T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

Lightlike Altmanifoldlar Üzerinde Chen Tipi Eşitsizlikler

Mehmet GÜLBAHAR

DOKTORA TEZİ

MALATYA
Haziran 2014

Tezin Başlığı : Lightlike Altmanifoldlar Üzerinde Chen Tipi Eşitsizlikler

Tezi Hazırlayan : Mehmet GÜLBAHAR

Sınav Tarihi :

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

(İnönü Üniv.)

(İnönü Üniv.)

Prof.Dr.Sadık KELEŞ (İnönü Üniv.)

Prof.Dr.Sadık KELEŞ
Tez Danışmanı

İmza.............................

İmza.............................

ÜYE

ÜYE

Bu tez Enstitümüz Matematik Anabilim Dalında hazırlanmıştır. İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Mehmet ALPASLAN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Doktora Tezi olarak sunduğum ”Lightlike Altmanifoldlar Üzerinde Chen Tipi Eşitsizlikler” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Mehmet GÜLBAHAR

ÖZET

Doktora Tezi

Lightlike Altmanifoldlar Üzerinde Chen Tipi Eşitsizlikler

Mehmet GÜLBAHAR

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

??+vi sayfa

2014
Danışmanlar: 1- Prof. Dr. Sadık KELEŞ, 2- Doç. Dr. Erol KILIÇ

Dört bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde,temel tanım ve teoremler ifade edilerek semi-Riemannian manifoldlar ile ilgili genel bilgiler verildi.

İkinci bölümde, Lorentzian bir manifoldun lightlike hiperyüzeyleri ile alakalı bazı temel bilgiler sunuldu. Bu hiperyüzeylerin alt düzlem kesitleri için Ricci eğriliği ve skalar eğriliği tanıtıldı. Ekran skalar eğriliğinin içinde bulunduğu bazı eşitsizlikler elde edildi. Ekran homotetik lightlike hiperyüzeylerin ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliğinin içinde bulunduğu çeşitli eşitsizliler kuruldu. Bu eşitsizlikler yardımıyla Lorentzian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri için bazı karaktrizasyonlar verildi.

Üçüncü bölümde, Lorentzian bir manifoldun half-lightlike altmanifoldları ile alakalı bazı temel bilgiler verildi. Bu altmanifoldların alt düzlem kesitleri için Ricci eğriliği ve skalar eğriliği tanıtıldı. Ekran homotetik half-lightlike altmanifoldların ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eriliğinin içinde bulunduğu bazı eşitsizliler kuruldu. Bu eşitsizliklerin eşitlik durumları incelendi.

Dördüncü bölümde, iki indeksli bir semi-Riemannian manifoldun coisotropik lightlike altmanifoldları ile alakalı bazı temel bilgilerden bahsedildi. Bu altmanifoldları için ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliği tanıtıldı. Bu eğriliklerin içinde bulunduğu bazı eşitsizlikler kuruldu. Bu eşitsizlikler, iki indeksli semi-Öklidyen uzayının alt manifoldlarında incelendi.

ANAHTAR KELİMELER: Semi-Riemannian Manifold, Lorentzian manifold, Lightlike hiperyüzey, Eğrilik, Lightlike altmanifold.

ABSTRACT

Doctorate Thesis

Chen-like Inequalities On Lightlike Submanifolds

Mehmet GÜLBAHAR

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

??+vi pages
2014
Supervisors: 1-Prof. Dr. Sadık KELEŞ 2-Assoc. Prof. Dr. Erol KILIÇ

In the first chapter of the present thesis consists of four chapters, basic definitions and theorems were explained then general knowledge about semi-Riemannian manifolds have been given.

In the second chapter, some basic facts about lightlike hypersurfaces of a Lorentzian manifold were expressed. Ricci curvature and scalar curvature for sub-plane section of these submanifolds were introduced. Various inequalities involving screen Ricci curvature and screen scalar curvature of screen homothetic lightlike hypersurfaces were established. With the aid of these inequalities, some characterizations for lightlike hypersurfacesof a Lorentzian manifold were given.

In the third chapter, some basic facts about half-lightlike submanifolds of a Lorentzian manifold were expressed. Ricci curvature and scalar curvature for sub-plane section were introduced. Some inequalities involving screen Ricci curvature and screen scalar curvature of screen homothetic half-lightlike submanifolds were established. Equality case of these inequalities were investigated.

In the fourth chapter, some basic information about coisotropic lightlike submanifolds of a semi-Riemannian manifold with index two were mentioned. Screen Ricci curvature and screen scalar curvature of these submanifolds were introduced. Some inequalities involving these curvatures were established. These inequalities were investigated on submanifolds of semi-Euclidean space with index two.

KEYWORDS: Semi-Riemannian Manifold, Lorentzian manifold, Lightlike hypersurface, Curvature, Lightlike submanifold.

TEŞEKKÜR

Tez konumu bana vererek, bilgisi ve görüşleriyle beni yönlendiren, karşılaştığım problemlere çözüm önerileri sunan ve lisansüstü çalışmalarımda destekleri esirgemeyen tez danışmanlarım Sayın Prof. Dr. Sadık Keleş'e ve Sayın Doç. Dr. Erol KILIÇ'a, bilgisinden yararlandığım Sayın Prof. Dr. Bayram Şahin'e teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca, maddi ve manevi destekleriyle her zaman yanımda olan anneme, babama ve eşime teşekkürü bir borç bilirim.

Mehmet GÜLBAHAR

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

1873 de L. Schlfli [1], m-boyutlu bir Riemann manifoldunun $\frac{m(m+1)}{2}$ boyutlu bir Öklidyen uzayın altmanifoldu olarak düşünülebileceğini iddia etti. Bu iddianın doğruluğu 1926 da M. Janet [2] tarafından ve 1927 de E. Cartan [3] tarafından lokal olarak ispatlandı. 1956 da ise J. F. Nash [4], herbir Riemann manifoldunun uygun bir ek boyutu ile birlikte Öklidyen uzayın içine izometrik olarak gömülebileciğini ispatladı. Bu teorem Nash'ın embedding teoremi olarak da bilinir. Böylece Nashın embedding teoremi bize her bir Riemann manifoldunun uygun bir ek boyut ile başka bir Riemann manifoldunun altmanifoldu olacağını gösterir. Ayrıca 1965 de A.Friedmann [5] bu teoremi semi-Riemann manifoldlara genişletti.

Nashın Embedding teoremi, bir Riemann manifoldunun içsel ve dışsal invaryatları belirlenmesi gerekliliğini ortaya çıkarır. Gauss Egregium teoremi gereğince, bir yüzey gerilme olmaksızın büküldüğünde o yüzeyin Gauss eğriliği değişmez. Yani Gauss eğriliği izometrik dönüşümler altında invaryant kalır. Böylece Gauss eğriliği yüzeyin içsel bir invaryantıdır. Benzer şekilde E. Cartan [6] aynı kesit eğriliğe sahip iki Riemann manifoldu arasında bir lokal izometrinin var olduğunu gösterdi. Böylece eğrilikler (Gauss eğriliği, Kesit eğriliği, Ricci eğriliği, skalar eğrilik) bir Riemann manifoldunun invaryantlarıdır. Eğrilik invaryantları fizik de önemli rol oynamaktadır. Örneğin, Einstein e göre bir çekim alanında bir cismin hareketi, uzay zamanının eğriliğine bağlıdır.

B.-Y. Chen, 1990 nın ilk yıllarında bir altmanifoldun içsel ve dışsal invaryantları arasında bağıntılar kurmak için Riemann eğrilik invaryantlarını inceledi. [7] de B. Y. Chen, bir Riemann manifoldunun Chen-invaryantı olarak isimlendirilen ve δ_M ile gösterilen yeni bir çeşit Riemann invaryantını şöyle tanımladı:

$$\delta_M = \tau(p) - \inf K(p). \tag{0.0.1}$$

Burada, $\tau(p)$ ve $K(p)$, $p \in M$ noktasında, sırasıyla, M nin skalar eğriliği ve kesit eğriliğidir.

Bununla birlikte, B.-Y. Chen [8], sabit c eğriliğine sahip m-boyutlu $R^m(\widetilde{c}$ Öklidyen uzayının n-boyutlu bir M altmanifoldu için, δ_M invaryantı ve ortalama eğrilik vektörünün normunun karesi $\|H(p)\|^2$ arasında aşağıdaki eşitsizliği kurdu:

$$\delta_M \leq \frac{n^2(n-1)}{(n-1)}\|H(p)\|^2 + \frac{1}{2}(n+1)(n-2)\widetilde{c}. \tag{0.0.2}$$

(0.0.2) eşitsizliği *Chen-eşitsizliği* olarak bilinir.

1996 da B.-Y. Chen[9], Riemannian uzay form $R^m(\widetilde{c})$ nın n-boyutlu altmanifoldları için şekil operatörü A_N ve kesit eğriliği $K(p)$ arasında

$$A_N \geq \frac{(n-1)}{n}(c-\widetilde{c})I_n \tag{0.0.3}$$

bağıntısını verdi öyleki burada $c = \inf(K(p)) \leq \widetilde{c}$ ve I_n birim dönüşümdür.

2000 de B.-Y. Chen[30], bir Riemann manifoldunu her noktasında tensiyonu mümkün olduğu kadar az bir değer alıyorsa, bu Riemann manifoldunu *ideal altmanifold* olarak isimlendirdi ve aşağıdaki eşitsizliği kurdu:

$$\|H(p)\|^2 \geq \frac{2(n+k-\sum_{j=1}^{k} n_j)}{n^2(n+k-1-\sum_{j=1}^{k} n_j)}\delta(n_1,\ldots,n_k). \tag{0.0.4}$$

Burada $\pi_{n_1},\ldots,\pi_{n_k}$, T_pM nin karşılıklı ortogonal olan alt uzayları olmak üzere

$$\delta(n_1,\ldots,n_k) = \tau(p) - \inf\{\tau(\pi_{n_1}) + \ldots + \tau(\pi_{n_k})\} \tag{0.0.5}$$

dır.

(0.0.4) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M ideal bir altmanifoldtur.

Daha sonra, B. Y. Chen ve bazı yazarlar farklı uzayların altmanifoldlarını karakterize eden eşitsizlikler buldular. Bu çalışmalar aşağıda şöyle ifade edilmiştir:

Kompleks uzay formların altmanifoldları için [11],[12] vs. kontakt uzay formların altmanifolları için [13],[14] vs. de bu tür eşitsizlikler çalışıldı. Ayrıca, S. Haesen [15] $(m+1)$ boyutlu Ricci-flat uzayın m-boyutlu bir Lorentzian manifolda embedded olan bir hiperyüzeyi için bir eşitsizlik kurdu. S. Haesen, A. Sebekovic ve L. Verstraelen [16] bir Semi-Riemann manifoldunda içsel ve dışsal eğrilik invaryantlarını kullanarak bazı eşitsizlikler verdiler. B. Y. Chen [17], bir Semi-Riemann manifoldun space-like altmanifoldları için bazı karakterizasyonlar elde etti.

Bunlarla beraber, M belirsiz metriği g ile bağlantılı bir manifold olsun. Eğer $p \in M$ noktasında kesit eğriliğinin değeri alttan ve üsten sınırlı ise bu durumda M, p noktasında sabit kesit eğriliğe sahiptir (Bknz. R. S. Kulkarni [**?**]). Ayrıca, $p \in M$ nin 2-boyutlu her π timelike düzlem kesiti veya spacelike düzlem kesiti için $|K(\Pi)$ değeri sınırlı ise M, p noktasında sabit kesit eğriliğe sahiptir [19]. Bu nedenle, semi-Riemannian manifoldlarda δ eğriliği tanımlanamaz. Ekran distribüsyonu Riemannian olan lightlike altmanifoldlarda kesit eğriliğinin tanım kümesi herhangi bir null vektör ihtiva etmediğinden ve null keit eğriliği sınırlanabileceğinden bu tezde δ eğriliği ekran distribüsyonu Riemannian olan lightlike altmanifoldlarda çalışılmıştır.

1. TEMEL KAVRAMLAR

1.1 Cebirsel Kavramlar

Tanım 1.1.1. V n-boyutlu bir reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilineer dönüşüm g olsun.

i) Her $u \in V$ için $g(u,u) < 0$ ise g ye V üzerinde *negatif tanımlı* denir.

ii) Her $u \in V$ için $g(u,u) > 0$ ise g ye V üzerinde *pozitif tanımlı* denir.

iii) Her $v \in V$ için $g(u,v) = 0$ iken $u = 0$ ise g ye V üzerinde *non-dejenere* denir.

V nin ortonormal bir bazı $B = \{e_1, \ldots, e_n\}$ olsun. Bu durumda g metriğine

$$g_{ij} = g(e_i, e_j), \;\; 1 \leq i, j \leq n \tag{1.1.1}$$

olmak üzere $n \times n$ tipinde simetrik bir $G = (g_{ij})$ matrisi karşılık gelir. g, V üzerinde non-dejeneredir gerek ve yeter koşul $rankG = n$ dir [20].

Tanım 1.1.2. V n-boyutlu bir reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilineer dönüşüm g olsun. $0 \neq \xi \in V$ olmak üzere her $v \in V$ için

$$g(\xi, v) = 0, \tag{1.1.2}$$

ise g ye V üzerinde *dejeneredir* denir [21].

Tanım 1.1.3. V bir reel vektör uzayı V üzerinde simetrik bilineer dönüşüm g olsun. V uzayının

$$Rad\ V = \{\xi \in V : g(\xi, v) = 0, \; \forall v \in V\} \tag{1.1.3}$$

ile tanımlı alt uzayına, V uzayının g ye göre *radikal uzayı* veya *null uzayı* denir [21].

Tanım 1.1.4. V reel vektör uzayında $g|_W$ nin negatif tanımlı olduğu en büyük W alt uzayının boyutuna V üzerinde g nin *indeksi* denir [20].

Tanım 1.1.5. V bir reel vektör uzayı olsun.

i) V üzerinde non-dejenere, simetrik, bilineer g dönüşüm tanımlı ise (V, g) ye *semi-Öklidyen uzay* ve g ye V üzerinde bir *skalar çarpım* denir.

ii) V üzerinde dejenere, simetrik, bilineer g dönüşüm tanımlı ise (V,g) ye *lightlike uzay* denir [21].

V Semi-Öklidyen uzayının ortonormal bir $\{e_1,\ldots,e_n\}$ bazı verilsin. Bu durumda

$$g(e_i,e_j) = \varepsilon_i\ \delta_{ij},\ \ \varepsilon_i = g(e_i,e_i) \tag{1.1.4}$$

dir. V nin her v elemanı

$$v = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i\ g(v,e_i)e_i \tag{1.1.5}$$

olarak yazılabilir. Dikkat edilecek olursa, bu yazılım tektir [20].

V semi-Öklidyen uzayının herhangi bir $\{e_1,\ldots,e_n\}$ ortonormal bazı için $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ işaretlerinden negatif olanlarının sayısı V nin indeksini verir.

Tanım 1.1.6. V ve W birer semi-Öklidyen uzay ve $T : V \to W$ lineer bir dönüşüm olsun. Eğer T dönüşümü V ve W üzerindeki skalar çarpımları koruyorsa T dönüşümüne bir *lineer izometri* denir. İki semi-Öklidyen uzay lineer izometrik olabilmesi için gerek yeter şart bu iki uzay aynı indeksli ve aynı boyutlu olmasıdır [20].

Tanım 1.1.7. (V,g) bir semi-Öklidyen uzay olsun. $x \in V$ için

i) $g(x,x) > 0$ veya $x = 0$ ise x vektörüne *spacelike vektör*,

ii) $g(x,x) < 0$ ise x vektörüne *timelike vektör*,

iii) $g(x,x) = 0$ ise x vektörüne *null* veya *lightlike vektör* denir [20].

Teorem 1.1.1. (W,g) *reel n-boyutlu bir lightlike vektör uzayı ve boy* $RadW = r < n$ *olsun. Bu durumda, radikal uzayın* W *da tümleyeni olan* SW *alt uzayı non-dejeneredir [21].*

İspat. W nın tümleyeni SW olmak üzere

$$W = Rad\ W \oplus_{orth} S\,W \tag{1.1.6}$$

dir. Burada, $\oplus$ direkt toplamdır. Kabul edelim ki, her $v \in SW$ için $g(u,v) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $u \in SW$ var olsun. Bu durumda $u \in Rad\ W$ dır. $Rad\ W \cap SW = \{0\}$ olduğundan $u = 0$ dır. Bu ise SW nın non-dejenere olduğunu gösterir. □

Tanım 1.1.8. (W,g) reel n-boyutlu bir lightlike vektör uzayı olsun. Radikal uzayın W da tümleyeni olan SW alt uzayına W nın *ekran uzayı* denir [21].

Tanım 1.1.9. (V,g) m-boyutlu bir semi-Öklidyen uzay ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Eğer $g|_W$ dejenere ise bu alt uzaya *lightlike alt uzay* denir.

$$W^{\perp} = \{v \in V : g(v,w) = 0, \forall w \in W\} \tag{1.1.7}$$

alt uzayına W uzayının *diki* denir. Eğer W, V nin non-dejenere bir alt uzayı ise

$$W \cap W^{\perp} = 0 \tag{1.1.8}$$

dır. Eğer W, V nin lightlike bir alt uzayı ise $W \cap W^{\perp}$ sıfıra eşit olmak zorunda değildir [21].

Önerme 1.1.1. (V,g) *reel m-boyutlu bir semi-Öklidyen uzay ve W da V nin bir alt uzayı olsun. Bu durumda,*

i) *boy* $W +$ *boy* $W^{\perp} = m$,

ii) $(W^{\perp})^{\perp} = W$,

iii) *rad* $W =$ *rad* $W^{\perp} = W \cap W^{\perp}$ *dir [21].*

Tanım 1.1.10. (V,g) bir semi-Öklidyen uzay olsun. Bu uzayın

$$g(f_i,f_j) = g(f_i^*,f_j^*) = 0,\ g(f_i,f_j^*) = \delta_{ij},\ i,j \in \{1,\ldots,q\},$$
$$g(u_\alpha,f_i) = g(u_\alpha,f_i^*) = 0,\ g(u_\alpha,u_\beta) = \varepsilon_{\alpha\beta},\ \alpha,\beta \in \{1,\ldots,t\},\ \varepsilon_\alpha = \mp 1$$

olacak şekilde V nin bir

$$B = \{f_1,\ldots,f_r,f_1^*,\ldots,f_r^*,u_1,\ldots,u_t\} \tag{1.1.9}$$

bazı vardır ve bu baza V nin bir *quasi-ortonormal bazı* denir [21].

Tanım 1.1.11. (V,g) m-boyutlu bir semi-Öklidyen uzay ve W da V n-boyutlu bir alt uzayı olsun. $r \leq n$ ve $1 \leq s \leq t$ için $W = Span\{f_1,\ldots,f_m,u_1,\ldots,u_s\}$ olmak üzere,

$$B = \{f_1,\ldots,f_r,f_1^*,\ldots,f_r^*,u_1,\ldots,u_t\} \tag{1.1.10}$$

cümlesine V nin W alt-uzayı boyunca bir *quasi-ortonormal bazı* denir [21].

Önerme 1.1.2. (V,g) *semi-Öklidyen bir uzay ve* W *da* V *bir alt uzayı olsun. Bu durumda,* W *boyunca* V *uzayının bir quasi-ortonormal bazı vardır [21].*

1.2 Semi-Riemann Manifoldlar

Tanım 1.2.1. M, reel m-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun.

$$\begin{aligned} g_p: \quad & T_pM \times T_pM \to R, \\ & (X_p,Y_p) \to g_p(X_p,Y_p) = g(X_p,Y_p) \end{aligned} \tag{1.2.1}$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, non-dejenere, $(0,2)$ tipli tensör alanına M üzerinde *metrik tensör* denir. Eğer M manifoldu g metrik tensörü ile donatılmış ise M ye bir *semi-Riemann manifold* denir [20].

Tanım 1.2.2. (M,g) bir semi-Riemann manifold olsun. g metrik tensörünün indeksine M nin indeksi denir. M nin indeksi *ind* (M) ile gösterilir.

ind $(M) = q$ olsun. Bu durumda $0 \leq q \leq boy\, M$ dir. Özel olarak $q = 0$ ise M manifolduna bir *Riemann manifoldu*, $q = 1$ ve $boy\, M > 2$ ise M manifolduna bir *Lorentz manifoldu* denir [20].

Tanım 1.2.3. M, reel m-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold, $F(M)$, M üzerindeki tüm diferensiyellenebilir fonksiyonların kümesi olsun.

$\nabla : \chi(X) \times \chi(M) \to \chi(M)$ fonsiyonu

i) $\nabla_X Y$, X de $F(M)$ lineerdir.

ii) $\nabla_X Y$, Y de R-lineerdir.

iii) $f \in FM$ için $\nabla_X fY = (Xf)Y + f\nabla_X Y$ dir.

koşullarını sağlıyorsa bu fonksiyona M üzerinde bir *afin konneksiyon*, $\nabla_X Y$ ye X e göre Y nin *kovaryant türevi* denir [20].

Bir ∇ afin konneksiyonunun *torsiyon tensörü* T ise

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

ile tanımlanan $(1,2)$ tipli bir tensör alanıdır.

Teorem 1.2.1. *M bir semi-Riemann manifold olsun. M üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan bir tek ∇ afin konneksiyonu vardır:*

a) ∇ torsiyonsuzdur. Yani, her $Y,Z \in \chi(M)$ için $[Y,Z] = \nabla_Y Z - \nabla_Z Y$ dir.

b) Her $X,Y,Z \in \chi(M)$ için $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y,Z) + g(Y,\nabla_X Z)$ dir.

(a) ve (b) şartlarını sağlayan ∇ konneksiyonuna M nin Levi-Civita konneksiyonu denir [20].

M üzerindeki Levi-Civita konneksiyounu

$$\begin{aligned} 2g(\nabla_Y Z,X) &= Yg(Z,X) + Zg(X,Y) - Xg(Y,Z) \\ &\quad -g(Y,[Z,X]) + g(Z,[X,Y]) + g(X,[Y,Z]) \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

eşitliğini sağlar. Bu eşitliğe *Koszul eşitliği* denir [20].

M, n-boyutlu semi-Riemann manifoldu olsun. M nin bir U açığı üzerinde $\{x_1,\ldots,x_n\}$ koordinat sistemi verilsin. $\{x_1,\ldots,x_n\}$ koordinat sistemi için *Christoffel sembolleri* Γ_{ij}^k,

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad 1 \leq i,j \leq n \tag{1.2.3}$$

eşitliğini sağlayan U üzerinde reel-değerli fonksiyonlardır.

Teorem 1.2.2. *M, n-boyutlu bir semi-Riemann manifold ve M nin bir U açığı üzerinde $\{x_1,\ldots,x_n\}$ koordinat sistemi verilsin. Bu durumda,*

i) $\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y = \sum\limits_{k=1}^{n} \{\frac{\partial Y_k}{\partial x_i} + \sum\limits_{j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k Y_j\}$,

ii) $\Gamma_{ij}^k = \sum\limits_{t=1}^{n} \frac{g^{kt}}{2} \{\frac{\partial g_{jt}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{it}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_t}\}$

eşitlikleri sağlanır. Burada $Y = \sum\limits_{j=1}^{n} Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ ve (g^{ij}), (g_{ij}) nin ters matrisdir [20].

Tanım 1.2.4. M, n-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold ve M nin Levi-Civita konneksiyonu ∇ olsun.

$$R(X,Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \tag{1.2.4}$$

ile tanımlanan $(1,3)$ tipinde $R : \chi(M) \times \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)$ tensör alanına M nin *Riemann eğrilik tensörü* denir [20].

Önerme 1.2.1. *M semi-Riemann manifoldunun Riemann eğrilik tensörü R, her $X,Y,Z,W \in T_pM$ ve $p \in M$ için*

i) $R(X,Y)Z = -R(Y,X)Z$,

ii) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(X,Y),Z,W)$,

iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,

iv) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

özelliklerini sağlar [20].

Tanım 1.2.5. M, n-boyutlu bir semi-Riemann manifold olsun. M nin bir p noktasındaki T_pM tanjant uzayının 2-boyutlu lineer alt uzayına T_pM nin bir *alt-düzlem kesiti* denir [20]. T_pM nin bir $\Pi = Span\{X,Y\}$ düzlem kesiti ve

$$Q(\Pi) = g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2 \tag{1.2.5}$$

reel sayısı verilsin. $Q(\Pi) \neq 0$ ise Π düzlemine T_pM nin *non-dejenere düzlem kesiti* denir. $g|_\Pi$ definite ise $Q(\Pi) > 0$ dır ve $g|_\Pi$ indefinite ise $Q(\Pi) < 0$ dır. Ayrıca, $|Q(\Pi)|$ değeri X ve Y vektörlerinin oluşturduğu parelel kenarın alanını verir.

Tanım 1.2.6. M, n-boyutlu bir semi-Riemann manifold olsun. M nin bir p noktasındaki bir non-dejenere düzlem kesiti $\Pi = span\{X,Y\}$ olmak üzere

$$K(\Pi) = \frac{g(R(X,Y)Y,X)}{Q(\Pi)} \tag{1.2.6}$$

sayısına Π nin *kesit eğriliği* denir. Π nin kesit eğriliği $K(\Pi)$, Π nin $\{X,Y\}$ baz seçiminden bağımsızdır [20].

Eğer $K = 0$ ise M semi-Riemann manifolduna *flatdır* denir [20].

E^m_q semi-Öklidyen uzayı, her q indeksi için flatdır. Gerçekten, E^m_q semi-Öklidyen uzayının normal koordinatları için Γ^k_{ij} Christoffel sembollerinin tamamı sıfıra eşittir.

Tanım 1.2.7. M, n-boyutlu bir semi-Riemann manifold ve $\{e_1,\dots,e_n\}$ T_pM nin ortonormal bir bazı olsun. Her $X,Y \in T_pM$ için *Ricci tensörü*

$$Ric(X,Y) = iz(Z \to R(Z,X))Y \tag{1.2.7}$$

ile tanımlanır. Başka bir deyişle

$$Ric(X,Y)=\sum_{\ell=1}^{n}\varepsilon_\ell g(R(e_\ell,X),Y,e_\ell) \tag{1.2.8}$$

ile tanımlanır [17]. $Ric(X,Y)$, T_pM nin $\{e_1,\ldots,e_n\}$ ortonormal bazının seçiminden bağımsızdır.

Her $X,Y\in T_pM$ için $Ric(X,Y)=0$ ise M ye *Ricci flattır* denir. Semi-Riemannian bir manifold flat ise Ricci-flattır. Fakat tersi her zaman doğru değildir.

Tanım 1.2.8. M, n-boyutlu bir semi-Riemann manifold olsun. Her $X,Y\in T_pM$ için

$$Ric(X,Y)=c\,g(X,Y) \tag{1.2.9}$$

olacak şekilde bir c sabiti varsa M ye *Einstein manifoldu* denir [20].

T_pM deki birim vektörlerin cümlesini

$$T_p^1M=\{X\in T_pM : g(X,X)=\mp 1\} \tag{1.2.10}$$

ile gösterelim. $e_1\in T_p^1M$ nin *Ricci eğriliği*

$$Ric(e_1)=Ric(e_1,e_1)=\sum_{j=2}^{n}K_{1j} \tag{1.2.11}$$

olur [17].

Teorem 1.2.3. *M, n-boyutlu $(n>3)$ bir semi-Riemann manifold olsun. Her $X,Y\in T_pM$ ve $f\in F(M)$ için*

$$Ric(X,Y)=f\,g(X,Y) \tag{1.2.12}$$

ise M bir Einstein manifoldudur [17].

Tanım 1.2.9. M, n-boyutlu bir semi-Riemann manifold ve $\{e_1,\ldots,e_n\}$ T_pM nin ortonormal bir bazı olsun. M nin skalar eğriliği

$$\tau(p)=\sum_{i<j}^{n}K_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}^{n}K_{ij} \tag{1.2.13}$$

ile tanımlanır [17]. M nin skalar eğriliği T_pM nin $\{e_1,\ldots,e_n\}$ ortonormal bazının seçiminden bağımsızdır.

Tanım 1.2.10. M semi-Riemann manifoldunun her $p \in M$ için kesit eğriliği sabit ise M ye *sabit eğrilikli uzay* denir.

M sabit eğrilikli bir semi-Riemann manifold ise M nin Riemann eğrilik tensörü

$$R(X,Y)W = c\{g(Y,Z)X - g(X,Z)Y\} \tag{1.2.14}$$

eşitliğini sağlar [20].

E_q^n, n-boyutlu, q indeksli, semi-Öklidyen uzay olsun. E_q^n üzerinde standart metrik

$$g_0 = -\sum_{i=1}^{q} dx_i^2 + \sum_{j=q+1}^{n} dx_j^2 \tag{1.2.15}$$

ile verilir. c sıfırdan farklı bir reel sayı olsun. Sırasıyla,

$$\begin{aligned} S_q^k(x_0,c) &= \{X \in E_q^{k+1} : g(x-x_0, x-x_0) = \frac{1}{c} > 0\} \\ H_q^k(x_0,c) &= \{X \in E_q^{k+1} : g(x-x_0, x-x_0) = \frac{1}{c} < 0\} \end{aligned} \tag{1.2.16}$$

ile verilen pseudo-küresi ve pseudo hiperbolik uzayı, eğrilikleri c olan sabit eğrilikli semi-Riemann manifoldlarıdır. E_q^n, S_q^k ve H_q^k indefinite reel uzay formların en iyi bilinen örnekleridir [17].

Tanım 1.2.11. M bir diferensiyellenebilir manifold ve A, M üzerinde herhangi bir tensör alanı olsun. Bu durumda, $p \in M$, $t \in I \subset R$ ve $X \in \Gamma(TM)$ olmak üzere

$$L_X A = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}(A(p) - \phi_t A)(p) \tag{1.2.17}$$

ile tanımlanan L_X diferensiyel operatörüne X vektör alanına göre *Lie türevi* denir [21].

Burada ϕ,

$$\phi : (t,x) \times [\varepsilon, \varepsilon] \to M \tag{1.2.18}$$

ile tanımlı bir dönüşümdür.

Tanım 1.2.12. M, n-boyutlu bir semi-Riemann manifold ve $f \in F(M)$ olsun. f nin gradienti ∇f

$$g(\nabla f, X) = df(X) = Xf, \ \forall X \in \Gamma(TM) \tag{1.2.19}$$

ile tanımlanır [17].

M nin bir koordinat sistemi $\{x_1, \ldots, x_n\}$ ise

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j} dx_j \ \text{ ve } \ \nabla f = \sum_{i,j} g^{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_j} \tag{1.2.20}$$

dir [17].

Tanım 1.2.13. M bir semi-Riemann manifold olsun. $L_X g = 0$ ise X vektör alanına bir *Killing vektör alanı*, $L_X g = \lambda X$ olacak şekilde bir $\lambda \in F(M)$ varsa X vektör alanına bir *konformal Killing vektör alanı* denir [17].

Önerme 1.2.2. *M semi-Riemann manifoldu üzerindeki bir X vektör alanı için aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

i) *X bir Killing vektör alanıdır.*

ii) *Her $V, W \in \Gamma(TM)$ için*

$$Xg(V,W) = g([X,V],W) + g(V,[X,W])$$

dır.

iii) *$g(\nabla_V X, W) = -g(\nabla_W X, V)$ dir [17].*

Tanım 1.2.14. (M, g_M) ve $(\widetilde{M}, \widetilde{g})$ birer semi-Riemann manifold

$$\varphi^*(\widetilde{g}) = g \tag{1.2.21}$$

olacak şekilde metrik tensörleri koruyan $\varphi : M \to \widetilde{M}$ difeomormizmine bir *izometri* denir [17].

$p \in M$ nin bir $U \subset M$ komşuluğu için

$$g_p(u,v) = \widetilde{g}_{\varphi(p)}(\varphi_{*p}(u), \varphi_{*p}(v)), \ \ \forall u,v \in T_pM \tag{1.2.22}$$

ise $\varphi : U \to \varphi(U)$ dönüşümüne bir *lokal izometri*, M ile $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldlarına *lokal izometriktir* denir [17].

Tanım 1.2.15. M ve $\widetilde{M}$ birer semi-Riemann manifold, $\varphi : M \to \widetilde{M}$ bir dönüşüm olsun. Her $p \in M$ için $\varphi_{*p} : T_pM \to T_{\varphi(p)}\widetilde{M}$ birebir ise φ ye bir *immersion* denir. Eğer φ bir homeomorfizm ise yani φ nin tersi var ve sürekli ise φ ye bir *emdedding* denir [17].

$\varphi : M \to \widetilde{M}$ bir immersion ise $p \in M$ nin öyle bir U komşuluğu vardırki $\varphi : U \to \widetilde{M}$ kısıtlanmışı bir embeddingdir.

$\varphi : M \to \widetilde{M}$ immersionu için daima $boy\, M \leq boy\, \widetilde{M}$ dir. $boy\, \widetilde{M} - boy\, M$ farkına bu immersionun *ek-boyutu* denir [17].

Tanım 1.2.16. $\varphi : M \to \widetilde{M}$ bir immersion olsun. Her $u, v \in T_pM$ ve $p \in M$ için

$$g_p(u,v) = \widetilde{g}_{\varphi(p)}(\varphi_{*p}(u), \varphi_{*p}(v)) \tag{1.2.23}$$

ise φ ye bir *izometrik immersion*, M ye $\widetilde{M}$ nın bir *altmanifoldu* denir [17].

$\varphi : M \to \widetilde{M}$ bir izometrik immersion olsun. Her bir $p \in M$ için p nin öyle bir U komşuluğu vardırki $\varphi : U \to \widetilde{M}$ bir embeddingdir. Böylece her bir $u \in T_pM$ vektörünü $\varphi_*(u) \in T_{\varphi(p)}\widetilde{M}$ vektörü karşılık gelir. Bu nedenle her $u \in T_pM$ vektörünü $\varphi_*(u) \in T_{\varphi(p)}\widetilde{M}$ ile gösterebiliriz. Böylece T_pM, $T_{\varphi(p)}\widetilde{M}$ nin bir non-dejenere alt uzayı olup

$$T_{\varphi(p)}\widetilde{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp} \tag{1.2.24}$$

olarak yazılabilir. Burada $T_{\varphi(p)}\widetilde{M}$ nin non-dejenere alt uzayı $T_pM^{\perp}$ uzayına $p \in M$ de M nin *normal uzayı* denir [17].

(1.2.24) den her $v \in T_{\varphi(p)}\widetilde{M}$ elamanı

$$v = tan\, v + nor\, v \tag{1.2.25}$$

olarak tek şekilde yazılabilir. Burada $tan\, v \in T_pM$ ve $nor\, v \in T_pM^{\perp}$ dir. Ayrıca

$$tan : T_{\varphi(p)}\widetilde{M} \to T_pM \quad \text{ve} \quad nor : T_{\varphi(p)}\widetilde{M} \to T_pM^{\perp} \tag{1.2.26}$$

ortogonal projeksiyonları R-lineerdir [17].

Tanım 1.2.17. $\varphi : M \to \widetilde{M}$ bir izometrik immersion ve $\widetilde{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonu $\widetilde{\nabla}$ olsun. $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $\forall N \in \Gamma(TM^{\perp})$ için

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X,Y), \\ \widetilde{\nabla}_X N &= -A_N X + \nabla^{\perp}_X N \end{aligned} \tag{1.2.27}$$

formüllerine *Gauss ve Weingareten formülleri* denir. Burada $\nabla_X Y, A_N X \in \Gamma(TM)$ ve $h(X,Y), \nabla^{\perp}_X N \in \Gamma(TM^{\perp})$ dir [17].

Önerme 1.2.3. *M ve $\widetilde{M}$ birer semi-Riemann manifold olsun.*

i) $(1.2.27)$ *de verilen ∇, M nin Levi-Civita konneksiyonudur.*

ii) *h, simetrik ve bilineerdir [17].*

Tanım 1.2.18. $(1.2.27)$ da verilen $h : T\widetilde{M} \times T\widetilde{M} \to TM^{\perp}$ simetrik, bilineer dönüşümüne φ nin *ikinci temel formu* denir [17].

T_pM nin bir ortonormal bazı $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ve $T_pM^{\perp}$ in ortonormal bir bazı $\{e_{n+1}, \ldots, e_m\}$ olsun. $i, j = 1, \ldots n$; $r = n+1, \ldots, m$ için

$$h(e_i, e_j) = \sum_{r=n+1}^{m} \varepsilon_r \, h^r_{ij} e_r, \;\; \varepsilon_r = \widetilde{g}(e_r, e_r) \tag{1.2.28}$$

tanımlansın. $h^r_{ij} = \widetilde{g}(h(e_i, e_j), e_r)$ ye *ikinci temel formun bileşenleri* denir [17].

Önerme 1.2.4. $\phi : M \to \widetilde{M}$ *bir immersion olsun. Bu durumda*

i) *$A_N X$, N ve X e göre bilineerdir.*

ii) *$\widetilde{g}(h(X,Y),N) = \widetilde{g}(A_N X, Y)$ dir.*

iii) *$\nabla^{\perp}$, $TM^{\perp}$ üzerinde bir metrik konneksiyondur [17].*

Tanım 1.2.19. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun non-dejenere bir altmanifoldu olsun. M nin bir p noktasında normal vektör alanı N olmak üzere $A_N = \lambda I$, $\lambda \in F(M)$ ise N ye *umbilik kesit* ve M alt manifolduna N ye göre *umbiliktir* denir. Eğer M altmanifoldu, herbir lokal normal vektör alanına göre umbilik ise M ye *total umbilik altmanifold* denir [17].

Tanım 1.2.20. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun non-dejenere bir altmanifoldu olsun. $p \in M$ noktasındaki *ortalama eğrilik vektörü* $H(p)$

$$H(p) = \frac{1}{n} iz\, h \tag{1.2.29}$$

ile tanımlanır. T_pM nin ortonormal bir bazı $\{e_1, \ldots, e_n\}$ olmak üzere

$$H(p) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_j h(e_j, e_j) \tag{1.2.30}$$

dir [17].

M total umbilik bir altmanifold ise M nin ikinci temel formu, her $X, Y \in TM$ için

$$h(X,Y) = \widetilde{g}(X,Y)H \tag{1.2.31}$$

eşitliğini sağlar [20].

Tanım 1.2.21. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun non-dejenere bir altmanifoldu olsun. M nin her p noktasında $H(p) = 0$ ise M ye *minimal altmanifold*, $H \neq 0$ ve $\widetilde{g}(H,H) = 0$ ise M ye *quasi-minimal altmanifold* veya *semi-minimal altmanifold* denir [22].

Teorem 1.2.4. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun non-dejenere bir altmanifoldu olsun. Her $X,Y,Z,W \in \Gamma(TM)$ için*

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,W) &= \widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Z,W) + \widetilde{g}(h(X,W),h(Y,Z)) \\ &\quad - \widetilde{g}(h(X,Z),h(Y,W)) \end{aligned} \tag{1.2.32}$$

dır. Burada R ve $\widetilde{R}$, sırasıyla, M ve $\widetilde{M}$ nin eğrilik tensörüdür. (1.2.32) *eşitliğine Gauss denklemi denir [20].*

Gauss denklemi kullanılılarak aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 1.2.1. $\Pi = Span\{X,Y\}$ T_pM nin 2-boyutlu bir alt-düzlemi olmak üzere

$$K(\Pi) = \widetilde{K}(\Pi) + \frac{\widetilde{g}(h(X,X),h(Y,Y)) - \widetilde{g}(h(X,Y),h(Y,X))}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2} \tag{1.2.33}$$

dir [17].

Teorem 1.2.5. α*, M semi-Riemann manifoldu üzerinde diferensiyellenebilir bir eğri olsun. Bu durumda,*

$$\ddot{\alpha} = \alpha'' + h(\alpha', \alpha') \tag{1.2.34}$$

dir. Burada $\frac{\widetilde{D}\alpha}{ds} = \dot{\alpha}$ *ve* $\frac{D\alpha}{ds} = \alpha'$ *dür.*

$\ddot{\alpha}$ vektörüne α eğrisinin $\widetilde{M}$ daki *ivme vektörü* ve α'' vektörüne α eğrisinin M deki *ivme vektörü* denir [20].

Tanım 1.2.22. $\alpha'' = 0$ ise α eğrisine M nin bir *geodezik eğrisi* denir [20].

Tanım 1.2.23. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için M nin ikinci temel formu $h = 0$ ise M semi-Riemann altmanifolduna $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir *total geodezik altmanifoldu* denir [20].

Eğer M semi-Riemann manifoldu, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun total geodezik bir altmanifoldu ise
i) M nin her geodeziği aynı zamanda $\widetilde{M}$ nın da bir geodeziğidir.
ii) M dışsal flattır. Başka bir değişle, M ile $\widetilde{M}$ in Riemann eğrilik tensörleri birbirine eşittir [20].

(1.2.27) da verilen $\nabla^{\perp}$ metrik konneksiyonuna *normal konneksiyon* denir. Eğer M de normal bir vektör alanı N için $\nabla^{\perp}N = 0$ ise N ye *paraleldir* denir. Ayrıca $\nabla^{\perp}H = 0$ ise H ortalama eğrilik vektörüne *paraleldir* denir [20].

Tanım 1.2.24. M, n-boyutlu ve $\widetilde{M}$, m-boyutlu birer semi-Riemannian manifoldlar, $\varphi : M \to \widetilde{M}$ bir izometrik immersion olsun. $\{N_{n+1}, \ldots, N_m\}$ $TM^{\perp}$ in bir ortonotmal çatısı olmak üzere

$$A^c = \sum_{r=n+1}^{m} \varepsilon_r \, A_{N_r}^2, \;\; \varepsilon_r = \widetilde{g}(N_r, N_r) \tag{1.2.35}$$

ile tanımlı A^c operatörüne *Casorati operatörü* denir [17]. A^c, $TM^{\perp}$ deki baz seçiminden bağımsızdır.

Bu bölümün geriye kalan kısmında, $\widetilde{M}$ nın metrik tensörü $\widetilde{g}$ ve M nin indirgenmiş metrik tensörü g yerine $\langle , \rangle$ sembolü kullanılacaktır.

Önerme 1.2.5. *M_s^n ve R_s^m, sırasıyla, s-indeksli ve n-boyutlu bir semi-Riemannian manifold ve s-indeksli ve m-boyutlu semi-Riemannian uzay form olsun. M_s^n, R_s^m nin non-dejenere bir altmanifoldu ve M_s^n nin bir ortonormal bazı $\{e_1, \ldots, e_n\}$ olmak üzere M_s^n nin Ricci tensörü*

$$\begin{aligned} Ric(Y,Z) &= (n-1)\langle Y,Z\rangle c + n\langle H(p), h(Y,Z)\rangle \\ &\quad -\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle h(Y,e_i), h(Z,e_i)\rangle \end{aligned} \tag{1.2.36}$$

eşitliğini sağlar [17].

Proof. Gauss denkleminden

$$\begin{aligned} Ric(Y,Z) &= \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle \widetilde{R}(e_i,Y)Z, e_i\rangle + n\langle H, h(Y,Z)\rangle \\ &\quad -\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle h(Y,e_i), h(Z,e_i)\rangle \end{aligned} \tag{1.2.37}$$

yazılabilir. Burada

$$\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \langle \widetilde{R}(e_i,Y)Z, e_i\rangle = (n-1)\langle Y,Z\rangle c \tag{1.2.38}$$

dir. (1.2.38) eşitliği (1.2.37) eşitliğinde yerine yazılacak olursa (1.2.36) eşitliği elde edilir.

Önerme 1.2.6. *M, R_s^m indefinite reel uzay formunun bir semi-Riemannian altmanifoldu olsun. Bu durumda*

$$\tau(p) = \frac{n^2}{2}\langle H,H\rangle - \frac{1}{2}S_H + \frac{n(n-1)}{2}c \tag{1.2.39}$$

dir. Burada

$$S_H = \sum_{i,j=1}^{n} \varepsilon_i \varepsilon_j \langle h(e_i,e_j), h(e_i,e_j)\rangle \tag{1.2.40}$$

dir [17].

Proof. Gauss denkleminden

$$\begin{aligned}\varepsilon_i\varepsilon_j\langle R(e_i,e_j)e_j,e_i\rangle &= \varepsilon_i\varepsilon_j\langle\widetilde{R}(e_i,e_j)e_j,e_i\rangle+\varepsilon_i\varepsilon_j\left\langle h(e_i,e_i),h(e_j,e_j)\right\rangle \\ &- \varepsilon_i\varepsilon_j\left\langle h(e_i,e_j),h(e_j,e_i)\right\rangle \qquad (1.2.41)\end{aligned}$$

dir. Son eşitlikte, i ve j ye göre iz alınacak olursa

$$\sum_{i,j=1}^{n}\varepsilon_i\varepsilon_j\langle R(e_i,e_j)e_j,e_i\rangle=\varepsilon_i\varepsilon_j\langle\widetilde{R}(e_i,e_j)e_j,e_i\rangle+n^2\langle H,H\rangle-S_H \qquad (1.2.42)$$

olur. (1.2.13) ve (1.2.42) den (1.2.39) eşitliği elde edilir.

2. LİGHTLİKE HİPERYÜZEYLER ÜZERİNDE CHEN TİPİ EŞİTSİZLİKLER

2.1 Lightlike hiperyüzeyler

Tanım 2.1.1. $(\widetilde{M},\widetilde{g})$, $(n+1)$-boyutlu bir semi-Riemann manifold, $\widetilde{M}$ nın n-boyutlu bir hiperyüzeyi M olmak üzere her $p \in M$ için

$$Rad\ T_pM = \{\xi \in T_pM : g_p(\xi, X) = 0, \forall X \in T_pM\}. \tag{2.1.1}$$

olacak şekilde rankı 1 olan bir alt uzayı varsa M ye $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir *lightlike hiperyüzeyi* ve $Rad\ T_pM$ ye M nin *radikal distribüsyonu* denir [21].

TM de $Rad\ T_pM$ nin tamamlayanı olan alt uzaya M nin *ekran distribüsyonu* denir. M nin ekran distribüsyonu $S(TM)$ ile gösterilir ve TM nin non-dejenere bir alt uzayıdır. $\oplus_{orth}$ ortogonal olan direkt toplam olmak üzere

$$TM = Rad\ TM \oplus_{orth} S(TM) \tag{2.1.2}$$

dir. Ayrıca $S(TM)$ non-dejenere olduğundan

$$T\widetilde{M} = S(TM) \oplus_{orth} S(TM)^{\perp} \tag{2.1.3}$$

olarak yazılabilir.

M bir lightlike hiperyüzey ise daima $Rad\ T_pM = T_pM^{\perp}$ dir. Ayrıca $S(TM)^{\perp}$ uzayı, $\oplus$ ortogonal olmayan direkt toplam olmak üzere

$$S(TM)^{\perp} = T_pM^{\perp} \oplus tr(TM) \tag{2.1.4}$$

olarak yazılabilir. Böylece

$$T\widetilde{M} = S(TM) \oplus_{orth} (TM^{\perp} \oplus tr(TM)) = TM \oplus tr(TM) \tag{2.1.5}$$

olur [21].

Örnek 2.1.1. $(R_1^4, \widetilde{g})$, $(-,+,+,+)$ işaretli bir uzay zaman manifoldunu olsun. R_1^4 ün bir $(\partial_t, \partial_1, \partial_2, \partial_3)$ kanonik bazı verilsin. R_1^4 de

$$\{t(1, \cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u) \in R_1^4 :\ t > 0, u \in (0, \frac{\pi}{2}), v \in [0, 2\pi]\} \tag{2.1.6}$$

ile verilen M hiperyüzeyi bir lightlike hiperyüzeydir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} Rad\ TM &= span\{\xi = \partial_t + \cos u \cos v \partial_1 + \cos u \sin v \partial_2 + \sin u \partial_3\}, \\ ltr(TM) = span\{N &= \frac{1}{2}(-\partial_t + \cos u \cos v \partial_1 + \cos u \sin v \partial_2 + \sin u \partial_3\}, \\ S(TM) = span\{W_1 &= -\sin u \cos v \partial_1 - \sin u \sin v \partial_2 + \cos u \partial_3, \\ & \quad W_2 = -\sin v \cos u \partial_1 + \cos v \cos u \partial_2\} \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

dir [23].

Tanım 2.1.2. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $\widetilde{\nabla}$ ve ∇, sırasıyla $\widetilde{M}$ ve M üzerindeki Levi-Civita ve lineer koneksiyonlar olsun. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için Gauss ve Weingarten formulleri

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + h(X,Y), \\ \widetilde{\nabla}_X N &= -A_N X + \nabla^t_X N \end{aligned} \tag{2.1.8}$$

ile verilir. Burada $\nabla_X Y, A_N X \in \Gamma(TM)$ ve $h(X,Y), \nabla^t_X N \in \Gamma(ltr(TM))$ dir.

$B(X,Y) = \widetilde{g}(h(X,Y),\xi)$ ve $\tau(X) = \widetilde{g}(\nabla^t_X N, \xi)$ olsun. Bu durumda Gauss ve Weingarten formülleri

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_X Y &= \nabla_X Y + B(X,Y)N, \\ \widetilde{\nabla}_X N &= -A_N X + w(X)N \end{aligned} \tag{2.1.9}$$

olur. Burada B ve A_N, sırasıyla, M lightlike hiperyüzeyinin *ikinci temel form* ve *şekil operatörü* olarak adlandırılır. Ayrıca, M üzerine indirgenen ∇ konneksiyonu merik konneksiyon değildir fakat torsiyonsuzdur [21].

Tanım 2.1.3. M bir lightlike hiperyüzey olsun. Her $p \in M$ için $B = 0$ ise M hiperyüzeyine *total geodezik lightlike hiperyüzey* denir [21].

Örnek 2.1.2. $(R^4_1, \widetilde{g})$, $(-,+,+,+)$ işaretli semi-Öklidyen uzayı olsun. R^4_1 in bir $(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4)$ kanonik bazı verilsin. R^4_1 de

$$\{(u, v+w, u, v-w) \in R^4_1 : \ u, v, w \in R\} \tag{2.1.10}$$

ile verilen M hiperyüzeyi total geodezik bir lightlike hiperyüzeydir. Gerçekten,

$$Rad\ TM = span\{\xi = \partial_1 + \partial_3\},\ ltr(TM) = Sp\{N = \frac{1}{2}(-\partial_1 + \partial_3)\}$$
$$S(TM) = span\{W_1 = \partial_2 + \partial_4,\ W_2 = \partial_2 - \partial_4\}$$

olup burada $B = 0$ olduğu görülür.

Teorem 2.1.1. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir [21].*

***i)** M total geodeziktir.*

***ii)** M üzerinde h sıfıra eşittir.*

***iii)** M üzerinde birtek ∇ metrik konneksiyonu vardır.*

***iv)** $Rad\ TM$, ∇ konneksiyonuna göre paralel bir distribüsyondur.*

***v)** $Rad\ TM$, M üzerinde bir Killing distribüsyonudur.*

Tanım 2.1.4. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $H \in R$ olmak üzere her $X, Y \in T_pM$ için

$$B(X,Y)_p = Hg_p(X,Y),$$

ise $p \in M$ noktasına *umbilik nokta* denir. M nin her noktası umbilik ise M ye *total umbilik lightlike hiperyüzey* denir [21].

Tanım 2.1.5. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. T_pM nin bir bazı $\{e_1, ..., e_n, \xi\}$ ve $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1, ..., e_n\}$ olmak üzere M nin *ortalama eğriliği* aşağıdaki gibi tanımlanır [24].

$$\mu = \frac{tr(B)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i B(e_i, e_i),\ \ g(e_i, e_i) = \varepsilon_i. \tag{2.1.11}$$

Tanım 2.1.6. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi ve P, M den $S(TM)$ üzerine bir projeksiyon olsun. $\nabla^*_X PY$, $A^*_\xi X \in \Gamma(S(TM))$ olmak üzere(2.1.2) den her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \nabla_X PY &= \nabla^*_X PY + h(X, PY) \\ &= \nabla^*_X Y + C(X, PY)\xi, \qquad (2.1.12) \\ \nabla_X \xi &= -A^*_\xi X - w(X)\xi, \qquad (2.1.13) \end{aligned}$$

dir. Burada, ∇^*, C ve A^*_ξ, sırasıyla, $S(TM)$ üzerinde *indirgenmiş konneksiyon*, *lokal ikinci temel form* ve *lokal şekil operatörü* olarak isimlendirilir.

(2.1.9) ve (2.1.12) eşitliklerinden

$$B(X,Y) = g(A^*_\xi X,Y), \tag{2.1.14}$$

$$C(X,PY) = g(A_N X,PY) \tag{2.1.15}$$

dir. (2.1.14) eşitliği kullanılarak her $X \in \Gamma(TM\,|_U)$ için

$$B(X,\xi) = 0$$

elde edilir [23].

Tanım 2.1.7. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. φ, M nin U komşuluğu üzerinde sıfırdan farklı diferensiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere A_N ve A^*_ξ şekil operatörleri arasında

$$A_N = \varphi\, A^*_\xi \tag{2.1.16}$$

bağıntısı varsa M lightlike hiperyüzeyine *ekran lokal konformal lightlike hiperyüzey* denir. Eğer φ sabit ise M ye *ekran homotetik lightlike hiperyüzey* denir [25].

Örnek 2.1.3. R^{n+2}_1 semi-Öklidyen uzayı, her $x = \sum\limits_{A=0}^{n+1} x^A \frac{\partial}{\partial x^A}$ ve $y = \sum\limits_{A=0}^{n+1} y^A \frac{\partial}{\partial x^A}$ için

$$\widetilde{g}(x,y) = -x^0 y^0 + \sum_{\alpha=1}^{n+1} x^\alpha y^\alpha \tag{2.1.17}$$

metriği ile verilsin. R^{n+2}_1 de

$$\wedge = \{x = (x^0,\ldots,x^{n+1}) \in R^{n+2}_1 :\ -(x^0)^2 + \sum_{a=1}^{n+1} (x^a)^2 = 0, x \neq 0\} \tag{2.1.18}$$

hiperyüzeyi verilsin. $\wedge$ nın radikal uzayı bir

$$\xi = \sum_{A=0}^{n+1} x^A \frac{\partial}{\partial x^A} \tag{2.1.19}$$

global vektörü tarafından gerilir. Ayrıca $ltr(TM)$ de bir tek

$$N=\frac{1}{2(x^0)^2}\{-x^0\frac{\partial}{\partial x^0}+\sum_{a=1}^{n+1}x^a\frac{\partial}{\partial x^a}\} \tag{2.1.20}$$

global null kesiti vardır.

$$\sum_{a=1}^{n+1}x^aX^a=0 \tag{2.1.21}$$

şartını sağlayan her

$$X=\sum_{a=1}^{n+1}X^a\frac{\partial}{\partial x^a} \tag{2.1.22}$$

vektörü için

$$\widetilde{\nabla}_X\xi=\nabla_XX=X \tag{2.1.23}$$

dir. Buradan

$$A^*_\xi X+w(X)\xi+X=0 \tag{2.1.24}$$

elde edilir. $A^*_\xi X$, $\Gamma(S(T\wedge))$ değerli olduğundan

$$A^*_\xi=-PX \tag{2.1.25}$$

olarak yazılabilir. Böylece direkt bir hesaplama ile

$$\begin{aligned}\nabla_\xi X=\widetilde{\nabla}_\xi X&=\sum_{A=0}^{n+1}\sum_{a=1}^{n+1}x^A\frac{\partial X^a}{\partial x^a},\\ \widetilde{g}(\nabla_\xi X,\xi)&=\sum_{A=0}^{n+1}\sum_{a=1}^{n+1}x^ax^A\frac{\partial X^a}{\partial x^a}=-\sum_{a=1}^{n+1}x^aX^a=0\end{aligned} \tag{2.1.26}$$

olur. (2.1.26) eşitliğinden $\nabla_\xi X\in\Gamma(S(T\wedge))$ olduğu ve böylece $A_N\xi=0$ olduğu görülür. Ayrıca 2.1.20 ve 2.1.21 den her $X,Y\in\Gamma(S(T\wedge))$ için

$$C(X,Y)=g(\nabla_XY,N)=\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_XY,N)=-\frac{1}{2(x_0)^2}g(X,Y) \tag{2.1.27}$$

dir. Böylece

$$A_NX=\frac{1}{2(x_0)^2}A^*_\xi X \tag{2.1.28}$$

olduğu sonucuna varılır. O halde, $\wedge$, R_1^{n+2} de konform faktörü $\varphi = \frac{1}{2(x_0)^2}$ olan bir ekran global lightlike hiperyüzeydir [25].

Örnek 2.1.3 de verilen $\wedge$ lightlike hiperyüzeyine R_1^{n+2} de bir *light koni* adı verilir.

Önerme 2.1.1. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. M ve $\widetilde{M}$ in Riemann eğrilik tensötleri, sırasıyla, R ve $\widetilde{R}$ olmak üzere her $X,Y,Z,U \in \Gamma(TM)$ için*

$$\begin{aligned} \widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Z,PU) &= g(R(X,Y)Z,PU)+B(X,Z)C(Y,PU) \\ &- B(Y,Z)C(X,PU), \qquad (2.1.29) \\ \widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Z,\xi) &= (\nabla_X B)(Y,Z)-(\nabla_Y B)(X,Z) \\ &+ B(Y,Z)w(X)-B(X,Z)w(Y), \qquad (2.1.30) \\ \widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)Z,N) &= g(R(X,Y)Z,N), \qquad (2.1.31) \\ \widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)PZ,N) &= (\nabla_X C)(Y,PZ)-(\nabla_Y C)(X,PZ) \\ &+ w(Y)C(X,PZ)-w(X)C(Y,PZ) \qquad (2.1.32) \end{aligned}$$

dir. Yukarıdaki eşitliklere M üzerinde Gauss-Codazzi tipi denklemler denir. Burada her $X,Y,Z,U \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X B)(Y,Z) = XB(Y,Z)-B(\nabla_X Y,Z)-B(Y,\nabla_X Z) \qquad (2.1.33)$$

ve

$$(\nabla_X C)(Y,PZ) = XC(Y,PZ)-C(\nabla_X Y,PZ)-C(Y,\nabla^*_X PZ) \qquad (2.1.34)$$

dir [21].

Tanım 2.1.8. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. T_pM nin herhangi bir $\Pi = sp\{e_i,e_j\}$ düzlem kesiti için *kesit eğriliği*

$$K_{ij} = \frac{g(R(e_j,e_i)e_i,e_j)}{g(e_i,e_i)g(e_j,e_j)-g(e_i,e_j)^2}$$

ile tanımlanır [21]. M nin ekran ikinci temel formu C simetrik olmadığından kesit eğriliği simetrik değildir. Yani lightlike hiperyüzeyler için her zaman $K_{ij} = K_{ji}$ eşitliği sağlanmaz.

Tanım 2.1.9. M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. T_pM de null bir vektör ξ verilsin. T_pM nin $\widetilde{g}(\xi,e_i)=0$ ve $\widetilde{g}(e_i,e_i)\neq 0$ olacak şekildeki ξ ve e_i vektörlerinin gerdiği bir düzlem kesiti olan Π nin *null kesit eğriliği*

$$K_i^{null}=\frac{g(R_p(e_i,\xi)\xi,e_i)}{g_p(e_i,e_i)}$$

ile tanımlanır [26].

Tanım 2.1.10. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. M nin *indirgenmiş Ricci tipi tensörü* $R^{(0,2)}$, her $X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$R^{(0,2)}(X,Y)=trace\{Z\rightarrow R(Z,X)Y\} \tag{2.1.35}$$

ile tanımlanır. Eğer $R^{(0,2)}$ simetrik ise $R^{(0,2)}$ ye M nin *Ricci eğrilik tensörü* denir [23].

M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. T_pM nin bir $\{e_1,...,e_n,\xi\}$ bazı ve $\Gamma(S(TM))$ nin $\{e_1,...,e_n\}$ ortonormal bazı verilsin. Bu durumda

$$R^{(0,2)}(X,Y)=\sum_{j=1}^{n}g(R(e_j,X)Y,e_j)+\widetilde{g}(R(\xi,X)Y,N) \tag{2.1.36}$$

dir [27].

Tanım 2.1.11. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. M nin indirgenmiş Ricci tensörü simetrik olsun. k sabit bir fonksiyon ve her $X,Y\in\Gamma(TM)$ olmak üzere

$$Ric(X,Y)=k\,g(X,Y) \tag{2.1.37}$$

ise M ye bir *Einstein lightlike hiperyüzeyi* denir [23].

Einstein lightlike hiperyüzeyleri, sadece Ricci tipi tensörünün simetrik olduğu hiperyüzeylerde tanımlanabilir.

Önerme 2.1.2. *M, c eğrilikli $\widetilde{M}(c)$ semi-Riemann uzay formunun total geodezik bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M simetrik bir Ricci tensörüne sahiptir [23].*

Gauss-Codazzi tipi denklemlerden aşağıdaki önerme elde edilir:

Önerme 2.1.3. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun.*

$$\begin{aligned} R^{(0,2)}(\xi,\xi) &= \sum_{j=1}^{n} g(R(e_j,\xi)\xi,e_j) - \widetilde{g}(R(\xi,\xi)\xi,N) \\ &= \sum_{j=1}^{n} K_j^{null} \end{aligned} \tag{2.1.38}$$

ve

$$R^{(0,2)}(e_i,e_i) = \sum_{j=1}^{n} g(R(e_j,e_i)e_i,e_j) + \widetilde{g}(R(\xi,e_i)e_i,N) \tag{2.1.39}$$

dir [27].

(2.1.36) de iz alınarak ve (2.1.38) ve (2.1.39) kullanılarak

$$\tau(p) = \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} + \sum_{i=1}^{n} K_i^{null} + K_{iN} \tag{2.1.40}$$

gibi bir $\tau(p)$ skaları elde edilir. Burada, $i \in \{1,...,n\}$ için $K_{iN} = \widetilde{g}(R(\xi,e_i)e_i,N)$ dir

Tanım 2.1.12. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi ve M nin Ricci-tipi tensörü simetrik olsun. (3.1.39) de verilen $\tau(p)$ ye M nin $p \in M$ noktasındaki skalar eğriliği denir [27].

2.2 Lorentzian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri üzerinde k-Ricci eğriliği ve k-scalar eğriliği

Tanım 2.2.1. M, $\widetilde{M}$ Loretzian manifoldunun $(n+1)$ boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı $\{e_1,...,e_n,\xi\}$ ve $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1,...,e_n\}$ olsun. $k \leq n$ için $\pi_{k,\xi} = sp\{e_1,...,e_k,\xi\}$ $(k+1)$-boyutlu dejenere bir düzlem kesiti ve $\pi_k = sp\{e_1,...,e_k\}$ k-boyutlu non-dejenere bir düzlem kesiti olmak üzere, sırasıyla,

$$Ric_{\pi_{k,\xi}}(X) = R^{(0,2)}(X,X) = \sum_{j=1}^{k} g(R(e_j,X)X,e_j) + \widetilde{g}(R(\xi,X)X,N) \tag{2.2.1}$$

ve

$$Ric_{\pi_k}(X) = R^{(0,2)}(X,X) = \sum_{j=1}^{k} g(R(e_j,X)X,e_j) \tag{2.2.2}$$

eğriliklerine $X \in \Gamma(TM)$ de *k-dejenere Ricci tipi tensörü* ve *k-Ricci tipi tensörü* denir. Eğer $p \in M$ noktasında Ricci-tipi tensörü simetrik ise $Ric_{\pi_{k,\xi}}(X)$ e *k-dejenere Ricci eğriliği* ve $Ric_{\pi_k}(X)$ e *k-Ricci eğriliği* denir [28]. Ayrıca

$$\tau_{\pi_{k,\xi}}(p) = \sum_{i,j=1}^{k} K_{ij} + \sum_{i=1}^{k} K_i^{null} + K_{iN} \tag{2.2.3}$$

ve

$$\tau_{\pi_k}(p) = \sum_{i,j=1}^{k} K_{ij} \tag{2.2.4}$$

eğriliklerine, sırasıyla, *k-dejenere skalar eğriliği* ve *k-skalar eğriliği* denir [28]. $k = 2$ için T_pM nin 2-boyutlu bir düzlem kesiti $\Pi_{1,\xi} = sp\{e_1, \xi\}$ olmak üzere

$$Ric_{\Pi_{1,\xi}}(e_1) = K_{1N}$$

ve

$$\tau_{\Pi_2}(p) = K_1^{null} + K_{1N}$$

dir.

$k = n$ için $\pi_n = sp\{e_1,...,e_n\} = \Gamma(S(TM))$ olmak üzere

$$Ric_{S(TM)}(e_1) = Ric_{\pi_n}(e_1) = \sum_{j=1}^{n} K_{1j} = K_{12} + ... + K_{1n} \tag{2.2.5}$$

ve

$$\tau_{S(TM)}(p) \;\; = \;\; \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} \tag{2.2.6}$$

dir. $Ric_{S(TM)}(e_1)$ e e_1 de *ekran Ricci-tipi tensörü* denir.

Eğer M nin kesit eğriliği simetrik ise ekran Ricci-tipi tensörüne *ekran Ricci-tipi eğriliği* ve $\tau_{S(TM)}(p)$ değerine $p \in M$ de *ekran skalar eğriliği* denir [28].

Gauss Codazzi tipi denklemlerden aşağıdaki önerme elde edilir:

Önerme 2.2.1. *M, $\widetilde{M}$ Loretzian manifoldunun $(n+1)$ boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı $\{e_1,...,e_n,\xi\}$ ve $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1,...,e_n\}$ olsun. Bu durumda*

$$\tau_{S(TM)}(p) = \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \sum_{i,j=1}^{n} B_{ii}C_{jj} - B_{ij}C_{ji} \tag{2.2.7}$$

dir. Burada $i,j \in \{1,...,n\}$ için $B_{ij} = B(e_i,e_j)$ ve $C_{ij} = C(e_i,e_j)$ dir [28].

Önerme 2.2.2. *M, $\widetilde{M}$ Loretzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı $\{e_1,...,e_n,\xi\}$ ve $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1,...,e_n\}$ olsun. M nin ikinci temel formu B ve ekran ikinci temel formu C nin bileşenleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır [28].*

$$\sum_{i,j=1}^{n} B_{ij}C_{ji} = \frac{1}{2}\{\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}+C_{ji})^2 - \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij})^2 + (C_{ji})^2\} \tag{2.2.8}$$

ve

$$\sum_{i,j} B_{ii}C_{jj} = \frac{1}{2}\{(\sum_{i,j} B_{ii}+C_{jj})^2 - (\sum_{i} B_{ii})^2 - (\sum_{j} C_{jj})^2\}. \tag{2.2.9}$$

Teorem 2.2.1. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

a)

$$\tau_{S(TM)}(p) \le \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n\mu(traceA_N) + \frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij}-C_{ji})^2 \tag{2.2.10}$$

eşitsizliği vardır. $(2.2.10)$ *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul ya M, $\varphi = -1$ olacak şekilde ekran homotetiktir yada total geodeziktir.*

b)

$$\tau_{S(TM)}(p) \ge \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n\mu(traceA_N) - \frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij}+C_{ji})^2 \tag{2.2.11}$$

eşitsizliği vardır. $(2.2.11)$ *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul ya M, $\varphi = 1$ olacak şekilde ekran homotetiktir yada total geodeziktir.*

c) $(2.2.10)$ *ve* $(2.2.11)$ *eşitsizliklerinin eşitlik durumu her $p \in M$ noktası için sağlanır gerek ve yeter koşul M total geodeziktir [28].*

İspat. (2.2.7) ve (2.2.8) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &= \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p)+\sum_{i,j=1}^{n} B_{ii}C_{jj}-\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}+C_{ji})^2 \\ &\quad +\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij})^2+(C_{ji})^2 \end{aligned} \tag{2.2.12}$$

dir.

$$\frac{1}{2}(B_{ij}^2+C_{ji}^2)=\frac{1}{4}(B_{ij}+C_{ji})^2+\frac{1}{4}(B_{ij}-C_{ji})^2$$

olduğundan

$$\frac{1}{2}\{\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}+C_{ji})^2+\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij})^2+(C_{ji})^2\}=\frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij}+C_{ji})^2+\frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij}-C_{ji})^2$$

yazılabilir. Bu son eşitlik (2.2.12) de yerine yazılacak olursa

$$\tau_{S(TM)}(p)=\widetilde{\tau}_{S(TM)}(p)+\sum_{i,j=1}^{n} B_{ii}C_{jj}-\frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij}+C_{ji})^2+\frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij}-C_{ji})^2 \tag{2.2.13}$$

elde edilir. Bu ise (2.2.10) ve (2.2.11) eşitsizliklerinin sağlandığını gösterir.

(2.2.10) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p\in M$ noktasında sağlanır gerek ve yeter koşul her $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ için $B_{ij}=-C_{ij}$ veya $B_{ij}=C_{ij}=0$, başka bir deyişle, M lightlike hiperyüzeyi $\varphi=-1$ olacak şekilde bir ekran homotetiktir yada total geodeziktir.

Benzer şekilde (2.2.11) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p\in M$ noktasında sağlanır gerek ve yeter koşul her $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ için $B_{ij}=C_{ij}$ veya $B_{ij}=C_{ij}=0$, başka bir deyişle, M lightlike hiperyüzeyi $\varphi=1$ olacak şekilde ekran homotetiktir yada total geodeziktir.

(2.2.10) ve (2.2.11) nin eşitliği her $p\in M$ noktasında sağlanır gerek ve yeter koşul her $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ için $B_{ij}=C_{ij}$ ve $B_{ij}=-C_{ij}$ olur. Bu ise her $i,j\in\{1,\ldots,n\}$ için $B_{ij}=C_{ij}=0$ olduğunu gösterir. O halde M total geodeziktir. □

Not 2.2.1. Örnek 2.1.2 göz önüne alınacak olursa, $B_{11}=B_{22}=0$ ve her $p\in M$ için $\tau_{S(TM)}(p)=0$ olduğu görülür. Böylece, (2.2.10) ve (2.2.11) eşitsizliklerinin eşitlik durumunu bu hiperyüzeyin her noktasında sağlanır.

Theorem 2.2.1 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 2.2.1. M, c eğrilikli $\widetilde{M}(c)$ Lorentzian space formun $(n+1)$-boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

a)

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq n(n-1)c + n\mu(traceA_N) + \frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij} - C_{ji})^2 \tag{2.2.14}$$

eşitsizliği vardır. (2.2.14) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul ya M, $\varphi = -1$ olacak şekilde ekran homotetiktir yada total geodeziktir.

b)

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq n(n-1)c + n\mu(traceA_N) - \frac{1}{2}\sum_{i,j}(B_{ij} + C_{ji})^2 \tag{2.2.15}$$

eşitsizliği vardır. (2.2.15) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ noktasında sağlanır gerek ve yeter koşul ya M, $\varphi = 1$ olacak şekilde ekran homotetiktir yada total geodeziktir.

c) (2.2.14) ve (2.2.15) eşitsizliklerinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M total geodeziktir [28].

Sonuç 2.2.2. M, $\widetilde{M}(c)$ Lorentzian space formun $(n+1)$-boyutlu ekran homotetic lightlike hiperyüzyi olsun. Bu durumda

a)

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq n(n-1)c + \varphi n^2\mu^2 + \frac{(\varphi-1)}{4}\sum_{i,j}(B_{ij})^2 \tag{2.2.16}$$

eşitsizliği vardır. (2.2.16) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ noktasında sağlanır gerek ve yeter koşul ya $\varphi = -1$ dir yada M total geodeziktir.

b)

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq n(n-1)c + \varphi n^2\mu^2 - \frac{(\varphi-1)}{4}\sum_{i,j}(B_{ij})^2 \tag{2.2.17}$$

eşitsizliği vardır. (2.2.16) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ noktasında sağlanır gerek ve yeter koşul ya $\varphi = 1$ dir yada M total geodeziktir.

c) (2.2.16) ve (2.2.17) eşitsizliklerinin eşitlik durumları her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M total geodeziktir [28].

Teorem 2.2.2. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &\leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p)+\frac{1}{2}(trace\overline{A})^2-\frac{1}{2}(traceA_N)^2\\ &- \frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij}+C_{ji})^2+\frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij}-C_{ji})^2 \end{aligned} \tag{2.2.18}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada

$$\overline{A}=\begin{pmatrix} B_{11}+C_{11} & B_{12}+C_{21} & \dots & B_{1n}+C_{n1}\\ B_{21}+C_{12} & B_{22}+C_{22} & \dots & B_{2n}+C_{n2}\\ \vdots & & & \\ B_{n1}+C_{1n} & B_{n2}+C_{2n} & \dots & B_{nn}+C_{nn}\end{pmatrix} \tag{2.2.19}$$

dir. (2.2.18) eşitsiliğinin eşitlik durumu her $p\in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M minimaldir.

İspat. (2.2.13) ve (2.2.9) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &= \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p)+\frac{1}{2}\{(\sum_{i,j}B_{ii}+C_{jj})^2-(\sum_{i}B_{ii})^2-(\sum_{j}C_{jj})^2\}\\ &- \frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij}+C_{ji})^2+\frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij}-C_{ji})^2 \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

elde edilirki bu ise (2.2.18) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir.

(2.2.18) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p\in M$ için sağlanır gerek ve yeter şart

$$\sum_{i=1}^{n}B_{ii}=0 \tag{2.2.21}$$

dir. Böylece M minimaldir. □

Teorem 2.2.2 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 2.2.3. M, $\widetilde{M}(c)$ Lorentzian uzay formunun $(n+1)$-boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &\leq n(n-1)c+\frac{1}{2}(trace\overline{A})^2-\frac{1}{2}(traceA_N)^2\\ &- \frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij}+C_{ji})^2+\frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij}-C_{ji})^2 \end{aligned} \tag{2.2.22}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $\overline{A}$, (2.2.19) a eşittir. (2.2.22) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M minimaldir [28].

Sonuç 2.2.4. M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu bir ekran homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \quad \leq \quad \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{(2\varphi+1)}{2} n^2 \mu^2 - \varphi \sum_{i,j} (B_{ij})^2 \tag{2.2.23}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.2.23) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M minimaldir [28].

Not 2.2.2. R_1^4 Minkowski uzayını göz önüne alalım. R_1^4 ün metriğininin işareti $(+,+,+,-)$ ve kanonik bir bazı $(\partial_1, \partial_2, \partial_3, \partial_4)$ verilsin. R_1^4 de

$$M = \{t(\cos u \cos v, \cos u \sin v, \sin u, 1) \in R_1^4 : t > 0,\ u \in (0, \frac{\pi}{2}),\ v \in [0, 2\pi]\}, \tag{2.2.24}$$

ile tanımlı lightlike konisi verilsin. Burada

$$\begin{aligned} S(TM) = \quad & span\{e_1 = -\sin u \cos v \partial_1 - \sin u \sin v \partial_2 + \cos u \partial_3, \\ & e_2 = -\sin v \partial_1 + \cos v \partial_2\}, \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} & Rad(TM) = span\{\xi = \cos u \cos v \partial_1 + \cos u \sin v \partial_2 + \sin u \partial_3 + \partial_4\}, \\ & ltr(TM) = span\{N = \frac{1}{2}(\cos u \cos v \partial_1 + \cos u \sin v \partial_2 + \sin u \partial_3 - \partial_4)\} \end{aligned}$$

dır. Direkt hesaplamalar ile

$$\begin{aligned} & B(e_1, e_1) = -\frac{1}{t},\ B(e_2, e_2) = -\frac{1}{t \cos u},\ K_{12} = \frac{1}{t^4 \cos u},\ \ \tau_{S(TM)}(p) = \frac{1}{t^4 \cos u}, \\ & 2\mu = B_{11} + B_{22} = -\frac{(\cos u + 1)}{t \cos u},\ 4\mu^2 = \frac{(\cos u + 1)^2}{t^2 \cos^2 u}, \\ & 2(2\varphi + 1)\mu^2 = \frac{(t^2 + 1)(\cos u + 1)^2}{2t^4 \cos^2 u},\quad \sum_{i,j=1}^{2} (B_{ij})^2 = \frac{\cos^2 u + 1}{t^2 \cos^2 u}, \\ & \varphi \sum_{i,j=1}^{2} (B_{ij})^2 = \frac{\cos^2 u + 1}{2t^4 \cos^2 u} \end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (2.2.23) eşitsizliğinin bu altmanifold için sağlandığını gösterelim:

Yukarıdaki hesaplamalar (2.2.23) eşitsizliğinde yerine yazılacak olursa

$$\frac{1}{t^4\cos u} < \frac{t^2(\cos^2 u+1)+2(t^2+1)\cos u}{2t^4\cos^2 u}$$

eşitsizliğinin sağlanması gerekir. Gerçekten bu eşitsizliğik düzenlendiğinde

$$-2t^2\cos u < t^2(\cos^2 u+1)$$

elde edilirki bu ise bu eşitsizliğin daima sağlandığını gösterir.

Lemma 2.2.1. *$a_1,...,a_n$ $(n>1)$ birer reel sayı olmak üzere*

$$\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 \leq \sum_{i=1}^{n} a_i^2 \tag{2.2.25}$$

dir. Eşitlik sağlanır gerek yeter koşul $a_1=...=a_n$ dir [29].

İspat.

$$\begin{aligned}
0 \leq \sum_{i<j}(a_i-a_j)^2 &= (a_1-a_2)^2+(a_1-a_3)^2+...+(a_1-a_n)^2 \\
&+ (a_2-a_3)^2+...+(a_2-a_n)^2+...+(a_{n-1}-a_n)^2 \\
&= a_1^2-2a_1a_2+a_2^2+a_1^2-2a_1a_3+a_3^2+...+a_1^2-2a_1a_n+a_n^2 \\
&+ a_2^2-2a_2a_3+a_3^2+...+a_2^2-2a_2a_n+a_n^2+...+a_{n-1}^2 \\
&- 2a_{n-1}a_n+a_n^2 \\
&= (n-1)\sum_i (a_i)^2-2\sum_{i<j}a_ia_j
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
0 &\leq (n-1)\sum_i (a_i)^2-2\sum_{i<j}a_ia_j \\
\Rightarrow\ & 2\sum_{i<j}a_ia_j \leq (n-1)\sum_i (a_i)^2 \\
\Rightarrow\ & \sum_i (a_i)^2+2\sum_{i<j}a_ia_j \leq n\sum_i (a_i)^2 \\
\Rightarrow\ & (\sum_i (a_i))^2 \leq n\sum_i (a_i)^2 \\
\Rightarrow\ & \frac{1}{n}(\sum_i a_i)^2 \leq \sum_i (a_i)^2
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Teorem 2.2.3. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &\leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p)+\frac{2n-1}{4n}(trace\overline{A})^2-\frac{1}{2}\{(traceA_N)^2+n^2\mu^2\}\\ &+ \frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij}-C_{ji})^2-\frac{1}{2}\sum_{i\neq j}(B_{ij}+C_{ji})^2 \end{aligned} \tag{2.2.26}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.2.26) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $n\mu = -trace\ A_N$ dir [28].*

İspat. (2.2.20) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &= \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p)+\frac{1}{2}\{(trace\overline{A})^2-(traceA_N)^2-n^2\mu^2\}-\frac{1}{4}\sum_i(B_{ii}+C_{ii})^2\\ &- \frac{1}{4}\sum_{i\neq j}(B_{ij}+C_{ji})^2+\frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij}-C_{ji})^2 \end{aligned} \tag{2.2.27}$$

elde edilir. Lemma 2.2.1 ve (2.2.27) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &\leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p)+\frac{1}{2}\{(trace\overline{A})^2-(traceA_N)^2-n^2\mu^2\}-\frac{1}{4n}(\sum_i B_{ii}+C_{ii})^2\\ &- \frac{1}{4}\sum_{i\neq j}(B_{ij}+C_{ji})^2+\frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij}-C_{ji})^2 \end{aligned} \tag{2.2.28}$$

dir. Bu ise (2.2.26) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir.

(2.2.26) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul

$$B_{11}+C_{11} = ... = B_{nn}+C_{nn} \tag{2.2.29}$$

dir. (2.2.29) den

$$\begin{aligned}(1-n)B_{11}+B_{22}+...+B_{nn}+(1-n)C_{11}+C_{22}+...+C_{nn} &= 0,\\ B_{11}+(1-n)B_{22}+...+B_{nn}+C_{11}+(1-n)C_{22}+...+C_{nn} &= 0,\\ &\vdots\\ B_{11}+B_{22}+...+(1-n)B_{nn}+C_{11}+C_{22}+...+(1-n)C_{nn} &= 0\end{aligned}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikler ise

$$(n-1)^2(traceA_N+n\mu) = 0 \tag{2.2.30}$$

olduğunu gösterir. $n \neq 1$ olduğundan $n\mu = -traceA_N$ dir. □

Teorem 2.2.3 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 2.2.5. M, $\widetilde{M}(c)$ Lorentzian space formunun $(n+1)$-boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &\leq n(n-1)c+\frac{2n-1}{4n}(trace\overline{A})^2-\frac{1}{2}\{(n^2\mu^2+(traceA_N)^2\} \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{i,j}(B_{ij}-C_{ji})^2-\frac{1}{4}\sum_{i\neq j}(B_{ij}+C_{ji})^2 \qquad (2.2.31)\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.2.31) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $n\mu = -traceA_N$ dir [28].

Sonuç 2.2.6. M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu bir ekran homotetik lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &\leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p)-\frac{(\varphi^2+1)}{4}n^2\mu^2+\frac{(\varphi+1)^2}{4}(2n-1)n\mu^2 \\ &+ \frac{(\varphi-1)^2}{4}\sum_{i}(B_{ii})^2-\frac{(\varphi+1)^2}{4}\sum_{i\neq j}(B_{ij})^2 \qquad (2.2.32)\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.2.32) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul ya $\varphi = -1$ yada M minimaldir [28].

2.3 Lorentzian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri üzerinde eğrilik invaryantları

Tanım 2.3.1. $n \geq 2$ ve $k \geq 0$ tamsayısı için $\mathcal{S}(n,k)$ ile $n_1 < n$, $n_j \geq 2$, $j = 1,\ldots,k$ ve $n_1+\cdots+n_k \leq n$ koşulunu sağlayan bütün $(n_1,...,n_k)$ k-nokta çiftlerinden oluşan sonlu bir kümeyi ve $\mathcal{S}(n)$ ile de $k \geq 0$ olmak üzere bütün $\mathcal{S}(n,k)$ ların bileşimini gösterelim. $\pi_1,\ldots,\pi_{n_k}$, $boy\pi_{n_j} = n_j$, $(j = 1,\ldots,k)$ $\forall(n_1,\ldots,n_k) \in S(n,k)$ k-lısı için T_pM nin alt uzayları olmak üzere

$$S(n_1,\ldots,n_k)(p) = \inf\{\tau(\Pi_{n_1})+\cdots+\tau(\Pi_{n_k})\},$$

$$\hat{S}(n_1,\ldots,n_k)(p) = \sup\{\tau(\Pi_{n_1})+\cdots+\tau(\Pi_{n_k})\}$$

olarak tanımlansın. Eğrilik invaryantları

$$\delta(n_1,\ldots,n_k)(p) = \tau(p) - S(n_1,\ldots,n_k)(p),$$
$$\hat{\delta}(n_1,\ldots,n_k)(p) = \tau(p) - \hat{S}(n_1,\ldots,n_k)(p)$$

ile tanımalanır. $S(n_1,\ldots,n_k) = \hat{S}(n_1,\ldots,n_k)$ ise $(M,g,S(TM))$ lightlike hiperyüzeyine $S(TM)$ ye göre $S(n_1,\ldots,n_k)$ *uzayı* denir [28].

Teorem 2.3.1. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. M bir $S(n)$ uzayıdır gerek ve yeter koşul M nin skalar eğriliği $\tau(p)$ sabittir [28].*

İspat. T_pM nin bir bazı $\{e_1,...,e_n,\xi\}$ ve $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bazı bir bazı $\{e_1,...,e_n\}$ olsun. T_pM nin n-boyutlu düzlem kesitleri

$$\begin{aligned}
\pi^1_{n-1,\xi} &= sp\{e_2,...,e_n,\xi\} \subset T_pM, \\
&\vdots \\
\pi^n_{n-1,\xi} &= sp\{e_1,...,e_{n-1},\xi\} \subset T_pM, \\
\pi_n &= sp\{e_1,...,e_n\} \subset T_pM
\end{aligned}$$

ile verilsin. (2.2.3) ve (2.2.4) den

$$\begin{aligned}
\tau_{\pi^1_{n-1,\xi}}(p) &= \sum_{i,j=2}^{n} K_{ij} + K_i^{null} + K_{iN}, \\
&\vdots \\
\tau_{\pi^n_{n-1,\xi}}(p) &= \sum_{i,j=1}^{n-1} K_{ij} + K_i^{null} + K_{iN}, \\
\tau_{\pi_n}(p) &= \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} = \tau_{S(TM)}(p)
\end{aligned}$$

yazılabilir. M bir $S(n)$ uzayı ise

$$\begin{aligned}
\tau_{\pi^1_{n-1,\xi}}(p) &= \tau(p) - Ric(e_1) - \sum_{j=1}^{n} K_{j1} - K_1^{null} = c, \\
&\vdots \\
\tau_{\pi^n_{n-1,\xi}}(p) &= \tau(p) - Ric(e_n) - \sum_{j=1}^{n} K_{jn} - K_n^{null} = c, \\
\tau_{\pi_n}(p) &= \tau(p) - \sum_{i=1}^{n} K_i^{null} + K_{iN} = c
\end{aligned}$$

dir. Böylece

$$
\begin{aligned}
Ric(e_1)+\sum_{j=1}^{n}K_{j1}+K_1^{null} = \dots = Ric(e_n)+\sum_{j=1}^{n}K_{jn}+K_n^{null} \\
=\sum_{i=1}^{n}K_i^{null}+K_{iN} \qquad (2.3.1)
\end{aligned}
$$

olur. (2.3.1) den

$$
Ric_{S(TM)}(e_1)+\dots+Ric_{S(TM)}(e_n) \quad = \quad (n-1)\sum_{i=1}^{n}K_i^{null}+K_{iN} \qquad (2.3.2)
$$

elde edilir. Ayrıca (2.3.2) den

$$
\tau_{S(TM)}(p)=(n-1)(\tau(p)-\tau_{S(TM)}(p))
$$

yazılabilir. Böylece

$$
\tau(p)=(\frac{2-n}{1-n})c \qquad (2.3.3)
$$

olup $\tau(p)$ nin sabit olduğu görülür. □

Uyarı 2.3.1. *n-boyutlu bir non-degenerate manifold $S(n)$ uzayı ise aynı zamanda bir Einstein uzayıdır (Bknz. [30]). Fakat Lorentzian manifoldların bir dejenere hiperyüzeyi $S(n)$ uzayı ise bu uzay sabit skalar eğriliklidir.*

(2.3.2) göz önünde bulundurularak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 2.3.1. $M(c)$ sabit eğrilikli bir lightlike hiperyüzey olsun. $M(c)$ bir $S(n)$ uzayıdır gerek ve yeter koşul

$$
\sum_{i=1}^{n}K_{iN}=0
$$

olmasıdır [28].

Teorem 2.3.2. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $2\leq j<n$ için M bir $S(j)$ uzayı ise aynı zamanda $S(j+1)$ uzayıdır [28].*

İspat. Teoremin ispatı için tümevarım metodunu kullanacağız. Öncelikle teoremin iddiasının $n = 2$ için doğruluğunu gösterelim. Kabul edelim ki M bir $S(2)$ uzayı olsun. T_pM nin 2-boyutlu alt düzlem kesitleri $\Pi^1_{1,\xi} = sp\{e_1, \xi\}$, $\Pi_2 = \{e_1, e_2\}$, $\Pi^2_{1,\xi} = sp\{e_2, \xi\}$ verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\tau_{\Pi^1_{1,\xi}}(p) &= K^{null}_1 + K_{1N} = c, \\
\tau_{\Pi_2}(p) &= K_{12} + K_{21} = c, \\
\tau_{\Pi^2_{1,\xi}}(p) &= K^{null}_2 + K_{2N} = c
\end{aligned}$$

yazılabilir. Şimdi T_pM de $\pi_3 = sp\{e_1, e_2, e_3\}$, $\pi^1_{2,\xi} = sp\{e_1, e_2, \xi\}$ 3-boyutlu alt düzlem kesitlerini göz önüne alalım. Eğer

$$\tau_{\pi^1_{2,\xi}}(p) = \tau_{\pi_3}(p) = \text{sabit}$$

olduğunu gösterirsek M nin $S(3)$ uzayı oluğunu gösterilmiş olur.

$$\begin{aligned}
\tau_{\pi^1_{2,\xi}}(p) &= K_{12} + K_{21} + \sum_{i=1}^{2} K^{null}_i + K_{iN} \\
&= 3c
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\tau_{\pi_3}(p) &= K_{12} + K_{21} + K_{13} + K_{31} + K_{23} + K_{32} \\
&= 3c
\end{aligned}$$

olduğundan M bir $S(3)$ uzayıdır. Bu ise iddianın $n = 2$ için doğru olduğunu gösterir.

Şimdi $n = k$ için iddianın doğru olduğunu kabul edelim.

T_pM nin k-boyutlu düzlem kesitleri $\pi^1_{k-1,\xi} = sp\{e_2, e_3 ..., e_k, \xi\}$, $\pi^2_{k-1,\xi} = sp\{e_1, e_3, ..., e_k, \xi\}$,..., $\pi^k_{k-1,\xi} = sp\{e_1, e_2, ..., e_{k-1}, \xi\}$, $\pi_k = sp\{e_1, e_2, ..., e_k\}$ verilsin. Kabulden

$$
\begin{aligned}
\tau_{\pi^1_{k-1,\xi}}(p) &= \sum_{i,j=2}^{k} K_{ij} + \sum_{i=2}^{k} K_i^{null} + K_{iN}, \\
&\vdots \\
\tau_{\pi^k_{k-1,\xi}}(p) &= \sum_{i,j=1}^{k-1} K_{ij} + \sum_{i=1}^{k-1} K_i^{null} + K_{iN}, \\
\tau_{\pi_k}(p) &= \sum_{i,j=1}^{k} K_{ij}
\end{aligned}
$$

olur. Yukarıdaki eşitliklerden

$$
\sum_{i=1}^{k} K_i^{null} + K_{iN} = \frac{2c}{(k-1)}
$$

elde edilir.

Şimdi $n = k+1$ için iddianın doğruluğunu gösterelim:

T_pM nin $(k+1)$-boyutlu alt düzlem kesitleri $\pi_{k,\xi} = sp\{e_1, ..., e_k, \xi\}$, $\pi_{k+1} = sp\{e_1, ..., e_k, e_{k+1}\}$ verilsin. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
\tau_{\pi_{k,\xi}}(p) &= \sum_{i,j=1} K_{ij} + \sum_{i=1}^{k} K_i^{null} + K_{iN} \\
&= c + \frac{2c}{k-1} = (\frac{k+1}{k-1})c
\end{aligned} \tag{2.3.4}
$$

dir. $j = 2$ özel durumu ile benzer bir yol kullanılacak olursa

$$
\tau_{\pi_{k+1}}(p) = (\frac{k+1}{k-1})c \tag{2.3.5}
$$

elde edilir. (2.3.4) ve (2.3.5) den M nin $S(k+1)$ uzayı olduğu görülür. □

Teorem 2.3.3. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. M bir $S(n-1)$ uzayı ise*

$$
Ric(e_1) = ... = Ric(e_n) = sabit \quad ve \quad K_1^{null} = ... = K_n^{null} \tag{2.3.6}
$$

dir [28].

İspat. M bir $S(n-1)$ uzayı ve T_pM nin $(n-1)$-boyutlu alt düzlem kesitleri $\pi^1_{n-2,\xi} = sp\{e_2,...,e_{n-1},\xi\}$, $\pi^2_{n-2,\xi} = sp\{e_1,e_3,...,e_{n-1},\xi\}$,..., $\pi^{n-1}_{n-2,\xi} = sp\{e_1,e_2,...,e_{n-2},\xi\}$, $\pi_{n-1} = sp\{e_1,e_2,...,e_{n-1}\}$ verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\tau_{\pi^1_{n-2,\xi}}(p) &= \tau(p) - Ric(e_1) - Ric(e_n) - K_1^{null} - K_n^{null} = c,\\
\tau_{\pi^2_{n-2,\xi}}(p) &= \tau(p) - Ric(e_2) - Ric(e_n) - K_1^{null} - K_n^{null} = c,\\
&\vdots\\
\tau_{\pi^{n-1}_{n-2,\xi}}(p) &= \tau(p) - Ric(e_{n-1}) - Ric(e_n) - K_{n-1}^{null} - K_n^{null} = c,\\
\tau_{\pi_{n-1}}(p) &= \tau(p) - Ric(e_n) - \sum_{i=1}^{n} K_i^{null} + K_{iN} = c
\end{aligned}$$

dir. Eğer yukarıdaki ifadeler taraf tarafa toplanırsa

$$Ric(e_1) + ... + Ric(e_n) + (n-1)Ric(e_n) + \sum_{i=1}^{n} K_i^{null} + \sum_{i=1}^{n-1} K_i^{null} + K_{iN} = \text{sabit}$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}
&Ric_{S(TM)}(e_1) + ... + Ric_{S(TM)}(e_n) + (n-1)Ric(e_n)\\
&+ \sum_{i=1}^{n} K_i^{null} + K_{iN} + \sum_{i=1}^{n-1} K_i^{null} + K_{iN} = \text{sabit}
\end{aligned}$$

yazılabilir. $\pi_{n-1,\xi} = sp\{e_1,...,e_{n-1},\xi\}$ ve $\pi_{n-1} = sp\{e_1,...,e_{n-1}\}$ olmak üzere, son eşitlikten

$$\tau_{S(TM)}(p) + (n-1)Ric(e_n) + \tau(p) - \tau_{S(TM)}(p) + \tau_{\pi_{n-1,\xi}}(p) - \tau_{\pi_{n-1}}(p) = \text{sabit}$$

olur. Teorem 2.3.1 ve Teorem 2.3.2 göz önüne alınacak olursa $Ric(e_n)$ nin sabit olduğu görülür. Ayrıca (2.3.1) eşitliği, Teorem 2.3.1 ve Teorem 2.3.2 den $K_1^{null} = ... = K_n^{null}$ olur. □

Tanım 2.3.2. M^0 Lorentzian bir manifoldun lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer

(a) M^0, kanonik bir $S(TM)^0$ ekran distribüstonuna ve bir N^0 kanonik lightlike transversal demetine sahiptir.

(b) M^0 ın indirgenmiş Ricci tensörü Ric^0 simetrikdir

şartları sağlanıyorsa M^0 lightlike hiperyüzeyine $C[M^0]$ *sınıfındadır* denir [27].

Yukarıdaki tanımdan aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 2.3.2. M^0, Lorentzian bir manifoldun $C[M^0]$ sınıfından $(2n+1)$-boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. M^0 bir Einstein lightlike hiperyüzeyi ise

$$\tau_{\pi_{n,\xi}}(p) - \tau_{\pi^{\perp}_{n,\xi}}(p) = \sum_{i=1}^{n} K_i^{null} - \sum_{i=n+1}^{2n} K_i^{null} \tag{2.3.7}$$

dir. Burada $\pi_{n,\xi}$, T_pM nin dejenere bir kesiti ve $\pi^{\perp}_{n,\xi}$ ise $\pi_{n,\xi}$ nin T_pM ye ortogonal komplemantıdır [28].

İspat. $\{e_1,...,e_n,\xi\}$ tarafından gerilen düzlem kesiti $\pi_{n,\xi}$ olmak üzere T_pM nin bir bazı $\{e_1,...,e_{2n},\xi\}$ ve $\Gamma(S(TM))$ nin bir ortonormal bir bazı $\{e_1,...,e_{2n}\}$ olsun. M^0 bir Einstein lightlike hiperyüzeyi ise

$$Ric(e_1) + ... + Ric(e_n) = Ric(e_{n+1}) + ... + Ric(e_{2n})$$

dir. (2.1.36) kullanılarak

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{2n} K_{ij} + \sum_{i=1}^{n} K_{iN} = \sum_{i=n+1}^{2n}\sum_{j=1}^{2n} K_{ij} + \sum_{i=n+1}^{2n} K_{iN}$$

olup

$$\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} + \sum_{i=1}^{n} K_{iN} = \sum_{i,j=n+1}^{n} K_{ij} + \sum_{i=n+1}^{n} K_{iN}$$

elde edilir. Bu ise (2.3.7) eşitliğine denktir. □

Teorem 2.3.4. *M bir $S(n_1,n_1)$ uzayı olsun. Bu durumda*

a) *$n_1 = 2$ ise M bir $S(3)$ uzayıdır.*

b) *$n_1 \neq 2$ ise M bir $S(n_1+1)$ uzayı olmak zorunda değildir. Eğer*

$$\sum_{i=1}^{n_1} K_i^{null} + K_{iN} = constant,$$

ise M bir $S(n_1+1)$ uzayıdır [28].

İspat. a) $n_1 = 2$ olsun. T_pM nin 2-boyutlu alt düzlem kesitleri $\Pi^1_{1,\xi} = sp\{e_1, \xi\}$, $\Pi^2_{1,\xi} = sp\{e_2, \xi\}$, $\Pi_2 = sp\{e_1, e_2\}$ verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\tau_{\Pi^1_{1,\xi}}(p) &= K_1^{null} + K_{1N}, \\
\tau_{\Pi^2_{1,\xi}}(p) &= K_2^{null} + K_{2N}, \\
\tau_{\Pi_2}(p) &= K_{12} + K_{21}
\end{aligned}$$

dir. M bir $S(2,2)$ uzayı ise

$$\begin{aligned}
\tau_{\Pi^1_{1,\xi}}(p) + \tau_{\Pi^2_{1,\xi}}(p) &= \sum_{i=1}^{2} K_i^{null} + K_{iN} = c, \\
\tau_{\Pi^1_{1,\xi}}(p) + \tau_{\Pi_2}(p) &= K_{12} + K_{21} + K_1^{null} + K_{1N} = c, \\
\tau_{\Pi^2_{1,\xi}}(p) + \tau_{\Pi_2}(p) &= K_{12} + K_{21} + K_2^{null} + K_{2N} = c
\end{aligned}$$

elde edilir. T_pM nin 3-boyutlu bir düzlem kesiti $\pi_{2,\xi} = sp\{e_1, e_2, \xi\}$ olmak üzere yukarıdaki eşitliklerden

$$\tau_{\pi_{2,\xi}}(p) = \frac{3c}{2} \tag{2.3.8}$$

olur.

Şimdi T_pM nin $\Pi^1_2 = sp\{e_1, e_2\}$, $\Pi^2_2 = sp\{e_1, e_3\}$, $\Pi^3_2 = sp\{e_2, e_3\}$ 2-boyutlu alt düzlem kesitlerini göz önüne alalım. M bir $S(2,2)$ uzayı olduğundan

$$K_{12} + K_{21} + K_{13} + K_{31} + K_{23} + K_{32} + K_{12} + K_{21} + K_{13} + K_{31} + K_{23} + K_{32} = 2\tau(\pi_3) = 3c$$

yazılabilir. Böylece

$$\tau(\pi_3) = \frac{3c}{2} \tag{2.3.9}$$

dir. Burada $\pi_3 = sp\{e_1, e_2, e_3\}$ T_pM nin 3-boyutlu bir alt düzlem kesitidir. (2.3.8) ve (2.3.9) eşitliklerinden M nin bir $S(3)$ uzayı olduğu görülür.

b) $n_1 = 3$ için iddianın doğruluğunu gösterelim:

T_pM nin $\pi^1_{2,\xi} = sp\{e_1, e_2, \xi\}$, $\pi^2_{2,\xi} = sp\{e_2, e_3, \xi\}$, $\pi^3_{2,\xi} = sp\{e_1, e_3, \xi\}$ 3-boyutlu alt düzlem kesitleri verilsin. M bir $S(3,3)$ uzayı ise

$$\begin{aligned} 3c &= 2(\tau_{\pi^1_{2,\xi}}(p)+\tau_{\pi^2_{2,\xi}}(p)+\tau_{\pi^3_{2,\xi}}(p)) \\ &= 2\tau_{\pi_{3,\xi}}(p)+2\sum_{i=1}^{3}K_i^{null}+K_{iN} \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

dir. Burada $\pi_{3,\xi}=sp\{e_1,e_2,e_3,\xi\}\subset T_pM$ dir. (2.3.10) eşitliği göz önüne alıncak olursa (b) şıkkının $n_1=3$ için doğru olduğu görülür.

(b) şıkkının genel durumu için ispatı $n_1=3$ özel durumunun ispatı ile benzer bir yol takip edilerek yapılabilir. □

Teorem 2.3.5. *M, Lorentzian bir manifoldun* $(2n+1)$*-boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

a) $\inf\{\tau(\pi_n)+\tau(\pi_{n+1})\}>0$ *ise* $\tau(p)>0$ *dır.*

b) $\sup\{\tau(\pi_n)+\tau(\pi_{n+1})\}<0$ *ise* $\tau(p)<0$ *dır [28].*

İspat. $T_pM=sp\{e_1,...,e_{2n},\xi\}$ olsun. $\inf\{\tau(\pi_n)+\tau(\pi_{n+1})\}>0$ ise direkt hesaplamalar ile

$$\begin{aligned} &C(2n-2,n-2)+C(2n-2,n)\tau_{S(TM)}(p) \\ &+C(2n-1,n-1)\sum_{i=1}^{2n}K_i^{null}+K_{iN}>0, \end{aligned} \tag{2.3.11}$$

ve

$$C(2n-2,n-3)+C(2n-2,n-1)\tau_{S(TM)}(p)+C(2n,n)\sum_{i=1}^{2n}K_i^{null}+K_{iN}>0 \tag{2.3.12}$$

elde edilir. (2.3.11) ve (2.3.12) eşitlikleri taraf tarafa toplanacak olursa

$$C(2n,n)\tau_{S(TM)}(p)+C(2n,n)\sum_{i=1}^{2n}K_i^{null}+K_{iN}>0 \tag{2.3.13}$$

elde edilir. Bu ise teoremin (a) şıkkının doğruluğunu gösterir.

Kabul edelimki $\sup\{\tau(\pi_n)+\tau(\pi_{n+1})\}>0$ olsun. (a) şıkkının ispatına benzer bir yol takip edilirse

$$C(2n,n)\tau_{S(TM)}(p)+C(2n,n)\sum_{i=1}^{2n}K_i^{null}+K_{iN}<0 \tag{2.3.14}$$

elde edilir. Bu ise teoremin (b) şıkkının doğruluğunu gösterir. □

2.4 Lorentzian bir manifoldun ekran homotetik lightlike altmanifoldları üzerinde bazı eşitsizlikler

Lemma 2.4.1. *M, c sabit eğrilikli bir $\widetilde{M}(c)$ Lorentzian uzay formunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$2\varphi w(\xi)B(X,PZ) = -cg(X,PZ) \tag{2.4.1}$$

dir [23].

Önerme 2.4.1. *M, c sabit eğrilikli $\widetilde{M}(c)$ Lorentzian uzay formunun ekran homotetik bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$\tau_{S(TM)}(p) = n(n-1)c + \varphi n^2\mu^2 - \varphi\sum_{i,j}^{n}(B_{ij})^2, \tag{2.4.2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} K_i^{null} = 0 \quad ve \quad \sum_{i=1}^{n} K_i^{N} = nc \tag{2.4.3}$$

dir [31].

İspat. Gauss-Codazzi tipi denklemlerden, (2.1.33) eşitliğinden ve Lemma 2.4.1 den aşağıdaki eşitlikleri elde ederiz:

$$\tau_{S(TM)}(p) = n(n-1)c + \varphi n^2\mu^2 - \varphi\sum_{i,j}^{n}(B_{ij})^2. \tag{2.4.4}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} K_i^{null} &= \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,\xi)\xi, e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{g}(\widetilde{R}(\xi,e_i)e_i,\xi) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{(\nabla_\xi B)(e_i,e_i) - (\nabla_{e_i}B)(\xi,e_i) + B(e_i,e_i)\omega(\xi)\} \\
&= \sum_{i=1}^{n} \{-B(e_i,e_i)\omega(\xi) + B(e_i,e_i)\omega(\xi)\} = 0.
\end{aligned} \tag{2.4.5}$$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} K_i^N &= \sum_{i=1}^{n} g(R(\xi, e_i)e_i, N) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \widetilde{g}(\widetilde{R}(\xi, e_i)e_i, N) \\
&= \sum_{i=1}^{n} \varphi\{(\nabla_\xi B)(e_i, e_i) - (\nabla_{e_i} B)(\xi, e_i) - B(e_i, e_i)\omega(\xi)\} \\
&= -2\varphi n\mu\omega(\xi) \\
&= nc. \qquad (2.4.6)
\end{aligned}
$$

□

Önerme 2.4.2. *M, c sabit eğrilikli $\widetilde{M}(c)$ Lorentzian uzay formunun $\varphi > 0$ olacak şekilde ekran homotetik bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin $p \in M$ noktasındaki skalar eğriliği $\tau(p)$*

$$\tau(p) = n^2c + \varphi n^2\mu^2 - \varphi\sum_{i,j}^{n}(B_{ij})^2 \qquad (2.4.7)$$

eşitliğini sağlar [31].

İspat. (3.1.39), (4.1.23) ve (2.4.3) eşitliklerinden (2.4.7) elde edilir. □

Önerme 2.4.2 kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 2.4.1. *M, c sabit eğrilikli $\widetilde{M}(c)$ Lorentzian uzay formunun $(n+1)$ boyutlu ekran homotetik bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$\frac{1}{\varphi}(\tau(p) - n^2c) \le n^2\mu^2 \qquad (2.4.8)$$

dir. (2.4.8) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M total geodeziktir.*

(2.4.7) eşitliği ve Lemma 2.2.1 kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 2.4.2. *M, c sabit eğrilikli $\widetilde{M}(c)$ Lorentzian uzay formunun $\varphi > 0$ olacak şekilde ekran homotetik bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$\tau(p) \le n^2c + \varphi\{n(n-1)\mu^2\} \qquad (2.4.9)$$

eşitsizliği sağlanır. (2.4.8) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her* $p \in M$ *için sağlanır gerek ve yeter koşul* M *total umbiliktir [31].*

İspat. Lemma 2.2.1 den

$$\varphi \sum_{i=1}^{n} (B_{ij})^2 \geq \varphi \mu^2 \tag{2.4.10}$$

yazılabilir. (2.4.10) eşitliği (2.4.7) de yerine yazılacak olursa (2.4.8) elde edilir.

(2.4.8) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul

$$B_{11} = ... = B_{nn}$$

ve her $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$ için $B_{ij} = 0$ olur. Bu ise M nin total umbilik olduğunu gösterir.

□

Lemma 2.4.2. $a_1, ..., a_n$, *n-reel sayı olmak üzere* $A = \sum_{i<j} (a_i - a_j)^2$ *olarak tanımlansın. Bu durumda*

(1) $A \geq \frac{n}{2}(a_1 - a_2)^2$ *dir. Eşitlik sağlanır gerek ve yeter koşul* $\frac{1}{2}(a_1 + a_2) = a_3 = ... = a_n$ *dir.*

(2) *k ve* ℓ, $1 \leq k < \ell \leq n$ *and* $(k, \ell) \neq (1, 2)$ *şartlarını sağlayan birer tamsayı olmak üzere* $A = \frac{n}{2}(a_1 - a_2)^2 = \frac{n}{2}(a_k - a_1)^2$ *ise* $a_1 = a_2 = ... = a_n$ *dir [32].*

İspat. Lemmanın ispatı için aşağıda verilen üç eşitsizlik kullanılacaktır:

$$2ab \leq a^2 + b^2 \tag{2.4.11}$$

eşitlik sağlanır gerek ve yeter koşul $a = b$ dir.

$$(a + b)^2 \geq 4ab \tag{2.4.12}$$

eşitlik sağlanır gerek ve yeter koşul $a = b$ dir.

$$(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2) \tag{2.4.13}$$

eşitlik sağlanır gerek ve yeter koşul $a = b$ dir.

(2.4.13) eşitsizliğinde a yerine $A-B$ ve b yerine $B-C$ yazılacak olursa

$$(A-C)^2 \leq 2[(A-B)^2+(B-C)^2] \tag{2.4.14}$$

elde edilir. Bu eşitsizliğin eşitlik durumu sağlanır gerek ve yeter koşul $B=\frac{1}{2}(A+C)$ dir.

Şimdi Lemmanın ispatını verelim:

$n=2$ için iddianın doğruluğu açıktır. Kabul edelimki $n \geq 2$ olsun. (2.4.14) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned}\sum_{i<j=1}^{n+1} &= \sum_{i<j=1}^{n}(a_i-a_j)^2+\sum_{i=1}^{n}(a_i-a_{n+1})^2 \\ &\geq \frac{n}{2}(a_1-a_2)^2+(a_1-a_{n+1})^2+(a_2-a_{n+1})^2 \\ &\geq \frac{n}{2}(a_1-a_2)^2+\frac{1}{2}(a_1-a_2)^2=\frac{(n+1)}{2}(a_1-a_2)^2 \qquad (2.4.15)\end{aligned}$$

olup $A \geq \frac{n}{2}(a_1-a_2)^2$ eşitsizliği elde edilir.

Eşitlik sağlanır gerek ve yeter koşul $a_3=a_4=\cdots=a_n=a_{n+1}$ ve $a_{n+1}=\frac{1}{2}(a_1+a_2)$ dır. Böylece lemmanın (i) şıkkı ispatlanır. Benzer şekilde (ii) nin ispatı yapılabilir. □

M ekran homotetik bir lightlike hiperyüzey olsun. M nin kesit eğriliği simetrik olduğundan ekran skalar eğriliği

$$r_{S(TM)}(p)=\sum_{1\leq i<j\leq n}K_{ij}=\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n}K_{ij}=\frac{1}{2}\tau_{S(TM)}(p) \tag{2.4.16}$$

olarak alınabilir. Böylece (2.4.16) den (2.2.7) eşitliği

$$2r_{S(TM)}(p)=2\widetilde{r}_{S(TM)}(p)+\varphi n^2\mu^2-\varphi\sum_{i,j}^{n}(B_{ij})^2 \tag{2.4.17}$$

olur [31].

Yukarıdaki bilgiler ve Lemma 2.4.2 kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 2.4.3. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi>0$ olacak şekilde $(n+1)$ boyutlu ekran homotetik bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$2r_{S(TM)}(p)\leq 2\widetilde{r}_{S(TM)}(p)+(\frac{n^3}{n+1})\varphi\mu^2-\frac{\varphi n}{2(n+1)}(B_{11}-B_{22})^2 \tag{2.4.18}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.4.18) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p\in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $\mu=\frac{n}{2}(B_{11}+B_{22})$ dir [31].*

İspat. Binom teoreminden

$$(B_{11}-B_{22})^2+...+(B_{11}-B_{nn})^2+(B_{22}-B_{33})^2+...+(B_{22}-B_{nn})^2$$
$$+...+(B_{n-1n-1}-B_{nn})^2=n\sum_{i=1}^{n}(B_{ii})^2-2\sum_{1\leq i\neq j\leq n}B_{ii}B_{jj}$$

yazılabilir. Lemma 2.4.2 göz önüne alınacak olursa

$$\sum_{i=1}^{n}(B_{ii})^2\geq\frac{1}{n}\sum_{i\neq j}B_{ii}B_{jj}+\frac{1}{2}(B_{11}-B_{22})^2 \tag{2.4.19}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\frac{1}{n}\sum_{i\neq j}B_{ii}B_{jj}=n\mu^2-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(B_{ii})^2 \tag{2.4.20}$$

eşitliği (2.4.19) da yerine yazılırsa

$$\sum_{i=1}^{n}(B_{ii})^2\geq\frac{n^2}{n+1}\mu^2+\frac{n}{2(n+1)}(B_{11}-B_{22})^2. \tag{2.4.21}$$

olur. Son olarak, (2.4.21) eşitsizliği (2.4.17) de yerine yazılırsa (2.4.18) eşitsizliği elde edilir.

(2.4.18) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p\in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul Lemma 2.4.2 in (1) şartından $\mu=\frac{1}{2}(B_{11}+B_{22})$ dir. □

Önerme 2.4.3. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$ boyutlu bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin ikinci temel formu B nin katsayıları arasında aşağıdaki gibi bir bağıntı vardır [31].*

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij})^2 &= \frac{1}{2}n^2\mu^2+\frac{1}{2}(B_{11}-B_{22}-...-B_{nn})^2\\ &+ 2\sum_{j=2}^{n}(B_{1j})^2-2\sum_{2\leq i<j\leq n}B_{ii}B_{jj}-(B_{ij})^2.\end{aligned} \tag{2.4.22}$$

İspat.

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij})^2 &= \frac{1}{2}(B_{11}+B_{22}+\cdots+B_{nn})^2+\frac{1}{2}(B_{11}-B_{22}-\cdots-B_{nn})^2\\ &+ 2\sum_{i<j}(B_{ij})^2-2\sum_{2\leq i<j\leq n}B_{ii}B_{jj}\end{aligned} \tag{2.4.23}$$

olup bu ise (2.4.22) eşitliğinin sağladığını gösterir. □

Şimdi ekran homotetik lightlike hyperyüzeyleri için Chen-Ricci eşitsizliğini ispat edeceğiz:

Teorem 2.4.4. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ boyutlu ekran homotetik bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.*
(a) *$X \in S^1(TM) = \{X \in S(TM) : \ g(X,X) = 1\}$ için*

$$\frac{n^2}{4}\mu^2 \quad \geq \quad \frac{1}{\varphi}(Ric_{S(TM)}(X) - \widetilde{Ric}_{S(TM)}(X)) \tag{2.4.24}$$

dir.
(b) (2.4.24) *eşitsizliğinin eşitlik durumu bir $X \in T_p^1M$ için sağlanır gerek yeter koşul X e ortogonal olan her $Y \in T_pM$ için*

$$B(X,Y) = 0 \quad ve \quad B(X,X) = \frac{n}{2}\mu \tag{2.4.25}$$

olur.
(c) (2.4.24) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $X \in T_p^1M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul ya p bir total geodezik noktadır veya $n = 2$ ve p total umbilik bir noktadır [31].*

İspat. (2.4.17) ve (2.4.22) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \frac{\varphi}{4}n^2\mu^2 &= r(p) - \widetilde{r}_{S(TM)}(p) + \frac{\varphi}{4}(B_{11} - \dots - B_{nn})^2 \\ &+ \varphi\sum_{j=2}^{n}(B_{1j})^2 - \varphi\sum_{2\leq i<j\leq n} B_{ii}B_{jj} - (B_{ij})^2 \end{aligned} \tag{2.4.26}$$

yazılabilir. Aynı zamanda (2.4.17) den

$$\varphi\sum_{2\leq i<j\leq n} B_{ii}B_{jj} - (B_{ij})^2 = \sum_{2\leq i<j\leq n}(K_{ij} - \widetilde{K}_{ij}) \tag{2.4.27}$$

dir.

$$\begin{aligned} \sum_{2\leq i<j\leq n} K_{ij} &= r_{S(TM)}(p) - Ric_{S(TM)}(e_1), \\ \sum_{2\leq i<j\leq n} \widetilde{K}_{ij} &= \widetilde{r}_{S(TM)}(p) - \widetilde{Ric}_{S(TM)}(e_1) \end{aligned} \tag{2.4.28}$$

olduğundan ve (2.4.26) eşitliği kullanılarak

$$\frac{\varphi}{4}n^2\mu^2 \geq Ric_{S(TM)}(X) - \widetilde{Ric}_{S(TM)}(X) \qquad (2.4.29)$$

elde edilir. (2.4.29) da e_1 yerine X yazılacak olursa (2.4.24) eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin (a) şıkkı ispatlanır.

(2.4.24) eşitsizliğinin eşitlik durumu bir $X \in T_p^1 M$ için sağlanır gerek yeter koşul

$$B_{12} = \ldots = B_{1n} = 0 \ \ ve \ \ B_{11} = B_{22} + \ldots + B_{nn}$$

olmasıdır. Bu nedenle

$$n\mu = B_{11} + \ldots + B_{nn} = 2B_{11}$$

olur. Bu ise (2.4.25) eşitliğine denktir. Böylece teoremin (b) şıkkı ispatlanmış olur.

(2.4.24) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $X \in S^1(TM)$ için sağlanır gerek ve yeter koşul

$$B_{ij} = 0, \quad i \neq j, \qquad (2.4.30)$$

$$2B_{ii} = B_{11} + \ldots + B_{nn}, \quad i \in \{1, \ldots, n\} \qquad (2.4.31)$$

dir. (2.4.31) eşitliğinden $2B_{11} = 2B_{22} = \ldots = 2B_{nn} = \sum\limits_{i=1}^{n} B_{ii}$ elde edilir. Bu ise

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n} B_{ii} = 0$$

olduğunu gösterir. Bu nedenle ya $\sum\limits_{i=1}^{n} B_{ii} = 0$ veya $n = 2$ dır. Eğer $\sum\limits_{i=1}^{n} B_{ii} = 0$ ise (2.4.31) den her $i \in \{1, .., n\}$ için $B_{ii} = 0$ olur. (2.4.30) göz önüne alınacak olursa her $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ için $B_{ij} = 0$ olduğu görülür. Bu ise p nin total geodezik bir nokta olduğunu gösterir. Eğer $n = 2$ ise (2.4.31) den $2B_{11} = 2B_{22} = B_{11} + B_{22}$ olup bu ise p nin total umbilik bir nokta olduğunu gösterir. □

Teorem 2.4.4 den aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 2.4.1. M, c eğrilikli bir $\widetilde{M}(c)$ Lorentzian uzay formunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ boyutlu ekran homotetik bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur.

(a) $X \in S^1(TM) = \{X \in S(TM) : \; g(X,X) = 1\}$ için

$$\frac{n^2}{4}\mu^2 \quad \geq \quad \frac{1}{\varphi}(Ric_{S(TM)}(X) - (n-1)c) \tag{2.4.32}$$

dir.

(b) $(2.4.24)$ eşitsizliğinin eşitlik durumu bir $X \in T_p^1M$ için sağlanır gerek yeter koşul X e ortogonal olan her $Y \in T_pM$ için

$$B(X,Y) = 0 \quad \text{ve} \quad B(X,X) = \frac{n}{2}\mu \tag{2.4.33}$$

olur.

(c) $(2.4.24)$ eşitsizliğinin eşitlik durumu her $X \in T_p^1M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul ya p bir total geodezik noktadır veya $n = 2$ ve p total umbilik bir noktadır [31].

Lemma 2.4.3. *$n > k \geq 2$ ve $a_1, ..., a_n, a$ reel sayılar olmak üzere*

$$(\sum_{i=1}^{n} a_i)^2 = (n-1)(\sum_{i=1}^{n} a_i^2 + a) \tag{2.4.34}$$

ise

$$2a_1a_2 \geq a$$

dır. Eşitlik sağlanır gerek ve yeter şart

$$a_1 + a_2 = a_3 = ... = a_n$$

dir [7].

İspat. Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} |\sum_{i=1}^{n} a_ib_i| &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \\ \left(\sum_{i=1}^{n} a_ib_i\right)^2 &\leq \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right) \end{aligned}$$

$b=(b_1,...,b_n)=(1,...,1)$ alınırsa

$$
\begin{aligned}
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 &\leq n\left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right) \\
((a_1+...+a_k)+a_{k+1}+...+a_n)^2 &\leq n\left(a_1^2+....+a_k^2+a_{k+1}^2+...+a_n^2\right)
\end{aligned}
$$

$$
\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 \leq (n-k+1)((a_1+a_2+\cdots+a_k)^2+a_{k+1}^2+\cdots+a_n^2) \tag{2.4.35}
$$

olur. (2.4.34) ve (2.4.35) den

$$
\sum_{i=1}^{n} a_i^2+a \leq (a_1+a_2+\cdots+a_k)^2+a_{k+1}^2+\cdots+a_n^2
$$

elde edilir. Buradan

$$
2\sum_{1\leq i<j\leq k} a_i a_j \geq a
$$

olur. Eşitlik sağlanır gerek ve yeter koşul $a_1+a_2+\cdots+a_k=a_{k+1}=\cdots=a_n$ dır. $\square$

Teorem 2.4.5. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi>0$ olacak şekilde $(n+1)$-boyutlu ekran homotetik bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$
\begin{aligned}
\tau_{S(TM)}(p)-\tau(\Pi) &\leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p)-\widetilde{\tau}(\Pi) \\
&+ \varphi\frac{n^2(n-2)}{(n-1)}\mu^2+\varphi\sum_{i=3}^{n}(B_{ii})^2
\end{aligned} \tag{2.4.36}
$$

eşitsizliği sağlanır. (2.4.36) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p\in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M minimaldir ve M nin lokal şekil operatörü aşağıdaki gibi olur [31].*

$$
A_{\xi}^{*}=\begin{pmatrix}
B_{11} & B_{12} & \ldots & 0 \\
B_{21} & -B_{11} & \ldots & 0 \\
\vdots & & & \\
0 & 0 & \ldots & 0
\end{pmatrix}. \tag{2.4.37}
$$

İspat. (2.4.4) de

$$
\delta=\tau_{S(TM)}(p)-\varphi\frac{n^2(n-2)}{(n-1)}\mu^2-\widetilde{\tau}_{S(TM)}(p)
$$

yazılacak olursa

$$\delta=\varphi\frac{n^2}{n-1}\mu^2-\varphi\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij})^2$$

elde edilir. Bu nedenle

$$(\sum_{i=1}^{n}B_{ii})^2=(n-1)[\frac{\delta}{\varphi}+\sum_{i=1}^{n}(B_{ii})^2+\sum_{i\neq j=1}^{n}(B_{ij})^2].$$

yazılabilir. Lemma 2.4.3 den

$$2B_{11}B_{22}\geq\frac{\delta}{\varphi}+\sum_{i\neq j=1}^{n}(B_{ij})^2$$

olur. e_1 ve e_2 tarafından gerilen bir düzlem kesiti Π olmak üzere

$$\begin{aligned}\tau(\Pi) &= \widetilde{\tau}(\Pi)+\varphi\sum_{i,j}^{2}B_{ii}B_{jj}-(B_{ij})^2\\ &\geq \widetilde{\tau}(\Pi)+\delta+\varphi\sum_{i\neq j=1}^{n}(B_{ij})^2-\varphi\sum_{i\neq j=1}^{2}(B_{ij})^2\\ &\geq \widetilde{\tau}(\Pi)+\delta+\varphi\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij})^2-\varphi\sum_{i=1}^{n}(B_{ii})^2-\varphi\sum_{i\neq j=1}^{2}(B_{ij})^2\\ &\geq \widetilde{\tau}(\Pi)+\delta-\varphi\sum_{i=3}^{n}(B_{ii})^2 \qquad (2.4.38)\end{aligned}$$

dır. Böylece (2.4.36) ve (2.4.37) elde edilir. □

Teorem 2.4.5 den aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 2.4.2. *M, c sabit eğrilikli $\widetilde{M}(c)$ Lorentzian uzay formunun $\varphi>0$ olacak şekilde $(n+1)$ boyutlu ekran homotetik bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$\tau_{S(TM)}(p)-\tau(\Pi)\leq(n+1)(n-2)c+\varphi\frac{n^2(n-2)}{n-1}\mu^2+\varphi\sum_{i=3}^{n}(B_{ii})^2 \qquad (2.4.39)$$

eşitsizliği sağlanır. (2.4.39) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p\in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M minimaldir ve M nin lokal şekil operatörü (2.4.37) deki gibi olur [31].

Lemma 2.2.1 kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 2.4.6. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$-boyutlu ekran homotetik bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi n(n-1)\mu^2 \tag{2.4.40}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.4.40) *eşitsizliğin eşitlik durumu her $p \in M$ noktası için sağlanır gerek ve yeter koşul M total umbiliktir [31].*

İspat. (2.4.4) de

$$\varphi \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij})^2 = \varphi \sum_{i=1}^{n} (B_{ii})^2 + \varphi \sum_{i \neq j} (B_{ij})^2$$

yazılacak olursa

$$\tau_{S(TM)}(p) \quad = \quad \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi n^2\mu^2 - \varphi \sum_{i=1}^{n} (B_{ii})^2 - \varphi \sum_{i \neq j} (B_{ij})^2 \tag{2.4.41}$$

elde edilir. Ayrıca Lemma 2.2.1 den

$$n\mu^2 \leq \sum_{i=1}^{n} (B_{ii})^2 \tag{2.4.42}$$

olur. (2.4.41) ve (2.4.42) kullanılarak (2.4.40) eşitsizliği elde edilir.

(2.4.40) eşitsizliğin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul

$$B_{11} = ... = B_{nn}$$

ve M nin lokal şekil operatorü A^*_ξ

$$A^*_\xi = \begin{pmatrix} B_{11} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & B_{11} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \\ 0 & 0 & \dots & B_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.4.43}$$

dır. Bu ise M nin total umbilik olduğunu gösterir. □

Teorem 2.4.6 den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 2.4.3. M, c sabit eğrilikli $\widetilde{M}(c)$ Lorentzian uzay formunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ boyutlu ekran homotetik bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq n(n-1)(c+\varphi\mu^2) \tag{2.4.44}$$

eşitsizliği sağlanır. (2.4.44) eşitsizliğin eşitlik durumu her $p \in M$ noktası için sağlanır gerek ve yeter koşul M total umbiliktir [31].

Lemma 2.4.4. *$a_1, ..., a_n$ birer n reel sayı ve k, $2 \leq k \leq n-1$ olacak şekilde bir tamsayı olsun. Bu durumda n nin her $(n_1, ..., n_k)$ bölüntüsü için*

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i_1 < j_1 \leq n_1} a_{i_1} a_{j_1} &+ \sum_{n_1+1 \leq i_2 < j_2 \leq n_1+n_2} a_{i_2} a_{j_2} + \cdots + \sum_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1 \leq i_k < j_k \leq n} a_{i_k} a_{j_k} \\ &\geq \frac{1}{2k}\{(a_1+\cdots+a_n)^2 - k(a_1^2+\cdots+a_n^2)\} \end{aligned} \tag{2.4.45}$$

dir. Eşitlik sağlanır gerek ve yeter koşul

$$a_1 + ... + a_{n_1} = a_{n_1+1} + ... + a_{n_1+n_2} = ... = a_{n_1+...+n_{k-1}+1} + ... + a_n \tag{2.4.46}$$

dir [33].

İspat. $a_1, ..., a_n$ birer n reel sayı, $2 \leq k \leq n-1$ için $(n_1, ..., n_k)$, n nin bir bölüntüsü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} &2k\{\sum_{1 \leq i_1 < j_1 \leq n_1} a_{i_1} a_{j_1} + \sum_{n_1+1 \leq i_2 < j_2 \leq n_1+n_2} a_{i_2} a_{j_2} + \cdots + \sum_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1 \leq i_k < j_k \leq n} a_{i_k} a_{j_k}\} \\ &-(\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha)^2 + k\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha^2 \\ &= 2k\{\sum_{1 \leq i_1 < j_1 \leq n_1} a_{i_1} a_{j_1} + \sum_{n_1+1 \leq i_2 < j_2 \leq n_1+n_2} a_{i_2} a_{j_2} + \cdots + \sum_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1 \leq i_k < j_k \leq n} a_{i_k} a_{j_k}\} \\ &+(k-1)\sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha^2 - 2\sum_{1 \leq \alpha < \beta \leq n} a_\alpha a_\beta \\ &= \{\sum_{1 \leq i_1 \leq n_1} a_{i_1} - \sum_{n_1+1 \leq i_2 \leq n_1+n_2} a_{i_2}\}^2 + \{\sum_{1 \leq i_1 \leq n_1} a_{i_1} - \sum_{n_1+n_2+1 \leq i_3 \leq n_1+n_2+n_3} a_{i_3}\}^2 \\ &+\cdots+\{\sum_{n_1+\cdots+n_{k-2}+1 \leq i_{k-1} \leq n_1+\cdots+n_{k-1}} a_{i_{k-1}} - \sum_{n_1+\cdots+n_{k-1}+1 \leq i_{k-1} \leq n_1+\cdots+n_k} a_{i_k}\}^2 \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{2.4.47}$$

olur. Böylece (2.4.45) eşitsizliği sağlanır. (2.4.45) eşitsizliğin eşitlik durumu sağlanır için gerek ve yeter koşul (2.4.46) eşitliği sağlanır. $\square$

$(n_1,...,n_k) \in S(n)$ için

$$C(n_1,...,n_k) = \varphi \frac{n^2(n+k-1-\sum_{j=1}^{k} n_j)}{n+k-\sum_{j=1}^{k} n_j}, \tag{2.4.48}$$

$$D(n_1,...,n_k) = n(n-1) - \sum_{j=1}^{k} n_j(n_j-1) \tag{2.4.49}$$

olarak $C(n_1,...,n_k)$ ve $D(n_1,...,n_k)$ pozitif reel sayıları tanımlansın [31].

Yukarıda ifade edilen bilgiler kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 2.4.7. *M, c sabit eğrilikli $\widetilde{M}(c)$ Lorentzian uzay formunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$ boyutlu ekran homotetik bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda her bir $p \in M$ ve $(n_1,...,n_k) \in S(n)$ için*

$$\delta(n_1,...,n_k) \leq C(n_1,...,n_k)\mu^2 + D(n_1,...,n_k)c + (2\varphi-1)n\mu. \tag{2.4.50}$$

dir. (2.4.50) *eşitsizliğinin eşitlik durumu $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M nin lokal şekil operatörü aşağıdaki gibi olur:*

$$A^*_\xi = \begin{pmatrix} A^*_1 & \cdots & 0 & \\ \vdots & \ddots & \vdots & 0 \\ 0 & \cdots & A^*_k & \\ & 0 & & \mu_r I \end{pmatrix}. \tag{2.4.51}$$

Burada I_{n_j}, $n_j \times n_j$ tipinde birim matris ve A^*_j, $n_j \times n_j$ tipinde simetrik bir alt matristir öyleki

$$trace(A^*_1) = ... = trace(A^*_k) = \mu_r \tag{2.4.52}$$

dir [31].

İspat. (2.4.7) de

$$\eta = \tau(p) - n^2 c - \varphi n^2 \mu^2 \frac{(n+k-1-\sum_{j=1}^{k} n_j)}{n+k-\sum_{j=1}^{k} n_j} \tag{2.4.53}$$

yazılacak olursa

$$\varphi n^2 \mu^2 = \gamma[\eta + \varphi \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij})^2] \tag{2.4.54}$$

elde edilir. Burada $\gamma = n+k-\sum n_j$ dir. (2.4.54) eşitliği yerine aşağıdaki eşitlik yazılabilir:

$$(\sum_{i=1}^{n} B_{ii})^2 = \gamma[\frac{\eta}{\varphi} + \sum_{i\neq j}(B_{ij})^2 + \sum_{i=1}^{n}(B_{ii})^2]. \tag{2.4.55}$$

Bu eşitlik ise aşağıdaki eşitliğe denktir:

$$\begin{aligned} (\sum_{i=1}^{\gamma+1} \bar{a}_i)^2 &= \gamma[\frac{\eta}{\varphi} + \sum_{i=1}^{\gamma+1}(\bar{a}_i)^2 + \sum_{i\neq j}(B_{ij})^2 \\ &\quad - \sum_{1\leq\alpha_1\neq\beta_1\leq n_1} a_{\alpha_1}a_{\beta_1} - \ldots - \sum_{\alpha_k\neq\beta_k} a_{\alpha_k}a_{\beta_k}]. \end{aligned} \tag{2.4.56}$$

Burada

$$\begin{aligned} \bar{a}_1 &= a_1,\ \bar{a}_2 = a_2 + \ldots + a_{n_1}, \\ \bar{a}_3 &= a_{n_1+1} + \ldots + a_{n_1 n_2}, \\ &\ldots \\ \bar{a}_{k+1} &= a_{n_1+\ldots+n_{k-1}+1} + \ldots + a_{n_1+\ldots+n_k}, \\ &\ldots \\ \bar{a}_{\gamma+1} &= a_n \end{aligned}$$

ve $\alpha_i, \beta_i \in \triangle_i$, $i = \{1,\ldots,k\}$, $\triangle_1 = \{1,\ldots,n_1\},\ldots,\triangle_k = \{n_1+\ldots+n_{k-1}+1,\ldots,n_1+\ldots+n_k\}$ dir. $\varphi > 0$ olduğundan (2.4.56) eşitliğinde Lemma 2.2.1 kullanılacak olursa

$$\{\sum_{\alpha_1\neq\beta_1} a_{\alpha_1}a_{\beta_1} + \ldots + \sum_{\alpha_k\neq\beta_k} a_{\alpha_k}a_{\beta_k}\} \geq \frac{\eta}{2\varphi} + \sum_{A<B}(B_{AB})^2 \tag{2.4.57}$$

elde edilir. Ayrıca (2.4.7) den $dim\ \pi_j = n_j$ olmak üzere

$$\tau(\pi_j) = \widetilde{\tau}_{S(TM)}(\pi_j) + 2\varphi \sum_{\alpha_j<\beta_j} B_{\alpha_j\alpha_j}B_{\beta_j\beta_j} - (B_{\alpha_j\beta_\alpha})^2 \tag{2.4.58}$$

olur. (2.4.57) ve (2.4.58) kullanılarak

$$\begin{aligned}\tau(\pi_1)+...+\tau(\pi_k) &\geq \eta+\sum_{j=1}^{k}\widetilde{\tau}_{S(TM)}(\pi_j)+2\varphi\sum_{A<B}(B_{AB})^2 \\ &\geq \eta+\sum_{j=1}^{k}n_j^2 c \qquad (2.4.59)\end{aligned}$$

elde edilir. (2.4.53) ve (2.4.59) dan (2.4.50) eşitsizliği elde edilir.

Lemma 2.2.1 veya Lemma 2.4.4 göz önüne alınacak olursa (2.4.50) eşitsizliğinin eşitlik durumu $p \in M$ için sağlanır gerek yeter koşul M nin şekil operatörü (2.4.51) deki gibi olur. □

3. HALF-LİGHTLİKE ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE CHEN TİPİ EŞİTSİZLİKLER

3.1 Half-lightlike altmanifoldlar

Tanım 3.1.1. $(\widetilde{M},\widetilde{g})$, $(n+3)$ boyutlu bir semi Riemann manifold $\widetilde{M}$ nin $(n+1)$-boyutlu bir altmanifoldu M olsun. M nin radikal uzayı $Rad\ TM$ nin rankı 1 e eşit ise M altmanifolduna $\widetilde{M}$ nın bir *half-lightlike altmanifoldu* denir [34].

Tanım 3.1.2. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+1)$-boyutlu bir half-lightlike altmanifoldu olsun. $\oplus_{orth}$ ortogonal direkt toplam olmak üzere $Rad\ TM$ nin

$$TM = Rad\ TM \oplus_{orth} S(TM) \tag{3.1.1}$$

olacak şekilde TM ye tamamlayanı olan uzay $S(TM)$ ye M nin *ekran distribusyonu* denir [34].

Tanım 3.1.3. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu bir half-lightlike altmanifoldu olsun. $T\widetilde{M}$ de $S(TM)$ ye ortogonal tamamlayan olan $S(TM)^{\perp}$ i göz önüne alalım. Bu durumda $\xi, u \in \Gamma(S(TM)^{\perp})$ için

$$\widetilde{g}(\xi,u) = 0 \ \text{ ve } \widetilde{g}(u,u) \neq 0 \tag{3.1.2}$$

dır. $S(TM)^{\perp}$ e M nin *co-ekran distribüsyonu* denir [34]. $Rad\ TM$, $T_pM^{\perp}$ in 1 boyutlu bir alt demeti olduğundan $Rad\ TM$ ye tamamlayan ve u tarafından gerilen bir D distribüsyonu vardır. D distribüsyonununa M nin ekran transversal demeti denir. Böylece

$$S(TM)^{\perp} = D \oplus D^{\perp} \tag{3.1.3}$$

olacak şekilde $S(TM)^{\perp}$ de D nin $D^{\perp}$ tamamlayanı vardır.

Tanım 3.1.4. M half-lightlike altmanifoldunun bir U koordinat komşuluğu verilsin. U üzerindeki $RadTM$ nin bir ξ null kesiti için

$$\widetilde{g}(N,u) = \widetilde{g}(N,N) = 0, \quad \widetilde{g}(N,\xi) = 1 \tag{3.1.4}$$

olacak şekilde $S(TM)^{\perp}$ de $D^{\perp}$ distribüsyonunun tek bir N null kesiti vardır. Böylece M nin transversal uzayı $tr(TM)$

$$tr(TM) = D \oplus_{orth} ltr(TM) \tag{3.1.5}$$

olarak yazılabilir. Burada $ltr(TM)$, 1-boyutlu bir vektör demeti olup $S(TM)$ ekran distribüsyonuna göre M nin *lightlike transversal demeti* olarak adlandırılır [34].

Böylece

$$T\widetilde{M} = S(TM)\ \oplus_{orth}\ D\ \oplus_{orth}\ (Rad\ TM \oplus ltr(TM)) \tag{3.1.6}$$

dir.

Tanım 3.1.5. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu bir half-lightlike altmanifoldu olsun. $\widetilde{\nabla}$ ve ∇, sırasıyla $\widetilde{M}$ ve M üzerindeki Levi-Civita ve lineer koneksiyonlar olsun. $\Gamma(TM)$ den $\Gamma(S(TM))$ ye tanımlı bir P projeksiyonu verilsin. Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için Gauss ve Weingarten formulleri

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)N + D(X,Y)u, \tag{3.1.7}$$

$$\widetilde{\nabla}_X N = -A_N X + \rho_1(X)N + \rho_2(X)u, \tag{3.1.8}$$

$$\widetilde{\nabla}_X u = -A_u X + \varepsilon_1(X)N + \varepsilon_2(X)u, \tag{3.1.9}$$

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + C(X,PY)\xi, \tag{3.1.10}$$

$$\nabla_X \xi = -A^*_{\xi}(X) - \rho_1(X)\xi \tag{3.1.11}$$

ile verilir. Burada B ve D ye TM üzerinde, sırasıyla, *lightlike ikinci temel formu* ve *ekran ikinci temel formu*, D ye $S(TM)$ üzerinde *ekran ikinci temel formu*, C ye $S(TM)$ üzerinde *ekran ikinci temel formu*, A_N ve A_u ya TM üzerinde *şekil operatörleri*, A^*_{ξ} ye ise $S(TM)$ üzerinde *ekran ikinci temel formu* denir [35].

Tanım 3.1.6. M, bir Lorenzian manifoldun half-lightlike bir altmanifoldu olsun. M nin ikinci temel formu h ve ekran ikinci temel formu h^*, sırasıyla,

$$h(X,Y) = B(X,Y)N + D(X,Y)u, \quad h^*(X,Y) = C(X,PY)\xi \tag{3.1.12}$$

ile tanımlanır [23].

Önerme 3.1.1. *M, $\widetilde{M}$ Lorenzian manifoldun half-lightlike bir altmanifoldu olsun. B ve D $S(TM)$ ekran distribüsyonunun seçiminden bağımsızdır ve her $X \in \Gamma(TM)$ için*

$$B(X,\xi) = 0 \quad ve \quad D(X,\xi) = -\varepsilon_1(X) \tag{3.1.13}$$

dır [23].

Önerme 3.1.2. *M, $\widetilde{M}$ Lorenzian manifoldun half-lightlike bir altmanifoldu olsun. M nin şekil operatörleri ile ikinci temel formları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:*

$$\begin{aligned} B(X,Y) &= g(A^*_\xi X,Y), && (3.1.14)\\ C(X,PY) &= g(A_N X,PY), && (3.1.15)\\ D(X,PY) &= g(A_u X,PY), && (3.1.16)\\ D(X,Y) &= g(A_u X,PY) - \varepsilon_1(X)\eta(Y). && (3.1.17) \end{aligned}$$

Burada $\eta(Y) = \widetilde{g}(N,Y)$ dir [23].

Tanım 3.1.7. M, $\widetilde{M}$ Lorenzian manifoldun half-lightlike bir altmanifoldu olsun.

$$B(X,Y) = D(X,Y) = 0, \;\; \forall X,Y \in \Gamma(TM) \tag{3.1.18}$$

ise M ye *total geodezik*,

$$C(X,Y) = 0, \;\; \forall X,Y \in \Gamma(S(TM)) \tag{3.1.19}$$

ise M ye $S(TM)$-*total geodezik*, H_1 ve H_2 sırasıyla, $ltr(TM)$ ve D üzrinde diferensiyellenebilir fonksiyolar olmak üzere $\forall X,Y \in \Gamma(TM)$ için

$$B(X,Y) = H_1\, \widetilde{g}(X,Y) \text{ ve } D(X,Y) = H_2\, \widetilde{g}(X,Y) \tag{3.1.20}$$

ise M ye *total umbilik*,

$$C(X,Y) = K\, \widetilde{g}(X,Y),\; \forall X,Y \in \Gamma(S(TM)) \tag{3.1.21}$$

ise M ye $S(TM)$- total umbiliktir denir [23].

Örnek 3.1.1.

R_2^4 de

$$x^2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x^1 + x^2), \;\; x^4 = \frac{1}{2}\log(1 + (x^1 - x^2)^2) \tag{3.1.22}$$

ile tanımlanan bir M yüzeyi verilsin. Bu durumda

$$\begin{aligned} U_1 &= \sqrt{2}(1 + (x^1 - x^2)^2)\partial_1 + (1 + (x^1 - x^2)^2)\partial_3 + \sqrt{2}(x^1 - x^2)\partial_4, \\ U_2 &= \sqrt{2}(1 + (x^1 - x^2)^2)\partial_2 + (1 + (x^1 - x^2)^2)\partial_3 - \sqrt{2}(x^1 - x^2)\partial_4, \\ \xi &= \partial_1 + \partial_2 + \sqrt{2}\,\partial_3, \\ u &= 2(x^2 - x^1)\partial_2 + \sqrt{2}(x^2 - x^1)\partial_3 + (1 + (x^1 - x^2))\partial_4 \end{aligned} \tag{3.1.23}$$

olur. Burada $Rad\ TM = sp\{\xi\}$ ve $S(TM) = sp\{U_1, U_2\}$ dir. Ayrıca

$$ltr(TM) = sp\{N = -\frac{1}{2}\partial_1 + \frac{1}{2}\partial_2 + \frac{1}{2}\partial_3\} \tag{3.1.24}$$

ve $tr(TM) = sp\{u, N\}$ dir. Böylece M, R_2^4 de half-lightlike bir altmanifoldtur. Direkt bir hesaplamayla

$$\begin{aligned} \widetilde{\nabla}_{U_1} U_2 &= 2(1 + (x^1 - x^2)^2)^2\{2(x^2 - x^1)\partial_2 + \sqrt{2}(x^2 - x^1)\partial_3 + \partial_4\} \\ & \quad \widetilde{\nabla}_\xi U_2 = 0, \;\; \widetilde{\nabla}_X \xi = \widetilde{\nabla}_X N = 0, \;\; \forall X \in \Gamma(TM) \end{aligned} \tag{3.1.25}$$

dir. $X = X^1\xi + X^2 U_2 \in \Gamma(TM)$ olmak üzere, Gauss Weingarten formülleri kulanılırsa

$$B = 0, \; A_\xi = 0, \; A_N = 0, \; \nabla_X \xi = 0,$$
$$D(X, \xi) = 0, \; D(U_2, U_2) = 2 = H_2 \widetilde{g}(U_2, U_2)$$

elde edilir. Burada $H_2 = -\frac{2}{(1+(x^1-x^2)^4}$ dür. O halde M total umbiliktir [23].

Örnek 3.1.2. R_1^5 de

$$M = \{(t, t, u, v, 0) : \; t, u, v \in R\} \tag{3.1.26}$$

yüzeyi verilsin. M, R_1^5 in total geodezik bir half-lightlike altmanifoldudur. Gerçekten

$$\begin{aligned} &\xi = (1, 1, 0, 0, 0), \; U_1 = (0, 0, 1, 0, 0), \; U_2 = (0, 0, 0, 1, 0), \\ &N = \frac{1}{2}(-1, 1, 0, 0, 0), \; u = (0, 0, 0, 0, 1) \end{aligned} \tag{3.1.27}$$

olur. Buradan her $i, j \in 1,2$ için $B(U_i,U_j) = D(U_i,U_j) = 0$ ve $D(\xi,\xi) = 0$ olduğu görülür. Böylece M total geodeziktir.

B ve D ikinci temel formları, $S(TM)$ ekran uzayının seçiminden bağımsız olduğundan ortalama eğrilik vektörü $H(p)$ de ekran uzayın seçiminden bağımsızdır.

Önerme 3.1.3. *M, $\widetilde{M}$ Lorenzian manifoldunun half-lightlike bir altmanifoldu olsun. $\Gamma(S(TM))$ nin $\{e_1,\dots,e_n\}$ ortonormal bir bazı verilsin. M minimaldir gerek ve yeter koşul*

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} B(e_i,e_i) = 0, \;\; \mu_2 = \sum_{i=1}^{n} D(e_i,e_i) = 0 \;\; ve \;\; \varepsilon_1(\xi) = D(\xi,\xi) = 0 \qquad (3.1.28)$$

dir [23].

Tanım 3.1.8. M, $\widetilde{M}$ Lorenzian manifoldunun half-lightlike bir altmanifoldu olsun. Her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\varepsilon_1(X) = D(X,\xi) = 0 \qquad (3.1.29)$$

ise M ye *irrasyonel half-lightlike altmanifold* denir [36].

Önerme 3.1.4. *M, $\widetilde{M}$ Lorenzian manifoldunun irrasyonel half-lightlike bir altmanifoldu olsun. M minimaldir gerek ve yeter koşul*

$$\mu_1 = \sum_{i=1}^{n} B(e_i,e_i) = 0, \;\; ve \;\; \mu_2 = \sum_{i=1}^{n} D(e_i,e_i) = 0 \qquad (3.1.30)$$

dir [23].

Tanım 3.1.9. M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike bir altmanifoldu olsun. M nin şekil operatörü A_N ve lokal şekil operatörü A^*_ξ arasında

$$A_N = \varphi A^*_\xi \qquad (3.1.31)$$

koşulunu sağlayan M nin bir U komşuluğu üzerinde sıfırdan farklı bir φ fonksiyonu varsa M ye *ekran lokal konformal half-lightlike altmanifold* denir. Burada φ sıfırdan farklı bir sabit ise M ye *ekran homotetik half-lightlike altmanifold* denir [37].

Önerme 3.1.5. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldun ekran lokal konformal half-lightlike bir altmanifoldu olsun. Bu durumda her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$C(X,PY) = \varphi\, B(X,Y) \tag{3.1.32}$$

dir [37].

Önerme 3.1.6. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun half-lightlike bir altmanifoldu olsun. $\widetilde{M}$ ve M nin Riemann eğrilik tensörleri, sırasıyla, $\widetilde{R}$ ve R olmak üzere her $X,Y,Z,U \in \Gamma(TM)$ için*

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)PZ,PW) &= g(R(X,Y)PZ,PW) + B(X,PZ)C(Y,PW) \\
&- B(Y,PZ)C(X,PW) + D(X,PZ)D(Y,PW) \\
&- D(Y,PZ)D(X,PW), \qquad (3.1.33) \\
\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)PZ,\xi) &= (\nabla_X B)(Y,PZ) - (\nabla_Y B)(X,PZ) \\
&+ \rho_1(X)B(Y,PZ) - \rho_1(Y)B(X,PZ), \qquad (3.1.34) \\
\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)PZ,N) &= g(R(X,Y)PZ,N) + \rho_2(Y)D(X,PZ) \\
&- \rho_2(X)D(Y,PZ), \qquad (3.1.35) \\
\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)\xi,N) &= g(R(X,Y)\xi,N) + \rho_2(X)\varepsilon_1(Y) \\
&- \rho_2(Y)\varepsilon_1(X) \qquad (3.1.36)
\end{aligned}$$

dir. Bu denklemelere M üzerinde Gauss-Codazzi tipi denklemleri denir [38].

Önerme 3.1.7. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun half-lightlike bir altmanifoldu olsun.*

$$\begin{aligned}
R^{(0,2)}(\xi,\xi) &= \sum_{j=1}^{n} g(R(e_j,\xi)\xi,e_j) - \widetilde{g}(R(\xi,\xi)\xi,N) \\
&= \sum_{j=1}^{n} K_j^{null} \qquad (3.1.37)
\end{aligned}$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n} R^{(0,2)}(e_i,e_i) = \sum_{i=1}^{n}\{\sum_{j=1}^{n} g(R(e_j,e_i)e_i,e_j)\} + \sum_{i=1}^{n} \widetilde{g}(R(\xi,e_i)e_i,N) \tag{3.1.38}$$

dir [39].

(3.1.37) ve (3.1.38) eşitlikleri kullanınalarak

$$\tau(p) \quad = \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} + \sum_{i=1}^{n} K_i^{null} + K_{iN} \tag{3.1.39}$$

gibi bir $\tau(p)$ skaları elde edilir. Eğer M nin Ricci tipi tensörü simetrik ise $\tau(p)$ skalarına $p \in M$ noktasının *skalar eğriliği* denir. Burada $i \in \{1,...,n\}$ için $K_{iN} = \widetilde{g}(R(\xi,e_i)e_i,N)$ dir [39].

3.2 Half-lightlike altmanifoldlar üzerinde ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliği

Tanım 3.2.1. M, $\widetilde{M}$ Loretzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu bir half-lightlike altmanifoldu, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı $\{e_1,...,e_n,\xi\}$ ve $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1,...,e_n\}$ olsun. $k \leq n$ için $(k+1)$-boyutlu dejenere bir düzlem kesiti $\pi_{k,\xi} = sp\{e_1,...,e_k,\xi\}$ ve k-boyutlu non-dejenere bir düzlem kesiti $\pi_k = sp\{e_1,...,e_k\}$ olmak üzere, sırasıyla,

$$Ric_{\pi_{k,\xi}}(X) = R^{(0,2)}(X,X) = \sum_{j=1}^{k} g(R(e_j,X)X,e_j) + \widetilde{g}(R(\xi,X)X,N) \tag{3.2.1}$$

ve

$$Ric_{\pi_k}(X) = R^{(0,2)}(X,X) = \sum_{j=1}^{k} g(R(e_j,X)X,e_j) \tag{3.2.2}$$

eğriliklerine $X \in \Gamma(TM)$ de *k-dejenere Ricci tipi tensörü* ve *k-Ricci tensörü* denir. Eğer M nin kesit eğriliği simetrik ise $Ric_{\pi_{k,\xi}}(X)$ e *k-dejenere Ricci eğriliği* ve $Ric_{\pi_k}(X)$ e *k-Ricci eğriliği* denir.

Ayrıca

$$\tau_{\pi_{k,\xi}}(p) = \sum_{i,j=1}^{k} K_{ij} + \sum_{i=1}^{k} K_i^{null} + K_{iN} \tag{3.2.3}$$

ve

$$\tau_{\pi_k}(p) = \sum_{i,j=1}^{k} K_{ij} \tag{3.2.4}$$

eğriliklerine *k-dejenere skalar eğriliği* ve *k-skalar eğriliği* denir.

$k=2$ için $\Pi_{1,\xi}=sp\{e_1,\xi\}$ 2-boyutlu düzlem kesiti olmak üzere

$$Ric_{\Pi_{1,\xi}}(e_1)=K_{1N}$$

ve

$$\tau_{\Pi_2}(p)=K_1^{null}+K_{1N}$$

dir.

$k=n$ için $\pi_n=sp\{e_1,...,e_n\}=\Gamma(S(TM))$ olmak üzere

$$Ric_{S(TM)}(e_1)=Ric_{\pi_n}(e_1)=\sum_{j=1}^{n}K_{1j}=K_{12}+...+K_{1n} \tag{3.2.5}$$

ve

$$\tau_{S(TM)}(p) \;=\; \sum_{i,j=1}^{n}K_{ij} \tag{3.2.6}$$

dir. $Ric_{S(TM)}(e_1)$ eğriliğine e_1 üzerinde *ekran Ricci eğriliği* ve $\tau_{S(TM)}(p)$ ye $p\in M$ noktasında *ekran skalar eğriliği* denir.

Gauss Codazzi tipi denklemlerden aşağıdaki önerme elde edilir:

Önerme 3.2.1. *M, $\widetilde{M}$ Loretzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu half-lightlike bir altmanifoldu, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı $\{e_1,...,e_n,\xi\}$ ve $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1,...,e_n\}$ olsun. Bu durumda*

$$\tau_{S(TM)}(p)=\widetilde{\tau}_{S(TM)}(p)+\sum_{i,j=1}^{n}B_{ii}C_{jj}-B_{ij}C_{ji}+\sum_{i,j=1}^{n}D_{ii}D_{jj}-(D_{ij})^2 \tag{3.2.7}$$

dir. Burada $i,j\in\{1,...,n\}$ için $B_{ij}=B(e_i,e_j)$, $C_{ij}=C(e_i,e_j)$ ve $D_{ij}=D(e_i,e_j)$ dir.

Önerme 3.2.2. *M, $\widetilde{M}$ Loretzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu half-lightlike bir altmanifoldu, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı $\{e_1,...,e_n,\xi\}$ ve $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1,...,e_n\}$ olsun. M nin ikinci temel formu B ve ekran ikinci temel formu C nin bileşenleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır.*

$$\sum_{i,j=1}^{n}B_{ij}C_{ji}=\frac{1}{2}\{\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}+C_{ji})^2-\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij})^2+(C_{ji})^2\} \tag{3.2.8}$$

ve

$$\sum_{i,j} B_{ii}C_{jj} = \frac{1}{2}\{(\sum_{i,j} B_{ii}+C_{jj})^2 - (\sum_i B_{ii})^2 - (\sum_j C_{jj})^2\} \tag{3.2.9}$$

Teorem 3.2.1. *M, $\widetilde{M}$ Loretzian manifoldunun $(n+1)$ boyutlu half-lightlike bir altmanifoldu olsun. Bu durumda*

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n\mu_1(traceA_N) + n^2\mu_2^2 + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}-C_{ji})^2 \tag{3.2.10}$$

eşitsizliği vardır. (3.2.10) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul aşağıdaki iddialardan biri sağlanır:

i) *M, $\varphi = -1$ olacak şekilde bir ekran homotetik half-lightlike altmanifoldtur;*

ii) *B ikinci temel formu TM üzerinde ve C, D ikici temel formları $S(TM)$ üzerinde sıfıra eşittir.*

İspat. (3.2.7) ve (3.2.8) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &= \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \sum_{i,j=1}^{n} B_{jj}C_{ii} - \frac{1}{2}\left\{\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}+C_{ji})^2 - \sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij})^2 + (C_{ji})^2\right\} \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{n} D_{ii}D_{jj} - (D_{ij})^2\end{aligned}$$

yazılabilir.

$$\frac{1}{2}(B_{ij}^2 + C_{ji}^2) = \frac{1}{4}(B_{ij}+C_{ji})^2 + \frac{1}{4}(B_{ij}-C_{ji})^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &= \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n\mu_1(traceA_N) - \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}+C_{ji})^2 \\ &\quad + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}-C_{ji})^2 + n^2\mu_2^2 - \sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij})^2\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise (3.2.10) eşitsizliğinin sağladığını gösterir.

(3.2.10) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul her $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ için

$$D_{ij} = 0 \text{ ve } B_{ij} = -C_{ij}$$

dir. Bu ise M nin ya $\varphi = -1$ olacak şekilde bir ekran homotetik half-lightlike altmanifold olduğunu veya B ikinci temel formu TM üzerinde ve C, D ikici temel formları $S(TM)$ üzerinde sıfıra eşit olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 3.2.1 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.1. M, $\widetilde{M}$ Loretzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu half-lightlike bir altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n\mu_1(traceA_N) + n^2\mu_2^2 + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij} - C_{ji})^2 \tag{3.2.11}$$

eşitsizliği vardır. (3.2.11) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul ya M, $\varphi = -1$ olacak şekilde ekran homotetik half- lightlike altmanifoldtur veya M total geodeziktir.

Teorem 3.2.2. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu ekran konformal bir half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler birbirine denktir:*

i) *$S(TM)$ nin her bir leafı M de total geodeziktir;*

ii) *L bir boyutlu bir lightlike altmanifold, M', $S(TM)$ nin non-dejenere bir leafı olmak üzere M, M' ve L nın bir lightlike çarpım manifoldudur;*

iii) *B, M üzerinde sıfırdır;*

iv) *M nin indirgenmiş konneksiyonu ∇ bir metrik konneksiyondur [35].*

Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.2.2. M, $\widetilde{M}$ Lorenzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu $\varphi \neq -1$ olacak şekilde ekran homotetik half-lightlike bir altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi n^2\mu_1^2 + n^2\mu_2^2 + \frac{(\varphi-1)^2}{4}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij})^2 \tag{3.2.12}$$

eşitsizliği vardır. (3.2.12) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M nin indirgenmiş ∇ konneksiyonu bir metrik konneksiyondur.

Teorem 3.2.3. *M, $\widetilde{M}$ Lorenzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu half-lightlike bir altmanifoldu olsun. Bu durumda*

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2} trace(\widetilde{A}_N)^2 + n^2\mu_2^2 + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}-C_{ji})^2 \tag{3.2.13}$$

eşitsizliği vardır. Burada

$$\widetilde{A}_N = \begin{pmatrix} B_{11}+C_{11} & \dots & B_{1n}+C_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{n1}+C_{n1} & \dots & B_{nn}+C_{nn} \end{pmatrix} \tag{3.2.14}$$

dır. (3.2.13) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $\mu_1 = \mu_2 = trace(A_N) = 0$ dır.

İspat. (3.2.7), (3.2.8) ve (3.2.9) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &= \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2}\left\{\left(\sum_{i,j=1}^{n} B_{ii}+C_{jj}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} B_{ii}\right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} C_{jj}\right)^2\right\} \\ &\quad -\frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}+C_{ji})^2 + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}-C_{ji})^2 \\ &\quad + \sum_{i,j=1}^{n} D_{ii}D_{jj} - (D_{ij})^2 \end{aligned} \tag{3.2.15}$$

elde edilir. Bu ise (3.2.13) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir. (3.2.13) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul her $i, j \in \{1, \dots, n\}$ için

$$\mu_1 = trace(A_N) = 0, \;\; B_{ij} = -C_{ji} \;\text{ ve }\; D_{ij} = 0 \tag{3.2.16}$$

dir. □

Teorem 3.2.3 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 3.2.3. M, $\widetilde{M}$ Lorenzian manifoldunun $(n+1)$ boyutlu irrasyonel half-lightlike bir altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2} trace(\widetilde{A}_N)^2 + n^2\mu_2^2 + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}-C_{ji})^2 \tag{3.2.17}$$

dir. Burada $\widetilde{A}_N$ (3.2.14) e eşittir.

(3.2.17) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M minimaldir.

Sonuç 3.2.4. M, $\widetilde{M}$ Lorenzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu irrasyonel ekran homotetik half-lightlike bir altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{(\varphi+1)^2}{2} n^2\mu_1^2 + n^2\mu_2^2 + \frac{(\varphi-1)^2}{4} \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij})^2 \qquad (3.2.18)$$

dir. (3.2.18) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için salanır gerek ve yeter koşul M minimaldir.

Lemma 2.2.1 kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.2.4. *M, $\widetilde{M}$ Lorenzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu half-lightlike bir altmanifoldu olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &\leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{2n-1}{4}(trace\widetilde{A}_N)^2 - \frac{1}{2}n^2\mu_1^2 - \frac{1}{2}(traceA_N)^2 \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}-C_{ji})^2 + n(n-1)\mu_2^2 \qquad (3.2.19) \end{aligned}$$

eşitsizliği vardır. Burada $\widetilde{A}_N$ (3.2.14) e eşittir.

(3.2.19) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul her bir $X \in \Gamma(S(TM))$ için $n\mu_1 = -trace(A_N)$ ve $\mu_2 = D(X,X)$ dir.

İspat. (3.2.15) eşitliğinden ve Lemma 2.2.1 den

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &\leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2}\left\{ \left(\sum_{i,j=1}^{n} B_{ii} + C_{jj} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} B_{ii} \right)^2 - \left(\sum_{j=1}^{n} C_{jj} \right)^2 \right\} \\ &-\frac{1}{4n}(\sum_{i,j=1}^{n} B_{ii} + C_{jj})^2 + \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij}-C_{ji})^2 + n^2\mu_2^2 \\ &-\frac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n} D_{ii})^2 - \sum_{i\neq j=1}^{n}(D_{ij})^2 \qquad (3.2.20) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise (3.2.19) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir.

(3.2.19) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul

$$B_{11} + C_{11} = \ldots = B_{nn} + C_{nn}, \;\; D_{11} = \cdots = D_{nn},$$
$$D_{ij} = 0, \;\; i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$$

dir. Bu ise $n\mu_1 = -trace(A_N)$ ve $\mu_2 = D_{11}$ olduğunu gösterir. □

Teorem 3.2.5. *M, $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun half-lightlike bir altmanifoldu olsun. M nin co-screen distribüsyonu $S(TM)^{\perp}$, $\widetilde{M}$ üzerinde konformal Kiling ise bu durumda δ gibi bir diferendiyellenebilir fonksiyonu vardırki her $X, Y \in TM$ için*

$$D(X,Y) = \varepsilon\, \delta\, g(X,Y) \tag{3.2.21}$$

dir [40].

İspat. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $u \in \Gamma(S(TM^{\perp})$ için, kabulden

$$L_u \widetilde{g}(X,Y) = \widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X u, Y) + \widetilde{g}(X, \widetilde{\nabla}_Y u),$$
$$\widetilde{g}(\widetilde{\nabla}_X u, Y) = -g(A_u X, Y) + \varepsilon_1(X)\eta(Y) = \varepsilon\, D(X,Y) \tag{3.2.22}$$

olur. Böylece her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $u \in \Gamma(S(TM^{\perp})$ için $L_u \widetilde{g}(X,Y) = -2\varepsilon\, D(X,Y)$ elde edilir. $\Gamma(S(TM^{\perp})$ bir konformal Killing distribution ise her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $D(X,Y) = \varepsilon\, \delta\, g(X,Y)$ elde edilir. □

Teorem 3.2.4 ve Teorem 3.2.5 den aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.2.5. M, $\widetilde{M}$ Lorenzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu half-lightlike bir altmanifoldu olsun. Bu durumda (3.2.19) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanıyorsa $S(TM)^{\perp}$, $\delta = 1$ olacak şekilde $\widetilde{M}$ üzerinde bir konformal Kilingdir.

3.3 Ekran konformal half-lightlike altmanifoldlar üzerinde Chen-tipi eşitsizlikler

Bu bölümde, Lorentzian bir manifoldun ekran konformal half-lightlike altmanifoldlarının ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliğinin içinde bulunduğu bazı eşitsizlikleri ifade edeceğiz.

M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifold olsun. (3.1.32) eşitliğinden, (3.2.7) eşitliği

$$\tau_{S(TM)}(p) = \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi \sum_{i,j=1}^{n} B_{ii}B_{jj} - (B_{ij})^2 + \sum_{i,j=1}^{n} D_{ii}D_{jj} - (D_{ij})^2 \qquad (3.3.1)$$

olur.

(3.3.1) eşitliğinden aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.3.1. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifold olsun. Bu durumda*

a) $\varphi > 0$ *ise*

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi n^2 \mu_1^2 + n^2 \mu_2^2 \qquad (3.3.2)$$

eşitsizliği vardır. (3.3.2) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $S(TM)$, M de total geodeziktir ve her $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için $D(X,Y) = 0$ dır.

b) $\varphi < 0$ *ise*

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi n^2 \mu_1^2 + n^2 \mu_2^2 - \sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij})^2 \qquad (3.3.3)$$

eşitsizliği vardır. (3.3.2) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $S(TM)$ ekran distribüsyonu M de total geodeziktir.

Teorem 3.3.1 den aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.3.1. M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $(n+1)$-boyutlu bir irrasyonel ekran homotetik half-lightlike altmanifold olsun. Bu durumda

a) $\varphi > 0$ ise

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi n^2 \mu_1^2 + n^2 \mu_2^2 \qquad (3.3.4)$$

eşitsizliği vardır. (3.3.4) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M total geodeziktir.

b) $\varphi < 0$ ise

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi n^2 \mu_1^2 + n^2 \mu_2^2 - \sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij})^2 \qquad (3.3.5)$$

eşitsizliği vardır. (3.3.5) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $S(TM)$ ekran distribüsyonu M de total geodeziktir.

Uyarı 3.3.1. *Bu bölümün geriye kalan kısmında,* $\varphi > 0$ *olarak alınacaktır.*

Lemma 2.2.1 kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.3.2. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$-boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifold olsun. Bu durumda*

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n(n-1)(\varphi\mu_1^2 + \mu_2^2) \tag{3.3.6}$$

eşitsizliği vardır. (3.3.6) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $S(TM)$ ekran distibüsyonu M de total umbiliktir.*

İspat. (3.3.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &= \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi n^2\mu_1^2 - \varphi \sum_{i\neq j=1}^{n} (B_{ij})^2 - \varphi \sum_{i=1}^{n} (B_{ii})^2 \\ &\quad + n^2\mu_2^2 - \sum_{i\neq j=1}^{n} (D_{ij})^2 - \sum_{i=1}^{n} (D_{ii})^2 \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

yazılabilir. (3.3.7) de Lemma 2.2.1 kullanılacak olursa (3.3.6) eşitsizliği elde edilir.

(3.3.6) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$ için

$$B_{11} = \cdots = B_{nn}, \ \ B_{ij} = 0,$$

$$D_{11} = \cdots = D_{nn}, \ \ D_{ij} = 0$$

dir. Bu ise $S(TM)$ nin M de total geodezik olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 3.3.2 den aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.3.2. M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$-boyutlu bir irrasyonel ekran homotetik half-lightlike altmanifold olsun. Bu durumda

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n(n-1)(\varphi\mu_1^2 + \mu_2^2) \tag{3.3.8}$$

eşitsizliği vardır. (3.3.8) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M total umbiliktir.

Lemma 2.4.2 kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.3.3. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$-boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifold olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) \quad \leq \quad & \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{(n+2)}{(n+1)}\varphi n^2 \mu_1^2 + \frac{\varphi n}{2(n+1)}(B_{11} - B_{22})^2 \\ & \frac{(n+2)}{(n+1)}\varphi n^2 \mu_2^2 + \frac{\varphi n}{2(n+1)}(D_{11} - D_{22})^2 \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

eşitsizliği vardır. (3.3.9) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $\mu_1 = \frac{n}{2}(B_{11} + B_{22})$ ve $\mu_2 = \frac{n}{2}(D_{11} + D_{22})$ dir.*

İspat. Binom teoreminden

$$\begin{aligned}&(B_{11} - B_{22})^2 + \ldots + (B_{11} - B_{nn})^2 + (B_{22} - B_{33})^2 + \ldots + (B_{22} - B_{nn})^2 \\ &+ \ldots + (B_{n-1n-1} - B_{nn})^2 = n\sum_{i=1}^{n}(B_{ii})^2 - 2\sum_{1 \leq i \neq j \leq n} B_{ii}B_{jj}\end{aligned} \tag{3.3.10}$$

yazılabilir. Lemma 2.4.2 in (a) şıkkından

$$\sum_{i=1}^{n}(B_{ii})^2 \geq \frac{1}{n}\sum_{i \neq j} B_{ii}B_{jj} + \frac{1}{2}(B_{11} - B_{22})^2 \tag{3.3.11}$$

elde edilir. Bununla beraber

$$\frac{1}{n}\sum_{i \neq j} B_{ii}B_{jj} = n\mu_1^2 - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(B_{ii})^2 \tag{3.3.12}$$

yazılabilir. (3.3.11) eşitliği (3.3.12) de yerine yazılacak olursa

$$\sum_{i=1}^{n}(B_{ii})^2 \geq \frac{n^2}{n+1}\mu_1^2 + \frac{n}{2(n+1)}(B_{11} - B_{22})^2 \tag{3.3.13}$$

elde edilir. Benzer yolla

$$\sum_{i=1}^{n}(D_{ii})^2 \geq \frac{n^2}{n+1}\mu_2^2 + \frac{n}{2(n+1)}(D_{11} - D_{22})^2 \tag{3.3.14}$$

dir. (3.3.7) de (3.3.13) ve (3.3.14) eşitlikleri kullanılırsa (3.3.9) eşitsizliği elde edilir.

(3.3.9) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul

$$\mu_1 = \frac{n}{2}(B_{11} + B_{22}), \ \ \mu_2 = \frac{n}{2}(D_{11} + D_{22}) \tag{3.3.15}$$

ve her $i \neq j \in \{1,\ldots,n\}$ için

$$B_{ij} = D_{ij} = 0 \tag{3.3.16}$$

dir. Bu ise teoremin ispatını tamamlar. □

Teorem 3.3.3 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 3.3.3. M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$-boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifold olsun. Bu durumda her $i \neq j \in \{1,\ldots,n\}$ için

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) \quad \leq \quad & \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{n^3}{(n+1)}\varphi\mu_1^2 - \frac{\varphi n}{2(n+1)}(B_{ii} - B_{jj})^2 \\ & \frac{n^3}{(n+1)}\varphi\mu_2^2 - \frac{\varphi n}{2(n+1)}(D_{ii} - D_{jj})^2\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

eşitsizliği vardır. $(3.3.17)$ eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $S(TM)$ ekran distribüsyonu M de total umbiliktir.

Sonuç 3.3.4. M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$-boyutlu bir irrasyonel ekran homotetik half-lightlike altmanifold olsun. Bu durumda her $i \neq j \in \{1,\ldots,n\}$ için

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) \quad \leq \quad & \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{(n+2)}{(n+1)}\varphi n^2\mu_1^2 + \frac{\varphi n}{2(n+1)}(B_{ii} - B_{jj})^2 \\ & \frac{(n+2)}{(n+1)}\varphi n^2\mu_2^2 + \frac{\varphi n}{2(n+1)}(D_{ii} - D_{jj})^2\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

eşitsizliği vardır. $(3.3.18)$ eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M total umbiliktir.

Teorem 3.3.4. *M, c sabit eğrilikli $\widetilde{M}(c)$ semi-Riemannian uzay formunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$-boyutlu total umbilik bir ekran konformal half-lightlike altmanifold olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialar doğrudur:*

***i)** M nin Ricci tensörü simetriktir.*

***ii)** M nin null kesit eğriliği sıfırdır [37].*

Sonuç 3.3.4 ve Teorem 3.3.4 kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 3.3.5. M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$-boyutlu bir irrasyonel ekran homotetik half-lightlike altmanifold olsun. (3.3.18) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanıyorsa aşağıdaki iddialar doğrudur.

i) M nin Ricci tensörü simetriktir.

ii) M nin null kesit eğriliği sıfırdır.

Lemma 2.4.3 kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.3.5. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$-boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifold, $p \in M$ için T_pM nin 2-boyutlu non-dejenere bir düzlem kesiti $\Pi = Span\{e_1, e_2\}$ olsun. Bu durumda $B(\pi^{\perp})^2 = \sum\limits_{i=3}^{n}(B_{ii})^2$ ve $n^2\mu_2^2(\Pi^{\perp}) = \sum\limits_{i,j=3}^{n} D_{ii}D_{jj}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) - \tau(\Pi) &\leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) - \widetilde{\tau}(\Pi) + \varphi\frac{n^2(n-2)}{n-1}\mu_1^2 \\ &+ B(\pi^{\perp})^2 - n^2\mu_2^2(\Pi^{\perp}) \end{aligned} \tag{3.3.19}$$

eşitsizliği vardır. (3.3.19) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ noktasında sağlanır gerek ve yeter koşul $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D_{11} + D_{22}$ ve M nin lokal şekil operatörü A_{ξ}^{*} aşağıdaki şekilde olur.

$$A_{\xi}^{*} = \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & 0 \\ B_{21} & -B_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

İspat. (3.3.1) eşitliğinde

$$\begin{aligned} \delta &= \tau_{S(TM)}(p) - \varphi\frac{n^2(n-2)}{(n-1)}\mu_1^2 - \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) \\ &\quad -n^2\mu_2^2 + \sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij})^2 \end{aligned}$$

yazılırsa

$$\delta = \varphi\frac{n^2}{n-1}\mu^2 - \varphi\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij})^2$$

elde edilir. Böylece

$$(\sum_{i=1}^{n} B_{ii})^2 = (n-1)\left(\frac{\delta}{\varphi} + \sum_{i=1}^{n}(B_{ii})^2 + \sum_{i\neq j=1}^{n}(B_{ij})^2\right)$$

dir. Yukarıdaki eşitlikte Lemma 2.4.3 kullanılacak olursa

$$2B_{11}B_{22} \geq \frac{\delta}{\varphi} + \sum_{i\neq j=1}^{n}(B_{ij})^2$$

elde edilir.

Π, T_pM nin e_1 ve e_2 ortonormal vektörleri tarafında gerilen bir alt düzlemi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\tau(\Pi) &= \widetilde{\tau}(\Pi) + \varphi\sum_{i,j=1}^{2} B_{ii}B_{jj} - (B_{ij})^2 + \sum_{i,j=1}^{2} D_{ii}D_{jj} - (D_{ij})^2 \\
&\geq \widetilde{\tau}(\Pi) + \delta + \varphi\sum_{i\neq j=1}^{n}(B_{ij})^2 - \varphi\sum_{i\neq j=1}^{2}(B_{ij})^2 + \sum_{i,j=1}^{2} D_{ii}D_{jj} - (D_{ij})^2 \\
&\geq \widetilde{\tau}(\Pi) + \delta + \varphi\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij})^2 - \varphi\sum_{i=1}^{n}(B_{ii})^2 - \varphi\sum_{i\neq j=1}^{2}(B_{ij})^2 \\
&\quad + 2D_{11}D_{22} - \sum_{i\neq j}^{2}(D_{ij})^2 \\
&\geq \widetilde{\tau}(\Pi) + \delta - \varphi\sum_{i=3}^{n}(B_{ii})^2 + 2D_{11}D_{22} - \sum_{i\neq j}^{2}(D_{ij})^2 \\
&\geq \widetilde{\tau}(\Pi) + \tau_{S(TM)}(p) - \varphi\frac{n^2(n-2)}{n-1}\mu_1^2 - \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) - \sum_{i,j=3}^{n} D_{ii}D_{jj} \\
&\quad + \sum_{i,j=3}^{n}(D_{ij})^2 - \varphi\sum_{i=3}^{n}(B_{ii})^2
\end{aligned}$$

dir. Bu ise (3.3.19) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir.

(3.3.19) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ noktasında sağlanır gerek ve yeter koşul her $i, j \in \{3, \ldots, n\}$

$$B_{ij} = D_{ij} = 0 \text{ ve } B_{11} + B_{22} = B_{33} = 0 \tag{3.3.20}$$

dır. □

Yukarıdaki teoremin ispat yoluna benzer bir ispat yoluyla aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.3.6. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$-boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifold, $p \in M$ için T_pM nin 2-boyutlu non-dejenere bir düzlem kesiti $\Pi = Span\{e_1, e_2\}$ olsun. Bu durumda $D(\pi^{\perp})^2 = \sum_{i=3}^{n} (D_{ii})^2$ ve $n^2\mu_1^2(\Pi^{\perp}) = \sum_{i,j=3}^{n} B_{ii}B_{jj}$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) - \tau(\Pi) \quad &\leq \quad \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) - \widetilde{\tau}(\Pi) + \frac{n^2(n-2)}{n-1}\mu_2^2 \\ &+ \quad D(\pi^{\perp})^2 - \varphi n^2 \mu_1^2(\Pi^{\perp}) \end{aligned} \tag{3.3.21}$$

eşitsiliği vardır. (3.3.21) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $\mu_1 = B_{11} + B_{22}$ ve $\mu_2 = 0$ dır.

Sonuç 3.3.6. M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$-boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifold, $p \in M$ için T_pM nin 2-boyutlu non-dejenere bir düzlem kesiti $\Pi = Span\{e_1, e_2\}$ olsun. (3.3.19) ve (3.3.21) eşitsizliklerinin eşitlik durumu sağlanır gerek ve yeter koşul $\mu_1 = \mu_2 = 0$ dır.

Sonuç 3.3.7. M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$-boyutlu irrasyonel bir ekran homotetik half-lightlike altmanifold, $p \in M$ için T_pM nin 2-boyutlu non-dejenere bir düzlem kesiti $\Pi = Span\{e_1, e_2\}$ olsun. (3.3.19) ve (3.3.21) eşitsizliklerinin eşitlik durumu sağlanır gerek ve yeter koşul M minimaldir.

Ekran konformal half-lightlike altmanifoldların kesit eğriliği simetrik olduğundan bu altmanifoldların ekran skalar eğriliği $r_{S(TM)}$ ile aşağıdaki gibi tanımlanabilir.

$$r_{S(TM)}(p) = \sum_{1 \leq i < j \leq n} K_{ij} = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} = \frac{1}{2}\tau_{S(TM)}(p). \tag{3.3.22}$$

Önerme 3.3.1. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$-boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu olsun. M ikinci temel formları B nin* *bileşenleri arasında aşağıdaki bağıntı vardır.*

$$\begin{aligned}\sum_{i,j=1}^{n}(B_{ij})^2 &= \frac{1}{2}n^2\mu^2+\frac{1}{2}(B_{11}-B_{22}-\ldots-B_{nn})^2\\ &+ 2\sum_{j=2}^{n}(B_{1j})^2-2\sum_{2\leq i<j\leq n}B_{ii}B_{jj}-(B_{ij})^2.\end{aligned} \tag{3.3.23}$$

Yukarıdaki bilgiler yardımıyla aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 3.3.7. *M, $\widetilde{M}$ Lorentzian manifoldunun $\varphi>0$ olacak şekilde $(n+1)$-boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialar doğrudur:*

(a) *$X\in S^1(TM)=\{X\in S(TM):\ g(X,X)=1\}$ için*

$$\frac{1}{4}(\varphi n^2\mu_1^2+n^2\mu_2^2) \geq \frac{1}{\varphi}(Ric_{S(TM)}(X)-\widetilde{Ric}_{S(TM)}(X)) \tag{3.3.24}$$

eşitsizliği vardır.

(b) (3.3.33) *eşitsizliğinin eşitlik durumu bir $X\in S^1(TM)$ vektörü için sağlanır gerek ve yeter koşul X e ortogonal olan her $Y\in T_pM$ için*

$$B(X,Y)=D(X,Y)=0 \quad ve \quad B(X,X)=\frac{n}{2}\mu_1,\ \ D(X,X)=\frac{n}{2}\mu_2 \tag{3.3.25}$$

olur.

(c) (3.3.33) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $X\in S^1(TM)$ için sağlanır gerek ve yeter koşul ya $S(TM)$, M de total geodeziktir veya $n=2$ ve $S(TM)$, M de total umbiliktir.*

İspat. (3.3.22) ve (3.3.23) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}(\varphi n^2\mu_1^2+n^2\mu_2^2) &= r(p)-\widetilde{r}_{S(TM)}(p)+\frac{\varphi}{4}(B_{11}-\ldots-B_{nn})^2\\ &+ \varphi\sum_{j=2}^{n}(B_{1j})^2-\varphi\sum_{2\leq i<j\leq n}B_{ii}B_{jj}-(B_{ij})^2\\ &+ \frac{1}{4}(D_{11}-\ldots-D_{nn})^2+\sum_{j=2}^{n}(D_{1j})^2\\ &- \sum_{2\leq i<j\leq n}D_{ii}D_{jj}-(D_{ij})^2\end{aligned} \tag{3.3.26}$$

yazılabilir. Bununla birlikte

$$\varphi \sum_{2\leq i<j\leq n} B_{ii}B_{jj}-(B_{ij})^2+\sum_{2\leq i<j\leq n} D_{ii}D_{jj}-(D_{ij})^2=\sum_{2\leq i<j\leq n}(K_{ij}-\widetilde{K}_{ij}) \quad (3.3.27)$$

ve

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq i<j\leq n} K_{ij} &= r_{S(TM)}(p)-Ric_{S(TM)}(e_1),\\ \sum_{2\leq i<j\leq n} \widetilde{K}_{ij} &= \widetilde{r}_{S(TM)}(p)-\widetilde{Ric}_{S(TM)}(e_1)\end{aligned} \quad (3.3.28)$$

dır. (3.3.26), (3.3.27), (3.3.28) eşitliklerinden

$$\frac{1}{4}(\varphi n^2\mu_1^2+n^2\mu_2^2)\geq Ric_{S(TM)}(X)-\widetilde{Ric}_{S(TM)}(X) \quad (3.3.29)$$

dir. Son ifadede e_1 yerine $X\in S^1(TM)$ yazılacak olursa (3.3.33) eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin (a) şıkkı ispatlanmış olur.

(3.3.33) eşitsizliğinin eşitlik durumu bir $X\in S^1(TM)$ vektörü için sağlanır gerek ve yeter koşul

$$B_{12}=\cdots=B_{1n}=0 \ \ and \ \ B_{11}=B_{22}+\cdots+B_{nn}$$

dir. Böylece

$$n\mu_1=B_{11}+\cdots+B_{nn}=2B_{11} \quad (3.3.30)$$

olur. Benzer şekilde

$$n\mu_2=D_{11}+\cdots+D_{nn}=2D_{11} \quad (3.3.31)$$

dir. (3.3.30) ve (3.3.31) eşitliklerinden (3.3.34) eşitliği elde edilir. Böylece teoremin (b) şıkkı ispatlanmış olur.

(3.3.33) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $X\in S^1(TM)$ için sağlanır gerek ve yeter koşul

$$\begin{aligned}&B_{ij}=0, \qquad i\neq j,\\ &2B_{ii}=B_{11}+\cdots+B_{nn}, \quad i\in\{1,\ldots,n\}\end{aligned} \quad (3.3.32)$$

dir. (3.3.32) dan

$$2B_{11} = 2B_{22} = \cdots = 2B_{nn} = \sum_{i=1}^{n} B_{ii}$$

olup bu ise

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n} B_{ii} = 0$$

olduğunu gösterir. Ayrıca, benzer bir yolla

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n} D_{ii} = 0$$

olduğu görülebilir. Buradan ya $\sum_{i=1}^{n} B_{ii} = \sum_{i=1}^{n} D_{ii} = 0$ veya $n = 2$ dir. $\sum_{i=1}^{n} B_{ii} = \sum_{i=1}^{n} D_{ii} = 0$ ise (3.3.32) eşitliğinden her $i \in \{1,\ldots,n\}$ için $B_{ii} = D_{ii} = 0$ elde edilir. Bu ise (3.3.32) eşitliği tekrar göz önüne alınacak olursa her $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ için $B_{ij} = D_{ij} = 0$ olduğunu yani $S(TM)$ nin M de total geodezik olduğunu gösterir.

$n = 2$ ise (3.3.32) eşitliğinden

$$2B_{11} = 2B_{22} = B_{11} + B_{22}$$

ve

$$2D_{11} = 2D_{22} = D_{11} + D_{22}$$

olur. Bu ise $S(TM)$ nin M de total umbilik olduğunu gösterir. Böylece teoremin (c) şıkkı ispatlanmış olur. $\square$

Theorem 3.3.7 dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 3.3.8. *M, c eğrilikli $\widetilde{M}(c)$ Lorentzian uzay formunun $\varphi > 0$ olacak şekilde $(n+1)$-boyutlu bir ekran homotetik half-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialar doğrudur:*

(a) $X \in S^1(TM) = \{X \in S(TM) : \ g(X,X) = 1\}$ için

$$\frac{1}{4}(\varphi n^2 \mu_1^2 + n^2 \mu_2^2) \ \geq \ \frac{1}{\varphi}(Ric_{S(TM)}(X) - (n-1)c) \tag{3.3.33}$$

eşitsizliği vardır.

(b) (3.3.33) eşitsizliğinin eşitlik durumu bir $X \in S^1(TM)$ vektörü için sağlanır gerek ve yeter koşul X e ortogonal olan her $Y \in T_pM$ için

$$B(X,Y) = D(X,Y) = 0 \quad \text{ve} \quad B(X,X) = \frac{n}{2}\mu_1, \;\; D(X,X) = \frac{n}{2}\mu_2 \tag{3.3.34}$$

olur.

(c) (3.3.33) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $X \in S^1(TM)$ için sağlanır gerek ve yeter koşul ya $S(TM)$ ekran distribüsyonu M de total geodeziktir veya $n = 2$ ve $S(TM)$ ekran distribüsyonu M de total umbiliktir.

4. COİSOTROPİK LİGHTLİKE ALTMANİFOLDLAR ÜZERİNDE CHEN TİPİ EŞİTSİZLİKLER

4.1 Coisotropik Lightlike Altmanifoldlar

Tanım 4.1.1. $\widetilde{M}$, $(n+4)$-boyutlu, 2 indeksli bir semi-Riemannian manifold, $\widetilde{M}$ nin $(n+2)$ boyutlu bir altmanifoldu M olsun. M nin radikal uzayı $Rad\ TM$ nin rankı 2 e eşit ise M altmanifolduna $\widetilde{M}$ nin bir *coisotropik altmanifoldu* denir [35].

Tanım 4.1.2. M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. $\oplus_{orth}$ ortogonal direkt toplam olmak üzere $Rad\ TM$ nin

$$TM = Rad\ TM \oplus_{orth} S(TM) \tag{4.1.1}$$

olacak şekilde TM ye tamamlayanı olan uzay $S(TM)$ ye M nin *ekran distribusyonu* denir [35].

Tanım 4.1.3. M, 2-indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemannian manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda her $k,\ell \in \{1,2\}$ için

$$\widetilde{g}(\xi_k,\xi_\ell) = 0 \tag{4.1.2}$$

olacak şekilde $\xi_1,\xi_2 \in T_pM^\perp$ vardır. Her $X \in \Gamma(S(TM))$ ve $k \neq \ell \in \{1,2\}$ olmak üzere $Rad\ TM$ nin ξ_1 ve ξ_2 gibi null kesitleri için

$$\widetilde{g}(N_k,X) = \widetilde{g}(N_k,N_\ell) = 0, \quad \widetilde{g}(N_k,\xi_k) = 1 \tag{4.1.3}$$

olacak şekilde N_1 ve N_2 null kesitleri vardır. N_1 ve N_2 tarafından gerilen $ltr(TM)$ vektör demetine M nin $S(TM)$ ekran distribüsyonuna göre *lightlike transversal vektör demeti* denir [35]. Burada $ltr(TM)$ vektör demeti 2-boyutludur. Böylece

$$T\widetilde{M} = S(TM)\ \oplus_{orth}\ (Rad\ TM \oplus ltr(TM)) \tag{4.1.4}$$

olarak yazılabilir.

Tanım 4.1.4. M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. $\widetilde{\nabla}$ ve ∇, sırasıyla, $\widetilde{M}$ ve M üzerindeki Levi-Civita ve lineer koneksiyonlar, $\Gamma(TM)$ den $\Gamma(S(TM))$ ye bir projeksiyon P olsun. Her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için Gauss ve Weingarten formulleri

$$\widetilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sum_{k=1}^{2} D^k(X,Y)N_k, \tag{4.1.5}$$

$$\widetilde{\nabla}_X N_k = -A_{N_k}X + \sum_{\ell=1}^{2} \rho_{k\ell}(X)N_\ell, \tag{4.1.6}$$

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + \sum_{k=1}^{2} C^k(X,PY)\xi_k, \tag{4.1.7}$$

$$\nabla_X \xi_k = -A^*_{\xi_k}X - \sum_{\ell=1}^{2} \rho_{ij}(X)\xi_\ell \tag{4.1.8}$$

ile verilir [35].

Burada D^1 ve D^2 ye TM üzerinde *lightlike ikinci temel formlar* C^1 ve C^2 ye $S(TM)$ üzerinde *ekran ikinci temel formu*, A_{N_1} ve A_{N_2} ye TM üzerinde *şekil operatörleri*, $A^*_{\xi_1}$ ve $A^*_{\xi_2}$ ye ise $S(TM)$ üzerinde *ekran ikinci temel formları* denir [35].

Tanım 4.1.5. M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. M nin ikinci temel formu h ve ekran ikinci temel formu h^*, sırasıyla, her $X,Y \in TM$ için

$$h(X,Y) = \sum_{k=1}^{2} D^k(X,Y)N_k \;\text{ ve }\; h^*(X,Y) = \sum_{k=1}^{2} C^k(X,PY)\xi_k$$

ile tanımlanır [23].

Önerme 4.1.1. *M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda D^k, $S(TM)$ ekran distribüsyonunun seçiminden bağımsızdır ve her $X \in \Gamma(TM)$ ve her $k \neq \ell \in \{1,2\}$ için*

$$D^k(X,\xi_k) = 0 \;\; ve \;\; D^k(X,\xi_\ell) = -D^\ell(X,\xi_k) \tag{4.1.9}$$

dır [41].

Önerme 4.1.2. *M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. M nin şekil operatörleri ile ikinci temel formları arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:*

$k \in \{1,2\}$ için

$$
\begin{aligned}
D^k(X,Y) &= g(A^*_{\xi_k}X,Y), && (4.1.10)\\
C^k(X,PY) &= g(A_{N_k}X,PY) && (4.1.11)
\end{aligned}
$$

dır [41].

Örnek 4.1.1. R^5_2 de

$$x^3 = \cos x^1,\ \ x^4 = \sin x^1,\ \ x^5 = x^2, \tag{4.1.12}$$

ile tanımlı bir M yüzeyi verilsin. Bu durumda

$$
\begin{aligned}
&\xi_1 = \partial_2 + \partial_5,\ \ \xi_2 = \partial_1 - \sin x^1 \partial_3 + \cos x^1 \partial_4,\\
&U_1 = -\sin x^1 \partial_1 + \partial_3,\ \ U_2 = \cos x^1 \partial_1 + \partial_4
\end{aligned} \tag{4.1.13}
$$

ve

$$N_1 = \frac{1}{2}\{-\partial_2 + \partial_5\},\ \ N_2 = \frac{1}{2}\{-\partial_1 - \sin x^1 \partial_3 + \cos x^1 \partial_4\} \tag{4.1.14}$$

olup $S(TM) = Sp\{\xi_1, \xi_2, U_1, U_2\}$ ve $ltr(TM) = Sp\{N_1, N_2\}$ dir. Böylece $(M, g, S(TM))$, R^5_2 in coisotropik bir altmanifoldudur [23].

Tanım 4.1.6. M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Her $X \in \Gamma(TM)$ için $\widetilde{\nabla}_X \xi \in \Gamma(TM)$ ise M ye *irrasyonel coisotropik lightlike altmanifold* denir [36].

Tanım 4.1.7. M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Her $k, \ell \in \{1,2\}$ için

$$D^k(X, \xi_\ell) = 0 \tag{4.1.15}$$

ise M ye *total geodezik*,

$$C^k(X,Y) = 0, \ \forall X,Y \in \Gamma(S(TM)) \tag{4.1.16}$$

ise M ye $S(TM)$*-total geodezik*, H_1 ve H_2 $ltr(TM)$ üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyolar olmak üzere

$$D^k(X,Y) = H_k\, \widetilde{g}(X,Y) \tag{4.1.17}$$

ise M ye *total umbilik*, λ_k, $ltr(TM)$ üzerinde diferensiyellenebilir fonksiyolar olmak üzere

$$C^k(X,Y) = \lambda_k\, \widetilde{g}(X,Y) \tag{4.1.18}$$

ise M ye $S(TM)$-total umbiliktir denir [42].

$$\mu_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} D^1(e_j,e_j) \ \text{ ve } \ \mu_2 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} D^2(e_j,e_j)$$

olarak tanımlansın [23].

[24] de C. Bejan ve K. L. Duggal ın lightlike altmanifoldlar için yaptığı minimallik tanımı göz önüne alınarak aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 4.1.3. *M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1,\ldots,e_n\}$ bazı verilsin. M minimaldir gerek ve yeter koşul*

$$\mu_1 = \mu_2 = 0 \tag{4.1.19}$$

dir.

Tanım 4.1.8. M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. M nin şekil operatörleri A_{N_k} ve lokal şekil operatörü $A^*_{\xi_k}$ arasında $k \in \{1,2\}$ için

$$A_{N_k} = \varphi_k A^*_{\xi_k}, \tag{4.1.20}$$

olacak şekilde M nin bir U komşuluğu üzerinde sıfırdan farklı φ_k fonksiyonu varsa M ye *ekran lokal konformal coisotropik altmanifold* denir. Burada φ_k sıfırdan farklı bir sabit ise M ye *ekran homotetik coisotropik altmanifold* denir [43].

Önerme 4.1.4. *M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir ekran lokal konformal coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda her $X,Y \in \Gamma(TM)$ ve $k \in \{1,2\}$ için*

$$C^k(X,PY) = \varphi_k D^k(X,Y) \tag{4.1.21}$$

dir [43].

Önerme 4.1.5. *M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. $\widetilde{M}$ ve M nin Riemann eğrilik tensörleri, sırasıyla, $\widetilde{R}$ ve R olmak üzere her $X,Y,Z,U \in \Gamma(TM)$ için*

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + \sum_{k=1}^{2} D^k(X,Z)A_{N_k}Y - D^k(Y,Z)A_{N_k}X \\
&+ \sum_{k=1}^{2}\{\nabla_X D^k(Y,Z) - \nabla_Y D^k(X,Z)\}N_k \\
&+ \sum_{j=1}^{2}\sum_{k=1}^{2}\{\rho_{kj}(X)D^k(Y,Z) - \rho_{kj}(Y)D^k(X,Z)\}N_j, \qquad (4.1.22)\\
\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)PZ,PW) &= g(R(X,Y)PZ,PW) + \sum_{k=1}^{2}[D^k(X,PZ)C^k(Y,PW) \\
&- D^k(Y,PZ)C^k(X,PW)], \qquad (4.1.23)\\
\widetilde{g}(\widetilde{R}(X,Y)\xi_k,N_k) &= \widetilde{g}(R(X,Y)\xi_k,N_k) + \sum_{\ell=1}^{2}[\eta_k(A_{N_\ell}Y)D^\ell(X,\xi_k) \\
&-\eta_k(A_{N_\ell}X)D^\ell(Y,\xi_k)], \qquad (4.1.24)\\
\widetilde{g}(R(X,Y)\xi_k,N_k) &= C^k(Y,A^*_{\xi_k}X) - C^k(X,A^*_{\xi_k}Y) - 2dp_{kk}(X,Y) \\
&+\sum_{\ell=1}^{2}\rho_{\ell k}(Y)\rho_{k\ell}(X) - \rho_{\ell k}(X)\rho_{k\ell}(Y) \qquad (4.1.25)
\end{aligned}$$

dir. Bu denklemelere M üzerinde Gauss-Codazzi tipi denklemleri denir [42].

Önerme 4.1.6. *M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin Ricci tipi tensörü $R^{(0,2)}$ olmak üzere her $X,Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$R^{(0,2)}(X,Y) = \sum_{j=1}^{n} g(R(e_j,X)Y,e_j) + \sum_{k=1}^{2}\widetilde{g}(R(\xi_k,X)Y,N_k) \tag{4.1.26}$$

dir [42].

(4.1.26) de iz alınacak olursa

$$\tau(p) = \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} + \sum_{i=1}^{n} \sum_{k=1}^{2} K_{ik}^{null} + K_{iN}^{k} \tag{4.1.27}$$

olacak şekilde $\tau(p)$ skaları elde edilir. Eğer M nin Ricci tipi tensörü simetrik ise $\tau(p)$ ye M nin p noktasında skalar eğriliği denir [42]. Burada $i \in \{1,...,n\}$ ve $k \in \{1,2\}$ için $K_{iN}^{k} = \widetilde{g}(R(\xi_k, e_i)e_i, N_k)$ dir.

4.2 Coisotropik altmanifoldlar üzerinde ekran Ricci eğriliği ve ekran skalar eğriliği

Tanım 4.2.1. M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı $\{e_1,\ldots,e_n,\xi_1,\xi_2\}$ ve $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1,...,e_n\}$ olsun. $k \leq n$ için $\pi_{k,\xi_{1,2}} = sp\{e_1,...,e_{k-1},\xi_1,\xi_2\}$ $(k+1)$-boyutlu dejenere bir düzlem kesiti ve $\pi_k = sp\{e_1,...,e_k\}$ k-boyutlu non-dejenere bir düzlem kesiti olmak üzere, sırasıyla,

$$Ric_{\pi_{k,\xi_{1,2}}}(X) = R^{(0,2)}(X,X) = \sum_{j=1}^{k} g(R(e_j,X)X,e_j) + \sum_{k=1}^{2} \widetilde{g}(R(\xi_k,X)X,N_k) \tag{4.2.1}$$

ve

$$Ric_{\pi_k}(X) = R^{(0,2)}(X,X) = \sum_{j=1}^{k} g(R(e_j,X)X,e_j) \tag{4.2.2}$$

ile tanımlı $Ric_{\pi_{k,\xi_{1,2}}}(X)$ ve $Ric_{\pi_k}(X)$ e, sırasıyla, $X \in \Gamma(TM)$ birim vektörü üzerinde *k-dejenere Ricci tipi tensörü* ve *k-Ricci tipi tensörü* denir.

Eğer M nin kesit eğriliği simetrik ise $Ric_{\pi_{k,\xi_{1,2}}}(X)$ ve $Ric_{\pi_k}(X)$ e, sırasıyla, $X \in \Gamma(TM)$ birim vektörü üzerinde *k-dejenere Ricci eğriliği* ve *k-Ricci eğriliği* denir.

Ayrıca

$$\tau_{\pi_{k,\xi_{1,2}}}(p) = \sum_{i,j=1}^{k} K_{ij} + \sum_{k=1}^{2} \sum_{i=1}^{k} K_{ik}^{null} + K_{iN}^{k} \tag{4.2.3}$$

ve

$$\tau_{\pi_k}(p) = \sum_{i,j=1}^{k} K_{ij} \tag{4.2.4}$$

eğriliklerine *k-dejenere skalar eğriliği* ve *k-skalar eğriliği* denir.

$k = n$ için $\pi_n = sp\{e_1, ..., e_n\} = \Gamma(S(TM))$ olmak üzere

$$Ric_{S(TM)}(e_1) = Ric_{\pi_n}(e_1) = \sum_{j=1}^{n} K_{1j} = K_{12} + \ldots + K_{1n} \tag{4.2.5}$$

ve

$$\tau_{S(TM)}(p) = \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} \tag{4.2.6}$$

dir. $Ric_{S(TM)}(e_1)$ eğriliğine e_1 de *ekran Ricci eğriliği* ve $\tau_{S(TM)}(p)$ ye $p \in M$ de *ekran skalar eğriliği* denir.

Önerme 4.2.1. *M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı $\{e_1, \ldots, e_n, \xi_1, \xi_2\}$ ve $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1, ..., e_n\}$ olsun. Bu durumda*

$$\tau_{S(TM)}(p) = \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \sum_{k=1}^{2} \sum_{i,j=1}^{n} D^k_{ii} C^k_{jj} - D^k_{ij} C^k_{ji} \tag{4.2.7}$$

dir. Burada $i, j \in \{1, ..., n\}$ ve $k \in \{1, 2\}$ için $D^k_{ij} = D^k(e_i, e_j)$ ve $C^k_{ij} = C^k(e_i, e_j)$ dir.

Önerme 4.2.2. *M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu, $\Gamma(TM)$ nin bir bazı $\{e_1, \ldots, e_n, \xi_1, \xi_2\}$ ve $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1, ..., e_n\}$ olsun. M nin ikinci temel formları D^k ve ekran ikinci temel formları C^k nin bileşenleri arasında aşağıdaki bağıntılar vardır:*

$$\sum_{i,j=1}^{n} D^k_{ij} C^k_{ji} = \frac{1}{2}\{\sum_{i,j=1}^{n} (D^k_{ij} + C^k_{ji})^2 - \sum_{i,j=1}^{n} (D^k_{ij})^2 + (C^k_{ji})^2\} \tag{4.2.8}$$

ve

$$\sum_{i,j=1}^{n} D^k_{ii} C^k_{jj} = \frac{1}{2}\{(\sum_{i,j=1}^{n} D^k_{ii} + C^k_{jj})^2 - (\sum_{i=1}^{n} D^k_{ii})^2 - (\sum_{j=1}^{n} C^k_{jj})^2\} \tag{4.2.9}$$

Teorem 4.2.1. *M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda*

a)

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n\sum_{k=1}^{2}\mu_k(traceA_{N_k}) + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}^k - C_{ji}^k)^2 \qquad (4.2.10)$$

eşitsizliği vardır. (4.2.10) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul her $k \in \{1,2\}$ için ya M, $\varphi_k = -1$ olacak şekilde bir ekran homotetikdir veya D^k, $S(TM)$ de sıfıra eşittir.*

b)

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n\sum_{k=1}^{2}\mu_k(traceA_{N_k}) - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}^k + C_{ji}^k)^2 \qquad (4.2.11)$$

eşitsizliği sağlanır. (4.2.11) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul her $k \in \{1,2\}$ için ya M, $\varphi_k = -1$ olacak şekilde bir ekran homotetikdir yada D^k, $S(TM)$ de sıfıra eşittir.*

c) (4.2.10) *ve* (4.2.11) *eşitsizliklerinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul her $k \in \{1,2\}$ için D^k, $S(TM)$ de sıfıra eşittir.*

İspat. (4.2.7) ve (4.2.8) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &= \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j=1}^{n}D_{ii}^k C_{jj}^k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\{\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}^k + C_{ji}^k)^2\} \\ &+ \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}^k)^2 + (C_{ji}^k)^2\end{aligned}$$

yazılabilir. Burada

$$\frac{1}{2}(D_{ij}^k)^2 + \frac{1}{2}(C_{ji}^k)^2 = \frac{1}{4}(D_{ij}^k + C_{ji}^k)^2 + \frac{1}{4}(D_{ij}^k - C_{ji}^k)^2$$

olduğundan

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &= \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n\sum_{k=1}^{2}\mu_k(traceA_{N_k}) - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}^k + C_{ji}^k)^2 \\ &+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}^k - C_{ji}^k)^2\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise teoremin (a), (b) ve (c) şıklarının iddialarının doğruluğunu gösterir.

$\square$

Teorem 4.2.1 den aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.2.1. M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir irrasyonel coisotropik altmanifoldu olsun. (4.2.10) ve (4.2.11) eşitsizliklerinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M total geodeziktir.

Teorem 4.2.2. *M, m ek-boyutlu bir $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. M total geodezik ise M bir Einstein manifoldudur [41].*

Sonuç 4.2.1 ve Teorem 4.2.2 den aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.2.2. M, 2 indeksli ve c eğrilikli $\widetilde{M}(c)$ semi-Riemann uzay formunun $(n+2)$-boyutlu bir irrasyonel coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda

a)

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq n(n-1)c + n\sum_{k=1}^{2}\mu_k(traceA_{N_k}) + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}^k - C_{ji}^k)^2 \tag{4.2.12}$$

eşitsizliği sağlanır.

b)

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq n(n-1)c + n\sum_{k=1}^{2}\mu_k(traceA_{N_k}) - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}^k + C_{ji}^k)^2 \tag{4.2.13}$$

eşitsizliği sağlanır.

c) (4.2.10) ve (4.2.11) eşitsizliklerinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanıyorsa M bir Einstein manifoldudur.

Teorem 4.2.3. *M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda*

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}trace(\widetilde{A}_{N_k})^2 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}^k - C_{ji}^k)^2 \tag{4.2.14}$$

dır. Burada her $k \in \{1,2\}$ için

$$\widetilde{A}_{N_k} = \begin{pmatrix} D^k_{11} + C^k_{11} & \dots & D^1_{1n} + C^k_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ D^k_{n1} + C^k_{n1} & \dots & D^k_{nn} + C^k_{nn} \end{pmatrix} \tag{4.2.15}$$

dır.

(4.2.14) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M minimaldir.*

İspat. (4.2.7), (4.2.8) ve (4.2.9) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &= \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(\sum_{i,j=1}^{n} D^k_{ii} + C^k_{jj})^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(\sum_{i=1}^{n} D^k_{ii})^2 \\ &- \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(\sum_{j=1}^{n} C^k_{jj})^2 - \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j=1}^{n}(D^k_{ij} + C^k_{ji})^2 \\ &+ \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j=1}^{n}(D^k_{ij} - C^k_{ji})^2 \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

yazılabilir. Bu ise (4.2.14) eşitsizliğinin sağlandığını gösterir.

(4.2.14) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul

$$\mu_1 = \mu_2 = 0 \tag{4.2.17}$$

olur. Bu ise M nin minimal olduğunu gösterir. □

Lemma 2.2.1 kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.2.4. *M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &\le \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \frac{(2n-1)}{4n}\sum_{k=1}^{2}(trace\widetilde{A}_{N_k})^2 - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(traceA_{N_k})^2 \\ &- \frac{1}{2}n^2\sum_{k=1}^{2}\mu_k^2 + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j=1}^{n}(D^k_{ij} - C^k_{ji})^2 \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.2.18) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul her $k \in \{1,2\}$ için $n\mu_k = -trace(A_{N_k})$ dır.*

İspat. (4.2.16) ve Lemma 2.2.1 eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &\leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p)+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(\sum_{i,j=1}^{n}D_{ii}^{k}+C_{jj}^{k})^{2}-\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(\sum_{i=1}^{n}D_{ii}^{k})^{2}\\ &- \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{2}(\sum_{j=1}^{n}C_{jj}^{k})^{2}-\frac{1}{4n}\sum_{k=1}^{2}(\sum_{i=1}^{n}D_{ii}^{k}+C_{ii}^{k})^{2}\\ &- \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i\neq j=1}^{n}(D_{ij}^{k}+C_{ji}^{k})^{2}+\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}^{k}-C_{ji}^{k})^{2}\end{aligned}$$

yazılabilir. Bu ise (4.2.18) eşitsizliğinin sağladığını gösterir.

(4.2.18) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p\in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul her $k\in\{1,2\}$ ve her $i\neq j\in\{1,\ldots,n\}$ için

$$\begin{aligned}&D_{11}^{k}+C_{11}^{k}=\ldots=D_{nn}^{k}+C_{nn}^{k},\\ &D_{ij}^{k}=-C_{ij}^{k}\end{aligned}$$

dır. Buradan $n\mu_k=-trace(A_{N_k})$ dır. □

Teorem 4.2.4 den aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.2.3. M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu ekran homotetik bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}\tau_{S(TM)}(p) &\leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p)-\frac{n}{4}\sum_{k=1}^{2}(\varphi_k+1)^{2}\mu_k^{2}\\ &+ \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}(\varphi_k-1)^{2}\sum_{i,j=1}^{n}(D_{ij}^{k})^{2}\end{aligned}\qquad(4.2.19)$$

eşitsizliği sağlanır. (4.2.19) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p\in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul her bir $X\in\Gamma(S(TM))$ ve her $k\in\{1,2\}$ için $\mu_k=D^k(X,X)$ dır.

4.3 2-indeksli bir Semi-Riemann manifoldun coisotropik altmanifoldları üzerinde eğrilik invaryantları

Tanım 4.3.1. $n\geq 2$ ve $k\geq 0$ tamsayısı için $\mathcal{S}(n,k)$ ile $n_1<n$, $n_j\geq 2$, $j=1,\ldots,k$ ve $n_1+\cdots+n_k\leq n$ koşulunu sağlayan bütün $(n_1,\ldots,n_k)$ k-nokta çiftlerinden oluşan sonlu

bir kümeyi ve $\mathcal{S}(n)$ ile de $k \geq 0$ olmak üzere bütün $\mathcal{S}(n,k)$ ların bileşimini gösterelim. $\pi_1,\ldots,\pi_{n_k}$, $boy\pi_{n_j} = n_j$, $(j = 1,\ldots,k)$ $\forall(n_1,\ldots,n_k) \in S(n,k)$ k-lısı için T_pM nin alt uzayları olmak üzere

$$S(n_1,\ldots,n_k)(p) = \inf\{\tau(\Pi_{n_1}) + \cdots + \tau(\Pi_{n_k})\},$$

$$\hat{S}(n_1,\ldots,n_k)(p) = \sup\{\tau(\Pi_{n_1}) + \cdots + \tau(\Pi_{n_k})\}$$

şeklinde tanımlansın. Eğrilik invaryantları

$$\delta(n_1,\ldots,n_k)(p) = \tau(p) - S(n_1,\ldots,n_k)(p),$$

$$\hat{\delta}(n_1,\ldots,n_k)(p) = \tau(p) - \hat{S}(n_1,\ldots,n_k)(p)$$

ile tanımalanır.

M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. $S(n_1,\ldots,n_k) = \hat{S}(n_1,\ldots,n_k)$ ise $(M,g,S(TM))$ coisotropik lightlike atmanifolduna $S(TM)$ ye göre $S(n_1,\ldots,n_k)$ *uzayı* denir.

Teorem 4.3.1. *M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. M bir $S(n)$ uzayı ise M nin skalar eğriliği sabittir. Bununla birlikte,*

i) *$n = 3$ ise M nin ekran skalar eğriliği sıfıra eşittir.*

ii) *$n = 2$ ise M nin skalar eğriliği sıfıra eşittir.*

İspat. $\Gamma(TM)$ nin bir bazı $\{e_1,\ldots,e_n,\xi_1,\xi_2\}$ ve $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1,...,e_n\}$ olsun. T_pM nin n-boyutlu düzlem kesitleri

$$\begin{aligned}
\pi^1_{n-1}(\xi_1) &= sp\{e_2,...,e_n,\xi_1\}, \;\; \pi^1_{n-1}(\xi_2) = sp\{e_2,...,e_n,\xi_2\}, \\
&\vdots \\
\pi^n_{n-1}(\xi_1) &= sp\{e_1,...,e_{n-1},\xi_1\}, \;\; \pi^n_{n-1}(\xi_2) = sp\{e_1,...,e_{n-1},\xi_2\}, \\
\pi_n &= sp\{e_1,...,e_n\}
\end{aligned}$$

ile verilsin. (4.2.3) ve (4.2.4) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}
\tau_{\pi^1_{n-1}(\xi_k)}(p) &= \sum_{i,j=2}^{n} K_{ij} + \sum_{i=2}^{n} K^{null}_{i\xi_k} + K^{N}_{i\xi_k}, \\
&\vdots \\
\tau_{\pi^n_{n-1}(\xi_k)}(p) &= \sum_{i,j=1}^{n-1} K_{ij} + \sum_{i=1}^{n-1} K^{null}_{i\xi_k} + K^{N}_{i\xi_k}, \\
\tau_{\pi_n}(p) &= \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} = \tau_{S(TM)}(p)
\end{aligned}$$

yazılabilir. M bir $S(n)$ uzayı ise yukarıdaki eşitliklerden $i \in \{1,\ldots,n\}$ için

$$K^{null}_{i\xi_1} + K^{N}_{i\xi_1} = K^{null}_{i\xi_2} + K^{N}_{i\xi_2} \tag{4.3.1}$$

elde edilir.

Şimdi, T_pM nin n-boyutlu alt düzlem kesitleri $\pi^{i,j}_{n-1}(\xi_1,\xi_2) = sp\{e_1,\ldots,\widetilde{e}_i,\ldots,\widetilde{e}_j,\ldots,e_n,\xi_1,\xi_2\}$ olarak verilsin. Bu halde direkt bir hesaplama ile

$$\frac{(n-3)(n-2)}{2}\sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} + \frac{(n-2)(n-1)}{2}\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n} K^{null}_{i\xi_k} + K^{N}_{i\xi_k} = \frac{n(n-1)}{2}c$$

dir. Böylece

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n} K^{null}_{i\xi_k} + K^{N}_{i\xi_k} = \frac{(4n-6)}{(n-2)(n-1)}c \tag{4.3.2}$$

olur. Bu ise M nin skalar eğriliğinin sabit olduğunu gösterir.

$n=3$ ve T_pM nin bir bazı $\{e_1,e_2,e_3,\xi_1,\xi_2\}$ verilsin. M bir $S(3)$ uzayı ise $k \in \{1,2\}$ ve birbirinden farklı $i,j,\ell \in \{1,2,3\}$ için

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{3} K^{null}_{i\xi_k} + K^{N}_{i\xi_k} = 3c \tag{4.3.3}$$

ve

$$\tau_{\Pi^{\ell}(\xi_k)}(p) = K_{ij} + K_{ji} + \sum_{i=1}^{2} K^{null}_{i\xi k} + K^{N}_{i\xi_k} = c \tag{4.3.4}$$

olur. (4.3.3) ve (4.3.4) eşitlikler kullanılacak olursa

$$K_{ij} + K_{ji} = 0 \tag{4.3.5}$$

olduğu görülür. Bu ise $\tau_{S(TM)}(p) = 0$ olduğunu gösterir.

$n = 3$ ve T_pM nin bir bazı $\{e_1, e_2, \xi_1, \xi_2\}$ verilsin. M bir $S(2)$ uzayı ise bu durumda

$$\begin{aligned}
\tau_{\Pi}(p) &= K_{12} + K_{21} = c,\\
\tau_{\Pi^1(\xi_k)}(p) &= K^{null}_{2\xi_k} + K^{N}_{2\xi_k} = c,\\
\tau_{\Pi^2(\xi_k)}(p) &= K^{null}_{1\xi_k} + K^{N}_{1\xi_k} = c,\\
\tau_{\Pi(\xi_1,\xi_2)}(p) &= 0
\end{aligned}$$

olur. Burada $c = 0$ olduğundan M nin skalar eğriliği sıfırdır. □

Sonuç 4.3.1. M, 2 indeksli, semi-Öklidyen uzayın 5-boyutlu ekran homotetik bir coisotropik altmanifoldu olsun. Eğer M bir $S(3)$ uzayı ise aşağıdaki eşitsizlik vardır:

$$\sum_{k=1}^{2} \varphi_k n^2 \mu_k^2 \geq 0. \tag{4.3.6}$$

(4.3.6) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $S(TM)$, M de total geodeziktir.

İspat. (4.1.23) ve (4.3.5) den

$$\sum_{k=1}^{2} \varphi_k \sum_{i,j=1}^{3} D^k_{ii} D^k_{jj} - (D^k_{ij})^2 = 0 \tag{4.3.7}$$

elde edilir. Bu ise (4.3.6) eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir.

(4.3.6) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul her $i, j \in \{1,2,3\}$ ve her $k \in \{1,2\}$ için $D^k_{ij} = 0$ olmasıdır. Böylece $S(TM)$, M de total geodeziktir. □

Teorem 4.3.2. *M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu bir coisotropik altmanifoldu olsun. M bir $S(n+1)$ uzayı ise M ekran skalar eğriliği sıfır olan* 4*-boyutlu bir coisotropik altmanifoldtur.*

İspat. $\Gamma(TM)$ nin bir bazı $\{e_1, \ldots, e_n, \xi_1, \xi_2\}$ ve $\Gamma(S(TM))$ nin ortonormal bir bazı $\{e_1, ..., e_n\}$ olsun. T_pM nin $(n+1)$ boyutlu düzlem kesitleri

$$\begin{aligned}
\pi_n(\xi_1) &= sp\{e_1, \ldots, e_n, \xi_1\}, \quad \pi_n(\xi_2) = sp\{e_1, \ldots, e_n, \xi_2\},\\
\pi_n^1(\xi_1, \xi_2) &= sp\{e_2, \ldots, e_n, \xi_1, \xi_2\}, \ldots, \pi_n^n(\xi_1, \xi_2) = sp\{e_1, \ldots, e_{n-1}, \xi_1, \xi_2\}
\end{aligned}$$

ile verilsin. M bir $S(n+1)$ uzayı ise

$$\begin{aligned}
\tau_{\pi_n(\xi_k)}(p) &= \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} + \sum_{i=1}^{n} K_{i\xi_k}^{null} + K_{i\xi_k}^{N} = c, \\
\tau_{\pi_n^1(\xi_1,\xi_2)}(p) &= \sum_{i,j=2}^{n} K_{ij} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=2}^{n} K_{i\xi_k}^{null} + K_{i\xi_k}^{N} = c, \\
&\vdots \\
\tau_{\pi_n^1(\xi_1,\xi_2)}(p) &= \sum_{i,j=1}^{n-1} K_{ij} + \sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n-1} K_{i\xi_k}^{null} + K_{i\xi_k}^{N} = c
\end{aligned}$$

dir. Yukaridaki denklemlerden aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\sum_{i=1}^{n} K_{i\xi_1}^{null} + K_{i\xi_1}^{N} = \sum_{i=1}^{n} K_{i\xi_2}^{null} + K_{i\xi_2}^{N}, \tag{4.3.8}$$

$$\tau(p) + \tau_{S(TM)}(p) = 2c \tag{4.3.9}$$

ve

$$(n-2)\tau_{S(TM)}(p) + (n-1)\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n} K_{i\xi_k}^{null} + K_{i\xi_k}^{N} = nc. \tag{4.3.10}$$

Bu halde

$$\tau(p) = \frac{n+2}{n}c, \quad \tau_{S(TM)}(p) = \frac{(2-n)}{n}c \tag{4.3.11}$$

ve

$$\sum_{k=1}^{2}\sum_{i=1}^{n} K_{i\xi_k}^{null} + K_{i\xi_k}^{N} = \frac{4}{n}c \tag{4.3.12}$$

olur. Bununla beraber

$$\begin{aligned}
\tau(p) - \tau_{\pi_n^1(\xi_1,\xi_2)}(p) &= \sum_{k=1}^{2} K_{1\xi_k}^{null} + K_{1\xi_k}^{N}, \\
&\vdots \\
\tau(p) - \tau_{\pi_n^n(\xi_1,\xi_2)}(p) &= \sum_{k=1}^{2} K_{n\xi_k}^{null} + K_{n\xi_k}^{N}
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\sum_{i=1}^{n} K_{i\xi_1}^{null} + K_{i\xi_1}^{N} + \sum_{i=1}^{n} K_{i\xi_2}^{null} + K_{i\xi_2}^{N} = 2c \tag{4.3.13}$$

olur. (4.3.11), (4.3.12) ve (4.3.13) eşitliklerinden $n=2$ ve $\tau_{S(TM)}(p)=0$ olduğu görülür.

□

4.4 Ekran homotetik coisotropik altmanifoldlar üzerinde Chen-tipi eşitsizlikler

M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu ekran homotetik bir coisotropik altmanifoldu olsun. (4.1.21) den (4.2.7) eşitliği

$$\tau_{S(TM)}(p) = \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \sum_{k=1}^{2} \varphi_k \sum_{i,j=1}^{n} D^k_{ii} D^k_{jj} - (D^k_{ij})^2 \tag{4.4.1}$$

olur.

(4.4.1) eşitliğinden aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.4.1. *M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu ekran homotetik bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durunda*

***a)** Her $k = \{1,2\}$ için $\varphi_k > 0$ ise*

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n^2 \sum_{k=1}^{2} \varphi_k \mu_k^2 \tag{4.4.2}$$

eşitsizliği vardır. (4.4.2) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $S(TM)$, M de total geodeziktir.

***b)** Her $k = \{1,2\}$ için $\varphi_k < 0$ ise*

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n^2 \sum_{k=1}^{2} \varphi_k \mu_k^2 \tag{4.4.3}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.4.3) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $S(TM)$, M de total geodeziktir.

***c)** $\varphi_1 > 0$ ve $\varphi_2 < 0$ ise*

i)

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n^2 \sum_{k=1}^{2} \varphi_k \mu_k^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_2 (D^2_{ij})^2 \tag{4.4.4}$$

eşitsizliği vardır. (4.4.4) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul D^1, $S(TM)$ de sıfıra eşittir.

ii)

$$\tau_{S(TM)}(p) \geq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \sum_{k=1}^{2} \varphi_k n^2 \mu_k^2 - \sum_{i,j=1}^{n} \varphi_1 (D^1_{ij})^2 \tag{4.4.5}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.4.5) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul D^2, $S(TM)$ de sıfıra eşittir.*

Lemma 2.2.1 kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.4.2. *M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu ekran homotetik bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda*
a) *Her $k = \{1,2\}$ için $\varphi_k > 0$ ise*

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n(n-1)\sum_{k=1}^{2} \varphi_k \mu_k^2 \tag{4.4.6}$$

eşitsizliği vardır. (4.4.6) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul M total umbiliktir.*
b) *Her $k = \{1,2\}$ için $\varphi_k < 0$ ise*

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n(n-1)\sum_{k=1}^{2} \varphi_k \mu_k^2 - \sum_{k=1}^{2} \varphi_k \sum_{i \neq j=1}^{n} (D_{ij}^k)^2 \tag{4.4.7}$$

eşitsizliği vardır. (4.4.7) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul her bir birim $X \in \Gamma(S(TM))$ ve her $k = \{1,2\}$ için $\mu_k = D^k(X,X)$ dır.*
c) $\varphi_1 > 0$ *ve* $\varphi_2 < 0$ *ise*

$$\tau_{S(TM)}(p) \leq \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n(n-1)\sum_{k=1}^{2} \varphi_k \mu_k^2 - \varphi_2 \sum_{i \neq j=1}^{n} (D_{ij}^2)^2 \tag{4.4.8}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.4.8) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul her $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için*

$$D^1(X,Y) = \lambda_1 g(X,Y) \tag{4.4.9}$$

dir.

İspat. (4.4.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \tau_{S(TM)}(p) &= \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + n^2 \sum_{k=1}^{2} \varphi_k \mu_k^2 - \sum_{k=1}^{2} \varphi_k \sum_{i \neq j=1}^{n} (D_{ij}^k)^2 \\ &\quad - \sum_{k=1}^{2} \varphi_k \sum_{i=1}^{n} (D_{ii}^k)^2 \end{aligned} \tag{4.4.10}$$

yazılabilir. Her $k = \{1,2\}$ için $\varphi_k > 0$ ise $(4.4.10)$ de Lemma 2.2.1 kullanılacak olursa $(4.4.8)$ eşitsizliği elde elde edilir.

$(4.4.6)$ eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $i \neq j \in \{1,\ldots,n\}$ için

$$D_{11}^k = \cdots = D_{nn}^k, \quad D_{ij} = 0$$

olur. Bu ise M nin total umbilik olduğunu gösterir. O halde teoremin (a) şıkkı ispatlanır.

Benzer şekilde teoremin (b) ve (c) şıklarının ispatı yapılabilir. □

Teorem 4.4.3. *M, 2 indeksli, c eğrilikli $\widetilde{M}(c)$ semi-Riemann uzay formunun hemen hemen total umbilik coisotropik altmanifoldu olsun. $S(TM)$ total geodezik ise bu durumda $c = 0$ dır [42].*

Teorem 4.4.1, Teorem 4.4.2 ve Teorem 4.4.3 kullanılarak aşağıdaki sonuç verilebilir:

Sonuç 4.4.1. M, 2 indeksli, c eğrilikli $\widetilde{M}(c)$ semi-Riemann uzay formunun $(n+2)$-boyutlu ekran homotetik bir coisotropik altmanifoldu olsun. $(4.4.2)$ ve $(4.4.6)$ eşitsizliklerinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanıyorsa $c = 0$ dır.

Lemma 2.4.3 kullanılarak aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.4.4. *M, 2 indeksli $\widetilde{M}$ semi-Riemann manifoldunun $(n+2)$-boyutlu $\varphi_k > 0$ olacak şekilde ekran homotetik bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda her $k \in \{1,2\}$ için $D^k(\pi^\perp)^2 = \sum_{i=3}^{n} (D_{ii}^k)^2$ olmak üzere*

$$\begin{aligned} 2\tau_{S(TM)}(p) - \tau(\Pi) \quad &\leq \quad 2\widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) - \widetilde{\tau}(\Pi) + \left(\frac{n^2(n-2)}{n-1} + 1\right) \sum_{k=1}^{2} \varphi_k \mu_k^2 \\ &+ \quad \sum_{k=1}^{2} \varphi_k D^k(\pi^\perp)^2 - \sum_{k=1}^{2} \varphi_k \sum_{i,j=1}^{n} (D_{ij}^k)^2 \end{aligned} \tag{4.4.11}$$

eşitsizliği vardır. $(4.4.11)$ *eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p \in M$ için sağlanır gerek ve* *yeter koşul M minimaldir ve M nin lokal şekil operatörü $A^*_{\xi_k}$ aşağıdaki formda olur:*

$$A^*_{\xi_k} = \begin{pmatrix} D^k_{11} & D^k_{12} & \dots & 0 \\ D^k_{21} & -D^k_{11} & \dots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}. \tag{4.4.12}$$

İspat. (4.4.1) eşitliğinde

$$\begin{aligned} \delta_1 &= \tau_{S(TM)}(p) - \varphi_1 \frac{n^2(n-2)}{n-1}\mu_1^2 - \varphi_2 n^2 \mu_2^2 \\ &- \widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi_2 \sum_{i,j=1}^{n} (D^2_{ij})^2 \end{aligned}$$

yazılırsa

$$\delta_1 = \varphi_1 \left(\frac{n^2}{n-1}\mu_1^2 - \sum_{i,j=1}^{n} (D^1_{ij})^2 \right)$$

elde edilir. Böylece

$$(\sum_{i=1}^{n} D^1_{ii})^2 = (n-1)\left(\frac{\delta_1}{\varphi_1} + \sum_{i=1}^{n} (D^1_{ii})^2 + \sum_{i\neq j=1}^{n} (D^1_{ij})^2 \right)$$

dir. Yukarıdaki eşitlikte Lemma 2.4.3 kullanılacak olursa

$$2D^1_{11}D^1_{22} \geq \frac{\delta_1}{\varphi_1} + \sum_{i\neq j=1}^{n} (D^1_{ij})^2$$

elde edilir. Benzer şekilde (4.4.1) eşitliğinde

$$\begin{aligned} \delta_2 &= \tau_{S(TM)}(p) - \varphi_2 \frac{n^2(n-2)}{n-1}\mu_2^2 - \varphi_1 n^2 \mu_1^2 \\ &-\widetilde{\tau}_{S(TM)}(p) + \varphi_1 \sum_{i,j=1}^{n} (D^1_{ij})^2 \end{aligned}$$

yazılırsa

$$2D^2_{11}D^2_{22} \geq \frac{\delta_2}{\varphi_2} + \sum_{i\neq j=1}^{n} (D^2_{ij})^2$$

elde edilir. Π, T_pM nin e_1 ve e_2 ortonormal vektörleri tarafında gerilen bir alt düzlemi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
\tau(\Pi) &= \widetilde{\tau}(\Pi)+\sum_{k=1}^{2}\varphi_k\sum_{i,j=1}^{2}D^k_{ii}D^k_{jj}-(D^k_{ij})^2\\
&\geq \widetilde{\tau}(\Pi)+\delta_1+\delta_2+\sum_{k=1}^{2}\varphi_k\sum_{i\neq j=1}^{n}(D^k_{ij})^2-\sum_{k=1}^{2}\varphi_k\sum_{i\neq j=1}^{2}(D^k_{ij})^2\\
&\geq \widetilde{\tau}(\Pi)+\delta_1+\delta_2+\sum_{k=1}^{2}\varphi_k\sum_{i,j=1}^{n}(D^k_{ij})^2-\sum_{k=1}^{2}\varphi_k\sum_{i=1}^{n}(D^k_{ii})^2\\
&\quad -\sum_{k=1}^{2}\varphi_k\sum_{i\neq j=1}^{2}(D^k_{ij})^2\\
&\geq \widetilde{\tau}(\Pi)+\delta_1+\delta_2-\sum_{k=1}^{2}\varphi_k\sum_{i=3}^{n}(D^k_{ii})^2
\end{aligned}$$

dir. Bu ise $(4.4.11)$ eşitsizliğinin doğruluğunu gösterir.

$(4.4.11)$ eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p\in M$ noktasında sağlanır gerek ve yeter koşul her $k\in\{1,2\}$ ve her $i,j\in\{3,\ldots,n\}$ için

$$\begin{aligned}
&D^k_{ij}=0,\\
&D^k_{11}+D^k_{22}=D^k_{33}=0
\end{aligned}\tag{4.4.13}$$

dır. Bu ise M nin minimal olduğunu ve ve M nin lokal şekil operatörü $A^*_{\xi_k}$ $(4.4.12)$ ye eşit olduğunu gösterir. $\square$

Teorem 4.4.4 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 4.4.2. M, 2 indeksli bir semi-Öklidyen uzayının $(n+2)$-boyutlu $\varphi_k>0$ olacak şekilde ekran homotetik bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda her $k\in\{1,2\}$ için $D^k(\pi^\perp)^2=\sum_{i=3}^{n}(D^k_{ii})^2$ olmak üzere

$$\tau_{S(TM)}(p)-\tau(\Pi)-\sum_{k=1}^{2}\varphi_k D^k(\pi^\perp)^2\leq\left(\frac{n^2(n-2)}{n-1}+1\right)\sum_{k=1}^{2}\varphi_k\mu_k^2\tag{4.4.14}$$

eşitsizliği vardır. $(4.4.14)$ eşitsizliğinin eşitlik durumu her $p\in M$ için sağlanır gerek ve yeter koşul $S(TM)$ total geodeziktir.

Sonuç 4.4.3. M, 2 indeksli bir semi-Öklidyen uzayının $(n+2)$-boyutlu $\varphi_k > 0$ olacak şekilde ekran homotetik bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda her $k \in \{1,2\}$ için $D^k(\pi^{\perp})^2 = \sum_{i=3}^{n}(D^k_{ii})^2$ olmak üzere

$$\tau_{S(TM)}(p) - \tau(\Pi) - \varphi \sum_{k=1}^{2} D^k(\pi^{\perp})^2 < \left(\frac{n^2(n-2)}{n-1} + 1\right) \sum_{k=1}^{2} \varphi_k \mu_k^2 \tag{4.4.15}$$

eşitsizliği varsa M minimal olan bir immersiona katılmaz.

Ekran konformal coisotrpik altmanifoldların kesit eğriliği simetrik olduğundan bu altmanifoldların ekran skalar eğriliği $r_{S(TM)}$ ile aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$r_{S(TM)}(p) = \sum_{1 \le i < j \le n} K_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} K_{ij} = \frac{1}{2}\tau_{S(TM)}(p). \tag{4.4.16}$$

Önerme 4.4.1. *M, 2 indeksli bir semi-Öklidyen uzayının $(n+2)$-boyutlu $\varphi_k > 0$ olacak şekilde ekran homotetik bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda her $k \in \{1,2\}$ için M nin ikinci temel formaları arasında aşağıdaki bağıntı vardır:*

$$\begin{aligned} \sum_{i,j=1}^{n} (B_{ij})^2 &= \frac{1}{2} n^2 \mu^2 + \frac{1}{2}(B_{11} - B_{22} - \ldots - B_{nn})^2 \\ &+ 2\sum_{j=2}^{n} (B_{1j})^2 - 2 \sum_{2 \le i < j \le n} B_{ii}B_{jj} - (B_{ij})^2. \end{aligned} \tag{4.4.17}$$

Yukarıdaki bilgiler yardımıyla aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 4.4.5. *M, 2 indeksli bir semi-Öklidyen uzayının $(n+2)$-boyutlu $\varphi_k > 0$ olacak şekilde ekran homotetik bir coisotropik altmanifoldu olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialar doğrudur:*

(a) $X \in S^1(TM) = \{X \in S(TM) : g(X,X) = 1\}$ *için*

$$\frac{1}{4} \sum_{k=1}^{2} \varphi_k n^2 \mu_k^2 \geq \frac{1}{\varphi}(Ric_{S(TM)}(X) - \widetilde{Ric}_{S(TM)}(X)) \tag{4.4.18}$$

eşitsizliği vardır.

(b) (4.4.18) *eşitsizliğinin eşitlik durumu bir $X \in S^1(TM)$ vektörü için sağlanır gerek ve yeter koşul X e ortogonal olan her $Y \in T_pM$ ve her $k \in \{1,2\}$ için*

$$D^k(X,Y) = 0, \ \ ve \ \ D^k(X,X) = \frac{n}{2}\mu_k \tag{4.4.19}$$

olur.

(c) (4.4.18) *eşitsizliğinin eşitlik durumu her* $X \in S^1(TM)$ *için sağlanır gerek ve yeter koşul ya* $S(TM)$, *M de total geodeziktir veya* $n = 2$ *ve, M total umbiliktir.*

İspat. (4.4.16) ve (4.4.17) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\varphi_k n^2\mu_k^2 &= r(p) - \widetilde{r}_{S(TM)}(p) + \frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\varphi_k(D_{11}^k - \ldots - D_{nn}^k)^2 \\ &\quad + \sum_{k=1}^{2}\varphi_k\sum_{j=2}^{n}(D_{1j}^k)^2 - \sum_{k=1}^{2}\varphi_k\sum_{2\leq i<j\leq n} D_{ii}^k D_{jj}^k - (D_{ij}^k)^2 \quad (4.4.20)\end{aligned}$$

yazılabilir. Bununla birlikte

$$\sum_{k=1}^{2}\varphi_k\sum_{2\leq i<j\leq n} D_{ii}^k D_{jj}^k - (D_{ij}^k)^2 = \sum_{2\leq i<j\leq n}(K_{ij} - \widetilde{K}_{ij}) \quad (4.4.21)$$

ve

$$\begin{aligned}\sum_{2\leq i<j\leq n} K_{ij} &= r_{S(TM)}(p) - Ric_{S(TM)}(e_1), \\ \sum_{2\leq i<j\leq n} \widetilde{K}_{ij} &= \widetilde{r}_{S(TM)}(p) - \widetilde{Ric}_{S(TM)}(e_1) \quad (4.4.22)\end{aligned}$$

dır. (4.4.20), (4.4.21) and (4.4.22) eşitliklerinden

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{2}\varphi_k n^2\mu_k^2 \geq Ric_{S(TM)}(e_1) - \widetilde{Ric}_{S(TM)}(e_1) \quad (4.4.23)$$

dir. Son ifadede e_1 yerine $X \in S^1(TM)$ yazılacak olursa (4.4.18) eşitsizliği elde edilir. Böylece teoremin (a) şıkkı ispatlanmış olur.

(4.4.18) eşitsizliğinin eşitlik durumu bir $X \in S^1(TM)$ vektörü için sağlanır gerek ve yeter koşul her $k \in \{1,2\}$ için

$$D_{12}^k = \cdots = D_{1n}^k = 0 \ \ and \ \ D_{11}^k = D_{22}^k + \cdots + D_{nn}^k \quad (4.4.24)$$

dir. Böylece

$$n\mu_1 = D_{11}^1 + \cdots + D_{nn}^1 = 2D_{11}^1 \quad (4.4.25)$$

olur. Benzer şekilde

$$n\mu_2 = D_{11}^2 + \cdots + D_{nn}^2 = 2D_{11}^2 \tag{4.4.26}$$

dir. (4.4.25) ve (4.4.26) eşitliklerinden (4.4.19) elde edilir. Böylece teoremin (b) şıkkı ispatlanmış olur.

(4.4.18) eşitsizliğinin eşitlik durumu her $X \in S^1(TM)$ için sağlanır gerek ve yeter koşul her $k \in \{1,2\}$ için

$$\begin{aligned} &D_{ij}^k = 0, \qquad i \neq j, \\ &2D_{ii}^k = D_{11}^k + \cdots + D_{nn}^k, \quad i \in \{1,\ldots,n\} \text{ and } k \in \{1,2\} \end{aligned} \tag{4.4.27}$$

dir. (4.4.27) dan

$$2D_{11}^k = 2D_{22}^k = \cdots = 2D_{nn}^k = \sum_{i=1}^{n} D_{ii}^k$$

olup bu ise

$$(n-2)\sum_{i=1}^{n} D_{ii}^k = 0$$

olduğunu gösterir. Buradan ya $\sum_{i=1}^{n} D_{ii}^1 = \sum_{i=1}^{n} D_{ii}^2 = 0$ veya $n = 2$ dir. $\sum_{i=1}^{n} D_{ii}^1 = \sum_{i=1}^{n} D_{ii}^2 = 0$ ise (4.4.27) eşitliğinden her $i \in \{1,\ldots,n\}$ ve her $k \in \{1,2\}$ için $D_{ii}^k = 0$ olur. Bu ise (4.4.27) eşitliği tekrar göz önüne alınacak olursa her $i, j \in \{1,\ldots,n\}$ ve her $k \in \{1,2\}$ için $D_{ij}^k = 0$ olduğunu yani $S(TM)$ nin M de total geodezik olduğunu gösterir.

$n = 2$ ise (4.4.27) eşitliğinden

$$2D_{11}^k = 2D_{22}^k = D_{11}^k + D_{22}^k$$

olur. Bu ise M nin total umbilik olduğunu gösterir. Böylece teoremin (c) şıkkı ispatlanmış olur. □

KAYNAKLAR

[1] Schläfli L., *"Nota alla Memoria del signor Beltrami "Sugli spazi di curvatura costante," Ann. Mat. Pura. Appl. Ser. 2, 5, 178-193, 1873.*

[2] Janet M., " Sur la possibilit'e de plonger un espace Riemannian donn'e dans un espace Euclidien," Ann. Soc. Pol. Math., 5, 38-43, 1926.

[3] Cartan E., " Sur la possibilit'e de plonger un espace Riemannian donn'e dans un espace Euclidien," Ann. Soc. Pol. Math. 6, 1-7, 1927.

[4] Nash J. F., " The imbedding problem for Riemannian manifolds," Annals of Mathematics 63 (1), 20-63, 1956.

[5] Friedman A., " Isometric embedding of Riemannian manifolds into Euclidean spaces," Rev. Modern Phys. 37, 201-203, 1965.

[6] Cartan E., Leçons sur la Géométrie des Espaces de Riemann, (2nd edition) Gauthier-Villars, Paris, 1951.

[7] Chen B.-Y., "Some pinching and classification theorems for minimal submanifolds," Arch. Math. (Basel), 60(6), 568-578, 1993.

[8] Chen B. Y., Mean curvature and shape operator of isometric immersions in real space forms, Glasgow Math. J., 38, 87-97, 1996.

[9] Chen B. Y., Relations between Ricci curvature and shape operator for submanifolds with arbitrary codimension, Glasgow Math. J., 41, 33-41, 1999.

[10] Chen B.-Y.: Some new obstructions to minimal and Lagrangian isometric immersions, Japan. J. Math., 26, 105-127 (2000).

[11] Matsumoto K., Mihai I., Oiaga A., Shape operator for slant submanifolds in complex space forms, Bull. Yamagata Univ. Natur. Sci., 14, no. 4, 169-177, 2000.

[12] Oiaga A., Mihai I., B. Y. Chen inequalities for slant submanifolds in complex space forms, Demonstratio Math., 32, no. 4, 835-846, 1999.

[13] Tripathi M. M., Certain basic inequalities for submanifolds, Proceedings of the Tenth International Workshop on Differential Geometry, Kyungpook Nat. Univ., Taegu, 99-145, 2006.

[14] Tripathi M. M., Chen-Ricci inequality for submanifolds of contact metric manifolds, J. Adv. Math. Stud., 1, no.1-2, 111-134, 2008.

[15] Haesen S., Optimal inequalities for embedded space-times. Kragujevac J. Math. 28, 69-85, 2005.

[16] Haesen S., Sebekovic A., Verstraelen L., Relations between intrinsic and extrinsic curvatures, Kragujevac J. Math., 25, 139-145, 2003.

[17] Chen B.-Y. "Pseudo-Riemannian geometry, δ*-invariants and applications," World Scientific Publishing, Hackensack, NJ, 2011.*

[18] Kulkarni R. S., The values of sectional curvature in indefinite metric. Comment. Math. Helvetici, **54***, 173-176, 1979.*

[19] Dajczer M., Nomuzi K.: On the boundedness of Ricci curvature of an indefinite metric. Bol. Soc. Brasil. Mat., ***11****, 25-30, 1980.*

[20] O'neil B. "Semi-Riemannian geometry with applications to relativity," Academic Press, 1983.

[21] Duggal K. L., Bejancu A. "Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and applications," Kluwer Academic Publisher, 364, 1996.

[22] Rosca R. "On null Hypersurfaces of a Lorentzian manifold," Tensor (N.S.), 23, 66-74, 1972.

[23] *Duggal K. L., Sahin B. "Differential Geometry of lightlike submanifolds," Birkhuser Verlag AG, 2010.*

[24] *Bejan C. L., Duggal K. L. "Global lightlike manifolds and harmonicity," Kodai Math. J. 28, 131-145, 2005.*

[25] *Atindogbe C., Duggal K. L., "Conformal screen on lightlike hipersurfaces," Int. J. of Pure and App. Math., 11, no:4, 421-441, 2004.*

[26] *Beem J. K., Ehrlich P. E., Easley K. L., "Global Lorentzian Geometry," 2nd edn. Dekker, New York (1996).*

[27] *Duggal K. L., "On scalar curvature in lightlike geometry,", J. Geom. Phys. 57, 473-481 (2007).*

[28] *Gülbahar M., Kılıç E., Keleş S., "Chen-like inequalities on lightlike hypersurfaces of a Lorentzian manifold," J. of Ineq. Appl., 2013, 2013:266.*

[29] *Tripathi M. M., "Certain basic inequalities for submanifolds in (κ,μ)-space," Recent advances in Riemannian and Lorentzian geometries (Baltimore, MD), pp. 187-202 (2003).*

[30] *Chen B.-Y., Dillen F., Verstraelen L., Vrancken V., "Characterizations of Riemannian space forms, Einstein spaces and conformally flat spaces," Proc. Am. Math. Soc. 128, 589-598 (2000).*

[31] *Gülbahar M., Kılıç E., Keleş S., "Some inequalities on screen homothetic lightlike hipersurfases of a Lorentzian manifold," Taiw. J. of Math., 17, no:6, 2083-2100, (2013).*

[32] *De Smet P. J. , Dillen F., Verstraelen L., Vrancken L., "A pointwise inequality in submanifold theory," Arch. Math. (Brno), 35(2), 115-128, 1999.*

[33] *Chen B.-Y., "Ricci curvature of real hypersurfaces in complex hyperbolic space," Arch. Math. (Brno), 38(1), 73-80, 2002.*

[34] Duggal, K. L., Bejancu A., "Lightlike submanifolds of codimension two," Math. J. Toyama Univ., 15, , 5982, 1992.

[35] Duggal, K. L., Jin D. H., "Half lightlike submanifolds of codimension 2," Math. J. Toyama Univ., 22, 121161, 1999.

[36] Kupeli D. N., "Singular Semi-Riemannian Geometry," Kluwer Academic, 366, 1996.

[37] Duggal K. L., Sahin B., "Screen conformal half-lightlike submanifolds," Int. J. Math. and Math. Sci., 68, 37373753, 2004.

[38] Jin D. H., "Geometry of screen conformal real half-lightlike submanifolds," Bull. Korean Math. Soc., 47, no:4, 701-714, 2010.

[39] Jin D. H., "Geometry of half lightlike submanifolds of a Semi-Riemannian space form with a semi-symmetric non-metric connection," J. of the Chungcheong Math. Soc., 24, no:4, 2011. 47, no:4, 701-714, 2010.

[40] Jin D. H., " Half Lightlike submenifolds with totally umbilical screen distributions," J. Korean Soc. Math. Educ. Ser:B Pure Appl. Math., 17, 29-38, 2010.

[41] Kılıç E., Şahin B., Karadağ, H. B., Guneş R., " Coisotropic submanifolds of a semi-Riemannian manifold, " Turkish J. Math., 28, 335352, 2004.

[42] Jin D. H., "Geometry of coisotropic submanifolds," J. Korea Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math., 8, no. 1, 33-46, 2001.

[43] Duggal K. L., "On existence of canonical screens for coisotropic submanifolds," Int. Electronic J. Geom., 1, No. 1, 25-32, 2008.

ÖZGEÇMİŞ

1985 yılı Diyarbakır doğumludur. İlk öğrenimini ve ortaöğrenimini Adıyamanda tamamladı. 2003 yılında Adıyaman Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü programını kazandı. 2007 yılında bu bölümden mezun oldu. 2007-2008 Eğitim Öğretim yılında, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümü Geometri Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitimine başladı. 2010 yılında yüksek lisans eğitimini tamamladı. 15.09.2010 tarihinde Siirt Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'ne ÖYP Araştırma görevlisi olarak atandı. Aynı yıl Öğretim Görevlisi Yetiştirme Programı kapsamında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümü Geometri Anabilim Dalı'a doktora eğitimini tamamlamak üzere görevlendirildi. Halen İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü'nde araştırma görevlisi olarak görev yapmaktadır.