

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

BURGER DENKLEMİNİN ÜSTEL SONLU FARK YÖNTEMLERİ
İLE ÇÖZÜMÜ

BİLGE İNAN

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA

MART 2014

Tezin Başlığı: Burger Denkleminin Üstel Sonlu Fark Yöntemleri ile Çözümü

Tezi Hazırlayan: Bilge İNAN

Sınav Tarihi: 05.03.2014

Yukarıda adı geçen tez, Jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri (ilk isim jüri başkanı, ikinci isim tez danışmanı)

Prof. Dr. Alaattin ESEN (İnönü Üniv.) _____

Prof. Dr. A. Refik BAHADIR (İnönü Üniv.) _____

Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ (İnönü Üniv.) _____

Doç. Dr. Mustafa İNÇ (Fırat Üniv.) _____

Yrd. Doç. Dr. Sibel ÖZER (İnönü Üniv.) _____

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Mehmet ALPASLAN
Enstitü Müdürü

Sevgili Ailem'e...

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum "Burger Denkleminin Üstel Sonlu Fark Yöntemleri ile Çözümü" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Bilge İNAN

ÖZET

Doktora Tezi

BURGER DENKLEMİNİN ÜSTEL SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bilge İNAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

88+XVI sayfa

2014

Danışman: Prof. Dr. A. Refik BAHADIR

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde Burger denklemi ve üstel sonlu fark yöntemi ile ilgili literatür özeti verildi.

İkinci bölümde, Burger denkleminin lineerleştirilmesinde kullanılan Hopf-Cole dönüşümü ile yöntemlerin test edilmesinde kullanılan model problemler verildi.

Üçüncü ve dördüncü bölümler bu tezin orijinal kısmını oluşturmaktadır. Üçüncü bölümde Hopf-Cole dönüşümü ile lineerleştirilen Burger denklemi açık, kapalı ve Crank-Nicolson üstel sonlu fark yöntemleri ile çözüldü. Elde edilen nümerik çözümler analitik çözümlerle karşılaştırıldı. Ayrıca üç boyutlu grafikler çizilerek sonuçlar analiz edildi.

Dördüncü ve son bölümde ise kapalı, tamamen kapalı ve Crank-Nicolson üstel sonlu fark yöntemleri Burger denkleminin doğrudan uygulanarak nümerik çözümler

elde edildi. Elde edilen nümerik çözümlerin analitik çözümlerle karşılaştırılması tablolar halinde sunuldu.

ANAHTAR KELİMELELER: Burger Denklemi, Üstel Sonlu Fark Yöntemi, Açık Üstel Sonlu Fark Yöntemi, Kapalı Üstel Sonlu Fark Yöntemi, Tamamen Kapalı Üstel Sonlu Fark Yöntemi, Crank-Nicolson Üstel Sonlu Fark Yöntemi, Newton Yöntemi.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SOLUTION OF THE BURGERS' EQUATION WITH EXPONENTIAL FINITE
DIFFERENCE METHODS

Bilge İNAN

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

88+XVI pages

2014

Supervisor: Prof. Dr. A. Refik BAHADIR

This thesis consists of four chapters. In the first chapter, a review of the literature with the Burgers' equation and exponential finite difference method is given.

In the second chapter, Hopf-Cole transformation is used to linearize Burgers' equation and model problems are used to test the presented methods.

The third and fourth chapters of the thesis are the original parts. In the third chapter, Burgers' equation linearized by Hopf-Cole transformation is solved with explicit, implicit and Crank-Nicolson exponential finite difference methods. These solutions are compared with analytical solutions. Also, the results are analyzed by plotted three-dimensional graphs.

In the fourth chapter, solutions are obtained by implicit, fully implicit and Crank-Nicolson exponential finite-difference methods applied directly to the Burgers'

equation. The comparisons of numerical solutions with analytical solutions are presented in the tables.

KEY WORDS: Burgers' Equation, Exponential Finite Difference Method, Explicit Exponential Finite Difference Method, Implicit Exponential Finite Difference Method, Fully Implicit Exponential Finite Difference Method, Crank-Nicolson Exponential Finite Difference Method, Newtons' Method.

TEŞEKKÜR

Bu tezin planlanması ve yürütülmesinde, çalışmalarım süresince benden destek ve bilgilerini esirgemeyen tez danışmanım, çok kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. A. Refik BAHADIR' a, lisansüstü öğrenimim boyunca desteklerini gördüğüm bölüm başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŐ' e ve diğer bölüm hocalarıma, sabır ve sevgiyle her zaman yanımda olan sevgili ailem' e, ayrıca bu çalışmaya 2012/162 nolu proje ile katkıda bulunan İnönü Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkürlerimi sunarım.

İçindekiler

ÖZET	i
ABSTRACT	iii
TEŞEKKÜR	v
1 GİRİŞ	1
2 TEMEL KAVRAMLAR	4
2.1 Sonlu Fark Yaklaşımları	4
2.2 Isı Denkleminin Çözümü İçin Klasik Sonlu Fark Yöntemleri	7
2.3 Isı Denkleminin Çözümü İçin Üstel Sonlu Fark Yöntemi	8
2.4 Vektör ve Matris Normları	11
2.5 Hopf-Cole Dönüşümü	12
2.6 Model Problemler ve Analitik Çözümleri	16
2.6.1 Problem 1	16
2.6.2 Problem 2	20
2.6.3 Problem 3	21
3 LİNEERLEŞTİRİLMİŞ BURGER DENKLEMİNİN ÜSTEL SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜMÜ	22
3.1 Açık Üstel Sonlu Fark Yöntemi	22
3.1.1 Problem 1' in A-ÜSFY ile Çözümü	24
3.1.2 Problem 2' nin A-ÜSFY ile Çözümü	28
3.1.3 Problem 3' ün A-ÜSFY ile Çözümü	32
3.2 Kapalı Üstel Sonlu Fark Yöntemi	35

3.2.1	Problem 1' in K-ÜSFY ile Çözümü	36
3.2.2	Problem 2' nin K-ÜSFY ile Çözümü	40
3.2.3	Problem 3' ün K-ÜSFY ile Çözümü	45
3.3	Crank-Nicolson Üstel Sonlu Fark Yöntemi	48
3.3.1	Problem 1' in CN-ÜSFY ile Çözümü	49
3.3.2	Problem 2' nin CN-ÜSFY ile Çözümü	53
3.3.3	Problem 3' ün CN-ÜSFY ile Çözümü	57
3.3.4	Sonuç	60
4	BURGER DENKLEMİNİN KAPALI, TAMAMEN KAPALI VE CRANK-NİCOLSON ÜSTEL SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜMÜ	61
4.1	Kapalı, Tamamen Kapalı ve Crank-Nicolson Üstel Sonlu Fark Yöntemleri	61
4.1.1	Problem 1' in K-ÜSFY ile Çözümü	64
4.1.2	Problem 2' nin K-ÜSFY ile Çözümü	66
4.1.3	Problem 3' ün K-ÜSFY ile Çözümü	69
4.1.4	Problem 1' in TK-ÜSFY ile Çözümü	70
4.1.5	Problem 2' nin TK-ÜSFY ile Çözümü	73
4.1.6	Problem 3' ün TK-ÜSFY ile Çözümü	76
4.1.7	Problem 1' in CN-ÜSFY ile Çözümü	77
4.1.8	Problem 2' nin CN-ÜSFY ile Çözümü	80
4.1.9	Problem 3' ün CN-ÜSFY ile Çözümü	82
4.1.10	Sonuç	84
	KAYNAKLAR	85
	ÖZGEÇMİŞ	88

Tablo Listesi

Tablo 3.1	$\nu = 1, k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için A-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem1)	24
Tablo 3.2	$\nu = 0.1, k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için A-ÜSFY ile $t = 0.5$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	25
Tablo 3.3	$\nu = 0.01, k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için A-ÜSFY ile $t = 1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	27
Tablo 3.4	$h = 0.0125, k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	28
Tablo 3.5	$\nu = 1, k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için A-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	29
Tablo 3.6	$\nu = 0.1, k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için A-ÜSFY ile $t = 0.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	30
Tablo 3.7	$\nu = 0.01, k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için A-ÜSFY ile $t = 1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	31
Tablo 3.8	$h = 0.0125, k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	32

Tablo 3.9	$a = 0, b = 8, \nu = 0.5, k = 10^{-4}$ ve h nin farklı değerleri için A-ÜSFY ile $t = 1.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	33
Tablo 3.10	$a = 0, b = 8, \nu = 0.5, k = 10^{-4}, h = 0.025$ için belli zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	33
Tablo 3.11	$a = 0, b = 3, \nu = 0.05, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	34
Tablo 3.12	$\nu = 1, k = 10^{-6}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	37
Tablo 3.13	$\nu = 0.1, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	38
Tablo 3.14	$\nu = 0.01, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	39
Tablo 3.15	$h = 0.0125, k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	40
Tablo 3.16	$\nu = 1, k = 10^{-6}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	41
Tablo 3.17	$\nu = 0.1, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	42
Tablo 3.18	$\nu = 0.01, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	43

Tablo 3.19 $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	44
Tablo 3.20 $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 1.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	45
Tablo 3.21 $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	46
Tablo 3.22 $a = 0$, $b = 3$, $\nu = 0.05$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	46
Tablo 3.23 $\nu = 1$, $k = 10^{-6}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	49
Tablo 3.24 $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	51
Tablo 3.25 $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	52
Tablo 3.26 $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	53
Tablo 3.27 $\nu = 1$, $k = 10^{-6}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	54
Tablo 3.28 $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	55

Tablo 3.29 $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	56
Tablo 3.30 $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	57
Tablo 3.31 $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 1.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	58
Tablo 3.32 $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$, $h = 0.025$ için belli zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	58
Tablo 3.33 $a = 0$, $b = 3$, $\nu = 0.05$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	59
Tablo 4.1 $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	64
Tablo 4.2 $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	65
Tablo 4.3 $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	65
Tablo 4.4 $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	66
Tablo 4.5 $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	67

Tablo 4.6	$\nu = 0.1, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	67
Tablo 4.7	$\nu = 0.01, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	68
Tablo 4.8	$h = 0.0125, k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	68
Tablo 4.9	$a = 0, b = 8, \nu = 0.5, k = 10^{-4}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 1.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	69
Tablo 4.10	$a = 0, b = 8, \nu = 0.5, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	70
Tablo 4.11	$a = 0, b = 3, \nu = 0.05, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	70
Tablo 4.12	$\nu = 1, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için TK-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	71
Tablo 4.13	$\nu = 0.1, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için TK-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	71
Tablo 4.14	$\nu = 0.01, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için TK-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	72
Tablo 4.15	$h = 0.0125, k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda TK-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	73

Tablo 4.16 $\nu = 1, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için TK-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	74
Tablo 4.17 $\nu = 0.1, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için TK-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	74
Tablo 4.18 $\nu = 0.01, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için TK-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	75
Tablo 4.19 $h = 0.0125, k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda TK-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	75
Tablo 4.20 $a = 0, b = 8, \nu = 0.5, k = 10^{-4}$ ve h nin farklı değerleri için TK-ÜSFY ile $t = 1.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	76
Tablo 4.21 $a = 0, b = 8, \nu = 0.5, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda TK-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	76
Tablo 4.22 $a = 0, b = 3, \nu = 0.05, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda TK-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	77
Tablo 4.23 $\nu = 1, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	78
Tablo 4.24 $\nu = 0.1, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	78
Tablo 4.25 $\nu = 0.01, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	79

Tablo 4.26 $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)	79
Tablo 4.27 $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	80
Tablo 4.28 $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	81
Tablo 4.29 $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	81
Tablo 4.30 $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)	82
Tablo 4.31 $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 1.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	83
Tablo 4.32 $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	83
Tablo 4.33 $a = 0$, $b = 3$, $\nu = 0.05$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)	84

Şekil Listesi

Şekil 3.1	$\nu = 1, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)	25
Şekil 3.2	$\nu = 0.1, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)	26
Şekil 3.3	$\nu = 0.01, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)	27
Şekil 3.4	$\nu = 1, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)	29
Şekil 3.5	$\nu = 0.1, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)	30
Şekil 3.6	$\nu = 0.01, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)	31
Şekil 3.7	$a = 0, b = 1.2, \nu = 0.005, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 3)	34
Şekil 3.8	$\nu = 1, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)	37
Şekil 3.9	$\nu = 0.1, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)	38
Şekil 3.10	$\nu = 0.01, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)	39
Şekil 3.11	$\nu = 1, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)	41
Şekil 3.12	$\nu = 0.1, k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)	42

Şekil 3.13 $\nu = 0.01$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)	44
Şekil 3.14 $a = 0$, $b = 1.2$, $\nu = 0.005$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 3) . . .	47
Şekil 3.15 $\nu = 1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)	50
Şekil 3.16 $\nu = 0.1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)	51
Şekil 3.17 $\nu = 0.01$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)	52
Şekil 3.18 $\nu = 1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)	54
Şekil 3.19 $\nu = 0.1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)	55
Şekil 3.20 $\nu = 0.01$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)	56
Şekil 3.21 $a = 0$, $b = 1.2$, $\nu = 0.005$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 3) . .	59

Bölüm 1

GİRİŞ

Doğadaki olayların matematiksel modellerinin oluşturulmasında genellikle kısmi diferansiyel denklemler kullanılmaktadır. Bu açıdan bakıldığında kısmi diferansiyel denklemler bir çok bilim dalında geniş bir uygulama alanına sahiptir. Ancak non-lineerlik, karmaşık geometrik yapılar ve karmaşık sınır şartları gibi çeşitli sebeplerden dolayı kısmi diferansiyel denklemleri analitik olarak çözmek bazen mümkün olmamaktadır. Bu gibi durumlarda nümerik yöntemler yardımıyla yaklaşık çözümler aranmaktadır. Bu amaçla kullanılan nümerik yöntemler ise bilgisayar teknolojisindeki gelişmelere paralel olarak her geçen gün artmakta ve gelişmektedir. Bu yöntemler içerisinde en sık kullanılanlardan biri de sonlu fark yöntemleridir. Sonlu fark yöntemleri kolayca formüle edilebilir, kolayca iki ve üç boyutlu problemlere uygulanabilir. En sık kullanılan sonlu fark yöntemleri; açık sonlu fark yöntemi, kapalı sonlu fark yöntemi ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemidir. Bu üç yöntem klasik sonlu fark yöntemleri olarak da adlandırılırlar.

Bu çalışmaya temel teşkil eden üstel sonlu fark yöntemi ise 1985 yılında Bhattacharya tarafından literatüre kazandırılmıştır. Bhattacharya çalışmasında ısı denklemini üstel sonlu fark yöntemi ile çözmüş elde ettiği çözümü hem analitik çözümle hem de diğer sonlu fark yöntemleri ile elde edilen çözümlerle karşılaştırmıştır[1]. Daha sonra yaptığı iki çalışmada ise *arccos* fonksiyonu yardımıyla tanımlanan farklı bir sonlu fark yaklaşımını ele almıştır[2, 3]. Handschuh lineer üstel sonlu fark yaklaşımı ile Burger denkleminin çözümünü elde etmiştir[4]. Bhattacharya tarafından yapılan başka bir çalışmada ise Burger denklemi için üstel sonlu fark yaklaşımı verilmiş, kutupsal koordinatlarda iki boyutlu Laplace denklemi ve ısı denklemi için üstel sonlu fark yöntemi geliştirilmiştir[5]. Son yıllarda üstel sonlu fark yöntemi üzerine yapılan çalışmalardan birisi ise Bahadır tarafından yapılan çalışmadır. Bu çalışmada KDV denkleminin üstel sonlu fark yöntemi ile çözümü yapılmış, elde edilen sonuçlar analitik çözümlerle karşılaştırılmıştır[6].

Diğer taraftan bir boyutlu Burger denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$$

biçiminde non-linear bir kısmi diferansiyel denklemdir. Burada $\nu > 0$ viskozite (kinematik akışkanlık parametresi) dir. Burger denklemi olarak bilinen bu denklem ilk olarak 1915 yılında Beteman' ın makalesinde tanımlanmıştır[7]. Ancak Beteman' ın modellediği bu denklemin tanınması Burgers' in çalışmaları ile olmuştur. Burgers, türbülans üzerine yaptığı çalışmalarda bu denklemi model olarak kullanmıştır[8, 9]. Burger denklemi, türbülans modellemesi ile ortaya çıkmış olmasına rağmen şok dalgalarının yayılması, trafik akışı ve bir kanaldaki türbülans akışı gibi çeşitli fiziksel olayların matematiksel modellerinin oluşturulmasında da kullanılmıştır[10]. Burger denklemi hem fiziksel olayların modellenmesi hem de nümerik yöntemlerin test edilmesi için elverişli olduğundan, oldukça önemli bir denklemdir[11].

Burger denklemini nümerik olarak çözmek için literatürde pek çok teknik ve yöntem mevcuttur. Ali vd. 1992 yılında yaptıkları çalışmada Burger denklemini çözmek için B-spline sonlu eleman yöntemini kullanmışlardır[12]. Kutluay vd. Burger denklemine açık ve tam-açık sonlu fark yaklaşımlarını uygulayarak denklemin çözümüne ulaşmışlardır[13]. Bahadır, Burger denkleminin nümerik çözümünü tamamen kapalı sonlu fark yöntemi ile bulmuştur[14]. Kutluay ve Esen, kuadratik B-spline sonlu elemanlar ile lumped Galerkin yöntemini kullanarak denklemin çözümünü elde etmişlerdir[15]. Kutluay vd. en küçük kareler kuadratik B-spline sonlu eleman yöntemiyle Burger denkleminin çözümünü bulmuşlardır[16]. Aksan ve Özdeş, Burger denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için varyasyonel yöntemi kullanmışlardır[17]. Bahadır ve Sağlam, Burger denklemine mixed sonlu fark yöntemi ve sınır eleman yöntemini uygulamışlardır[18]. Gülsu ve Öziş, Burger denkleminin çözümünü Taylor serisini kullandıkları klasik açık sonlu fark yöntemi ile bulmuşlardır[19]. Gülsu başka bir çalışmada klasik açık sonlu fark yöntemini Padé yaklaşımı ile birlikte kullanarak Burger denklemini çözmüştür[11]. Dağ vd. Burger denklemine B-spline Galerkin yöntemini uygulamışlardır[20]. Kadalbajoo ve Awasthi, Hopf-Cole dönüşümü ile lineerleştirdikleri Burger denklemini

Crank-Nicolson sonlu fark yöntemi ile çözmüşlerdir[21]. Aksan vd., Burger denkleminin nümerik çözümünü en küçük kareler yöntemiyle bulmuşlardır[22]. Liao dördüncü mertebeden kapalı kompakt sonlu fark yöntemi ile denklemin çözümüne ulaşmıştır[23]. Yousuf, Burger denkleminin çözümünü Padé yaklaşımına dayalı sonlu fark yöntemi ile bulmuştur[24]. Sari ve Gürarslan altıncı mertebeden kompakt sonlu fark yaklaşımı ile Burger denkleminin çözümünü elde etmişlerdir[25]. Salkuyeh ve Sharafeh, Burger denkleminin nümerik çözümünü bulmak için denklemini önce Hopf-Cole dönüşümü ile ısı denklemine dönüştürüp daha sonra elde ettikleri ısı denklemini adi diferansiyel denklem sistemine dönüştürerek Burger denkleminin çözümüne ulaşmışlardır[26]. Xu vd., kübik spline kuasi-interpolasyon yöntemine dayalı nümerik bir yöntemle Burger denkleminin çözümünü elde etmişlerdir[27]. Vanani ve Soleymani, homotopi pertürbasyon yöntemi ile Burger denkleminin çözümünü bulmuşlardır[28]. Burger denkleminin predictor-corrector kompakt sonlu fark yöntemi ile çözümü Zhang ve Wang tarafından sunulmuştur[29]. Mittal vd. modifiye edilmiş kübik B-spline collocation yöntemini Burger denklemine uygulamışlardır[30]. Soliman, Burger denkleminin çözümü için Galerkin yöntemine dayanan kübik B-splineların kullanıldığı sonlu eleman yöntemini kullanmıştır[31]. Wang vd., Hybrid spline fark yöntemi ile Burger denkleminin çözümüne ulaşmışlardır[32].

Bhattacharya'nın Burger denklemini açık üstel sonlu fark yöntemi ile çözebilmek için denklemin sonlu fark formülasyonunda lineerleştirme yaptığı çalışma dışında, Burger denkleminin üstel sonlu fark yöntemi ile çözümü üzerine başka bir çalışmaya bugün itibariyle literatürde rastlanılmamıştır. Bu noktadan hareketle tezin üçüncü bölümünde verilen üstel sonlu fark yönteminin mevcut hali geliştirilerek, kapalı ve Crank-Nicolson üstel sonlu fark yöntemleri tanımlanmış ve bu yöntemler Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla lineerleştirilen Burger denkleminin çözümünde kullanılmıştır.

Dördüncü bölümde ise Burger denkleminin non-lineer formuna direkt uygulanmak üzere kapalı, tamamen kapalı ve Crank-Nicolson üstel sonlu fark yöntemleri olmak üzere üç yeni yöntem tanımlanmıştır.

Bölüm 2

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde daha sonraki bölümlerde kullanılacak olan bazı temel kavramlar ve teoremler verildi.

2.1 Sonlu Fark Yaklaşımları

Lineer ve non-linear diferansiyel denklemlerin nümerik çözümünde en yaygın kullanılan yöntemlerden biri sonlu fark yöntemleridir. Sonlu fark yöntemlerinin diferansiyel denklemlere uygulanmasında aşağıdaki adımlar takip edilir.

- Problemin çözüm bölgesi dikdörtgensel parçalara bölünür ve problemin yaklaşık çözümü her bir parçanın düğüm noktaları (mesh, grid) üzerinden hesaplanır.
- Diferansiyel denklemde bulunan türevler yerine bu türevlerin sonlu fark yaklaşımları alınır. Böylece problem diferansiyel denklemin çözümü yerine fark yaklaşımlarından oluşan cebirsel denklemin çözümü problemine dönüşür.
- Fark denklemlerinin çözümünde ortaya çıkan çözüm bölgesi dışındaki hayali düğüm noktaları üzerindeki hayali değerleri yok etmek için problemin sınır şartlarında uygun sonlu fark yaklaşımları kullanılır. Böylece cebirsel denklem sistemi elde edilir. Elde edilen bu sistem direkt veya iteratif yöntemler yardımıyla kolayca çözülür.

Sonlu fark yaklaşımlarının elde edilmesinde aşağıda verilen Taylor serisi kullanılır.

f fonksiyonu a noktasını içeren bir aralıkta sürekli ve her mertebeden türevlenebilir olsun. Bu durumda

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (2.1.1)$$

serisine f fonksiyonunun a noktası civarındaki Taylor seri açılımı denir. Taylor serisindeki sonlu sayıda terimden oluşan

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (2.1.2)$$

polinomuna n . dereceden Taylor polinomu denir[33].

Benzer şekilde iki bağımsız değişkene bağlı f fonksiyonu, (a, b) noktası civarında sürekli bir fonksiyon ve bu noktada her mertebeden türevlenebilir ise

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^k f(a, b) \\ &= f(a, b) + \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right] f(a, b) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^2 f(a, b) + \dots \\ &\quad + \frac{1}{n!} \left[(x-a) \frac{\partial}{\partial x} + (y-b) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(a, b) + \dots \end{aligned} \quad (2.1.3)$$

veya

$$\begin{aligned} f(x, y) &= f(a, b) + (x-a) \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + (y-b) \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \\ &\quad + \frac{1}{2!} \left[(x-a)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) + 2(x-a)(y-b) \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \right. \\ &\quad \left. + (y-b)^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \right] + \dots \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

seri açılımına f fonksiyonunun (a, b) noktası civarındaki Taylor seri açılımı denir[34].

x ve t değişkenlerine bağlı bir fonksiyon u , x yönündeki bölüntülerin uzunluğu $\Delta x \equiv h$ ve zaman adımı $\Delta t \equiv k$ olsun. Bu durumda (x_i, t_j) ile ifade edilen düğüm noktası

$$\begin{aligned} x_i &= i\Delta x = ih, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \\ t_j &= j\Delta t = jk, \quad j = 0, 1, 2, \dots \end{aligned}$$

dir. Temsili $P(ih, jk)$ düğüm noktası üzerinde u fonksiyonu $U(ih, jk) = U_{i,j} = U_i^j$ gösterimlerinden herhangi biri ile ifade edilebilir. Bu gösterimleri kullanarak u fonksiyonunun birinci ve ikinci mertebeden türevleri için Taylor serisi yardımıyla elde edilen sonlu fark yaklaşımları aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1}^j - U_i^j}{h} \quad (2.1.5)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{U_i^j - U_{i-1}^j}{h} \quad (2.1.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} \cong \frac{U_{i+1}^j - U_{i-1}^j}{2h} \quad (2.1.7)$$

(2.1.5), (2.1.6) ve (2.1.7) ile verilen fark yaklaşımları x e göre birinci mertebeden türev için sırasıyla ileri, geri ve merkezi fark yaklaşımlarıdır.

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{U_i^{j+1} - U_i^j}{k} \quad (2.1.8)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{U_i^j - U_i^{j-1}}{k} \quad (2.1.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} \cong \frac{U_i^{j+1} - U_i^{j-1}}{2k} \quad (2.1.10)$$

(2.1.8), (2.1.9) ve (2.1.10) ile verilen fark yaklaşımları ise t ye göre birinci türev için sırasıyla ileri, geri ve merkezi fark yaklaşımlarıdır.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i+2}^j - 2U_{i+1}^j + U_i^j}{h^2} \quad (2.1.11)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{U_i^j - 2U_{i-1}^j + U_{i-2}^j}{h^2} \quad (2.1.12)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cong \frac{U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j}{h^2} \quad (2.1.13)$$

(2.1.11), (2.1.12) ve (2.1.13) ile verilen fark yaklaşımları ise x e göre ikinci türev için sırasıyla ileri, geri ve merkezi fark yaklaşımlarını göstermektedir[35].

Bir kısmi diferansiyel denklemi sonlu fark yaklaşımları ile ifade etmek için çeşitli yöntemler kullanılır. Bu yöntemlerden en çok kullanılanlar Açık (Explicit), Kapalı (Implicit) ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleridir. Bu yöntemler klasik sonlu fark yaklaşımları olarak adlandırılır.

2.2 Isı Denkleminin Çözümü İçin Klasik Sonlu Fark Yöntemleri

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \quad (2.2.1)$$

ısı denklemini için sınır şartları

$$\Theta(0, t) = 0, \quad t > 0$$

$$\Theta(L, t) = 0, \quad t > 0$$

ve başlangıç şartı

$$\Theta(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

olmak üzere ısı denklemini için açık, kapalı ve Crank-Nicolson sonlu fark yöntemleri aşağıdaki gibi elde edilir.

$r = \frac{\nu k}{h^2}$ olmak üzere $\frac{\partial \Theta}{\partial t}$ terimi yerine

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} \cong \frac{\Theta_i^{j+1} - \Theta_i^j}{k} \quad (2.2.2)$$

ileri fark yaklaşımı ve $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}$ terimi yerine

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \cong \frac{\Theta_{i+1}^j - 2\Theta_i^j + \Theta_{i-1}^j}{h^2} \quad (2.2.3)$$

fark yaklaşımı alınır

$$\Theta_i^{j+1} = r\Theta_{i-1}^j + (1 - 2r)\Theta_i^j + r\Theta_{i+1}^j \quad (2.2.4)$$

olur. Elde edilen bu sonlu fark yaklaşımı açık sonlu fark yaklaşımı olarak isimlendirilir.

$\frac{\partial \Theta}{\partial t}$ terimi yerine yine ileri fark yaklaşımı, $\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}$ terimi yerine

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \cong \frac{\Theta_{i+1}^{j+1} - 2\Theta_i^{j+1} + \Theta_{i-1}^{j+1}}{h^2} \quad (2.2.5)$$

yaklaşımı alınır

$$-r\Theta_{i-1}^{j+1} + (1 + 2r)\Theta_i^{j+1} - r\Theta_{i+1}^{j+1} = \Theta_i^j \quad (2.2.6)$$

biçimindeki kapalı sonlu fark yaklaşımı elde edilir.

$\frac{\partial\Theta}{\partial t}$ terimi yerine ileri fark yaklaşımı, $\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2}$ terimi yerine ise

$$\frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\Theta_{i+1}^j - 2\Theta_i^j + \Theta_{i-1}^j}{h^2} + \frac{\Theta_{i+1}^{j+1} - 2\Theta_i^{j+1} + \Theta_{i-1}^{j+1}}{h^2} \right) \quad (2.2.7)$$

ifadesi alınırsa Crank-Nicolson sonlu fark yaklaşımı olarak isimlendirilen

$$-r\Theta_{i-1}^{j+1} + (2 + 2r)\Theta_i^{j+1} - r\Theta_{i+1}^{j+1} = r\Theta_{i-1}^j + (2 - 2r)\Theta_i^j + r\Theta_{i+1}^j \quad (2.2.8)$$

biçimindeki sonlu fark yaklaşımı elde edilir[35].

2.3 Isı Denkleminin Çözümü İçin Üstel Sonlu Fark Yöntemi

Isı denklemi

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2\Theta}{\partial x^2} \quad (2.3.1)$$

ve başlangıç şartı

$$\Theta(x, 0) = \phi(x), \quad 0 \leq x \leq L$$

olmak üzere bu denklemin analitik çözümü

$$\Theta(x, t) = \phi(x) \tau(t) \quad (2.3.2)$$

şeklinde olsun. Burada başlangıç şartı $\Theta(x, 0) = \phi(x)$ olduğundan

$$\tau(0) = 1 \quad (2.3.3)$$

dir. (2.3.2) denkleminin t ye göre birinci türevi alınırsa

$$\frac{\partial\Theta}{\partial t} = \phi(x) \frac{d\tau}{dt} \quad (2.3.4)$$

olur. (2.3.2) denkleminin x e göre ikinci türevi alınırsa

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = \tau(t) \frac{d^2 \phi}{dx^2} \quad (2.3.5)$$

elde edilir. (2.3.4) ve (2.3.5) ifadeleri (2.3.1) denkleminde yerlerine yazılırsa

$$\phi(x) \frac{d\tau}{dt} = \nu \tau(t) \frac{d^2 \phi}{dx^2} \quad (2.3.6)$$

olur. (2.3.6) denkleminin her iki tarafı $\phi\tau$ ile bölünürse

$$\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} = \nu \frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -R \quad (2.3.7)$$

elde edilir. (2.3.7) denklemini değişkenlerine ayrılabilir olduğundan eşitliğin olması denklemin her iki yanının sabit bir $R > 0$ sayısına eşit olması ile mümkündür.

Böylece

$$\frac{1}{\tau} \frac{d\tau}{dt} = -R \quad (2.3.8)$$

ve

$$\nu \frac{1}{\phi} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = -R \quad (2.3.9)$$

denklemleri elde edilir. (2.3.8) eşitliğinin sol tarafı $\frac{\phi}{\phi}$ ile çarpılırsa

$$\frac{\phi}{\tau \phi} \frac{d\tau}{dt} = -R \quad (2.3.10)$$

olur. Bu ifade (2.3.2) ve (2.3.4) denklemleri kullanılarak yeniden düzenlenirse

$$\frac{1}{\Theta(x,t)} \frac{\partial \Theta}{\partial t} = -R \quad (2.3.11)$$

şeklinde yazılabilir. Zaman adımı $t = k$ için yazılabilen bu denklemin $\Theta(x,t)$ nin sıfırdan farklı değerleri için bir çözümü vardır. (2.3.11) ifadesinin her iki tarafının 0 dan k ya integrali alınırsa

$$\Theta(x,k) = c \exp(-Rk) \quad (2.3.12)$$

elde edilir. (2.3.12) denkleminde yer alan c sabitini bulmak için başlangıç şartı kullanılırsa

$$\Theta(x, k) = \Theta(x, 0) \exp(-Rk) \quad (2.3.13)$$

olur. Buradaki R sabitinin değerini bulmak için (2.3.9) denkleminin sol tarafı $\frac{\tau}{\phi}$ ile çarpılırsa

$$\frac{\nu}{\tau\phi} \left\{ \tau \frac{d^2\phi}{dx^2} \right\} = -R \quad (2.3.14)$$

olur. Böylece (2.3.2) ve (2.3.5) denklemlerinden (2.3.14) ifadesi

$$\frac{\nu}{\Theta(x, t)} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = -R \quad (2.3.15)$$

olarak bulunur. (2.3.15) denklemini için sonlu fark yaklaşımı

$$\frac{\nu}{\Theta_i^j} \left(\frac{\Theta_{i+1}^j - 2\Theta_i^j + \Theta_{i-1}^j}{h^2} \right) = -R \quad (2.3.16)$$

olur. (2.3.16) ifadesi (2.3.13) denkleminde yerine yazılırsa

$$\Theta_i^{j+1} = \Theta_i^j \exp \left\{ \frac{\nu k}{\Theta_i^j} \left(\frac{\Theta_{i+1}^j - 2\Theta_i^j + \Theta_{i-1}^j}{h^2} \right) \right\} \quad (2.3.17)$$

veya

$$\Theta_i^{j+1} = \Theta_i^j \exp \left\{ \frac{\nu k}{h^2} \left(\frac{\Theta_{i+1}^j - 2\Theta_i^j + \Theta_{i-1}^j}{\Theta_i^j} \right) \right\} \quad (2.3.18)$$

olur[1]. Burada h , x yönündeki bölüntülerin uzunluğu ve k zaman adımı olmak üzere Θ_i^j , (x_i, t_j) noktasındaki $\Theta(x_i, t_j)$ tam çözümünün sonlu fark yaklaşımını temsil etmektedir.

2.4 Vektör ve Matris Normları

Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\|\cdot\| : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonuna vektör normu denir.

- 1) Her $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ için $\|\underline{x}\| \geq 0$,
- 2) Her $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ için $\|\underline{x}\| = 0 \Leftrightarrow \underline{x} = \underline{0}$,
- 3) Her $\alpha \in \mathbb{R}$ ve her $\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ için $\|\alpha \underline{x}\| = |\alpha| \|\underline{x}\|$,
- 4) Her $\underline{x}, \underline{y} \in \mathbb{R}^n$ için $\|\underline{x} + \underline{y}\| \leq \|\underline{x}\| + \|\underline{y}\|$.

$\underline{x} \in \mathbb{R}^n$ vektörü $\underline{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ olmak üzere L_1, L_2 ve L_∞ vektör normları sırasıyla,

$$\begin{aligned}\|\underline{x}\|_1 &= |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n| = \sum_{i=1}^n |x_i|, \\ \|\underline{x}\|_2 &= (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \dots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}} = \left[\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right]^{\frac{1}{2}}, \\ \|\underline{x}\|_\infty &= \max_{1 \leq i \leq n} |x_i|\end{aligned}$$

dir[36].

$A \in \mathbb{R}_n^n$ olmak üzere, $\|\cdot\| : \mathbb{R}_n^n \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $A, B \in \mathbb{R}_n^n$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için

- 1) $\|A\| \geq 0$,
- 2) $\|A\| = 0 \Leftrightarrow A$ sıfır matrisidir.
- 3) $\|\alpha A\| = |\alpha| \|A\|$,
- 4) $\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|$,
- 5) $\|AB\| \leq \|A\| \|B\|$

özelliklerini sağlıyorsa bu fonksiyona matris normu denir. L_1, L_2 ve L_∞ matris normları sırasıyla

$$\|A\|_1 = \max_{1 \leq j \leq n} \sum_{i=1}^n |a_{ij}|,$$

$$\|A\|_2 = \sqrt{\rho(A^T A)},$$

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \sum_{j=1}^n |a_{ij}|$$

şeklinde tanımlanır[36].

2.5 Hopf-Cole Dönüşümü

Burger denklemi

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.5.1)$$

şeklinde ifade edilir. Burger denklemi analitik olarak çözülebilen çok az sayıdaki non-linear kısmi diferansiyel denklemden biridir. Burger denkleminin analitik çözümünü doğrudan bulmak oldukça zordur. Bu nedenle (2.5.1) ile verilen Burger denklemi aşağıda verilecek olan Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla lineer bir denklem olan ısı denklemine dönüştürüldükten sonra analitik çözümü bulunur. Bu dönüşüm 1950 yılında Hopf [37] tarafından

$$u = -2\nu \frac{\Theta_x}{\Theta} \quad (2.5.2)$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $\Theta(x, t)$,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \quad (2.5.3)$$

ısı denkleminin çözümü, $u(x, t)$ ise (2.5.1) Burger denkleminin çözümüdür. Hopf bu dönüşümle Burger denkleminin çözümünün bulunabileceğini gösterdi. 1951 yılında ise Cole [38] aşağıda verilecek olan teoremleri ifade ederek (2.5.3) ısı denklemi ile (2.5.1) Burger denklemi arasındaki ilişkiyi ispat etmiş oldu.

Teorem 2.5.1.

$\Theta(x, t)$,

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} \quad (2.5.4)$$

ısı denkleminin bir çözümü olmak üzere

$$u(x, t) = -2\nu \frac{\Theta_x}{\Theta} \quad (2.5.5)$$

dir. Burada $u(x, t)$,

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.5.6)$$

Burger denkleminin çözümüdür[38].

İspat.

$$f = f(x, t) \quad (2.5.7)$$

sürekli ve her mertebeden kısmi türevleri de sürekli olan bir fonksiyon olmak üzere,

$$u(x, t) = f_x(x, t) \quad (2.5.8)$$

olsun. (2.5.8) denklemini (2.5.1) Burger denkleminde yerine yazılırsa

$$f_{xt} + f_x f_{xx} = \nu f_{xxx} \quad (2.5.9)$$

elde edilir.

$$f_{xt} = f_{tx} \quad (2.5.10)$$

olduğu gözönünde bulundurularak (2.5.9) denkleminin x e göre integrali alınırsa,

$$\int f_{tx} dx + \int f_x f_{xx} dx = \int \nu f_{xxx} dx \quad (2.5.11)$$

olur. Buradan

$$f_t + \frac{1}{2} (f_x)^2 = \nu f_{xx} \quad (2.5.12)$$

ifadesi elde edilir.

$$f(x, t) = F[\Theta(x, t)] \quad (2.5.13)$$

olarak alınır ve (2.5.12) denkleminde yerine yazılırsa

$$F'(\Theta) \Theta_t + \frac{1}{2} [F'(\Theta) \Theta_x]^2 = \nu \{ [F'(\Theta) \Theta_x]'\} = \nu F''(\Theta) \Theta_x^2 + \nu F'(\Theta) \Theta_{xx} \quad (2.5.14)$$

olur. Burada $\Theta(x, t)$ nin (2.5.3) ısı denklemini sağladığı gözönüne alınırsa (2.5.14)

ifadesinden

$$[F'(\Theta)]^2 = 2\nu F''(\Theta) \quad (2.5.15)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifadede

$$P(\Theta) = F'(\Theta) \quad (2.5.16)$$

almırsa

$$[P(\Theta)]^2 = 2\nu P'(\Theta) \quad (2.5.17)$$

olur. Bu denklemin çözümünden

$$P = -2\nu(\Theta + c_1)^{-1} \quad (2.5.18)$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{dF}{d\Theta} = -2\nu(\Theta + c_1)^{-1} \quad (2.5.19)$$

yani

$$dF = -2\nu(\Theta + c_1)^{-1} d\Theta \quad (2.5.20)$$

ifadesine ulaşılır. (2.5.20) ifadesinden

$$f(x, t) = F(\Theta) = -2\nu \ln(\Theta + c_1) + c_2 \quad (2.5.21)$$

olur. Burada $c_1 = c_2 = 0$ almırsa (2.5.8) ifadesinden

$$u(x, t) = -2\nu \frac{\Theta_x}{\Theta} \quad (2.5.22)$$

olur. Böylece teoremin ispatı tamamlanmış olur. $\Theta(x, 0)$ başlangıç değerini bulmak için (2.5.22) dönüşümünde $x = \xi$ değişken değiştirmesi yapılarak 0 dan x e kadar integral almırsa,

$$\int_0^x u(\xi, t) d\xi = -2\nu \ln \Theta(\xi, t) \Big|_0^x \quad (2.5.23)$$

$$= -2\nu [\ln \Theta(x, t) - \ln \Theta(0, t)] \quad (2.5.24)$$

$$= -2\nu \ln \left[\frac{\Theta(x, t)}{\Theta(0, t)} \right] \quad (2.5.25)$$

elde edilir. Buradan

$$-(2\nu)^{-1} \int_0^x u(\xi, t) d\xi = \ln \left[\frac{\Theta(x, t)}{\Theta(0, t)} \right] \quad (2.5.26)$$

veya

$$\Theta(x, t) = \Theta(0, t) \exp \left[-(2\nu)^{-1} \int_0^x u(\xi, t) d\xi \right] \quad (2.5.27)$$

olarak bulunur. Kabul edelim ki $u(x, t)$ nin başlangıç değeri

$$u(x, 0) = u_0(x) \quad (2.5.28)$$

olsun. Bu durumda $c_0 = \Theta(0, 0)$ için

$$\Theta(x, 0) = \Theta_0(x) = c_0 \exp \left[-(2\nu)^{-1} \int_0^x u_0(\xi) d\xi \right] \quad (2.5.29)$$

olarak elde edilir[38].

Teorem 2.5.2.

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (2.5.30)$$

Burger denkleminin

$$u(x, t) = -2\nu \frac{\Theta_x}{\Theta} \quad (2.5.31)$$

ile verilen çözümü tektir[38].

İspat. (2.5.30) denkleminin herhangi bir $u(x, t)$ çözümü (2.5.27) ile ifade edilen bir $\Theta(x, t)$ fonksiyonu tanımlar ki bu $\Theta(x, t)$ fonksiyonu (2.5.3) ısı denklemini sağlar. Kabul edelim ki (2.5.30) denkleminin $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ gibi iki çözümü olsun. Başlangıç şartından dolayı $u(x, 0) = v(x, 0)$ dir. $\Theta(x, t)$ nin başlangıç değeri, c_0 sabitine bağlı (2.5.29) ile verilen ifadedir. $\Theta(x, 0)$ yalnızca $u(x, 0) = v(x, 0)$ a bağlı olduğundan her bir durumda c_0 sabitine kadar aynıdır. Aynı şekilde sınır değerleri her iki çözüm içinde aynı olduğundan (2.5.3) ısı denkleminin $\Theta(x, t)$ çözümü aynıdır. Fakat $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ çözümleri (2.5.31) kullanılarak elde edildiğinden

$$u(x, t) = v(x, t) \quad (2.5.32)$$

olur. Bu ise çözümün tek olması demektir[38].

2.6 Model Problemler ve Analitik Çözümleri

Burada (2.5.1) ile verilen Burger denklemini farklı başlangıç ve sınır şartları ile birlikte gözönüne alındı. Böylece yöntemlerin test edilmesinde kullanılmak üzere literatürde mevcut problemlerden üç model problem belirlendi.

2.6.1 Problem 1

Bu problem için başlangıç şartı

$$u(x, 0) = \sin(\pi x), \quad 0 < x < 1 \quad (2.6.1)$$

ve sınır şartları

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.6.2)$$

olarak alındı. Problem

$$D = \{(x, t) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq t \leq T\}$$

bölgesi üzerinde tanımlıdır. Denklemin analitik çözümü (2.5.2) ile verilen dönüşüm yardımıyla (2.5.3) ısı denklemine dönüştürülerek elde edilir. (2.5.29) bağıntısında (2.6.1) ifadesinin kullanılması ile ısı denklemini için başlangıç şartı

$$\begin{aligned}
\Theta(x, 0) &= c_0 \exp \left[- (2\nu)^{-1} \int_0^x u_0(\xi) d\xi \right] \\
&= c_0 \exp \left\{ - (2\nu)^{-1} \frac{1}{\pi} [-\cos(\pi\xi)] \Big|_0^x \right\} \\
&= c_0 \exp \left\{ - (2\pi\nu)^{-1} [1 - \cos(\pi x)] \right\}
\end{aligned} \tag{2.6.3}$$

olarak elde edilir. (2.5.2) bağıntısından ısı denklemi için sınır şartları

$$\Theta_x(0, t) = \Theta_x(1, t) = 0 \tag{2.6.4}$$

olur. Böylece Problem 1, (2.5.3) ısı denklemi, (2.6.3) başlangıç şartı ve (2.6.4) sınır şartlarından oluşan ısı iletim problemine dönüşür. (2.5.3) ısı denkleminin analitik çözümü

$$\Theta(x, t) = X(x) T(t) \tag{2.6.5}$$

biçiminde olsun. Bu durumda,

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2} = X''(x) T(t) \tag{2.6.6}$$

ve

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = X(x) T'(t) \tag{2.6.7}$$

ifadeleri elde edilir. (2.5.3) ısı denkleminde (2.6.6) ve (2.6.7) ifadeleri yerlerine yazılırsa

$$X(x) T'(t) = \nu X''(x) T(t) \tag{2.6.8}$$

olur. Burada X sadece x e bağlı, T de sadece t ye bağlı fonksiyonlar olduğundan eşitliğin sağlanabilmesi için λ sabit sayı olmak üzere

$$\frac{X''}{X} = \frac{1}{\nu} \frac{T'}{T} = -\lambda^2 \tag{2.6.9}$$

olmalıdır. Böylece

$$X'' + \lambda^2 X = 0 \tag{2.6.10}$$

ve

$$T' + \lambda^2 \nu T = 0 \quad (2.6.11)$$

adi diferansiyel denklemleri elde edilir. Bu denklemlerin çözümleri sırasıyla

$$X(x) = A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x) \quad (2.6.12)$$

ve

$$T(t) = ce^{-\lambda^2 \nu t} \quad (2.6.13)$$

dir. Burada A_1 , B_1 ve c keyfi sabitlerdir. Böylece

$$\Theta(x, t) = X(x) T(t) \quad (2.6.14)$$

olduğundan

$$\Theta(x, t) = [A_1 \cos(\lambda x) + B_1 \sin(\lambda x)] [ce^{-\lambda^2 \nu t}] \quad (2.6.15)$$

olur. $cA_1 = A$ ve $cB_1 = B$ olmak üzere,

$$\Theta(x, t) = e^{-\lambda^2 \nu t} [A \cos(\lambda x) + B \sin(\lambda x)] \quad (2.6.16)$$

ifadesi elde edilir. (2.6.4) ifadesinden dolayı

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}(0, t) = e^{-\lambda^2 \nu t} (\lambda B) = 0 \quad (2.6.17)$$

olur. Bu ise $B = 0$ olmasını gerektirir. Bu durumda

$$\Theta(x, t) = Ae^{-\lambda^2 \nu t} \cos(\lambda x) \quad (2.6.18)$$

bulunur . Yine (2.6.4) bağıntısından

$$\frac{\partial \Theta}{\partial x}(1, t) = -A\lambda e^{-\lambda^2 \nu t} \sin \lambda = 0 \quad (2.6.19)$$

elde edilir. Bu ise $\sin \lambda = 0$ olmasını gerektirir. Buna göre $\lambda = n\pi$, ($n = 0, 1, 2, \dots$) olmak üzere

$$\Theta_n(x, t) = A_n e^{-\nu n^2 \pi^2 t} \cos(n\pi x) \quad (2.6.20)$$

olur. Böylece (2.5.3) ile verilen ısı denkleminin analitik çözümü

$$\Theta(x, t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\nu n^2 \pi^2 t} A_n \cos(n\pi x) \quad (2.6.21)$$

olarak elde edilir. Burada A_0 ve A_n ler Fourier katsayıları olup

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 \Theta_0(x) dx = c_0 \int_0^1 \exp \{ - (2\pi\nu)^{-1} [1 - \cos(\pi x)] \} dx \quad (2.6.22)$$

ve $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$A_n = c_0 \int_0^1 \exp \{ - (2\pi\nu)^{-1} [1 - \cos(\pi x)] \} \cos(n\pi x) dx \quad (2.6.23)$$

şeklindedir. (2.5.2) dönüşümü kullanılarak verilen problemin analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{2\pi\nu \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\nu n^2 \pi^2 t} A_n \sin(n\pi x)}{A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\nu n^2 \pi^2 t} A_n \cos(n\pi x)} \quad (2.6.24)$$

veya

$$u(x, t) = \frac{2\pi\nu \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\nu n^2 \pi^2 t} A_n \sin(n\pi x)}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-\nu n^2 \pi^2 t} A_n \cos(n\pi x)} \quad (2.6.25)$$

olarak elde edilir[38].

2.6.2 Problem 2

(2.5.1) denklemi ile birlikte başlangıç şartı

$$u(x, 0) = 4x(1 - x), \quad 0 < x < 1 \quad (2.6.26)$$

ve sınır şartları

$$u(0, t) = u(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.6.27)$$

olarak alındı.

Problem 1' in çözümüne benzer şekilde Burger denklemine (2.5.2) ile verilen Hopf-Cole dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 0 \quad (2.6.28)$$

ısı denklemi elde edilir. Bu ısı denklemi için başlangıç şartı

$$\Theta(x, 0) = \exp \left\{ -x^2 (3\nu)^{-1} (3 - 2x) \right\} \quad (2.6.29)$$

ve sınır şartları

$$\Theta_x(0, t) = \Theta_x(1, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.6.30)$$

olur. Elde edilen bu ısı denklemi ve (2.5.2) dönüşümü yardımıyla, Problem 2' nin analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{2\pi\nu \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-\nu n^2 \pi^2 t} A_n \sin(n\pi x)}{A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\nu n^2 \pi^2 t} A_n \cos(n\pi x)} \quad (2.6.31)$$

olarak bulunur. Ancak bu defa Fourier katsayıları

$$A_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 \exp \left\{ -x^2 (3\nu)^{-1} [3 - 2x] \right\} dx \quad (2.6.32)$$

ve $n = 1, 2, 3, \dots$ için

$$A_n = \int_0^1 \exp \left\{ -x^2 (3\nu)^{-1} [3 - 2x] \right\} \cos(n\pi x) dx \quad (2.6.33)$$

şeklinde elde edilir.

2.6.3 Problem 3

(2.5.1) denklemi ile verilen Burger denkleminin başlangıç şartı

$$u(x, 1) = \frac{x}{1 + \exp\left[\frac{1}{4\nu}\left(x^2 - \frac{1}{4}\right)\right]}, \quad a < x < b \quad (2.6.34)$$

ve sınır şartları

$$u(a, t) = u(b, t) = 0, \quad t > 0 \quad (2.6.35)$$

olarak alındı. Burger denkleminin (2.5.2) Hopf-Cole dönüşümü uygulanırsa

$$\frac{\partial \Theta}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \Theta}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1, \quad t > 1 \quad (2.6.36)$$

ısı denklemi elde edilir. Bu ısı denklemi için başlangıç şartı

$$\Theta(x, 1) = \exp\left\{-\frac{x^2}{4\nu} + \ln\left[\frac{1 + \exp\left(-\frac{1}{16\nu}\right)\exp\left(\frac{x^2}{4\nu}\right)}{1 + \exp\left(-\frac{1}{16\nu}\right)}\right]\right\} \quad (2.6.37)$$

sınır şartları ise

$$\Theta_x(a, t) = \Theta_x(b, t) = 0, \quad t > 1 \quad (2.6.38)$$

olur. Elde edilen bu ısı denklemi ve (2.5.2) ile verilen Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla Problem 3'ün analitik çözümü

$$u(x, t) = \frac{x/t}{1 + [t/\exp(\frac{1}{8\nu})]^{1/2} \exp(\frac{x^2}{4\nu t})} \quad (2.6.39)$$

olarak elde edilir.

Bölüm 3

LİNEERLEŞTİRİLMİŞ BURGER DENKLEMİNİN ÜSTEL SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde daha önce (2.3.18) ile ifade edilen üstel sonlu fark yaklaşımına ek olarak iki yeni yaklaşım; Kapalı ve Crank-Nicolson üstel sonlu fark yaklaşımları tanımlandı. Bu nedenle (2.3.18) ile verilen yaklaşım açık üstel sonlu fark yaklaşımı olarak isimlendirildi. Böylece Hopf-Cole dönüşümü ile lineerleştirilen Burger denklemi

- Açık üstel sonlu fark yöntemi (A-ÜSFY)
- Kapalı üstel sonlu fark yöntemi (K-ÜSFY)
- Crank-Nicolson üstel sonlu fark yöntemi (CN-ÜSFY)

ile çözüldü. Her üç yöntemde de önce (2.5.3) denklemi ile verilen ısı denklemi için üstel sonlu fark denklemi oluşturuldu. Daha sonra ise (2.5.2) ile verilen dönüşüm yardımıyla (2.5.1) Burger denkleminin nümerik çözümleri elde edildi. Her bir yöntem ikinci bölümde verilen üç model probleme uygulandı. Elde edilen nümerik çözümler analitik çözümlerle karşılaştırıldı.

3.1 Açık Üstel Sonlu Fark Yöntemi

(2.5.3) ısı denklemi için açık üstel sonlu fark yaklaşımı (2.3.18) de olduğu gibi yani,

$$\Theta_i^{j+1} = \Theta_i^j \exp \left\{ -r \left(\frac{2\Theta_i^j - \Theta_{i-1}^j - \Theta_{i+1}^j}{\Theta_i^j} \right) \right\} \quad (3.1.1)$$

şekindedir. Burada $r = \frac{\nu k}{h^2}$ dir. $h \equiv \Delta x$, x yönündeki bölüntülerin uzunluğu ve $k \equiv \Delta t$ zaman adımdır. Isı denklemi için sınır şartları $\Theta_x(0, t) = \Theta_x(1, t) = 0$ olduğundan,

$$\Theta_x(0, t) = 0 \Rightarrow \frac{\Theta_1^j - \Theta_{-1}^j}{2h} = 0 \Rightarrow \Theta_{-1}^j = \Theta_1^j$$

$$\Theta_x(1, t) = 0 \Rightarrow \frac{\Theta_{n+1}^j - \Theta_{n-1}^j}{2h} = 0 \Rightarrow \Theta_{n+1}^j = \Theta_{n-1}^j$$

olur. Böylece (3.1.1) fark yaklaşımı

$i = 0$ için;

$$\Theta_0^{j+1} = \Theta_0^j \exp \left\{ -r \left(\frac{2\Theta_0^j - 2\Theta_1^j}{\Theta_0^j} \right) \right\}$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$ için;

$$\Theta_i^{j+1} = \Theta_i^j \exp \left\{ -r \left(\frac{2\Theta_i^j - \Theta_{i-1}^j - \Theta_{i+1}^j}{\Theta_i^j} \right) \right\} \quad (3.1.2)$$

$i = n$ için;

$$\Theta_n^{j+1} = \Theta_n^j \exp \left\{ -r \left(\frac{2\Theta_n^j - 2\Theta_{n-1}^j}{\Theta_n^j} \right) \right\}$$

olarak yazılabilir. (3.1.2) sisteminden elde edilen çözüm (2.5.2) dönüşümü yardımıyla

$$U_i^j = -\frac{\nu}{h} \left(\frac{\Theta_{i+1}^j - \Theta_{i-1}^j}{\Theta_i^j} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.1.3)$$

şeklinde ifade edilebilir. Böylece (2.5.1) ile verilen Burger denkleminin nümerik çözümü elde edilmiş olur. Burada U_i^j , (x_i, t_j) noktasındaki $u(x_i, t_j)$ tam çözümünün sonlu fark yaklaşımını temsil etmektedir.

Sonraki kısımda, ikinci bölümde verilen model problemlerin açık üstel sonlu fark yöntemi ile çözümleri verilecektir.

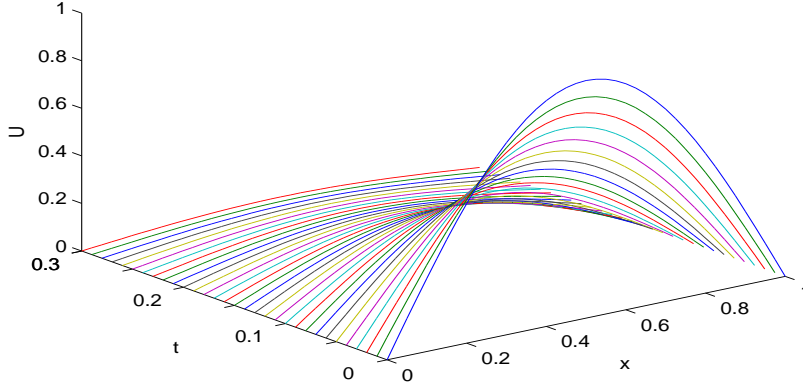
3.1.1 Problem 1' in A-ÜSFY ile Çözümü

Bu kısımda açık üstel sonlu fark yöntemi ile $\nu = 1, 0.1$ ve 0.01 değerleri için Problem 1' in çözümleri elde edildi. İlk olarak $\nu = 1, k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 3.1 de verildi. Bu tabloda h nin farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Tablodan L_2 ve L_∞ hata normları incelendiğinde, h nin değeri küçüldükçe yani konum için bölüntü sayısı arttıkça her iki hata normunun da azaldığı görülmektedir.

Şekil 3.1 de $\nu = 1$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ alınarak $t = 0$ dan $t = 0.3$ e kadar farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler verildi. Şekil 3.1 dalganın zamanla değişimini göstermektedir. Şekilden zamanla birlikte dalganın söndüğü görülmektedir.

Tablo 3.1: $\nu = 1, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için A-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.109318	0.109487	0.109529	0.109534	0.109538
0.2	0.209370	0.209694	0.209775	0.209785	0.209792
0.3	0.291307	0.291760	0.291873	0.291886	0.291896
0.4	0.347219	0.347761	0.347896	0.347912	0.347924
0.5	0.370822	0.371403	0.371548	0.371565	0.371577
0.6	0.358313	0.358876	0.359017	0.359034	0.359046
0.7	0.309270	0.309759	0.309881	0.309895	0.309905
0.8	0.227350	0.227710	0.227800	0.227810	0.227817
0.9	0.120438	0.120630	0.120677	0.120683	0.120687
L_2	0.000535	0.000124	0.000021	0.000009	
L_∞	0.000755	0.000175	0.000030	0.000012	



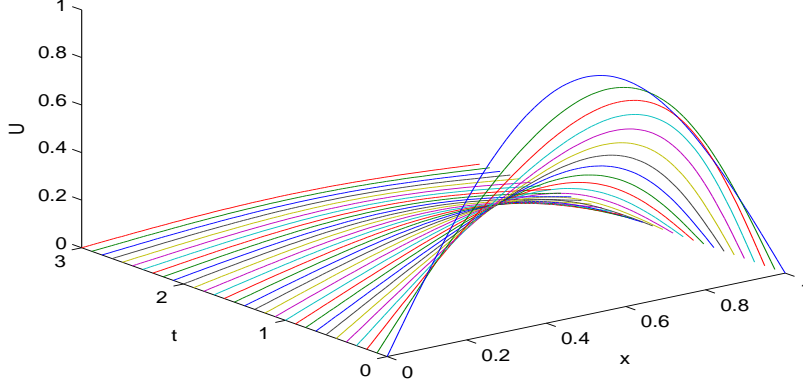
Şekil 3.1: $\nu = 1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)

$\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri için $t = 0.5$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 3.2 ile verildi. Bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümlerle karşılaştırılıp, göz önüne alınan h nin her değeri için hata normları hesaplandı. Bu normların h nin değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.2: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için A-ÜSFY ile $t = 0.5$ de elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.109606	0.109839	0.109897	0.109904	0.109916
0.2	0.217454	0.217902	0.218013	0.218027	0.218050
0.3	0.321359	0.321986	0.322142	0.322161	0.322193
0.4	0.418021	0.418783	0.418973	0.418996	0.419034
0.5	0.501646	0.502505	0.502720	0.502746	0.502789
0.6	0.561071	0.562014	0.562250	0.562279	0.562325
0.7	0.574467	0.575507	0.575770	0.575801	0.575851
0.8	0.504071	0.505160	0.505435	0.505469	0.505521
0.9	0.308268	0.309078	0.309282	0.309307	0.309346
L_2	0.001012	0.000253	0.000060	0.000037	
L_∞	0.001450	0.000362	0.000086	0.000052	

Şekil 3.2 de $\nu = 0.1$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ alınarak $t = 0$ dan $t = 3$ e kadar farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler verildi. Şekil 3.2 dalganın zamanla birlikte değişimini göstermektedir. Bu şekilden dalganın zamanla söndüğü görülmektedir.



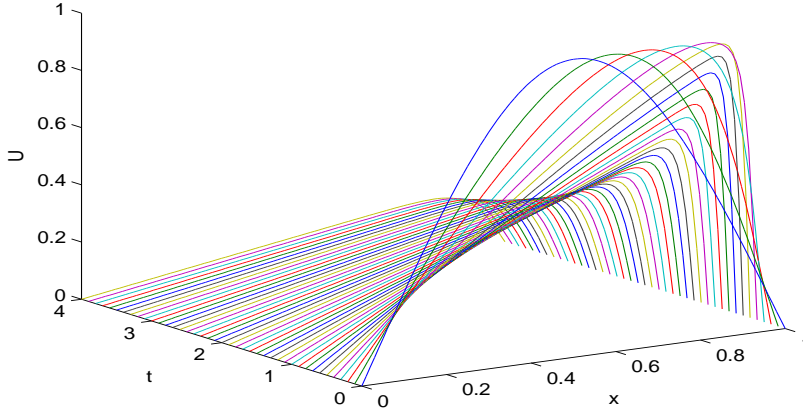
Şekil 3.2: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)

Tablo 3.3 de $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri için $t = 1$ anında elde edilen sonuçlar ve bu sonuçlar için elde edilen hata normları verildi. Tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Ayrıca tabloda farklı h değerlerine karşılık gelen hata normları da karşılaştırıldı. Tablo 3.3 den hata normlarının h nın değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

$\nu = 0.01$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ alınarak $t = 0$ dan $t = 4$ e kadar farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler Şekil 3.3 de verildi. Şekil 3.3 dalganın zamanla değişimini göstermektedir. Şekilden dalganın zaman artarken söndüğü görülmektedir.

Tablo 3.3: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için A-ÜSFY ile $t = 1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.074578	0.075189	0.075334	0.075351	0.075382
0.2	0.149788	0.150427	0.150590	0.150610	0.150645
0.3	0.226085	0.225752	0.225686	0.225678	0.225666
0.4	0.303696	0.301184	0.300529	0.300449	0.300309
0.5	0.382653	0.376715	0.375010	0.374799	0.374420
0.6	0.462876	0.452307	0.448998	0.448577	0.447816
0.7	0.544228	0.527884	0.522320	0.521594	0.520268
0.8	0.626538	0.603324	0.594750	0.593599	0.591476
0.9	0.705017	0.676703	0.664791	0.663128	0.660019
L_2	0.019207	0.006998	0.001970	0.001280	
L_∞	0.044998	0.016683	0.004817	0.003144	



Şekil 3.3: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)

Tablo 3.4 de $\nu = 1$, $\nu = 0.1$ ve $\nu = 0.01$ değerleri için $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-5}$ alınarak $x = 0.25$, $x = 0.5$ ve $x = 0.75$ noktalarında zaman değişirken çözümlerin değişimi incelendi. Her bir ν değeri için elde edilen sonuçlar tam çözümlerle karşılaştırıldı.

Tablo 3.4: $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması. (Problem 1)

		$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Tam		Tam		Tam	
x	t	A-ÜSFY	Çözüm	A-ÜSFY	Çözüm	A-ÜSFY	Çözüm
0.25	0.1	0.253617	0.253638	0.533871	0.534143	0.571938	0.566328
	0.5	0.005066	0.005065	0.270746	0.270790	0.301296	0.301151
	1.0	0.000036	0.000036	0.162548	0.162565	0.188164	0.188194
	2.0	0.000000	0.000000	0.068204	0.068206	0.107367	0.107381
	3.0	0.000000	0.000000	0.027205	0.027202	0.075108	0.075114
0.5	0.1	0.371548	0.371577	0.877268	0.877280	0.993710	0.947414
	0.5	0.007171	0.007169	0.502720	0.502789	0.593267	0.588696
	1.0	0.000052	0.000052	0.291883	0.291916	0.375010	0.374420
	2.0	0.000000	0.000000	0.107889	0.107890	0.214597	0.214558
	3.0	0.000000	0.000000	0.040210	0.040205	0.150183	0.150179
0.75	0.1	0.272560	0.272582	0.762231	0.761797	0.915620	0.860129
	0.5	0.005075	0.005073	0.554026	0.554111	0.856373	0.838033
	1.0	0.000036	0.000036	0.287438	0.287474	0.558664	0.556051
	2.0	0.000000	0.000000	0.086580	0.086579	0.321514	0.321282
	3.0	0.000000	0.000000	0.029776	0.029772	0.224847	0.224811

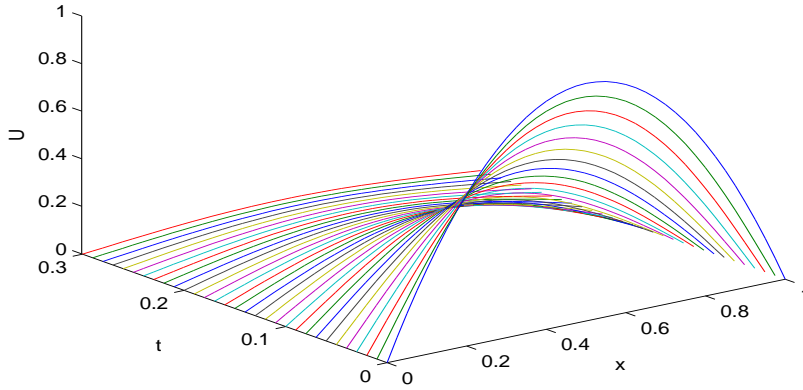
3.1.2 Problem 2' nin A-ÜSFY ile Çözümü

Burada Problem 2' nin $\nu = 1$, 0.1 ve 0.01 değerleri için açık üstel sonlu fark yöntemi ile çözümünü incelendi. İlk olarak $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 3.5 de verildi. Bu tabloda h nin farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümlerle karşılaştırıldı. Tablo 3.5 den L_2 ve L_∞ hata normları incelendiğinde, h nin değeri küçüldükçe her iki hata normunun da azaldığı görülmektedir.

Şekil 3.4 de $\nu = 1$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ alınarak $t = 0$ dan $t = 0.3$ e kadar farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler verildi. Şekil 3.4 dalğanın zamanla değişimini göstermektedir. Şekilden dalğanın zamanla söndüğü görülmektedir.

Tablo 3.5: $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için A-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.112666	0.112840	0.112883	0.112888	0.112892
0.2	0.215818	0.216151	0.216234	0.216244	0.216252
0.3	0.300360	0.300825	0.300941	0.300955	0.300966
0.4	0.358137	0.358695	0.358834	0.358851	0.358863
0.5	0.382643	0.383242	0.383392	0.383410	0.383422
0.6	0.369901	0.370483	0.370628	0.370646	0.370658
0.7	0.319410	0.319914	0.320040	0.320056	0.320066
0.8	0.234888	0.235260	0.235353	0.235364	0.235371
0.9	0.124462	0.124659	0.124708	0.124714	0.124718
L_2	0.000552	0.000128	0.000022	0.000009	
L_∞	0.000780	0.000181	0.000031	0.000013	



Şekil 3.4: $\nu = 1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)

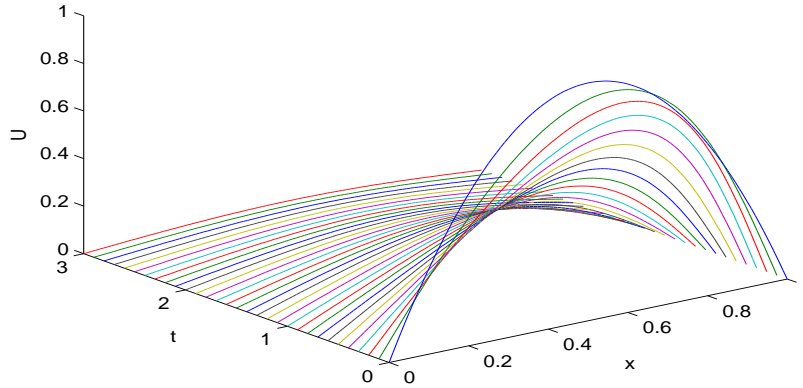
$\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.5$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 3.6 da verildi. Bu tabloda h nin farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümlerle karşılaştırıldı. Ayrıca tabloda h nin farklı değerleri için

elde edilen hata normları da verildi. Tablo 3.6 dan L_2 ve L_∞ hata normlarının h nin değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.6: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için A-ÜSFY ile $t = 0.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.112358	0.112588	0.112645	0.112652	0.112664
0.2	0.222863	0.223307	0.223417	0.223431	0.223454
0.3	0.329271	0.329898	0.330054	0.330073	0.330105
0.4	0.428295	0.429063	0.429255	0.429278	0.429317
0.5	0.514239	0.515110	0.515329	0.515355	0.515398
0.6	0.576046	0.577005	0.577246	0.577275	0.577323
0.7	0.591636	0.592694	0.592960	0.592992	0.593043
0.8	0.521621	0.522732	0.523013	0.523046	0.523100
0.9	0.320644	0.321476	0.321687	0.321712	0.321752
L_2	0.001027	0.000255	0.000061	0.000038	
L_∞	0.001479	0.000368	0.000087	0.000053	

$\nu = 0.1$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ alınarak $t = 0$ dan $t = 3$ e kadar farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler Şekil 3.5 de gösterildi. Şekil 3.5 dalganın zamanla değişimini göstermektedir. Şekilden dalganın zamanla söndüğü görülmektedir.



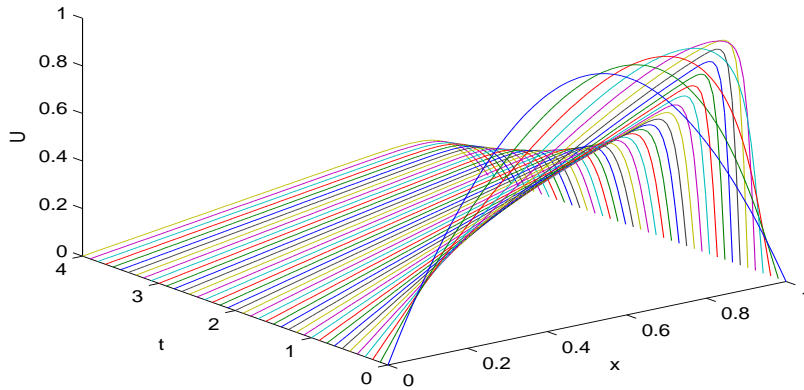
Şekil 3.5: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)

Tablo 3.7 de $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri için $t = 1$ anında bulunan sonuçlar verildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Ayrıca tabloda farklı h değerleri için bulunan L_2 ve L_∞ hata normları da karşılaştırıldı. Tablo 3.7 den h nın değeri küçüldükçe hata normlarının azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.7: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için A-ÜSFY ile $t = 1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.077330	0.077907	0.078043	0.078060	0.078088
0.2	0.155144	0.155731	0.155882	0.155901	0.155934
0.3	0.233785	0.233400	0.233322	0.233313	0.233298
0.4	0.313412	0.310853	0.310180	0.310098	0.309953
0.5	0.394041	0.388036	0.386285	0.386067	0.385676
0.6	0.475610	0.464893	0.461468	0.461030	0.460236
0.7	0.558011	0.541350	0.535540	0.534775	0.533376
0.8	0.641113	0.617299	0.608267	0.607044	0.604781
0.9	0.720384	0.690974	0.678268	0.676479	0.673123
L_2	0.020002	0.007430	0.002111	0.001374	
L_∞	0.047261	0.017850	0.005220	0.003406	

Şekil 3.6 da $\nu = 0.01$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için $t = 0$ dan $t = 4$ e kadar farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler verildi. Şekil 3.6 dan dalganın zamanla değişimi incelenebilir. Şekilden dalganın zamanla söndüğü görülmektedir.



Şekil 3.6: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)

Tablo 3.8 de $\nu = 1$, $\nu = 0.1$ ve $\nu = 0.01$ değerleri için $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-5}$ alınarak $x = 0.25$, $x = 0.5$ ve $x = 0.75$ noktalarında zaman değişirken çözümün değişimi incelendi. Farklı ν değerleri için elde edilen sonuçlar tam çözümlerle karşılaştırıldı.

Tablo 3.8: $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

		$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Tam		Tam		Tam	
x	t	A-ÜSFY	Çözüm	A-ÜSFY	Çözüm	A-ÜSFY	Çözüm
0.25	0.1	0.261458	0.261480	0.562286	0.562577	0.614880	0.607363
	0.5	0.005228	0.005227	0.277424	0.277468	0.317504	0.317320
	1.0	0.000038	0.000038	0.165582	0.165599	0.194664	0.194690
	2.0	0.000000	0.000000	0.069512	0.069514	0.109469	0.109482
	3.0	0.000000	0.000000	0.027761	0.027759	0.076128	0.076134
0.5	0.1	0.383392	0.383422	0.893070	0.893047	1.004993	0.956007
	0.5	0.007399	0.007398	0.515329	0.515398	0.615013	0.609886
	1.0	0.000053	0.000053	0.298310	0.298343	0.386285	0.385676
	2.0	0.000000	0.000000	0.110199	0.110199	0.218625	0.218588
	3.0	0.000000	0.000000	0.041070	0.041065	0.152183	0.152180
0.75	0.1	0.281550	0.281573	0.791321	0.790873	0.944329	0.886707
	0.5	0.005237	0.005235	0.571828	0.571914	0.872297	0.852123
	1.0	0.000038	0.000038	0.295818	0.295857	0.572089	0.569319
	2.0	0.000000	0.000000	0.088682	0.088680	0.327150	0.326926
	3.0	0.000000	0.000000	0.029279	0.030440	0.227775	0.227743

3.1.3 Problem 3' ün A-ÜSFY ile Çözümü

Tablo 3.9 da Problem 3 için $a = 0$, $b = 8$ ve $\nu = 0.5$ olmak üzere $k = 10^{-4}$ alınarak farklı h değerleri için $t = 1.5$ te A-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözümler karşılaştırıldı. Tablo 3.9 dan h konum adımının değeri küçüldükçe, L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.9: $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$ ve h nın farklı değerleri için A-ÜSFY ile $t = 1.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	Tam Çözüm
0.5	0.152962	0.153192	0.153250	0.153273
1.0	0.265297	0.265648	0.265736	0.265771
1.5	0.303711	0.304019	0.304096	0.304125
2.0	0.261245	0.261379	0.261412	0.261421
2.5	0.172257	0.172195	0.172179	0.172169
3.0	0.088292	0.088128	0.088087	0.088070
3.5	0.036025	0.035872	0.035833	0.035820
4.0	0.011983	0.011889	0.011866	0.011859
4.5	0.003302	0.003260	0.003249	0.003246
5.0	0.000761	0.000746	0.000742	0.000741
L_2	0.000566	0.000146	0.000041	
L_∞	0.000480	0.000125	0.000036	

Tablo 3.10 da Problem 3 için $a = 0$, $b = 8$ ve $\nu = 0.5$ olmak üzere $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ alınarak farklı t değerleri için A-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözümler karşılaştırıldı.

Tablo 3.10: $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$, $h = 0.025$ için belli zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)

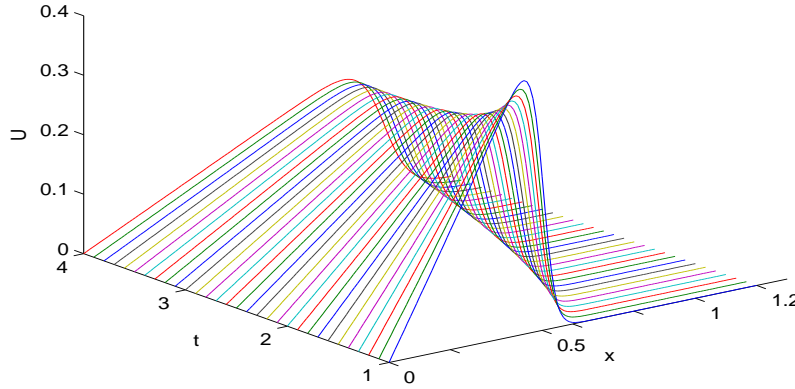
x	$t = 1.5$		$t = 3$		$t = 4.5$	
	A-ÜSFY	Tam Çözüm	A-ÜSFY	Tam Çözüm	A-ÜSFY	Tam Çözüm
0.5	0.153250	0.153273	0.064258	0.064262	0.037988	0.037989
1.0	0.265736	0.265771	0.118797	0.118804	0.071866	0.071869
1.5	0.304096	0.304125	0.155079	0.155087	0.097927	0.097931
2.0	0.261412	0.261421	0.167616	0.167623	0.113384	0.113387
2.5	0.172179	0.172169	0.156291	0.156296	0.116981	0.116984
3.0	0.088087	0.088070	0.127380	0.127382	0.109489	0.109491
3.5	0.035833	0.035820	0.091326	0.091325	0.093684	0.093685
4.0	0.011866	0.011859	0.057978	0.057975	0.073605	0.073605
4.5	0.003249	0.003246	0.032848	0.032844	0.053301	0.053300
5.0	0.000742	0.000741	0.016738	0.016735	0.035717	0.035717
L_2	0.000041		0.000020		0.000408	
L_∞	0.000036		0.000038		0.000743	

Problem 3 için sınırlar $a = 0$, $b = 3$ ve $\nu = 0.05$ olmak üzere $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için farklı anlarda A-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözümlerin karşılaştırılması Tablo 3.11 de verildi.

Tablo 3.11: $a = 0$, $b = 3$, $\nu = 0.05$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)

x	$t = 1.5$		$t = 3$		$t = 4.5$	
	A-ÜSFY	Tam Çözüm	A-ÜSFY	Tam Çözüm	A-ÜSFY	Tam Çözüm
0.25	0.116232	0.116373	0.053721	0.053738	0.033635	0.033640
0.50	0.184291	0.184427	0.095060	0.095089	0.061638	0.061647
0.75	0.152085	0.152062	0.110237	0.110268	0.078034	0.078047
1.00	0.061653	0.061522	0.091877	0.091895	0.078061	0.078076
1.25	0.012872	0.012793	0.054061	0.054048	0.062423	0.062433
1.50	0.001595	0.001574	0.022654	0.022624	0.039665	0.039663
1.75	0.000126	0.000123	0.007075	0.007051	0.020201	0.020190
2.00	0.000006	0.000006	0.001717	0.001705	0.008438	0.008425
L_2	0.000125		0.000033		0.000020	
L_∞	0.000162		0.000032		0.000042	

Şekil 3.7 de $a = 0$, $b = 1.2$, $\nu = 0.005$ olmak üzere $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ alınarak $t = 0$ dan $t = 4$ e kadar farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler verildi. Şekilden dalganın zamanla sola doğru kayarak söndüğü görülmektedir.



Şekil 3.7: $a = 0$, $b = 1.2$, $\nu = 0.005$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda A-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 3)

3.2 Kapalı Üstel Sonlu Fark Yöntemi

Isı denklemini için kapalı üstel sonlu fark yaklaşımı

$$\Theta_i^{j+1} = \Theta_i^j \exp \left\{ -r \left(\frac{2\Theta_i^{j+1} - \Theta_{i-1}^{j+1} - \Theta_{i+1}^{j+1}}{\Theta_i^j} \right) \right\} \quad (3.2.1)$$

olur. Burada sınır şartları $\Theta_x(0, t) = \Theta_x(1, t) = 0$ dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} \Theta_x(0, t) = 0 &\Rightarrow \frac{\Theta_1^{j+1} - \Theta_{-1}^{j+1}}{2h} = 0 \Rightarrow \Theta_{-1}^{j+1} = \Theta_1^{j+1} \\ \Theta_x(1, t) = 0 &\Rightarrow \frac{\Theta_{n+1}^{j+1} - \Theta_{n-1}^{j+1}}{2h} = 0 \Rightarrow \Theta_{n+1}^{j+1} = \Theta_{n-1}^{j+1} \end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Böylece (3.2.1) fark yaklaşımı

$i = 0$ için;

$$\Theta_0^{j+1} = \Theta_0^j \exp \left\{ -r \left(\frac{2\Theta_0^{j+1} - 2\Theta_1^{j+1}}{\Theta_0^j} \right) \right\}$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$ için;

$$\Theta_i^{j+1} = \Theta_i^j \exp \left\{ -r \left(\frac{2\Theta_i^{j+1} - \Theta_{i-1}^{j+1} - \Theta_{i+1}^{j+1}}{\Theta_i^j} \right) \right\} \quad (3.2.2)$$

$i = n$ için;

$$\Theta_n^{j+1} = \Theta_n^j \exp \left\{ -r \left(\frac{2\Theta_n^{j+1} - 2\Theta_{n-1}^{j+1}}{\Theta_n^j} \right) \right\}$$

olur. (3.2.2) sisteminden elde edilen çözüm

$$U_i^j = -\frac{\nu}{h} \left(\frac{\Theta_{i+1}^j - \Theta_{i-1}^j}{\Theta_i^j} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.2.3)$$

dönüşümü yardımıyla Burger denkleminin çözümüne dönüştürülür. (3.2.2) denklem sistemi bir non-lineer denklem sistemidir. $\mathbf{V} = [\Theta_1^{n+1}, \Theta_2^{n+1}, \dots, \Theta_{N-1}^{n+1}]^T$ olmak üzere bu sistem

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0} \quad (3.2.4)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu sistemi Newton yöntemi ile çözmek için aşağıdaki adımlar izlenir:

1. $\mathbf{V}^{(0)}$ değerlerinin belirlenmesi

2. $m = 0, 1, 2, \dots$ için

$$J(\mathbf{V}^{(m)})\delta^{(m)} = -\mathbf{F}(\mathbf{V}^{(m)}) \text{ sisteminin çözümü}$$
$$\mathbf{V}^{(m+1)} = \mathbf{V}^{(m)} + \delta^{(m)} \text{ hesaplanması.}$$

Burada $J(\mathbf{V}^{(m)})$ analitik olarak hesaplanan Jacobian matristir[14]. Newton iterasyonu için durdurma kriteri olarak $\|\mathbf{F}(\mathbf{V}^{(m)})\|_{\infty} \leq 10^{-5}$ alınmıştır.

Kapalı üstel sonlu fark yönteminin Burger denkleminin çözümü için uygun bir yöntem olduğunu göstermek amacıyla sonraki kısımda, ikinci bölümde verilen üç model problemin çözümleri elde edildi. Elde edilen bu çözümler tam çözümlerle karşılaştırıldı. L_2 ve L_{∞} hata normları hesaplandı.

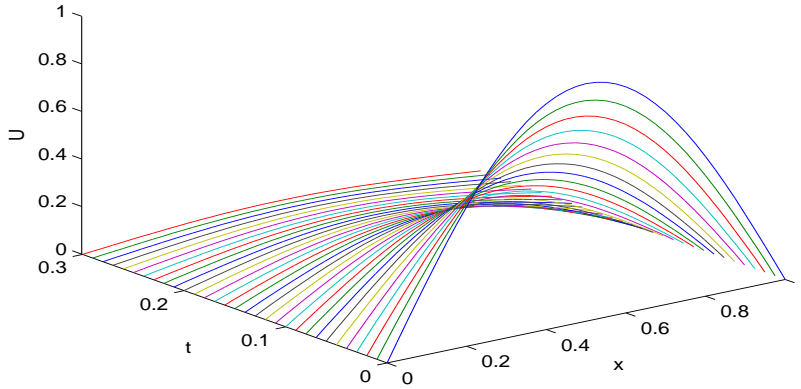
3.2.1 Problem 1' in K-ÜSFY ile Çözümü

Bu kısımda Problem 1' in kapalı üstel sonlu fark yöntemi ile çözümü araştırılırken $\nu = 1, 0.1$ ve 0.01 olarak göz önüne alındı. İlk olarak $\nu = 1$, $k = 10^{-6}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 3.12 de verildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Ayrıca tabloda farklı h değerleri için elde edilen L_2 ve L_{∞} hata normları da karşılaştırıldı. Tablodan h nın değeri küçüldükçe yani konum için bölüntü sayısı arttıkça her iki hata normunun da azaldığı görülmektedir.

Şekil 3.8 de $\nu = 1$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ alınarak $t = 0$ dan $t = 0.3$ e kadar farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler verildi. Şekilden dalganın zaman artarken değişimi izlenmektedir. Şekil 3.8 den dalganın zamanla söndüğü görülmektedir.

Tablo 3.12: $\nu = 1$, $k = 10^{-6}$ ve h nın farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.109319	0.109494	0.109547	0.109558	0.109538
0.2	0.209366	0.209696	0.209789	0.209804	0.209792
0.3	0.291300	0.291758	0.291882	0.291901	0.291896
0.4	0.347209	0.347756	0.347902	0.347923	0.347924
0.5	0.370810	0.371396	0.371552	0.371575	0.371577
0.6	0.358301	0.358870	0.359022	0.359045	0.359046
0.7	0.309261	0.309755	0.309889	0.309910	0.309905
0.8	0.227344	0.227711	0.227813	0.227831	0.227817
0.9	0.120438	0.120636	0.120697	0.120709	0.120687
L_2	0.000542	0.000126	0.000017	0.000014	
L_∞	0.000767	0.000182	0.000026	0.000030	



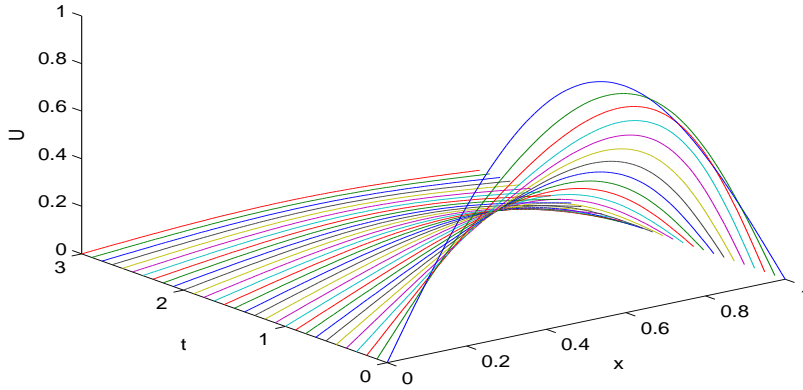
Şekil 3.8: $\nu = 1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)

$\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri için $t = 0.5$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 3.13 de verildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırılırken, L_2 ve L_∞ hata normları da karşılaştırıldı. Tablo 3.13 den hata normlarının h nın değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Şekil 3.9 da $\nu = 0.1$ için dalganın zamanla değişimini incelemek amacıyla $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ alınarak $t = 0$ dan $t = 3$ e kadar farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler verildi. Şekil 3.9 incelendiğinde dalganın zamanla söndüğü görülmektedir.

Tablo 3.13: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.109611	0.109850	0.109917	0.109929	0.109916
0.2	0.217459	0.217911	0.218031	0.218048	0.218050
0.3	0.321363	0.321994	0.322156	0.322178	0.322193
0.4	0.418023	0.418788	0.418983	0.419009	0.419034
0.5	0.501646	0.502507	0.502727	0.502755	0.502789
0.6	0.561067	0.562012	0.562255	0.562286	0.562325
0.7	0.574460	0.575504	0.575775	0.575811	0.575851
0.8	0.504064	0.505161	0.505453	0.505494	0.505521
0.9	0.308269	0.309092	0.309324	0.309363	0.309346
L_2	0.001013	0.000248	0.000050	0.000029	
L_∞	0.001457	0.000362	0.000076	0.000075	



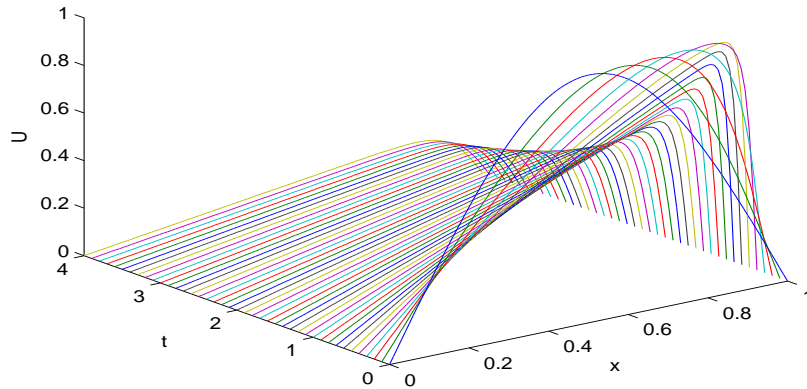
Şekil 3.9: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)

$\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri için $t = 1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 3.14 de verildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümlerle karşılaştırıldı. Tabloda h nın farklı değerleri için hata normlarının da kıyaslaması yapıldı. Tablo 3.14 den L_2 ve L_∞ hata normlarının h nın değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Şekil 3.10 da $\nu = 0.01$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ alınarak $t = 0$ dan $t = 4$ e kadar farklı zamanlarda K-ÜSFY ile bulunan sonuçlar verildi. Dalganın zamanla değişimini gösteren bu şekilden zaman artarken dalganın söndüğü görülmektedir.

Tablo 3.14: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 1$ de elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.074579	0.075190	0.075336	0.075353	0.075382
0.2	0.149788	0.150428	0.150591	0.150611	0.150645
0.3	0.226083	0.225750	0.225684	0.225677	0.225666
0.4	0.303688	0.301176	0.300521	0.300442	0.300309
0.5	0.382637	0.376699	0.374994	0.374783	0.374420
0.6	0.462848	0.452278	0.448969	0.448548	0.447816
0.7	0.544183	0.527837	0.522274	0.521547	0.520268
0.8	0.626472	0.603255	0.594681	0.593530	0.591476
0.9	0.704923	0.676605	0.664694	0.663031	0.660019
L_2	0.019166	0.006959	0.001931	0.001241	
L_∞	0.044903	0.016585	0.004715	0.003043	



Şekil 3.10: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)

Tablo 3.15 de $\nu = 1$, $\nu = 0.1$ ve $\nu = 0.01$ değerleri için $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-5}$ alınarak $x = 0.25$, $x = 0.5$ ve $x = 0.75$ noktalarında zaman değişirken çözümün değişimi incelendi. Ayrıca tabloda her bir ν değeri için K-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözümlerin karşılaştırılması verildi.

Tablo 3.15: $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

		$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Tam		Tam		Tam	
x	t	K-ÜSFY	Çözüm	K-ÜSFY	Çözüm	K-ÜSFY	Çözüm
0.25	0.1	0.253837	0.253638	0.533870	0.534143	0.571913	0.566328
	0.5	0.005089	0.005065	0.270762	0.270790	0.301291	0.301151
	1.0	0.000037	0.000036	0.162561	0.162565	0.188163	0.188194
	2.0	0.000000	0.000000	0.068215	0.068206	0.107368	0.107381
	3.0	0.000000	0.000000	0.027212	0.027202	0.075108	0.075114
0.5	0.1	0.371757	0.371577	0.877252	0.877280	0.993645	0.947414
	0.5	0.007200	0.007169	0.502727	0.502789	0.593214	0.588696
	1.0	0.000052	0.000052	0.291898	0.291916	0.374994	0.374420
	2.0	0.000000	0.000000	0.107904	0.107890	0.214595	0.214558
	3.0	0.000000	0.000000	0.040219	0.040205	0.150182	0.150179
0.75	0.1	0.272801	0.272582	0.762229	0.761797	0.915697	0.860132
	0.5	0.005097	0.005073	0.554036	0.554111	0.856231	0.838033
	1.0	0.000037	0.000036	0.287462	0.287474	0.558607	0.556051
	2.0	0.000000	0.000000	0.086596	0.086579	0.321502	0.321282
	3.0	0.000000	0.000000	0.029784	0.029772	0.224843	0.224811

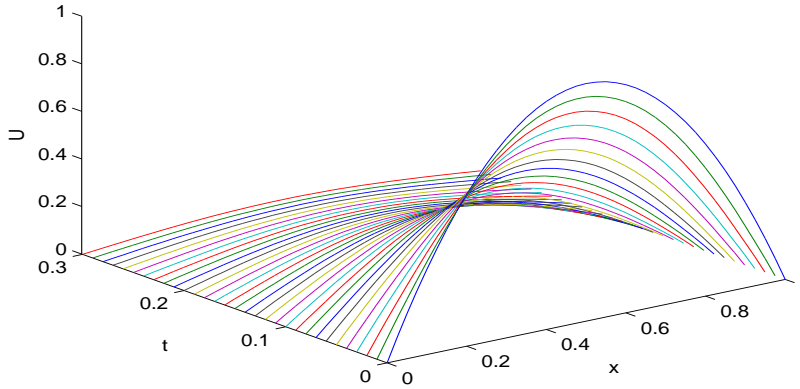
3.2.2 Problem 2' nin K-ÜSFY ile Çözümü

Bu kısımda kapalı üstel sonlu fark yöntemi ile Problem 2' nin çözümünü incelemek için $\nu = 1$, 0.1 ve 0.01 olarak ele alındı. İlk olarak $\nu = 1$, $k = 10^{-6}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 3.16 da verildi. Bu tabloda h nin farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Aynı zamanda tabloda farklı h değerleri için L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması yapıldı. Tablodan h nin değeri küçüldükçe, yani konum için bölüntü sayısı arttıkça her iki hata normunun da azaldığı görülmektedir.

Şekil 3.11 de $\nu = 1$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ alınarak $t = 0$ dan $t = 0.3$ e kadar farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler verildi. Şekilde dalganın zamanla değişimi incelendiğinde zaman artarken dalganın söndüğü görülmektedir.

Tablo 3.16: $\nu = 1$, $k = 10^{-6}$ ve h nın farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.112668	0.112847	0.112902	0.112913	0.112892
0.2	0.215815	0.216154	0.216249	0.216265	0.216252
0.3	0.300352	0.300823	0.300951	0.300971	0.300966
0.4	0.358126	0.358690	0.358840	0.358863	0.358863
0.5	0.382631	0.383235	0.383397	0.383420	0.383422
0.6	0.369889	0.370477	0.370634	0.370658	0.370658
0.7	0.319400	0.319911	0.320050	0.320071	0.320066
0.8	0.234882	0.235261	0.235367	0.235385	0.235371
0.9	0.124462	0.124666	0.124729	0.124742	0.124718
L_2	0.000559	0.000130	0.000017	0.000015	
L_∞	0.000792	0.000187	0.000026	0.000031	



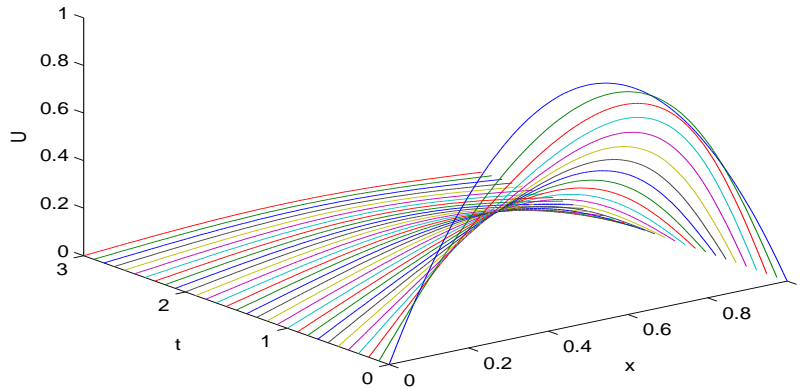
Şekil 3.11: $\nu = 1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)

$\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri için $t = 0.5$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 3.17 verildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Ayrıca tabloda her h değerine karşılık bulunan hata normlarının da karşılaştırılması yapıldı. Tablo 3.17 den L_2 ve L_∞ hata normlarının h nın değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Şekil 3.12 de $\nu = 0.1$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ alınarak $t = 0$ dan $t = 3$ e kadar farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler verildi. Şekil 3.12 den dalganın zamana göre değişimi incelendiğinde dalganın zamanla söndüğü görülmektedir.

Tablo 3.17: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.112364	0.112599	0.112666	0.112678	0.112664
0.2	0.222869	0.223317	0.223436	0.223453	0.223454
0.3	0.329276	0.329906	0.330069	0.330091	0.330105
0.4	0.428297	0.429069	0.429266	0.429292	0.429317
0.5	0.514238	0.515113	0.515336	0.515365	0.515398
0.6	0.576042	0.577004	0.577251	0.577283	0.577323
0.7	0.591628	0.592690	0.592966	0.593003	0.593043
0.8	0.521613	0.522733	0.523031	0.523073	0.523100
0.9	0.320645	0.321491	0.321731	0.321770	0.321752
L_2	0.001029	0.000252	0.000050	0.000030	
L_∞	0.001486	0.000370	0.000077	0.000078	



Şekil 3.12: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)

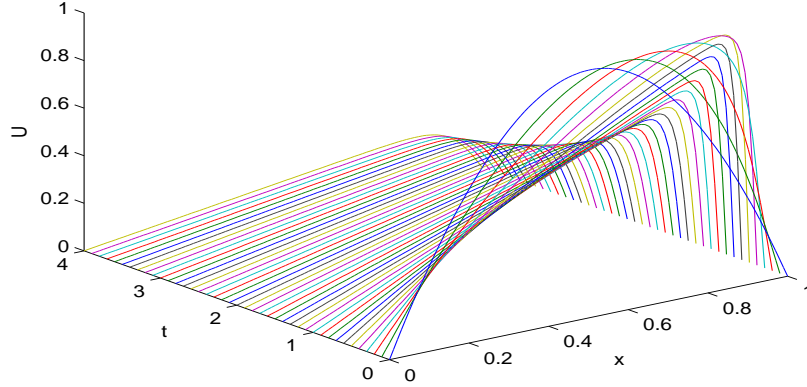
$\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 3.18 de verildi. Tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Tablo 3.18 de her h değeri için verilen hata normları incelendiğinde L_2 ve L_∞ hata normlarının h nın değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Şekil 3.13 de $\nu = 0.01$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ alınarak $t = 0$ dan $t = 4$ e kadar farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler verildi. Şekil 3.13 zaman değişirken dalganın nasıl değiştiğini göstermektedir. Şekilden dalganın zamanla söndüğü görülmektedir.

Tablo 3.18: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.077331	0.077908	0.078045	0.078062	0.078088
0.2	0.155144	0.155732	0.155883	0.155902	0.155934
0.3	0.233783	0.233398	0.233320	0.233311	0.233298
0.4	0.313404	0.310845	0.310172	0.310090	0.309953
0.5	0.394024	0.388018	0.386267	0.386049	0.385676
0.6	0.475579	0.464861	0.461436	0.460998	0.460236
0.7	0.557963	0.541300	0.535489	0.534724	0.533376
0.8	0.641043	0.617225	0.608193	0.606969	0.604781
0.9	0.720284	0.690870	0.678166	0.676377	0.673123
L_2	0.019959	0.007387	0.002068	0.001331	
L_∞	0.047161	0.017746	0.005112	0.003300	

Tablo 3.19, $\nu = 1$, $\nu = 0.1$ ve $\nu = 0.01$ değerleri için $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-5}$ alınarak $x = 0.25$, $x = 0.5$ ve $x = 0.75$ noktalarında zaman değişirken çözümün değişimini göstermektedir. Tabloda her bir ν değeri için elde edilen nümerik sonuçların tam çözümle karşılaştırılması verildi.



Şekil 3.13: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)

Tablo 3.19: $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

		$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	K-ÜSFY	Tam Çözüm	K-ÜSFY	Tam Çözüm	K-ÜSFY	Tam Çözüm
0.25	0.1	0.261689	0.261480	0.562284	0.562577	0.614849	0.607363
	0.5	0.005251	0.005227	0.277441	0.277468	0.317498	0.317320
	1.0	0.000038	0.000038	0.165596	0.165599	0.194664	0.194690
	2.0	0.000000	0.000000	0.069523	0.069514	0.109470	0.109482
	3.0	0.000000	0.000000	0.027768	0.027759	0.076129	0.076134
0.5	0.1	0.383613	0.383422	0.893053	0.893047	1.004935	0.956007
	0.5	0.007430	0.007398	0.515336	0.515398	0.614953	0.609886
	1.0	0.000054	0.000053	0.298325	0.298343	0.386267	0.385676
	2.0	0.000000	0.000000	0.110214	0.110199	0.218623	0.218588
	3.0	0.000000	0.000000	0.041079	0.041065	0.152183	0.152180
0.75	0.1	0.281803	0.281573	0.791320	0.790873	0.944395	0.886707
	0.5	0.005260	0.005235	0.571839	0.571914	0.872152	0.852123
	1.0	0.000038	0.000038	0.295844	0.295857	0.572027	0.569319
	2.0	0.000000	0.000000	0.088698	0.088680	0.327137	0.326926
	3.0	0.000000	0.000000	0.030452	0.030440	0.227771	0.227743

3.2.3 Problem 3' ün K-ÜSFY ile Çözümü

Tablo 3.20 de Problem 3 için $a = 0$, $b = 8$ ve $\nu = 0.5$ olmak üzere $k = 10^{-4}$ alınarak farklı h değerleri için K-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Ayrıca farklı h değerleri için elde edilen hata normlarının da karşılaştırıldığı Tablo 3.20 den h konum adımının değeri küçüldükçe, L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.21 de $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$ olmak üzere $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ alınarak farklı t değerleri için K-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözümlerin karşılaştırılması verildi.

$a = 0$, $b = 3$ ve $\nu = 0.05$ olmak üzere $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ alınarak farklı t değerleri için K-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözümler Tablo 3.22 de karşılaştırıldı.

Tablo 3.20: $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$ ve h nın farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 1.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	Tam Çözüm
0.5	0.152993	0.153247	0.153351	0.153273
1.0	0.265317	0.265678	0.265785	0.265771
1.5	0.303718	0.304029	0.304111	0.304125
2.0	0.261240	0.261375	0.261409	0.261421
2.5	0.172248	0.172186	0.172171	0.172169
3.0	0.088287	0.088123	0.088082	0.088070
3.5	0.036025	0.035872	0.035833	0.035820
4.0	0.011984	0.011891	0.011867	0.011859
4.5	0.003304	0.003261	0.003251	0.003246
5.0	0.000761	0.000746	0.000743	0.000741
L_2	0.000546	0.000120	0.000092	
L_∞	0.000462	0.000102	0.000154	

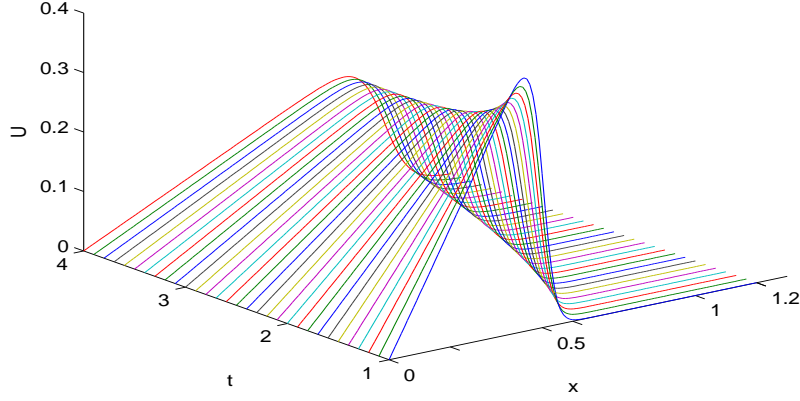
Tablo 3.21: $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)

x	$t = 1.5$		$t = 3$		$t = 4.5$	
	K-ÜSFY	Tam Çözüm	K-ÜSFY	Tam Çözüm	K-ÜSFY	Tam Çözüm
0.5	0.153351	0.153273	0.064326	0.064262	0.038032	0.037989
1.0	0.265785	0.265771	0.118859	0.118804	0.071911	0.071869
1.5	0.304111	0.304125	0.155128	0.155087	0.097969	0.097931
2.0	0.261409	0.261421	0.167649	0.167623	0.113419	0.113387
2.5	0.172171	0.172169	0.156308	0.156296	0.117008	0.116984
3.0	0.088082	0.088070	0.127386	0.127382	0.109507	0.109491
3.5	0.035833	0.035820	0.091326	0.091325	0.093695	0.093685
4.0	0.011867	0.011859	0.057977	0.057975	0.073610	0.073605
4.5	0.003251	0.003246	0.032847	0.032844	0.053303	0.053300
5.0	0.000743	0.000741	0.016739	0.016735	0.035717	0.035717
L_2	0.000092		0.000079		0.000412	
L_∞	0.000154		0.000067		0.000742	

Tablo 3.22: $a = 0$, $b = 3$, $\nu = 0.05$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)

x	$t = 1.5$		$t = 3$		$t = 4.5$	
	K-ÜSFY	Tam Çözüm	K-ÜSFY	Tam Çözüm	K-ÜSFY	Tam Çözüm
0.25	0.116247	0.116373	0.053734	0.053738	0.033644	0.033640
0.50	0.184295	0.184427	0.095070	0.095089	0.061647	0.061647
0.75	0.152079	0.152062	0.110241	0.110268	0.078040	0.078047
1.00	0.061650	0.061522	0.091876	0.091895	0.078064	0.078076
1.25	0.012873	0.012793	0.054058	0.054048	0.062423	0.062433
1.50	0.001595	0.001574	0.022653	0.022624	0.039664	0.039663
1.75	0.000126	0.000123	0.007076	0.007051	0.020201	0.020190
2.00	0.000006	0.000006	0.001718	0.001705	0.008438	0.008425
L_2	0.000119		0.000029		0.000018	
L_∞	0.000152		0.000030		0.000042	

Şekil 3.14 de $a = 0$, $b = 1.2$, $\nu = 0.005$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ alınarak $t = 0$ dan $t = 4$ e kadar farklı zamanlarda Problem 3' ün K-ÜSFY ile elde edilen çözümleri verildi. Şekilden dalganın zamanla sola doğru kayarak söndüğü görülmektedir.



Şekil 3.14: $a = 0$, $b = 1.2$, $\nu = 0.005$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 3)

3.3 Crank-Nicolson Üstel Sonlu Fark Yöntemi

Isı denklemi için Crank-Nicolson üstel sonlu fark yaklaşımı

$$\Theta_i^{j+1} = \Theta_i^j \exp \left\{ -\frac{r}{2} \left(\frac{2\Theta_i^j - \Theta_{i-1}^j - \Theta_{i+1}^j}{\Theta_i^j} + \frac{2\Theta_i^{j+1} - \Theta_{i-1}^{j+1} - \Theta_{i+1}^{j+1}}{\Theta_i^j} \right) \right\} \quad (3.3.1)$$

olur. Isı denklemi için sınır şartları $\Theta_x(0, t) = \Theta_x(1, t) = 0$ olduğundan (3.3.1) fark yaklaşımı

$i = 0$ için;

$$\Theta_0^{j+1} = \Theta_0^j \exp \left\{ -\frac{r}{2} \left(\frac{2\Theta_0^j - 2\Theta_1^j}{\Theta_0^j} + \frac{2\Theta_0^{j+1} - 2\Theta_1^{j+1}}{\Theta_0^j} \right) \right\}$$

$i = 1, 2, \dots, n-1$ için;

$$\Theta_i^{j+1} = \Theta_i^j \exp \left\{ -\frac{r}{2} \left(\frac{2\Theta_i^j - \Theta_{i-1}^j - \Theta_{i+1}^j}{\Theta_i^j} + \frac{2\Theta_i^{j+1} - \Theta_{i-1}^{j+1} - \Theta_{i+1}^{j+1}}{\Theta_i^j} \right) \right\} \quad (3.3.2)$$

$i = n$ için;

$$\Theta_n^{j+1} = \Theta_n^j \exp \left\{ -\frac{r}{2} \left(\frac{2\Theta_n^j - 2\Theta_{n-1}^j}{\Theta_n^j} + \frac{2\Theta_n^{j+1} - 2\Theta_{n-1}^{j+1}}{\Theta_n^j} \right) \right\}$$

olur. (3.3.2) sisteminden elde edilen çözümler

$$U_i^j = -\frac{\nu}{h} \left(\frac{\Theta_{i+1}^j - \Theta_{i-1}^j}{\Theta_i^j} \right), \quad i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (3.3.3)$$

dönüşümü yardımıyla Burger denkleminin çözümüne dönüştürülür. (3.3.2) denklem sistemi bir non-lineer denklem sistemidir. $\mathbf{V} = [\Theta_1^{n+1}, \Theta_2^{n+1}, \dots, \Theta_{N-1}^{n+1}]^T$ olmak üzere bu sistem

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0} \quad (3.3.4)$$

şeklinde gösterilebilir. Bu sistemi Newton yöntemi ile çözmek için aşağıdaki adımlar izlenir:

1. $\mathbf{V}^{(0)}$ değerlerinin belirlenmesi
2. $m = 0, 1, 2, \dots$ için

$$J(\mathbf{V}^{(m)})\delta^{(m)} = -\mathbf{F}(\mathbf{V}^{(m)}) \text{ sisteminin çözümü}$$

$$\mathbf{V}^{(m+1)} = \mathbf{V}^{(m)} + \delta^{(m)} \text{ hesaplanması.}$$

Burada $J(\mathbf{V}^{(m)})$ analitik olarak hesaplanan Jacobian matristir[14]. Newton iterasyonu için durdurma kriteri olarak $\|\mathbf{F}(\mathbf{V}^{(m)})\|_{\infty} \leq 10^{-5}$ alınmıştır.

Crank-Nicolson üstel sonlu fark yönteminin Burger denkleminin çözümü için uygun bir yöntem olduğunu göstermek amacıyla sonraki kısımda, ikinci bölümde verilen üç model problemin çözümleri elde edildi. Elde edilen bu çözümler tam çözümlerle karşılaştırıldı. Bulunan sonuçların analitik çözüme yakınlığını görmek amacıyla L_2 ve L_{∞} hata normları hesaplandı.

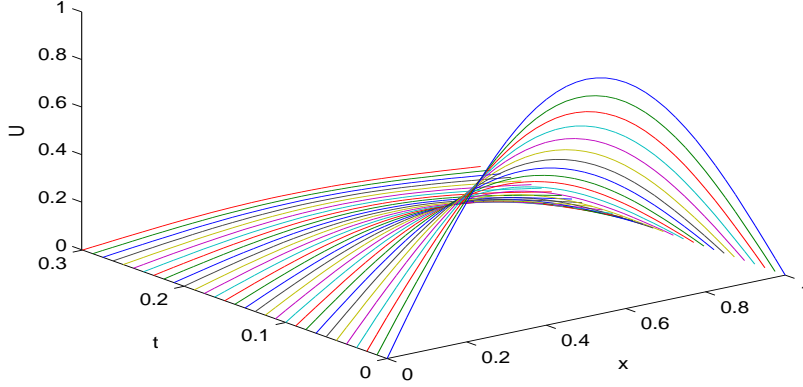
3.3.1 Problem 1' in CN-ÜSFY ile Çözümü

Bu kısımda Crank-Nicolson yöntemi ile Problem 1' in çözümü araştırılırken $\nu = 1, 0.1$ ve 0.01 olarak alındı. İlk olarak $\nu = 1, k = 10^{-6}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 3.23 de verildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Tabloda farklı h değerleri için bulunan L_2 ve L_{∞} hata normları incelendiğinde h nın değeri küçüldükçe, yani konum için bölüntü sayısı arttıkça her iki hata normunun da azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.23: $\nu = 1, k = 10^{-6}$ ve h nın farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.109315	0.109487	0.109535	0.109543	0.109538
0.2	0.209362	0.209689	0.209776	0.209789	0.209792
0.3	0.291296	0.291751	0.291869	0.291885	0.291896
0.4	0.347205	0.347748	0.347889	0.347908	0.347924
0.5	0.370806	0.371389	0.371539	0.371559	0.371577
0.6	0.358297	0.358863	0.359009	0.359029	0.359046
0.7	0.309257	0.309748	0.309876	0.309893	0.309905
0.8	0.227340	0.227703	0.227800	0.227814	0.227817
0.9	0.120435	0.120629	0.120683	0.120692	0.120687
L_2	0.000546	0.000132	0.000025	0.000012	
L_{∞}	0.000772	0.000189	0.000038	0.000018	

Şekil 3.15 de $\nu = 1$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ alınarak $t = 0$ dan $t = 0.3$ e kadar farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler verildi. Dalganın zamanla değişimini gösteren Şekil 3.15 den zaman arttıkça dalganın söndüğü görülmektedir.



Şekil 3.15: $\nu = 1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)

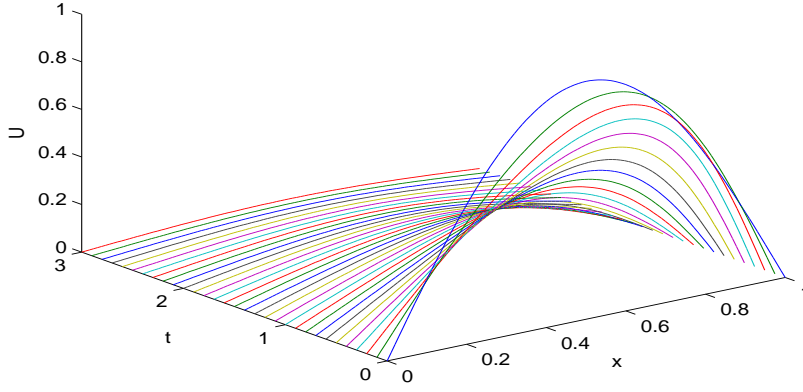
$\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri için $t = 0.5$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 3.24 de verildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Tablo 3.24 den L_2 ve L_∞ hata normları karşılaştırıldığında h nın değeri küçüldükçe hatanın azaldığı görülmektedir.

Şekil 3.16 da $\nu = 0.1$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ alınarak $t = 0$ dan $t = 3$ e kadar farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler verildi. Şekil 3.16 dalganın zamanla değişimini göstermektedir. Şekilden dalganın zamanla söndüğü görülmektedir.

$\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri için $t = 1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 3.25 de gösterildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Aynı zamanda farklı h değerlerine karşılık gelen L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılması Tablo 3.25 de verildi. Tablodan h nın değeri küçüldükçe hata normunun da azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.24: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.109608	0.109844	0.109906	0.109916	0.109916
0.2	0.217455	0.217905	0.218020	0.218036	0.218050
0.3	0.321359	0.321988	0.322147	0.322167	0.322193
0.4	0.418019	0.418783	0.418975	0.418999	0.419034
0.5	0.501643	0.502503	0.502721	0.502748	0.502789
0.6	0.561065	0.562009	0.562249	0.562279	0.562325
0.7	0.574459	0.575502	0.575768	0.575802	0.575851
0.8	0.504063	0.505157	0.505440	0.505477	0.505521
0.9	0.308265	0.309081	0.309300	0.309331	0.309346
L_2	0.001015	0.000252	0.000057	0.000033	
L_∞	0.001458	0.000366	0.000084	0.000049	



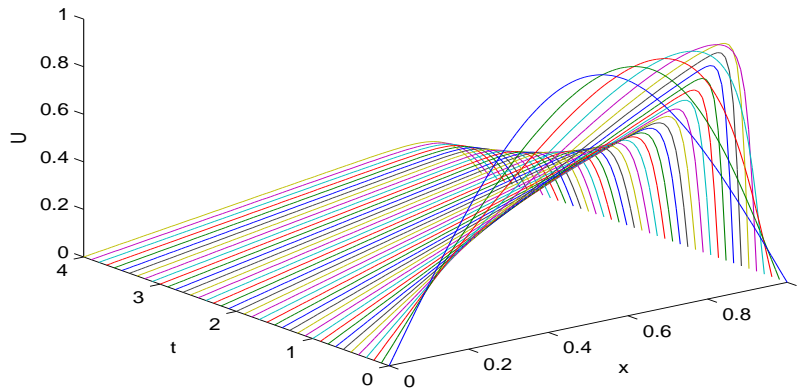
Şekil 3.16: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)

Tablo 3.25: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.074578	0.075189	0.075335	0.075352	0.075382
0.2	0.149787	0.150427	0.150590	0.150610	0.150645
0.3	0.226084	0.225750	0.225684	0.225677	0.225666
0.4	0.303691	0.301179	0.300524	0.300445	0.300309
0.5	0.382643	0.376705	0.375001	0.374789	0.374420
0.6	0.462860	0.452290	0.448981	0.448561	0.447816
0.7	0.544203	0.527859	0.522295	0.521569	0.520268
0.8	0.626502	0.603287	0.594713	0.593562	0.591476
0.9	0.704967	0.666154	0.664740	0.663077	0.660019
L_2	0.019185	0.006977	0.001949	0.001259	
L_∞	0.044947	0.016632	0.004764	0.003091	

Şekil 3.17 de $\nu = 0.01$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ alınarak $t = 0$ dan $t = 4$ e kadar farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile bulunan sonuçlar verildi. Şekil 3.17 den dalganın zamanla değişimi izlenmektedir. Şekilden zaman artarken dalganın söndüğü görülmektedir.

Tablo 3.26 da $\nu = 1$, $\nu = 0.1$ ve $\nu = 0.01$ değerleri için $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-5}$ alınarak $x = 0.25$, $x = 0.5$ ve $x = 0.75$ noktalarında zaman değişirken çözümün değişimi incelendi. Tabloda bu ν değerleri için elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması verildi.



Şekil 3.17: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 1)

Tablo 3.26: $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

		$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	CN-ÜSFY	Tam Çözüm	CN-ÜSFY	Tam Çözüm	CN-ÜSFY	Tam Çözüm
0.25	0.1	0.253712	0.253638	0.533864	0.534143	0.571919	0.566328
	0.5	0.005077	0.005065	0.270752	0.270790	0.301292	0.301151
	1.0	0.000037	0.000036	0.162554	0.162565	0.188163	0.188194
	2.0	0.000000	0.000000	0.068209	0.068206	0.107367	0.107381
	3.0	0.000000	0.000000	0.027208	0.027202	0.075108	0.075114
0.5	0.1	0.371630	0.371577	0.877254	0.877280	0.993672	0.947414
	0.5	0.007185	0.007169	0.502721	0.502789	0.593237	0.588696
	1.0	0.000052	0.000052	0.291889	0.291916	0.375001	0.374420
	2.0	0.000000	0.000000	0.107896	0.107890	0.214596	0.214558
	3.0	0.000000	0.000000	0.040214	0.040205	0.150182	0.150179
0.75	0.1	0.272663	0.272582	0.762231	0.761797	0.915667	0.860129
	0.5	0.005086	0.005073	0.554027	0.554111	0.856298	0.838033
	1.0	0.000037	0.000036	0.287448	0.287474	0.558634	0.556051
	2.0	0.000000	0.000000	0.086587	0.086579	0.321507	0.321282
	3.0	0.000000	0.000000	0.029780	0.029772	0.224844	0.224811

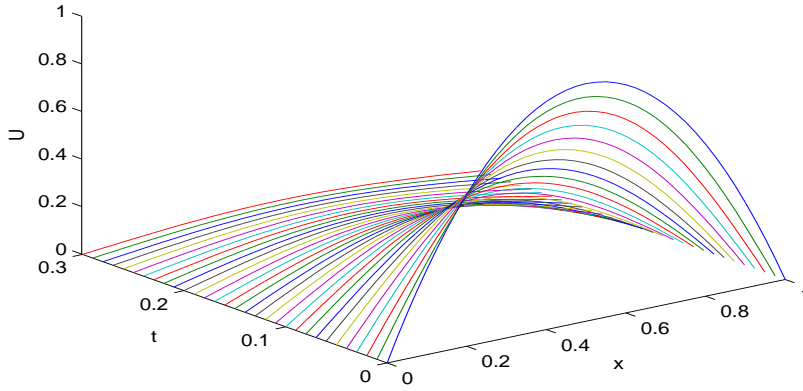
3.3.2 Problem 2' nin CN-ÜSFY ile Çözümü

Bu kısımda Problem 2' nin Crank-Nicolson üstel sonlu fark yöntemi ile çözümü $\nu = 1, 0.1$ ve 0.01 için incelendi. İlk olarak $\nu = 1$, $k = 10^{-6}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 3.27 de verildi. Bu tabloda h nin farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Ayrıca tabloda farklı h değerleri için bulunan hata normları karşılaştırıldı. Tablodan L_2 ve L_∞ hata normlarının h nin değeri küçüldükçe, yani konum için bölüntü sayısı arttıkça azaldığı görülmektedir.

Şekil 3.18 de $\nu = 1$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ alınarak $t = 0$ dan $t = 0.3$ e kadar farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler verildi. Şekil 3.18 den dalganın zamanla değişimi incelendiğinde dalganın zaman artarken söndüğü görülmektedir.

Tablo 3.27: $\nu = 1$, $k = 10^{-6}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.112664	0.112840	0.112890	0.112898	0.112892
0.2	0.215811	0.216147	0.216236	0.216249	0.216252
0.3	0.300348	0.300816	0.300938	0.300955	0.300966
0.4	0.358122	0.358682	0.358827	0.358847	0.358863
0.5	0.382626	0.383228	0.383383	0.383404	0.383422
0.6	0.369884	0.370469	0.370621	0.370641	0.370658
0.7	0.319396	0.319903	0.320036	0.320054	0.320066
0.8	0.234878	0.235253	0.235353	0.235367	0.235371
0.9	0.124458	0.124659	0.124715	0.124724	0.124718
L_2	0.000563	0.000136	0.000026	0.000012	
L_∞	0.000796	0.000195	0.000039	0.000018	



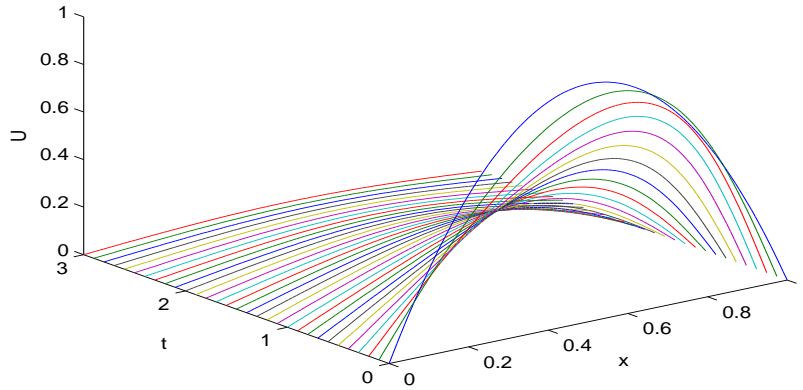
Şekil 3.18: $\nu = 1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)

$\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.5$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 3.28 de verildi. Bu tabloda h nin farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Tablo 3.28 de farklı h değerleri için verilen hata normları incelendiğinde L_2 ve L_∞ hata normlarının h nin değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Şekil 3.19 da $\nu = 0.1$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ alınarak $t = 0$ dan $t = 3$ e kadar farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler verildi. Şekil 3.19 da dalganın değişimi incelendiğinde dalganın zamanla söndüğü görülmektedir.

Tablo 3.28: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.112360	0.112593	0.112655	0.112664	0.112664
0.2	0.222864	0.223311	0.223425	0.223440	0.223454
0.3	0.329271	0.329900	0.330059	0.330080	0.330105
0.4	0.428293	0.429063	0.429257	0.429282	0.429317
0.5	0.514235	0.515108	0.515329	0.515356	0.515398
0.6	0.576040	0.577001	0.577245	0.577275	0.577323
0.7	0.591628	0.592688	0.592959	0.592993	0.593043
0.8	0.521613	0.522728	0.523017	0.523055	0.523100
0.9	0.320641	0.321480	0.321705	0.321738	0.321752
L_2	0.001031	0.000256	0.000058	0.000033	
L_∞	0.001487	0.000373	0.000086	0.000050	



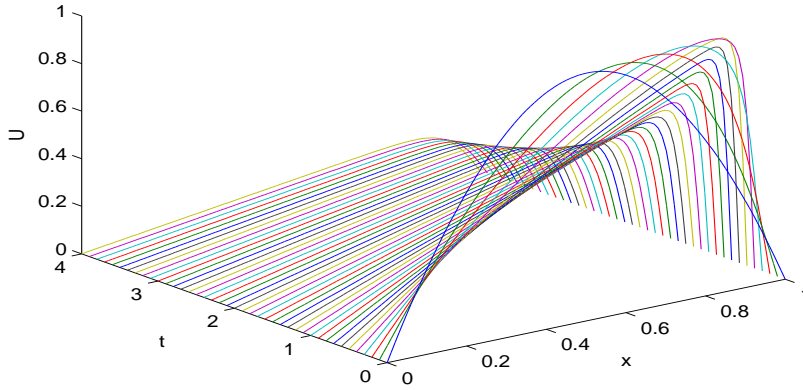
Şekil 3.19: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)

Tablo 3.29 da $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 1$ anında elde edilen sonuçlar verildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçların birbirleriyle ve tam çözümlerle karşılaştırılması sunuldu. Ayrıca tabloda farklı h değerleri için elde edilen hata normlarının da karşılaştırılması verildi. Tablo 3.29 dan L_2 ve L_∞ hata normlarının h nın değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Dalganın zamanla değişimini gözlemlemek amacıyla Şekil 3.20 de $\nu = 0.01$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ alınarak $t = 0$ dan $t = 4$ e kadar farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler verildi. Şekil 3.20 incelendiğinde dalganın zamanla söndüğü görülmektedir.

Tablo 3.29: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 1$ de elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.077330	0.077907	0.078044	0.078060	0.078088
0.2	0.155144	0.155731	0.155882	0.155901	0.155934
0.3	0.233783	0.233398	0.233320	0.233311	0.233298
0.4	0.313406	0.310848	0.310175	0.310093	0.309953
0.5	0.394031	0.388026	0.386275	0.386057	0.385676
0.6	0.475592	0.464876	0.461450	0.461012	0.460236
0.7	0.557984	0.541323	0.535512	0.534748	0.533376
0.8	0.641075	0.617260	0.608228	0.607004	0.604781
0.9	0.720331	0.690919	0.678215	0.676425	0.673123
L_2	0.019979	0.007407	0.002089	0.001351	
L_∞	0.047208	0.017796	0.005164	0.003351	



Şekil 3.20: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 2)

Tablo 3.30 da $\nu = 1$, $\nu = 0.1$ ve $\nu = 0.01$ değerleri için $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-5}$ alınarak $x = 0.25$, $x = 0.5$ ve $x = 0.75$ noktalarında zaman değişirken çözümün değişimi incelendi. Tabloda bu değerler için CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözümlerin karşılaştırılması yapıldı.

Tablo 3.30: $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		CN-ÜSFY	Tam Çözüm	CN-ÜSFY	Tam Çözüm	CN-ÜSFY	Tam Çözüm
0.25	0.1	0.261558	0.261480	0.562277	0.562577	0.614858	0.607363
	0.5	0.005239	0.005227	0.277430	0.277468	0.317499	0.317320
	1.0	0.000038	0.000038	0.165588	0.165599	0.194663	0.194690
	2.0	0.000000	0.000000	0.069517	0.069514	0.109469	0.109482
	3.0	0.000000	0.000000	0.027765	0.027759	0.076129	0.076134
0.5	0.1	0.383479	0.383422	0.893055	0.893047	1.004960	0.956007
	0.5	0.007414	0.007398	0.515329	0.515398	0.614980	0.609886
	1.0	0.000053	0.000053	0.298316	0.298343	0.386275	0.385676
	2.0	0.000000	0.000000	0.110205	0.110199	0.218624	0.218588
	3.0	0.000000	0.000000	0.041074	0.041065	0.152183	0.152180
0.75	0.1	0.281659	0.281573	0.791321	0.790873	0.944369	0.886707
	0.5	0.005248	0.005235	0.571829	0.571914	0.872221	0.852123
	1.0	0.000038	0.000038	0.295829	0.295857	0.572056	0.569319
	2.0	0.000000	0.000000	0.088690	0.088680	0.327143	0.326926
	3.0	0.000000	0.000000	0.030447	0.030440	0.227773	0.227743

3.3.3 Problem 3' ün CN-ÜSFY ile Çözümü

Tablo 3.31 de $a = 0$, $b = 8$ ve $\nu = 0.5$ olmak üzere $k = 10^{-4}$ alınarak farklı h değerleri için $t = 1.5$ de CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Bu karşılaştırmamızın yanı sıra farklı h değerlerine karşılık gelen hata normları da karşılaştırıldı. Tablo 3.31 den h konum adımının değeri küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir.

Tablo 3.31: $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$ ve h nın farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 1.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	Tam Çözüm
0.5	0.152976	0.153218	0.153299	0.153273
1.0	0.265306	0.265662	0.265759	0.265771
1.5	0.303714	0.304024	0.304103	0.304125
2.0	0.261243	0.261377	0.261411	0.261421
2.5	0.172252	0.172190	0.172175	0.172169
3.0	0.088289	0.088125	0.088084	0.088070
3.5	0.036025	0.035872	0.035833	0.035820
4.0	0.011984	0.011890	0.011867	0.011859
4.5	0.003303	0.003261	0.003250	0.003246
5.0	0.000761	0.000746	0.000742	0.000741
L_2	0.000557	0.000131	0.000045	
L_∞	0.000472	0.000113	0.000075	

Tablo 3.32 de Problem 3 için $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$ olmak üzere $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ alınarak farklı t değerleri için CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözümler karşılaştırıldı. Tabloda ele alınan her t değeri için elde edilen hata normları da verildi.

Tablo 3.32: $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$, $h = 0.025$ için belli zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)

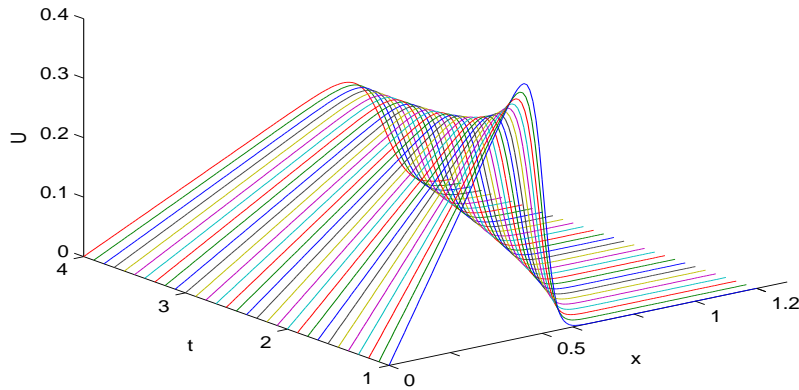
x	$t = 1.5$		$t = 3$		$t = 4.5$	
	CN-ÜSFY	Tam Çözüm	CN-ÜSFY	Tam Çözüm	CN-ÜSFY	Tam Çözüm
0.5	0.153299	0.153273	0.064292	0.064262	0.038010	0.037989
1.0	0.265759	0.265771	0.118828	0.118804	0.071889	0.071869
1.5	0.304103	0.304125	0.155103	0.155087	0.097948	0.097931
2.0	0.261411	0.261421	0.167632	0.167623	0.113401	0.113387
2.5	0.172175	0.172169	0.156299	0.156296	0.116994	0.116984
3.0	0.088084	0.088070	0.127383	0.127382	0.109497	0.109491
3.5	0.035833	0.035820	0.091326	0.091325	0.093689	0.093685
4.0	0.011867	0.011859	0.057977	0.057975	0.073608	0.073605
4.5	0.003250	0.003246	0.032848	0.032844	0.053302	0.053300
5.0	0.000742	0.000741	0.016739	0.016735	0.035717	0.035717
L_2	0.000045		0.000039		0.000409	
L_∞	0.000075		0.000038		0.000743	

Tablo 3.33 de $a = 0$, $b = 3$ ve $\nu = 0.05$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ alınarak farklı t zamanlarında CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözümler karşılaştırıldı. Ele alınan her t değeri için elde edilen hata normları tabloda verildi.

Tablo 3.33: $a = 0$, $b = 3$, $\nu = 0.05$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması. (Problem 3)

x	$t = 1.5$		$t = 3$		$t = 4.5$	
	CN-ÜSFY	Tam Çözüm	CN-ÜSFY	Tam Çözüm	CN-ÜSFY	Tam Çözüm
0.25	0.116239	0.116373	0.053728	0.053738	0.033640	0.033640
0.50	0.184293	0.184427	0.095065	0.095089	0.061642	0.061647
0.75	0.152082	0.152062	0.110239	0.110268	0.078037	0.078047
1.00	0.061651	0.061522	0.091876	0.091895	0.078062	0.078076
1.25	0.012873	0.012793	0.054060	0.054048	0.062423	0.062433
1.50	0.001595	0.001574	0.022654	0.022624	0.039665	0.039663
1.75	0.000126	0.000123	0.007075	0.007051	0.020201	0.020190
2.00	0.000006	0.000006	0.001717	0.001705	0.008438	0.008425
L_2	0.000122		0.000030		0.000019	
L_∞	0.000157		0.000030		0.000042	

Şekil 3.21 de $a = 0$, $b = 1.2$, $\nu = 0.005$ için $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ alınarak $t = 0$ dan $t = 4$ e kadar farklı zamanlarda Problem 3'ün CN-ÜSFY yöntemi ile elde edilen çözümleri verildi.



Şekil 3.21: $a = 0$, $b = 1.2$, $\nu = 0.005$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.01$ için farklı zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen çözümler. (Problem 3)

3.3.4 Sonuç

Bu bölümde açık, kapalı ve Crank-Nicolson üstel sonlu fark yöntemleri kullanılarak Hopf-Cole dönüşümü ile lineerleştirilen Burger denkleminin çözümü elde edildi. Bu üç farklı yöntem üç farklı model probleme uygulandı. Farklı konum adımı, zaman adımı ve ν viskozite değerleri için elde edilen sonuçlar tablo ve grafikler ile verildi. Tablolarda bu farklı değerler için elde edilen sonuçlar tam çözümlerle karşılaştırıldı. Sonuçların tam çözüme ne kadar yakın olduğunu görmek amacıyla L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanıp, tablolara eklendi. Hata normlarından ve karşılaştırmalardan Hopf-Cole dönüşümü ile lineerleştirilen Burger denklemine uygulanan üstel sonlu fark yöntemlerinin analitik sonuçlarla uyumlu olduğu gözlemlendi.

Bölüm 4

BURGER DENKLEMİNİN KAPALI, TAMAMEN KAPALI VE CRANK-NİCOLSON ÜSTEL SONLU FARK YÖNTEMLERİ İLE ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde Burger denkleminin çözümü için denklemin (2.5.1) ile verilen non-linear formuna direkt uygulanmak üzere üç yeni yöntem tanımlandı. Bunlar;

- Kapalı üstel sonlu fark yöntemi (K-ÜSFY)
- Tamamen kapalı üstel sonlu fark yöntemi (TK-ÜSFY)
- Crank-Nicolson üstel sonlu fark yöntemi (CN-ÜSFY)

dir. Her bir yöntem daha önce belirtilen üç model probleme uygulandı. Elde edilen nümerik çözümler analitik çözümlerle karşılaştırıldı.

4.1 Kapalı, Tamamen Kapalı ve Crank-Nicolson Üstel Sonlu Fark Yöntemleri

Burger denklemini

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad (4.1.1)$$

dir. Burada $u = A$ sabit sayısı alınarak (4.1.1) denklemini lineerleştirilmiş olur.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -A \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (4.1.2)$$

alınır (4.1.2) denkleminin her iki tarafı u ile bölünerek

$$\frac{1}{u} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{u} \left(-A \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (4.1.3)$$

$$\frac{\partial \ln u}{\partial t} = \frac{1}{u} \left(-A \frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \quad (4.1.4)$$

ifadesi elde edilir. (4.1.4) denklemindeki kısmi türevler yerine sonlu fark yaklaşımları alınır,

$$\frac{\ln U_i^{j+1} - \ln U_i^j}{k} = \frac{1}{U_i^j} \left[-A \frac{(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)}{2h} + \nu \frac{(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j)}{h^2} \right] \quad (4.1.5)$$

olur. Bu son ifadeyi

$$\ln \left(\frac{U_i^{j+1}}{U_i^j} \right) = \frac{\nu k}{h^2} \left[-\frac{Ah}{2\nu} \frac{(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)}{U_i^j} + \frac{(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j)}{U_i^j} \right] \quad (4.1.6)$$

şeklinde de yazabiliriz. Buradan,

$$U_i^{j+1} = U_i^j \exp \left\{ \frac{\nu k}{h^2} \left[-\frac{Ah}{2\nu} \frac{(U_{i+1}^j - U_{i-1}^j)}{U_i^j} + \frac{(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j)}{U_i^j} \right] \right\} \quad (4.1.7)$$

olur. Böylece Burger denkleminin için açık üstel sonlu fark yöntemi elde edilmiş olur. Bu yöntem 1990 yılında Bhattacharya[5] tarafından elde edilmiştir. Bhattacharya tarafından elde edilen bu yöntemden yola çıkarak Burger denkleminin çözümü için kapalı üstel sonlu fark yöntemi, tamamen kapalı üstel sonlu fark yöntemi ve Crank-Nicolson üstel sonlu fark yöntemi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Kapalı üstel sonlu fark yöntemi (K-ÜSFY) için sonlu fark yaklaşımı

$$U_i^{j+1} = U_i^j \exp \left\{ \frac{\nu k}{h^2} \left[-\frac{hU_i^j}{2\nu} \frac{(U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1})}{U_i^j} + \frac{(U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1})}{U_i^j} \right] \right\} \quad (4.1.8)$$

olur.

Tamamen kapalı üstel sonlu fark yöntemi (TK-ÜSFY) için sonlu fark yaklaşımı

$$U_i^{j+1} = U_i^j \exp \left\{ \frac{\nu k}{h^2} \left[-\frac{hU_i^{j+1}}{2\nu} \frac{(U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1})}{U_i^j} + \frac{(U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1})}{U_i^j} \right] \right\} \quad (4.1.9)$$

şeklinde elde edilir.

Crank-Nicolson üstel sonlu fark yöntemi (CN-ÜSFY) için sonlu fark yaklaşımı

$$U_i^{j+1} = U_i^j \exp \left\{ \frac{\nu_k}{2h^2} \left[-\frac{hU_i^j (U_{i+1}^j - U_{i-1}^j + U_{i+1}^{j+1} - U_{i-1}^{j+1})}{2\nu} + \frac{(U_{i-1}^j - 2U_i^j + U_{i+1}^j + U_{i-1}^{j+1} - 2U_i^{j+1} + U_{i+1}^{j+1})}{U_i^j} \right] \right\} \quad (4.1.10)$$

olur. Görüldüğü gibi (4.1.8), (4.1.9) ve (4.1.10) denklemleri ile belirtilen her bir yöntem bir non-linear denklem sistemi vermektedir. Bu nedenle

$$\mathbf{V} = [U_1^{n+1}, U_2^{n+1}, \dots, U_{N-1}^{n+1}]^T$$

olmak üzere her bir yöntem için her zaman adımında

$$\mathbf{F}(\mathbf{V}) = \mathbf{0} \quad (4.1.11)$$

şeklinde bir non-linear denklem sistemi çözmek gerekir. Bu amaçla Newton yöntemi aşağıdaki gibi uygulanır.

1. $\mathbf{V}^{(0)}$ değerlerinin belirlenmesi
2. $m = 0, 1, 2, \dots$ için

$$J(\mathbf{V}^{(m)})\delta^{(m)} = -\mathbf{F}(\mathbf{V}^{(m)}) \text{ sisteminin çözümü}$$

$$\mathbf{V}^{(m+1)} = \mathbf{V}^{(m)} + \delta^{(m)} \text{ hesaplanması}$$

Burada $J(\mathbf{V}^{(m)})$ analitik olarak hesaplanan Jacobian matristir[14]. Newton iterasyonu için durdurma kriteri olarak $\|\mathbf{F}(\mathbf{V}^{(m)})\|_\infty \leq 10^{-5}$ alınmıştır.

Burger denkleminin çözümü için kapalı, tamamen kapalı ve Crank-Nicolson üstel sonlu fark yöntemlerinin uygun olduğunu göstermek amacıyla yöntemler model problemlere uygulandı. Elde edilen sonuçlara göre çizilen grafikler üçüncü bölümde verilen grafiklerle benzer olduğundan sonuçlar sadece tablolar halinde verildi.

4.1.1 Problem 1' in K-ÜSFY ile Çözümü

Bu kısımda Problem 1' in kapalı üstel sonlu fark yöntemi ile çözümünü araştırılırken $\nu = 1, 0.1$ ve 0.01 olarak alındı. İlk olarak $\nu = 1, k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 4.1 de verildi. Bu tabloda h nin farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Tablodan farklı h değerleri için elde edilen hata normları karşılaştırıldığında L_2 ve L_∞ hata normlarının h nin değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.1: $\nu = 1, k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.109737	0.109595	0.109560	0.109556	0.109538
0.2	0.210184	0.209905	0.209835	0.209826	0.209792
0.3	0.292464	0.292059	0.291958	0.291945	0.291896
0.4	0.348637	0.348127	0.348000	0.347984	0.347924
0.5	0.372384	0.371806	0.371662	0.371644	0.371577
0.6	0.359872	0.359279	0.359131	0.359113	0.359046
0.7	0.310656	0.310116	0.309981	0.309965	0.309905
0.8	0.228393	0.227979	0.227875	0.227817	0.227817
0.9	0.121000	0.120774	0.120718	0.120687	0.120687
L_2	0.000579	0.000164	0.000060	0.000048	
L_∞	0.000827	0.000234	0.000086	0.000068	

$\nu = 0.1, k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 4.2 de verildi. Bu tabloda h nin farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırılırken, her bir h değerine karşılık gelen hata normları da karşılaştırıldı. Hata normlarının karşılaştırılmasından L_2 ve L_∞ hata normlarının h nin değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.3 de $\nu = 0.01, k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar verildi. Bu tabloda K-ÜSFY ile h nin farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Ayrıca farklı h değerlerine karşılık gelen hata normları da karşılaştırıldı. Tablo 4.3 den L_2 ve L_∞ hata normlarının h nin değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.2: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.223596	0.223487	0.223460	0.223457	0.223450
0.2	0.436093	0.435876	0.435822	0.435816	0.435802
0.3	0.625543	0.625226	0.625147	0.625138	0.625118
0.4	0.778253	0.777855	0.777755	0.777744	0.777721
0.5	0.877862	0.877425	0.877316	0.877303	0.877280
0.6	0.904769	0.904376	0.904278	0.904266	0.904247
0.7	0.837230	0.836997	0.836938	0.836931	0.836923
0.8	0.657304	0.657303	0.657302	0.657302	0.657306
0.9	0.365597	0.365714	0.365742	0.365746	0.365754
L_2	0.000361	0.000090	0.000023	0.000015	
L_∞	0.000582	0.000146	0.000037	0.000024	

Tablo 4.3: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.236099	0.235981	0.235952	0.235948	0.235941
0.2	0.461538	0.461304	0.461245	0.461238	0.461225
0.3	0.664788	0.664441	0.664354	0.664344	0.664325
0.4	0.832455	0.832011	0.831900	0.831886	0.831864
0.5	0.948075	0.947577	0.947453	0.947438	0.947414
0.6	0.990742	0.990299	0.990188	0.990175	0.990156
0.7	0.934357	0.934186	0.934141	0.934136	0.934131
0.8	0.750880	0.751232	0.751317	0.751327	0.751416
0.9	0.426913	0.427564	0.427726	0.427746	0.427646
L_2	0.000526	0.000274	0.000264	0.000156	
L_∞	0.001035	0.001455	0.001547	0.000785	

Tablo 4.4 de $\nu = 1$, $\nu = 0.1$ ve $\nu = 0.01$ değerleri için $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-5}$ alınarak $x = 0.25$, $x = 0.5$ ve $x = 0.75$ noktalarında zaman değişirken çözümün değişimi incelendi. Her bir ν değeri için K-ÜSFY ile elde edilen nümerik çözümler tam çözümlerle karşılaştırıldı.

Tablo 4.4: $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

		$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		Tam		Tam		Tam	
x	t	K-ÜSFY	Çözüm	K-ÜSFY	Çözüm	K-ÜSFY	Çözüm
0.25	0.1	0.253690	0.253638	0.534168	0.534143	0.566353	0.566328
	0.5	0.005071	0.005065	0.270812	0.270790	0.301168	0.301151
	1.0	0.000037	0.000036	0.162589	0.162565	0.188201	0.188194
	2.0	0.000000	0.000000	0.068234	0.068206	0.107384	0.107381
	3.0	0.000000	0.000000	0.027219	0.027202	0.075115	0.075114
0.5	0.1	0.371662	0.371577	0.877316	0.877280	0.947453	0.947414
	0.5	0.007177	0.007169	0.502864	0.502789	0.588738	0.588696
	1.0	0.000052	0.000052	0.292002	0.291916	0.374436	0.374420
	2.0	0.000000	0.000000	0.107947	0.107890	0.214563	0.214558
	3.0	0.000000	0.000000	0.040232	0.040205	0.150182	0.150179
0.75	0.1	0.272650	0.272582	0.761803	0.761797	0.860116	0.860129
	0.5	0.005079	0.005073	0.554361	0.554111	0.838160	0.838033
	1.0	0.000037	0.000036	0.287663	0.287474	0.556083	0.556051
	2.0	0.000000	0.000000	0.086638	0.086579	0.321295	0.321282
	3.0	0.000000	0.000000	0.029794	0.029772	0.224845	0.224811

4.1.2 Problem 2' nin K-ÜSFY ile Çözümü

Burada Problem 2' nin $\nu = 1, 0.1$ ve 0.01 değerleri için kapalı üstel sonlu fark yöntemi ile çözümleri verildi. İlk olarak $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 4.5 de verildi. Bu tabloda h nin farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Ayrıca tabloda h nin farklı değerleri için elde edilen hata normları da karşılaştırıldı. Tablodan L_2 ve L_∞ hata normlarının h nin değeri küçüldükçe, yani konum için bölüntü sayısı arttıkça azaldığı görülmektedir.

$\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri için $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 4.6 da verildi. Bu tabloda h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Tablo 4.6 dan h değerlerine karşılık gelen hata normları incelendiğinde L_2 ve L_∞ hata normlarının h nin değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.5: $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.113097	0.112951	0.112915	0.112910	0.112892
0.2	0.216654	0.216368	0.216296	0.216288	0.216252
0.3	0.301549	0.301133	0.301029	0.301016	0.300966
0.4	0.359596	0.359072	0.358941	0.358925	0.358863
0.5	0.384254	0.383658	0.383509	0.383492	0.383422
0.6	0.371511	0.370899	0.370746	0.370727	0.370658
0.7	0.320844	0.320285	0.320145	0.320128	0.320066
0.8	0.235969	0.235539	0.235431	0.235418	0.235371
0.9	0.125044	0.124809	0.124751	0.124744	0.124718
L_2	0.000597	0.000169	0.000062	0.000049	
L_∞	0.000853	0.000242	0.000087	0.000070	

Tablo 4.6: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.240200	0.239971	0.239914	0.239907	0.239892
0.2	0.462856	0.462573	0.462501	0.462492	0.462474
0.3	0.653442	0.653219	0.653163	0.653156	0.653141
0.4	0.800505	0.800321	0.800276	0.800270	0.800259
0.5	0.893316	0.893113	0.893063	0.893057	0.893047
0.6	0.919037	0.918776	0.918711	0.918703	0.918692
0.7	0.860018	0.859661	0.859571	0.859560	0.859545
0.8	0.692494	0.691994	0.691867	0.691852	0.691828
0.9	0.397046	0.396557	0.396433	0.396418	0.396394
L_2	0.000409	0.000103	0.000025	0.000016	
L_∞	0.000721	0.000181	0.000043	0.000027	

Tablo 4.7 de $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar verildi. Bu tabloda da h nın farklı değerleri için elde edilen nümerik çözümler birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Tabloda her bir h ya karşılık gelen hata normları da karşılaştırıldı. L_2 ve L_∞ hata normlarının Tablo 4.7 incelendiğinde h nın değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.8 de $\nu = 1$, $\nu = 0.1$ ve $\nu = 0.01$ değerleri için $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-5}$ alınarak $x = 0.25$, $x = 0.5$ ve $x = 0.75$ noktalarında zaman değişirken çözümün değişimi incelendi. Bu ν değerleri için elde edilen nümerik sonuçlar tam çözümlerle karşılaştırıldı.

Tablo 4.7: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.266310	0.266177	0.266139	0.266135	0.266125
0.2	0.503019	0.502951	0.502935	0.502933	0.502929
0.3	0.701633	0.701530	0.701505	0.701502	0.701496
0.4	0.855544	0.855390	0.855351	0.855347	0.855340
0.5	0.956294	0.956076	0.956022	0.956015	0.956007
0.6	0.992379	0.992082	0.992008	0.991999	0.991987
0.7	0.947411	0.947021	0.946924	0.946912	0.946894
0.8	0.796605	0.796123	0.796003	0.795989	0.795971
0.9	0.499053	0.498605	0.498486	0.498472	0.497662
L_2	0.000543	0.001073	0.001079	0.000713	
L_∞	0.001747	0.004638	0.006360	0.003565	

Tablo 4.8: $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		K-ÜSFY	Tam Çözüm	K-ÜSFY	Tam Çözüm	K-ÜSFY	Tam Çözüm
0.25	0.1	0.261534	0.261480	0.562602	0.562577	0.607370	0.607363
	0.5	0.005233	0.005227	0.277489	0.277468	0.317336	0.317320
	1.0	0.000038	0.000038	0.165623	0.165599	0.194700	0.194690
	2.0	0.000000	0.000000	0.069542	0.069514	0.109485	0.109482
	3.0	0.000000	0.000000	0.027776	0.027759	0.076136	0.076134
0.5	0.1	0.383509	0.383422	0.893063	0.893047	0.956022	0.956007
	0.5	0.007406	0.007398	0.515471	0.515398	0.609911	0.609886
	1.0	0.000053	0.000053	0.298431	0.298343	0.385690	0.385676
	2.0	0.000000	0.000000	0.110257	0.110199	0.218594	0.218588
	3.0	0.000000	0.000000	0.041093	0.041065	0.152183	0.152180
0.75	0.1	0.281643	0.281573	0.790905	0.790873	0.886728	0.886708
	0.5	0.005241	0.005235	0.572177	0.571914	0.852209	0.852123
	1.0	0.000038	0.000038	0.296053	0.295857	0.569340	0.569319
	2.0	0.000000	0.000000	0.088742	0.088680	0.326938	0.326926
	3.0	0.000000	0.000000	0.030462	0.030440	0.227776	0.227743

4.1.3 Problem 3' ün K-ÜSFY ile Çözümü

Tablo 4.9 da $a = 0$, $b = 8$ ve $\nu = 0.5$ için $k = 10^{-4}$ alınarak farklı h değerleri için $t = 1.5$ de K-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablo 4.9 dan farklı h değerleri için hesaplanan hata normlarının karşılaştırılmasından h konum adımının değeri küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.9: $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$ ve h nin farklı değerleri için K-ÜSFY ile $t = 1.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	Tam Çözüm
0.5	0.153364	0.153301	0.153285	0.153273
1.0	0.265926	0.265816	0.265789	0.265771
1.5	0.304234	0.304156	0.304137	0.304125
2.0	0.261361	0.261406	0.261417	0.261421
2.5	0.171995	0.172124	0.172156	0.172169
3.0	0.087950	0.088040	0.088063	0.088070
3.5	0.035798	0.035817	0.035822	0.035820
4.0	0.011878	0.011866	0.011863	0.011859
4.5	0.003265	0.003252	0.003249	0.003246
5.0	0.000750	0.000744	0.000742	0.000741
L_2	0.000217	0.000060	0.000021	
L_∞	0.000175	0.000046	0.000018	

Problem 3' ün $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ olmak üzere farklı t değerleri için K-ÜSFY ile elde edilen nümerik çözümleri ile tam çözümleri Tablo 4.10 da karşılaştırıldı.

Tablo 4.11 de Problem 3 için $a = 0$, $b = 3$, $\nu = 0.05$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ alınarak farklı t değerleri için K-ÜSFY ile bulunan sonuçlar ile tam çözümler karşılaştırıldı.

Tablo 4.10: $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)

x	$t = 1.5$		$t = 3$		$t = 4.5$	
	K-ÜSFY	Tam Çözüm	K-ÜSFY	Tam Çözüm	K-ÜSFY	Tam Çözüm
0.5	0.153285	0.153273	0.064268	0.064262	0.037993	0.037989
1.0	0.265789	0.265771	0.118814	0.118804	0.071874	0.071869
1.5	0.304137	0.304125	0.155098	0.155087	0.097937	0.097931
2.0	0.261417	0.261421	0.167631	0.167623	0.113393	0.113387
2.5	0.172156	0.172169	0.156298	0.156296	0.116989	0.116984
3.0	0.088063	0.088070	0.127378	0.127382	0.109492	0.109491
3.5	0.035822	0.035820	0.091319	0.091325	0.093685	0.093685
4.0	0.011863	0.011859	0.057971	0.057975	0.073603	0.073605
4.5	0.003249	0.003246	0.032844	0.032844	0.053298	0.053300
5.0	0.000742	0.000741	0.016737	0.016735	0.035714	0.035717
L_2	0.000021		0.000022		0.000408	
L_∞	0.000018		0.000038		0.000743	

Tablo 4.11: $a = 0$, $b = 3$, $\nu = 0.05$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda K-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)

x	$t = 1.5$		$t = 3$		$t = 4.5$	
	K-ÜSFY	Tam Çözüm	K-ÜSFY	Tam Çözüm	K-ÜSFY	Tam Çözüm
0.25	0.116403	0.116373	0.053758	0.053738	0.033649	0.033640
0.50	0.184485	0.184427	0.095119	0.095089	0.061662	0.061647
0.75	0.152017	0.152062	0.110281	0.110268	0.078057	0.078047
1.00	0.061449	0.061522	0.091856	0.091895	0.078066	0.078076
1.25	0.012796	0.012793	0.053990	0.054048	0.062400	0.062433
1.50	0.001582	0.001574	0.022597	0.022624	0.039626	0.039663
1.75	0.000124	0.000123	0.007050	0.007051	0.020168	0.020190
2.00	0.000006	0.000006	0.001710	0.001705	0.008419	0.008425
L_2	0.000055		0.000042		0.000032	
L_∞	0.000094		0.000059		0.000042	

4.1.4 Problem 1' in TK-ÜSFY ile Çözümü

Bu kısımda TK-ÜSFY ile Problem 1' in çözümü araştırılırken $\nu = 1$, 0.1 ve 0.01 olarak alındı. İlk olarak $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 4.12 de verildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Tabloda farklı h

değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılmasından h nın değeri küçüldükçe, yani konum için bölüntü sayısı arttıkça hatanın azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.12: $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için TK-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.109738	0.109596	0.109561	0.109556	0.109538
0.2	0.210185	0.209906	0.209836	0.209827	0.209792
0.3	0.292465	0.292060	0.291959	0.291946	0.291896
0.4	0.348638	0.348128	0.348000	0.347985	0.347924
0.5	0.372385	0.371807	0.371662	0.371645	0.371577
0.6	0.359871	0.359278	0.359130	0.359113	0.359046
0.7	0.310655	0.310115	0.309981	0.309964	0.309905
0.8	0.228392	0.227978	0.227874	0.227862	0.227817
0.9	0.120999	0.120774	0.120717	0.120711	0.120687
L_2	0.000579	0.000164	0.000060	0.000048	
L_∞	0.000827	0.000234	0.000086	0.000068	

Tablo 4.13 de ise $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar verildi. Bu tabloda farklı h değerlerine karşılık gelen nümerik sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Ayrıca tabloda h nın farklı değerleri için elde edilen hata normları da karşılaştırıldı. Tablo 4.13 den L_2 ve L_∞ hata normlarının h nın değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.13: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için TK-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.223598	0.223489	0.223461	0.223458	0.223450
0.2	0.436095	0.435879	0.435825	0.435818	0.435802
0.3	0.625545	0.625229	0.625150	0.625140	0.625118
0.4	0.778255	0.777857	0.777758	0.777746	0.777721
0.5	0.877863	0.877427	0.877317	0.877304	0.877280
0.6	0.904769	0.904377	0.904278	0.904266	0.904247
0.7	0.837230	0.836998	0.836939	0.836932	0.836923
0.8	0.657305	0.657305	0.657303	0.657303	0.657306
0.9	0.365598	0.365715	0.365744	0.365747	0.365754
L_2	0.000362	0.000092	0.000024	0.000016	
L_∞	0.000584	0.000147	0.000038	0.000025	

$\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri için $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 4.14 de verildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Tablo 4.14 de her bir h değerine karşılık gelen L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılmasından h nın değeri küçüldükçe hatanın azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.14: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için TK-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.236100	0.235983	0.235953	0.235950	0.235941
0.2	0.461540	0.461306	0.461248	0.461241	0.461225
0.3	0.664790	0.664444	0.664357	0.664347	0.664325
0.4	0.832457	0.832013	0.831902	0.831888	0.831864
0.5	0.948076	0.947578	0.947454	0.947439	0.947414
0.6	0.990742	0.990299	0.990188	0.990175	0.990156
0.7	0.934358	0.934187	0.934142	0.934137	0.934131
0.8	0.750884	0.751236	0.751321	0.751331	0.751416
0.9	0.426918	0.427569	0.427731	0.427751	0.427646
L_2	0.000499	0.000399	0.000383	0.000364	
L_∞	0.000997	0.002226	0.002167	0.001697	

$\nu = 1$, $\nu = 0.1$ ve $\nu = 0.01$ değerleri için $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-5}$ alınarak $x = 0.25$, $x = 0.5$ ve $x = 0.75$ noktalarında zaman değişirken çözümün değişimi Tablo 4.15 de incelendi. Bu ν değerleri için elde edilen nümerik değerler tam çözümlerle karşılaştırıldı.

Tablo 4.15: $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda TK-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

		$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	TK-ÜSFY	Tam Çözüm	TK-ÜSFY	Tam Çözüm	TK-ÜSFY	Tam Çözüm
0.25	0.1	0.253691	0.253638	0.534170	0.534143	0.566355	0.566328
	0.5	0.005071	0.005065	0.270814	0.270790	0.301171	0.301151
	1.0	0.000037	0.000036	0.162591	0.162565	0.188203	0.188194
	2.0	0.000000	0.000000	0.068234	0.068206	0.107385	0.107381
	3.0	0.000000	0.000000	0.027219	0.027202	0.075116	0.075114
0.5	0.1	0.371662	0.371577	0.877317	0.877280	0.947454	0.947414
	0.5	0.007177	0.007169	0.502868	0.502789	0.588743	0.588696
	1.0	0.000052	0.000052	0.292004	0.291916	0.374440	0.374420
	2.0	0.000000	0.000000	0.107947	0.107890	0.214565	0.214558
	3.0	0.000000	0.000000	0.040232	0.040205	0.150183	0.150179
0.75	0.1	0.272649	0.272582	0.761804	0.761797	0.860119	0.860129
	0.5	0.005079	0.005073	0.554362	0.554111	0.838165	0.838033
	1.0	0.000037	0.000036	0.287664	0.287474	0.556088	0.556051
	2.0	0.000000	0.000000	0.086638	0.086579	0.321298	0.321282
	3.0	0.000000	0.000000	0.029794	0.029772	0.224847	0.224811

4.1.5 Problem 2' nin TK-ÜSFY ile Çözümü

Burada tamamen kapalı üstel sonlu fark yöntemi ile $\nu = 1$, 0.1 ve 0.01 değerleri için Problem 2' nin çözümü incelendi. İlk olarak $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 4.16 da verildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Ayrıca tabloda göz önüne alınan h değerlerine karşılık gelen hata normları da karşılaştırıldı. Tablo 4.16 dan L_2 ve L_∞ hata normlarının h nın değeri küçüldükçe, yani konum için bölüntü sayısı arttıkça azaldığı görülmektedir.

$\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında TK-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar Tablo 4.17 de verildi. Bu tabloda ele alınan her h değeri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Tablo 4.16 dan her bir h için elde edilen hata normları incelendiğinde L_2 ve L_∞ hata normlarının h nın değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.16: $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için TK-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.113097	0.112952	0.112915	0.112911	0.112892
0.2	0.216655	0.216369	0.216297	0.216289	0.216252
0.3	0.301550	0.301134	0.301030	0.301018	0.300966
0.4	0.359597	0.359073	0.358942	0.358926	0.358863
0.5	0.384254	0.383659	0.383510	0.383492	0.383422
0.6	0.371511	0.370899	0.370745	0.370727	0.370658
0.7	0.320843	0.320284	0.320144	0.320127	0.320066
0.8	0.235968	0.235538	0.235430	0.235418	0.235371
0.9	0.125043	0.124809	0.124750	0.124743	0.124718
L_2	0.000597	0.000169	0.000062	0.000050	
L_∞	0.000853	0.000242	0.000089	0.000070	

Tablo 4.17: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için TK-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.240202	0.239973	0.239915	0.239908	0.239892
0.2	0.462859	0.462576	0.462504	0.462495	0.462474
0.3	0.653445	0.653222	0.653166	0.653159	0.653141
0.4	0.800507	0.800324	0.800278	0.800272	0.800259
0.5	0.893317	0.893115	0.893064	0.893058	0.893047
0.6	0.919037	0.918776	0.918711	0.918704	0.918692
0.7	0.860019	0.859662	0.859572	0.859561	0.859545
0.8	0.692495	0.691995	0.691868	0.691853	0.691828
0.9	0.397047	0.396558	0.396434	0.396419	0.396394
L_2	0.000411	0.000104	0.000026	0.000017	
L_∞	0.000723	0.000182	0.000044	0.000028	

Tablo 4.18 de $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar verildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Ayrıca tabloda h nın göz önüne alınan her değeri için hata normları da karşılaştırıldı. Tablo 4.18 den L_2 ve L_∞ hata normlarının h nın değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Farklı ν değerleri için çözümleri karşılaştırmak amacıyla, Tablo 4.19 da $\nu = 1$, $\nu = 0.1$ ve $\nu = 0.01$ değerleri için $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-5}$ alınarak $x = 0.25$, $x = 0.5$ ve $x = 0.75$ noktalarında zaman değişirken çözümün değişimi incelendi. Bu ν değerleri için belirtilen noktalarda elde edilen çözümler tam çözümlerle karşılaştırıldı.

Tablo 4.18: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için TK-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.266312	0.266179	0.266142	0.266137	0.266125
0.2	0.503022	0.502954	0.502938	0.502936	0.502929
0.3	0.701636	0.701533	0.701507	0.701504	0.701496
0.4	0.855545	0.855391	0.855353	0.855348	0.855340
0.5	0.956295	0.956077	0.956023	0.956016	0.956007
0.6	0.992379	0.992082	0.992008	0.991999	0.991987
0.7	0.947411	0.947022	0.946925	0.946913	0.946894
0.8	0.796608	0.796126	0.796006	0.795992	0.795971
0.9	0.499059	0.498611	0.498492	0.498477	0.497662
L_2	0.000932	0.001421	0.001025	0.000991	
L_∞	0.003557	0.007802	0.007076	0.005986	

Tablo 4.19: $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda TK-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		TK-ÜSFY	Tam Çözüm	TK-ÜSFY	Tam Çözüm	TK-ÜSFY	Tam Çözüm
0.25	0.1	0.261535	0.261480	0.562605	0.562577	0.607373	0.607363
	0.5	0.005233	0.005227	0.277492	0.277468	0.317340	0.317320
	1.0	0.000038	0.000038	0.165624	0.165599	0.194702	0.194690
	2.0	0.000000	0.000000	0.069542	0.069514	0.109486	0.109482
	3.0	0.000000	0.000000	0.027776	0.027759	0.076136	0.076134
0.5	0.1	0.383510	0.383422	0.893064	0.893047	0.956023	0.956007
	0.5	0.007406	0.007398	0.515475	0.515398	0.609917	0.609886
	1.0	0.000053	0.000053	0.298433	0.298343	0.385693	0.385676
	2.0	0.000000	0.000000	0.110258	0.110199	0.218596	0.218588
	3.0	0.000000	0.000000	0.041093	0.041065	0.152184	0.152180
0.75	0.1	0.281643	0.281573	0.790906	0.790873	0.886730	0.886711
	0.5	0.005241	0.005235	0.572179	0.571914	0.852213	0.852123
	1.0	0.000038	0.000038	0.296055	0.295857	0.569345	0.569319
	2.0	0.000000	0.000000	0.088742	0.088680	0.326941	0.326926
	3.0	0.000000	0.000000	0.030462	0.030440	0.227778	0.227743

4.1.6 Problem 3' ün TK-ÜSFY ile Çözümü

Tablo 4.20 de $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$ olmak üzere $k = 10^{-4}$ alınarak farklı h değerleri için TK-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Tablo 4.20 de her bir h için elde edilen hata normları karşılaştırıldığında h konum adımının değeri küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.20: $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$ ve h nın farklı değerleri için TK-ÜSFY ile $t = 1.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	Tam Çözüm
0.5	0.153366	0.153302	0.153286	0.153273
1.0	0.265927	0.265818	0.265791	0.265771
1.5	0.304235	0.304157	0.304138	0.304125
2.0	0.261361	0.261406	0.261417	0.261421
2.5	0.171996	0.172124	0.172157	0.172169
3.0	0.087951	0.088041	0.088064	0.088070
3.5	0.011878	0.035817	0.035822	0.035820
4.0	0.011878	0.011866	0.011863	0.011859
4.5	0.003265	0.003252	0.003249	0.003246
5.0	0.000750	0.000744	0.000742	0.000741
L_2	0.000217	0.000060	0.000022	
L_∞	0.000174	0.000047	0.000019	

Tablo 4.21: $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda TK-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)

x	$t = 1.5$		$t = 3$		$t = 4.5$	
	TK-ÜSFY	Tam Çözüm	TK-ÜSFY	Tam Çözüm	TK-ÜSFY	Tam Çözüm
0.5	0.153286	0.153273	0.064268	0.064262	0.037993	0.037989
1.0	0.265791	0.265771	0.118815	0.118804	0.071875	0.071869
1.5	0.304138	0.304125	0.155099	0.155087	0.097938	0.097931
2.0	0.261417	0.261421	0.167632	0.167623	0.113394	0.113387
2.5	0.172157	0.172169	0.156299	0.156296	0.116989	0.116984
3.0	0.088064	0.088070	0.127379	0.127382	0.109493	0.109491
3.5	0.035822	0.035820	0.091320	0.091325	0.093685	0.093685
4.0	0.011863	0.011859	0.057972	0.057975	0.073604	0.073605
4.5	0.003249	0.003246	0.032844	0.032844	0.053298	0.053300
5.0	0.000742	0.000741	0.016737	0.016735	0.035714	0.035717
L_2	0.000022		0.000023		0.000408	
L_∞	0.000019		0.000038		0.000743	

Problem 3 için $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$ olmak üzere $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ alınarak farklı t değerleri için TK-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözümlerin karşılaştırılması Tablo 4.21 de yapıldı.

Tablo 4.22 de Problem 3 için $a = 0$, $b = 3$, $\nu = 0.05$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ alınarak farklı t değerleri için TK-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözümler karşılaştırıldı.

Tablo 4.22: $a = 0$, $b = 3$, $\nu = 0.05$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda TK-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması. (Problem 3)

x	$t = 1.5$		$t = 3$		$t = 4.5$	
	TK-ÜSFY	Tam Çözüm	TK-ÜSFY	Tam Çözüm	TK-ÜSFY	Tam Çözüm
0.25	0.116405	0.116373	0.053759	0.053738	0.033650	0.033640
0.50	0.184486	0.184427	0.095121	0.095089	0.061663	0.061647
0.75	0.152018	0.152062	0.110282	0.110268	0.078058	0.078047
1.00	0.061450	0.061522	0.091858	0.091895	0.078067	0.078076
1.25	0.012796	0.012793	0.053991	0.054048	0.062401	0.062433
1.50	0.001582	0.001574	0.022598	0.022624	0.039627	0.039663
1.75	0.000124	0.000123	0.007050	0.007051	0.020168	0.020190
2.00	0.000006	0.000006	0.001710	0.001705	0.008419	0.008425
L_2	0.000055		0.000042		0.000031	
L_∞	0.000093		0.000058		0.000042	

4.1.7 Problem 1' in CN-ÜSFY ile Çözümü

Bu kısımda Crank-Nicolson üstel sonlu fark yöntemi ile Problem 1' in çözümü için $\nu = 1$, 0.1 ve 0.01 olarak göz önüne alındı. İlk olarak $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 4.23 de verildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümlerle karşılaştırıldı. Tablodan L_2 ve L_∞ hata normlarının h nın değeri küçüldükçe, yani konum için bölüntü sayısı arttıkça azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.24 de $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri için $t = 0.1$ anında bulunan sonuçlar gösterildi. h nın farklı değerlerine karşılık gelen nümerik çözümler birbirleriyle ve tam çözümlerle karşılaştırıldı. Ayrıca bu tabloda her h değeri için elde edilen hata normları da karşılaştırıldı. Tablodan L_2 ve L_∞ hata normlarının h nın değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.23: $\nu = 1$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.109732	0.109590	0.109555	0.109551	0.109538
0.2	0.210174	0.209895	0.209825	0.209817	0.209792
0.3	0.292450	0.292045	0.291944	0.291931	0.291896
0.4	0.348620	0.348110	0.347983	0.347968	0.347924
0.5	0.372366	0.371788	0.371644	0.371626	0.371577
0.6	0.359854	0.359261	0.359113	0.359095	0.359046
0.7	0.310640	0.310101	0.309966	0.309950	0.309905
0.8	0.228381	0.227967	0.227864	0.227851	0.227817
0.9	0.120993	0.120768	0.120712	0.120705	0.120687
L_2	0.000566	0.000151	0.000047	0.000035	
L_∞	0.000809	0.000216	0.000068	0.000050	

Tablo 4.24: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.223595	0.223486	0.223459	0.223456	0.223450
0.2	0.436091	0.435874	0.435820	0.435814	0.435802
0.3	0.625541	0.625224	0.625145	0.625136	0.625118
0.4	0.778252	0.777854	0.777754	0.777742	0.777721
0.5	0.877863	0.877426	0.877317	0.877304	0.877280
0.6	0.904772	0.904379	0.904280	0.904268	0.904247
0.7	0.837234	0.837001	0.836942	0.836935	0.836923
0.8	0.657307	0.657307	0.657306	0.657306	0.657306
0.9	0.365599	0.365716	0.365745	0.365748	0.365754
L_2	0.000361	0.000090	0.000023	0.000015	
L_∞	0.000583	0.000146	0.000037	0.000024	

Tablo 4.25 de $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar verildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Tablo 4.25 den h değerlerine karşılık gelen hata normları kıyaslandığında L_2 ve L_∞ hata normlarının h nın değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.26 da $\nu = 1$, $\nu = 0.1$ ve $\nu = 0.01$ değerleri için $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-5}$ alınarak $x = 0.25$, $x = 0.5$ ve $x = 0.75$ noktalarında zaman değişirken çözümün değişimi incelendi. Burada göz önüne alınan her bir ν değeri için elde edilen sonuçlar tam çözümlerle karşılaştırıldı.

Tablo 4.25: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nin farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.236098	0.235980	0.235951	0.235948	0.235941
0.2	0.461537	0.461303	0.461244	0.461237	0.461225
0.3	0.664787	0.664440	0.664354	0.664343	0.664325
0.4	0.832456	0.832012	0.831901	0.831887	0.831864
0.5	0.948078	0.947580	0.947456	0.947441	0.947414
0.6	0.990747	0.990304	0.990193	0.990179	0.990156
0.7	0.934362	0.934190	0.934146	0.934140	0.934131
0.8	0.750882	0.751233	0.751318	0.751328	0.751416
0.9	0.426912	0.427562	0.427725	0.427745	0.427646
L_2	0.000451	0.000182	0.000200	0.000156	
L_∞	0.000794	0.000629	0.001065	0.000785	

Tablo 4.26: $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 1)

x	t	$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
		CN-ÜSFY	Tam Çözüm	CN-ÜSFY	Tam Çözüm	CN-ÜSFY	Tam Çözüm
0.25	0.1	0.253678	0.253638	0.534166	0.534143	0.566352	0.566328
	0.5	0.005070	0.005065	0.270810	0.270790	0.301166	0.301151
	1.0	0.000037	0.000036	0.162588	0.162565	0.188200	0.188194
	2.0	0.000000	0.000000	0.068233	0.068206	0.107383	0.107381
	3.0	0.000000	0.000000	0.027219	0.027202	0.075115	0.075114
0.5	0.1	0.371644	0.371577	0.877317	0.877280	0.947456	0.947414
	0.5	0.007176	0.007169	0.502863	0.502789	0.588736	0.588696
	1.0	0.000052	0.000052	0.292001	0.291916	0.374435	0.374420
	2.0	0.000000	0.000000	0.107945	0.107890	0.214563	0.214558
	3.0	0.000000	0.000000	0.040231	0.040205	0.150181	0.150179
0.75	0.1	0.272636	0.272582	0.761807	0.761797	0.860119	0.860131
	0.5	0.005078	0.005073	0.554361	0.554111	0.838163	0.838033
	1.0	0.000037	0.000036	0.287661	0.287474	0.556081	0.556051
	2.0	0.000000	0.000000	0.086637	0.086579	0.321294	0.321282
	3.0	0.000000	0.000000	0.029794	0.029772	0.224845	0.224811

4.1.8 Problem 2' nin CN-ÜSFY ile Çözümü

Burada Problem 2' nin CN-ÜSFY ile çözümü incelenirken $\nu = 1, 0.1$ ve 0.01 olarak alındı. İlk olarak $\nu = 1, k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 4.27 de verildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Tablodan L_2 ve L_∞ hata normları karşılaştırıldığında h nın değeri küçüldükçe, yani konum için bölüntü sayısı arttıkça hatanın azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.27: $\nu = 1, k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.113091	0.112946	0.112909	0.112905	0.112892
0.2	0.216644	0.216358	0.216286	0.216277	0.216252
0.3	0.301535	0.301119	0.301015	0.301002	0.300966
0.4	0.359579	0.359055	0.358924	0.358908	0.358863
0.5	0.384235	0.383640	0.383491	0.383473	0.383422
0.6	0.371493	0.370881	0.370727	0.370709	0.370658
0.7	0.320828	0.320269	0.320129	0.320112	0.320066
0.8	0.235957	0.235527	0.235419	0.235406	0.235371
0.9	0.125037	0.124803	0.124744	0.124737	0.124718
L_2	0.000584	0.000156	0.000049	0.000036	
L_∞	0.000835	0.000224	0.000070	0.000052	

$\nu = 0.1, k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri için $t = 0.1$ anında elde edilen sonuçlar Tablo 4.28 de verildi. Bu tabloda her h değeri için elde edilen nümerik sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Ayrıca tabloda her bir h değerine karşılık gelen hata normları da karşılaştırıldı. Tablodan L_2 ve L_∞ hata normlarının h nın değeri küçüldükçe azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.29 da $\nu = 0.01, k = 10^{-5}$ ve farklı h değerleri alınarak $t = 0.1$ anında CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar verildi. Bu tabloda h nın farklı değerleri için bulunan sonuçlar birbirleriyle ve tam çözümle karşılaştırıldı. Tablodan her h için L_2 ve L_∞ hata normlarının karşılaştırılmasından h nın değerinin küçüldükçe hatanın salınım yaparak azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.28: $\nu = 0.1$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.240198	0.239969	0.239912	0.239905	0.239892
0.2	0.462853	0.462570	0.462499	0.462490	0.462474
0.3	0.653441	0.653218	0.653161	0.653154	0.653141
0.4	0.800504	0.800321	0.800275	0.800270	0.800259
0.5	0.893317	0.893115	0.893065	0.893059	0.893047
0.6	0.919039	0.918779	0.918714	0.918706	0.918692
0.7	0.860022	0.859665	0.859575	0.859564	0.859545
0.8	0.692497	0.691997	0.691870	0.691855	0.691828
0.9	0.397048	0.396558	0.396435	0.396420	0.396394
L_2	0.000410	0.000104	0.000026	0.000017	
L_∞	0.000724	0.000183	0.000046	0.000029	

Tablo 4.29: $\nu = 0.01$, $k = 10^{-5}$ ve h nın farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 0.1$ de elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

x	$h = 0.05$	$h = 0.025$	$h = 0.0125$	$h = 0.01$	Tam Çözüm
0.1	0.266309	0.266176	0.266138	0.266134	0.266125
0.2	0.503018	0.502950	0.502934	0.502932	0.502929
0.3	0.701633	0.701530	0.701505	0.701502	0.701496
0.4	0.855545	0.855391	0.855352	0.855348	0.855340
0.5	0.956297	0.956079	0.956025	0.956018	0.956007
0.6	0.992382	0.992086	0.992012	0.992003	0.991987
0.7	0.947415	0.947025	0.946928	0.946916	0.946894
0.8	0.796607	0.796125	0.796005	0.795991	0.795971
0.9	0.499052	0.498605	0.498486	0.498471	0.497662
L_2	0.000756	0.000687	0.000963	0.000949	
L_∞	0.002975	0.002527	0.006505	0.004956	

Tablo 4.30 da $\nu = 1$, $\nu = 0.1$ ve $\nu = 0.01$ değerleri için $h = 0.0125$ ve $k = 10^{-5}$ alınarak $x = 0.25$, $x = 0.5$ ve $x = 0.75$ noktalarında zaman değişirken çözümün değişimi incelendi. Göz önüne alınan her ν değeri için elde edilen sonuçlar tam çözümlerle karşılaştırıldı.

Tablo 4.30: $h = 0.0125$, $k = 10^{-5}$ ve ν nin farklı değerleri için belli zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 2)

		$\nu = 1$		$\nu = 0.1$		$\nu = 0.01$	
x	t	CN-ÜSFY	Tam Çözüm	CN-ÜSFY	Tam Çözüm	CN-ÜSFY	Tam Çözüm
0.25	0.1	0.261521	0.261480	0.562599	0.562577	0.607369	0.607363
	0.5	0.005231	0.005227	0.277488	0.277468	0.317335	0.317320
	1.0	0.000038	0.000038	0.165622	0.165599	0.194699	0.194690
	2.0	0.000000	0.000000	0.069541	0.069514	0.109485	0.109482
	3.0	0.000000	0.000000	0.027776	0.027759	0.076136	0.076134
0.5	0.1	0.383491	0.383422	0.893065	0.893047	0.956025	0.956007
	0.5	0.007404	0.007398	0.515469	0.515398	0.609910	0.609886
	1.0	0.000053	0.000053	0.298429	0.298343	0.385688	0.385676
	2.0	0.000000	0.000000	0.110256	0.110199	0.218593	0.218588
	3.0	0.000000	0.000000	0.041092	0.041065	0.152183	0.152180
0.75	0.1	0.281629	0.281573	0.790909	0.790873	0.886732	0.886707
	0.5	0.005240	0.005235	0.572177	0.571914	0.852212	0.852123
	1.0	0.000038	0.000038	0.296051	0.295857	0.569339	0.569319
	2.0	0.000000	0.000000	0.088741	0.088680	0.326937	0.326926
	3.0	0.000000	0.000000	0.030462	0.030440	0.227775	0.227743

4.1.9 Problem 3' ün CN-ÜSFY ile Çözümü

Tablo 4.31 de Problem 3 için $a = 0$, $b = 8$ ve $\nu = 0.5$ olmak üzere $k = 10^{-4}$ alınarak farklı h değerleri için CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözüm karşılaştırıldı. Aynı zamanda farklı h değerleri için elde edilen L_2 ve L_∞ hata normlarının da karşılaştırıldığı Tablo 4.31 den h konum adımının değeri küçüldükçe hata normlarının azaldığı görülmektedir.

Tablo 4.32 de Problem 3 için $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$ olmak üzere $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ alınarak farklı t değerleri için CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözümler karşılaştırıldı. Ayrıca tabloda bu farklı t değerlerine karşılık gelen hata normları da verildi.

Tablo 4.31: $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$ ve h nın farklı değerleri için CN-ÜSFY ile $t = 1.5$ te elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)

x	$h = 0.1$	$h = 0.05$	$h = 0.025$	Tam Çözüm
0.5	0.153360	0.153297	0.153281	0.153273
1.0	0.265920	0.265811	0.265783	0.265771
1.5	0.304231	0.304154	0.304134	0.304125
2.0	0.261363	0.261408	0.261420	0.261421
2.5	0.172000	0.172129	0.172161	0.172169
3.0	0.087953	0.088043	0.088066	0.088070
3.5	0.035798	0.035817	0.035822	0.035820
4.0	0.011878	0.011865	0.011862	0.011859
4.5	0.003265	0.003252	0.003249	0.003246
5.0	0.000750	0.000744	0.000742	0.000741
L_2	0.000210	0.000053	0.000014	
L_∞	0.000170	0.000041	0.000013	

Tablo 4.32: $a = 0$, $b = 8$, $\nu = 0.5$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümle karşılaştırılması. (Problem 3)

x	$t = 1.5$		$t = 3$		$t = 4.5$	
	CN-ÜSFY	Tam Çözüm	CN-ÜSFY	Tam Çözüm	CN-ÜSFY	Tam Çözüm
0.5	0.153281	0.153273	0.064266	0.064262	0.037992	0.037989
1.0	0.265783	0.265771	0.118811	0.118804	0.071873	0.071869
1.5	0.304134	0.304125	0.155095	0.155087	0.097936	0.097931
2.0	0.261420	0.261421	0.167630	0.167623	0.113392	0.113387
2.5	0.172161	0.172169	0.156298	0.156296	0.116988	0.116984
3.0	0.088066	0.088070	0.127381	0.127382	0.109493	0.109491
3.5	0.035822	0.035820	0.091322	0.091325	0.093686	0.093685
4.0	0.011862	0.011859	0.057973	0.057975	0.073605	0.073605
4.5	0.003249	0.003246	0.032845	0.032844	0.053299	0.053300
5.0	0.000742	0.000741	0.016737	0.016735	0.035715	0.035717
L_2	0.000014		0.000020		0.000408	
L_∞	0.000013		0.000038		0.000743	

Tablo 4.33 de $a = 0$, $b = 3$, $\nu = 0.05$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ alınarak farklı t değerleri için CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçlar ile tam çözümler karşılaştırıldı. Yine farklı t değerleri için hata normları hesaplandı.

Tablo 4.33: $a = 0$, $b = 3$, $\nu = 0.05$, $k = 10^{-4}$ ve $h = 0.025$ için belli zamanlarda CN-ÜSFY ile elde edilen sonuçların tam çözümlerle karşılaştırılması. (Problem 3)

x	$t = 1.5$		$t = 3$		$t = 4.5$	
	CN-ÜSFY	Tam Çözüm	CN-ÜSFY	Tam Çözüm	CN-ÜSFY	Tam Çözüm
0.25	0.116401	0.116373	0.053757	0.053738	0.033649	0.033640
0.50	0.184483	0.184427	0.095118	0.095089	0.061661	0.061647
0.75	0.152020	0.152062	0.110281	0.110268	0.078057	0.078047
1.00	0.061451	0.061522	0.091859	0.091895	0.078066	0.078076
1.25	0.012796	0.012793	0.053993	0.054048	0.062401	0.062433
1.50	0.001582	0.001574	0.022598	0.022624	0.039627	0.039663
1.75	0.000124	0.000123	0.007050	0.007051	0.020168	0.020190
2.00	0.000006	0.000006	0.001710	0.001705	0.008419	0.008425
L_2	0.000053		0.000040		0.000031	
L_∞	0.000090		0.000057		0.000042	

4.1.10 Sonuç

Bu bölümde kapalı, tamamen kapalı ve Crank-Nicolson üstel sonlu fark yöntemleri Burger denkleminde direkt uygulandı. Bu yöntemler önceki bölümde de göz önüne alınan üç model problem ile test edildi. Farklı konum adımı, zaman adımı ve viskozite değerleri için elde edilen çözümler tablolar halinde verildi. Bu kısımda önceki bölümdeki grafiklere benzer grafikler elde edildiğinden grafikler verilmedi. Tablolarda elde edilen sonuçlar tam sonuçlarla karşılaştırıldı. L_2 ve L_∞ hata normları yardımıyla sonuçların tam çözümlerle ne kadar uyumlu olduğu incelendi. Bu incelemelerden uygulanan üstel sonlu fark yöntemlerinin tam sonuçlarla uyumlu olduğu görüldü.

Kaynakça

- [1] M. C. Bhattacharya, An explicit conditionally stable finite difference equation for heat conduction problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 21 (1985) 239-265.
- [2] M. C. Bhattacharya, A new improved finite difference equation for heat transfer during transient change, *Applied Mathematical Modelling*, 10 (1986) 68-70.
- [3] M. C. Bhattacharya, M.G. Davies, The comparative performance of some finite difference equations for transient heat conduction, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 24 (1987) 1317-1331.
- [4] R. F. Handschuh, An Exponential Finite Difference Technique For Solving Partial Differrial Equations, M. S. Thesis, Tolodo Univ., Ohio (NASA) 1987.
- [5] M. C. Bhattacharya, Finite difference solutions of partial differential equations, *Communications in Applied Numerical Methods*, 6 (1990) 173-184.
- [6] A. R. Bahadır, Exponential finite-difference method applied to Korteweg-de Vries equation for small times, *Applied Mathematics and Computation*, 160 (2005) 675-682.
- [7] H. Bateman, Some recent research on the motion of fluid, *Monthly Weather Reviev*, 43 (1915) 163-170.
- [8] J. M. Burgers, Mathematical examples illustrating relations occuring in the theory of turbulent fluid motion, *Transactions of the Royal Netherlands Academy of Science (Amsterdam)*, 17 (1939) 1-53.
- [9] J. M. Burgers, A mathematical model illustrating the theory of turbulance, In: *Advances in Applied Mechanics*, Academic Press. New York, (1948) 171-199.
- [10] R. G. Derickson, R. A. Pielke, A preliminary study of the Burgers equation with symbolic computation, *Journal of Computational Physics* 162 (2000) 219-244.
- [11] M. Gülsu, A finite difference approach for solution of Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 175 (2006) 1245-1255.
- [12] A. H. A. Ali, G. A. Gardner, L. R. T. Gardner, A collocation solution for Burgers' equation using cubic B-spline finite elements, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 100 (1992) 325-337.
- [13] S. Kutluay, A. R. Bahadır, A. Özdeş, Numerical solution of one-dimensional Burgers equation: explicit and exact-explicit finite difference methods, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 103 (1999) 251-261.

- [14] A. R. Bahadır, Numerical solution for one-dimensional Burgers' equation using a fully implicit finite-difference method, *International Journal of Applied Mathematics*, 1 (1999) 897-909.
- [15] S. Kutluay, A. Esen, A lumped Galerkin method for solving the Burgers equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 81 (2004) 1433-1444.
- [16] S. Kutluay, A. Esen, I. Dag, Numerical solutions of the Burgers' equation by the least-squares quadratic B-spline finite element method, *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 167 (2004) 21-33.
- [17] E. N. Aksan, A. Özdeş, A numerical solution of Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 156 (2004) 395-402.
- [18] A. R. Bahadır, M. Sağlam, A mixed finite difference and boundary element approach to one-dimensional Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 160 (2005) 663-673.
- [19] M. Gülsu, T. Öziş, Numerical solution of Burgers' equation with restrictive Taylor approximation, *Applied Mathematics and Computation*, 171 (2005) 1192-1200.
- [20] İ. Dağ, B. Saka, A. Boz, B-spline Galerkin methods for numerical solutions of the Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 166 (2005) 506-522.
- [21] M. K. Kadalbajoo, A. Awasthi, A numerical method based on Crank-Nicolson scheme for Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 182 (2006) 1430-1442.
- [22] E. N. Aksan, A. Özdeş, T. Öziş, A numerical solution of Burgers' equation based on least squares approximation, *Applied Mathematics and Computation*, 176 (2006) 270-279.
- [23] W. Liao, An implicit fourth-order compact finite difference scheme for one-dimensional Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 206 (2008) 755-764.
- [24] M. Yousuf, On the class of high order time stepping schemes based on Padé approximations for the numerical solution of Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 205 (2008) 442-453.
- [25] M. Sari, G. Gürarlan, A sixth-order compact finite difference scheme to the numerical solutions of Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 208 (2009) 475-483.
- [26] D. K. Salkuyeh, F. S. Sharafeh, On the numerical solution of the Burgers's equation, *International Journal of Computer Mathematics*, 86 (2009) 1334-1344.

- [27] M. Xu, R. H. Wang, J. H. Zhang, Q. Fang, A novel numerical scheme for solving Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 214 (2011) 4473-4482.
- [28] S. K. Vanani, F. Soleymani, Application of homotopy perturbation method to the Burgers equation with delay, *Chinese Physics Letters*, 29 (2012) 030202-1-4
- [29] P. G. Zhang, J. P. Wang, A predictor-corrector compact finite difference scheme for Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation*, 219 (2012) 892-898.
- [30] R. C. Mittal, R. K. Jain, Numerical solutions of nonlinear Burgers' equation with modified cubic B-splines collocation method, *Applied Mathematics and Computation*, 218 (2012) 7839-7855.
- [31] A. A. Soliman, A Galerkin solution for Burgers' equation using cubic B-spline finite elements, *Abstract and Applied Analysis*, doi:10.1155/2012/527467.
- [32] C. C. Wang, W. J. Liao, Y. S. Hsu, Hybrid spline difference method for the Burgers' equation, *Applied Mathematics and Computation* 219 (2012) 1031-1039.
- [33] J. Stewart, *Kalkülüs: Diferansiyel ve İntegral Hesap*, TÜBA yayınları, Ankara, 2007.
- [34] W. Fulks, *Advanced Calculus: An Introduction to Analysis*, USA, 1962.
- [35] G. D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Finite Difference Method*, 3 rd Edition, Clarendon Press, Oxford, 1987.
- [36] R. L. Burden, J. D. Faires, *Numerical Analysis*, Thomson Brooks/Cole, USA, 2005.
- [37] E. Hopf, The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu u$, *Communications on Pure and Applied Mathematics*, 3 (1950) 201-230.
- [38] J. D. Cole, On a quasilinear parabolic equations occuring in aerodynamics, *Quarterly Applied Mathematics*, 9 (1951) 225-236.

ÖZGEÇMİŞ

1 Temmuz 1984 tarihinde Malatya'da doğdu. İlk öğrenimini Elazığ' da orta ve lise öğrenimini Malatya'da tamamladı. 2002 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve 2006 yılında buradan mezun oldu. Aynı yıl İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalında yüksek lisans öğrenimine başladı. 2007 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak çalışmaya başladı. 2009 yılında Prof. Dr. A. Refik Bahadır danışmanlığında hazırladığı yüksek lisans tezini bitirdi. Aynı yıl İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim dalında doktora programına kayıt yaptırdı. Halen İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.