-Lightlike Product of Indefinite Sasakian Manifolds, Advances in Mathematical Physics, 2011, Vol. 2011.

[44] Rakesh Kumar, Jasleen Kaur, R. K. Nagaich, On CR-Lightlike Product of an Indefinite Kaehler Manifold, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2011, Vol. 2011.

[45] S. M. Khursheed Haider, Mamta Thakur, Advin, Hemi-Slant Lightlike Submanifolds of Indefinite Kenmotsu Manifolds, ISRN Geometry, 2012, Vol. 2012.

[46] Varun Jain, Rakesh Kumar, R. K. Nagaich, On GCR-Lightlike Product of Indefinite Cosymplectic Manifolds, International Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 2012, Vol. 2012.

[47] D. H. Jin and J. W. Lee, Lightlike Submanifolds of a Semi-Riemannian Manifold of Quasi-Constant Curvature, Journal of Applied Mathematics, 2012, Vol. 2012.

[48] Rachna Rani, Rakesh Kumar, R. K. Nagaich, Characterization of CR-Lightlike-Warped Product of Indefinite Kaehler Manifolds, ISRN Mathematical Physics, 2012, Vol. 2012.

ÖZGEÇMİŞ

14.01.1977 yılında İstanbul' un Bakırköy ilçesinde doğdu. İlk öğrenimini İstanbul 'un Avcılar ilçesinde ve Lise eğitimini İstanbul Kabataş Erkek Lisesinde tamamladı. 1994 yılında Gazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Matematik öğretmenliği bölümünü kazandı. 1998 yılında bu bölümden mezun oldu.

1998 yılında Milli Eğitim Bakanlığıda Rize ilinde öğretmen olarak göreve başladı. Daha sonra 2002 yılında Trabzon iline ataması çıktı burada 2006 yılında K.T.Ü matematik bölümünde cebir alanında yüksek lisans eğitimini tamamladı. 2007 yılında Gaziantep iline atamsı yapıldı.

2008 yılında, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümü Geometri Anabilim Dalı'nda Doktora eğitimine başladı. 2009 yılında araştırma görevlisi olarak Hitit Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik bölümünde göreve başladı. Halen bu fakültede görevine devam etmektedir.