T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

PARA-SASAKIAN MANİFOLDLARIN ALTMANİFOLDLARI

Bilal Eftal ACET

DOKTORA TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2014

Tezin Başlığı : Para-Sasakian Manifoldların Altmanifoldları

Tezi Hazırlayan : Bilal Eftal ACET

Sınav Tarihi : 17.06.2014

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Tez Danışmanı : **Doç. Dr. Erol KILIÇ**

İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Sadık KELEŞ

İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Rıfat GÜNEŞ

İnönü Üniversitesi

Prof. Dr. Faik Nejat EKMEKÇİ

Ankara Üniversitesi

Prof. Dr. Ali ÖZDEŞ

Ankara Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ

Tez İkinci Danışmanı

Prof. Dr. Mehmet ALPASLAN

Enstitü Müdürü

Onur Sözü

Doktora Tezi olarak sunduğum "Para-Sasakian Manifoldların Altmanifoldları" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Bilal Eftal ACET

Eşime ve Biricik Kızıma

ÖZET

Doktora Tezi

PARA-SASAKIAN MANİFOLDLARIN ALTMANİFOLDLARI

Bilal Eftal ACET

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

146+vii sayfa

2014

Danışmanlar : Doç. Dr. Erol KILIÇ
Yrd. Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır.

Birinci bölüm diğer bölümlerin daha iyi anlaşılabilmesi için temel kavramlara ayrıldı. Diğer bölümler ise tezin orjinal kısımlarıdır. Birinci bölümde yarı-Riemann manifoldlar, yarı-Riemann manifoldların lightlike hiperyüzeyleri ve lightlike altmanifoldları ile birlikte hemen hemen parakontakt manifoldlar ele alındı.

İkinci bölümde para-Sasakian manifoldların non-dejenere altmanifoldları çalışıldı. Bu bölümde ilk olarak para-Sasakian manifodların invaryant altmanifoldlarının semi-paralel ve 2-semi-paralel olması için gerek ve yeter şartlar elde edildi. Daha sonra bir para-Sasakian manifoldun semi-invaryant altmanifoldları tanıtılarak örnekler verildi. Son olarak semi-invaryant altmanifold üzerindeki bazı distribüsyonların integrallenebilir olma şartları incelendi.

Üçüncü bölüm para-Sasakian manifoldların lightlike altmanifoldlarına ayrıldı. Öncelikle para-Sasakian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri çalışıldı. Daha sonra

para-Sasakian manifodların invaryant ve screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyleri tanıtılarak bu alt manifoldlara örnekler verildi. Ayrıca bir para-Sasakian uzay formun screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyleri ile ilgili karekterizasyonlar elde edilidi. Bu bölümde son olarak para-Sasakian manifoldların invaryant, parakontakt CR-lightlike ve radikal transversal lightlike altmanifoldları incelendi.

ANAHTAR KELİMELER: Para-Sasakian manifold, İnvaryant altmanifold, Anti-invaryant altmanifold, Semi-invaryant altmanifold, Lightlike hiperyüzey, İnvaryant lightlike hiperyüzey, Screen semi-invaryant lightlike hiperyüzey, Para-Sasakian uzay form, İnvaryant lightlike altmanifold, Parakontakt CR-lightlike altmanifold, Radikal transversal lightlike altmanifold.

ABSTRACT

Ph.D. Thesis

SUBMANIFOLDS OF PARA-SASAKIAN MANIFOLDS

Bilal Eftal ACET

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

146+vii pages

2014

Supervisors : Assoc. Prof. Dr. Erol KILIÇ
Assist. Prof. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ

This study which is designed as a philosophy doctoral thesis covers three chapters.

In the first chapter, we give some basic concepts such as semi-Riemannian manifolds, the lightlike hypersurfaces and the lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds, almost paracontact manifolds for the rest of the thesis that readers can easily understand. The other chapters are the original parts of this thesis.

In the second chapter, we study non-degenerate submanifolds of para-Sasakian manifolds. Firstly we obtain sufficient and necessary conditions for an invariant submanifold of a para-Sasakian manifold to be semi-parallel and 2-semi-parallel, respectively. After we introduce semi-invariant submanifolds of a para-Sasakian manifold and give some examples. Moreover integrability conditions for some distributions on a semi-invariant submanifold of a para-Sasakian manifold are investigated.

Third chapter is devoted to the lightlike geometry of para-Sasakian manifolds. In this chapter, we firstly study lightlike hypersurfaces of para-Sasakian manifolds.

After we introduce invariant and screen semi-invariant lightlike hypersurfaces of para-Sasakian manifolds and give some examples. Some results for screen semi-invariant lightlike hypersurfaces of a para-Sasakian space form are obtained. In this chapter we finally investigate invariant, paracontact CR-lightlike and radical transversal lightlike submanifolds of para-Sasakian manifolds.

KEY WORDS: Para-Sasakian manifold, Invariant submanifold, Anti-invariant submanifold, Semi-invariant submanifold, Lightlike hypersurface, Invariant lightlike hypersurface, Screen semi-invariant lightlike hypersurface, Para-Sasakian space form, Invariant lightlike submanifold, Paracontact CR-lightlike submanifold, Radical transversal lightlike submanifold.

TEŞEKKÜR

Tez konumu belirleyen ve bu tezi hazırlarken bilgisini ve tecrübesini esirgemeyen tez danışmanlarım Doç. Dr. Erol KILIÇ ve Yrd. Doç. Dr. Selcen YÜKSEL PERKTAŞ'a minnet ve şükranlarımı sunarım. Doktora öğrenimim boyunca desteklerini esirgemeyen başta İnönü Üniversitesi Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Sadık KELEŞ ve Adıyaman Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerine şükranlarımı sunarım. Tezle ilgili teknik konularda yardımlarını esirgemeyen değerli arkadaşım Arş. Gör. Ebubekir İNAN'a ve eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi desteklerini sunan başta eşim, annem, babam ve kardeşime teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

GİRİŞ

Manifold teorisi modern diferensiyel geometrinin en geniş ve en önemli teorilerinden biridir. Manifoldlar üzerindeki yapıların daha basit ve kolay anlaşılabilir uzaylar cinsinden ifade edilebilir olması, bu kavramı bilim dünyası için oldukça ilginç bir çalışma alanı haline getirmiştir. Zaman içinde bilim insanlarının ortak çalışma sahalarının artması manifold kavramını sadece geometrinin çalışma sahası olmaktan çıkarıp, matematiğin ve fiziğin bir çok alanında çalışılan ve her geçen gün yeni bilgilerin elde edildiği bir alan haline getirmiştir.

Günümüzde bir çok bilim dalında farklı yapı ve isimlere sahip manifold çeşitlerinin olduğu bilinmektedir. Bunlardan biride kontakt (değme) manifoldlardır. Bir kontakt manifold boyutu tek olan bir $(2n+1)$-boyutlu diferensiyellenebilir manifolddur ve bu manifold üzerinde tanımlı olan bir diferensiyellenebilir η 1-formu yardımıyla tanımlanır öyle ki bu η 1-formu manifoldun her noktasında

$$\eta \wedge (d\eta)^n \neq 0$$

şartını sağlar. η 1-formu yardımıyla kontakt distribüsyon olarak adlandırılan ve

$$D = \{X \in TM^{2n+1} : \eta(X) = 0\}$$

şeklinde 2n-boyutlu bir D distribüsyonu tanımlanır. D distribüsyonunun yönlendirilebilir olması

$$\eta(\xi) = 1, \qquad d\eta(\xi, X) = 0$$

olacak şekilde D nin TM^{2n+1} de tümleyeni olan bir ξ vektör alanının varlığını garanti eder. Bu vektör alanına M^{2n+1} manifoldunun karekteristik vektör alanı denir. Böylece bir kontakt manifold η 1-formu ve ξ karekteristik vektör alanı ile karekterize edilir. ϕ, M^{2n+1} üzerinde bir $(1,1)$-tensör alanı ve ξ, M^{2n+1} üzerinde bir vektör alanı olmak üzere $\eta(\xi) = 1$ ve $\phi^2 = -I + \eta \otimes \xi$ şartları sağlanıyor ise M^{2n+1} manifolduna (ϕ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına sahiptir denir.

M^{2n+1}, (ϕ, ξ, η) hemen hemen kontakt yapısına sahip olan bir hemen hemen kontakt manifold ise $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldu üzerinde (ϕ, ξ, η) yapısı yardımıyla bir J hemen hemen kompleks yapısı tanımlanabilir. Bu durumda J ile birlikte $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ bir hemen hemen kompleks manifold olur. Eğer J integrallenebilir ise (ϕ, ξ, η) yapısına normaldir denir. Normal kontakt metrik manifoldlar ise Sasakian manifoldlar olarak adlandırılır [1].

Hemen hemen kontakt manifoldlara benzer şekilde diferensiyellenebilir bir manifold üzerinde

$$\eta(\xi) = 1,$$

$$\phi^2 = I - \eta \otimes \xi$$

şartlarını sağlayan ve hemen hemen parakontakt yapı olarak adlandırılan bir (ϕ, ξ, η) üçlüsü ilk kez I. Sato [2, 3] tarafından tanımlanmıştır. Hemen hemen parakontakt yapı, hemen hemen kontakt yapının [4, 5]bir benzeridir. Ancak, hemen hemen kompleks yapı ile yakından ilgili olan kontakt yapının tersine, hemen hemen parakontakt yapı hemen hemen çarpım yapısı ile ilgilidir. Hemen hemen kontakt manifoldlar daima tek boyutludur. I. Sato [2] tarafından tanımlanan hemen hemen parakontakt manifoldlar ise çift boyutlu da olabilir.

B. O'Neill [6], manifold üzerindeki metrik tensörün negatif olma durumunu göz önüne alarak yarı-Riemann manifoldları tanımladı. Eğer bir yarı-Riemann manifoldun bir altmanifoldu üzerine indirgenen metrik tensör pozitif tanımlı ise altmanifolda spacelike (uzay benzeri) altmanifold ve negatif olma durumunda ise timelike (zaman benzeri) altmanifold denir. Timelike veya spacelike altmanifoldlar non-dejenere (yarı-Riemann) altmanifoldlar olarak adlandırılır.

Hemen hemen kontakt yapı ile birleşen bir yarı-Riemann metriğe sahip hemen hemen kontakt manifoldlar ilk kez T. Takahashi [7] tarafından tanımlandı. 1989 da ise K. Matsumoto [8], hemen hemen parakontakt manifold üzerindeki karekteristik vektör alanını $-\xi$ vektör alanı ile değiştirip oluşan yeni yapı ile birleşen Lorentzian metriğini göz önüne alarak Lorentzian hemen hemen parakontakt yapı kavramını ortaya attı. Açıktır ki, Lorentzian hemen hemen parakontakt manifoldlar üzerindeki yarı-Riemann metriğin indeksi 1 dir ve karekteristik vektör alanı ξ daima timelikedır.

Yukarıda anlatılan bir hemen hemen parakontakt manifoldu hemen hemen parakontakt Riemannian manifold yapan Riemann metriğini ve Lorentzian hemen hemen parakontakt manifold üzerindeki Lorentz metriğini içerecek şekilde bir yarı-Riemann metriğe sahip hemen hemen parakontakt manifoldlar ilk kez M. M. Tripathi, S. Keleş, E. Kılıç ve S. Y. Perktaş [9] tarafından tanımlandı ve bu tip manifoldlar belirsiz parakontakt manifoldlar olarak adlandırıldı.

1985 te S. Kaneyuki ve M. Konzai [10] $(2n+1)$-boyutlu bir yarı-Riemann manifold üzerinde hemen hemen parakontakt yapıyı tanımlayarak $M^{2n+1} \times \mathbb{R}$ de bir hemen hemen parakompleks yapı kurdu. R. S. Zamkovoy [11] ise S. Kaneyuki ve M. Konzai [10] tarafından verilen hemen hemen parakontakt yapıyı

$$g(\phi X, \phi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y)$$

ile tanımlanan $(n+1, n)$ işaretli bir yarı-Riemann metrik ile ilişkilendirerek herhangi bir hemen hemen parakontakt yapının uyumlu metrik olarak adlandırılan bu tipte bir yarı-Riemann metriği tanımlamaya imkan verdiğini gösterdi.

İnvaryant ve anti-invaryant altmanifoldlar 1976 da K. Yano ve M. Kon tarafından tanımlandı [12, 13] ve Sasakian manifoldun bir invaryant altmanifoldunun yine Sasakian yapıya sahip olduğu gösterildi. Semi-paralel immersiyon tanımı ise ilk kez 1985 yılında J. Deprez [14] tarafından verildi. Deprez çalışmasında Öklid uzayında semi-paralel hiperyüzeyleri sınıflandırdı. Daha sonra K. Arslan et al. tarafından [15] 2-semi-paralel immersiyonlar tanıtıldı. K. Yano ve M. Kon [13] ve [16] bir altmanifoldun ikinci temel formu paralel, 2-paralel veya semi-paralel olduğunda bu altmanifoldun tamamen geodezik olduğunu gösterdiler. 2009 da C. Özgür ve C. Murathan [17] tarafından Lorentzian para-Sasakian manifoldların semi-paralel ve 2-semi-paralel invaryant altmanifoldlarının tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şartlar elde edildi.

1978 yılında A. Bejancu [18] bir hemen hemen Hermityen manifoldun invaryant ve anti-invaryant altmanifoldlarınıda içeren CR-altmanifoldlarını tanımladı. Bu kavram A. Bejancu ve N. Papaghuic [19] tarafından hemen hemen kontakt manifoldlara genişletildi ve semi-invaryant altmanifodllar olarak adlandırılan yeni bir altmanifold sınıfı tanımlandı. Daha sonra farklı tipteki altmanifoldların semi-invaryant altmanifoldları pek çok yazar [20, 21, 22] tarafından çalışıldı. 2004 te J. S. Kim et al. [23] tarafından nearly trans-Sasakian manifoldların semi-invaryant altmanifoldları incelenerek ve bu altmanifoldlar üzerinde tanımlanan distribüsyonların integrallenebilirliği ile ilgili bazı sonuçlar elde edildi.

Bir yarı-Riemann manifoldunun üzerindeki metrik tensör alanı, bu manifoldun keyfi bir hiperyüzeyi üzerine her zaman non-dejenere bir metrik tensör indirgemez. Yani yarı-Riemann manifold üzerindeki metrik tensör, hiperyüzey üzerine sadece bir simetrik bilineer dönüşüm olarak indirgenir. Eğer indirgenen bu simetrik bilineer dönüşümün çekirdeğinin boyutu 1 ise hiperyüzey lightlike (null, dejenere) hiperyüzey olarak adlandırılır. Bu alanda yapılan çalışmalarda, D. N. Küpeli [24] ve K. L. Duggal- A. Bejancu [25] tarafından geliştirilen iki yöntem kullanılmaktadır. Bu yöntemler Küpeli tarafından verilen içsel (intrinsic) ve Duggal-Bejancu tarafından verilen dışsal (extrinsic) yöntemdir.

Dejenere altmanifoldlar ile non-dejenere altmanifoldlar arasındaki temel fark, normal demetlerin davranışında ortaya çıkmaktadır. Non-dejenere altmanifoldlarda tanjant demet ile normal demetin arakesiti kümesi sıfır elemana sahip iken, lightlike altmanifoldda normal demetin bir kısmı tanjant demette kaldığından böyle bir durum söz konusu değildir. Bu nedenle lightlike altmanifoldlarda tanjant demete tamamlayan bir demetin varlığı önemli bir problem olarak ortaya çıkmaktadır. K. L. Duggal - A. Bejancu [25], böyle bir tamamlayan uzayın var olduğunu, ancak tanjant demete dik olmadığını gösterdiler ve bu tipteki demete transversal demet adını verdiler. Buna göre transversal demet tanjant demete tamamlayan, ona dik olmayan bir vektör demetidir.

Böyle bir demetin varlığı non-dejenere altmanifoldlar için daha önce tanımlanan ikinci temel form, şekil operatörü ve eğrilik tensörü gibi kavramları tanımlamaya imkan verir. Bununla birlikte, non-dejenere altmanifoldlar için geçerli olan birçok özellik, metriğin dejenere olması nedeniyle lightlike altmanifoldlarda geçerli değildir. Örneğin bir lightlike altmanifold üzerine indirgenen konneksiyonun metrik konneksiyon değildir. Halbuki yarı-Riemann manifoldlarda non-dejenere altmanifoldlar üzerine indirgenmiş konneksiyon daima metrik konneksiyondur.

Yarı-Riemann manifoldların hiperyüzeyinin aksine lightlike hiperyüzeyinin Ricci eğrilik tensörü her zaman simetrik olamaz. Ricci eğrilik tensörünün simetrik olması hem geometri hem de fizik açısından istenen bir durumdur. Dolayısıyla lightlike geometride Ricci eğrilik tensörünün simetrik olma şartlarını araştırmak önemli bir problemdir. Bu konuda ilk çalışmayı A. Bejancu [26] yapmıştır. A. Bejancu tarafından bir lightlike hiperyüzeyin Ricci eğrilik tensörünün simetrik olması için bir gerek ve yeter şart elde edildi. Ayrıca bu sonuç lokal olarak K. L. Duggal ve A. Bejancu [25] tarafından ispat edilmiştir. Ayrıca R. Güneş, B. Şahin ve E. Kılıç [27] bir lightlike hiperyüzeyin Ricci eğrilik tensörünün simetrik olması için şekil operatörünün lightlike hiperyüzeyin ikinci temel formuna göre simetrik olmasının gerek ve yeter şart olduğunu gösterdiler. A. Ioan [28], 1997 yılında yapmış olduğu çalışmasında dejenere altmanifoldlar için Gauss ve Codazzi denklemlerini elde ederek bazı örnekler verdi.

Bir Kaehler manifoldunun lightlike reel hiperyüzeyleri K. L. Duggal ve A. Bejancu [29] tarafından çalışıldı. 2003 yılında K. L. Duggal ve H. Jin [30] sabit eğrilikli bir yarı-Riemann manifoldun tamamen umbilik altmanifoldları için bazı sonuçlar elde ettiler ve ekran distribüsyonunun integrallenebilme şartını araştırdılar. B. Şahin [31] tarafından bir lightlike hiperyüzeyin tamamen geodezik olma şartları incelenerek bu hiperyüzeyin Ricci eğriliğini simetrik yapan bazı yeni sonuçlar elde edildi. Indefinite Sasakian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri ve altmanifoldları [32] ve [33, 34] de çalışıldı. O. Lungiambudila, F. Massamba ve J. Tossa tarafından [35] indefinite Sasakian space form $M(k)$ sabit eğrilik $k \neq 1$, için bir lokal simetrik lightlike hiperyüzeyi olmadığı gösterildi. K. L. Duggal ve B. Şahin [33] indefinite-Sasakian manifoldların invaryant, screen reel kontakt CR-lightlike ve screen CR-lightlike altmanifoldlarını tanımladılar. Genelleştirilmiş kontakt CR-lightlike altmanifoldlar ise yine K. L. Duggal ve B. Şahin [36] tarafından çalışıldı.

Doktora tezi olarak hazırlanan bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Birinci bölümde sonraki bölümlerde kullanılacak olan yarı-Riemann manifoldlar, yarı-Riemann manifoldların lightlike hiperyüzeyleri ve lightlike altmanifoldları ile birlikte hemen hemen parakontakt manifoldlar ile ilgili temel tanım ve teoremler verildi.

Tezin orjinal bölümleri ikinci ve üçüncü bölümlerdir. İkinci bölümde para-Sasakian manifoldların farklı tipteki non-dejenere altmanifoldları çalışıldı. Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. Birinci kısımda para-Sasakian manifoldların invaryant ve ikinci kısımda ise anti-invaryant altmanifoldları çalışıldı. Son kısım para-Sasakian manifodların semi-invaryant altmanifoldlarına ayrıldı. Bu tipteki altmanifoldlar üzerinde tanımlanan distribüsyonların integrallenebilir olma şartları incelendi.

Üçüncü bölümde para-Sasakian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri ve lightlike altmanifoldları ile birlikte para-Sasakian uzay formun screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyleri çalışıldı. Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda para-Sasakian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri incelendi. İnvaryant ve screen semi-invaryant lightlike hiperyüzey örnekleri verilerek ve bazı geometrik sonuçlar elde edildi. İkinci kısımda bir para-Sasakian uzay formun screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi tanımlandı. Para-Sasakian uzay formun sabit eğrilik $k \neq 1$ olmak üzere bir lokal simetrik lightlike hiperyüzeyi olmadığı gösterildi. Üçüncü kısımda ise para-Sasakian manifoldların sırasıyla invaryant, parakontakt CR-lightlike ve radikal transversal lightlike altmanifoldları tanıtıldı. Bir para-Sasakian manifoldun parakontak CR-lightlike altmanifoldu üzerinde tanımlanan distiribüsyonların integrallenebilir olma şartları elde edildi.

BÖLÜM 1

TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölüm dört kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda yarı-Riemann manifoldlar ve altmanifoldları, ikinci kısımda yarı-Riemann manifoldların lightlike hiperyüzeyleri ve üçüncü kısımda yarı-Riemann manifoldların lightlike altmanifoldları ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verildi. Son kısım ise hemen hemen parakontakt manifoldlara ayrıldı.

1.1 Yarı-Riemann Manifoldlar ve Altmanifoldları

Tanım 1.1.1. *V bir reel vektör uzayı olsun.*

$$\bar{g} : V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü her a,b $\in \mathbb{R}$ ve $u,\ v,\ w \in V$ için

i) $\bar{g}(u,v) = \bar{g}(v,u)$,

ii) $\bar{g}(au + bv, w) = a\bar{g}(u,w) + b\bar{g}(v,w)$,

$\bar{g}(u, av + bw) = a\bar{g}(u,v) + b\bar{g}(u,w)$

özelliklerine sahip ise $\bar{g}$ dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir [6].

Tanım 1.1.2. *V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form $\bar{g}$ olsun. Bu durumda*

i) her $v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\bar{g}(v,v) > 0$ ise $\bar{g}$ simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,

ii) her $v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\bar{g}(v,v) < 0$ ise $\bar{g}$ simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,

iii) her $v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\bar{g}(v,v) \geq 0$ ise $\bar{g}$ simetrik bilineer formuna pozitif yarı tanımlı,

iv) her $v \in V$ ve $v \neq 0$ için $\bar{g}(v,v) \leq 0$ ise $\bar{g}$ simetrik bilineer formuna negatif yarı tanımlı denir [6].

Tanım 1.1.3. *V bir reel vektör uzayı ve $\bar{g}$, V üzerinde simetrik bilineer form olsun. $0 \neq \xi \in V$ olmak üzere her $v \in V$ için*

$$\bar{g}(\xi, v) = 0$$

ise $\bar{g}$ simetrik bilineer formuna V üzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda $\bar{g}$ ye non-dejeneredir denir. Açıktır ki, $\bar{g}$ nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart her $v \in V$ için

$$\bar{g}(u, v) = 0 \text{ iken } v = 0$$

olmasıdır [25].

Tanım 1.1.4. *V bir reel vektör uzayı ve $\bar{g}$, V üzerinde simetrik bilineer form olsun. Bu durumda V nin*

$$RadV = \{\xi \in V \mid \bar{g}(\xi, v) = 0, \forall v \in V\}$$

şeklinde tanımlı altuzayına, $\bar{g}$ simetrik bilineer formuna göre V uzayının radikal (veya null) uzayı denir [25].

Tanım 1.1.5. *V bir reel vektör uzayı ve*

$$\bar{g} : V \times V \to \mathbb{R}$$

bir simetrik bilineer form olsun. Bu durumda

$$\bar{g}|_W : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna $\bar{g}$ simetrik bilineer formunun indeksi denir ve ν ile gösterilir. W altuzayı üzerine indirgenmiş $\bar{g}|_W$ simetrik bilineer formuna ise indirgenmiş simetrik bilineer form adı verilir ve kısaca g ile gösterilir [6].

Teorem 1.1.1. *V bir reel vektör uzayı ve $\bar{g}$, V üzerinde simetrik bilineer form olsun. Bu durumda*

i) $\bar{g}\ (\alpha_i, \alpha_j) = 0, \ \ i \neq j,$

ii) $\bar{g}\ (\alpha_i, \alpha_i) = 1, \ \ 1 \leq i \leq \gamma,$

iii) $\bar{g}\ (\alpha_i, \alpha_i) = -1,\ \ \gamma + 1 \leq i \leq \gamma + \nu,$

iv) $\bar{g}\ (\alpha_i, \alpha_i) = 0,\ \ \gamma + \nu + 1 \leq i \leq n = \gamma + \nu + \mu$

olacak şekilde V nin bir $\{\alpha_1, ..., \alpha_n\}$ bazı vardır.

Tanım 1.1.6. *V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım (yarı-Öklid metriği) denir. V üzerinde bir skalar çarpım $\bar{g}$ ise $(V,\bar{g})$ ikilisine de skalar çarpım uzayı (yarı-Öklid uzayı) denir. Eğer $\bar{g}$ pozitif tanımlı ise o zaman $\bar{g}$ bir iç çarpım (Öklid metriği) olur ve $(V,\bar{g})$ de Öklid uzay olarak adlandırılır. Eğer $\bar{g}$ nin indeksi $\nu = 1$ ise $\bar{g}$ ye Lorentz metriği ve $(V,\bar{g})$ ye de Lorentz uzay denir. Eğer $\bar{g}$ dejenere ise o zaman V vektör uzayına $\bar{g}$ ye göre lightlike (dejenere) vektör uzayı denir [25].*

Tanım 1.1.7. *V bir vektör uzayı ve W da V nin altuzayı olsun. Bu durumda $\bar{g}_{|W}$ dejenere ise W ya lightlike (dejenere) altuzay denir ve böylece*

$$W \cap W^{\perp} \neq \{0\}$$

olur. Burada

$$W^{\perp} = \{v \in V \mid \bar{g}(v, w) = 0,\ \forall w \in W\}$$

alt uzayına W uzayının dik uzayı denir [25].

Teorem 1.1.2. *V bir yarı-Öklid uzay ve W, V nin bir altuzayı olsun. Bu durumda*

$$RadW = RadW^{\perp} = W \cap W^{\perp}$$

dir [25].

Tanım 1.1.8. *$\bar{M}$ bir diferensiyellenebilir manifold olsun. $\bar{M}$ nin bir $p \in \bar{M}$ noktasındaki tanjant uzayı $T_p\bar{M}$ olmak üzere*

$$\bar{g} : T_p\bar{M} \times T_p\bar{M} \to \mathbb{R}$$

$$(X_{p,}\ Y_p) \to \bar{g}(X_p, Y_p)$$

biçiminde tanımlı sabit indeksli, simetrik, bilineer ve non-dejenere (0,2)-tipindeki $\bar{g}$ *tensör alanına* $\bar{M}$ *üzerinde bir metrik tensör ve* $\bar{g}$ *metrik tensörü ile donatılmış bir* $\bar{M}$ *manifolduna ise yarı-Riemann manifoldu denir [6].*

Tanım 1.1.9. $\bar{M}$ *bir yarı-Riemann manifoldu ve* $\bar{g}$, $\bar{M}$ *üzerinde tanımlanan bir metrik tensör olsun.* $\bar{g}$ *metrik tensörünün indeksine yarı-Riemann manifoldunun indeksi denir ve* $ind\bar{M}$ *ile gösterilir.*

Eğer indeks υ *ise* $0 \leq \upsilon \leq boy\bar{M}$ *dir. Özel olarak* $\upsilon = 0$ *ise her* $p \in \bar{M}$ *için* $\bar{g}_{|p}$, $T_p\bar{M}$ *üzerinde pozitif tanımlı bir iç çarpım olduğundan* $\bar{M}$ *bir Riemann manifoldu olur.* $\upsilon = 1$ *ve* $n \geq 2$ *olması durumunda ise,* $\bar{M}$ *ye bir Lorentz manifoldu denir [6].*

Tanım 1.1.10. $\bar{M}$ *bir diferensiyellenebilir yarı-Riemann manifoldu ve* $\bar{g}$, $\bar{M}$ *üzerinde tanımlanan bir metrik tensör olsun. Eğer her* $p \in \bar{M}$ *ve* $X_p \in T_p\bar{M}$ *için*

$$\bar{g} : T_p\bar{M} \times T_p\bar{M} \to \mathbb{R}$$

olmak üzere

i) $\bar{g}(X_p, X_p) > 0$ *veya* $X_p = 0$ *ise* X_p *vektörüne spacelike (uzay benzeri),*

ii) $\bar{g}(X_p, X_p) < 0$ *ise* X_p *vektörüne timelike (zaman benzeri),*

iii) $\bar{g}(X_p, X_p) = 0$, $X_p \neq 0$ *ise* X_p *vektörüne lightlike (ışık benzeri veya null) vektör denir [6].*

Tanım 1.1.11. V *bir reel vektör uzayı ve* $\bar{g}_{|V}$, V *üzerinde tanımlı dejenere simetrik bilineer form olsun. Bu durumda* V *vektör uzayına lightlike (dejenere) vektör uzayı denir ve* $(V, \bar{g}_{|V})$ *ile gösterilir [25].*

Tanım 1.1.12. V, *m-boyutlu bir yarı-Öklid uzay ve* $(W, \bar{g}_{|W})$, $nullW = r < n$ *olacak şekilde, n-boyutlu bir lightlike vektör uzayı olsun. Radikal uzayın tümleyen uzayına* W *nin screen (ekran) uzayı denir ve* SW *ile gösterilir [25].*

Tanım 1.1.13. *V, m-boyutlu bir yarı-Öklid uzay ve W da V nin bir altuzayı olsun. Eğer W üzerine indirgenmiş metrik g dejenere ise W altuzayına bir lightlike (dejenere) altuzay denir. Aksi durumda W ya non-dejeneredir denir [25].*

Lemma 1.1.1. *$(W, \bar{g}_{|W})$, $nullW = r < n$ olacak şekilde bir n-boyutlu reel lightlike vektör uzayı olsun. Bu durumda radikal uzaya tümleyen altuzay non-dejeneredir [25].*

Tanım 1.1.14. *V, m-boyutlu yarı-Öklid uzay ve W, V nin bir altuzayı olsun. Bu durumda*

$$W^{\perp} = \{v \in V : \bar{g}(v, w) = 0, \forall w \in W\}$$

altuzayına W uzayının diki denir [25].

Lemma 1.1.2. *$(V, \bar{g})$, m-boyutlu bir yarı-Öklid uzay ve W, V nin bir altuzayı olsun. Bu durumda*

i) $boyW + boyW^{\perp} = m$,

ii) $(W^{\perp})^{\perp} = W$,

iii) $RadW = RadW^{\perp} = W \cap W^{\perp}$

dir [25].

Tanım 1.1.15. *$\bar{M}$ bir diferensiyellenebilir n-boyutlu manifold olsun. Bu durumda $\bar{M}$ nin her noktasına r-boyutlu bir lineer altuzay karşılık getiren ve*

$$D : \bar{M} \to T_p\bar{M}$$

$$p \to D_p \subset T_p\bar{M}$$

şeklinde tanımlanan D dönüşümüne $\bar{M}$ üzerinde distribüsyon (dağılım) denir. Eğer her $p \in \bar{M}$ noktası için D_p de r-tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise D distribüsyonuna diferensiyellenebilirdir denir [25].

Tanım 1.1.16. *$\bar{M}$ bir diferensiyellenebilir n-boyutlu manifold ve D, $\bar{M}$ üzerinde r-boyutlu bir distribüsyon olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna involutive distribüsyon denir. Eğer D distribüsyonu involutive ise integrallenebilirdir [25].*

Tanım 1.1.17. $\{u_1, ..., u_n\}$, $\mathbb{R}^n_v$ *üzerinde standart koordinat sistemi ve* $\partial_i = \frac{\partial}{\partial u_i}$ *olsun.* $\mathbb{R}^n_v$ *de* V *ve* W *vektör alanları için*

$$\nabla_V W = \sum V(W_i)\partial_i$$

şeklinde tanımlanan $\nabla_V W$ *vektör alanına* W *nın* V *ye göre kovaryant türevi denir [6]. Burada* $W = \sum w_i \partial_i$ *dir.*

Tanım 1.1.18. $\bar{M}$ *bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Bu durumda aşağıdaki şartları sağlayan*

$$\bar{\nabla} : \Gamma(T\bar{M}) \times \Gamma(T\bar{M}) \to \Gamma(T\bar{M})$$

fonksiyonuna $\bar{M}$ *üzerinde bir lineer konneksiyon denir:*

i) $\bar{\nabla}_V W$, V *ye göre* $C^\infty(M, \mathbb{R})$ *lineerdir,*

ii) $\bar{\nabla}_V W$, W *ya göre* $\mathbb{R}$ *lineerdir,*

iii) $\bar{\nabla}_V (fW) = V(f)W + f\bar{\nabla}_V W$, *her* $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$

dir [6].

Teorem 1.1.3. $\bar{M}$ *bir yarı-Riemann manifold olsun. Bu durumda* $\bar{M}$ *üzerinde her* $X, Y, Z \in \Gamma(T\bar{M})$ *için*

i) $[X, Y] = \bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X$,

ii) $X\bar{g}(Y, Z) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X Z)$

şartlarını sağlayan bir tek $\bar{\nabla}$ *Levi-Civita konneksiyonu vardır ve bu konneksiyon*

$$\begin{aligned} 2\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) &= X\bar{g}(Y, Z) + Y\bar{g}(Z, X) - Z\bar{g}(X, Y) \\ &\quad + \bar{g}([X, Y], Z) + \bar{g}([Z, X], Y) - \bar{g}([Y, Z], X) \end{aligned} \tag{1.1.1}$$

Kozsul formülü ile tek türlü bellidir [6].

Tanım 1.1.19. $\bar{M}$, *Levi-Civita konneksiyonu* $\bar{\nabla}$ *olan bir yarı-Riemann manifoldu olsun. Her* $X, Y, Z \in \Gamma(T\bar{M})$ *için*

$$\bar{R} : \Gamma(T\bar{M}) \times \Gamma(T\bar{M}) \times \Gamma(T\bar{M}) \to \Gamma(T\bar{M})$$

$$(X, Y, Z) \to \bar{R}(X, Y)Z = \bar{\nabla}_X \bar{\nabla}_Y Z - \bar{\nabla}_Y \bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_{[X,Y]} Z$$

biçiminde tanımlanan $\bar{R}$ *fonksiyonu (1,3) tensör alanıdır. Bu tensör alanına* $\bar{M}$ *nin Riemann eğrilik tensörü denir [6].*

Teorem 1.1.4. *$\bar{M}$ bir yarı-Riemann manifoldu ve $\bar{R}$, $\bar{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü olsun. Bu durumda her $X, Y, Z, W \in \Gamma(T\bar{M})$ için*

i) $\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z,W) = -\bar{g}(\bar{R}(Y,X)Z,W)$,

ii) $\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z,W) = -\bar{g}(\bar{R}(X,Y)W,Z)$,

iii) $\bar{R}(X,Y)Z + \bar{R}(Y,Z)X + \bar{R}(Z,X)Y = 0$,

iv) $\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z,W) = \bar{g}(\bar{R}(Z,W)X,Y)$

dir [6].

Tanım 1.1.20. *$\bar{M}$ bir yarı-Riemann manifold ve $\bar{R}$, $\bar{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü olsun. $\{e_1, ..., e_n\}$, $T_p\bar{M}$ nin bir ortonormal bazı olmak üzere*

$$\overline{Ric} : T_p\bar{M} \times T_p\bar{M} \to \mathbb{R}$$

$$(\ X_p,\ Y_p) \to \overline{Ric}(X_p, Y_p) = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \bar{g}(\bar{R}(e_i, X_p)Y_p, e_i)$$

veya

$$\overline{Ric}(X_p, Y_p) = iz\{Z_p \to \bar{R}(Z_p, X_p)Y_p\}$$

şeklinde tanımlı $\overline{Ric}$ tensörüne $\bar{M}$ yarı-Riemann manifoldunun Ricci eğrilik tensörü ve $\overline{Ric}(X_p, Y_p)$ değerine de $\bar{M}$ nin Ricci eğriliği denir.

Tanım 1.1.21. *$\bar{M}$ bir yarı-Riemann manifold ve $\{e_1, ..., e_n\}$, $T_p\bar{M}$ tanjant uzayının bir ortonormal bazı olmak üzere $\bar{M}$ nin skaler eğriliği*

$$\bar{\tau} = \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i \overline{Ric}(e_i, e_i)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 1.1.22. *Eğer $\bar{M}$ manifoldu sabit bir c kesit eğriliğine sahip ise $\bar{M}$ nin eğrilik tensörü her $X, Y, Z \in \Gamma(T\bar{M})$ için*

$$\bar{R}(X,Y)Z = c\{\bar{g}(Y,Z)X - \bar{g}(X,Z)Y\}$$

şeklindedir [25].

Tanım 1.1.23. *M ve $\bar{M}$ sırasıyla m ve n-boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve*

$$\Psi : M \to \bar{M}$$

bir C^∞ fonksiyon olsun. Eğer rankΨ = boy$M$ ise Ψ dönüşümüne bir immersiyon (daldırma) denir [37].

Tanım 1.1.24. *M ve $\bar{M}$ sırasıyla m ve n-boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar ve $M \subset \bar{M}$ olsun. Eğer*

$$i : M \to \bar{M}$$

bir immersiyon ise M ye $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu denir [38].

Tanım 1.1.25. *$\bar{M}$ bir diferensiyellenebilir manifold ve M^n, $\bar{M}^{n+m}$ nin bir altmanifoldu olsun. Herhangi bir $p \in M$ noktası için*

$$TM^\perp = \{N \in T_p\bar{M} : \bar{g}(X_p, N) = 0, \forall X_p \in T_pM\}$$

kümesini tanımlayalım. Bu durumda $p \in M$ noktasında her $X_p \in T_pM$ için $\bar{g}(X_p, N) = 0$ koşulunu sağlayan N vektörüne M nin normal vektörü denir. Eğer N vektörü birim vektör ise N ye M nin birim normal vektör alanı veya normal kesiti denir. M nin normal vektörlerini içeren $TM^\perp$ kümesine ise M nin normal demeti adı verilir [16].

Tanım 1.1.26. *M, $(n+m)$-boyutlu $\bar{M}$ diferensiyellenebilir manifoldun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. ∇ ve $\bar{\nabla}$ sırasıyla M ve $\bar{M}$ üzerinde lineer konneksiyonlar olmak üzere her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{1.1.2}$$

şeklinde yazılabilir. (1.1.2) denklemine Gauss formülü adı verilir. Burada $\nabla_X Y$ ve $h(X, Y)$ sırasıyla $\bar{\nabla}_X Y$ nin teğet ve normal bileşenlerini göstermektedir.
$h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(TM^\perp)$ ile tanımlı simetrik ve bilineer h dönüşümü M nin ikinci temel formu ve ∇ konneksiyonu indirgenmiş konneksiyon olarak adlandırılır. Eğer $h = 0$ ise M ye tamamen geodezik denir [39].

Tanım 1.1.27. *$(\bar{M}, \bar{g})$, $(n+m)$-boyutlu yarı-Riemann manifold ve M, $\bar{M}$ nin n-boyutlu bir alt manifoldu olsun. M nin birim normal vektör alanı N ve $\bar{\nabla}_X N$ nin teğet ve normal bileşenleri de sırasıyla $-A_N X$ ve $\nabla^\perp_X N$ olmak üzere $X \in \Gamma(TM)$ için*

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^\perp_X N \tag{1.1.3}$$

yazılabilir. (1.1.3) denklemine Weingarten formülü denir. Burada $A_N : \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ *ile tanımlı simetrik ve lineer dönüşüme* M *nin şekil operatörü ve normal demet üzerindeki* $\nabla^{\perp}$ *metrik konneksiyona ise normal konneksiyon denir. Bu durumda* $X, Y \in \Gamma(TM)$ *ve* $N \in \Gamma(TM^{\perp})$ *için*

$$g(A_N X, Y) = \bar{g}(h(X,Y), N) \tag{1.1.4}$$

dir. Burada g*,* M *üzerine indirgenmiş skalar çarpımdır [6].*

Tanım 1.1.28. $(\bar{M}, \bar{g})$ *bir yarı-Riemann manifoldu ve* (M, g)*,* $(\bar{M}, \bar{g})$ *nin bir alt manifoldu olsun.* (M, g) *ve* $(\bar{M}, \bar{g})$ *üzerindeki Riemann eğrilik tensörleri sırasıyla* R *ve* $\bar{R}$ *olmak üzere her* $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ *için*

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z, W) &= g(R(X,Y)Z, W) - \bar{g}(h(X,W), h(Y,Z)) \\ &\quad + \bar{g}(h(Y,W), h(X,Z)) \end{aligned}$$

ile tanımlanan ifadeye Gauss denklemi denir. Gauss denkleminin normal demete ait olan bileşenleri göz önüne alınırsa

$$(\bar{R}(X,Y)Z)^{\perp} = (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) \tag{1.1.5}$$

elde edilir. (1.1.5) denklemine Codazzi denklemi denir [6].

Tanım 1.1.29. M *ve* $\bar{M}$ *sırasıyla* $(n-1)$ *ve* n*-boyutlu diferensiyellenebilir manifoldlar olsun. Eğer*

$$f : M \to \bar{M}$$

fonksiyonu bir immersiyon ise, $f(M) \subset \bar{M}$ *manifolduna* $\bar{M}$ *nin bir hiperyüzeyi denir [37].*

Tanım 1.1.30. M*,* $(n+m)$*-boyutlu* $\bar{M}$ *yarı-Riemann manifoldun* n*-boyutlu bir altmanifoldu olsun.* M *altmanifoldunun ikinci temel formu* h *nın kovaryant türevi* $\hat{\nabla} h$*,*

$$(\hat{\nabla}_X h)(Y,Z) = \nabla^{\perp}_X h(Y,Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{1.1.6}$$

biçiminde tanımlanır. $\hat{\nabla} h$ *kovaryant türeve* M *nin üçüncü temel formu adı verilir.*

Eğer $\hat{\nabla} h = 0$ *ise* M *ye paralel ikinci temel formlu veya 1-paraleldir denir. Burada* $\hat{\nabla}$ *konneksiyonuna* M *nin van der Waerden-Bortolotti konneksiyonu denir [39].*

Tanım 1.1.31. $\bar{M}$ *yarı-Riemann manifoldun n-boyutlu bir altmanifoldu* M *olsun. Her* $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ *için* $\hat{R} \cdot h$*;*

$$\begin{aligned}(\hat{R}(X,Y) \cdot h)(Z,W) &= R^{\perp}(X,Y)h(Z,W) - h(R(X,Y)Z,W) \\ &-h(Z,R(X,Y)W)\end{aligned} \tag{1.1.7}$$

ile tanımlanır. Burada $R^{\perp}(X,Y) = [\nabla_X^{\perp}, \nabla_Y^{\perp}] - \nabla_{[X,Y]}^{\perp}$ *dir.*

Eğer M *nin her noktasında* $\hat{R} \cdot h = 0$ *ise* M *ye* $\bar{M}$ *nin semi-paralel altmanifoldu denir [14].*

Tanım 1.1.32. $\bar{M}$ *yarı-Riemann manifoldun n-boyutlu bir altmanifoldu* M *olsun.* M *altmanifoldunun üçüncü temel formu* $\hat{\nabla} h$ *nın kovaryant türevi* $\hat{\nabla}^2 h$*, her* $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ *için;*

$$\begin{aligned}(\hat{\nabla}^2 h)(Z,W,X,Y) &= (\hat{\nabla}_X \hat{\nabla}_Y h)(Z,W) \\ &= \nabla_X^{\perp}(\hat{\nabla}_Y h)(Z,W) - (\hat{\nabla}_Y h)(\nabla_X Z, W) \\ &-(\hat{\nabla}_X h)(Z, \nabla_Y W) - (\hat{\nabla}_{\nabla_X Y} h)(Z,W)\end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır [39].

Eğer $\hat{\nabla}^2 h = 0$ *ise* M *altmanifolduna paralel üçüncü temel formlu veya 2-paraleldir denir.*

Tanım 1.1.33. $\bar{M}$ *yarı-Riemann manifoldun n-boyutlu bir altmanifoldu* M *olsun. Her* $X, Y, Z, W, U \in \Gamma(TM)$ *için* $\hat{R} \cdot \hat{\nabla} h$*;*

$$\begin{aligned}(\hat{R}(X,Y) \cdot \hat{\nabla} h)(Z,W,U) &= R^{\perp}(X,Y)(\hat{\nabla} h(Z,W,U) \\ &-(\hat{\nabla} h)(R(X,Y)Z,W,U) \\ &-(\hat{\nabla} h)(Z,R(X,Y)W,U) \\ &-(\hat{\nabla} h)(Z,W,R(X,Y)U)\end{aligned} \tag{1.1.8}$$

ile tanımlanır. Eğer M *altmanifoldunun her noktasında*

$$\hat{R} \cdot \hat{\nabla} h = 0$$

ise M *altmanifolduna 2-semi-paralel altmanifold denir [15].*

1.2 Yarı-Riemann Manifoldların Lightlike Hiperyüzeyleri

Tanım 1.2.1. $(\bar{M}, \bar{g})$, $(m+2)$*-boyutlu yarı-Riemann manifold, index*$\bar{g} = \nu$, $(0 < \nu < m+1)$ *ve* M, $\bar{M}$ *nin bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda* $p \in M$ *noktasında*

$$T_pM^{\perp} = \{Y_p \in T_p\bar{M} : \bar{g}(Y_p, X_p) = 0, \forall X_p \in T_pM\}$$

ve

$$Rad\ T_pM = \{Y_p \in T_pM : g(Y_p, X_p) = 0, \forall X_p \in T_pM\}$$

ile tanımlanan altuzaylara sırasıyla T_pM *nin dik uzayı ve radikali denir [25].*

Tanım 1.2.2. M*,* $(m+2)$*-boyutlu* $(\bar{M}, \bar{g})$ *yarı-Riemann manifoldunun* n*-boyutlu bir alt manifoldu olsun.* M *üzerinde*

$$Rad\ TM : p \in M \rightarrow Rad\ T_pM$$

şeklinde tanımlanan ve her bir noktayı bir r*-boyutlu alt vektör uzaya eşleyen* $Rad\,TM$ *dönüşümüne radikal distribüsyon,* M *ye ise* r*-lightlike (dejenere) altmanifold denir.* $Rad\ T_pM$ *nin boyutu* $null Rad\ T_pM$ *ile gösterilir [25].*

Tanım 1.2.3. $(\bar{M}, \bar{g})$, $(m+2)$*-boyutlu bir yarı-Riemann manifold, index*$\bar{g} = \nu$, $(0 < \nu < m+1)$ *ve* M, $\bar{M}$ *nin bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda her* $p \in M$ *için*

$$Rad\ T_pM = T_pM \cap T_pM^{\perp} \neq \{0\}$$

ise M *ye* $\bar{M}$ *yarı-Riemann manifoldunun lightlike (dejenere, null) hiperyüzeyi denir [25].*

Lemma 1.2.1. (M, g)*, indeksi* υ, $0 < \upsilon < m+1$*, olan* $(m+2)$*-boyutlu bir* $(\bar{M}, \bar{g})$ *yarı-Riemann manifoldunun bir hiperyüzeyi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir [25]:*

i) M, $\bar{M}$ *nin lightlike hiperyüzeyidir.*

ii) g, M *de sabit* m *rankına sahiptir.*

iii) $TM^{\perp} = \bigcup_{x \in M} T_xM^{\perp}$ *,* M *de bir distribüsyondur.*

Lemma 1.2.1 den açıkca görülür ki $S(TM)$, $Rad\,TM$ ye ortogonal ve non-dejeneredir. $S(TM)$, M üzerinde sabit indeksli olarak alınsın. Bu durumda

$$TM = S(TM) \perp TM^{\perp} \tag{1.2.1}$$

ortogonal direkt toplamı göz önüne alınabilir. Böylece

$$T\bar{M} = S(TM) \perp S(TM)^{\perp} \tag{1.2.2}$$

elde edilir. Burada $S(TM)^{\perp}$, $S(TM)$ ekran distribüsyonunun dik (ortogonal) tümleyen vektör demetidir. $ltr(TM)$, $S(TM)$ de $TM^{\perp}$ in tümleyen vektör demeti olmak üzere

$$S(TM)^{\perp} = TM^{\perp} \oplus ltr(TM) \tag{1.2.3}$$

dir. Burada $ltr(TM)$, lightlike transversal vektör demeti olarak adlandırılır [25].

Teorem 1.2.1. *$(M, g, S(TM))$, $(\bar{M}, \bar{g})$ yarı-Riemann manifoldunun lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda, M üzerinde*

$$\bar{g}(N, E) = 1, \tag{1.2.4}$$

ve

$$\bar{g}(N, N) = \bar{g}(N, W) = 0, \ \forall W \in \Gamma(S(TM)) \tag{1.2.5}$$

olacak şekilde bir tek $N \in \Gamma(ltr(TM))$ vardır öyleki ltr(TM)=SpN dir [25].

(1.2.4) ve (1.2.5) den

$$T\bar{M}_{|M} = S(TM) \perp \{TM^{\perp} \oplus ltr(TM)\} \tag{1.2.6}$$

elde edilir. Böylece herhangi bir $S(TM)$ ekran distribüsyonu için (1.2.4) ve (1.2.5) eşitliklerini sağlayan ve TM için tümleyen vektör demeti olan bir tek $ltr(TM)$ lightlike transversal vektör demeti vardır [25].

(M, g), $(m+2)$-boyutlu $(\bar{M}, \bar{g})$ yarı-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi ve $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ de Levi-Civita konneksiyonu olsun. Kabul edelim ki $S(TM)$ ve $ltr(TM)$ sırasıyla ekran distribüsyonu ve lightlike transversal vektör demeti olsun. Böylece M boyunca $T\bar{M}$ nin $\{\xi, N, W_i\}$, $1 < i < m$, lokal quasi-ortonormal vektör alanları göz önüne alınarak,

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y) \tag{1.2.7}$$

ve

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^t_X N \tag{1.2.8}$$

yazılabilir. Burada $X, Y \in \Gamma(TM)$; $N \in \Gamma(ltr(TM))$; $\nabla_X Y$, $A_N X \in \Gamma(TM)$ ve $h(X,Y)$, $\nabla^t_X N \in \Gamma(ltr(TM))$ dir. (1.2.7) ve (1.2.8) eşitlikleri sırasıyla Gauss ve Weingarten formülleri olarak adlandırılır. ∇, M üzerinde torsiyonsuz lineer konneksiyon; h, $\Gamma(ltr(TM))$-değerli simetrik bilineer form; ∇^t, $ltr(TM)$ üzerinde bir lineer konneksiyon ve A_N, M nin şekil operatörüdür.

Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$B(X,Y) = \bar{g}(h(X,Y), E) \tag{1.2.9}$$

ve

$$\tau(X) = \bar{g}(\nabla^t_X N, E)$$

olarak tanımlansın. Böylece (1.2.7) ve (1.2.8) eşitlikleri sırasıyla

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + B(X,Y)N \tag{1.2.10}$$

ve

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \tau(X)N \tag{1.2.11}$$

şeklinde ifade edilebilir [25].

Sonuç 1.2.1. *(M, g), $(m+2)$-boyutlu $(\bar{M}, \bar{g})$ yarı-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$B(X, E) = 0, \qquad \forall X \in \Gamma(TM),\ E \in \Gamma(TM^{\perp}) \tag{1.2.12}$$

dir. Yani, lightlike hiperyüzeyin ikinci temel formu dejeneredir [25].

Şimdi $P : \Gamma(TM) \to \Gamma(S(TM))$ projektif dönüşümünü göz önüne alalım. Bu durumda

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + h^*(X, PY), \qquad \forall X, Y \in \Gamma(TM) \tag{1.2.13}$$

ve

$$\nabla_X E = -A^*_E X + \nabla^{*t}_X E, \quad \forall X \in \Gamma(TM),\ E \in \Gamma(TM^{\perp}) \tag{1.2.14}$$

yazılabilir. Burada $\nabla^*_X PY, A^*_E X \in \Gamma(S(TM))$ ve $h^*(X, PY), \nabla^{*t}_X E \in \Gamma(TM^\perp)$ dir [25]. h^* ve A^*, sırasıyla $S(TM)$ nin ikinci temel formu ve şekil operatörü olarak adlandırılır. (1.2.13) ve (1.2.14) eşitliklerine sırasıyla $S(TM)$ için Gauss formülü ve Weingarten formülü denir.

(1.2.8), (1.2.10), (1.2.13) ve (1.2.14) eşitlikleri kullanılarak $X, Y \in \Gamma(TM)$, $E \in \Gamma(TM^\perp)$ ve $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için

$$g(A_N Y, PW) = \bar{g}(N, h^*(Y, PW)), \quad \bar{g}(A_N Y, N) = 0 \tag{1.2.15}$$

ve

$$g(A^*_E X, PY) = g(E, h^*(X, PY)), \quad \bar{g}\ (A^*_E X, N) = 0 \tag{1.2.16}$$

bulunur.

Şimdi $U \subset M$ koordinat komşuluğu üzerinde

$$C(X, PY) = \bar{g}(h^*(X, PY), N)$$

ve

$$\varepsilon(X) = \bar{g}(\nabla^{*t}_X E, N)$$

şeklinde tanımlansın. Buradan

$$h^*(X, PY) = C(X, PY)E \tag{1.2.17}$$

ve

$$\nabla^{*t}_X E = \varepsilon(X)E \tag{1.2.18}$$

bulunur. (1.2.17) ve (1.2.18) eşitlikleri (1.2.13) ve (1.2.14) de yerine yazılırsa

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + C(X, PY)E \tag{1.2.19}$$

ve

$$\nabla_X E = -A^*_E X + \varepsilon(X)E \tag{1.2.20}$$

elde edilir. Burada $\varepsilon(X) = -\tau(X)$ dir. Bu durumda (1.2.15) ve (1.2.16) eşitlikleri

$$g(A_N Y, PW) = C(Y, PW), \quad \bar{g}(A_N Y, N) = 0 \tag{1.2.21}$$

ve

$$g(A^*_E X, PY) = B(X, PY), \quad \bar{g}\ (A^*_E Y, N) = 0 \tag{1.2.22}$$

şeklinde yazılabilir [25].

Lemma 1.2.2. *(M, g), $(m+2)$-boyutlu $(\bar{M}, \bar{g})$ yarı-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $S(TM)$ ekran distribüsyonu üzerindeki konneksiyon ∇^* ve (M, g) üzerine indirgenmiş konneksiyon ∇ olmak üzere*

i) ∇^* lineer konneksiyonu bir metrik konneksiyondur.

ii) Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = B(X, Y)\theta(Z) + B(X, Z)\theta(Y) \tag{1.2.23}$$

dir. Burada $\theta(Y) = \bar{g}(Y, N)$ dir [25].

(1.2.23) eşitliği M üzerine indirgenmiş konneksiyonun bir metrik konneksiyon olmadığını gösterir.

Teorem 1.2.2. *(M, g), $(m+2)$-boyutlu $(\bar{M}, \bar{g})$ yarı-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $S(TM)$ ekran distribüsyonunun ∇ ya göre paralel olması için gerek ve yeter şart $C = 0$ olmasıdır [25].*

(M, g), $(\bar{M}, \bar{g})$ yarı-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ üzerindeki ve ∇, M üzerindeki lineer konneksiyon olmak üzere (1.2.7) ve (1.2.8) eşitlikleri kullanılarak her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} \bar{R}(X, Y)Z &= R(X, Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X \\ &\quad + (\nabla_X h)(Y, Z) - (\nabla_Y h)(X, Z) \end{aligned} \tag{1.2.24}$$

bulunur. Burada $\bar{R}$ ve R, sırasıyla $\bar{M}$ ve M nin Riemann eğrilik tensör alanı ve

$$(\nabla_X h)(Y, Z) = \nabla_X^t h(Y, Z) - h(\nabla_X Y, Z) - h(Y, \nabla_X Z) \tag{1.2.25}$$

dir.

Ayrıca her $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$, $E \in \Gamma(TM^\perp)$ ve $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, PW) &= g(R(X, Y)Z, PW) + B(X, Z)C(Y, PW) \\ &\quad - B(Y, Z)C(X, PW), \end{aligned} \tag{1.2.26}$$

$$\begin{aligned} g(R(X, Y)PZ, N) &= (\nabla_X C)(Y, PZ) - (\nabla_Y C)(X, PZ) \\ &\quad + \tau(Y)C(X, PZ) - \tau(X)C(Y, PZ), \end{aligned} \tag{1.2.27}$$

$$\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z,E) = (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) + \tau(X)B(Y,Z) - \tau(Y)B(X,Z), \quad (1.2.28)$$

ve

$$\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z,N) = \bar{g}(R(X,Y)Z,N) \quad (1.2.29)$$

dir.

Lemma 1.2.3. *(M,g), $(\bar{M},\bar{g})$ yarı-Riemann manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} \bar{R}(X,Y)Z &= R(X,Y)Z + B(X,Z)A_N Y - B(Y,Z)A_N X \\ &+ (\nabla_X B)(Y,Z)N + B(Y,Z)\tau(X)N \\ &- (\nabla_Y B)(X,Z)N - B(X,Z)\tau(Y)N \end{aligned} \quad (1.2.30)$$

dir [27].

1.3 Yarı-Riemann Manifoldların Lightlike Altmanifoldları

Tanım 1.3.1. *$(\bar{M},\bar{g})$, $(m+n)$-boyutlu bir yarı-Riemann manifold ve M, $\bar{M}$ nin bir n-boyutlu diferensiyellenebilir altmanifoldu olsun. Bu durumda*

$$\psi : M \to \bar{M}$$

dönüşümü bir izometrik immersiyon ($rank\psi = n$) ise M manifolduna $\bar{M}$ nin bir yarı-Riemann altmanifoldu denir [6].

Tanım 1.3.2. *$\bar{M}$, bir diferensiyellenebilir manifold ve D, $\bar{M}$ üzerinde r-boyutlu bir distribüsyon olsun. M, $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu olmak üzere, eğer M nin her p noktasında M manifoldunun tanjant uzayı ile D_p aynı ise M ye D distribüsyonunun integral manifoldu denir. Eğer D distribüsyonunun M altmanifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa bu manifolda distribüsyonun maksimal integral manifoldu denir [25].*

Tanım 1.3.3. *M, $\bar{M}$ diferensiyellenebilir manifoldun bir yarı-Riemann altmanifoldu olsun. Her $p \in M$ için $T_pM^\perp$ uzayının boyutuna M nin dik tümleyeninin boyutu (ek boyutu), $T_pM^\perp$ uzayının indeksine de M nin dik tümleyenin indeksi denir [6].*

Tanım 1.3.4. *$(m+n)$-boyutlu bir $\bar{M}$ yarı-Riemann manifoldunun ek boyutu n olan bir altmanifoldu M olsun. Bu durumda her $p \in M$ için*

$$Rad : p \in M \to Rad\ T_pM$$

dönüşümünün rankı r olmak üzere $r > 0$ ise M ye r-lightlike altmanifold denir.

$\bar{M}$ yarı-Riemann manifoldun bir r-lightlike altmanifoldu M, $Rad\,TM$ nin rankına, ek boyutuna ve boyutuna göre dört durumda incelenir:

1.Durum. $(0 < r < min\{m, n\})$. M manifoldunun tanjant demeti TM de, $Rad\ TM$ nin tamamlayanı olan $S(TM)$ ekran distribüsyonu göz önüne alalım. Lemma 1.1.1 den $S(TM)$, $Rad\ TM$ ye ortogonal ve $\bar{g}$ ye göre de non-dejeneredir. M üzerinde $S(TM)$ sabit indeksli olur ve tanjant demeti

$$TM = S(TM) \perp Rad\ TM \tag{1.3.1}$$

şeklinde yazılabilir. Buradan altmanifoldun tanjant demetine ortogonal olan

$$TM^{\perp} = \cup T_pM^{\perp}$$

ile tanımlanırsa M lightlike olduğu için $TM^{\perp}$, $T\bar{M}|_M$ de TM ye tamamlayan değildir. Çünkü $Rad\,TM = TM \cap TM^{\perp}$ ve M üzerinde $rank\ r > 0$ olan bir distribüsyondur. $TM^{\perp}$ de $Rad\,TM$ ye ortogonal tamamlayan bir vektör demetini $S(TM^{\perp})$ ile gösterelim. Lemma 1.1.1 e göre $\bar{g}$ metriği $S(TM^{\perp})$ üzerinde non-dejenere olduğundan, $TM^{\perp}$ demeti

$$TM^{\perp} = Rad\ TM \perp S(TM^{\perp}) \tag{1.3.2}$$

ortogonal direkt toplam şeklinde yazılabilir. Burada $S(TM)$ ve $S(TM^{\perp})$ vektör demetlerine, sırasıyla, M altmanifoldunun ekran distribüsyonu ve transversal ekran distribüsyonu denir. Buradan $S(TM)$ demeti $T\bar{M}|_M$ demetinin non-dejenere altvektör demeti olduğundan

$$T\bar{M}|_M = S(TM) \perp S(TM)^{\perp} \tag{1.3.3}$$

ortogonal direkt ayrışımı elde edilir. Burada $S(TM)^{\perp}$ demeti, $T\bar{M}|_M$ de $S(TM)$ demetine ortogonal tamamlayan vektör demetidir. Ayrıca $S(TM^{\perp})$ demeti, $S(TM)^{\perp}$ in altvektör demeti ve her ikisi de non-dejenere olduğundan

$$S(TM)^{\perp} = S(TM^{\perp}) \perp S(TM^{\perp})^{\perp} \tag{1.3.4}$$

yazılabilir.

Bundan sonra bir lightlike altmanifoldu $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ ile göstereceğiz. Ayrıca bu bölümde kullanılacak indisler $i, j, k \in \{1, ..., r\}$, $a, b, c \in \{r+1, ..., m\}$, $\alpha, \beta \in \{r+1, ..., n\}$ şeklindedir.

Teorem 1.3.1. *[25] $(\bar{M}, \bar{g})$ yarı-Riemann manifoldunun r-lightlike altmanifoldu $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$, bu altmanifoldun bir koordinat komşuluğu U ve $\{E_i\}$ de $\Gamma(Rad\, TM|_U)$ uzayının bir bazı olsun. Bu durumda $S(TM^{\perp})^{\perp}|_U$ altvektör demetinin*

$$g(N_i, E_j) = \delta_{ij}, \tag{1.3.5}$$

$$g(N_i, N_j) = 0 \tag{1.3.6}$$

olacak şekilde $\{N_1, ..., N_r\}$ diferensiyellenebilir vektör alanları vardır.

Teorem 1.3.2. *[25]$(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$, $(\bar{M}, \bar{g})$ yarı-Riemann manifoldunun r-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $i \in \{1, ..., r\}$ için $\{N_1, ..., N_r\}$ tabanı olan $S(TM^{\perp})^{\perp}$ demetinde $Rad\, TM$ ye komplement olan bir vektör demeti vardır.*

Teorem 1.3.2 de varlığından bahsedilen vektör demeti ile altmanifoldun tanjant demetinin ara kesiti sıfırdır. Bu vektör demetine $(S(TM), S(TM^{\perp}))$ çiftine göre M nin lightlike transversal vektör demeti denir ve $ltr(TM)$ ile gösterilir. Şimdi

$$tr(TM) = ltr(TM) \perp S(TM^{\perp}) \tag{1.3.7}$$

vektör demetini göz önüne alalım. $ltr(TM)$, M manifoldunun keyfi bir lightlike transversal vektör demetidir. Burada $tr(TM)$ nin rankı n ve TM ile arakesiti sıfırdır.

Böylece $trTM$, $T\bar{M}|_M$ de TM demetine komplement ancak ortogonal olmayan bir vektör demetidir. $tr(TM)$ vektör demetine M manifoldunun transversal vektör demeti denir. (1.3.1) ve (1.3.7) denklemlerinden

$$\begin{aligned} T\bar{M} &= TM \oplus tr(TM) \\ &= Rad\, TM \perp S(TM) \oplus ltr(TM) \perp S(TM^{\perp}) \\ &= S(TM) \perp S(TM^{\perp}) \perp (Rad\, TM \oplus ltr(TM)) \end{aligned} \tag{1.3.8}$$

elde edilir. Buradan M boyunca $\bar{M}$ manifoldu üzerindeki quasi-ortonormal çatı $i \in \{1, ..., r\}$, $a \in \{r+1, ..., m\}$ ve $\alpha \in \{r+1, ..., n\}$ olmak üzere $\{E_i, N_i, X_a, W_\alpha\}$

dır. $\{E_i\}$ ve $\{N_i\}$ sırasıyla $\Gamma(Rad\ TM|_U)$ ve $\Gamma(ltr(TM)|_U)$ vektör demetlerinin bazlarıdır. Ayrıca $\{X_a\}$ ve $\{W_\alpha\}$ da sırasıyla $\Gamma(S(TM))$ ve $\Gamma(S(TM^\perp))$ nin ortonormal bazlarıdır.

2.Durum. $(1 < r = n < m)$. Bu durumda $Rad\ TM = TM^\perp$, yani $S(TM^\perp) = \{0\}$. Böylece normal demet lightlike altmanifold üzerinde bir distribüsyon olur. Bu durumda M altmanifolduna coisotropik altmanifold denir ve M nin tanjant demeti

$$TM = S(TM) \perp TM^\perp \tag{1.3.9}$$

olacak şekilde ortogonal direkt toplamı yazılabilir. O halde (1.3.8) eşitliği

$$\begin{aligned} T\bar{M} &= TM \oplus ltr(TM) \\ &= S(TM) \perp \{TM^\perp \oplus ltr(TM)\} \end{aligned} \tag{1.3.10}$$

olur. Burada $ltr(TM)$, $S(TM)$ demetine göre M manifoldunun lightlike transversal vektör demetidir. Ayrıca M boyunca $\bar{M}$ manifoldu üzerindeki quasi-ortonormal çatı $\{E_1, ..., E_n, N_1, ..., N_n, X_{n+1}, ..., X_m\}$ dir. Burada $\{X_{n+1}, ..., X_m\}$ kümesi $\Gamma(S(TM)|_U)$ nun ortonormal bir bazıdır.

3.Durum. $(1 < r = m < n)$. Bu durumda $Rad\,TM = TM$, yani $S(TM) = \{0\}$. Böylece M manifoldunun tanjant demeti TM, $TM^\perp$ in altvektör demeti olur. Bu durumda M altmanifolduna isotropik altmanifold denir ve

$$TM^\perp = TM \perp S(TM^\perp) \tag{1.3.11}$$

dir. O halde (1.3.8) eşitliği

$$T\bar{M} = TM \oplus tr(TM) \tag{1.3.12}$$

olur. (1.3.12) eşitliğinde (1.3.7) eşitliği kullanılırsa

$$T\bar{M} = TM \oplus ltr(TM) \perp S(TM^\perp) \tag{1.3.13}$$

ayrışımı elde edilir. Ayrıca M boyunca $\bar{M}$ manifoldu üzerindeki quasi-ortonormal çatı $\{E_1, ..., E_m, N_1, ..., N_m, W_{n+1}, ..., W_n\}$ dir. Burada $\{W_{m+1}, ..., W_n\}$ kümesi $\Gamma(S(TM^\perp)|_U)$ nun ortonormal bir bazıdır.

4.Durum. ($1 < r = m = n$). Bu durumda $Rad\ TM = TM = TM^{\perp}$, yani $S(TM) = \{0\}$ ve $S(TM^{\perp}) = \{0\}$ dır. Buradan da görülüceği gibi ne bir ekran distribüsyonu ne de bir transversal ekran distribüsyonu vardır. Bu şekildeki M altmanifolduna tamamen lightlike altmanifold denir ve

$$T\bar{M} = TM \oplus ltr(TM)$$

direkt ayrışımı elde edilir. Ayrıca M boyunca $\bar{M}$ manifoldu üzerindeki quasi-ortonormal çatı $\{E_1, ..., E_m, N_1, ..., N_m\}$ ile verilir [25].

$(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$,$(m+n)$-boyutlu $(\bar{M}, \bar{g})$ yarı-Riemann manifoldunun n-boyutlu bir lightlike altmanifoldu olsun. $tr(TM)$, $(S(TM), S(TM^{\perp}))$ çiftine göre M nin transversal vektör demeti ve $\bar{\nabla}$, $\bar{M}$ nin Levi-Civita konneksiyonu olsun. TM ve $tr(TM)$, $T\bar{M}|_M$ demetinin tamamlayan altvektör demetleri olduğundan her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(tr(TM))$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X, Y), \tag{1.3.14}$$

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + \nabla^t_X V \tag{1.3.15}$$

olur. Burada $\nabla_X Y, A_V X \in \Gamma(TM)$ ve $h(X, Y), \nabla^t_X V \in \Gamma(tr(TM))$ dir. ∇ ve ∇^t sırasıyla M manifoldu ve $tr(TM)$ üzerindeki lineer konneksiyonlar olmak üzere $h : \Gamma(TM) \times \Gamma(TM) \to \Gamma(tr(TM))$ şeklinde bir simetrik bilineer formdur. h ya $tr(TM)$ demetine göre M manifoldunun ikinci temel formu denir. A da, $\Gamma(tr(TM)) \times \Gamma(TM)$ uzayı üzerinde tanımlanmış $\Gamma(TM)$ değerli bilineer formdur ve V ye göre M manifoldunun şekil operatörü olarak adlandırılır. ∇ ve ∇^t ye sırasıyla M manifoldu üzerine indirgenmiş lineer konneksiyon ve transversal lineer konneksiyon denir.

$S(TM^{\perp}) \neq \{0\}$ olduğunu kabul edelim. Yani M manifoldu 1. Durum ya da 4. Durumdaki gibi olsun. (1.3.7) ayrışımına göre $ltr(TM)$ ve $S(TM^{\perp})$ demetlerinin sırasıyla $tr(TM)$ üzerinde projeksiyon morfizmleri L ve S olmak üzere

$$L : tr(TM) \to ltr(TM) \text{ ve } S : tr(TM) \to S(TM^{\perp})$$

yazılabilir. Burada $h^l(X, Y) = Lh(X, Y)$, $h^s(X, Y) = Sh(X, Y)$ ve $D^l_X V = L(\nabla^t_X V)$, $D^s_X V = S(\nabla^t_X V)$. Bu durumda (1.3.14) ve (1.3.15) denklemlerinden

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h^l(X, Y) + h^s(X, Y), \tag{1.3.16}$$

$$\bar{\nabla}_X V = -A_V X + D^l_X V + D^s_X V \tag{1.3.17}$$

elde edilir. h^l ve h^s tensörlerine sırasıyla M altmanifoldun ikinci temel formu ve ekran ikinci temel formu denir [25].

Tanım 1.3.5. *[25] B bir vektör demeti ve P de vektör demet morfizmi, yani $P : E \to E$ olsun. Her $s \in \Gamma(E)$ için*

$$D_X : \Gamma(E) \to \Gamma(E)$$

$$s \to D_X s$$

diferensiyel operatörü aşağıdaki şartları sağlıyorsa P morfizmine göre Otsuki konneksiyon denir.

1) $D_{fX+Y} s = f D_X s + D_Y s$

2) $D_X(fs + \acute{s}) = D_X f s + X(f)P(s) + D_X \acute{s}$.

Önerme 1.3.1. *M, $\bar{M}$ manifoldunun r-lightlike ya da izotropik bir altmanifoldu olsun. Bu durumda D^l ve D^s diferensiyel operatörleri, sırasıyla L ve S vektör demet morfizmlerine göre $tr(TM)$ demeti üzerinde iki Otsuki konneksiyon tanımlar.*

Buradan her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(tr(TM))$ için tanıma göre

$$\nabla^l_X : \Gamma(ltr(TM)) \to \Gamma(ltr(TM))$$

$$LV \to \nabla^l_X(LV) = D^l_X(LV)$$

ve

$$\nabla^s_X : \Gamma(S(TM^\perp)) \to \Gamma(S(TM^\perp))$$

$$SV \to \nabla^s_X(SV) = D^s_X(SV)$$

diferensiyel operatörleri tanımlar. Burada ∇^l ve ∇^s, sırasıyla $ltr(TM)$ ve $S(TM^\perp)$ demetleri üzerinde lineer konneksiyonlardır. ∇^l ve ∇^s konneksiyonlarına altmanifold üzerinde sırasıyla lightlike transversal konneksiyon ve ekran transversal konneksiyon denir. Ayrıca her $X \in \Gamma(TM)$ ve $V \in \Gamma(tr(TM))$ için

$$D^l : \Gamma(TM) \times \Gamma(S(TM^\perp)) \to \Gamma(ltr(TM))$$

$$(X, SV) \to D^l_X SV = D^l(X, SV)$$

ve

$$D^s : \Gamma(TM) \times \Gamma(ltr(TM)) \to \Gamma(S(TM^\perp))$$

$$(X, LV) \to D^s_X LV = D^s(X, LV)$$

bilineer dönüşümleri tanımlanır. Bu dönüşümler (1.3.17) denkleminde uygulanırsa

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X V &= -A_V X + \nabla^l_X LV + \nabla^s_X SV \\ &\quad + D^l(X, SV) + D^s(X, LV) \end{aligned} \tag{1.3.18}$$

elde edilir.

Özel olarak $V \in \Gamma(tr(TM))$ yerine, sırasıyla $N \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $W \in \Gamma(S(TM^\perp))$ alınırsa her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^l_X N + D^s(X, N), \tag{1.3.19}$$

$$\bar{\nabla}_X W = -A_W X + \nabla^s_X W + D^l(X, W) \tag{1.3.20}$$

denklemlerine ulaşılır.

Şimdi M, $\bar{M}$ manifoldunun coisotropic ya da tamamen lightlike altmanifold olduğunu kabul edelim. Bu durumda ekran transversal vektör demeti olmadığından, (1.3.16) ve (1.3.18) denklemlerinden

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h^l(X, Y), \tag{1.3.21}$$

$$\bar{\nabla}_X N = -A_N X + \nabla^l_X N \tag{1.3.22}$$

elde edilir. Non-dejenere altmanifoldlarda olduğu gibi (1.3.14), (1.3.16) ve (1.3.21) denklemlerine Gauss formülü, (1.3.15), (1.3.17), (1.3.18), (1.3.19), (1.3.20) ve (1.3.22) denklemlerine de Weingarten formülü denir.

Gauss ve Weingarten formülleri ve $\bar{\nabla}$ nin metrik konneksiyon olduğu göz önüne alınırsa her $X, Y \in \Gamma(TM)$, $E \in \Gamma(Rad\, TM)$, $W \in \Gamma(S(TM^\perp))$, $N, \bar{N} \in \Gamma(ltr(TM))$ için

$$\bar{g}(h^s(X, Y), W) + \bar{g}(Y, D^l(X, W)) = g(A_W X, Y), \tag{1.3.23}$$

$$\bar{g}(h^l(X, Y), E) + \bar{g}(Y, h^l(X, E)) + g(Y, \nabla_X E) = 0, \tag{1.3.24}$$

$$\bar{g}(D^s(X,N),W) = \bar{g}(N, A_W X), \tag{1.3.25}$$

$$\bar{g}(A_N X, \bar{N}) + \bar{g}(A_{\bar{N}} X, N) = 0, \tag{1.3.26}$$

elde edilir [25].

P, $S(TM)$ demeti üzerinde TM nin projeksiyon dönüşümü olmak üzere (1.3.1) ayrışımından her $X, Y \in \Gamma(TM)$, $E \in \Gamma(Rad\ TM)$ için

$$\nabla_X PY = \nabla^*_X PY + h^*(X, PY) \tag{1.3.27}$$

ve

$$\nabla_X E = -A^*_E X + \nabla^{*t}_X E \tag{1.3.28}$$

yazılabilir. Burada $\nabla^*_X PY, A^*_E X \in \Gamma(S(TM))$ ve $h^*(X, PY), \nabla^{*t}_X E \in \Gamma(Rad\ TM)$ dir. ∇^* ve ∇^{*t} sırasıyla $S(TM)$ ve $Rad\ TM$ tamamlayan distribüsyonlar üzerinde lineer konneksiyonlardır. Ayrıca $h^* : \Gamma(TM) \times \Gamma(S(TM)) \to \Gamma(Rad\ TM)$ ve $A^* : \Gamma(TM) \times \Gamma(Rad\ TM) \to \Gamma(S(TM))$ şeklinde tanımlanan bilineer formlardır [25].

Yarı-Riemann manifoldun non-dejenere altmanifoldunun şekil operatörü ile ikinci temel formu arasındaki ilişki lightlike altmanifoldlarda $S(TM)$ ve $tr(TM)$ distribüsyonlarında ayrı ayrı vardır. Daha açık olarak (1.3.16), (1.3.17), (1.3.27) ve (1.3.28) denklemleri kullanılırsa her $X, Y \in \Gamma(TM)$, $E \in \Gamma(Rad\ TM)$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için

$$\bar{g}(h^l(X, PY), E) = \bar{g}(A^*_E X, PY), \tag{1.3.29}$$

$$\bar{g}(h^*(X, PY), N) = \bar{g}(A_N X, PY), \tag{1.3.30}$$

elde edilir. h^l simetrik olduğundan (1.3.29) denkleminden $S(TM)$ distribüsyonunun şekil operatörü $S(TM)$ üzerinde self-adjointtir. (1.3.24) denkleminde Y yerine E yazılırsa her $X \in \Gamma(TM)$ içim

$$\bar{g}(h^l(X, E), E) = 0 \tag{1.3.31}$$

elde edilir. (1.3.29) denkleminde X yerine E alınır ve (1.3.31) kullanılırsa

$$A^*_E E = 0 \tag{1.3.32}$$

olur [25].

Genel olarak, M üzerine indirgenmiş konneksiyon ∇ metrik konneksiyon değildir. $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyon olduğundan (1.3.16) denkleminden

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = \bar{g}(h^l(X,Y),Z) + \bar{g}(h^l(X,Z),Y) \tag{1.3.33}$$

elde edilir. Diğer taraftan ∇^*, $S(TM)$ üzerinde bir metrik konneksiyondur [25].

1.4 Hemen Hemen Parakontakt Manifoldlar

Bu kısımda hemen hemen parakontakt manifoldlar tanıtılarak, temel özellikleri verilecektir.

Tanım 1.4.1. *$\bar{M}$, $(2n+1)$-boyutlu bir diferensiyellenebilir manifold olsun. $\bar{M}$ üzerinde $\bar{\phi}$, $(1,1)$-tipinde bir tensör alanı; η, bir 1-form ve ξ de bir vektör alanı olmak üzere*

$$\bar{\phi}^2 = I - \eta \otimes \xi, \tag{1.4.1}$$

$$\eta(\xi) = 1, \tag{1.4.2}$$

şartları sağlanıyor ise $(\bar{\phi},\xi,\eta)$ üçlüsüne $\bar{M}$ üzerinde bir hemen hemen parakontakt yapı ve $(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta)$ ya da bir hemen hemen parakontakt manifold denir [10].

Önerme 1.4.1. *$\bar{M}^{2n+1}$ bir $(\bar{\phi},\eta,\xi)$ hemen hemen parakontakt yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Bu durumda*

$$\bar{\phi}\xi = 0, \tag{1.4.3}$$

$$\eta \circ \bar{\phi} = 0, \tag{1.4.4}$$

$$rank\bar{\phi} = 2n, \tag{1.4.5}$$

dir [10].

Tanım 1.4.2. *$(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta)$ bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Eğer $\bar{M}$ üzerinde*

$$\bar{g}(\bar{\phi}X,\bar{\phi}Y) = -\bar{g}(X,Y) + \eta(X)\eta(Y), \quad \forall X,Y \in \Gamma(T\bar{M}) \tag{1.4.6}$$

olacak şekilde bir $\bar{g}$ yarı-Riemann metriği var ise $\bar{M}$ ye hemen hemen parakontakt metrik manifold ve $\bar{g}$ metriğine de bağdaşabilir metrik denir. Açık olarak $\bar{g}$ metriği indeksi n olan bir yarı-Riemann metriktir [11].

Sonuç 1.4.1. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$, $(2n+1)$-boyutlu hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ için*

$$\bar{g}(\bar{\phi}X, Y) = -\bar{g}(X, \bar{\phi}Y) \tag{1.4.7}$$

ve

$$\eta(X) = \bar{g}(X, \xi) \tag{1.4.8}$$

dir [11].

Tanım 1.4.3. *$\bar{M}$, $(\bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Bu durumda $\bar{M}$ üzerinde*

$$\Phi(X, Y) = \bar{g}(X, \bar{\phi}Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(T\bar{M}) \tag{1.4.9}$$

şeklinde tanımlı Φ dönüşümüne, $(\bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ hemen hemen parakontakt yapısının temel iki formu denir.

Tanım 1.4.4. *$\bar{M}$, $(\bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. Eğer her $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ için*

$$\bar{g}(X, \bar{\phi}Y) = d\eta(X, Y) \tag{1.4.10}$$

ise $\bar{M}$ ye parakontakt metrik manifold ve η ya $\bar{M}$ nin parakontakt formu denir. Burada

$$d\eta(X, Y) = \frac{1}{2}\{X\eta(Y) - Y\eta(X) - \eta([X, Y])\} \tag{1.4.11}$$

dir.

$(2n+1)$-boyutlu bir $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ hemen hemen parakontakt metrik manifold için bir lokal ortonormal baz inşa edilebilir. Kabul edelim ki U, $\bar{M}$ üzerinde bir koordinat komşuluğu ve X_1, ξ ye dik olacak şekilde U üzerinde herhangi bir birim vektör alanı olsun. Bu durumda $\bar{\phi}X_1$, X_1 ve ξ ye ortogonal vektör alanı ve $\mid \bar{\phi}X_1 \mid^2 = -1$ dir. ξ, X_1 ve $\bar{\phi}X_1$ e ortogonal olacak şekilde bir X_2 birim vektör alanını seçilirse $\bar{\phi}X_2$, X_1, $\bar{\phi}X_1$, X_2 ve ξ ye ortogonal vektör alanı ve $\mid \bar{\phi}X_2 \mid^2 = -1$ olur. Bu şekilde devam ederek $\bar{\phi}$-bazı olarak adlandırılan bir $\{X_i, \bar{\phi}X_i, \xi\}$, $(i = 1, ..., n)$ lokal ortonormal bazı elde edilir [11].

Örnek 1.4.1. $\mathbb{R}^{2n+1}$, (x_i, y_i, z), $(i = 1, ..., n)$, *standart koordinat sistemi ile verilen reel uzay olsun.* $\mathbb{R}^{2n+1}$ *üzerinde*

$$\bar{\phi}\frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial y_i}, \qquad \bar{\phi}\frac{\partial}{\partial y_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}, \qquad \bar{\phi}\frac{\partial}{\partial z} = 0$$

$$\eta = dz, \qquad \xi = \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\bar{g} = \eta \otimes \eta + \sum_{i=1}^{n} dx_i \otimes dx_i - \sum_{i=1}^{n} dy_i \otimes dy_i$$

olacak şekilde $\bar{\phi}$ $(1,1)$*-tensör alanını,* η *1-formunu,* ξ *vektör alanını ve* $\bar{g}$ *metriğini tanımlayalım. Bu durumda*

$$\eta(\xi) = dz(\frac{\partial}{\partial z}) = 1 \tag{1.4.12}$$

dir. $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ *için*

$$X = a_i\frac{\partial}{\partial x_i} + b_i\frac{\partial}{\partial y_i} + c\frac{\partial}{\partial z} \in \Gamma(T\bar{M}) \qquad (i = 1, ..., n)$$

$$Y = d_i\frac{\partial}{\partial x_i} + e_i\frac{\partial}{\partial y_i} + f\frac{\partial}{\partial z} \in \Gamma(T\bar{M}) \qquad (i = 1, ..., n)$$

olmak üzere

$$\eta(X) = c, \quad \eta(Y) = f$$

olduğundan

$$\begin{aligned}
\bar{\phi}^2(X) &= \bar{\phi}(\bar{\phi}(X)) \\
&= \bar{\phi}\left(\bar{\phi}\left(a_i\frac{\partial}{\partial x_i} + b_i\frac{\partial}{\partial y_i} + c\frac{\partial}{\partial z}\right)\right) \\
&= \bar{\phi}\left(a_i\frac{\partial}{\partial y_i} + b_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&= a_i\frac{\partial}{\partial x_i} + b_i\frac{\partial}{\partial y_i} \\
&= X - \eta(X)\xi
\end{aligned} \tag{1.4.13}$$

elde edilir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}
(\eta \circ \bar{\phi})(X) &= \eta(\bar{\phi}(X)) \\
&= \eta\left(a_i\frac{\partial}{\partial y_i} + b_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&= dz\left(a_i\frac{\partial}{\partial y_i} + b_i\frac{\partial}{\partial x_i}\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{1.4.14}$$

ve

$$\bar{\phi}(\xi) = \bar{\phi}(\frac{\partial}{\partial z}) = 0 \tag{1.4.15}$$

dır. Böylece $(\bar{\phi}, \xi, \eta)$, $\mathbb{R}^{2n+1}$ *üzerinde bir hemen hemen parakontakt yapı olur. Ek olarak*

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{\phi}(X), \bar{\phi}(Y)) &= \bar{g}(a_i\frac{\partial}{\partial y_i} + b_i\frac{\partial}{\partial x_i}, d_i\frac{\partial}{\partial y_i} + e_i\frac{\partial}{\partial x_i}) \\
&= -a_i d_i + b_i e_i \\
&= -\bar{g}(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \qquad (1.4.16)
\end{aligned}$$

olduğundan $\bar{g}$ *bir bağdaşabilir metrik ve* $(\mathbb{R}^{2n+1}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *bir hemen hemen parakontakt metrik manifolddur.*

Tanım 1.4.5. V *bir reel vektör uzayı olmak üzere*

$$J : V \to V$$

lineer dönüşümü

$$J^2 = I$$

şartını sağlıyor ise J *ye* V *üzerinde bir parakompleks yapı denir.*

$(2n + 1)$-boyutlu bir hemen hemen parakontakt manifold $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta)$ olsun. $\bar{M}^{2n+1} \times \mathbb{R}$ çarpım manifoldunu göz önüne alalım. $\bar{M}^{2n+1} \times \mathbb{R}$ üzerinde herhangi bir vektör alanı

$$\left(X, f\frac{d}{dt}\right)$$

şeklindedir. Burada X, $\bar{M}$ ye teğet bir vektör alanı; t, $\mathbb{R}$ nin bir koordinatı ve f, $\bar{M}^{2n+1} \times \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı bir diferensiyellenebilir fonksiyondur.

$\bar{M}^{2n+1} \times \mathbb{R}$ üzerinde bir hemen hemen parakompleks yapı J

$$J\left(X, f\frac{d}{dt}\right) = \left(\bar{\phi}X + f\xi, \eta(X)\frac{d}{dt}\right) \tag{1.4.17}$$

ile tanımlanır [40].

Tanım 1.4.6. $\bar{M}$ *bir diferensiyellenebilir manifold olmak üzere* $\bar{M}$ *üzerinde* $(1,1)$*-tipinde tensör alanı* F *olsun. Her* $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ *için*

$$N_F(X, Y) = F^2[X, Y] + [FX, FY] - F[FX, Y] - F[X, FY] \tag{1.4.18}$$

şeklinde tanımlı N_F *tensör alanına* F *nin Nijenhuis tensör alanı denir.*

Eğer özel olarak F yerine J hemen hemen parakompleks yapısı alınırsa

$$\begin{aligned} N_J(X,Y) &= J^2[X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY] \\ &= [X,Y]+[JX,JY]-J[JX,Y]-J[X,JY] \end{aligned} \tag{1.4.19}$$

olur [16].

Tanım 1.4.7. *$(\bar{M},J)$ hemen hemen parakompleks manifold olsun. Eğer $N_J=0$ ise J dönüşümüne integrallenebilirdir denir [11].*

Tanım 1.4.8. *$(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta)$ bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. $\bar{M}\times\mathbb{R}$ üzerindeki bir J hemen hemen parakompleks yapısı integrallenebilir ise $(\bar{\phi},\xi,\eta)$ hemen hemen parakontakt yapısına normaldir denir [11].*

$(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta)$ bir hemen hemen parakontakt manifold ve $N_{\bar{\phi}}$, $\bar{\phi}$ nin Nijenhuis tensör alanı olsun. Bu durumda $X,Y\in\Gamma(T\bar{M})$ için

$$N_{\bar{\phi}}(X,Y)=\bar{\phi}^2[X,Y]+[\bar{\phi}X,\bar{\phi}Y]-\bar{\phi}[\bar{\phi}X,Y]-\bar{\phi}[X,\bar{\phi}Y] \tag{1.4.20}$$

dir.

$\bar{M}\times\mathbb{R}$ üzerindeki J hemen hemen parakompleks yapısının *Nijenhuis tensör alanı* bir tensör alanı N_J, $(1,2)$-tipinde bir tensör alanı olduğundan $X,Y\in\Gamma(T\bar{M})$ için

$$\begin{aligned} N_J((X,0),(Y,0)) &= J^2[(X,0),(Y,0)]+[J(X,0),J(Y,0)] \\ &\quad -J[J(X,0),(Y,0)]-J[(X,0),J(Y,0)] \\ &= \big(([X,Y],0)+[\bar{\phi}X,\bar{\phi}Y],(\bar{\phi}X\eta(Y)-\bar{\phi}Y\eta(X))\tfrac{d}{dt}\big) \\ &\quad -\big(\bar{\phi}[\bar{\phi}X,Y]-Y\eta(X)\xi,\eta([\bar{\phi}X,Y])\tfrac{d}{dt}\big) \\ &\quad -\big(\bar{\phi}[X,\bar{\phi}Y]+X\eta(Y)\xi,\eta([X,\bar{\phi}Y])\tfrac{d}{dt}\big) \\ &= (N_{\bar{\phi}}(X,Y)-2d\eta(X,Y)\xi,((\pounds_{\bar{\phi}X}\eta)Y-(\pounds_{\bar{\phi}Y}\eta)X)\tfrac{d}{dt}) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} N_J((X,0),(0,\tfrac{d}{dt})) &= \big[\big(\bar{\phi}X,\eta(X)\tfrac{d}{dt}\big),(\xi,0)\big]-J\left[(X,0),(\xi,0)\right] \\ &= \big([\bar{\phi}X,\xi],-\xi(\eta(X))\tfrac{d}{dt}\big)-\big(\bar{\phi}[X,\xi],\eta[X,\xi]\tfrac{d}{dt}\big) \\ &= \big((\pounds_\xi\bar{\phi})X,(\pounds_\xi\eta)X\tfrac{d}{dt}\big) \end{aligned}$$

dir. (1.4.20) eşitliği göz önüne alınarak

$$N^{(1)}(X,Y) = N_{\bar{\phi}}(X,Y) - 2d\eta(X,Y)\xi, \tag{1.4.21}$$

$$N^{(2)}(X,Y) = (\pounds_{\bar{\phi}X}\eta)Y - (\pounds_{\bar{\phi}Y}\eta)X, \tag{1.4.22}$$

$$N^{(3)}(X) = (\pounds_{\xi}\bar{\phi})X, \tag{1.4.23}$$

$$N^{(4)}(X) = (\pounds_{\xi}\eta)X \tag{1.4.24}$$

yazılır. Açık olarak $(\bar{\phi},\xi,\eta)$ hemen hemen parakontakt yapının normal olması için gerek ve yeter şart $N^{(1)} = N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$ olmasıdır [11].

Önerme 1.4.2. $(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta)$ *bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Bu durumda* $N^{(1)} = 0$ *ise o zaman* $N^{(2)} = N^{(3)} = N^{(4)} = 0$ *dır [11].*

İspat. (1.4.21) eşitliğinde $Y = \xi$ alınırsa

$$N^1(X,\xi) = N_{\bar{\phi}}(X,\xi) - 2d\eta(X,\xi)\xi$$

yazılır. Bu durumda (1.4.20) eşitliğinden

$$\begin{aligned} N_{\bar{\phi}}(X,\xi) &= [X,\xi] + [\bar{\phi}X,\bar{\phi}\xi] - \bar{\phi}[\bar{\phi}X,\xi] \\ &\quad -\bar{\phi}[X,\bar{\phi}\xi] - \eta([\xi,X])\xi \\ &= [X,\xi] + \bar{\phi}[\xi,\bar{\phi}X] - \eta([\xi,X])\xi \end{aligned}$$

ve (1.4.11) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 2d\eta(X,\xi) &= X(\eta(\xi)) - \xi\eta(X) - \eta([X,\xi]) \\ &= -\xi\eta(X) - \eta([X,\xi]) \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} N^1(X,\xi) &= N_{\bar{\phi}}(X,Y) - 2d\eta(X,Y)\xi \\ &= [X,\xi] + \bar{\phi}[\xi,\bar{\phi}X] + \xi(\eta(X))\xi \end{aligned}$$

elde edilir. Eğer $N^{(1)} = 0$ ise

$$[X,\xi] + \bar{\phi}[\xi,\bar{\phi}X] + \xi(\eta(X))\xi = 0 \tag{1.4.25}$$

dır. Buradan

$$\eta([X,\xi]) = -\xi(\eta(X)) \tag{1.4.26}$$

olduğu görülür. (1.4.26) eşitliği (1.4.11) eşitliği eşitliğinde kullanılırsa

$$N^{(4)}(X) = 0$$

bulunur. (1.4.25) eşitliğinin her iki tarafına $\bar{\phi}$ uygulanırsa

$$\bar{\phi}([X, \xi]) = [\bar{\phi}X, \xi]$$

elde edilir. Bu son eşitlik (1.4.23) eşitliğinde kullanılırsa

$$N^{(3)}(X) = 0$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} N_{\bar{\phi}}(\bar{\phi}X, Y) &= [\bar{\phi}X, Y] + [\bar{\phi}^2 X, \bar{\phi}Y] - \bar{\phi}[\bar{\phi}^2 X, Y] \\ &\quad -\bar{\phi}[\bar{\phi}X, \bar{\phi}Y] - \eta[\bar{\phi}X, Y]\xi \\ &= [\bar{\phi}X, Y] + [X, \bar{\phi}Y] - [\eta(X)\xi, \bar{\phi}Y] \\ &\quad -\bar{\phi}[X, Y] + \bar{\phi}[\eta(X)\xi, Y] \\ &\quad -\bar{\phi}[\bar{\phi}X, \bar{\phi}Y] - \eta[\bar{\phi}X, Y]\xi \end{aligned}$$

dır. Yukarıdaki son eşitlikte $\bar{\phi}([\xi, Y]) = [\xi, \bar{\phi}Y]$ eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} N_{\bar{\phi}}(\bar{\phi}X, Y) &= [\bar{\phi}X, Y] + [X, \bar{\phi}Y] + \bar{\phi}Y(\eta(X)\xi) \\ &\quad -\bar{\phi}[X, Y] - \bar{\phi}[\bar{\phi}X, \bar{\phi}Y] - \eta[\bar{\phi}X, Y]\xi \end{aligned} \tag{1.4.27}$$

olur. Ayrıca

$$\begin{aligned} 2d\eta(\bar{\phi}X, Y)\xi &= [\bar{\phi}X(\eta(Y)) - Y(\eta(\bar{\phi}X)]\xi - \eta[\bar{\phi}X, Y]\xi \\ &= \bar{\phi}X(\eta(Y))\xi - \eta([\bar{\phi}X, Y])\xi \end{aligned} \tag{1.4.28}$$

dır. (1.4.27) ve (1.4.28) ifadeleri $N^{(1)} = 0$ eşitliğinde yerine yazılırsa $N^{(2)}(X, Y) = 0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Önerme 1.4.3. *$\bar{M}$, $(\bar{\phi}, \xi, \eta)$ hemen hemen parakontakt yapısına sahip bir hemen hemen parakontakt manifold olsun. Bu durumda $(\bar{\phi}, \xi, \eta)$ hemen hemen parakontakt yapısının normal olması için gerek ve yeter şart $N_{\bar{\phi}} - 2d\eta \otimes \xi = 0$ olmasıdır [11].*

Tanım 1.4.9. $(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$, $(2n+1)$*-boyutlu bir parakontakt metrik manifold olsun. Eğer* ξ *bir Killing vektör alanı ise bu durumda* $\bar{M}$ *üzerindeki parakontakt yapıya* K*-parakontakt yapı ve* $\bar{M}$ *manifolduna da* K*-parakontakt manifold denir.*

Önerme 1.4.4. $(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$ *bir parakontakt manifold olsun. Bu durumda* $\bar{M}$ *nin bir* K*-parakontakt manifold olması için gerek ve yeter şart*

$$\bar{\nabla}_X\xi = -\bar{\phi}X \tag{1.4.29}$$

olmasıdır [11].

İspat. $\bar{M}$ bir K-parakontakt manifold olsun. Bu durumda ξ vektör alanı $\bar{g}$ ye göre bir Killing vektör alanı olduğundan her $X,Y\in\Gamma(T\bar{M})$ için

$$\begin{aligned}
0 \;=(L_\xi\bar{g})(X,Y) \quad &= L_\xi\bar{g}(X,Y)-\bar{g}(L_\xi X,Y)-\bar{g}(X,L_\xi Y)\\
&= \xi\bar{g}(X,Y)-\bar{g}(\bar{\nabla}_\xi X-\bar{\nabla}_X\xi,Y)\\
&\quad -\bar{g}(X,\bar{\nabla}_\xi Y-\bar{\nabla}_Y\xi)\\
&= \xi\bar{g}(X,Y)-\bar{g}(\bar{\nabla}_\xi X,Y)+\bar{g}(\bar{\nabla}_X\xi,Y)\\
&\quad -\bar{g}(X,\bar{\nabla}_\xi Y)+\bar{g}(X,\bar{\nabla}_Y\xi)\\
&= \xi\bar{g}(X,Y)-\bar{g}(\bar{\nabla}_\xi X,Y)-\bar{g}(X,\bar{\nabla}_\xi Y)\\
&\quad +\bar{g}(\bar{\nabla}_X\xi,Y)+\bar{g}(X,\bar{\nabla}_Y\xi)\\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_X\xi,Y)+\bar{g}(X,\bar{\nabla}_Y\xi)
\end{aligned}$$

yazılır. Buradan

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X\xi,Y) = -\bar{g}(X,\bar{\nabla}_Y\xi) \tag{1.4.30}$$

olur. Diğer taraftan (1.1.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
2\bar{g}(\bar{\nabla}_X\xi,Y) \quad &= X\bar{g}(\xi,Y)+\xi\bar{g}(X,Y)-Y\bar{g}(X,\xi)\\
&\quad +\bar{g}([X,\xi],Y)+\bar{g}([Y,X],\xi)-\bar{g}([\xi,Y],X)\\
&= X\eta(Y)+\xi\bar{g}(X,Y)-Y\eta(X)\\
&\quad +\bar{g}([X,\xi],Y)-\eta([X,Y])\\
&\quad -\bar{g}([\xi,Y],X)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
2\bar{g}(\bar{\nabla}_Y\xi,X) \quad &= Y\eta(X)+\xi\bar{g}(Y,X)-X\eta(Y)\\
&\quad +\bar{g}([\xi,Y],X)+\eta([X,Y])+\bar{g}([X,\xi],Y)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Son iki eşitlik ve (1.4.30) eşitliğinden

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X \xi, Y) = d\eta(X, Y)$$

elde edilir. O halde (1.4.10) eşitliği göz önüne alınarak her $Y \in \Gamma(T\bar{M})$ için

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X \xi, Y) = \bar{g}(-\bar{\phi}X, Y)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Önerme 1.4.5. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. Bu durumda*

$$\begin{aligned} 2\bar{g}((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y, Z) &= -d\Phi(X, Y, Z) - d\Phi(X, \bar{\phi}Y, \bar{\phi}Z) \\ &\quad -N^{(1)}(Y, Z, \bar{\phi}X) + N^{(2)}(Y, Z)\eta(X) \\ &\quad -2d\eta(\bar{\phi}Z, X)\eta(Y) + 2d\eta(\bar{\phi}Y, X)\eta(Z) \end{aligned} \tag{1.4.31}$$

dir. Özel olarak, eğer $\bar{M}$ bir parakontakt metrik manifold ise

$$\begin{aligned} 2\bar{g}((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y, Z) &= -N^{(1)}(Y, Z, \bar{\phi}X) - 2d\eta(\bar{\phi}Z, X)\eta(Y) \\ &\quad +2d\eta(\bar{\phi}Y, X)\eta(Z) \end{aligned} \tag{1.4.32}$$

dir [11].

İspat. (1.1.1) ile verilen Koszul formülü ve

$$\begin{aligned} d\Phi(X, Y, Z) &= X\Phi(Y, Z) + Y\Phi(Z, X) - Z\Phi(X, Y) \\ &\quad -\Phi([X, Y], Z) - \Phi([Z, X], Y) \\ &\quad -\Phi[Y, Z], X) \end{aligned}$$

eşitliği göz önüne alınarak (1.4.31) eşitliğine ulaşılır. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} 2\bar{g}((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y, Z) &= 2\bar{g}(\bar{\nabla}_X(\bar{\phi}Y), Z) - 2\bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_X Y, Z) \\ &= 2\bar{g}(\bar{\nabla}_X(\bar{\phi}Y), Z) + 2\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \bar{\phi}Z) \\ &= X\bar{g}(\bar{\phi}Y, Z) + \bar{\phi}Y\bar{g}(X, Z) \\ &\quad -Z\bar{g}(X, \bar{\phi}Y) + \bar{g}([X, \bar{\phi}Y], Z) \\ &\quad -\bar{g}([\bar{\phi}Y, Z], X) + \bar{g}([Z, X], \bar{\phi}Y) \\ &\quad +X\bar{g}(Y, \bar{\phi}Z) + Y\bar{g}(\bar{\phi}Z, X) \\ &\quad -\bar{\phi}Z\bar{g}(X, Y) + \bar{g}([X, Y], \bar{\phi}Z) \\ &\quad -\bar{g}([Y, \bar{\phi}Z], X) + \bar{g}([\bar{\phi}Z, X], Y) \end{aligned} \tag{1.4.33}$$

dir. Burada (1.4.9) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
2\bar{g}((\bar{\nabla}_X\bar{\phi})Y,Z) &= -X\Phi(Y,Z)+\bar{\phi}Y\bar{g}(X,Z)-Z\Phi(X,Y)\\
&+\bar{g}([X,\bar{\phi}Y],Z)+\Phi([Z,X],Y)\\
&-\bar{g}([\bar{\phi}Y,Z],X)+X\Phi(Y,Z)\\
&+Y\Phi(X,Z)-\bar{\phi}Z\bar{g}(X,Y)\\
&+\Phi([X,Y],Z)-\bar{g}([Y,\bar{\phi}Z],X)\\
&+\bar{g}([\bar{\phi}Z,X],Y)
\end{aligned} \tag{1.4.34}$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}
d\Phi(X,\bar{\phi}Y,\bar{\phi}Z) &= X\Phi(\bar{\phi}Y,\bar{\phi}Z)+\bar{\phi}Y\Phi(\bar{\phi}Z,X)\\
&-\bar{\phi}Z\Phi(X,\bar{\phi}Y)-\Phi([X,\bar{\phi}Y],\bar{\phi}Z)\\
&-\Phi([\bar{\phi}Z,X],\bar{\phi}Y)-\Phi([\bar{\phi}Y,\bar{\phi}Z],X)
\end{aligned}$$

eşitliğinde (1.4.9) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
d\Phi(X,\bar{\phi}Y,\bar{\phi}Z) &= -X\Phi(Y,Z)-\bar{\phi}Y g(X,Z)+\bar{\phi}Y(\eta(X)\eta(Z))\\
&+\bar{\phi}Z g(X,Y)-\bar{\phi}Z(\eta(X)\eta(Y))\\
&-\bar{g}([X,\bar{\phi}Y],Z)+\eta([X,\bar{\phi}Y])\eta(Z)\\
&-\bar{g}([\bar{\phi}Z,X],Y)+\eta([\bar{\phi}Z,X])\eta(Y)\\
&-\Phi([\bar{\phi}Y,\bar{\phi}Z],X)
\end{aligned} \tag{1.4.35}$$

olur. Diğer yandan (1.4.21) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
N^{(1)}(Y,Z,\bar{\phi}X) &= \bar{g}(N^{(1)}(Y,Z),\bar{\phi}X)\\
&= \bar{g}([Y,Z],\bar{\phi}X)+\bar{g}([\bar{\phi}Y,\bar{\phi}Z],\bar{\phi}X)\\
&-\bar{g}(\bar{\phi}[\bar{\phi}Y,Z],\bar{\phi}X)-\bar{g}(\bar{\phi}[Y,\bar{\phi}Z],\bar{\phi}X)\\
&-\bar{g}(Y(\eta(Z))\xi,\bar{\phi}X)+\bar{g}(Z(\eta(Y))\xi,\bar{\phi}X)\\
&= \Phi([Y,Z],X)+\Phi([\bar{\phi}Y,\bar{\phi}Z],X)\\
&+\bar{g}([\bar{\phi}Y,Z],X)-\eta([\bar{\phi}Y,Z])\eta(X)\\
&+\bar{g}([Y,\bar{\phi}Z],X)-\eta([Y,\bar{\phi}Z])\eta(X)
\end{aligned} \tag{1.4.36}$$

bulunur. Aynı şekilde (1.4.22) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
N^{(2)}(Y,Z)\eta(X) &= (\bar{\phi}Y\eta(Z)-\eta([\bar{\phi}Y,Z]))\eta(X)\\
&-(\bar{\phi}Z\eta(Y)-\eta([\bar{\phi}Z,Y]))\eta(X)\\
&= \bar{\phi}Y\eta(Z)\eta(X)-\eta([\bar{\phi}Y,Z])\eta(X)\\
&-\bar{\phi}Z\eta(Y)\eta(X)+\eta([Y,\bar{\phi}Z])\eta(X)
\end{aligned} \tag{1.4.37}$$

elde edilir. Ayrıca (1.4.10) eşitliğinin kullanılmasyla

$$2d\eta(\bar{\phi}Z,X)\eta(Y) = \bar{\phi}Z\eta(Y)\eta(X) - \eta([\bar{\phi}Z,X])\eta(Y), \tag{1.4.38}$$

$$2d\eta(\bar{\phi}Y,X)\eta(Z) = \bar{\phi}Y\eta(Z)\eta(X) - \eta([\bar{\phi}Y,X])\eta(Z) \tag{1.4.39}$$

eşitlikleri elde edilir. (1.4.35), (1.4.36), (1.4.37), (1.4.38) ve (1.4.39) eşitliklerinin kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}
& -d\Phi(X,Y,Z) - d\Phi(X,\bar{\phi}Y,\bar{\phi}Z) - N^{(1)}(Y,Z,\bar{\phi}X) \\
& +N^{(2)}(Y,Z)\eta(X) - 2d\eta(\bar{\phi}Z,X)\eta(Y) + 2d\eta(\bar{\phi}Y,X)\eta(Z) \\
= \; & -X\Phi(Y,Z) - Y\Phi(Z,X) - Z\Phi(X,Y) + \Phi([X,Y],Z) \\
& +\Phi([Z,X],Y) + \Phi([Y,Z],X) + X\Phi(Y,Z) \\
& +\bar{\phi}Yg(Z,X) - \bar{\phi}Y(\eta(Z)\eta(X)) - \bar{\phi}Z\bar{g}(X,Y) \\
& +\bar{\phi}Z(\eta(Y)\eta(X)) + \bar{g}([X,\bar{\phi}Y],Z) - \eta([X,\bar{\phi}Y])\eta(Z) \\
& +\bar{g}([\bar{\phi}Z,X],Y) - \eta([\bar{\phi}Z,X])\eta(Y) + \Phi([\bar{\phi}Y,\bar{\phi}Z],X) \\
& -\Phi([Y,Z],X) - \Phi([\bar{\phi}Y,\bar{\phi}Z],X) - \bar{g}([\bar{\phi}Y,Z],X) \\
& +\eta([\bar{\phi}Y,Z])\eta(X) - \bar{g}([Y,\bar{\phi}Z],X) + \eta([Y,\bar{\phi}Z])\eta(X) \\
& +\bar{\phi}Y\eta(Z)\eta(X) - \eta([\bar{\phi}Y,Z])\eta(X) - \bar{\phi}Z\eta(Y)\eta(X) \\
& -\eta([Y,\bar{\phi}Z])\eta(X) - \bar{\phi}Z\eta(Y)\eta(X) + \eta([\bar{\phi}Z,X])\eta(Y) \\
& +\bar{\phi}Y\eta(Z)\eta(X) - \eta([\bar{\phi}Y,X])\eta(Z) \\
= \; & \bar{\phi}Y\bar{g}(Z,X) - \bar{\phi}Z\bar{g}(X,Y) + \bar{g}([X,\bar{\phi}Y],Z) \\
& -Y\Phi(X,Z) - Z\Phi(X,Y) + \Phi([X,Y],Z) \\
& +\Phi([Z,X],Y) - \bar{g}([\bar{\phi}Y,Z],X) - \bar{g}([Y,\bar{\phi}Z],X) \\
& -\bar{\phi}Y(\eta(X)\eta(Z)) + \bar{\phi}Z(\eta(X)\eta(Y)) + \bar{\phi}Y(\eta(Z)\eta(X)) \\
& -\bar{\phi}Z(\eta(Y)\eta(X)) + \bar{\phi}Y(\eta(X)\eta(Z)) - \bar{\phi}Z(\eta(Y)\eta(X))
\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
2\bar{g}((\bar{\nabla}_X\varphi)Y,Z) &= -d\Phi(X,Y,Z) - d\Phi(X,\bar{\phi}Y,\bar{\phi}Z) \\
& -N^{(1)}(Y,Z,\bar{\phi}X) + N^{(2)}(Y,Z)\eta(X) \\
& -2d\eta(\bar{\phi}Z,X)\eta(Y) + 2d\eta(\bar{\phi}Y,X)\eta(Z)
\end{aligned} \tag{1.4.40}$$

bulunur.

$\bar{M}$ nin $\Phi = d\eta$ ve $N^{(2)} = 0$ ile bir $(\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$ parakontakt metrik yapısı için

$$\begin{aligned}
2\bar{g}((\bar{\nabla}_X\bar{\phi})Y,Z) &= -N^{(1)}(Y,Z,\bar{\phi}X) - 2d\eta(\bar{\phi}Z,X)\eta(Y) \\
& +2d\eta(\bar{\phi}Y,X)\eta(Z)
\end{aligned} \tag{1.4.41}$$

olduğu aşikardır. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Lemma 1.4.1. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir parakontakt metrik manifold olsun. Bu durumda $h = \frac{1}{2}N^{(3)}$ ile tanımlı bir simetrik operatördür ve*

$$\bar{\nabla}_X \xi = -\bar{\phi}X + \bar{\phi}hX, \tag{1.4.42}$$

$$\bar{\phi}h + h\bar{\phi} = 0, \tag{1.4.43}$$

$$trh = 0 = h\xi \tag{1.4.44}$$

dir [11].

İspat. $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir parakontakt metrik manifold olsun. $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ için (1.4.22) eşitliğinden

$$N^{(2)}(X,Y) = \bar{\phi}X\eta(Y) - \bar{\phi}Y\eta(X) - \eta([\bar{\phi}X, Y]) + \eta([X, \bar{\phi}Y])$$

yazılabilir. $\bar{M}$ parakontakt metrik manifold olduğundan son eşitlikte $Y = \xi$ alınırsa

$$0 = -\eta([\bar{\phi}X, \xi]$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned} 2d\eta(\bar{\phi}X, \xi) &= \bar{\phi}X\eta(\xi) - \bar{\phi}\xi\eta(X) - \eta([\bar{\phi}X, \xi]) \\ &= -\eta([\bar{\phi}X, \xi]) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.4.45}$$

olur. (1.4.32) eşitliğinde $X = \xi$ alınıp (1.4.45) kullanılırsa her $Y, Z \in \Gamma(T\bar{M})$ için

$$\begin{aligned} 2\bar{g}((\bar{\nabla}_\xi \bar{\phi})Y, Z) &= -N^{(1)}(Y, Z, \bar{\phi}\xi) - 2d\eta(\bar{\phi}Z, \xi)\eta(Y) \\ &\quad +2d\eta(\bar{\phi}Y, \xi)\eta(Z) \\ &= 0 \end{aligned} \tag{1.4.46}$$

bulunur. Bu ise $\bar{\nabla}_\xi \bar{\phi} = 0$ olduğunu gösterir.

Ayrıca $(\bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ parakontakt metrik yapısı için ξ karekteristik vektör alanının integral eğrilerinin birer geodezik olduğu yani $\bar{\nabla}_\xi \xi = 0$ olduğu kolayca görülebilir.

Böylece

$$\begin{aligned}\bar{g}((\pounds_\xi\bar{\phi})X,Y) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_\xi\bar{\phi}X-\bar{\nabla}_{\bar{\phi}X}\xi-\bar{\phi}\bar{\nabla}_\xi X+\bar{\phi}\bar{\nabla}_X\xi,Y)\\ &= -\bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}X}\xi,Y)+\bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_X\xi,Y)\end{aligned}$$

dir. X veya Y yerine ξ alınırsa $\bar{g}(\pounds_\xi\bar{\phi})X,Y)=0$ olur. Karekteristik vektör alanı ξ ye ortogonal X ve Y için $\eta([\bar{\phi}X,Y])+\eta([X,\bar{\phi}Y])=0$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}g((\pounds_\xi\bar{\phi})X,Y) &= \eta(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}X}Y)+\eta(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}Y}X)\\ &= \bar{g}(\pounds_\xi\bar{\phi})Y,X)\end{aligned}\tag{1.4.47}$$

elde edilir. Son ifade için (1.4.32) kullanılırsa

$$\begin{aligned}2\bar{g}((\bar{\nabla}_X\bar{\phi})\xi,Z) &= -N^{(1)}(\xi,Z,\bar{\phi}X)-2d\eta(\bar{\phi}Z,X)\eta(\xi)\\ &\quad +2d\eta(\bar{\phi}\xi,X)\eta(Z)\\ &= -\bar{g}(N^{(1)}(\xi,Z),\bar{\phi}X)-2d\eta(\bar{\phi}Z,X)\eta(\xi)\end{aligned}$$

bulunur. Son eşitlikte (1.4.10) ve (1.4.21) eşitliklerinden

$$2\bar{g}((\bar{\nabla}_X\bar{\phi})\xi,Z)=-\bar{g}(\pounds_\xi\bar{\phi})Z,X)+2\bar{g}(X,Z)-2\eta(X)\eta(Z)\tag{1.4.48}$$

elde edilir. (1.4.47) eşitliği (1.4.48) denkleminde kullanılırsa

$$2\bar{g}((\bar{\nabla}_X\bar{\phi})\xi,Z)=-\bar{g}(\pounds_\xi\bar{\phi})X,Z)+2\bar{g}(X,Z)-2\eta(X)\eta(Z)\tag{1.4.49}$$

olur ve buradan

$$\bar{\phi}\bar{\nabla}_X\xi=hX-X+\eta(X)\xi\tag{1.4.50}$$

bulunur. (1.4.50) eşitliğinin her iki tarafı $\bar{\phi}$ ile işleme tabi tutulursa

$$\bar{\nabla}_X\xi=-\bar{\phi}X+\bar{\phi}hX\tag{1.4.51}$$

elde edilir. Son oarak

$$\begin{aligned}2\bar{g}(X,\bar{\phi}Y) &= 2d\eta(X,Y)=\bar{g}(\bar{\nabla}_X\xi,Y)-\bar{g}(X,\nabla_Y\xi)\\ &= \bar{g}(-\bar{\phi}X+\bar{\phi}hX,Y)-\bar{g}(X,-\bar{\phi}Y+\bar{\phi}hY)\\ &= -\bar{g}(\bar{\phi}X,Y)+\bar{g}(\bar{\phi}hX,Y)+\bar{g}(X,\bar{\phi}Y)-\bar{g}(X,\bar{\phi}hY)\\ 0 &= \bar{g}(\bar{\phi}hX,Y)+\bar{g}(h\bar{\phi}X,Y)\end{aligned}$$

olduğundan $\bar{\phi}h + h\bar{\phi} = 0$ elde edilir. (1.4.50) eşitliğinden $h\xi = 0$ olduğu görülür. Bu anti-komutatifliğin bir sonucu olarak eğer $hX = \lambda X$ ise o zaman $h\bar{\phi}X = -\lambda\bar{\phi}X$ dir. Böylece λ, h nın bir eigen değeri ise $-\lambda$ da bir eigen değeridir ve $trh = 0$ dır. □

Lemma 1.4.2. *Bir parakontakt metrik manifoldda*

$$(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}X}\bar{\phi})\bar{\phi}Y - (\bar{\nabla}_X\bar{\phi})Y = 2\bar{g}(X,Y)\xi - (X - hX + \eta(X)\xi)\eta(Y)$$

dir [11].

Teorem 1.4.1. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. $\bar{M}$ nin bir para-Sasakian manifold olması için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ için*

$$(\bar{\nabla}_X\bar{\phi})Y = -\bar{g}(X,Y)\xi + \eta(Y)X \tag{1.4.52}$$

olmasıdır [11].

İspat. $(\bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir hemen hemen parakontakt metrik yapı ise $\Phi = d\eta$ ve $N^{(2)} = 0$ dır ve böylece (1.4.41) eşitliğinden

$$2\bar{g}((\bar{\nabla}_X\bar{\phi})Y, Z) = 2d\eta(\bar{\phi}Y, X)\eta(Z) - 2d\eta(\bar{\phi}Z, X)\eta(Y) \tag{1.4.53}$$

olur. (1.4.53) eşitliğinde (1.4.1) ve (1.4.10) eşitlikleri kullanılırsa

$$2\bar{g}((\bar{\nabla}_X\bar{\phi})Y, Z) = 2\bar{g}(X,Z)\eta(Y) - 2\bar{g}(X,Y)\eta(Z) \tag{1.4.54}$$

bulunur. Böylece (1.4.52) ile verilen eşitlik elde edilir.

Tersine kabul edelim ki (1.4.52) eşitliği sağlansın. Bu eşitlikte $Y = \xi$ alınırsa

$$(\bar{\nabla}_X\bar{\phi})\xi = -\bar{\phi}\bar{\nabla}_X\xi = X - \eta(X)\xi$$

bulunur. Buradan ise

$$\bar{\nabla}_X\xi = -\bar{\phi}X$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} 2d\eta(X,Y) &= -\bar{g}(\bar{\phi}X, Y) + \bar{g}(X, \bar{\phi}Y) \\ &= 2\bar{g}(X, \bar{\phi}Y) \end{aligned}$$

olur. Böylece $(\bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir parakontakt metrik yapı olduğu görülür.

Ayrıca

$$
\begin{aligned}
N_{\bar{\phi}}(X,Y) - 2d\eta(X,Y)\xi \quad &= [\bar{\phi}X, \bar{\phi}Y] - \bar{\phi}[\bar{\phi}X, Y] - \bar{\phi}[X, \bar{\phi}Y] \\
&+\bar{\phi}^2[\bar{\phi}X, Y] - 2d\eta(X,Y)\xi \\
&= (\nabla_{\bar{\phi}X}\bar{\phi})Y - (\nabla_{\bar{\phi}Y}\bar{\phi})X - \bar{\phi}(\nabla_X\bar{\phi})Y \\
&+\bar{\phi}(\nabla_Y\bar{\phi})X - 2d\eta(X,Y)\xi \\
&= -\bar{g}(\bar{\phi}X, Y)\xi + \eta(Y)\bar{\phi}X + \bar{g}(\bar{\phi}Y, X)\xi \\
&-\eta(X)\bar{\phi}Y - \eta(Y)\bar{\phi}X + \eta(X)\bar{\phi}Y \\
&-2d\eta(X,Y)\xi \\
&= 2\bar{g}(X, \bar{\phi}Y)\xi - 2d\eta(X,Y)\xi \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olduğundan ispat tamamlanır. □

Örnek 1.4.2. *[41] (J, G), $\mathbb{R}^{2n+2}_n$ yarı-Öklid uzayında*

$$J(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}) = \frac{\partial}{\partial x_{\alpha+n+1}}, \qquad J(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha+n+1}}) = \frac{\partial}{\partial x_\alpha},$$

$$G(\frac{\partial}{\partial x_\alpha}, \frac{\partial}{\partial x_\alpha}) = 1, \quad G(\frac{\partial}{\partial x_{\alpha+n+1}}, \frac{\partial}{\partial x_{\alpha+n+1}}) = -1, \quad \alpha = 1, ..., n$$

ile verilen bir standart flat para-Kähler yapı olsun. Burada $(x_1, x_2, ..., x_{2n+2})$, $\mathbb{R}^{2n+2}_n$ üzerinde kartezyen koordinatlardır.

$\mathbb{R}^{2n+2}_{n+1}$ de

$$H^{2n+1}_n = \{x \in \mathbb{R}^{2n+2}_{n+1} : \sum_{\alpha=1}^{n+1} x_a^2 - \sum_{\alpha=n+2}^{2n+2} x_a^2 = -1\}$$

ile tanımlanan hiperyüzeyi göz önüne alalım. Bu durumda

$$N = \sum_{\alpha=n+2}^{2n+2} x_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

vektör alanı H^{2n+1}_n hiperyüzeyinin normal vektör alanıdır ve $G(N,N) = -1$ dir.

H^{2n+1}_n üzerinde bir ξ vektör alanı, bir $\bar{\phi}$ $(1,1)$- tipinde tensör alanı, bir η 1-formu ve bir $\bar{g}$ yarı-Riemann metriğini

$$J(X) = \bar{\phi}X - \eta(X)N, \qquad \xi = -JN, \qquad \bar{g} = G\mid_{H^{2n+1}_n} \tag{1.4.55}$$

ile tanımlayalım. Böylece $(\bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$, H_n^{2n+1} *üzerinde bir hemen hemen parakontakt metrik yapı olur.* H_n^{2n+1} *hiperyüzeyi için Weingarten formülü*

$$D_X N = X$$

şeklindedir. Burada D, G *metriğinin Levi-Civita konneksiyonudur. Buradan şekil operatörü* $A = -I$ *ve ikinci temel form* $h(X,Y) = g(X,Y)$ *elde edilir.* J *paralel olduğundan (1.4.55) eşitliği kullanılarak*

$$\begin{aligned} 0 &= (D_X J)\xi \\ &= D_X J\xi - J D_X \xi \\ &= -D_X N - J(\bar{\nabla}_X \xi + h(X,\xi)N) \\ &= -X - \bar{\phi}\bar{\nabla}_X \xi + \eta(X)\xi \end{aligned} \tag{1.4.56}$$

elde edilir. Burada $\bar{\nabla}$, $\bar{g}$ *nin Levi-Civita konneksiyonudur.*

(1.4.56) eşitliğinin her iki tarafına $\bar{\phi}$ *uygulanırsa*

$$\bar{\nabla}_X \xi = -\bar{\phi}X$$

olur. Buradan

$$d\eta(X,Y) = \frac{1}{2}\big(\bar{g}(\bar{\nabla}_X \xi, Y) - \bar{g}(\bar{\nabla}_Y \xi, X)\big) = \bar{g}(X, \bar{\phi}Y)$$

elde edilir. Böylece $(\bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *parakontakt metrik yapı olur. Ayrıca (1.4.55) eşitliği kullanılırsa*

$$\begin{aligned} 0 &= (D_X J)Y \\ &= D_X(\bar{\phi}Y - \eta(Y)N) - J(\bar{\nabla}_X Y + g(X,Y)N) \\ &= \bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y + g(X,\bar{\phi}Y)N - (X\eta(Y)N - \eta(Y)X \\ &\quad -\bar{\phi}\bar{\nabla}_X Y + \eta(\bar{\nabla}_X Y)N + \bar{g}(X,Y)\xi \\ &= (\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y + \bar{g}(X,Y)\xi - \eta(Y)X \\ &\quad -((\bar{\nabla}_X \eta)Y - g(X,\bar{\phi}Y))N \end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitliğin teğet kısmı göz önüne alınırsa

$$(\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y = -\bar{g}(X,Y)\xi + \eta(Y)X$$

yazılır. Böylece $(\bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *yapısının para-Sasakian yapı olduğu görülür.*

Önerme 1.4.6. $(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$ *bir para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda her* $X,Y\in\Gamma(T\bar{M})$ *için*

$$R(X,Y)\xi=\eta(X)Y-\eta(Y)X, \tag{1.4.57}$$

dır.

Teorem 1.4.2. *[42]* $(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$, $2n+1$*-boyutlu* $(n>1)$ *bir para-Sasakian manifold olsun. Eğer paraholomorfik kesitsel eğrilik noktadan bağımsız ise*

$$\begin{aligned}\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z,W) &= \tfrac{k-3}{4}\left(\bar{g}(Y,Z)\bar{g}(X,W)-\bar{g}(X,Z)\bar{g}(Y,W)\right)\\ &+\tfrac{k+1}{4}\begin{pmatrix}\bar{g}(X,Z)\eta(Y)\eta(W)+\bar{g}(Y,W)\eta(X)\eta(Z)\\ -\bar{g}(X,W)\eta(Y)\eta(Z)-\bar{g}(Y,Z)\eta(X)\eta(W)\\ +\bar{g}(Y,\bar{\phi}Z)\bar{g}(\bar{\phi}X,W)-\bar{g}(X,\bar{\phi}Z)\bar{g}(\bar{\phi}Y,W)\\ +2\bar{g}(\bar{\phi}X,Y)\bar{g}(\bar{\phi}Z,W)\end{pmatrix}\end{aligned} \tag{1.4.58}$$

dır.

Tanım 1.4.10. *[42] Eğer* $\bar{M}$ *manifoldu üzerinde paraholomorfik kesitsel eğrilik sabit ise* $\bar{M}$ *ye para-Sasakian uzay form denir. Bir para-Sasakian uzay form* $\bar{M}(k)$ *ile gösterilir.*

BÖLÜM 2
PARA-SASAKIAN MANİFOLDLARIN NON-DEJENERE ALTMANİFOLDLARI

Para-Sasakian manifoldların non-dejenere altmanifoldlarının incelendiği bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda invaryant altmanifoldlar çalışıldı. İkinci kısımda anti-invaryant altmanifoldlara yer verildi. Son kısımda ise semi-invaryant altmanifoldlar tanıtıldı ve bu altmanifoldların bazı özellikleri incelendi.

2.1 İnvaryant Altmanifoldlar

Bu kısımda invaryant altmanifoldlar tanıtılarak bazı özellikleri verilecektir. Ayrıca invaryant altmanifoldların, semi-paralel ve 2-semi-paralel olması için gerek ve yeter şartlar incelenecektir.

Tanım 2.1.1. $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *bir para-Sasakian manifold ve* M *de* $\bar{M}$ *nin* $\xi \in \Gamma(TM)$ *olacak şekilde bir altmanifoldu olsun. Eğer her* $x \in M$ *için* $\bar{\phi}(T_xM) \subset T_xM$ *ise* M *ye* $\bar{M}$ *nin invaryant altmanifoldu denir.*

Lemma 2.1.1. M, $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *para-Sasakian manifoldunun* $\xi \in \Gamma(TM)$ *olacak şekilde bir invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda her* $X \in \Gamma(TM)$ *için*

$$h(X, \xi) = 0, A_N\xi = 0, \tag{2.1.1}$$

$$h(X, \bar{\phi}Y) = h(\bar{\phi}X, Y) = \bar{\phi}h(X, Y), \tag{2.1.2}$$

$$\bar{\phi}A_NX = -A_N\bar{\phi}X = A_{\bar{\phi}N}X, \tag{2.1.3}$$

dir.

İspat. $\bar{M}$ bir para-Sasakian manifold ve $\xi \in \Gamma(TM)$ olduğundan Gauss formülü kullanılarak

$$-\bar{\phi}X = \bar{\nabla}_X\xi = \nabla_X\xi + h(X,\xi)$$

yazılabilir. Böylece (2.1.1) eşitliği elde edilir. $X, Y \in \Gamma(TM)$ için Gauss formülünden

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X\bar{\phi}Y &= \nabla_X\bar{\phi}Y + h(X,\bar{\phi}Y)\\ &= (\nabla_X\bar{\phi})Y + \bar{\phi}\nabla_X Y + h(X,\bar{\phi}Y)\\ &= -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X + \bar{\phi}\nabla_X Y + h(X,\bar{\phi}Y) \qquad (2.1.4)\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned}\bar{\nabla}_X\bar{\phi}Y &= (\nabla_X\bar{\phi})Y + \bar{\phi}\nabla_X Y\\ &= -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X + \bar{\phi}\nabla_X Y + \bar{\phi}h(X,Y) \qquad (2.1.5)\end{aligned}$$

dir. (2.1.4) ve (2.1.5) eşitlikleri karşılaştırılırsa

$$h(X,\bar{\phi}Y) = \bar{\phi}h(X,Y)$$

elde edilir. M nin ikinci temel formu h simetrik olduğundan (2.1.2) eşitliğine ulaşılır. Son olarak $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(TM^{\perp})$ için M nin ikinci temel formu ile şekil operatörü arasındaki ilişki göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}g(A_N\bar{\phi}X, Y) &= g(h(\bar{\phi}X,Y),N)\\ &= g(\bar{\phi}h(X,Y),N)\\ &= -g(h(X,Y),\bar{\phi}N)\\ &= -g(A_{\bar{\phi}N}X,Y)\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$A_N\bar{\phi}X = -A_{\bar{\phi}N}X$$

elde edilir. Benzer şekilde

$$g(A_N X,\bar{\phi}Y) = g(h(\bar{\phi}X,Y),N)$$

olduğundan (1.4.7) eşitliği kullanılarak

$$g(\bar{\phi}A_N X,Y) = g(A_{\bar{\phi}N}X,Y)$$

bulunur. Buradan ise

$$\bar{\phi}A_N X = A_{\bar{\phi}N} X$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Önerme 2.1.1. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir invaryant altmanifoldu olsun. M nin ikinci temel formu paralel ise M tamamen geodeziktir.*

İspat. M nin ikinci temel formu h paralel ise $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$0 = (\nabla_X h)(Y, \xi) = \nabla_X h(Y, \xi) - h(\nabla_X Y, \xi) - h(Y, \nabla_X \xi)$$

dir. (2.1.1) ve (1.4.29) eşitliklerinden

$$h(\bar{\phi}X, Y) = 0$$

elde edilir. O halde (2.1.2) eşitliğinden M nin tamamen geodezik olduğu görülür ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 2.1.1. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir invaryant altmanifoldu olsun.Eğer M tamamen umbilik ise tamamen geodeziktir.*

İspat. (2.1.1) eşitliğinden $h(\xi, \xi) = 0$ dır. Eğer M tamamen umbilik ise

$$h(\xi, \xi) = 0 = \mu g(\xi, \xi)$$

olacağından $\mu = 0$ elde edilir. O halde her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $h(X, Y) = 0$ olur ve ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 2.1.2. *M, $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifoldun $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda M altmanifoldunun bir semi-paralel altmanifold olması için gerek ve yeter şart M nin tamamen geodezik olmasıdır.*

İspat. M nin bir semi-paralel altmanifold olduğunu kabul edelim. Böylece (1.1.7) eşitliğinden

$$R^{\perp}(X, Y)h(Z, W) - h(R(X, Y)Z, W) - h(Z, R(X, Y)W) = 0$$

yazılabilir. Son denklemde $X = W = \xi$ alınırsa

$$R^{\perp}(\xi, Y)h(Z, \xi) - h(R(\xi, Y)Z, \xi) - h(Z, R(\xi, Y)\xi) = 0$$

olur. M invaryant altmanifold olduğundan yukarıdaki eşitlikten

$$h(Z, R(\xi, Y)\xi) = 0 \tag{2.1.6}$$

elde edilir. Bu durumda (2.1.1) ve (1.4.57) eşitlikleri (2.1.6) eşitliğinde kullanılırsa $Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$h(Z, Y) = 0$$

bulunur.

Tersine M tamamen geodezik ise M nin semi-paralel olacağı açıktır. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 2.1.3. $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *bir para-Sasakian manifold ve* M *de* $\bar{M}$ *nin* $\xi \in \Gamma(TM)$ *olacak şekilde bir invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda* M *nin ikinci temel formunun paralel olması için gerek ve yeter şart* M *nin tamamen geodezik olmasıdır.*

İspat. M nin ikinci temel formunun paralel olduğunu kabul edelim. (1.1.6) eşitliğinde $Z = \xi$ alınırsa

$$h(Y, \nabla_X \xi) = 0$$

elde edilir. Böylece (1.4.52) eşitliği kullanılarak

$$h(Y, \bar{\phi}X) = 0$$

olduğu görülür. Bu son eşitlikte X yerine $\bar{\phi}X$ alınıp (1.4.1) eşitliği kullanılırsa M altmanifoldunun invaryant olduğuda göz önüne alındığında her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$h(Y, X) = 0$$

bulunur. O halde M tamamen geodezik olur.

Tersine M tamamen geodezik ise ikinci temel form h nın paralel olacağı açıktır. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 2.1.4. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda M altmanifoldunun 2-semi-paralel altmanifold olması için gerek ve yeter şart M nin tamamen geodezik olmasıdır.*

İspat. M invaryant altmanifoldun 2-semi-paralel olduğunu kabul edelim. Böylece (1.1.8) eşitliğinde $X = W = \xi$ alınırsa

$$\begin{aligned} 0 &= R^{\perp}(\xi, Y)(\hat{\nabla} h(Z, \xi, U) - (\hat{\nabla} h)(R(\xi, Y)Z, \xi, U) \\ &\quad -(\hat{\nabla} h)(Z, R(\xi, Y)\xi, U) - (\hat{\nabla} h)(Z, \xi, R(\xi, Y)U) \end{aligned}$$

yazılabilir. Bu son eşitlikte (1.1.6) ve (1.4.57) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= R^{\perp}(\xi, Y)h(\bar{\phi}Z, U) + \eta(Z)h(\bar{\phi}Y, U) - \nabla^{\perp}_{Z} h(Y, U) \\ &\quad +h(\nabla_Z R(\xi, Y)\xi, U) + h(Y, \nabla_Z U) - \eta(U)h(\bar{\phi}Z, Y) \end{aligned} \tag{2.1.7}$$

elde edilir. Buradan (2.1.7) eşitliğinde $U = \xi$ seçilir ve (2.1.1) eşitliği göz önüne alınırsa

$$h(Y, \nabla_Z \xi) - \eta(\xi)h(\bar{\phi}Z, Y) = 0$$

bulunur. Bu son (1.4.2) ve (1.4.52) eşitlikleri kullanılarak

$$h(\bar{\phi}Z, Y) = 0 \tag{2.1.8}$$

elde edilir. O halde (2.1.8) eşitliğinde Z yerine $\bar{\phi}Z$ alınıp (1.4.1) eşitliği ile birlikte M altmanifoldunun invaryant olduğu göz önüne alınırsa

$$h(Z, Y) = 0$$

bulunur. Böylece M tamamen geodezik olur.

Tersine M tamamen geodezik ise M nin 2-semi-paralel olacağı açıktır. Böylece ispat tamamlanır. □

2.2 Anti-İnvaryant Altmanifoldlar

Bu kısımda para-Sasakian manifoldların anti-invaryant altmanifoldları incelenecektir.

Tanım 2.2.1. *M, $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifoldun bir altmanifoldu olsun. Eğer her $x \in M$ için $\bar{\phi}(T_x M) \subset T_x M^{\perp}$ ise M ye $\bar{M}$ nin bir anti-invaryant altmanifoldu denir.*

Teorem 2.2.1. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir altmanifoldu olsun. Bu durumda M üzerinde indirgenmiş konneksiyona göre ξ nın paralel olması için gerek ve yeter şart M nin bir anti-invaryant altmanifold olmasıdır.*

İspat. ξ nın M üzerine indirgenmiş ∇ konneksiyonuna göre paralel olduğunu kabul edelim. Gauss formülü ve (1.4.29) eşitliğinden

$$\bar{\phi}X = -\nabla_X \xi - h(X, \xi) = -h(X, \xi) \tag{2.2.1}$$

elde edilir. Buradan her $X \in \Gamma(TM)$ için $\bar{\phi}X \in T_X M^{\perp}$ olur. Bu ise M nin bir anti-invaryant altmanifold olduğunu gösterir.

Tersine, M bir anti-invaryant altmanifold ise Gauss formülü ve (1.4.29) eşitliğinden $\nabla_X \xi = 0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 2.2.2. *M, $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifoldun bir altmanifoldu olsun. Eğer $\xi \in \Gamma(TM^{\perp})$, ise M bir anti-invaryant altmanifolddur.*

İspat. $\xi \in \Gamma(TM^{\perp})$ olduğundan Weingarten formülü ve (1.4.29) eşitliğinden her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} g(\bar{\phi}X, Y) &= -g(\bar{\nabla}_X \xi, Y) \\ &= g(A_\xi X, Y) - g(\nabla^{\perp}_X \xi, Y) \\ &= g(A_\xi X, Y) \end{aligned}$$

yazılabilir. (1.4.7) eşitliği ve şekil operatörünün simetrik olduğu göz önüne alınırsa

$$A_\xi = 0$$

elde edilir. Buradan $\bar{\phi}X \in \Gamma(TM^{\perp})$ elde edilir. Böylece M, $\bar{M}$ nin bir anti-invaryant altmanifoldu olur ve ispat tamamlanır. □

Teorem 2.2.3. $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *para-Sasakian manifold ve* M *de* $\bar{M}$ *nin* $\xi \in \Gamma(TM^{\perp})$ *olacak şekilde bir altmanifoldu olsun. Bu durumda* M *nin bir anti-invaryant altmanifold olması için gerek ve yeter şart* M *nin tamamen geodezik olmasıdır.*

İspat. M nin bir anti-invaryant altmanifold olduğunu kabul edelim. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(A_{\xi}X, Y) = 0$$

olduğundan $h(X, Y) = 0$ elde edilir.

Tersine M bir tamamen geodezik altmanifold olsun. Bu durumda Weingarten formülü ve (1.4.29) eşitliğinden

$$g(\bar{\phi}X, Y) = g(A_{\xi}X, Y) = g(h(X, Y), \xi) = 0$$

elde edilir. O halde g non-dejenere olduğundan her $X \in \Gamma(TM)$ için $\bar{\phi}X \in \Gamma(TM^{\perp})$ olur ki bu da M nin bir anti-invaryant altmanifold olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. □

2.3 Semi-İnvaryant Altmanifoldlar

Bu kısımda semi-invaryant altmanifoldun tanımı ve bu tipteki altmanifoldlara örnekler verilerek distribüsyonlarla ilgili bazı özellikler incelenecektir.

Tanım 2.3.1. $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *bir hemen hemen parakontakt metrik manifold ve* M, $\bar{M}$ *nin bir altmanifoldu olsun. Eğer* M *üzerinde*

i) $TM = D \perp D^{\perp} \perp < \xi >, \quad \xi \in \Gamma(TM)$,

ii) D *distribüsyonu* $\bar{\phi}$ *invaryant, yani* $\bar{\phi}(D) = D$,

iii) $D^{\perp}$ *distribüsyonu* $\bar{\phi}$ *invaryant, yani* $\bar{\phi}(D^{\perp}) \subseteq TM^{\perp}$

olacak şekilde D *ve* $D^{\perp}$ *disrtibüsyonları var ise* M *ye* $\bar{M}$ *nin bir semi-invaryant altmanifoldu denir [43].*

$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir hemen hemen parakontakt metrik manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ için fX ve wX sırasıyla $\bar{\phi}X$ in teğet ve normal bileşenleri olmak üzere

$$\bar{\phi}X = fX + wX, \tag{2.3.1}$$

yazılabilir. Benzer şekilde herhangi bir $N \in \Gamma(TM^{\perp})$ için

$$\bar{\phi}N = BN + CN, \tag{2.3.2}$$

yazılabilir. Burada BN ve CN, $\bar{\phi}N$ in teğet ve normal bileşenlerini göstermektedir. Bu durumda (2.3.1) ve (2.3.2) eşitliklerinen

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_X\bar{\phi})Y &= [(\nabla_X f)Y - A_{wX}Y - Bh(X,Y)] \\ &\quad + [(\nabla_X w)Y + h(X,fY) - Ch(X,Y)]\,,\end{aligned} \tag{2.3.3}$$

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_X\bar{\phi})N &= [(\nabla_X B)N - A_{CN}X - fA_N X] \\ &\quad + [(\nabla_X C)N + h(X,BN) - wA_N X]\end{aligned} \tag{2.3.4}$$

elde edilir. Burada

$$(\nabla_X f)Y = \nabla_X fY - f\nabla_X Y, \qquad (\nabla_X w)Y = \nabla^{\perp}_X wY - w\nabla_X Y, \tag{2.3.5}$$

$$(\nabla_X B)N = \nabla_X BN - B\nabla^{\perp}_X N, \quad (\nabla_X C)N = \nabla^{\perp}_X CN - C\nabla^{\perp}_X N \tag{2.3.6}$$

dir.

Örnek 2.3.1. *Kabul edelim ki $\bar{M} = \mathbb{R}^9$, Örnek 1.4.1 de verilen $(\bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ yapısı ile birlikte hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. $\bar{M}$ nin*

$$x^1 = -y^1,\ x^2 = -y^2,\ x^3 = x^4,\ y^3 = 0,\ y^4 = 0,$$

ile verilen bir M altmanifoldunu göz önüne alalım. Bu durumda

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial x^1} - \frac{\partial}{\partial y^1}$$

$$U_2 = \frac{\partial}{\partial x^2} - \frac{\partial}{\partial y^2}$$

$$U_3 = \frac{\partial}{\partial x^3} + \frac{\partial}{\partial x^4}$$

$$U_4 = \frac{\partial}{\partial z}$$

olmak üzere $Sp\{U_1, U_2, U_3, U_4\} = TM$ dir.

$$N_1 = -\frac{\partial}{\partial x^1} + \frac{\partial}{\partial y^1}$$

$$N_2 = -\frac{\partial}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y^2}$$
$$N_3 = -\frac{\partial}{\partial x^3} - \frac{\partial}{\partial x^4}$$
$$N_4 = -\frac{\partial}{\partial y^3} - \frac{\partial}{\partial y^4}$$
$$N_5 = \frac{\partial}{\partial y^3} + \frac{\partial}{\partial y^4}$$

olmak üzere $Sp\{N_1, N_2, N_3, N_4, N_5\} = TM^{\perp}$ *dir. Eğer*

$$D = Sp\{U_1, U_2\}, D^{\perp} = Sp\{U_3\}, \bar{D} = Sp\{N_1, N_2, N_3, N_4\},\ \bar{D}^{\perp} = Sp\{N_5\}$$

olarak alınırsa

$$\bar{\phi}D = D,\ \bar{\phi}D^{\perp} = \bar{D}^{\perp},\ \bar{\phi}\bar{D} = \bar{D}$$

olduğu görülür. Böylece M*,* $\bar{M}$ *manifoldunun 4-boyutlu bir semi-invaryant altmanifoldu olur.*

Teorem 2.3.1. $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *bir para-Sasakian manifold ve* M*,* $\bar{M}$ *nin bir semi-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda* D *distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her* $X, Y \in \Gamma(D)$ *için*

$$h(X, \bar{\phi}Y) = h(\bar{\phi}X, Y) \tag{2.3.7}$$

olmasıdır.

İspat. $X, Y \in \Gamma(D)$ ve $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ olsun. (1.1.2) göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} g([X,Y], \bar{\phi}Z) &= g(\nabla_X Y - \nabla_Y X, \bar{\phi}Z) \\ &= g(\bar{\nabla}_X Y - h(X,Y) - \bar{\nabla}_Y X + h(Y,X), \bar{\phi}Z) \end{aligned} \tag{2.3.8}$$

olur. İkinci temel form h simetrik olduğundan, (2.3.8) eşitliğinden

$$g([X,Y], \bar{\phi}Z) = g(\bar{\nabla}_X Y, \bar{\phi}Z) - g(\bar{\nabla}_Y X, \bar{\phi}Z)$$

elde edilir. Bu eşitlikte (1.4.52) eşitliğinin kullanılması ile

$$\begin{aligned} g([X,Y], \bar{\phi}Z) &= g(\bar{\phi}\bar{\nabla}_Y X, Z) - g(\bar{\phi}\bar{\nabla}_X Y, Z) \\ &= g((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y - \bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, Z) - g((\bar{\nabla}_Y \bar{\phi})X - \bar{\nabla}_Y \bar{\phi}X, Z) \\ &= -g(X,Y)\eta(Z) + g(X,Z)\eta(Y) - g(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, Z) \\ &\quad + g(X,Y)\eta(Z) - g(Y,Z)\eta(X) + g(\bar{\nabla}_Y \bar{\phi}X, Z) \\ &= g(\bar{\nabla}_Y \bar{\phi}X, Z) - g(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, Z) \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

bulunur. (2.3.9) eşitliğinde, (1.1.2) eşitliği tekrar kullanılırsa

$$\begin{aligned} g([X,Y],\bar{\phi}Z) &= g(\nabla_Y\bar{\phi}X,Z)+g(h(Y,\bar{\phi}X),Z) \\ &\quad -g(\nabla_X\bar{\phi}Y,Z)-g(h(X,\bar{\phi}Y),Z) \\ &= g(h(Y,\bar{\phi}X),Z)-g(h(X,\bar{\phi}Y),Z) \\ &= g(h(Y,\bar{\phi}X)-h(X,\bar{\phi}Y),Z) \end{aligned} \tag{2.3.10}$$

elde edilir. Kabul edelim ki D distribüsyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda her $X,Y\in\Gamma(D)$ için $[X,Y]\in\Gamma(D)$ olacağından (2.3.10) eşitliğinden (2.3.7) olduğu görülür.

Tersine $X,Y\in\Gamma(D)$ için $h(X,\bar{\phi}Y)=h(\bar{\phi}X,Y)$ ise $[X,Y]\in\Gamma(D)$ olur. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 2.3.2. *$(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M, $\bar{M}$ nin bir semi-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda $D^{\perp}$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $X,Y\in\Gamma(D^{\perp})$ için*

$$A_{\bar{\phi}X}Y=A_{\bar{\phi}Y}X$$

olmasıdır.

İspat. $X,Y\in\Gamma(D^{\perp})$ olsun. Bu durumda (1.1.3), (1.4.52), (2.3.1) ve (2.3.2) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X\bar{\phi})Y &= \bar{\nabla}_X\bar{\phi}Y-\bar{\phi}\bar{\nabla}_XY \\ -g(X,Y)\xi+\eta(Y)X &= -A_{\bar{\phi}X}Y+\nabla^{\perp}_X\bar{\phi}Y-\bar{\phi}\nabla_XY \\ &\quad -\bar{\phi}h(X,Y) \\ -g(X,Y)\xi &= -A_{\bar{\phi}X}Y+\nabla^{\perp}_X\bar{\phi}Y-f\nabla_XY \\ &\quad -w\nabla_XY-Bh(X,Y)-Ch(X,Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitliğin teğet kısımları birbirine eşitlenirse

$$-g(X,Y)\xi=-A_{\bar{\phi}X}Y-f\nabla_XY-Bh(X,Y) \tag{2.3.11}$$

bulunur. (2.3.11) eşitliğinde X yerine Y alınarak

$$-g(Y,X)\xi=-A_{\bar{\phi}Y}X-f\nabla_YX-Bh(Y,X)$$

yazılır. Buradan her $X, Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$0 = A_{\bar{\phi}Y}X - A_{\bar{\phi}X}Y + f\nabla_X Y - f\nabla_Y X$$

yani

$$A_{\bar{\phi}X}Y - A_{\bar{\phi}Y}X = f[X, Y]$$

elde edilir. Kabul edelim ki $D^{\perp}$ distribüsyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için $[X, Y] \in \Gamma(D^{\perp})$ olacağından $f[X, Y] = 0$ yani

$$A_{\bar{\phi}X}Y = A_{\bar{\phi}Y}X$$

elde edilir.

Tersine $X, Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için $A_{\bar{\phi}X}Y = A_{\bar{\phi}Y}X$ ise $[X, Y] \in \Gamma(D^{\perp})$ olur ve ispat tamamlanır. □

Teorem 2.3.3. $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *bir para-Sasakian manifold ve* M *de* $\bar{M}$ *nin bir semi-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda* D *distribüsyonunun integrallenebilir ve liflerinin* M *de tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart her* $X, Y \in \Gamma(D)$, $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ *için*

$$g(h(X, Y), \bar{\phi}Z) = 0$$

olmasıdır.

İspat. Her $X, Y \in \Gamma(D)$ ve $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ için (1.1.2), (1.4.52) ve (2.3.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(h(X, Y), \bar{\phi}Z) &= g(\bar{\nabla}_X Y, \bar{\phi}Z) \\ &= -g(\bar{\phi}\bar{\nabla}_X Y, Z) \\ &= g((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y, Z) - g(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, Z) \\ &= -g(X, Y)\eta(Z) + g(X, Z)\eta(Y) \\ &\quad -g(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, Z) \\ &= -g(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, Z) \\ &= -g(\nabla_X fY, Z) \end{aligned} \tag{2.3.12}$$

elde edilir. Kabul edelim ki D integrallenebilir ve lifleri tamamen geodezik olsun. Bu durumda $\nabla_X Y \in \Gamma(D)$ olacağından $g(h(X, Y), \bar{\phi}Z) = 0$ bulunur.

Tersine $g(h(X,Y),\bar{\phi}Z)=0$ ise (2.3.12) eşitliğinden her $X,Y\in\Gamma(D)$, $Z\in\Gamma(D^{\perp})$ için

$$g(\nabla_X fY, Z) = 0$$

elde edilir. O halde $\nabla_X fY\in\Gamma(D)$ dir. Böylece ispat tamamlanır. □

Tanım 2.3.2. *$(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir semi-invaryant altmanifoldu olsun. Eğer her $X,Y\in\Gamma(D)$ için*

$$h(X,Y) = 0$$

ise M ye bir D-geodezik altmanifold denir.

Teorem 2.3.4. *$(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir semi-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda D distribüsyonunun integrallenebilir ve liflerinin $\bar{M}$ de tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart D-geodezik altmanifold olmasıdır.*

İspat. Kabul edelim ki D distribüsyonu integrallenebilir ve lifleri $\bar{M}$ de tamamen geodezik olsun. Bu durumda her $X,Y\in\Gamma(D)$ için $\bar{\nabla}_X Y\in\Gamma(D)$ dir. Böylece (1.1.3) eşitliğinden her $N\in\Gamma(TM^{\perp})$ için

$$g(h(X,Y),N) = g(\bar{\nabla}_X Y, N) = 0,$$

yani M semi-invaryant altmanifoldu D-geodezik bir altmanifold olur.

Tersine M, $\bar{M}$ nin bir D-geodezik semi-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda her $X,Y\in\Gamma(D)$ ve $N\in\Gamma(TM^{\perp})$ için

$$\begin{aligned} g(\bar{\nabla}_X Y, N) &= g(\nabla_X Y + h(X,Y), N) \\ &= g(h(X,Y),N) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Tanım 2.3.3. *$(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir semi-invaryant altmanifoldu olsun. Her $X\in\Gamma(D)$, $Y\in\Gamma(D^{\perp})$ için $h(X,Y)=0$ ise M ye bir mixed geodezik altmanifold denir.*

Teorem 2.3.5. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir semi-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda M nin mixed geodezik semi-invaryant altmanifold için gerek ve yeter şart her $X \in \Gamma(D)$ ve $N \in \Gamma(TM^{\perp})$ için $A_N\bar{\phi}X \in \Gamma(D)$ olmasıdır.*

İspat. M, $\bar{M}$ para-Sasakian manifoldunun bir semi-invaryant altmanifoldu olsun. Bu durumda (1.1.3) eşitliğinden her $X \in \Gamma(D)$, $Y \in \Gamma(D^{\perp})$ ve $N \in \Gamma(TM^{\perp})$ için

$$\begin{aligned} g(h(\bar{\phi}X, Y), N) &= g(\bar{\nabla}_Y\bar{\phi}X - \nabla_Y\bar{\phi}X, N) \\ &= g(\bar{\nabla}_Y\bar{\phi}X, N) \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan

$$\begin{aligned} g(h(\bar{\phi}X, Y), N) &= Yg(\bar{\phi}X, N) - g(\bar{\phi}X, \bar{\nabla}_Y N) \\ &= -g(\bar{\phi}X, \bar{\nabla}_Y N) \end{aligned} \tag{2.3.13}$$

elde edilir. (2.3.13) eşitliğinde Weingarten formülü kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(h(\bar{\phi}X, Y), N) &= g(\bar{\phi}X, A_Y N) - g(\bar{\phi}X, \nabla^{\perp}_Y N) \\ &= g(\bar{\phi}X, A_Y N) \\ &= Ng(\bar{\phi}X, Y) - g(A_N\bar{\phi}X, Y) \\ &= g(A_N\bar{\phi}X, Y) \end{aligned} \tag{2.3.14}$$

bulunur. Kabul edelim ki M bir mixed geodezik altmanifold olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(D)$, $Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için $h(\bar{\phi}X, Y) = 0$ olacağından $A_N\bar{\phi}X \in \Gamma(D)$ olur.

Tersine $A_N\bar{\phi}X \in \Gamma(D)$ ise (2.3.14) eşitliği göz önüne alınırsa M nin bir mixed geodezik altmanifold olduğu kolaylıkla görülür. □

Tanım 2.3.4. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir semi-invaryant altmanifoldu olsun. Eğer her $X, Y \in \Gamma(TM)$ ve bir $H \in \Gamma(TM^{\perp})$ normal vektör alanı için*

$$h(X, Y) = g(\bar{\phi}X, \bar{\phi}Y)H + \eta(X)h(Y, \xi) + \eta(Y)h(X, \xi), \tag{2.3.15}$$

ise, M ye tamamen parakontakt umbilik altmanifold denir.

Özel olarak (2.3.15) eşitliğinde $H=0$ ise yani M nin ikinci temel formu

$$h(X,Y)=\eta(X)h(Y,\xi)+\eta(Y)h(X,\xi), \tag{2.3.16}$$

şeklinde veriliyor ise M ye bir tamamen parakontakt geodezik altmanifold denir.

Teorem 2.3.6. *$(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$ bir para-Sasakian manifoldun bir tamamen parakontakt umbilik semi-invaryant altmanifoldu tamamen parakontakt geodeziktir.*

İspat. M, $\bar{M}$ para-Sasakian manifoldun bir tamamen parakontakt umbilik semi-invaryant altmanifoldu olsun. Her $X\in\Gamma(T\bar{M})$ için (1.4.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_X\bar{\phi})\bar{\phi}X &= \bar{\nabla}_X\bar{\phi}^2X-\bar{\phi}\bar{\nabla}_X\bar{\phi}X\\ &= \bar{\nabla}_XX-(X\eta(X))\xi-\eta(X)\bar{\nabla}_X\xi-\bar{\phi}\bar{\nabla}_X\bar{\phi}X\\ &= \bar{\phi}^2\bar{\nabla}_XX-(\bar{\nabla}_X\eta)(X)\xi-\eta(X)\bar{\nabla}_X\xi-\bar{\phi}\bar{\nabla}_X\bar{\phi}X\\ &= -\bar{\phi}\bar{\nabla}_X\bar{\phi}X-(\bar{\nabla}_X\eta)(X)\xi-\eta(X)\bar{\nabla}_X\xi \end{aligned} \tag{2.3.17}$$

elde edilir. Diğer taraftan (1.4.52) eşitliği kullanılırsa

$$(\bar{\nabla}_X\bar{\phi})X=-\bar{g}(X,X)\xi+\eta(X)X$$

ve

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X\xi,X)=(\nabla_X\eta)(X)=0$$

olur. Böylece

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_X\bar{\phi})\bar{\phi}X &= -\eta(X)\bar{\phi}X-\eta(X)\bar{\nabla}_X\xi\\ &= 0\end{aligned} \tag{2.3.18}$$

elde edilir. Şimdi kabul edelim ki $X\in\Gamma(D)$ olsun. (2.3.18) eşitliğinden

$$g((\bar{\nabla}_X\bar{\phi})\bar{\phi}X,H)=0$$

olur. Son eşitlikte (1.4.1) eşitliği kullanılır ve $\bar{\nabla}$ nın Levi-Civita konneksiyonu olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned}0 &= g(\bar{\nabla}_X\bar{\phi}^2X-\bar{\phi}\bar{\nabla}_X\bar{\phi}X,H)\\ &= g(\bar{\nabla}_XX,H)+g(\bar{\nabla}_X\bar{\phi}X,\bar{\phi}H)\\ &= Xg(X,H)-g(X,\bar{\nabla}_XH)+g(\bar{\nabla}_X\bar{\phi}X,\bar{\phi}H)\\ &= -g(X,\bar{\nabla}_XH)+g(\bar{\nabla}_X\bar{\phi}X,\bar{\phi}H)\\ &= -g(A_HX,X)+g(A_{\bar{\phi}H}X,\bar{\phi}X)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan (1.1.4) kullanılarak

$$0 = g(h(X, \bar{\phi}X), \bar{\phi}H) - g(h(X, X), H) \tag{2.3.19}$$

elde edilir. Böylece (2.3.16) ve (2.3.19) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$g(X, X)g(H, H) = 0$$

yani $H = 0$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

BÖLÜM 3

PARA-SASAKIAN MANİFOLDLARIN DEJENERE ALTMANİFOLDLARI

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda para-Sasakian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri incelendi. Ayrıca para-Sasakian manifoldların invaryant ve screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyleri tanıtılarak örnekler verildi. İkinci kısım para-Sasakian uzay formun lightlike hiperyüzeylerine ayrıldı. Son kısımda ise para-Sasakian manifoldların invaryant, parakontakt CR-lightlike ve radikal transversal lightlike altmanifoldlarına yer verildi.

3.1 Para-Sasakian Manifoldların Lightlike Hiperyüzeyleri

Bu kısımda para-Sasakian manifoldların lightlike hiperyüzeyleri tanımlanarak bazı özel lightlike hiperyüzeyler incelenecektir.

$\bar{M}$, $(\bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ yapısı ile birlikte $(2n+1)$-boyutlu para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir lightlike hiperyüzeyi olsun. E ve N sırasıyla, $Rad\, TM$ ve $ltr(TM)$ nin lokal kesitleri olmak üzere (1.4.8) eşitliği kullanılırsa

$$\eta(E) = 0, \qquad \eta(N) = 0 \tag{3.1.1}$$

olur. Diğer taraftan (1.4.7) eşitliği göz önüne alınırsa $\bar{\phi}E$ ve $\bar{\phi}N$ alanlarının birer lightlike vektör alanı olduğu kolaylıkla görülebilir. Ayrıca

$$\bar{\phi}^2 E = E, \qquad \bar{\phi}^2 N = N$$

dir. Herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{\phi}X = \phi X + u(X)N \tag{3.1.2}$$

yazılabilir. Burada $\phi X \in \Gamma(TM)$ ve

$$u(X) = \bar{g}(\bar{\phi}X, E) = -\bar{g}(X, \bar{\phi}E) \tag{3.1.3}$$

dir.

Önerme 3.1.1. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ $(2n+1)$-boyutlu bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda E ve N sırasıyla, $Rad\, TM$ ve $ltr(TM)$ nin lokal kesitleri olmak üzere*

$$\bar{g}(\bar{\phi}E, N) = -g(A_N E, \xi) \tag{3.1.4}$$

dir.

İspat. (1.2.4), (1.2.5) ve (1.4.52) eşitlikleri ile birlikte $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun Levi-Civita konneksiyonu olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\phi}E, N) &= -\bar{g}(\bar{\nabla}_E \xi, N) \\ &= -E\bar{g}(\xi, N) + \bar{g}(\xi, \bar{\nabla}_E N) \\ &= \bar{g}(\xi, \bar{\nabla}_E N) \end{aligned}$$

olur. Bu durumda (1.2.8) eşitliğinden

$$\bar{g}(\bar{\phi}E, N) = -g(A_N E, \xi)$$

elde edilir. □

Uyarı 3.1.1. *(1.4.7) eşitliği göz önüne alındığında*

$$\bar{g}(\bar{\phi}E, E) = 0$$

olduğu görülür ki bu da $\bar{\phi}E$ nin $ltr(TM)$ bileşeninin olmadığını gösterir, yani $\bar{\phi}E \in \Gamma(TM)$ dir. Diğer taraftan (3.1.4) eşitliği $\bar{\phi}E$ nin $Rad\, TM$ bileşeninin olabileceğini gösterir. Böylece $P : \Gamma(TM) \to \Gamma(S(TM))$ bir kanonik projeksiyon olmak üzere her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = PX + \theta(X)E \tag{3.1.5}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\bar{\phi}E = \phi E = P\bar{\phi}E + \theta(\bar{\phi}E)E \tag{3.1.6}$$

elde edilir.

Önerme 3.1.2. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ $(2n+1)$-boyutlu bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$g(X, \phi Y) = -g(\phi X, Y) - (u \otimes \theta + \theta \otimes u)(X, Y), \tag{3.1.7}$$

$$\begin{aligned} g(\phi X, \phi Y) = \quad & -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \\ & -u(X)\theta(\phi Y) - u(Y)\theta(\phi X) \end{aligned} \tag{3.1.8}$$

dir.

İspat. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için (3.1.2) ve (3.1.3) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\phi}X, Y) &= g(\phi X + u(X)N, Y) \\ &= g(\phi X, Y) + u(X)g(N, Y) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{g}(X, \bar{\phi}Y) &= g(X, \phi Y + u(Y)N) \\ &= g(X, \phi Y) + u(Y)g(X, N) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (1.4.7) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} g(X, \phi Y) = \quad & -g(\phi X, Y) - u(X)g(N, Y) \\ & -u(Y)g(X, N) \end{aligned}$$

olur. Böylece (3.1.7) eşitliği elde edilmiş olur.

Benzer olarak (1.4.7) ve (3.1.2) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\phi}X, \bar{\phi}Y) \quad &= g(\phi X + u(X)N, \phi Y + u(Y)N) \\ -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \quad &= g(\phi X, \phi Y) + u(Y)g(\phi X, N) \\ &\quad +u(X)g(\phi Y, N) \end{aligned}$$

bulunur. Buradan ise

$$\begin{aligned} g(\phi X, \phi Y) = \quad & -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \\ & -u(X)\theta(\phi Y) - u(Y)\theta(\phi X) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.1.1. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold, M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ için*

$$g(\xi, \phi X) = 0$$

dır.

Önerme 3.1.3. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold, M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ için*

$$\phi^2 X = X - \eta(X)\xi - u(\phi X)N - u(X)\bar{\phi}N, \tag{3.1.9}$$

$$\nabla_X \xi = -\phi X, \tag{3.1.10}$$

$$B(X, \xi) = -u(X) \tag{3.1.11}$$

dır.

İspat. Her $X \in \Gamma(TM)$ için (3.1.2) eşitliğinin her iki tarafına $\bar{\phi}$ uygulanıp, (1.4.1) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\bar{\phi}X) &= \bar{\phi}(\phi X) + u(X)\bar{\phi}N \\ X - \eta(X)\xi &= \phi^2 X + u(\phi X)N + u(X)\bar{\phi}N \end{aligned}$$

bulunur. Buradan ise

$$\phi^2 X = X - \eta(X)\xi - u(\phi X)N - u(X)\bar{\phi}N$$

elde edilir. Diğer taraftan (1.2.10), (1.4.52) ve (3.1.2) eşitlikleri kullanılırsa her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\nabla_X \xi + B(X, \xi) = -\phi X - u(X)N$$

elde edilir. Bu eşitliğin teğet ve transversal kısımları karşılaştırılırsa sırasıyla (3.1.10) ve (3.1.11) eşitliklerine ulaşılır ve ispat tamamlanır. □

3.1.1 İnvaryant Lightlike Hiperyüzeyler

Bu alt kısımda para-Sasakian manifoldların invaryant lightlike hiperyüzeyleri tanıtılarak örnekler verilecektir. Ayrıca bir para-Sasakian manifoldun bir lightlike hiperyüzeyinin invaryant olma şartları incelenecektir.

Tanım 3.1.1. $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *bir para-Sasakian manifold,* M *de* $\bar{M}$ *nin* $\xi \in \Gamma(TM)$ *olacak şekilde bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer*

$$\bar{\phi}(S(TM)) \subseteq S(TM)$$

ise M *ye* $\bar{M}$ *nin bir invaryant lightlike hiperyüzeyi denir.*

Örnek 3.1.1. $\{x_1, x_2, y_1, y_2, z\}$ *koordinat sistemi ile verilen 5-boyutlu bir* $\bar{M}$ *reel uzayı üzerinde*

$$\begin{aligned} e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, \qquad e_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \\ e_3 = \frac{1}{1+y_1^2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1} - 2x_1\frac{\partial}{\partial z}, \\ e_4 = \frac{1}{1+y_1^2}\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y_2} - 2x_2\frac{\partial}{\partial z}, \\ e_5 = \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned} \tag{3.1.12}$$

vektörlerinden oluşan $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ *çatısını göz önüne alalım [41].* $(\bar{\phi}, \xi, \eta)$ *üçlüsünü*

$$\eta = 2x_1 dy_1 + 2x_2 dy_2 + dz, \quad \xi = e_5, \tag{3.1.13}$$

$$\bar{\phi}e_1 = -e_1, \quad \bar{\phi}e_2 = -e_2, \quad \bar{\phi}e_3 = e_3, \tag{3.1.14}$$

$$\bar{\phi}e_4 = e_4, \quad \bar{\phi}e_5 = e_5$$

olacak şekilde tanımlayalım. Buradan

$$\eta(e_1) = \eta(e_2) = \eta(e_3) = \eta(e_4) = 0, \quad \eta(e_5) = 1 \tag{3.1.15}$$

olduğu görülür. Öyleyse $X = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 \in \Gamma(T\bar{M})$ *için (3.1.15) eşitliğinden*

$$\eta(X) = a_5 \tag{3.1.16}$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^2 X &= \bar{\phi}(\bar{\phi}X) \\ &= \bar{\phi}(-a_1e_1 - a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4) \\ &= a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 \\ &= X - \eta(X)\xi \end{aligned} \tag{3.1.17}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\eta(\xi) = 1 \qquad ve \qquad \eta \circ \bar{\phi} = 0 \tag{3.1.18}$$

dır. Böylece (3.1.17) ve (3.1.18) eşitliklerinden $(\bar{\phi}, \xi, \eta)$ *yapısının* $\bar{M}$ *üzerinde bir hemen hemen parakontakt yapı olduğu görülür.*

Şimdi $\bar{M}$ *üzerinde*

$$\begin{aligned} \bar{g}(e_1, e_3) &= \bar{g}(e_3, e_1) = \bar{g}(e_2, e_4) = \bar{g}(e_4, e_2) = \bar{g}(e_5, e_5) = 1 \\ \bar{g}(e_i, e_j) &= 0, \ \textit{diğer tüm durumlarda} \end{aligned}$$

şeklinde bir $\bar{g}$ *metriğini tanımlayalım. Bu durumda* $\bar{g}$ *metriği*

$$\bar{g} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

formunda yazılabilir. O halde

$$X = a_1e_1 + a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4 + a_5e_5 \in \Gamma(T\bar{M})$$

$$Y = b_1e_1 + b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4 + b_5e_5 \in \Gamma(T\bar{M})$$

vektör alanları için

$$\bar{\phi}X = -a_1e_1 - a_2e_2 + a_3e_3 + a_4e_4$$

ve

$$\bar{\phi}Y = -b_1e_1 - b_2e_2 + b_3e_3 + b_4e_4$$

olacağından

$$\bar{g}(X, Y) = a_1b_3 + a_3b_1 + a_2b_4 + a_4b_2 + a_5b_5, \tag{3.1.19}$$

$$\bar{g}(\bar{\phi}X, \bar{\phi}Y) = -a_1b_3 - a_3b_1 - a_2b_4 - a_4b_2 \tag{3.1.20}$$

ve

$$\eta(X) = a_5, \qquad \eta(Y) = b_5 \tag{3.1.21}$$

elde edilir. (3.1.19), (3.1.20) ve (3.1.21) eşitliklerinden her $X, Y \in \Gamma(T\bar{M})$ *için*

$$\bar{g}(\bar{\phi}X, \bar{\phi}Y) = -\bar{g}(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \tag{3.1.22}$$

olduğu görülür. Ayrıca

$$\eta(X) = a_5 = \bar{g}(X, \xi) \tag{3.1.23}$$

dir. Bu durumda (3.1.22) ve (3.1.23) eşitliklerinden $(\bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *yapısı ile birlikte* $\bar{M}$ *manifoldu bir hemen hemen parakontakt metrik manifold olur.*

Şimdi $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *hemen hemen parakontakt metrik manifoldunun*

$$x_1 = \arctan y_1$$

ile tanımlanan bir M *hiperyüzeyini göz önüne alalım. Bu durumda*

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial x_2}, \quad U_2 = \frac{1}{1+y_1^2}\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1},$$

$$U_3 = \frac{\partial}{\partial y_2}, \qquad U_4 = \frac{\partial}{\partial z}$$

olmak üzere $Sp\{U_1, U_2, U_3, U_4\} = TM$ *dir. (3.1.12) eşitliği ile verilen* $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5\}$ *çatısı göz önüne alınırsa*

$$U_1 = e_2,$$

$$U_2 = e_3 + 2x_1 e_5,$$

$$U_3 = -\frac{1}{1+y_1^2}e_2 + e_4 + 2x_2 e_5,$$

$$U_4 = e_5$$

şeklinde yazılabileceğinden $\bar{g}$ *metriğinden hiperyüzey üzerine indirgenen metrik* g *olmak üzere*

$$g = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4x_1^2 & 4x_1x_2 & 2x_1 \\ 1 & 4x_1x_2 & -\frac{2}{1+y_1^2} + 4x_2^2 & 2x_2 \\ 0 & 2x_1 & 2x_2 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. $\det g = 0$ *dır, yani hiperyüzey üzerine indirgenen metrik dejenere olduğundan* M*,* $\bar{M}$ *nin bir lightlike hiperyüzeyi olur.* M *hiperyüzeyinin radikali* $Rad\ TM = Sp\{E\}$ *olacak şekilde* E *vektör alanını belirleyelim.*

$$E = c_1U_1 + c_2U_2 + c_3U_3 + c_4U_4$$

olsun. Bu durumda

$$g(E, E) = 0 \text{ ve } g(E, U_i) = 0$$

olacağından

$$
\begin{aligned}
g(E,E) &= 2c_1c_3 + (8x_1x_2)c_2c_3 + (4x_1)c_2c_4 + (4x_2)c_3c_4 \\
&\quad + (4x_1^2)c_2^2 + \left(4x_2^2 - \frac{2}{1+y_1^2}\right)c_3^2 + c_4^2 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$g(E,U_1) = c_3 = 0$$

$$
\begin{aligned}
g(E,U_2) &= (4x_1^2)c_2 + (4x_1x_2)c_3 + (2x_1)c_4 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(E,U_3) &= c_1 + (4x_1x_2)c_2 + \left(4x_2^2 - \frac{2}{1+y_1^2}\right)c_3 \\
&\quad + (2x_2)c_4 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
g(E,U_4) &= (2x_1)c_2 + (2x_2)c_3 + c_4 \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur. Buradan

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 0, \quad c_4 = -2x_1$$

bulunur. Böylece

$$E = U_2 - 2x_1U_4 = e_3$$

elde edilir. O zaman $N = e_1$ *olmak üzere lightlike transversal vektör demeti* $Sp\{N\} = ltr(TM)$ *dir. Diğer taraftan*

$$W_1 = e_2, W_2 = e_4, W_3 = e_5 \tag{3.1.24}$$

olmak üzere $Sp\{W_1, W_2, W_3\} = S(TM)$ *olur. Bu durumda*

$$\bar{\phi}W_1 = -W_1, \quad \bar{\phi}W_2 = W_2, \quad \bar{\phi}W_3 = 0$$

elde edilir ki bu $\bar{\phi}(S(TM)) \subseteq S(TM)$ *olduğunu gösterir. Böylece* M, $\bar{M}$ *nin bir invaryant lightlike hiperyüzeyi olur.*

Teorem 3.1.1. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold, M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin bir invaryant lightlike hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter şart*

$$\bar{\phi}(Rad\, TM) = Rad\, TM \quad ve \quad \bar{\phi} ltr(TM) = ltr(TM)$$

olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki M, $\bar{M}$ nin bir invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Herhangi bir $X \in \Gamma(TM)$ için (3.1.5) ve (3.1.6) eşitlikleri kullanılırsa

$$g(P\bar{\phi}E, PX) = 0$$

elde edilir. Bu eşitlikten $\bar{\phi}E$ nin $S(TM)$ de bileşeni olmadığı görülür. Ayrıca (1.4.7) eşitliği göz önüne alındığında $\bar{\phi}E$ nin $ltr(TM)$ bileşenide yoktur. Böylece $\bar{\phi}(Rad\, TM) = Rad\, TM$ olur.

Diğer taraftan $ltr(TM)$ nin herhangi bir N lokal kesiti için (3.1.5) eşitliğinden

$$\bar{\phi}N = P\bar{\phi}N + \bar{g}(\bar{\phi}N, E)N$$

yazılabilir. Bu durumda bir $X \in \Gamma(TM)$ için son eşitlikten

$$g(P\bar{\phi}N, PX) = 0$$

elde edilir. O halde $\bar{\phi}N$ nin $S(TM)$ de bileşeni yoktur. Ayrıca

$$\bar{g}(\bar{\phi}N, N) = 0$$

olduğundan $\bar{\phi}N$ nin $Rad\, TM$ de bileşeni olmadığı görülür. Böylece $\bar{\phi} ltr(TM) = ltr(TM)$ olur.

Tersine $\bar{\phi}(Rad\, TM) = Rad\, TM$ ve $\bar{\phi} ltr(TM) = ltr(TM)$ olsun. Herhangi bir $X \in \Gamma(S(TM))$ için

$$\bar{g}(\bar{\phi}X, E) = -\bar{g}(X, \bar{\phi}E) = 0$$

elde edilir ki bu $\bar{\phi}X$ in $ltr(TM)$ bileşeni olmadığını verir. Benzer şekilde

$$\bar{g}(\bar{\phi}X, N) = -\bar{g}(X, \bar{\phi}N) = 0$$

dır. Bu durumda $\bar{\phi}X$ in $Rad\, TM$ bileşeni yoktur. Böylece ispat tamamlanır. □

Sonuç 3.1.2. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold, M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin $\bar{M}$ nin bir invaryant lightlike hiperyüzeyi olması için gerek ve yeter şart*

$$\bar{\phi}E = \pm E \quad ve \quad \bar{\phi}N = \pm N \tag{3.1.25}$$

olmasıdır.

Teorem 3.1.2. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir hemen hemen parakontakt metrik manifold ve M, $\bar{M}$ nin bir invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda (M, ϕ, ξ, η, g) de bir hemen hemen parakontakt metrik manifolddur.*

İspat. Kabul edelim ki M, $\bar{M}$ nin bir invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. O halde her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için (3.1.5) eşitliğinden

$$\bar{\phi}X = \phi X \tag{3.1.26}$$

yazılabilir. (3.1.26) eşitliğinin her iki tarafına $\bar{\phi}$ uygulayıp (1.4.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\phi}(\bar{\phi}X) &= \bar{\phi}(\phi X) \\ \bar{\phi}^2 X &= \phi^2 X \end{aligned}$$

yani

$$\phi^2 X = X - \eta(X)\xi \tag{3.1.27}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.1.26) eşitliğinde X yerine ξ alınıp (1.4.3) kullanılırsa

$$\phi\xi = 0 \tag{3.1.28}$$

olur. (3.1.27) ve (3.1.28) eşitlikleri birlikte göz önüne alınırsa

$$n \circ \phi = 0 \text{ ve } \eta(\xi) = 1 \tag{3.1.29}$$

elde edilir. Diğer taraftan her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için (3.1.8) eşitliğinden

$$g(\phi X, \phi Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \tag{3.1.30}$$

bulunur. Böylece (3.1.27)-(3.1.30) eşitliklerinden, (M, ϕ, ξ, η, g) nin bir hemen hemen parakontakt metrik manifold olduğu görülür. □

Önerme 3.1.4. *M, $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifoldun bir invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ için*

$$g(A_N X, \xi) = 0$$

dır.

İspat. Lightlike transversal vektör demeti $ltr(TM)$ nin herhangi bir N lokal kesiti için $g(N, \xi) = 0$ olduğundan (1.4.52) eşitliği kullanılırsa

$$g(\bar{\nabla}_X N, \xi) = -g(N, \bar{\nabla}_X \xi) = g(N, \bar{\phi} X)$$

elde edilir. M bir invaryant hiperyüzey olduğundan bu son eşitlikte (1.2.6) ayrışımı kullanılırsa

$$\begin{aligned} 0 &= g(\bar{\nabla}_X N, \xi) \\ &= g(-A_N X + \tau(X) N, \xi) \\ &= g(A_N X, \xi) \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.1.3. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifoldun bir invaryant lightlike M hiperyüzeyide bir para-Sasakian yapıya sahiptir. Ayrıca her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$B(X, \phi Y)N - B(X, Y)\phi N = 0, \tag{3.1.31}$$

$$\phi(A_N X) = A_{\phi N} X - \theta(X)\xi \tag{3.1.32}$$

dır.

İspat. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için (1.2.10) ve (3.1.26) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y &= \bar{\nabla}_X \bar{\phi} Y - \bar{\phi} \bar{\nabla}_X Y \\ &= \bar{\nabla}_X \phi Y - \bar{\phi}(\nabla_X Y + B(X, Y)N) \\ &= \nabla_X \phi Y + B(X, \phi Y)N - \phi \nabla_X Y - B(X, Y)\phi N \\ &= (\nabla_X \phi)Y + B(X, \phi Y)N - B(X, Y)\phi N \end{aligned} \tag{3.1.33}$$

elde edilir. (3.1.33) eşitliğinde (1.4.52) kullanılırsa

$$-g(X,Y)\xi + \eta(Y)X \quad = (\nabla_X \phi)Y + B(X,\phi Y)N - B(X,Y)\phi N \tag{3.1.34}$$

bulunur. (3.1.34) eşitliğin her iki tarafındaki teğet bileşenleri göz önüne alınırsa

$$(\nabla_X \phi)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X$$

olur. Böylece, (1.4.52) eşitliği ile birlikte Teorem 3.1.2 den, M invaryant lightlike hiperyüzeyi (ϕ,ξ,η,g) dörtlüsü ile birlikte para-Sasakian manifold olur. Diğer taraftan (3.1.34) eşitliğinin her iki tarafının transversal bileşenlerinin eşitliğinden (3.1.31) elde edilir.

Ayrıca (1.4.52) eşitliğinde Y yerine N alınırsa

$$\begin{aligned}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi})N &= -\bar{g}(X,N)\xi + \eta(N)X \\ &= -\theta(X)\xi\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan ise

$$\begin{aligned}-\theta(X)\xi &= (\bar{\nabla}_X \bar{\phi})N \\ &= \bar{\nabla}_X \bar{\phi}N - \bar{\phi}\bar{\nabla}_X N \\ &= -A_{\bar{\phi}N}X + \bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}N, E)N + \bar{\phi}A_N X - \tau(X)\bar{\phi}N\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (3.1.26) kullanılıp, eşitliğin teğet bileşenleri göz önüne alınırsa (3.1.32) elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

$(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$ 3-boyutlu hemen hemen parakontakt metrik manifold ve M de $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde $\bar{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. ξ null olmayan bir vektör alanı olduğundan $S(TM)$ ye aittir. Böylece $T\bar{M}$ nin $\{\xi,E,N\}$ şeklinde bir quasi-ortonormal çatısı vardır. $T\bar{M}$ nin $\{\xi,E,N\}$ quasi-ortonormal çatısı göz önüne alındığında

$$\bar{\phi}E = a\xi + bE + cN$$

ve

$$\bar{\phi}N = d\xi + eE + fN$$

yazılabilir. Burada

$$a = \bar{g}(\bar{\phi}E,\xi) = 0, \quad b = \bar{g}(\bar{\phi}E,N), \quad c = \bar{g}(\bar{\phi}E,E) = 0,$$

$$d = \bar{g}(\bar{\phi}N, \xi) = 0, \quad e = \bar{g}(\bar{\phi}N, N) = 0, \quad f = \bar{g}(\bar{\phi}E, N) = b$$

dir. Bu durumda

$$\bar{\phi}E = bE \quad \text{ve} \quad \bar{\phi}N = bN \tag{3.1.35}$$

elde edilir. Böylece $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde $\bar{M}$ nin her lightlike hiperyüzeyi daima bir invaryant lightlike hiperyüzey olur.

Örnek 3.1.2. *$\bar{M} = \mathbb{R}^3$, Örnek 1.4.1 de verilen $(\bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ yapısı ile birlikte bir 3-boyutlu hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. $\bar{M}$ nin*

$$x_1 = y_1$$

ile tanımlanan M yüzeyini göz önüne alalım. Bu durumda M bir lightlike yüzeydir. $Rad\ TM$ ve $ltr(TM)$ sırasıyla

$$Rad\ TM = Sp\left\{E = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1}\right\}$$

ve

$$ltr(TM) = Sp\left\{N = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial y_1}\right)\right\}$$

ile verilir. O halde $\xi = \frac{\partial}{\partial z}$ olmak üzere

$$S(TM) = Sp\{\xi\}$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned} \bar{\phi}E &= \frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \\ &= E \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \bar{\phi}N &= \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial y_1} - \frac{\partial}{\partial x_1}\right) \\ &= -N \end{aligned}$$

olduğundan M bir invaryant lightlike hiperyüzeydir.

Örnek 3.1.3. *Örnek 1.4.2 de verilen H_1^3 para-Sasakian manifoldunu göz önüne alalım. H_1^3 ün*

$$x_1 - x_3 = 0$$

ile tanımlanan bir M lightlike yüzeyini göz önüne alalım. Bu durumda

$$Rad\ TM = Sp\{E = U_1\}$$

$$S(TM) = Sp\{W = -x_1U_1 - U_2\}$$

olur. Burada

$$\begin{aligned} U_1 &= \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3} \in \Gamma(TM) \\ U_2 &= x_4\frac{\partial}{\partial x_2} + x_2\frac{\partial}{\partial x_4} \in \Gamma(TM) \end{aligned}$$

dir. O halde lightlike transversal distribüsyon

$$ltr(TM) = Sp\left\{\frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{2x_1}{x_2+x_4}\frac{\partial}{\partial x_2} - \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{2x_1}{x_2+x_4}\frac{\partial}{\partial x_4})\right\}$$

şeklindedir. Böylece

$$\bar{\phi}E = E \text{ ve } \bar{\phi}N = -N$$

olduğundan M, H_1^3 ün bir invaryant lightlike hiperyüzeyi olur.

3.1.2 Screen Semi-İnvaryant Lightlike Hiperyüzeyler

Eğer $E, \Gamma(Rad\ TM)$ nin lokal bir kesiti ise (1.4.7) eşitliğinden

$$\bar{g}(\bar{\phi}E, E) = 0$$

elde edilir. Böylece $\bar{\phi}E \in \Gamma(TM)$ olur ve buradan M üzerinde 1-boyutlu $\bar{\phi}(Rad\,TM)$ distribüsyonu elde edilir.

Tanım 3.1.2. $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ $(2n+1)$*-boyutlu bir hemen hemen parakontakt metrik manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer*

$$\bar{\phi}(Rad\ TM) \subset S(TM)$$

ve

$$\bar{\phi}(ltr(TM)) \subset S(TM)$$

ise M ye $\bar{M}$ nin bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi denir.

Örnek 3.1.4. *Kabul edelim ki $\bar{M} = \mathbb{R}^7$, Örnek 1.4.1 de verilen $(\bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ yapısı ile birlikte 7-boyutlu hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ hemen hemen parakontakt metrik manifoldunun*

$$x_1 = y_1 + x_2 + y_2 + x_3 + y_3$$

ile tanımlanan bir M hiperyüzeyini göz önüne alalım. Bu durumda

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_1}, \qquad U_2 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2},$$
$$U_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_2}, \qquad U_4 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_3},$$
$$U_5 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_3}, \qquad U_6 = \frac{\partial}{\partial z}$$

olmak üzere $TM = Sp\{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5, U_6\}$ dır. O halde radikal distribüsyon ve lightlike transversal distribüsyon

$$Rad\ TM = Sp\{E = U_1 - U_2 + U_3 - U_4 + U_5\}$$

ve

$$ltr(TM) = Sp\left\{N = 2\frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{3}{2}\frac{\partial}{\partial y_1} + \frac{\partial}{\partial y_2} - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial y_3}\right\}$$

ile verilir. Ayrıca

$$\begin{aligned}
W_1 &= U_6, \\
W_2 &= U_1 + U_2 - U_3 + U_4 - U_5, \\
W_3 &= U_1 - U_3 + U_5, \\
W_4 &= -2U_1 - U_2 + U_4 + \frac{1}{2}U_5, \\
W_5 &= 4U_1 + U_2 - U_4
\end{aligned}$$

olmak üzere $S(TM) = Sp\{W_1, W_2, W_3, W_4, W_5\}$ olur. Burada

$$\bar{\phi}E = W_2 \in \Gamma(S(TM))$$

ve

$$\bar{\phi}N = -\ W_4 \in \Gamma(S(TM))$$

olduğu kolayca görülebilir. Böylece M, $\bar{M}$ nin bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olur.

Bu kısımda $(M, g, S(TM))$ ile $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ hemen hemen parakontakt metrik manifoldun bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyini göstereceğiz. M bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzey ise $\bar{\phi}E \in \Gamma(S(TM))$ dir. Lightlike transversal vektör demeti $ltr(TM)$ nin bir lokal kesiti N olmak üzere (1.2.6) ayrışımı göz önüne alındığında

$$\bar{g}(\bar{\phi}E, N) = 0$$

yazılabilir. Bu eşitlikte (1.4.7) kullanılırsa

$$\bar{g}(\bar{\phi}E, N) = -\bar{g}(E, \bar{\phi}N) = 0, \quad \bar{g}(N, \bar{\phi}N) = 0$$

elde edilir ki bu eşitlikten $\bar{\phi}N \in \Gamma(S(TM))$ olduğu görülür. (1.2.2) ayrışımı göz önüne alındığında $\bar{\phi}N$, $S(TM)^{\perp}$ e ortogonal olur. Üstelik (1.4.6) eşitliğinde (1.2.4) kullanılırsa

$$\bar{g}(\bar{\phi}E, \bar{\phi}N) = -\bar{g}(E, N) + \eta(E)\eta(N) = -1 \tag{3.1.36}$$

bulunur. Bu durumda $\bar{\phi}(Rad\ TM) \oplus \bar{\phi}ltr(TM)$, $S(TM)$ ekran distribüsyonunun rankı 2 olan bir altvektör demetidir. $\bar{\phi}(Rad\, TM) \oplus \bar{\phi}ltr(TM)$ ve $S(TM)$ distribüsyonları non-dejenere olduğundan

$$S(TM) = \left\{\bar{\phi}(Rad\ TM) \oplus \bar{\phi}ltr(TM)\right\} \perp D_0 \tag{3.1.37}$$

olacak şekilde dejenere olmayan bir tek D_0 distribüsyonu tanımlanabilir [44]. O halde $\xi \in \Gamma(D_0)$ ve D_0, $\bar{\phi}$-invaryanttır yani $\bar{\phi}D_0 = D_0$ dır. Böylece (1.2.1), (1.2.6) ve (3.1.37) ayrışımlarından

$$TM = \left\{\bar{\phi}(Rad\ TM) \oplus \bar{\phi}ltr(TM)\right\} \perp D_0 \perp Rad\ TM \tag{3.1.38}$$

ve

$$T\bar{M} = \left\{\bar{\phi}(Rad\ TM) \oplus \bar{\phi}ltr(TM)\right\} \perp D_0 \perp \{Rad\ TM \oplus ltr(TM)\} \tag{3.1.39}$$

yazılabilir.

$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ hemen hemen parakontakt manifoldunu göz önüne alalım. Kabul edelim ki U, $\bar{M}$ üzerinde bir koordinat komşuluğu ve e_1, ξ ye teğet olacak şekilde U üzerinde herhangi bir birim vektör alanı olsun. Bu durumda $\bar{\phi}e_1$, e_1 ve ξ ye ortogonal vektör alanı ve $\bar{g}(\bar{\phi}e_1, \bar{\phi}e_1) = -1$ dir. ξ, e_1 ve $\bar{\phi}e_1$ e ortogonal olacak şekilde e_2 birim vektör alanını seçelim. O halde $\bar{\phi}e_2$, e_1, e_2 vektör alanları $\bar{\phi}e_1$ ve ξ ye ortogonal ve $\mid \bar{\phi}e_2 \mid^2 = -1$ olur. Bu şekilde devam ederek bir $\{e_i, \bar{\phi}e_i, \xi\}$ kümesi elde edilir. Şimdi $i = 1, ..., n-2$ olmak üzere e_i, $\bar{\phi}e_i$ vektör alanları ξ ye ortogonal olacak şekilde $e_{n-1} = \frac{E+N}{\sqrt{2}}$ birim vektör alanını alalım. Bu durumda $i = 1, ..., n-2$ olmak üzere $\bar{\phi}e_{n-1} = \frac{\bar{\phi}E+\bar{\phi}N}{\sqrt{2}}$, e_i, $\bar{\phi}e_i$ vektör alanları ξ ye ortogonal ve $\bar{g}(\bar{\phi}e_{n-1}, \bar{\phi}e_{n-1}) = -1$ dir. Benzer şekilde e_i, $\bar{\phi}e_i$, $(i = 1, ..., n-1)$ vektör alanları ξ ye ortogonal olmak üzere $e_n = \frac{\bar{\phi}E-\bar{\phi}N}{\sqrt{2}}$ birim vektör alanını elde edelir. Buradan $\bar{\phi}e_n = \frac{E-N}{\sqrt{2}}$ nin e_i, $\bar{\phi}e_i, (i = 1, ..., n-1)$ ve ξ vektör alanlarına ortogonal ve $\bar{g}(\bar{\phi}e_n, \bar{\phi}e_n) = -1$ olduğu görülür. Böylece $\bar{M}$ nin bir quasi-ortonormal $\{e_i, \bar{\phi}e_i, E, N, \bar{\phi}E, \bar{\phi}N, \xi\}$ $(i = 1, ..., n-2)$ bazından $\bar{M}$ nin $\bar{\phi}$- bazı olarak adlandırılan

$$\left\{e_i, e_{n-1} = \frac{E+N}{\sqrt{2}}, e_n = \frac{\bar{\phi}E-\bar{\phi}N}{\sqrt{2}}, \bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_{n-1} = \frac{\bar{\phi}E+\bar{\phi}N}{\sqrt{2}}, \bar{\phi}e_n = \frac{E-N}{\sqrt{2}}, \xi\right\}$$

lokal ortonormal bazı elde edilir. Burada $i = 1, ..., n-2$ dir. Bu durumda aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 3.1.5. $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ $(2n+1)$*-boyutlu bir hemen hemen parakontakt metrik manifold ve* $(M, g, S(TM))$ *de* $\bar{M}$ *nin bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda* $\bar{M}$ *üzerinde* $\bar{M}$ *nin* $\{e_i, \bar{\phi}e_i, E, N, \bar{\phi}E, \bar{\phi}N, \xi\}$, $i = 1, ..., n-2$, *quasi-ortonormal bazından elde edilen bir* $\bar{\phi}$*-bazı vardır.*

Şimdi $(M, g, S(TM))$ üzerinde

$$D = Rad\ TM \perp \bar{\phi}(Rad\ TM) \perp D_0, \quad D^{'} = \bar{\phi}ltr(TM)$$

ile tanımlı distribüsyonları ele alalım. Bu durumda D, $\bar{\phi}$-invaryanttır ve

$$TM = D \oplus D^{'} \tag{3.1.40}$$

dür. R ve Q sırasıyla, TM den D ve $D^{'}$ distribüsyonları üzerine tanımlanan projeksiyonlar olmak üzere her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = RX + QX$$

yazılabilir. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\phi X = \bar{\phi} R X$$

olur. (3.1.2) eşitliğinin her iki tarafına $\bar{\phi}$ uygulanıp (1.4.1) ve (3.1.3) kullanılırsa

$$\bar{\phi}^2 X = \phi^2 X + u(X)U + u(\phi X)N \tag{3.1.41}$$

elde edilir. (3.1.41) eşitliğinde teğet ve transversal bileşenler karşılaştırılırsa

$$\phi^2 = I - \eta \otimes \xi - u \otimes U \tag{3.1.42}$$

ve

$$u \circ \phi = 0 \tag{3.1.43}$$

bulunur. Diğer taraftan (1.4.3) eşitliği göz önüne alındığında ise

$$\phi \xi = 0 \quad \text{ve} \quad u(\xi) = 0 \tag{3.1.44}$$

olur. (1.4.1) eşitliğinden $\phi^2 N = N$ olduğundan (3.1.2) eşitliğinden

$$\phi U = 0\ , \ \ u(U) = 1 \tag{3.1.45}$$

ve

$$\eta(U) = 0 \tag{3.1.46}$$

elde edilir. Son olarak (3.1.2) eşitliğinden

$$(\eta \circ \phi)X = \eta(\bar{\phi} X - u(X)N)$$

yazılabilir. Bu ise

$$\eta \circ \phi = 0 \tag{3.1.47}$$

olduğunu gösterir. Bu durumda aşağıdaki önerme elde edilir.

Önerme 3.1.6. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ hemen hemen parakontakt metrik manifold ve $(M, g, S(TM))$ de $\bar{M}$ nin bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M, bir (ϕ, ξ, η, U, u) para yapısına sahiptir. Yani*

$$\phi^2 = I - \eta \otimes \xi - u \otimes U,\ \phi \xi = 0,$$

$$\phi U = 0,\ \eta \circ \phi = 0,$$

$$u \circ \phi = 0,\ \eta(\xi) = 1,\ u(U) = 1,$$

$$\eta(U) = 0,\ u(\xi) = 0$$

dır.

Teorem 3.1.4. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve $(M, g, S(TM))$ de $\bar{M}$ nin bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$(\nabla_X \phi)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X + u(Y)A_N X + B(X,Y)U, \tag{3.1.48}$$

$$(\nabla_X u)Y = -B(X, \phi Y) - u(Y)\tau(X) \tag{3.1.49}$$

dir.

İspat. Her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için (1.2.10), (1.2.11) ve (3.1.2) eşitlikleri kullanlırsa

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y &= \bar{\nabla}_X \bar{\phi} Y - \bar{\phi} \bar{\nabla}_X Y \\
&= \bar{\nabla}_X (\phi Y + u(Y)N) - \bar{\phi}(\nabla_X Y + B(X,Y)N) \\
&= \bar{\nabla}_X \phi Y + X(u(Y))N + u(Y)\bar{\nabla}_X N \\
&\quad -\bar{\phi}(\nabla_X Y) - B(X,Y)U \\
&= \nabla_X \phi Y + B(X, \phi Y)N + X(u(Y))N \\
&\quad -u(Y)A_N X + u(Y)\tau(X)N \\
&\quad -\phi \nabla_X Y - u(\nabla_X Y)N - B(X,Y)U \\
&= (\nabla_X \phi)Y - u(Y)A_N X - B(X,Y)U \\
&\quad + (B(X, \phi Y) + (\nabla_X u)Y + u(Y)\tau(X))\, N
\end{aligned}$$

bulunur. Yukarıdaki son eşitlikte (3.1.2) kullanılıp, (1.2.6) ile verilen ayrışıma göre teğet ve transversal bileşenler karşılaştırılırsa ispat tamamlanır. □

Tanım 3.1.3. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M, $\bar{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin her geodeziği ∇ indirgenmiş konneksiyonu ile $\bar{M}$ nin bir geodeziği oluyor ise M ye tamamen geodezik lightlike hiperyüzey denir.*

Önerme 3.1.7. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve $(M, g, S(TM))$, $\bar{M}$ nin bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda M nin tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart her $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(D)$ için*

$$(\nabla_X \phi)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X \tag{3.1.50}$$

ve

$$A_N X = -\phi(\nabla_X u) + g(X,U)\xi \tag{3.1.51}$$

olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki M tamamen geodezik yani her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için $B(X,Y) = 0$ olsun. O halde (3.1.48) eşitliğinden

$$(\nabla_X \phi)Y = -g(X,Y)\xi + \eta(Y)X + u(Y)A_N X$$

olur. Her $Y \in \Gamma(D)$ için $u(Y) = 0$ olacağından yukarıdaki eşitlikten (3.1.50) eşitliğine ulaşılır. Benzer şekilde (3.1.48) eşitliğinde Y yerine U alınıp (3.1.45) ve (3.1.46) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \phi)U &= -g(X,U)\xi + \eta(U)X + u(U)A_N X \\
\nabla_X \phi U - \phi \nabla_X U &= -g(X,U)\xi + A_N X \\
-\phi \nabla_X U &= -g(X,U)\xi + A_N X
\end{aligned}$$

bulunur. Buradan ise (3.1.51) elde edilir.

Tersine, kabul edelim ki (3.1.50) ve (3.1.51) eşitlikleri sağlansın. Eğer $Y \in \Gamma(TM)$ ise (3.1.40) ile verilen ayrışımdan

$$Y = Y_D + \alpha U$$

yazılabilir. Burada $\alpha \in \Im(U)$ dur. O halde her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$B(X,Y) = B(X,Y_D) + \alpha B(X,U) \tag{3.1.52}$$

olur. $Y = Y_D$ için (3.1.48) ve (3.1.50) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
-g(X,Y_D)\xi + \eta(Y_D)X &= -g(X,Y_D)\xi + \eta(Y_D)X \\
&\quad + u(Y_D)A_N X - B(X,Y_D)U
\end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan ise

$$B(X, Y_D)U = -u(Y_D)A_N X = 0$$

bulunur. Böylece

$$B(X, Y_D) = 0 \tag{3.1.53}$$

olur. Benzer şekilde (3.1.48) eşitliğinde $Y = U$ alınıp (3.1.45) ve (3.1.46) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \phi)U &= -g(X, U)\xi + \eta(U)X + u(U)A_N X + B(X, U)U \\
\nabla_X \phi U - \phi \nabla_X U &= -g(X, U)\xi + A_N X + B(X, U)U \\
-\phi \nabla_X U &= -g(X, U)\xi + A_N X + B(X, U)U
\end{aligned}$$

elde edilir. Yukarıdaki son eşitlikte (3.1.51) eşitliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
-\phi \nabla_X U &= -\phi \nabla_X U + g(X, U)\xi + B(X, U)U \\
&\quad -g(X, U)\xi
\end{aligned}$$

bulunur. Bu ise

$$B(X, U) = 0$$

olduğunu gösterir. Böylece (3.1.52) ve (3.1.53) eşitliklerinden ispat tamamlanır. □

Önerme 3.1.8. *$(M, g, S(TM))$, $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifoldunun bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(TM)$ için*

i) eğer U vektör alanı paralel ise

$$A_N X = \eta(A_N X)\xi + u(A_N X)U \quad \text{ve} \quad \tau(X) = 0 \tag{3.1.54}$$

ii) eğer V vektör alanı paralel ise

$$A_E^* X = \eta(A_E^* X)\xi + u(A_E^* X)U \quad \text{ve} \quad \tau(X) = 0 \tag{3.1.55}$$

dır.

İspat. *i)* (3.1.48) eşitliğinde $Y = U$ alınıp (3.1.45) ve (3.1.46) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
(\nabla_X \phi)U &= -g(X, U)\xi + \eta(U)X + u(U)A_N X \\
&\quad +B(X, U)U \\
\nabla_X \phi U - \phi \nabla_X U &= -g(X, U)\xi + \eta(U)X + u(U)A_N X \\
&\quad +B(X, U)U \\
-\phi \nabla_X U &= -g(X, U)\xi + A_N X + B(X, U)U
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitliğin her iki tarafına ϕ uygulanıp, (3.1.45) ve (3.1.42) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \phi A_N X &= -\phi^2 \nabla_X U + g(X,U)\phi\xi - B(X,U)\phi U \\ \phi A_N X &= -\nabla_X U + \eta(\nabla_X U) + u(\nabla_X U)U \end{aligned}$$

bulunur. U vektör alanı paralel ise $\nabla_X U = 0$ olacağından bu son eşitlikten

$$\phi A_N X = 0$$

olur. Bu eşitlikte (3.1.2) eşitliği kullanılırsa

$$\bar{\phi} A_N X = u(A_N X)N \tag{3.1.56}$$

elde edilir. (3.1.56) eşitliğinin her iki tarafına $\bar{\phi}$ uygulanırsa (1.4.1) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^2(A_N X) &= u(A_N X)\bar{\phi}N \\ A_N X - \eta(A_N X)\xi &= u(A_N X)U \\ A_N X &= \eta(A_N X)\xi + u(A_N X)U \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan (3.1.49) eşitliğinde $Y = U$ alınıp (3.1.45) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} (\nabla_X u)U &= -B(X,\phi U) - u(U)\tau(X) \\ (\nabla_X u)U &= -u(U)\tau(X) \end{aligned}$$

elde edilir. $(\nabla_X u)U = -u\nabla_X U = 0$ olduğundan

$$\tau(X) = 0$$

olur.

ii) Kabul edelim ki V vektör alanı paralel olsun. (3.1.48) eşitliğinde her $E \in \Gamma(Rad\ TM)$ için $Y = E$ alınıp (1.2.12) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} (\nabla_X \phi)E &= -g(X,E)\xi + \eta(E)X + u(E)A_N X \\ &\quad + B(X,E)U \\ (\nabla_X \phi)E &= 0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece (1.2.20) eşitliğinin kullanılması ile

$$\begin{aligned} 0 &= (\nabla_X \phi)E \\ &= \nabla_X \phi E - \phi \nabla_X E \\ &= \nabla_X V - \phi(-A^*_E X - \tau(X)E) \\ &= \phi(A^*_E X + \tau(X)E) \end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\phi(A^*_E X) = -\tau(X)V \tag{3.1.57}$$

elde edilir. (3.1.57) eşitliğinin her iki tarafına $\bar{\phi}$ uygulanıp (3.1.2) eşitliği kullanılırsa

$$A^*_E X - \eta(A^*_E X)E - u(A^*_E X)U = -\tau(X)\phi V = -\tau(X)E \tag{3.1.58}$$

bulunur. (3.1.58) eşitliğinin sol tarafı $S(TM)$ de sağ tarafı ise $Rad\,TM$ de olduğundan (3.1.55) eşitliğine ulaşılır ve ispat tamamlanır. $\square$

Şimdi screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyler üzerinde tanımlanan distribüsyonların integrallenebilirlik şartlarını inceleyeceğiz.

İlk olarak (3.1.37) ayrışımı ile tanımlanan D_0 distribüsyonunu ele alalım. (3.1.38) ayrışımını göz önüne alıp

$$\mu = \left\{\bar{\phi}(Rad\ TM) \oplus \bar{\phi}ltr(TM)\right\} \perp Rad\ TM$$

diyelim. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(D_0)$ ve $Z \in \Gamma(\mu)$ için

$$\nabla_X Y = \mathring{\nabla}_X Y + \mathring{h}(X,Y) \tag{3.1.59}$$

ve

$$\nabla_X Z = -\mathring{A}_Z X + \nabla^{\mu}_X Z \tag{3.1.60}$$

yazılabilir. Burada $\mathring{\nabla} : \Gamma(TM) \times \Gamma(D_0) \to \Gamma(D_0)$ ve $\nabla^{\mu} : \Gamma(TM) \times \Gamma(\mu) \to \Gamma(\mu)$ sırasıyla D_0 ve μ üzerinde lineer konneksiyonlar olmak üzere $\mathring{h} : \Gamma(TM) \times \Gamma(D_0) \to \Gamma(\mu)$, $\Im(M)$ ve $\mathring{A} : \Gamma(TM) \times \Gamma(\mu) \to \Gamma(D_0)$ bilineer operatörlerdir.

Teorem 3.1.5. *$(M, g, S(TM))$, $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifoldunun bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi ve $U \subset M$ üzerinde bir koordinat komşuluğu olsun. Bu durumda her $X, Y \in \Gamma(D_0)$ için*

$$\bar{g}((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y, E) = 0 \tag{3.1.61}$$

ve

$$\bar{g}((\bar{\nabla}_X\bar{\phi})Y, N) = 0 \tag{3.1.62}$$

dır.

İspat. (3.1.39) ile verilen ayrışımı göz önüne alınırsa her $\xi \in \Gamma(D_0)$ için

$$\bar{g}(\xi, E) = 0 \text{ ve } \bar{g}(\xi, N) = 0$$

olur. O halde $X, Y \in \Gamma(D_0)$, $E \in \Gamma(Rad\ TM)$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için (1.4.52) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\bar{g}((\bar{\nabla}_X\bar{\phi})Y, E) &= \bar{g}(\bar{g}(X,Y)\xi + \eta(Y)X, E)\\ &= \bar{g}(X,Y)\bar{g}(\xi, E) + \eta(Y)\bar{g}(X, E)\\ &= 0\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{g}((\bar{\nabla}_X\bar{\phi})Y, N) &= \bar{g}(\bar{g}(X,Y)\xi + \eta(Y)X, N)\\ &= \bar{g}(X,Y)\bar{g}(\xi, N) + \eta(Y)\bar{g}(X, N)\\ &= 0\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifoldunun $(M, g, S(TM))$ screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyini göz önüne alalım. Kabul edelim ki $U \subset M$ üzerinde bir koordinat komşuluğu olsun. (3.1.38) ayrışımına göre her $X, Y \in \Gamma(D_0)$ için

$$\alpha_1(X,Y) = -g(\mathring{h}(X,Y), \bar{\phi}N),$$

$$\alpha_2(X,Y) = -g(\mathring{h}(X,Y), \bar{\phi}E),$$

$$\alpha_3(X,Y) = g(\mathring{h}(X,Y), N),$$

diyelim. Böylece (3.1.59) eşitliği

$$\nabla_X Y = \mathring{\nabla}_X Y + \alpha_1(X,Y)\bar{\phi}E + \alpha_2(X,Y)\bar{\phi}N + \alpha_3(X,Y)E \tag{3.1.63}$$

olarak yazılabilir.

Şimdi B ve C cinsinden α_1, α_2 ve α_3 ü bulalım.

(3.1.36) eşitliği (3.1.63) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, \bar{\phi}N) &= g(\mathring{\nabla}_X Y + \alpha_1(X,Y)\bar{\phi}E + \alpha_2(X,Y)\bar{\phi}N \\ &+\alpha_3(X,Y)E, \bar{\phi}N) \\ &= g(\mathring{\nabla}_X Y, \bar{\phi}N) + \alpha_1(X,Y)g(\bar{\phi}E, \bar{\phi}N) \\ &+\alpha_2(X,Y)g(\bar{\phi}N, \bar{\phi}N) + \alpha_3(X,Y)g(E, \bar{\phi}N) \\ &= -\alpha_1(X,Y) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan (1.2.10), (1.2.11) ve (3.1.62) eşitlikleri ile birlikte D_0-distribüsyonunun $\bar{\phi}$-invaryant ve $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun bir metrik konneksiyon olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, \bar{\phi}N) &= \bar{g}(\nabla_X Y, \bar{\phi}N) \\ &= -\bar{g}(\bar{\phi}(\nabla_X Y), N) \\ &= -\bar{g}(\bar{\phi}(\bar{\nabla}_X Y - B(X,Y)N), N) \\ &= -\bar{g}(\bar{\phi}(\bar{\nabla}_X Y), N) + \bar{g}(\bar{\phi}N, N)B(X,Y) \\ &= \bar{g}((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y, N) - \bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, N) \\ &= -X(\bar{g}(\bar{\phi}Y, N)) + \bar{g}(\bar{\phi}Y, \bar{\nabla}_X N) \\ &= \bar{g}(\bar{\phi}Y, \bar{\nabla}_X N) \\ &= \bar{g}(\bar{\phi}Y, -A_N X + \tau(X)N) \\ &= -\bar{g}(A_N X, \bar{\phi}Y) \\ &= -C(X, \bar{\phi}Y) \end{aligned}$$

olur. Buradan $\alpha_1(X,Y) = C(X, \bar{\phi}Y)$ elde edilir.

Benzer şekilde

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, \bar{\phi}E) &= g(\mathring{\nabla}_X Y + \alpha_1(X,Y)\bar{\phi}E + \alpha_2(X,Y)\bar{\phi}N \\ &+\alpha_3(X,Y)E, \bar{\phi}E) \\ &= g(\mathring{\nabla}_X Y, \bar{\phi}E) + \alpha_1(X,Y)g(\bar{\phi}E, \bar{\phi}E) \\ &+\alpha_2(X,Y)g(\bar{\phi}N, \bar{\phi}E) + \alpha_3(X,Y)g(E, \bar{\phi}E) \\ &= -\alpha_2(X,Y) \end{aligned}$$

dir. Ayrıca D_0-distribüsyonu $\bar{\phi}$-invaryant ve $\bar{\nabla}$ bir metrik konneksiyon olduğundan

(1.2.10), (1.2.14) ve (3.1.61) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, \bar{\phi}E) &= \bar{g}(\nabla_X Y, \bar{\phi}E) \\ &= -\bar{g}(\bar{\phi}(\nabla_X Y), E) \\ &= -\bar{g}(\bar{\phi}(\bar{\nabla}_X Y - B(X,Y)N), E) \\ &= -\bar{g}(\bar{\phi}(\bar{\nabla}_X Y), E) + \bar{g}(\bar{\phi}N, E)B(X,Y) \\ &= \bar{g}((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y, E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, E) \\ &= -X(\bar{g}(\bar{\phi}Y, E)) + \bar{g}(\bar{\phi}Y, \bar{\nabla}_X E) \\ &= \bar{g}(\bar{\phi}Y, \bar{\nabla}_X E) \\ &= \bar{g}(\bar{\phi}Y, -A^*_E X + \nabla^{*t}_X E) \\ &= -\bar{g}(A^*_E X, \bar{\phi}Y) \\ &= -B(X, \bar{\phi}Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Öyleyse $\alpha_2(X,Y) = B(X, \bar{\phi}Y)$ olur.

Son olarak $X, Y \in \Gamma(D_0 \mid_U)$ için $X, Y \in \Gamma(S(TM) \mid_U)$ olacağından (1.2.19) eşitliği (3.1.63) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, N) &= g(\mathring{\nabla}_X Y + \alpha_1(X,Y)\bar{\phi}E + \alpha_2(X,Y)\bar{\phi}N \\ &\quad +\alpha_3(X,Y)E, N) \\ &= g(\mathring{\nabla}_X Y, N) + \alpha_1(X,Y)g(\bar{\phi}E, N) \\ &\quad +\alpha_2(X,Y)g(\bar{\phi}N, N) + \alpha_3(X,Y)g(E,N) \\ &= \alpha_3(X,Y) \end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan (1.2.4) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g(\nabla^*_X Y + C(X,Y)E, N) &= g(\nabla^*_X Y, N) + C(X,Y)g(E,N) \\ &= C(X,Y) \end{aligned}$$

olduğundan $\alpha_3(X,Y) = C(X,Y)$ elde edilir. Böylece yukarıda elde edilen α_1, α_2 ve α_3 ifadeleri (3.1.63) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \nabla_X Y &= \mathring{\nabla}_X Y + C(X, \bar{\phi}Y)\bar{\phi}E + B(X, \bar{\phi}Y)\bar{\phi}N \\ &\quad +C(X,Y)E \end{aligned} \tag{3.1.64}$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\mathring{h}(X,Y) = C(X, \bar{\phi}Y)\bar{\phi}E + B(X, \bar{\phi}Y)\bar{\phi}N + C(X,Y)E \tag{3.1.65}$$

olur.

Teorem 3.1.6. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve $(M, g, S(TM))$, $\bar{M}$ nin bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. M üzerinde D_0 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Gamma(D_0)$ için*

$$\begin{aligned} C(X,Y) &= C(Y,X), \\ B(X,\bar{\phi}Y) &= B(\bar{\phi}X,Y), \\ C(X,\bar{\phi}Y) &= C(\bar{\phi}X,Y), \end{aligned} \tag{3.1.66}$$

olmasıdır.

İspat. ∇ indirgenmiş konneksiyonu torsiyonsuz olduğundan (3.1.64) eşitliği kullanılarak her $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} [X,Y] &= \overset{\circ}{\nabla}_X Y + C(X,\bar{\phi}Y)\bar{\phi}E + B(X,\bar{\phi}Y)\bar{\phi}N + C(X,Y)E \\ &\quad - \overset{\circ}{\nabla}_Y X - C(Y,\bar{\phi}X)\bar{\phi}E - B(Y,\bar{\phi}X)\bar{\phi}N - C(Y,X)E \\ &= \overset{\circ}{\nabla}_X Y - \overset{\circ}{\nabla}_Y X + (C(X,\bar{\phi}Y) - C(Y,\bar{\phi}X))\bar{\phi}E \\ &\quad + (B(X,\bar{\phi}Y) - B(Y,\bar{\phi}X))\bar{\phi}N + (C(X,Y) - C(Y,X))E \end{aligned} \tag{3.1.67}$$

elde edilir.

Şimdi D_0 distribüsyonunun integrallenebilir olduğunu kabul edelim. Yani herhangi $X, Y \in \Gamma(D_0)$ için $[X,Y] \in D_0$ olsun. Bu durumda $[X,Y]$ nin $\bar{\phi}(Rad\ TM)$, $\bar{\phi}ltr(TM)$ ve $Rad\,TM$ bileşenleri sıfır olmalıdır. Böylece (3.1.66) ile verilen eşitliklere ulaşılır.

Tersine (3.1.66) eşitlikleri sağlanırsa (3.1.67) eşitliğinden her $X, Y \in \Gamma(D_0)$ için

$$[X,Y] = \overset{\circ}{\nabla}_X Y - \overset{\circ}{\nabla}_Y X \in \Gamma(D_0)$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Sonuç 3.1.3. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve $(M, g, S(TM))$, $\bar{M}$ nin bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda D_0 distribüsyonu üzerinde $\overset{\circ}{h}$ nın simetrik olması için gerek ve yeter şart D_0 distribüsyonunun integrallenebilir olmasıdır.*

İspat. Kabul edelim ki $\overset{\circ}{h}$ simetrik olsun. Bu durumda (3.1.65) eşitliğinden

$$\begin{aligned} C(X,\bar{\phi}Y)\bar{\phi}E + B(X,\bar{\phi}Y)\bar{\phi}N + C(X,Y)E &= C(Y,\bar{\phi}X)\bar{\phi}E + B(Y,\bar{\phi}X)\bar{\phi}N \\ &\quad + C(Y,X)E \end{aligned}$$

yazılabilir. Buradan (3.1.66) eşitliklerine ulaşılır.

Tersine D_0 distribüsyonu integrallenebilir olsun. Bu durumda (3.1.65) eşitliğinde Teorem 3.1.6 göz önüne alınırsa her $X, Y \in \Gamma(D_0)$ için

$$\begin{aligned}\mathring{h}(X,Y) &= C(X,\bar{\phi}Y)\bar{\phi}E + B(X,\bar{\phi}Y)\bar{\phi}N + C(X,Y)E \\ &= C(Y,\bar{\phi}X)\bar{\phi}E + B(Y,\bar{\phi}X)\bar{\phi}N + C(Y,X)E \\ &= \mathring{h}(Y,X)\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.1.7. *$(M, g, S(TM))$, $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifoldunun bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda D_0 distribüsyonunu integrallenebilir olmak üzere D_0 ın M üzerindeki simetrik ∇ konneksiyonu ile minimal olması için gerek ve yeter şart*

$$C(X,Y) = C(\bar{\phi}X, \bar{\phi}Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(D_0)$$

olmasıdır.

İspat. (3.1.37) ile verilen ayrışım göz önüne alınırsa $rank D_0 = 2n-3$ olduğu kolayca görülebilir. D_0 distribüsyonunun Önerme 3.1.5 de verilen $\{e_i, \bar{\phi}e_i, \xi\}$, $i = 1, 2, ..., n-2$, bazını göz önüne alalım. Bu durumda

$$trace(\mathring{h}) = \sum_{i=1}^{n-2} \mathring{h}(e_i, e_i) - \sum_{i=1}^{n-2} \mathring{h}(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_i) + \mathring{h}(\xi, \xi) \tag{3.1.68}$$

yazılabilir. Burada (3.1.65) eşitliğinin kullanılması ile

$$\begin{aligned}\mathring{h}(e_i,e_i) - \mathring{h}(\bar{\phi}e_i,\bar{\phi}e_i) + \mathring{h}(\xi,\xi) &= C(e_i,\bar{\phi}e_i)\bar{\phi}E + B(e_i,\bar{\phi}e_i)\bar{\phi}N \\ &\quad + C(e_i,e_i)E - C(\bar{\phi}e_i,\bar{\phi}^2e_i)\bar{\phi}E \\ &\quad - B(\bar{\phi}e_i,\bar{\phi}^2e_i)\bar{\phi}N - C(\bar{\phi}e_i,\bar{\phi}e_i)E \\ &\quad + C(\xi,\bar{\phi}\xi)\bar{\phi}E + B(\xi,\bar{\phi}\xi)\bar{\phi}N \\ &\quad + C(\xi,\xi)E\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (1.2.21) ve (1.4.1) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}\mathring{h}(e_i,e_i) - \mathring{h}(\bar{\phi}e_i,\bar{\phi}e_i) + \mathring{h}(\xi,\xi) &= (C(e_i,\bar{\phi}e_i) - C(\bar{\phi}e_i,e_i))\bar{\phi}E \\ &\quad + (B(e_i,\bar{\phi}e_i) - B(\bar{\phi}e_i,e_i))\bar{\phi}N \\ &\quad + (C(e_i,e_i) - C(\bar{\phi}e_i,\bar{\phi}e_i))E\end{aligned} \tag{3.1.69}$$

bulunur. D_0 distribüsyonu integrallenebilir olduğundan (3.1.66) eşitliklerinden

$$trace(\mathring{h}) = \sum_{i=1}^{n-2} \mathring{h}(e_i, e_i) - \sum_{i=1}^{n-2} \mathring{h}(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_i) + \mathring{h}(\xi, \xi) \Leftrightarrow (C(e_i, e_i) - C(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_i))E \tag{3.1.70}$$

olur. Bu durumda D_0 minimal ise $C(e_i, e_i) = C(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_i)$ elde edilir ve (3.1.67) eşitliğine ulaşılır.

Tersine (3.1.67) eşitliği sağlanıyor ise $trace(\mathring{h}) = 0$ olacağı (3.1.70) den açıktır. Böylece ispat tamamlanır. □

Şimdi (3.1.39) ile verilen ayrışımı göz önüne alıp

$$\omega = \left\{\bar{\phi}(Rad\ TM) \oplus \bar{\phi}ltr(TM)\right\} \perp \left\{Rad\ TM \oplus \bar{\phi}ltr(TM)\right\}$$

diyelim. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(D_0)$ ve $Z \in \Gamma(\omega)$ için

$$\bar{\nabla}_X Y = \hat{\nabla}_X Y + \hat{h}(X, Y) \tag{3.1.71}$$

$$\bar{\nabla}_X Z = -\hat{A}_Z X + \nabla^{\omega}_X Z, \tag{3.1.72}$$

yazılabilir. Burada $\hat{\nabla} : \Gamma(TM) \times \Gamma(D_0) \to \Gamma(D_0)$ ve $\nabla^{\omega} : \Gamma(TM) \times \Gamma(\omega) \to \Gamma(\omega)$ sırasıyla D_0 ve ω üzerinde lineer konneksiyonlardır. Ayrıca $\hat{h} : \Gamma(TM) \times \Gamma(D_0) \to \Gamma(\omega)$ ve $\hat{A} : \Gamma(TM) \times \Gamma(\omega) \to \Gamma(D_0)$ da sırasıyla $\Im(M)$ bilineer ve D_0 üzerinde bilineer operatörlerdir.

Kabul edelim ki $U \subset M$ üzerinde bir koordinat komşuluğu ve (3.1.39) ile verilen ayrışıma göre her $X, Y \in \Gamma(D_0)$ için

$$\beta_1(X, Y) = -g(\hat{h}(X, Y), \bar{\phi}N),$$

$$\beta_2(X, Y) = -g(\hat{h}(X, Y), \bar{\phi}E),$$

$$\beta_3(X, Y) = g(\hat{h}(X, Y), N),$$

$$\beta_4(X, Y) = g(\hat{h}(X, Y), E)$$

olsun. Böylece (3.1.71) eşitliği

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \hat{\nabla}_X Y + \beta_1(X, Y)\bar{\phi}E + \beta_2(X, Y)\bar{\phi}N \\ &+\beta_3(X, Y)E + \beta_4(X, Y)N \end{aligned} \tag{3.1.73}$$

şeklinde yazılabilir.

Şimdi B ve C cinsinden β_1, β_2, β_3 ve β_4 ü bulalım.

(3.1.36) eşitliği (3.1.73) eşitliğinde kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, \bar{\phi}N) &= g(\hat{\nabla}_X Y + \beta_1(X,Y)\bar{\phi}E + \beta_2(X,Y)\bar{\phi}N \\
&+\beta_3(X,Y)E + \beta_4(X,Y)N, \bar{\phi}N) \\
&= g(\hat{\nabla}_X Y, \bar{\phi}N) + \beta_1(X,Y)g(\bar{\phi}E, \bar{\phi}N) \\
&+\beta_2(X,Y)g(\bar{\phi}N, \bar{\phi}N) + \beta_3(X,Y)g(E, \bar{\phi}N) \\
&+\beta_4(X,Y)g(N, \bar{\phi}N) \\
&= -\beta_1(X,Y)
\end{aligned} \tag{3.1.74}
$$

bulunur. Diğer taraftan (1.2.10), (1.2.11) ve (3.1.62) eşitlikleri ile birlikte D_0-distribüsyonunun $\bar{\phi}$-invaryant ve $\bar{\nabla}$ konneksiyonunun bir metrik konneksiyon olduğu göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, \bar{\phi}N) &= \bar{g}(\nabla_X Y, \bar{\phi}N) \\
&= -\bar{g}(\bar{\phi}(\nabla_X Y), N) \\
&= -\bar{g}(\bar{\phi}(\bar{\nabla}_X Y - B(X,Y)N), N) \\
&= -\bar{g}(\bar{\phi}(\bar{\nabla}_X Y), N) + B(X,Y)\bar{g}(\bar{\phi}N, N) \\
&= \bar{g}((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y, N) - \bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, N) \\
&= -X(\bar{g}(\bar{\phi}Y, N)) + \bar{g}(\bar{\phi}Y, \bar{\nabla}_X N) \\
&= \bar{g}(\bar{\phi}Y, \bar{\nabla}_X N) \\
&= \bar{g}(\bar{\phi}Y, -A_N X + \tau(X)N) \\
&= -\bar{g}(A_N X, \bar{\phi}Y) \\
&= -C(X, \bar{\phi}Y)
\end{aligned} \tag{3.1.75}
$$

olur. (3.1.74) ve (3.1.75) den $\beta_1(X,Y) = C(X, \bar{\phi}Y)$ elde edilir.

Benzer olarak β_2 için (3.1.36) eşitliği (3.1.73) eşitliğinde kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
g(\nabla_X Y, \bar{\phi}E) &= g(\hat{\nabla}_X Y + \beta_1(X,Y)\bar{\phi}E + \beta_2(X,Y)\bar{\phi}N \\
&+\beta_3(X,Y)E + \beta_4(X,Y)N, \bar{\phi}E) \\
&= g(\hat{\nabla}_X Y, \bar{\phi}E) + \beta_1(X,Y)g(\bar{\phi}E, \bar{\phi}E) \\
&+\beta_2(X,Y)g(\bar{\phi}N, \bar{\phi}E) + \beta_3(X,Y)g(E, \bar{\phi}E) \\
&+\beta_4(X,Y)g(N, \bar{\phi}E) \\
&= -\beta_2(X,Y)
\end{aligned}
$$

bulunur. (1.2.10), (1.2.14) ve (3.1.61) eşitlikleri ile birlikte D_0-distribüsyonunun $\bar{\phi}$-invaryant ve $\bar{\nabla}$ konneksiyonu metrik konneksiyon olduğundan

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, \bar{\phi}E) &= \bar{g}(\nabla_X Y, \bar{\phi}E) \\ &= -\bar{g}(\bar{\phi}(\nabla_X Y), E) \\ &= -\bar{g}(\bar{\phi}(\bar{\nabla}_X Y - B(X,Y)N), E) \\ &= -\bar{g}(\bar{\phi}(\bar{\nabla}_X Y), E) + \bar{g}(\bar{\phi}N, E)B(X,Y) \\ &= \bar{g}((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y, E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, E) \\ &= -X(\bar{g}(\bar{\phi}Y, E)) + \bar{g}(\bar{\phi}Y, \bar{\nabla}_X E) \\ &= \bar{g}(\bar{\phi}Y, \bar{\nabla}_X E) \\ &= \bar{g}(\bar{\phi}Y, -A^*_E X + \nabla^{*t}_X E) \\ &= -\bar{g}(A^*_E X, \bar{\phi}Y) \\ &= -B(X, \bar{\phi}Y) \end{aligned}$$

olur. Buradan ise $\beta_2(X,Y) = B(X, \bar{\phi}Y)$ elde edilir.

(1.2.11), (1.2.12) eşitlikleri ile birlikte (1.2.21) ve (1.2.22) denklemleri (3.1.73) eşitliğinde kullanılırsa

$$\begin{aligned} \beta_3(X,Y) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_X Y, N) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, N) \\ &= X(\bar{g}(Y,N)) - \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X N) \\ &= -\bar{g}(Y, -A_N X + \tau(X)N) \\ &= \bar{g}(Y, A_N X) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} \beta_4(X,Y) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y - \hat{\nabla}_X Y, E) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, E) \\ &= X(\bar{g}(Y,E)) - \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X E) \\ &= -\bar{g}(Y, \nabla_X E + B(X,E)N) \\ &= -\bar{g}(Y, \nabla_X E) \\ &= -\bar{g}(Y, -A_E X + \tau(X)E) \\ &= \bar{g}(Y, A_E X) \end{aligned}$$

olacağından $\beta_3(X,Y) = C(X,Y)$ ve $\beta_4(X,Y) = B(X,Y)$ olur. β_1, β_2, β_3 ve β_4

için yukarıda elde edilen eşitlikler (3.1.73) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\nabla}_X Y &= \hat{\nabla}_X Y + C(X, \bar{\phi}Y)\bar{\phi}E + B(X, \bar{\phi}Y)\bar{\phi}N \\ &+C(X, Y)E + B(X, Y)N \end{aligned} \tag{3.1.76}$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \hat{h}(X, Y) &= C(X, \bar{\phi}Y)\bar{\phi}E + B(X, \bar{\phi}Y)\bar{\phi}N \\ &+C(X, Y)E + B(X, Y)N \end{aligned} \tag{3.1.77}$$

olur.

Teorem 3.1.8. *$(M, g, S(TM))$ integrallenebilir D_0 distribüsyonunu ile birlikte $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifoldun bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda D_0 ın minimal olması için gerek ve yeter şart*

$$C(X, Y) = C(\bar{\phi}X, \bar{\phi}Y) \text{ ve } B(X, Y) = B(\bar{\phi}X, \bar{\phi}Y), \quad \forall X, Y \in \Gamma(D_0)$$

olmasıdır.

İspat. Kabul edelim ki $\{e_i, \bar{\phi}e_i, \xi\}$, $i = 1, 2, ..., n-2$, D_0 ın ortonormal $\bar{\phi}$-bazı olsun. Bu durumda

$$trace(\hat{h}) = \sum_{i=1}^{n-2} \hat{h}(e_i, e_i) - \sum_{i=1}^{n-2} \hat{h}(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_i) + \hat{h}(\xi, \xi) \tag{3.1.78}$$

yazılabilir. Burada (3.1.77) eşitliğinin kullanılması ile

$$\begin{aligned} \hat{h}(e_i, e_i) - \hat{h}(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_i) + \hat{h}(\xi, \xi) &= C(e_i, \bar{\phi}e_i)\bar{\phi}E + B(e_i, \bar{\phi}e_i)\bar{\phi}N \\ &+C(e_i, e_i)E + B(e_i, e_i)N \\ &-C(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}^2 e_i)\bar{\phi}E - B(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}^2 e_i)\bar{\phi}N \\ &-C(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_i)E - B(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_i)N \\ &+C(\xi, \bar{\phi}\xi)\bar{\phi}E + B(\xi, \bar{\phi}\xi)\bar{\phi}N \\ &+C(\xi, \xi)E + B(\xi, \xi)N \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte (1.2.21) ve (1.4.1) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \hat{h}(e_i, e_i) - \hat{h}(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_i) + \hat{h}(\xi, \xi) &= (C(e_i, \bar{\phi}e_i) - C(\bar{\phi}e_i, e_i))\bar{\phi}E \\ &+(B(e_i, \bar{\phi}e_i) - B(\bar{\phi}e_i, e_i))\bar{\phi}N \\ &+(C(e_i, e_i) - C(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_i))E \\ &+(B(e_i, e_i) - B(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_i))N \end{aligned} \tag{3.1.79}$$

bulunur. D_0 distribüsyonunun integrallenebilir olduğu göz önüne alınırsa (3.1.79) eşitliğinden

$$\begin{aligned} 0 \quad &= \textstyle\sum_{i=1}^{n-2} \hat{h}(e_i, e_i) - \sum_{i=1}^{n-2} \hat{h}(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_i) + \hat{h}(\xi, \xi) \\ &\Leftrightarrow (C(e_i, e_i) - C(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_i))E \\ &\quad +(B(e_i, e_i) - B(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_i))N \end{aligned}$$

olur. Bu durumda D_0 minimal ise $C(e_i, e_i) = C(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_i)$ ve $B(e_i, e_i) = B(\bar{\phi}e_i, \bar{\phi}e_i)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Teorem 3.1.9. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifold ve $(M, g, S(TM))$ de $\bar{M}$ nin bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer D_0 distribüsyonu integrallenebilir ise D_0 distribüsyonunun lifleri para-Sasakian yapıya sahiptir.*

İspat. $(M, g, S(TM))$ bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzey ve $\mathring{M}$, D_0 distribüsyonunun bir lifi olsun. O halde her $p \in \mathring{M}$ için $T_p(\mathring{M}) = (D_0)_p$ dir. $S : \Gamma(TM) \to \Gamma(D)$ ve $D = D_0 \perp \bar{\phi}(Rad\ TM) \perp Rad\ TM$ olduğudan her $X_0 \in T\mathring{M}$ için

$$\phi X_0 = \bar{\phi} S X_0 = \bar{\phi} X_0$$

dır. $\mathring{\phi} = \phi|_{D_0}$ ve $\mathring{\eta} = \eta|_{D_0}$ alınırsa D_0 distribüsyonu $\bar{\phi}$-invaryant olduğundan $\bar{\phi}$ tensör alanı $\mathring{M}$ üzerinde bir $\mathring{\phi}$ $(1,1)$-tensör alanı tanımlar. (3.1.42) eşitliği göz önüne alındığında her $X_0 \in \Gamma(T\mathring{M})$ için

$$\mathring{\phi} X_0 = X_0 - \mathring{\eta}(X_0)\xi$$

$$\mathring{\eta}(\xi) = 1$$

dir. Böylece $(\mathring{M}, \mathring{\phi}, \xi, \mathring{\eta})$ bir hemen hemen parakontakt manifold olur. Ek olarak (3.1.2) eşitliğinden her $X_0, Y_0 \in \Gamma(T\mathring{M})$ için

$$\begin{aligned} g(\mathring{\phi} X_0, \mathring{\phi} Y_0) &= g(\phi X_0, \phi Y_0) \\ &= \bar{g}(\bar{\phi} X_0 - u(X_0)N, \bar{\phi} Y_0 - u(Y_0)N) \\ &= \bar{g}(\bar{\phi} X_0, \bar{\phi} Y_0) \\ &= -g(X_0, Y_0) + \mathring{\eta}(X_0)\mathring{\eta}(Y_0) \end{aligned}$$

olarak yazılabileceğinden $(\mathring{M}, \mathring{\phi}, \xi, \mathring{\eta}, g)$ bir hemen hemen parakontakt metrik manifold olur. Herhangi $X_0, Y_0 \in \Gamma(T\mathring{M})$ için

$$
\begin{aligned}
2d\eta(X_0, Y_0) &= X_0(\eta(Y_0)) - Y_0(\eta(X_0)) - \eta[X_0, Y_0] \\
&= X_0(\mathring{\eta}(Y_0)) - Y_0(\mathring{\eta}(X_0)) - \mathring{\eta}[X_0, Y_0] \\
&= 2d\mathring{\eta}(X_0, Y_0)
\end{aligned} \tag{3.1.80}
$$

dır. (3.1.80) eşitliği kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\mathring{\Phi}(X_0, Y_0) &= g(X_0, \mathring{\phi}Y_0) \\
&= \bar{g}(X_0, \mathring{\phi}Y_0) \\
&= \bar{g}(X_0, \bar{\phi}Y_0) \\
&= d\eta(X_0, Y_0) = d\mathring{\eta}(X_0, Y_0)
\end{aligned}
$$

ve

$$N_{\mathring{\phi}} - 2d\mathring{\eta}(X_0, Y_0) = N_{\bar{\phi}} - 2d\eta(X_0, Y_0)$$

elde edilir. Son olarak her $X_0, Y_0, Z_0 \in \Gamma(T\mathring{M})$ için (1.2.23) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
(\mathring{\nabla}_{X_0} g)(Y_0, Z_0) &= X_0 g(Y_0, Z_0) - g(\mathring{\nabla}_{X_0} Y_0, Z_0) - g(Y_0, \mathring{\nabla}_{X_0} Z_0) \\
&= X_0 g(Y_0, Z_0) - g(\nabla_{X_0} Y_0, Z_0) + g(\mathring{h}(X_0, Y_0), Z_0) \\
&\quad - g(Y_0, \nabla_{X_0} Z_0) + g(Y_0, \mathring{h}(X_0, Z_0)) \\
&= (\nabla_{X_0} g)(Y_0, Z_0) \\
&= B(X_0, Y_0) g(Z_0, N) + B(X_0, Z_0) g(Y_0, N) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olur. Bu ise $\mathring{\nabla}$ nın Levi-Civita konneksiyonu olduğunu gösterir. Diğer taraftan (3.1.80) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
2g((\mathring{\nabla}_{X_0} \mathring{\phi}) Y_0, Z) &= 2d\mathring{\eta}(\mathring{\phi}Y_0, X_0)\mathring{\eta}(Z_0) - 2d\mathring{\eta}(\mathring{\phi}Z_0, X_0)\mathring{\eta}(Y_0) \\
&= 2g(\mathring{\phi}Y_0, \mathring{\phi}X_0)\mathring{\eta}(Z_0) - 2g(\mathring{\phi}Z_0, \mathring{\phi}X_0)\mathring{\eta}(Y_0)
\end{aligned}
$$

yani

$$g((\mathring{\nabla}_{X_0} \mathring{\phi}) Y_0, Z) = -g(X_0, Y_0)\xi + \eta(Y_0) X_0$$

elde edilir. Böylece $(\mathring{M}, \mathring{\phi}, \xi, \mathring{\eta}, g)$ bir para-Sasakian manifold olur. □

Şimdi

$$D = D_0 \perp \bar{\phi}(Rad\ TM) \perp Rad\ TM$$

ile tanımlanan distribüsyonu göz önüne alalım.

Lemma 3.1.1. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve $(M, g, S(TM))$ de $\bar{M}$ nin bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda her $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(T\bar{M})$ için*

$$\bar{g}((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y, E) = 0 \tag{3.1.81}$$

dır.

İspat. $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(T\bar{M})$ için (1.4.52) eşitliğinden

$$\begin{aligned} \bar{g}((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y, E) &= \bar{g}(\bar{g}(X, Y)\xi + \eta(Y)X, E) \\ &= -\bar{g}(X, Y)\bar{g}(\xi, E) + \bar{g}(X, E)\eta(Y) \\ &= 0 \end{aligned}$$

elde edilir. □

Önerme 3.1.9. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve $(M, g, S(TM))$ de $\bar{M}$ nin bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda D distribüsyonunun integrallenebilmesi için gerek ve yeter şart*

$$\begin{aligned} &B(X, \bar{\phi}Y) = B(\bar{\phi}X, Y), \qquad X, Y \in \Gamma(D_0), \\ &B(X, V) = 0, \qquad X, Y \in \Gamma(D_0), \\ &B(V, V) = 0, \end{aligned} \tag{3.1.82}$$

şartlarını sağlamasıdır. Burada $V = \bar{\phi}E$ dir.

İspat. Her $X, Y \in \Gamma(D)$ için (1.2.14) ve (3.1.81) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\bar{g}([X,Y],\bar{\phi}E) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y - \bar{\nabla}_Y X, \bar{\phi}E) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \bar{\phi}E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_Y X, \bar{\phi}E) \\
&= -\bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_X Y, E) + \bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_Y X, E) \\
&= \bar{g}((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y, E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, E) \\
&\quad -\bar{g}((\bar{\nabla}_Y \bar{\phi})X, E) + \bar{g}(\bar{\nabla}_Y \bar{\phi}X, E) \\
&= -\bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, E) + \bar{g}(\bar{\nabla}_Y \bar{\phi}X, E) \\
&= -X\bar{g}(\bar{\phi}Y, E) + \bar{g}(\bar{\phi}Y, \bar{\nabla}_X E) \\
&\quad +Y\bar{g}(\bar{\phi}X, E) - \bar{g}(\bar{\phi}X, \bar{\nabla}_Y E) \\
&= \bar{g}(\bar{\phi}Y, \bar{\nabla}_X E) - \bar{g}(\bar{\phi}X, \bar{\nabla}_Y E) \\
&= -\bar{g}(\bar{\phi}Y, A^*_E X) + \bar{g}(\bar{\phi}Y, \tau(X)E) \\
&\quad +\bar{g}(\bar{\phi}X, A^*_E Y) - \bar{g}(\bar{\phi}X, \tau(Y)E) \\
&= \bar{g}(\bar{\phi}X, A^*_E Y) - \bar{g}(\bar{\phi}Y, A^*_E X)
\end{aligned}
$$

elde edilir. D distribüsyonunun tanımından $X_0, Y_0 \in \Gamma(D_0)$ ve $\sigma_1,\ \sigma_2,\ \rho_1,\ \rho_2 \in \Im(U)$ olmak üzere

$$
X = X_0 + \sigma_1 E + \sigma_2 \bar{\phi}E, \qquad Y = Y_0 + \rho_1 E + \rho_2 \bar{\phi}E \tag{3.1.83}
$$

yazılabilir. D distribüsyonu $\bar{\phi}$-invaryant olduğundan (3.1.83) ve (1.2.12) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\bar{g}([X,Y],\bar{\phi}E) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{X_0} Y_0, \bar{\phi}E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{Y_0} X_0, \bar{\phi}E) + \rho_1 \bar{g}(\bar{\nabla}_{X_0} E, \bar{\phi}E) \\
&\quad -\sigma_1 \bar{g}(\bar{\nabla}_{Y_0} E, \bar{\phi}E) + \rho_2 \bar{g}(\bar{\nabla}_{X_0} \bar{\phi}E, \bar{\phi}E) \\
&\quad -\sigma_2 \bar{g}(\bar{\nabla}_{Y_0} \bar{\phi}E, \bar{\phi}E) + \sigma_1 \bar{g}(\bar{\nabla}_E Y_0, \bar{\phi}E) \\
&\quad -\rho_1 \bar{g}(\bar{\nabla}_E X_0, \bar{\phi}E) + \sigma_1\rho_1 \bar{g}(\bar{\nabla}_E E, \bar{\phi}E) \\
&\quad -\sigma_1\rho_1 \bar{g}(\bar{\nabla}_E E, \bar{\phi}E) + \sigma_1\rho_2 \bar{g}(\bar{\nabla}_E \bar{\phi}E, \bar{\phi}E) \\
&\quad -\sigma_2\rho_1 \bar{g}(\bar{\nabla}_E \bar{\phi}E, \bar{\phi}E) + \sigma_2 \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}E} Y_0, \bar{\phi}E) \\
&\quad -\rho_2 \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}E} X_0, \bar{\phi}E) + \sigma_2\rho_1 \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}E} E, \bar{\phi}E) \\
&\quad -\sigma_1\rho_2 \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}E} E, \bar{\phi}E) + \sigma_2\rho_2 \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}E} \bar{\phi}E, \bar{\phi}E) \\
&\quad -\sigma_2\rho_2 \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}E} \bar{\phi}E, \bar{\phi}E)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu son eşitlikte (1.4.7) ile birlikte (1.4.52) ve (3.1.81) eşitliklerinden $X, Y \in$

$\Gamma(D)$ için

$$\begin{aligned}
\bar{g}([X,Y],\bar{\phi}E) &= \bar{g}((\bar{\nabla}_{X_0}\bar{\phi})Y_0,E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{X_0}\bar{\phi}Y_0,E) \\
&\quad -\bar{g}((\bar{\nabla}_{Y_0}\bar{\phi})X_0,E) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{Y_0}\bar{\phi}X_0,E) \\
&\quad +\rho_1\left(\bar{g}((\bar{\nabla}_{X_0}\bar{\phi})E,E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{X_0}\bar{\phi}E,E)\right) \\
&\quad -\sigma_1\left(\bar{g}((\bar{\nabla}_{Y_0}\bar{\phi})E,E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{Y_0}\bar{\phi}E,E)\right) \\
&\quad +\rho_2\left(\bar{g}((\bar{\nabla}_{X_0}\bar{\phi})\bar{\phi}E,E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{X_0}\bar{\phi}^2E,E)\right) \\
&\quad -\sigma_2\left(\bar{g}((\bar{\nabla}_{Y_0}\bar{\phi})\bar{\phi}E,E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{Y_0}\bar{\phi}^2E,E)\right) \\
&\quad +\sigma_1\left(\bar{g}((\bar{\nabla}_{E}\bar{\phi})Y_0,E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{E}\bar{\phi}Y_0,E)\right) \\
&\quad -\rho_1\left(\bar{g}((\bar{\nabla}_{E}\bar{\phi})X_0,E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{E}\bar{\phi}X_0,E)\right) \\
&\quad +\sigma_1\rho_2\left(\bar{g}((\bar{\nabla}_{E}\bar{\phi})\bar{\phi}E,E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{E}\bar{\phi}^2E,E)\right) \\
&\quad -\sigma_2\rho_1\left(\bar{g}((\bar{\nabla}_{E}\bar{\phi})\bar{\phi}E,E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{E}\bar{\phi}^2E,E)\right) \\
&\quad +\sigma_2\left(\bar{g}((\bar{\nabla}_{\bar{\phi}E}\bar{\phi})Y_0,E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}E}\bar{\phi}Y_0,E)\right) \\
&\quad -\rho_2\left(\bar{g}((\bar{\nabla}_{\bar{\phi}E}\bar{\phi})X_0,E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}E}\bar{\phi}X_0,E)\right) \\
&\quad +\sigma_2\rho_1\left(\bar{g}((\bar{\nabla}_{\bar{\phi}E}\bar{\phi})E,E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}E}\bar{\phi}E,E)\right) \\
&\quad -\sigma_1\rho_2\left(\bar{g}((\bar{\nabla}_{\bar{\phi}E}\bar{\phi})E,E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}E}\bar{\phi}E,E)\right) \\
\bar{g}([X,Y],\bar{\phi}E) &= -B(X_0,\bar{\phi}Y_0) + B(\bar{\phi}X_0,Y_0) + \rho_1 B(X_0,V) \\
&\quad -\sigma_1 B(Y_0,V) + \sigma_2 B(\bar{\phi}Y_0,V) - \rho_2 B(\bar{\phi}X_0,V) \\
&\quad -\sigma_2\rho_1 B(V,V) + \sigma_1\rho_2 B(V,V) \\
\bar{g}([X,Y],\bar{\phi}E) &= (\sigma_1\rho_2 - \sigma_2\rho_1)\,B(V,V) - \rho_2 B(\bar{\phi}X_0,V) \\
&\quad +\sigma_2 B(\bar{\phi}Y_0,V) - \sigma_1 B(Y_0,V) + \rho_1 B(X_0,V) \\
&\quad -B(X_0,\bar{\phi}Y_0) + B(\bar{\phi}X_0,Y_0)
\end{aligned} \tag{3.1.84}$$

elde edilir. Şimdi kabul edelim ki D distribüsyonu integrallenebilir olsun. X_0, Y_0, E, $\bar{\phi}E \in \Gamma(D)$ olduğundan

$$0 = \bar{g}([\bar{\phi}E,E],\bar{\phi}E) = -\bar{g}(\bar{\phi}E,\bar{\phi}E) = -B(V,V)$$

dir. Eğer $X \in \Gamma(D_o)$ ise

$$0 = \bar{g}([X,E],\bar{\phi}E) = B(E,\bar{\phi}X) - B(X,\bar{\phi}E) = -B(X,V)$$

ve $X,Y \in \Gamma(D_o)$ ise

$$0 = \bar{g}([X,Y],\bar{\phi}E) = B(\bar{\phi}Y,X) - B(\bar{\phi}X,Y)$$

elde edilir. Tersine (3.1.83) eşitliği (3.1.84) de kullanılırsa $X, Y \in \Gamma(D)$ için $[X, Y] \in \Gamma(D)$ olduğu görülür. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 3.1.10. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve $(M, g, S(TM))$ de $\bar{M}$ nin bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer $(M, g, S(TM))$ tamamen geodezik ise aşağıdaki ifadeler sağlanır:*

i) D distribüsyonu integrallenebilirdir.

ii) D distribüsyonu indirgenmiş konneksiyon ∇ ya göre paraleldir.

İspat. *i)* Kabul edelim ki $(M, g, S(TM))$ tamamen geodezik olsun. Bu durumda Önerme 3.1.9 dan D distribüsyonu integrallenebilirdir.

ii) Her $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y = Y_0 + \rho_1 E + \rho_2 \bar{\phi} E \in \Gamma(D)$ için (3.1.81) eşitliği kullanılırsa

$$g(\nabla_X Y_0, \bar{\phi}E) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y_0, \bar{\phi}E) = -\bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi} Y_0, E) = -B(X, \bar{\phi} Y_0) = 0,$$

$$g(\nabla_X E, \bar{\phi}E) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X E, \bar{\phi}E) = B(X, \bar{\phi}E) = 0,$$

ve

$$g(\nabla_X \bar{\phi}E, \bar{\phi}E) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}E, \bar{\phi}E) = g(\nabla_X E, E) = 0$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

3.2 Para-Sasakian Uzay Formun Lightlike Hiperyüzeyleri

Bu kısımda S. Zamkovoy [42] tarafından tanımlanan bir para-Sasakian uzay formun screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyleri incelenecek ve bir para-Sasakian uzay formun lokal simetrik olması için gerek ve yeter şartlar araştırılacaktır.

3.2.1 Para-Sasakian Uzay Formun Screen Semi-İnvaryant Lightlike Hiperyüzeyleri

Tanım 3.2.1. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer herhangi bir $U \subset M$koordinat komşuluğu ve $X, Y \in \Gamma(TM\mid_U)$ için*

$$B(X, Y) = \lambda g(X, Y)$$

ise M ye bir tamamen umbilik lightlike hiperyüzey denir. Burada λ, C^∞ sınıfından bir fonksiyondur.

Teorem 3.2.1. *$(\bar{M}(k), \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian uzay form olsun. $\bar{M}(k)$ nin $(M, g, S(TM))$ screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi tamamen umbilik ise $k = -1$ dir.*

İspat. $(\bar{M}(k), \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian uzay form olduğundan (1.4.58) eşitliğinden $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z,E) &= \tfrac{k-3}{4}\left(\bar{g}(Y,Z)\bar{g}(X,E) - \bar{g}(X,Z)\bar{g}(Y,E)\right) \\
&+ \tfrac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \bar{g}(X,Z)\eta(Y)\eta(E) - \bar{g}(Y,Z)\eta(X)\eta(E) \\ +\bar{g}(Y,E)\eta(X)\eta(Z) - \bar{g}(X,E)\eta(Y)\eta(Z) \\ +\bar{g}(\bar{\phi}Y,E)\bar{g}(\bar{\phi}X,Z) - \bar{g}(\bar{\phi}X,E)\bar{g}(\bar{\phi}Y,Z) \\ -2\bar{g}(X,\bar{\phi}Y)\bar{g}(\bar{\phi}Z,E) \end{pmatrix} \qquad (3.2.1)\\
&= \tfrac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \bar{g}(X,V)\bar{g}(\bar{\phi}Y,Z) - \bar{g}(Y,V)\bar{g}(\bar{\phi}X,Z) \\ +2\bar{g}(X,\bar{\phi}Y)\bar{g}(Z,V) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

yazılabilir. (1.2.28) ve (3.2.1) eşitliklerinde X yerine PX, Y yerine E ve Z yerine PZ alınıp (1.2.12) kullanılırsa sırasıyla

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{R}(PX,E)PZ,E) &= (\nabla_{PX}B)(E,PZ) - (\nabla_E B)(PX,PZ) \\
&+\tau(PX)B(E,PZ) - \tau(E)B(PX,PZ) \\
&= PXB(E,PZ) - B(\nabla_{PX}E,PZ) \\
&-B(E,\nabla_{PX}PZ) - EB(PX,PZ) \\
&+B(\nabla_E PX,PZ) + B(PX,\nabla_E PZ) \\
&-\tau(E)B(PX,PZ) \\
&= -B(\nabla_{PX}E,PZ) - EB(PX,PZ) \\
&+B(\nabla_E PX,PZ) + B(PX,\nabla_E PZ) \\
&-\tau(E)B(PX,PZ)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{R}(PX,E)PZ,E) &= \frac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \bar{g}(PX,V)\bar{g}(\bar{\phi}E,PZ) \\ -\bar{g}(E,V)\bar{g}(\bar{\phi}PX,PZ) \\ +2\bar{g}(PX,\bar{\phi}E)\bar{g}(PZ,V) \end{pmatrix} \\
&= \frac{3(k+1)}{4}u(PX)u(PZ)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda M nin tamamen umbilik olduğu göz önüne alınarak son iki eşitlik karşılaştırılırsa

$$\frac{3(k+1)}{4}u(PX)u(PZ) = (\lambda^2 - E(\lambda) - \lambda\tau(E))\bar{g}(PX, PZ) \tag{3.2.2}$$

olur. $X = Z = U \in S(TM)$ seçilirse $PX = PZ = U$ olur. O halde (3.2.2) den

$$k = -1$$

olduğu görülür ve ispat tamamlanır. □

Tanım 3.2.2. $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *para-Sasakian manifold ve* M *de* $\bar{M}$ *nin bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer herhangi bir* $U \subset M$ *koordinat komşuluğu ve* $X, Y \in \Gamma(TM |_U)$ *için*

$$C(X, PY) = \lambda g(X, PY)$$

ise $S(TM)$ *ekran distribüsyonuna tamamen umbiliktir denir. Burada* λ, C^∞ *sınıfından bir fonksiyondur.*

Teorem 3.2.2. $(\bar{M}(k), \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *bir para-Sasakian uzay form ve* $(M, g, S(TM))$ *de* $S(TM)$ *ekran distribüsyonu tamamen umbilik olacak şekilde* $\bar{M}$ *nin bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda her* $X, Y \in \Gamma(TM\ )$ *için*

$$C(X, PY) = 0,$$

yani $S(TM)$ *ekran distribüsyonu tamamen geodeziktir.*

İspat. Her $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için (1.2.29) eşitliğinden

$$\bar{g}(\bar{R}(X, Y)Z, N) = g(R(X, Y)Z, N)$$

dir. Bu eşitlikte Z yerine PZ alınıp (1.2.19) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{R}(X,Y)PZ,N) &= g(R(X,Y)PZ,N) \\
&= g(\nabla_X\nabla_Y PZ,N) - g(\nabla_Y\nabla_X PZ,N) \\
&-g(\nabla_{[X,Y]}PZ,N) \\
&= g(\nabla^*_X\nabla^*_Y PZ,N) + C(X,\nabla^*_Y PZ) \\
&+X(C(Y,PZ)) - C(Y,PZ)g(A^*_E X,N) \\
&-C(Y,PZ)\tau(X) - g(\nabla^*_Y\nabla^*_X PZ,N) \\
&-C(Y,\nabla^*_X PZ) - Y(C(X,PZ)) \\
&+C(X,PZ)g(A^*_E Y,N) + C(X,PZ)\tau(Y) \\
&+C(\nabla_Y X,PZ) - C(\nabla_X Y,PZ) \\
&= X(C(Y,PZ)) - C(Y,\nabla^*_X PZ) \\
&-C(\nabla_X Y,PZ) - \tau(X)C(Y,PZ) \\
&-Y(C(X,PZ)) + C(X,\nabla^*_Y PZ) \\
&+C(\nabla_Y X,PZ) + \tau(Y)C(X,PZ)
\end{aligned}$$

olur. Bu eşitlikte X yerine E, Y ve Z yerine U alınırsa

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{R}(E,U)U,N) &= E(C(U,U)) - C(U,\nabla^*_E U) \\
&-C(\nabla_E U,U) - \tau(E)C(U,U) \\
&-U(C(E,U)) + C(E,\nabla^*_U U) \\
&+C(\nabla_U E,U) + \tau(U)C(E,U) \\
&= -\lambda(g(U,\nabla^*_E U) + g(\nabla_E U,U) \\
&+g(\nabla_U E,U))
\end{aligned} \tag{3.2.3}$$

bulunur. (3.2.3) eşitliğinde

$$\nabla^*_E U = \nabla_E U - C(E,U)U = \nabla_E U$$

ve

$$\nabla^*_U U = \nabla_U U - C(U,U)E = \nabla_U U$$

eşitlikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{R}(E,U)U,N) &= \lambda(g(\nabla_U E,U) - 2g(\nabla_E U,U)) \\
&= \lambda(\bar{g}(U,\bar{\nabla}_U E) - 2\bar{g}(\bar{\nabla}_E U,U)) \\
&= \lambda(\bar{g}(U,\bar{\nabla}_U E) - E\bar{g}(U,U)) \\
&= \lambda(\bar{g}(U,\bar{\nabla}_U E)) \\
&= -\lambda(\bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_U E,N)) \\
&= -\lambda(-\bar{g}((\bar{\nabla}_U\bar{\phi})E,N) + \bar{g}(\bar{\nabla}_U\bar{\phi}E,N)) \\
&= -\lambda(U\bar{g}(\bar{\phi}E,N) + \bar{g}(\bar{\phi}E,\bar{\nabla}_U N)) \\
&= -\lambda(\bar{g}(\bar{\nabla}_U N,\bar{\phi}E)) \\
&= -\lambda g(-A_N U + \tau(U)N,\bar{\phi}E) \\
&= \lambda g(A_N U,\bar{\phi}E) \\
&= \lambda C(U,\bar{\phi}E) = \lambda^2 g(U,V) = -\lambda^2
\end{aligned}
$$

elde edilir. O halde (1.4.58) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{R}(E,U)U,N) &= \frac{(k-3)}{4}(\bar{g}(U,U)\bar{g}(E,N) - \bar{g}(E,U)\bar{g}(U,N)) \\
&\quad + \frac{(k+1)}{4}\begin{pmatrix} \bar{g}(E,U)\eta(U)\eta(N) - \bar{g}(U,U)\eta(E)\eta(N) \\ +\bar{g}(N,U)\eta(U)\eta(E) - \bar{g}(E,N)\eta(U)\eta(U) \\ -\bar{g}(\bar{\phi}E,U)\bar{g}(\bar{\phi}U,N) - \bar{g}(\bar{\phi}U,U)\bar{g}(\bar{\phi}E,N) \\ -2\bar{g}(E,\bar{\phi}U)\bar{g}(\bar{\phi}U,N) \end{pmatrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

olacağından $\lambda = 0$ elde edilir. Böylece $S(TM)$ tamamen geodeziktir ve ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 3.2.1. $(\bar{M}(k),\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$ *bir para-Sasakian uzay form ve* $(M,g,S(TM))$, $\bar{M}(k)$ *nın bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda her* $X,Y \in \Gamma(TM\ )$ *için* M *nin* *i) Gauss eşitliği*

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z \quad &= \tfrac{k-3}{4}\left(\bar{g}(Y,Z)X-\bar{g}(X,Z)Y\right) \\
&+\tfrac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \bar{g}(X,Z)\eta(Y)\xi+\bar{g}(Y,Z)\eta(X)\xi \\ +\eta(X)\eta(Z)Y-\eta(Y)\eta(Z)X \\ +\bar{g}(\bar{\phi}X,Z)\phi Y-\bar{g}(\bar{\phi}Y,Z)\phi X \\ -2\bar{g}(X,\bar{\phi}Y)\phi Z \end{pmatrix} \\
&-B(X,Z)A_NY+B(Y,Z)A_NX
\end{aligned} \tag{3.2.4}
$$

ii) Codazzi eşitliği

$$
(\nabla_X h)(Y,Z)-(\nabla_Y h)(X,Z)=\frac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \bar{g}(\bar{\phi}Y,Z)u(X) \\ -\bar{g}(\bar{\phi}X,Z)u(Y) \\ +2\bar{g}(X,\bar{\phi}Y)u(Z) \end{pmatrix}N \tag{3.2.5}
$$

dir.

İspat. $(\bar{M}(k),\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$ bir para-Sasakian uzay form olduğundan (1.4.58) ve (1.2.30) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z \quad &= \tfrac{k-3}{4}\left(\bar{g}(Y,Z)X-\bar{g}(X,Z)Y\right) \\
&+\tfrac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \bar{g}(X,Z)\eta(Y)\xi-\bar{g}(Y,Z)\eta(X)\xi \\ +\eta(X)\eta(Z)Y-\eta(Y)\eta(Z)X \\ +\bar{g}(\bar{\phi}X,Z)\bar{\phi}Y-\bar{g}(\bar{\phi}Y,Z)\bar{\phi}X \\ -2\bar{g}(X,\bar{\phi}Y)\bar{\phi}Z \end{pmatrix} \\
&-A_{h(X,Z)}Y+A_{h(Y,Z)}X \\
&-(\nabla_X h)(Y,Z)+(\nabla_Y h)(X,Z)
\end{aligned}
$$

olduğu görülür. Yukarıdaki eşitlikte (3.1.2) kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
R(X,Y)Z \quad &= \tfrac{k-3}{4}\left(\bar{g}(Y,Z)X-\bar{g}(X,Z)Y\right) \\
&+\tfrac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \bar{g}(X,Z)\eta(Y)\xi-\bar{g}(Y,Z)\eta(X)\xi \\ +\eta(X)\eta(Z)Y-\eta(Y)\eta(Z)X \\ +\bar{g}(\bar{\phi}X,Z)\phi Y+\bar{g}(\bar{\phi}X,Z)u(Y)N \\ -\bar{g}(\bar{\phi}Y,Z)\phi X-\bar{g}(\bar{\phi}Y,Z)u(X)N \\ -2\bar{g}(X,\bar{\phi}Y)\phi Z-2\bar{g}(X,\bar{\phi}Y)u(Z)N \end{pmatrix} \\
&-A_{h(X,Z)}Y+A_{h(Y,Z)}X \\
&-(\nabla_X h)(Y,Z)+(\nabla_Y h)(X,Z)
\end{aligned}
$$

bulunur. Bu eşitlikte teğet ve transversal kısımlar karşılaştırlırsa (3.2.4) ve (3.2.5) eşitlikleri elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Lemma 3.2.2. *$(M, g, S(TM))$, $\bar{M}(k)$ para-Sasakian uzay formun bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda her $X, Z \in \Gamma(TM)$ için*

$$\bar{g}(R(X,E)Z,N) = \tfrac{k-3}{4}(-\bar{g}(X,Z)) + \tfrac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \eta(X)\eta(Z) + u(Z)\theta(\phi X) \\ +2u(X)\theta(\phi Z) \end{pmatrix}$$

dir.

İspat. Her $X, Z \in \Gamma(TM)$ için (3.2.4) eşitliğinde (1.2.4) ve (1.2.12) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{g}(R(X,E)Z,N) &= \tfrac{k-3}{4}\left(\bar{g}(E,Z)\bar{g}(X,N) - \bar{g}(X,Z)\bar{g}(E,N)\right) \\
&+ \tfrac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \bar{g}(X,Z)\eta(E)\eta(N) - \bar{g}(E,Z)\eta(X)\eta(N) \\ +\eta(X)\eta(Z)\bar{g}(E,N) - \eta(E)\eta(Z)\bar{g}(X,N) \\ +\bar{g}(\bar{\phi}X,Z)\bar{g}(\phi E,N) - \bar{g}(\bar{\phi}E,Z)\bar{g}(\phi X,N) \\ -2\bar{g}(X,\bar{\phi}E)\bar{g}(\phi Z,N) \end{pmatrix} \\
&- B(X,Z)\bar{g}(A_N E,E) + B(E,Z)\bar{g}(A_N X,N) \\
&= \tfrac{k-3}{4}\left(-\bar{g}(X,Z)\right) \\
&+ \tfrac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \eta(X)\eta(Z) - \bar{g}(\bar{\phi}E,Z)\bar{g}(\phi X,N) \\ -2\bar{g}(X,\bar{\phi}E)\bar{g}(\phi Z,N) \end{pmatrix} \\
&= \tfrac{k-3}{4}\left(-\bar{g}(X,Z)\right) \\
&+ \tfrac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \eta(X)\eta(Z) + u(Z)\theta(\phi X) \\ +2u(X)\theta(\phi Z) \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 3.2.3. *$(M, g, S(TM))$, $\bar{M}(k)$ para-Sasakian uzay formun bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Bu durumda her $Y \in \Gamma(TM)$ için*

$$B(Y,U) = C(Y,V)$$

dir.

İspat. (1.2.9) eşitliği ile verilen ikinci temel formun tanımından

$$\begin{aligned} B(Y,\bar{\phi}N) &= \bar{g}(h(Y,\bar{\phi}N),E) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_Y\bar{\phi}N,E) \\ &= -\bar{g}(\bar{\nabla}_Y N,\bar{\phi}E) \end{aligned}$$

elde edilir. Burada (1.2.11) ve (1.2.21) eşitlikleri kullanılırsa

$$B(Y,\bar{\phi}N) = -\bar{g}(\bar{\nabla}_Y N,\bar{\phi}E) = g(A_N Y,\bar{\phi}E) = C(Y,\bar{\phi}E)$$

yazılabilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.2.3. $(\bar{M}(k),\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$, $k \neq -1$, *para-Sasakian uzay formunun, ikinci temel formu paralel olan bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi yoktur.*

İspat. M, $k \neq -1$ olmak üzere $\bar{M}(k)$ nın ikinci temel formu paralel olan bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. (3.2.5) eşitliğinde $Y = E$ ve $Z = \bar{\phi}N$ alınırsa

$$0 = \frac{k+1}{4}\left(\begin{array}{c} \bar{g}(\bar{\phi}E,\bar{\phi}N)u(X) - \bar{g}(\bar{\phi}X,\bar{\phi}N)u(E) \\ +2\bar{g}(X,\bar{\phi}E)u(\bar{\phi}N) \end{array}\right)$$

bulunur. Bu son eşitlikte (3.1.36) kullanılarak

$$0 = -\frac{3(k+1)}{4}u(X) \tag{3.2.6}$$

elde edilir. (3.2.6) eşitliğinde $X = \bar{\phi}N$ için

$$k+1 = 0$$

bulunur ki bu bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.2.4. $(\bar{M}(k),\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$, $k \neq \frac{1}{3}$, *para-Sasakian uzay formun ekran distribüsyonu paralel olan bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi yoktur.*

İspat. Tersine $k \neq \frac{1}{3}$ olmak üzere M, $\bar{M}(k)$ nın paralel ekran distribüsyonuna sahip bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. $X, Y, Z \in \Gamma(TM\ )$ için (1.4.58) eşitliğinde $X = E$, $Y = \bar{\phi}N$ ve $Z = \bar{\phi}E$ alınırsa

$$\bar{g}(\bar{R}(E,\bar{\phi}N)\bar{\phi}E,N) = \tfrac{k-3}{4}\left(\bar{g}(\bar{\phi}N,\bar{\phi}E)\bar{g}(E,N)-\bar{g}(E,\bar{\phi}E)\bar{g}(\bar{\phi}N,N)\right) + \tfrac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \bar{g}(E,\bar{\phi}E)\eta(\bar{\phi}N)\eta(N) \\ -\bar{g}(\bar{\phi}N,\bar{\phi}E)\eta(E)\eta(N) \\ +\bar{g}(\bar{\phi}N,N)\eta(\bar{\phi}E)\eta(E) \\ -\bar{g}(E,N)\eta(\bar{\phi}N)\eta(\bar{\phi}E) \\ +\bar{g}(\bar{\phi}E,\bar{\phi}E)\bar{g}(\bar{\phi}^2N,N) \\ -\bar{g}(\bar{\phi}^2N,\bar{\phi}E)\bar{g}(\bar{\phi}E,N) \\ -2\bar{g}(E,\bar{\phi}^2N)\bar{g}(\bar{\phi}^2E,N) \end{pmatrix}$$

olur. Bu eşitlikte (1.2.4) ve (3.1.36) eşitlikleri kullanılırsa

$$\bar{g}(\bar{R}(E,\bar{\phi}N)\bar{\phi}E,N) = \frac{1-3k}{4} \tag{3.2.7}$$

bulunur. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(X,Y)PZ,N) &= \bar{g}(R(X,Y)PZ,N) \\ &= (\nabla_X C)(Y,PZ)-(\nabla_Y C)(X,PZ) \\ &\quad +\tau(Y)C(X,PZ)-\tau(X)C(Y,PZ) \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

olduğundan ekran distribüsyonunun paralelliği kullanılarak

$$\bar{g}(\bar{R}(E,\bar{\phi}N)\bar{\phi}E,N) = 0 \tag{3.2.9}$$

elde edilir. Bu durumda (3.2.7) ve (3.2.9) eşitlikleri karşılaştırılırsa $k = \frac{1}{3}$ olduğu görülür. Bu ise bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır. □

Tanım 3.2.3. *Bir lightlike hiperyüzey M nin ikinci temel formu B her $X, Y \in \Gamma(D)$ için*

$$B(X,Y) = 0$$

ise M hiperyüzeyine D-tamamen geodezik lightlike hiperyüzey denir.

Teorem 3.2.5. *$(M, g, S(TM))$, $(\bar{M}(k), \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian uzay formunun lokal ikinci temel formu paralel olacak şekilde bir screen semi-invaryant lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer $\tau(E) \neq 0$ ise M nin D-tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart $k = -1$ olmasıdır.*

İspat. Kabul edelim ki lokal ikinci temel form B paralel olsun. (1.2.28) eşitliğinde $Y = E$ alınıp (3.2.1) eşitliği ile karşılaştırılırsa her $X, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\tau(E)B(X,Z) = \frac{3(k+1)}{4}u(X)u(Z)$$

elde edilir. Bu eşitlikte $X = Z = U$ alınırsa

$$\tau(E)B(U,U) = \frac{3(k+1)}{4}$$

olur ve $\tau(E) \neq 0$ olduğundan ispat tamamlanır. □

3.2.2 Para-Sasakian Uzay Formun Lokal Simetrik Lightlike Hiperyüzeyleri

M, $(\bar{M}(k), \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian uzay formunun $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir lightlike hiperyüzey olsun. $U \subset M$ üzerinde $\{E, N\}$ kesitini göz önüne alalım. (1.2.30), (1.4.58) ve (3.1.2) eşitliklerinden $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} R(X,Y)Z &= \tfrac{k-3}{4}\left(\bar{g}(Y,Z)X - \bar{g}(X,Z)Y\right) \\ &+ \tfrac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \bar{g}(X,Z)\eta(Y)\xi + \eta(X)\eta(Z)Y \\ -\eta(Y)\eta(Z)X - \bar{g}(Y,Z)\eta(X)\xi \\ +\bar{g}(Y,\bar{\phi}Z)\phi X - \bar{g}(X,\bar{\phi}Z)\phi Y \\ +2\bar{g}(\bar{\phi}X,Y)\phi Z \end{pmatrix} \\ &- B(X,Z)A_N Y + B(Y,Z)A_N X, \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

ve

$$\begin{aligned} (\nabla_X B)(Y,Z) - (\nabla_Y B)(X,Z) &= \tau(Y)B(X,Z) - \tau(X)B(Y,Z) \\ &+ \tfrac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \bar{g}(Y,\bar{\phi}Z)u(X) \\ -\bar{g}(X,\bar{\phi}Z)u(Y) \\ +2\bar{g}(\bar{\phi}X,Y)u(Z) \end{pmatrix} \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

bulunur.

Tanım 3.2.4. *Bir $(\bar{M}, \bar{g})$ yarı-Riemann manifoldun $(M, g, S(TM))$ lightlike hiperyüzeyinin lokal simetrik olması için gerek ve yeter şart $X, Y, Z, T, W \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için*

$$g((\nabla_W R)(X,Y)Z, PT) = 0 \tag{3.2.12}$$

ve

$$\bar{g}((\nabla_W R)(X,Y)Z,N)=0 \tag{3.2.13}$$

şartlarını sağlamasıdır [27]. Yani

$$(\nabla_W R)(X,Y)Z=0$$

dır.

Her $X,Y,Z,W\in\Gamma(TM)$, $T\in\Gamma(S(TM))$ ve $N\in\Gamma(ltr(TM))$ için [27] da verilen Lemma 3.2 kullanılırsa

$$\begin{aligned}\bar{g}((\bar{\nabla}_W\bar{R})(X,Y)Z,T) &= g((\nabla_W R)(X,Y)Z,T)+(\nabla_W B)(X,Z)C(Y,T)\\ &+B(X,Z)g((\nabla_W A_N)Y,T)-(\nabla_W B)(Y,Z)C(X,T)\\ &-B(Y,Z)g((\nabla_W A_N)X,T)-B(Y,Z)\tau(X)C(W,T)\\ &+(\nabla_Y B)(X,Z)C(W,T)-(\nabla_X B)(Y,Z)C(W,T)\\ &+B(X,Z)\tau(Y)C(W,T)-B(W,X)\bar{R}(N,Y,Z,T)\\ &-B(W,Y)\bar{R}(X,N,Z,T)-B(W,Z)\bar{R}(X,Y,N,T)\end{aligned} \tag{3.2.14}$$

ve

$$\begin{aligned}\bar{g}((\bar{\nabla}_W\bar{R})(X,Y)Z,N) &= g((\nabla_W R)(X,Y)Z,N)+B(X,Z)g((\nabla_W(A_N Y),N)\\ &-B(Y,Z)g((\nabla_W(A_N X),N)-B(W,X)\bar{R}(N,Y,Z,N)\\ &-B(W,Y)\bar{R}(X,N,Z,N)\end{aligned} \tag{3.2.15}$$

elde edilir.

Lemma 3.2.4. *$(\bar{M}(k),\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$ bir para-Sasakian uzay form ise her $X,Y,Z,W\in\Gamma(TM)$ için*

$$(\bar{\nabla}_W\bar{R})(X,Y)Z=\frac{k+1}{4}\begin{pmatrix}\bar{g}(Y,Z)\bar{g}(X,\bar{\phi}W)\xi-\bar{g}(X,Z)\bar{g}(Y,\bar{\phi}W)\xi\\ +\bar{g}(Y,Z)\eta(X)\bar{\phi}W-\bar{g}(X,Z)\eta(Y)\bar{\phi}W\\ +\bar{g}(Y,\bar{\phi}W)\eta(Z)X-\bar{g}(X,\bar{\phi}W)\eta(Z)Y\\ +\bar{g}(Z,\bar{\phi}W)\eta(Y)X-\bar{g}(Z,\bar{\phi}W)\eta(X)Y\end{pmatrix} \tag{3.2.16}$$

dir. Burada $\bar{R}$, $\bar{\nabla}$ Levi-Civita konneksiyonunun Riemann eğrilik tensörüdür.

İspat. Riemann eğrilik tensörü $\bar{R}$ nin kovaryant türevi alınarak (1.4.58) eşitliği kullanılırsa $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
(\bar{\nabla}_W \bar{R})(X,Y)Z &= (\bar{\nabla}_W \bar{R})(X,Y)Z \\
&= W\bar{R}(X,Y)Z - \bar{R}(\bar{\nabla}_W X, Y)Z - \bar{R}(X, \bar{\nabla}_W Y)Z \\
&-\bar{R}(X,Y)\bar{\nabla}_W Z \\
&= \frac{k-3}{4}\begin{pmatrix} W(\bar{g}(Y,Z)X) - W(\bar{g}(X,Z)Y) \\ -\bar{g}(Y,Z)\bar{\nabla}_W X + \bar{g}(\bar{\nabla}_W X, Z)Y \\ -\bar{g}(\bar{\nabla}_W Y, Z)X + \bar{g}(X,Z)\bar{\nabla}_W Y \\ -\bar{g}(Y, \bar{\nabla}_W Z)X + \bar{g}(X, \bar{\nabla}_W Z)Y \end{pmatrix} \\
&+\frac{k+1}{4}\begin{pmatrix} W(\bar{g}(X,Z)\eta(Y)\xi) - W(\bar{g}(Y,Z)\eta(X)\xi) \\ +W(\eta(X)\eta(Z)Y) - W(\eta(Y)\eta(Z)X) \\ +W(\bar{g}(Y,\bar{\phi}Z)\bar{\phi}X) - W(\bar{g}(X,\bar{\phi}Z)\bar{\phi}Y) \\ +2W(\bar{g}(\bar{\phi}X,Y)\bar{\phi}Z) \\ -\bar{g}(\bar{\nabla}_W X, Z)\eta(Y)\xi + \bar{g}(Y,Z)\eta(\bar{\nabla}_W X)\xi \\ -\eta(\bar{\nabla}_W X)\eta(Z)Y + \eta(Y)\eta(Z)\bar{\nabla}_W X \\ -\bar{g}(Y,\bar{\phi}Z)\bar{\nabla}_W \bar{\phi}X + \bar{g}(\bar{\nabla}_W X, \bar{\phi}Z)\bar{\phi}Y \\ -2\bar{g}(\bar{\nabla}_W \bar{\phi}X, Y)\bar{\phi}Z \\ -\bar{g}(X,Z)\eta(\bar{\nabla}_W Y)\xi + \bar{g}(\bar{\nabla}_W Y, Z)\eta(X)\xi \\ -\eta(X)\eta(Z)\bar{\nabla}_W Y + \eta(\bar{\nabla}_W Y)\eta(Z)X \\ -\bar{g}(\bar{\nabla}_W Y, \bar{\phi}Z)\bar{\phi}X + \bar{g}(X,\bar{\phi}Z)\bar{\nabla}_W \bar{\phi}Y \\ -2\bar{g}(\bar{\phi}X, \bar{\nabla}_W Y)\bar{\phi}Z \\ -\bar{g}(X, \bar{\nabla}_W Z)\eta(Y)\xi + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_W Z)\eta(X)\xi \\ -\eta(X)\eta(\bar{\nabla}_W Z)Y + \eta(Y)\eta(\bar{\nabla}_W Z)X \\ -\bar{g}(Y, \bar{\nabla}_W \bar{\phi}Z)\bar{\phi}X + \bar{g}(X, \bar{\nabla}_W \bar{\phi}Z)\bar{\phi}Y \\ -2\bar{g}(\bar{\phi}X, Y)\bar{\nabla}_W \bar{\phi}Z \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

olur. Buradan ise

$$(\bar{\nabla}_W \bar{R})(X,Y)Z = \frac{k-3}{4}\begin{pmatrix} \bar{g}(\bar{\nabla}_W Y,Z)X + \bar{g}(Y,\bar{\nabla}_W Z)X \\ +\bar{g}(Y,Z)\bar{\nabla}_W X - \bar{g}(\bar{\nabla}_W X,Z)Y \\ -\bar{g}(X,\bar{\nabla}_W Z)Y - \bar{g}(X,Z)\bar{\nabla}_W Y \\ -\bar{g}(Y,Z)\bar{\nabla}_W X + \bar{g}(\bar{\nabla}_W X,Z)Y \\ -\bar{g}(\bar{\nabla}_W Y,Z)X + \bar{g}(X,Z)\bar{\nabla}_W Y \\ -\bar{g}(Y,\bar{\nabla}_W Z)X + \bar{g}(X,\bar{\nabla}_W Z)Y \end{pmatrix}$$

$$+\frac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \bar{g}(\bar{\nabla}_W X,Z)\eta(Y)\xi + \bar{g}(X,\bar{\nabla}_W Z)\eta(Y)\xi \\ +\bar{g}(X,Z)\eta(\bar{\nabla}_W Y)\xi + \bar{g}(X,Z)\bar{g}(Y,\bar{\nabla}_W \xi)\xi \\ +\bar{g}(X,Z)\eta(Y)\bar{\nabla}_W \xi - \bar{g}(\bar{\nabla}_W Y,Z)\eta(X)\xi \\ -\bar{g}(Y,\bar{\nabla}_W Z)\eta(X)\xi - \bar{g}(Y,Z)\bar{g}(\bar{\nabla}_W X,\xi)\xi \\ -\bar{g}(Y,Z)\bar{g}(X,\bar{\nabla}_W \xi)\xi - \bar{g}(Y,Z)\eta(X)\bar{\nabla}_W \xi \\ +\bar{g}(\bar{\nabla}_W X,\xi)\eta(Z)Y + \bar{g}(X,\bar{\nabla}_W \xi)\eta(Z)Y \\ +\bar{g}(\bar{\nabla}_W Z,\xi)\eta(X)Y + \bar{g}(Z,\bar{\nabla}_W \xi)\eta(X)Y \\ +\eta(X)\eta(Z)\bar{\nabla}_W Y - \bar{g}(\bar{\nabla}_W Y,\xi)\eta(Z)X \\ -\bar{g}(Y,\bar{\nabla}_W \xi)\eta(Z)X - \bar{g}(\bar{\nabla}_W Z,\xi)\eta(Y)X \\ -\bar{g}(Z,\bar{\nabla}_W \xi)\eta(Y)X - \eta(Y)\eta(Z)\bar{\nabla}_W X \\ +\bar{g}(\bar{\nabla}_W Y,\bar{\phi}Z)\bar{\phi}X + \bar{g}(Y,\bar{\nabla}_W \bar{\phi}Z)\bar{\phi}X \\ +\bar{g}(Y,\bar{\phi}Z)\bar{\nabla}_W \bar{\phi}X - \bar{g}(\bar{\nabla}_W X,\bar{\phi}Z)\bar{\phi}Y \\ -\bar{g}(X,\bar{\nabla}_W \bar{\phi}Z)\bar{\phi}Y - \bar{g}(X,\bar{\phi}Z)\bar{\nabla}_W \bar{\phi}Y \\ +2\bar{g}(\bar{\nabla}_W \bar{\phi}X,Y)\bar{\phi}Z + 2\bar{g}(\bar{\phi}X,\bar{\nabla}_W Y)\bar{\phi}Z \\ +2\bar{g}(\bar{\phi}X,Y)\bar{\nabla}_W \bar{\phi}Z - \bar{g}(\bar{\nabla}_W X,Z)\eta(Y)\xi \\ +\bar{g}(Y,Z)\eta(\bar{\nabla}_W X)\xi - \eta(\bar{\nabla}_W X)\eta(Z)Y \\ +\eta(Y)\eta(Z)\bar{\nabla}_W X - \bar{g}(Y,\bar{\phi}Z)\bar{\nabla}_W \bar{\phi}X \\ +\bar{g}(\bar{\nabla}_W X,\bar{\phi}Z)\bar{\phi}Y - 2\bar{g}(\bar{\nabla}_W \bar{\phi}X,Y)\bar{\phi}Z \\ -\bar{g}(X,Z)\eta(\bar{\nabla}_W Y)\xi + \bar{g}(\bar{\nabla}_W Y,Z)\eta(X)\xi \\ -\eta(X)\eta(Z)\bar{\nabla}_W Y + \eta(\bar{\nabla}_W Y)\eta(Z)X \\ -\bar{g}(\bar{\nabla}_W Y,\bar{\phi}Z)\bar{\phi}X + \bar{g}(X,\bar{\phi}Z)\bar{\nabla}_W \bar{\phi}Y \\ -2\bar{g}(\bar{\phi}X,\bar{\nabla}_W Y)\bar{\phi}Z - \bar{g}(X,\bar{\nabla}_W Z)\eta(Y)\xi \\ +\bar{g}(Y,\bar{\nabla}_W Z)\eta(X)\xi - \eta(X)\eta(\bar{\nabla}_W Z)Y \\ +\eta(Y)\eta(\bar{\nabla}_W Z)X - \bar{g}(Y,\bar{\nabla}_W \bar{\phi}Z)\bar{\phi}X \\ +\bar{g}(X,\bar{\nabla}_W \bar{\phi}Z)\bar{\phi}Y - 2\bar{g}(\bar{\phi}X,Y)\bar{\nabla}_W \bar{\phi}Z \end{pmatrix}$$

bulunur. Bu son eşitlikte (1.4.29) eşitliği kullanılıp gerekli sadeştirmeler yapılırsa

$$(\bar{\nabla}_W \bar{R})(X,Y)Z = \frac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \bar{g}(Y,Z)\bar{g}(X,\bar{\phi}W)\xi - \bar{g}(X,Z)\bar{g}(Y,\bar{\phi}W)\xi \\ +\bar{g}(Y,Z)\eta(X)\bar{\phi}W - \bar{g}(X,Z)\eta(Y)\bar{\phi}W \\ +\bar{g}(Y,\bar{\phi}W)\eta(Z)X - \bar{g}(X,\bar{\phi}W)\eta(Z)Y \\ +\bar{g}(Z,\bar{\phi}W)\eta(Y)X - \bar{g}(Z,\bar{\phi}W)\eta(X)Y \end{pmatrix}$$

elde edilir. □

Teorem 3.2.6. *$(\bar{M}(k), \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian uzay formunun karekteristik vektör alanı $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde $k \neq 1$ için bir lokal simetrik lightlike hiperyüzeyi yoktur.*

İspat. Kabul edelim ki $\bar{M}(k)$, $k \neq 1$, para-Sasakian uzay form ve M de $\bar{M}(k)$ nın $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir lokal simetrik lightlike hiperyüzeyi olsun. (3.2.16) eşitliğinden $X, Y, Z, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{g}((\bar{\nabla}_W \bar{R})(X,Y)Z, N) = \frac{k+1}{4}\begin{pmatrix} \bar{g}(Y,Z)\eta(X)\nu(W) \\ -\bar{g}(X,Z)\eta(Y)\nu(W) \\ +\bar{g}(Y,\bar{\phi}W)\eta(Z)\theta(X) \\ -\bar{g}(X,\bar{\phi}W)\eta(Z)\theta(Y) \\ +\bar{g}(Z,\bar{\phi}W)\eta(Y)\theta(X) \\ -\bar{g}(Z,\bar{\phi}W)\eta(X)\theta(Y) \end{pmatrix} \quad (3.2.17)$$

olur. Burada $\nu(W) = -\bar{g}(W,U)$ dir. (1.4.58) eşitliği göz önüne alındığında

$$\bar{R}(E,N,E,N) = \frac{k-3}{4}$$

bulunur. (3.2.15) ve (3.2.17) eşitliklerinde $X = E$ ve $Z = E$ alınıp (1.2.12) kullanılırsa her $Y, W \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned} -\tfrac{k-3}{4}B(W,Y) &= \bar{g}((\bar{\nabla}_W \bar{R})(E,Y)E, N) \\ &= \tfrac{k+1}{4}\bar{g}(E,\bar{\phi}W)\eta(Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlik ise

$$-\frac{k-3}{4}B(W,Y) = \frac{k+1}{4}u(W)\eta(Y) \quad (3.2.18)$$

olduğunu gösterir. Lokal ikinci temel form B simetrik olduğundan (3.2.18) eşitliğinden

$$k + 1\{u(W)\eta(Y) - u(Y)\eta(W)\} = 0$$

yazılabilir. Son eşitlikte $Y = \xi$ ve $W = U$ alınırsa $k = -1$ elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Teorem 3.2.7. $(\bar{M}(k), \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$, $k = -1$, *para-Sasakian uzay form ve* M *de* $\bar{M}(k)$ *nın* $\xi \in \Gamma(TM)$ *olacak şekilde lightlike hiperyüzeyi ise* M *nin lokal simetrik olması için gerek ve yeter şart tamamen geodezik olmasıdır.*

İspat. M, $\bar{M}(k)$, $k = -1$, para-Sasakian uzay formun $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir lightlike hiperyüzeyi olsun. Eğer M lokal simetrik ise (3.2.18) eşitliğinden $B = 0$ olur. Tersine eğer M tamamen geodezik ise (3.2.14), (3.2.15) ve (3.2.16) eşitlikleri göz önüne alındığında

$$g((\nabla_W R)(X, Y)Z, PT) = 0$$

ve

$$\bar{g}((\nabla_W R)(X, Y)Z, N) = 0$$

elde edilir. Yani M lokal simetriktir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

3.3 Para-Sasakian Manifoldların Lightlike Altmanifoldları

Bu kısımda ilk olarak invaryant lightlike altmanifoldların tanımı ve bazı karekterizasyonlar verilecektir. Daha sonra parakontakt CR-lightlike altmanifoldlar tanıtılarak, bu tip altmanifoldlar üzerinde tanımlanan distribüsyonların integrallenebilirlik şartları araştırılacaktır. Son olarak ise radikal transversal lightlike altmanifoldlar incelenecektir.

3.3.1 İnvaryant Lightlike Altmanifoldlar

$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$, $\bar{M}$ nin bir lightlike altmanifoldu olsun. $X \in \Gamma(TM)$ ve $U \in \Gamma(tr(TM))$ için

$$\bar{\phi}X = PX + FX, \tag{3.3.1}$$

$$\bar{\phi}U = tU + fU \tag{3.3.2}$$

yazılabilir. Burada PX, tU ve FX, fU sırasıyla $\bar{\phi}X$ ve $\bar{\phi}U$ nun teğet ve transversal bileşenleridir.

Lemma 3.3.1. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$, $\bar{M}$ nin bir lightlike altmanifoldu olsun. Eğer $\xi \in \Gamma(TM)$ ise karakteristik vektör alanı ξ nın $Rad\ TM$ bileşeni yoktur.*

İspat. Kabul edelim ki M bir lightlike altmanifold ve $\xi \in \Gamma(Rad\ TM)$ olsun. Bu durumda $\bar{g}(\xi, N) = 1$ olacak şekilde $N \in \Gamma(ltr(TM))$ vektör alanı vardır. Diğer taraftan (1.4.6) eşitliğinden

$$\bar{g}(\bar{\phi}\xi, \bar{\phi}N) = -\bar{g}(\xi, N) + \eta(\xi)\eta(N)$$

yazılabilir. ξ null olduğundan (1.4.6) eşitliğinden

$$\bar{g}(\xi, N) = 0$$

elde edilir. Bu ise bir çelişkidir. Böylece ispat tamamlanır. □

Lemma 3.3.1 karekteristik vektör alanı ξ, M ye teğet olduğunda $\xi \in \Gamma(S(TM))$ olduğunu gösterir. Bu ifade kullanılarak M nin invaryant lightlike altmanifold olması için

$$\bar{\phi}(Rad\ TM) = Rad\ TM$$

ve

$$\bar{\phi}(S(TM)) = S(TM)$$

olması gerektiği görülür.

M, $\bar{M}$ para-Sasakian manifoldun bir invaryant lightlike altmanifoldu ise $F = 0$ ve $t = 0$ dır. $U, \acute{U} \in \Gamma(tr(TM))$ vektör alanları için $\bar{g}(\bar{\phi}U, U') = \bar{g}(fU, U')$ dür. Buradan $\bar{g}(fU, U') = -\bar{g}(U, fU')$ olduğu görülür. Diğer taraftan $X \in \Gamma(TM)$ için

$$\bar{g}(FX, U) + \bar{g}(X, tU) = 0 \tag{3.3.3}$$

dır. Yukarıda tanımlanan P, t, F ve f operatörlerinin kovaryant türevleri sırasıyla

$$(\nabla_X P)Y = \nabla_X PY - P\nabla_X Y, \tag{3.3.4}$$

$$(\nabla_X t)U = \nabla_X tU - t\nabla^t_X U, \tag{3.3.5}$$

$$(\nabla_X F)Y = \nabla^t_X FY - F\nabla_X Y, \tag{3.3.6}$$

$$(\nabla_X f)U = \nabla^t_X fU - f\nabla^t_X U \tag{3.3.7}$$

ile verilir. Buradan (3.2.16) eşitliği ile birlikte (3.3.1) ve (3.3.2) kullanılırsa

$$\begin{aligned}
-\bar{g}(X,Y)\xi + \eta(Y)X \quad &= \bar{\nabla}_X PY + \bar{\nabla}_X FY \\
&-\bar{\phi}\nabla_X Y - \bar{\phi}h(X,Y) \\
&= \nabla_X PY + h(X,PY) - A_{FY}X \\
&+\nabla^{\perp}_X FY - P\nabla_X Y - F\nabla_X Y \\
&-th(X,Y) - fh(X,Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.3.4) ve (3.3.6) eşitlikleri kullanılıp teğet ve transversal bileşenler göz önüne alınırsa

$$(\nabla_X P)Y = -\bar{g}(X,Y)\xi + \eta(Y)X + A_{FX}Y + th(X,Y) \tag{3.3.8}$$

ve

$$(\nabla_X F)Y = -h(X,PY) + fh(X,Y) \tag{3.3.9}$$

bulunur.

Lemma 3.3.2. $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$, $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *para-Sasakian manifoldunun* $\xi \in \Gamma(TM)$ *olacak şekilde bir invaryant lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda*

$$h^l(X,\xi) = 0, \quad h^s(X,\xi) = 0, \quad A_N\xi = 0, \quad A_W\xi = 0, \tag{3.3.10}$$

$$\bar{\phi}h(X,Y) = h(\bar{\phi}X,Y) = h(X,\bar{\phi}Y) \tag{3.3.11}$$

dir.

İspat. İnvaryant lightlike bir $M \subset \bar{M}$ altmanifoldu için (1.3.16) ve (1.4.29) eşitlikleri kullanılırsa

$$\nabla_X\xi = -PX, \quad h^l(X,\xi) = 0, \quad h^s(X,\xi) = 0 \tag{3.3.12}$$

bulunur. $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için $-\bar{g}(N,\bar{\phi}X) = \bar{g}(N,\bar{\nabla}_X\xi)$ dir. Karekteristik vektör alanı ξ, M ye teğet ve $\bar{\nabla}$ metrik konneksiyon olduğundan

$$\begin{aligned}
0 &= X\bar{g}(N,\xi) \\
&= \bar{g}(\bar{\nabla}_X N,\xi) + \bar{g}(N,\bar{\nabla}_X\xi)
\end{aligned}$$

yazılabilir. Böylece

$$\bar{g}(N, \bar{\phi}X) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X N, \xi) = \bar{g}(A_N X, \xi) \tag{3.3.13}$$

olur. Diğer taraftan (1.3.16) eşitliği (3.3.12) de kullanılırsa

$$\bar{g}(N, \bar{\phi}X) = -\bar{g}(N, \bar{\nabla}_X \xi) - \bar{g}(h^l(X, \xi), N) \tag{3.3.14}$$

dir. Bu durumda (3.3.13) ve (3.3.14) göz önüne alınırsa

$$\bar{g}(A_N X, \xi) = \bar{g}(N, \bar{\nabla}_X \xi) + \bar{g}(h^l(X, \xi), N) \tag{3.3.15}$$

elde edilir. (3.3.12), (3.3.15) eşitliğinde kullanılırsa

$$\bar{g}(A_N X, \xi) = -\bar{g}(N, PX)$$

bulunur. Bu eşitlikte X yerine ξ alınırsa $A_N\xi = 0$ olur. Benzer şekilde $W \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ için

$$\bar{g}(W, \bar{\phi}X) = -\bar{g}(A_W X, \xi) \tag{3.3.16}$$

ve

$$\bar{g}(W, \bar{\phi}X) = \bar{g}(h^s(X, \xi), W) \tag{3.3.17}$$

elde edilir. Böylece (3.3.15) ve (3.3.16) eşitliklerinden

$$\bar{g}(A_W X, \xi) = -\bar{g}(h^s(X, \xi), W) \tag{3.3.18}$$

bulunur. (3.3.12), (3.3.18) eşitliğinde kullanılırsa $A_W X = 0$ olur. Bu eşitlikte X yerine ξ alınırsa $A_W\xi = 0$ bulunur.

Bir invaryant lightlike altmanifold için $F = 0$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y &= \nabla_X \bar{\phi}Y + h(X, \bar{\phi}Y) \\
&= (\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y + \bar{\phi}\bar{\nabla}_X Y + h(X, \bar{\phi}Y) \\
&= -\bar{g}(X, Y)\xi + \eta(Y)X + \bar{\phi}\bar{\nabla}_X Y + h(X, \bar{\phi}Y)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y &= (\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y + \bar{\phi}\bar{\nabla}_X Y \\
&= -\bar{g}(X, Y)\xi + \eta(Y)X + \phi\bar{\nabla}_X Y + \bar{\phi}h(X, Y)
\end{aligned}$$

eşitliklerinden (3.3.11) eşitliği elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Önerme 3.3.1. *$(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$, $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir invaryant lightlike altmanifoldu olsun. Eğer M nin ikinci temel formları h^l ve h^s paralel ise M tamamen geodeziktir.*

İspat. Kabul edelim ki h^l paralel olsun. Bu durumda

$$(\nabla_X h^l)(Y, \xi) = \nabla_X h^l(Y, \xi) - h^l(\nabla_X Y, \xi) - h^l(Y, \nabla_X \xi) = 0$$

yazılabilir. Bu eşitlikte (1.4.29) ve (3.3.10) eşitlikleri kullanılırsa

$$h^l(Y, PX) = 0$$

elde edilir. Benzer olarak $h^s(Y, PX) = 0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

Tanım 3.3.1. *[30](M, g), $(\bar{M}, \bar{g})$ yarı-Riemann manifoldun bir lightlike altmanifoldu olsun. Eğer M üzerinde transversal eğrilik vektör alanı $H \in \Gamma(tr(TM))$ için*

$$h(X, Y) = Hg(X, Y) \quad X, Y \in \Gamma(TM) \tag{3.3.19}$$

eşitliği sağlanıyor ise M ye $\bar{M}$ de tamamen umbiliktir denir. Bu durumda M nin tamamen umbilik olması için gerek ve yeter şart her U koordinat komşuluğu üzerinde $H^l \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $H^s \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ vektör alanları için

$$h^l(X, Y) = H^l g(X, Y), \quad h^s(X, Y) = H^s g(X, Y), \quad D^l(X, W) = 0 \tag{3.3.20}$$

olmasıdır [44].

Teorem 3.3.1. *$(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$, $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir lightlike altmanifoldu olsun. Eğer M tamamen umbilik ise bu durumda M tamamen geodezik ve invaryanttır.*

İspat. (1.3.16) ve (1.4.29) eşitliklerinden

$$\bar{\nabla}_X \xi = \nabla_X \xi + h^l(X, \xi) + h^s(X, \xi)$$

yazılabilir. Bu eşitlikte (3.3.1) kullanılıp, transversal kısım göz önüne alındığında her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$h^l(X, \xi) + h^s(X, \xi) = FX \tag{3.3.21}$$

elde edilir. (1.4.3) eşitliğinden $P\xi = 0$ ve $F\xi = 0$ dır. Böylece (3.3.21) eşitliğinden

$$h^l(\xi, \xi) = 0 \text{ ve } h^s(\xi, \xi) = 0$$

bulunur. Eğer M tamamen umbilik ise ξ null olmadığından ve (3.3.20) eşitliğinden

$h^l = 0$ ve $h^s = 0$ dır. Böylece M tamamen geodezik olur.

Ayrıca $h^l(X, \xi) + h^s(X, \xi) = FX$ eşitliği M nin $\bar{M}$ de invaryant olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

3.3.2 Parakontakt CR-Lightlike Altmanifoldlar

Tanım 3.3.2. $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$, $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *para-Sasakian manifoldunun* $\xi \in \Gamma(TM)$ *olacak şekilde bir lightlike altmanifoldu olsun. Eğer aşağıdaki şartlar sağlanıyor ise* M *ye* $\bar{M}$ *nin bir parakontakt CR-lightlike altmanifoldu denir.*

i) $Rad\,TM$, M *üzerinde* $Rad\,TM \cap \bar{\phi} Rad\,TM = \{0\}$ *olacak şekilde bir distribüsyondur.*

ii) M *üzerinde*

$$S(TM) = \{\bar{\phi} Rad\ TM \oplus D'\} \perp D_0 \perp \{\xi\}, \tag{3.3.22}$$

$$\bar{\phi} D_0 = D_0, \qquad \bar{\phi} D' = L_1 \perp ltr(TM) \tag{3.3.23}$$

olacak şekilde D_0 *ve* D' *distribüsyonları vardır. Burada* D_0 *bir non-dejenere distribüsyon ve* L_1 $S(TM^{\perp})$ *in bir altvektör demetidir.*

Böylece

$$TM = \{D \oplus D'\} \perp \{\xi\} \tag{3.3.24}$$

ve

$$D = Rad\ TM \perp \bar{\phi} Rad\ TM \perp D_0 \tag{3.3.25}$$

ayrışımları elde edilir.

Eğer $D_0 \neq \{0\}$ ve $L_1 \neq \{0\}$ ise M ye bir proper (has) parakontakt CR-lightlike altmanifold denir. Eğer $D_0 = \{0\}$ ise o zaman M ye tamamen reel lightlike altmanifold denir.

Örnek 3.3.1. *M, $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifoldunun bir lightlike hiperyüzeyi olsun. O zaman $E \in \Gamma(Rad\ TM)$ için $\bar{g}(\bar{\phi}E, E) = 0$ dır. Böylece $\bar{\phi}E \in \Gamma(TM)$ olur. Bu durumda M üzerinde $\bar{\phi}TM^{\perp} \cap TM^{\perp} = \{0\}$ olacak şekilde 1-boyutlu $\bar{\phi}TM^{\perp}$ distribüsyonu vardır. Öyleki $\bar{\phi}TM^{\perp} \in S(TM)$ dir. Şimdi $N \in \Gamma(ltr(TM))$ olsun. Bu durumda $\bar{g}(\bar{\phi}N, E) = -\bar{g}(N, \bar{\phi}E) = 0$ ve $\bar{g}(\bar{\phi}N, N) = 0$ olur. Böylece $\bar{\phi}N \in \Gamma(S(TM))$ olur. $D' = \bar{\phi}(tr(TM))$ olarak alınırsa*

$$S(TM) = \{\bar{\phi}TM^{\perp} \oplus D'\} \perp D_0,$$

dir. Burada D_0 bir non-dejenere distribüsyon ve $\bar{\phi}D' = tr(TM)$ dir. Böylece, M bir parakontakt CR-lightlike hiperyüzeydir.

Şimdi (1.4.1), (3.3.1) ve (3.3.2) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^2 X &= \bar{\phi}(PX) + \bar{\phi}(FX) \\ X - \eta(X)\xi &= P^2X + FPX + tFX + fFX \end{aligned}$$

yazılabilir. Son eşitlikte teğet ve transversal bileşenleri birbirine eşitlenirse

$$P^2 = I - \eta \otimes \xi - tF \tag{3.3.26}$$

$$FP + fF = 0 \tag{3.3.27}$$

elde edilir. Benzer şekilde (3.1.1) kullanılırsa

$$\begin{aligned} \bar{\phi}^2 N &= \bar{\phi}(tN) + \bar{\phi}(fN) \\ N &= PtN + FtN + tfN + f^2N \end{aligned}$$

bulunur. Buradan ise

$$f^2 = I - Ft, \tag{3.3.28}$$

$$Pt + tf = 0 \tag{3.3.29}$$

olur.

Lemma 3.3.3. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir parakontakt CR-lightlike altmanifoldu olsun. $X \in \Gamma(TM)$ nin $D \oplus \{\xi\}$ de bileşeni olması için gerek ve yeter şart $FX = 0$ olmasıdır.*

Lemma 3.3.4. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir parakontakt CR-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $D \oplus \{\xi\}$ distribüsyonu bir hemen hemen parakontakt (P, ξ, η, g) yapısına sahiptir.*

İspat. Her $X \in \Gamma(TM)$ için (3.3.26) eşitliğinden

$$P^2X = X - \eta(X)\xi - tFX$$

yazılabilir. Eğer $X \in D \oplus \{\xi\}$ ise

$$P^2X = X - \eta(X)\xi \tag{3.3.30}$$

olur. $\bar{\phi}\xi = 0$ olduğundan $X, Y \in D \oplus \{\xi\}$ için

$$P\xi = 0 \tag{3.3.31}$$

dır. Lemma 3.3.3 dan

$$g(PX, PY) = \bar{g}(\bar{\phi}X, \bar{\phi}Y) = -g(X, Y) + \eta(X)\eta(Y) \tag{3.3.32}$$

elde edilir. Böylece (3.3.30)-(3.3.32) eşitliklerinden ispat tamamlanmış olur. □

$S(TM^{\perp})$ de L_1 altvektör demetini ortogonal tamamlayan altvektör demetini $L_1^{\perp}$ ile gösterelim. Böylece

$$tr(TM) = \bar{\phi}D' \oplus L_1^{\perp} \tag{3.3.33}$$

dir.

M bir parakontakt CR-lightlike altmanifold olmak üzere $X \in \Gamma(TM)$ ve $W \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ için

$$\bar{\phi}X = PX + FX \tag{3.3.34}$$

ve

$$\bar{\phi}W = BW + CW \tag{3.3.35}$$

yazılabilir. Burada $PX \in \Gamma(D)$, $FX \in \Gamma(L_1 \perp ltr(TM))$, $BW \in \Gamma(\bar{\phi}L_1)$ ve $CW \in \Gamma(L_1^{\perp})$ dir.

Lemma 3.3.5. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir parakontakt CR-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $L_1^{\perp}$ altvektör demeti hemen hemen parakompleks yapıya sahiptir.*

İspat. Herhangi bir $X \in \Gamma(L_1^{\perp})$ için (3.3.28) eşitliğinden

$$f^2X = X - FtX$$

bulunur. Burada Lemma 3.3.3 göz önüne alınırsa ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 3.3.6. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir parakontakt CR-lightlike altmanifoldu olsun. Herhangi bir $U \in \Gamma(tr(TM))$ için eğer $tU = 0$ ise $U \in \Gamma(L_1^{\perp})$ dir.*

İspat. Herhangi bir $U \in \Gamma(tr(TM))$ için,

$$\bar{\phi}U = tU + fU,$$

yazılabilir. Kabul edelim ki $tU = 0$ olsun. Bu durumda $X \in \Gamma(D^{'})$ için

$$\bar{g}(\bar{\phi}X, U) = -\bar{g}(X, \bar{\phi}U) = -\bar{g}(X, fU) = 0$$

dır. Bu eşitlik ise $U \in \Gamma(L_1^{\perp})$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Lemma 3.3.7. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir parakontakt CR-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda M üzerindeki (P, ξ, η, g) hemen hemen parakontakt yapısının bir para-Sasakian yapı olması için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Gamma(D)$ için*

$$th(X, Y) = 0 \quad ya\ da \quad h(X, Y) \in \Gamma(L_1^{\perp})$$

olmasıdır.

İspat. Her $X \in \Gamma(D)$ için

$$FX = 0$$

dır. Son eşitlik ile birlikte Lemma 3.3.6, (3.3.8) eşitliğinde göz önüne alınırsa

$$(\nabla_X P)Y = -\bar{g}(X, Y)\xi + \eta(Y)X$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Şimdi parakontakt CR-lightlike altmanifoldlarda tanımlı distribüsyonların integrallenebilirlik şartlarını inceleyelim.

Önerme 3.3.2. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir parakontakt CR-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda D ve $D \oplus D'$ distribüsyonları integrallenebilir değildir.*

İspat. Kabul edelim ki D distribüsyonu integrallenebilir olsun. O halde her $X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$g([X, Y], \xi) = 0$$

dır. Buradan

$$g([X, Y], \xi) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \xi) - \bar{g}(\bar{\nabla}_Y X, \xi)$$

elde edilir. (1.4.29) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} g([X, Y], \xi) &= \bar{g}(Y, \bar{\phi}X) - \bar{g}(X, \bar{\phi}Y) \\ &= 2\bar{g}(\bar{\phi}X, Y) \end{aligned}$$

bulunur. Bir parakontakt CR-lightlike altmanifoldun izotropik ya da tamamen lightlike altmanifoldu yoktur. Bu durumda M proper ve D_0 non-dejeneredir. Bu durumda $\bar{g}(\bar{\phi}X, Y) \neq 0$ olacak şekilde non-null $X, Y \in \Gamma(D)$ seçebiliriz. Bu ise bir çelişkidir. Dolayısıyla D integrallenemez. Benzer şekilde $D \oplus D'$ nin de integrallenebilir olmadığı gösterilebilir. $\square$

Önerme 3.3.3. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir parakontakt CR-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $D \bot \{\xi\}$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart*

$$h(X, \bar{\phi}Y) = h(\bar{\phi}X, Y), \qquad \forall X, Y \in \Gamma(D \bot \{\xi\})$$

olmasıdır.

İspat. Her $X, Y \in D \bot \{\xi\}$ için (1.3.16), (1.4.52), (3.3.34) ve (3.3.35) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
-\bar{g}(X,Y)\xi+\eta(Y)X &= (\bar{\nabla}_X\bar{\phi})Y \\
&= \bar{\nabla}_X\bar{\phi}Y-\bar{\phi}\bar{\nabla}_XY \\
&= \nabla_X\bar{\phi}Y+h(X,\bar{\phi}Y)-\bar{\phi}\nabla_XY \\
&\quad -\bar{\phi}h^l(X,Y)-\bar{\phi}h^s(X,Y) \\
&= \nabla_X\bar{\phi}Y+h(X,\bar{\phi}Y)-P\nabla_XY \\
&\quad -F\nabla_XY-Bh^l(X,Y)-Ch^l(X,Y) \\
&\quad -Bh^s(X,Y)-Ch^s(X,Y)
\end{aligned}$$

bulunur. Bu eşitlikten ise

$$F(\nabla_XY)=-Ch^s(X,Y)+h(X,\bar{\phi}Y) \tag{3.3.36}$$

elde edilir. Burada X ve Y nin rolleri değiştirilirse

$$F(\nabla_YX)=-Ch^s(Y,X)+h(Y,\bar{\phi}X) \tag{3.3.37}$$

bulunur. (3.3.36) ve (3.3.37) den her $X,Y\in D\perp\{\xi\}$ için

$$F[X,Y]=h(X,\bar{\phi}Y)-h(\bar{\phi}X,Y)$$

olur. Buradan M bir parakontakt CR-lightlike altmanifold olduğundan her $X,Y\in D\perp\{\xi\}$ için Lemma 3.3.3 kullanılarak $h(X,\bar{\phi}Y)=h(\bar{\phi}X,Y)$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Önerme 3.3.4. *$(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi\in\Gamma(TM)$ olacak şekilde bir parakontakt CR-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $D\perp\{\xi\}$ distribüsyonunun tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart*

i) $h^l(X,\bar{\phi}Y)=0$

ve

ii) $h^s(X,Y)$ nin L_1 bileşeni yoktur

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. $D\perp\{\xi\}$ distribüsyonunun tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart her $X,Y\in\Gamma(D\perp\{\xi\})$ ve $W\in\Gamma(\bar{\phi}L_1)$ için

$$g(\nabla_XY,\bar{\phi}E)=g(\nabla_XY,W)=0$$

olmasıdır. Bu durumda (1.3.16) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, \bar{\phi} E) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \bar{\phi} E) - g(h^l(X,Y), \bar{\phi} E) \\ &-g(h^s(X,Y), \bar{\phi} E) \end{aligned}$$

olur. Böylece

$$g(\nabla_X Y, \bar{\phi} E) = -\bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_X Y, E)$$

elde edilir. Diğer taraftan (1.4.52) kullanılarak

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, \bar{\phi} E) &= g((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y - \bar{\nabla}_X \bar{\phi} Y, E) \\ &= \bar{g}(X,Y)\bar{g}(\xi, E) - \bar{g}(X,E)\eta(Y) \\ &-\bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi} Y, E) \\ &= -\bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi} Y, E) \\ &= -\bar{g}(\nabla_X \bar{\phi} Y, E) - g(h^l(X, \bar{\phi} Y), E) \\ &-g(h^s(X, \bar{\phi} Y), E) \\ &= -g(h^l(X, \bar{\phi} Y), E) \end{aligned}$$

bulunur. Bu durumda $g(\nabla_X Y, \bar{\phi} E) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $h^l(X, \bar{\phi} Y) = 0$ olmasıdır.

Benzer şekilde

$$g(\nabla_X \bar{\phi} Y, W) = -\bar{g}(h^s(X,Y), \bar{\phi} W)$$

bulunur. $W \in \Gamma(\bar{\phi} L_1)$ için $\bar{\phi} W = W$ olduğundan $g(\nabla_X Y, W) = 0$ olması için gerek ve yeter şart $h^s(X,Y)$ nin L_1 bileşeninin olmamasıdır. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Önerme 3.3.5. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir parakontakt CR-lightlike altmanifoldu olsun. D' distribüsyonunun tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart $Z, W \in \Gamma(D')$ için $\bar{\phi} L_1 \perp \bar{\phi}(Rad\, TM)$ bileşeninin olmaması ve $A_{\bar{\phi} W} Z$ nin de $D_0 \perp \bar{\phi} Rad\, TM$ bileşeninin olmamasıdır.*

İspat. D' distribüsyonunun tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart $Z, W \in \Gamma(D')$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $X \in \Gamma(D_0)$ için

$$g(\nabla_Z W, N) = g(\nabla_Z W, \bar{\phi} N) = g(\nabla_Z W, X) = g(\nabla_Z W, \xi) = 0$$

olmasıdır. Her $Z, W \in \Gamma(D')$ için

$$Zg(W,\xi) = g(\nabla_Z W, \xi) + g(W, \nabla_Z \xi)$$

yazılabilir. Burada (1.4.29) eşitliğinden

$$g(\bar{\phi}Z, W) = g(\nabla_Z W, \xi)$$

yani

$$g(\nabla_Z W, \xi) = 0 \tag{3.3.38}$$

bulunur. Benzer olarak $Z, W \in \Gamma(D')$ ve $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için

$$Zg(W,N) = g(\nabla_Z W, N) + g(W, \nabla_Z N)$$

dir. (1.3.19) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_Z W, N) &= g(W, A_N Z + \nabla^l_Z N + D^s(Z,N)) \\ &= g(W, A_N Z) \end{aligned} \tag{3.3.39}$$

olur. $X \in \Gamma(D_0)$ için (1.3.19) ve (1.4.52) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} Zg(W,\bar{\phi}X) &= g(\bar{\nabla}_Z W, \bar{\phi}X) + g(W, \bar{\nabla}_Z \bar{\phi}X) \\ &= g(\bar{\nabla}_Z W, \bar{\phi}X) + g(W, (\bar{\nabla}_Z \bar{\phi})X + \bar{\phi}\bar{\nabla}_Z X) \\ &= g(\bar{\nabla}_Z W, \bar{\phi}X) - g(\bar{\phi}W, \bar{\nabla}_Z X) \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$g(\nabla_Z W, \bar{\phi}X) = g(A_{\bar{\phi}W} Z, X) \tag{3.3.40}$$

bulunur. Aynı şekilde $W \in \Gamma(D')$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için

$$g(\nabla_Z W, \bar{\phi}N) = g(A_{\bar{\phi}W} Z, N) \tag{3.3.41}$$

dir. Böylece (3.3.38) - (3.3.41) eşitliklerinden ispat tamamlanmış olur. □

Önerme 3.3.6. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir parakontakt CR-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda D' distribüsyonu integrallenebilirdir.*

İspat. Herhangi X,$Z \in \Gamma(D')$ için (1.4.52) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\bar{\phi}([X,Z]) &= \bar{\phi}(\bar{\nabla}_X Z - \bar{\nabla}_Z X) \\ &= -(\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Z + \bar{\nabla}_X \bar{\phi} Z + (\bar{\nabla}_Z \bar{\phi})X - \bar{\nabla}_Z \bar{\phi} X \\ &= A_{\bar{\phi}X} Z - A_{\bar{\phi}Z} X + \nabla^t_X \bar{\phi} Z - \nabla^t_Z \bar{\phi} X \end{aligned} \tag{3.3.42}$$

olur. Kabul edelim ki $Y \in D^{'}$ olsun. O halde $\hat{X} \in \Gamma(TM)$, $Z \in \Gamma(D^{'})$ için

$$\begin{aligned}\hat{X}\bar{g}(Z,\bar{\phi}Y) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\hat{X}} Z, \bar{\phi}Y) + \bar{g}(Z, \bar{\nabla}_{\hat{X}} \bar{\phi} Y) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\hat{X}} Z, \bar{\phi}Y) + \bar{g}(Z, (\bar{\nabla}_{\hat{X}} \bar{\phi})Y) + \bar{g}(Z, \bar{\phi}\bar{\nabla}_{\hat{X}} Y) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\hat{X}} Z, \bar{\phi}Y) - \bar{g}(\bar{\phi}Z, \bar{\nabla}_{\hat{X}} Y) \\ &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\hat{X}} Z, \bar{\phi}Y) - \hat{X}\bar{g}(Y, \bar{\phi}Z) + \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_{\hat{X}} \bar{\phi} Z)\end{aligned}$$

bulunur. Buradan

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{\hat{X}} Z, \bar{\phi}Y) = \bar{g}(A_{\bar{\phi}Z}\hat{X}, Y)$$

elde edilir. Öyleyse

$$\bar{g}(A_{\bar{\phi}Z}\hat{X}, Y) = \bar{g}(A_{\bar{\phi}Y}\hat{X}, Z) \tag{3.3.43}$$

dir. Diğer taraftan $PX \in \Gamma(S(TM))$ için

$$\bar{g}(h^*(PX, PY), N) = \bar{g}(A_N PX, PY) \tag{3.3.44}$$

dir. h^* bilineer ve simetrik olduğundan

$$\bar{g}(A_N PX, PY) = \bar{g}(PX, A_N PY) \tag{3.3.45}$$

elde edilir. Özel olarak $\hat{X} \in \Gamma(D_0)$ seçilirse (3.3.43) ve (3.3.45) den

$$\bar{g}(\hat{X}, A_{\bar{\phi}Z}Y) = \bar{g}(\hat{X}, A_{\bar{\phi}Y}Z)$$

bulunur. Böylece $Y, Z \in \Gamma(D^{'})$ için

$$A_{\bar{\phi}Z}Y = A_{\bar{\phi}Y}Z,$$

elde edilir ve ispat tamamlanır. □

Teorem 3.3.2. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir parakontakt CR-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda D_0 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(D_0)$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ ve $E \in \Gamma(Rad\ TM)$ için*

i) $\bar{g}(h^*(X, \bar{\phi}Y), N) = \bar{g}(h^*(Y, \bar{\phi}X), N)$

ii) $g(\nabla^*_X Y, \bar{\phi}E) = g(\nabla^*_Y X, \bar{\phi}E)$

iii) $\bar{g}(h^s(X, \bar{\phi}Y), W) = \bar{g}(h^s(Y, \bar{\phi}X), W)$

iv) $\bar{g}(\nabla^*_X Y, \xi) = \bar{g}(\nabla^*_Y X, \xi)$

v) $\bar{g}(h^*(X, Y), N) = \bar{g}(h^*(Y, X), N)$

olmasıdır.

İspat. Parakontakt CR-lightlike altmanifold tanımı göz önüne alındığında D_0 distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(D_0)$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$, $W \in \Gamma(L_1)$ ve $E \in \Gamma(Rad\ TM)$ için

$$\bar{g}([X,Y], \bar{\phi}N) = \bar{g}([X,Y], \bar{\phi}E) = \bar{g}([X,Y], \bar{\phi}W) = \bar{g}([X,Y], \xi) = \bar{g}([X,Y], N) = 0$$

olmasıdır. (1.3.27) ve (1.4.52) eşitlikleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{g}([X,Y], \bar{\phi}N) &= -\bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_X Y, N) + \bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_Y X, N) \\
&= \bar{g}((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y, N) - \bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, N) \\
&\quad -\bar{g}((\bar{\nabla}_Y \bar{\phi})X, N) + \bar{g}(\bar{\nabla}_Y \bar{\phi}X, N) \\
&= -\bar{g}(X,Y)\eta(N) + \bar{g}(X,N)\eta(Y) - \bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, N) \\
&\quad +\bar{g}(X,Y)\eta(N) + \bar{g}(Y,N)\eta(X) + \bar{g}(\bar{\nabla}_Y \bar{\phi}X, N) \\
&= -\bar{g}(\nabla_X \bar{\phi}Y + h^l(X, \bar{\phi}Y) + h^s(X, \bar{\phi}Y), N) \\
&\quad +\bar{g}(\nabla_Y \bar{\phi}X + h^l(Y, \bar{\phi}X) + h^s(Y, \bar{\phi}X), N) \\
&= -\bar{g}(\nabla_X \bar{\phi}Y, N) + \bar{g}(\nabla_Y \bar{\phi}X, N) \\
&= -\bar{g}(h^*(X, \bar{\phi}Y), N) + \bar{g}(h^*(Y, \bar{\phi}X), N)
\end{aligned} \tag{3.3.46}$$

elde edilir. (1.3.16) ve (1.3.27) eşitliklerinden ise

$$\begin{aligned}
\bar{g}([X,Y], \bar{\phi}E) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, \bar{\phi}E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_Y X, \bar{\phi}E) \\
&= \bar{g}(\nabla_X Y + h^l(X,Y) + h^s(X,Y), \bar{\phi}E) \\
&\quad -\bar{g}(\nabla_Y X + h^l(Y,X) + h^s(Y,X), \bar{\phi}E) \\
&= \bar{g}(\nabla_X Y, \bar{\phi}E) - \bar{g}(\nabla_Y X, \bar{\phi}E)
\end{aligned} \tag{3.3.47}$$

bulunur. Diğer taraftan (1.3.16) ve (1.4.52) eşitliklerinden

$$
\begin{aligned}
\bar{g}([X,Y],\bar{\phi}W) &= -\bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_X Y, W) + \bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_Y X, W) \\
&= \bar{g}((\bar{\nabla}_X\bar{\phi})Y, W) - \bar{g}(\bar{\nabla}_X\bar{\phi}Y, W) \\
&\quad -\bar{g}((\bar{\nabla}_Y\bar{\phi})X, W) + \bar{g}(\bar{\nabla}_Y\bar{\phi}X, W) \\
&= -\bar{g}(X,Y)\eta(W) + \bar{g}(X,W)\eta(Y) - \bar{g}(\bar{\nabla}_X\bar{\phi}Y, W) \\
&\quad +\bar{g}(X,Y)\eta(W) + \bar{g}(Y,W)\eta(X) + \bar{g}(\bar{\nabla}_Y\bar{\phi}X, W) \\
&= -\bar{g}(\nabla_X\bar{\phi}Y + h^l(X,\bar{\phi}Y) + h^s(X,\bar{\phi}Y), W) \\
&\quad +\bar{g}(\nabla_Y\bar{\phi}X + h^l(Y,\bar{\phi}X) + h^s(Y,\bar{\phi}X), W) \\
&= -\bar{g}(h^s(X,\bar{\phi}Y), W) + \bar{g}(h^s(Y,\bar{\phi}X), W)
\end{aligned}
\tag{3.3.48}
$$

olur. Son olarak (1.3.27) eşitliğinden

$$
\begin{aligned}
\bar{g}([X,Y],\xi) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y,\xi) - \bar{g}(\bar{\nabla}_Y X,\xi) \\
&= \bar{g}(\nabla^*_X Y + h^*(X,Y),\xi) \\
&\quad -\bar{g}(\nabla^*_Y X + h^*(Y,X),\xi) \\
&= \bar{g}(\nabla^*_X Y,\xi) - \bar{g}(\nabla^*_Y X,\xi)
\end{aligned}
\tag{3.3.49}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\bar{g}([X,Y],N) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y,N) - \bar{g}(\bar{\nabla}_Y X,N) \\
&= \bar{g}(\nabla^*_X Y + h^*(X,Y),N) \\
&\quad -\bar{g}(\nabla^*_Y X + h^*(Y,X),N) \\
&= \bar{g}(h^*(X,Y),N) - \bar{g}(h^*(Y,X),N)
\end{aligned}
\tag{3.3.50}
$$

bulunur. Böylece (3.3.46) - (3.3.50) eşitlikleri göz önüne alınırsa ispat tamamlanır. □

Teorem 3.3.3. *$(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir parakontakt CR-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda Rad TM distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(D_0)$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$, $W \in \Gamma(L_1)$ ve $E, \acute{E}, \H{E} \in \Gamma(Rad\ TM)$ için*

i) $\bar{g}(\acute{E}, h^l(\H{E},\bar{\phi}E)) = \bar{g}(\H{E}, h^l(\acute{E},\bar{\phi}E))$

ii) $\bar{g}(h^s(\acute{E},\bar{\phi}\H{E}), W) = \bar{g}(h^s(\H{E},\bar{\phi}\acute{E}), W)$

iii) $g(h^*(\acute{E},\bar{\phi}\H{E}), N) = g(h^*(\H{E},\bar{\phi}\acute{E}), N)$

iv) $g(A^*_{\H{E}}\acute{E},\xi) = g(A^*_{\acute{E}}\H{E},\xi)$

v) $\bar{g}(\H{E}, h^l(\acute{E},X)) = \bar{g}(\acute{E}, h^l(\H{E},X))$

olmasıdır.

İspat. Parakontakt CR-lightlike altmanifold tanımı göz önüne alındığında $Rad\,TM$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(D_0)$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ $W \in \Gamma(L_1)$ ve $E, \acute{E}, \text{\H{E}} \in \Gamma(Rad\ TM)$ için

$$\bar{g}([\acute{E}, \text{\H{E}}], \bar{\phi}E) = \bar{g}([\acute{E}, \text{\H{E}}], \bar{\phi}W) = \bar{g}([\acute{E}, \text{\H{E}}], \bar{\phi}N) = \bar{g}([\acute{E}, \text{\H{E}}], \xi) = \bar{g}([\acute{E}, \text{\H{E}}], X) = 0$$

olmasıdır. (1.3.27) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\bar{g}([\acute{E}, \text{\H{E}}], \bar{\phi}E) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\text{\H{E}}, \bar{\phi}E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\text{\H{E}}}\acute{E}, \bar{\phi}E) \\
&= \acute{E}\bar{g}(\text{\H{E}}, \bar{\phi}E) - \bar{g}(\text{\H{E}}, \bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi}E) \\
&\quad -\text{\H{E}}\bar{g}(\acute{E}, \bar{\phi}E) + \bar{g}(\acute{E}, \bar{\nabla}_{\text{\H{E}}}\bar{\phi}E) \\
&= -\bar{g}(\text{\H{E}}, \bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi}E) + \bar{g}(\acute{E}, \bar{\nabla}_{\text{\H{E}}}\bar{\phi}E) \\
&= -\bar{g}(\text{\H{E}}, \nabla_{\acute{E}}\bar{\phi}E + h^l(\acute{E}, \bar{\phi}E) + h^s(\acute{E}, \bar{\phi}E)) \\
&\quad +\bar{g}(\acute{E}, \nabla_{\text{\H{E}}}\bar{\phi}E + h^l(\text{\H{E}}, \bar{\phi}E) + h^s(\text{\H{E}}, \bar{\phi}E)) \\
&= -\bar{g}(\text{\H{E}}, h^l(\acute{E}, \bar{\phi}E)) + \bar{g}(\acute{E}, h^l(\text{\H{E}}, \bar{\phi}E))
\end{aligned} \tag{3.3.51}$$

elde edilir. (1.3.16), (1.3.27) ve (1.4.52) eşitlikleri kullanılarak ise

$$\begin{aligned}
\bar{g}([\acute{E}, \text{\H{E}}], \bar{\phi}W) &= -\bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_{\acute{E}}\text{\H{E}}, W) + \bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_{\text{\H{E}}}\acute{E}, W) \\
&= \bar{g}((\bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi})\text{\H{E}}, W) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi}\text{\H{E}}, W) \\
&\quad -\bar{g}((\bar{\nabla}_{\text{\H{E}}}\bar{\phi})\acute{E}, W) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\text{\H{E}}}\bar{\phi}\acute{E}, W) \\
&= -\bar{g}(\acute{E}, \text{\H{E}})\eta(W) + \bar{g}(W, \text{\H{E}})\eta(\acute{E}) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi}\text{\H{E}}, W) \\
&\quad +\bar{g}(\acute{E}, \text{\H{E}})\eta(W) - \bar{g}(W, \acute{E})\eta(\text{\H{E}}) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\text{\H{E}}}\bar{\phi}\acute{E}, W) \\
&= -\bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi}\text{\H{E}}, W) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\text{\H{E}}}\bar{\phi}\acute{E}, W) \\
&= -\bar{g}(\nabla_{\acute{E}}\bar{\phi}\text{\H{E}} + h^l(\acute{E}, \bar{\phi}\text{\H{E}}) + h^s(\acute{E}, \bar{\phi}\text{\H{E}}), W) \\
&\quad +\bar{g}(\nabla_{\text{\H{E}}}\bar{\phi}\acute{E} + h^l(\text{\H{E}}, \bar{\phi}\acute{E}) + h^s(\text{\H{E}}, \bar{\phi}\acute{E}), W) \\
&= -\bar{g}(h^s(\acute{E}, \bar{\phi}\text{\H{E}}), W) + \bar{g}(h^s(\text{\H{E}}, \bar{\phi}\acute{E}), W)
\end{aligned} \tag{3.3.52}$$

ve

$$
\begin{aligned}
\bar{g}([\acute{E},\ddot{\mathrm{E}}],N) &= -\bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_{\acute{E}}\ddot{\mathrm{E}},N)+\bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_{\ddot{\mathrm{E}}}\acute{E},N) \\
&= \bar{g}((\bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi})\ddot{\mathrm{E}},N)-\bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi}\ddot{\mathrm{E}},N) \\
&\quad -\bar{g}((\bar{\nabla}_{\ddot{\mathrm{E}}}\bar{\phi})\acute{E},N)+\bar{g}(\bar{\nabla}_{\ddot{\mathrm{E}}}\bar{\phi}\acute{E},N) \\
&= -\bar{g}(\acute{E},\ddot{\mathrm{E}})\eta(N)+\bar{g}(N,\ddot{\mathrm{E}})\eta(\acute{E})-\bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi}\ddot{\mathrm{E}},N) \\
&\quad +\bar{g}(\acute{E},\ddot{\mathrm{E}})\eta(N)-\bar{g}(N,\acute{E})\eta(\ddot{\mathrm{E}})+\bar{g}(\bar{\nabla}_{\ddot{\mathrm{E}}}\bar{\phi}\acute{E},N) \\
&= -\bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi}\ddot{\mathrm{E}},N)+\bar{g}(\bar{\nabla}_{\ddot{\mathrm{E}}}\bar{\phi}\acute{E},N) \\
&= -\bar{g}(\nabla_{\acute{E}}\bar{\phi}\ddot{\mathrm{E}}+h^l(\acute{E},\bar{\phi}\ddot{\mathrm{E}})+h^s(\acute{E},\bar{\phi}\ddot{\mathrm{E}}),N) \\
&\quad +\bar{g}(\nabla_{\ddot{\mathrm{E}}}\bar{\phi}\acute{E}+h^l(\ddot{\mathrm{E}},\bar{\phi}\acute{E})+h^s(\ddot{\mathrm{E}},\bar{\phi}\acute{E}),N) \\
&= -\bar{g}(\nabla_{\acute{E}}\bar{\phi}\ddot{\mathrm{E}},N)+\bar{g}(\nabla_{\ddot{\mathrm{E}}}\bar{\phi}\acute{E},N) \\
&= -\bar{g}(\nabla^*_{\acute{E}}\bar{\phi}\ddot{\mathrm{E}}+h^*(\acute{E},\ddot{\mathrm{E}}),N)+\bar{g}(\nabla^*_{\ddot{\mathrm{E}}}\bar{\phi}\acute{E}+h^*(\ddot{\mathrm{E}},\acute{E}),N) \\
&= -\bar{g}(h^*(\acute{E},\ddot{\mathrm{E}}),N)+\bar{g}(h^*(\ddot{\mathrm{E}},\acute{E}),N)
\end{aligned}
\tag{3.3.53}
$$

bulunur. Diğer taraftan (1.3.28) eşitliği göz önüne alınırsa

$$
\begin{aligned}
\bar{g}([\acute{E},\ddot{\mathrm{E}}],\xi) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\ddot{\mathrm{E}},\xi)-\bar{g}(\bar{\nabla}_{\ddot{\mathrm{E}}}\acute{E},\xi) \\
&= \bar{g}(\nabla_{\acute{E}}\ddot{\mathrm{E}}+h^l(\acute{E},\ddot{\mathrm{E}})+h^s(\acute{E},\ddot{\mathrm{E}}),\xi) \\
&\quad -\bar{g}(\nabla_{\ddot{\mathrm{E}}}\acute{E}+h^l(\ddot{\mathrm{E}},\acute{E})+h^s(\ddot{\mathrm{E}},\acute{E}),\xi) \\
&= \bar{g}(\nabla_{\acute{E}}\ddot{\mathrm{E}},\xi)-\bar{g}(\nabla_{\ddot{\mathrm{E}}}\acute{E},\xi) \\
&= g(-A^*_{\ddot{\mathrm{E}}}\acute{E}+\nabla^{*\perp}_{\acute{E}}\ddot{\mathrm{E}},\xi)-g(-A^*_{\acute{E}}\ddot{\mathrm{E}}+\nabla^{*\perp}_{\ddot{\mathrm{E}}}\acute{E},\xi) \\
&= -g(A^*_{\ddot{\mathrm{E}}}\acute{E},\xi)+g(A^*_{\acute{E}}\ddot{\mathrm{E}},\xi)
\end{aligned}
\tag{3.3.54}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
\bar{g}([\acute{E},\ddot{\mathrm{E}}],X) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\ddot{\mathrm{E}},X)-\bar{g}(\bar{\nabla}_{\ddot{\mathrm{E}}}\acute{E},X) \qquad (3.3.55) \\
&= \bar{g}(\nabla_{\acute{E}}\ddot{\mathrm{E}},X)-\bar{g}(\nabla_{\ddot{\mathrm{E}}}\acute{E},X) \\
&= -g(A^*_{\ddot{\mathrm{E}}}\acute{E},X)+g(A^*_{\acute{E}}\ddot{\mathrm{E}},X) \\
&= -\bar{g}(\ddot{\mathrm{E}},h^l(\acute{E},X))+\bar{g}(\acute{E},h^l(\ddot{\mathrm{E}},X))
\end{aligned}
$$

olur. Böylece (3.3.51) - (3.3.55) eşitliklerinden ispat tamamlanır. □

Teorem 3.3.4. *$(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir parakontakt CR-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $\bar{\phi}Rad\ TM$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(D_0)$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ $W \in \Gamma(L_1)$ ve $E, \acute{E}, \H{E} \in \Gamma(Rad\ TM)$ için* *i)* $\bar{g}(E, h^l(\H{E}, \bar{\phi}\acute{E})) = \bar{g}(E, h^l(\acute{E}, \bar{\phi}\H{E}))$

ii) $\bar{g}(h^s(\bar{\phi}\acute{E}, \H{E}), W) = \bar{g}(h^s(\bar{\phi}\H{E}, \acute{E}), W)$

iii) $\bar{g}(A_N\bar{\phi}\acute{E}, \bar{\phi}\H{E}) = \bar{g}(A_N\bar{\phi}\H{E}, \bar{\phi}\acute{E})$

iv) $g(A^*_{\H{E}}\bar{\phi}\acute{E}, \bar{\phi}X) = g(A^*_{\acute{E}}\bar{\phi}\H{E}, \bar{\phi}X)$

olmasıdır.

İspat. Parakontakt CR-lightlike altmanifold tanımından $\bar{\phi}Rad\,TM$ distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(D_0)$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ $W \in \Gamma(L_1)$ ve $E, \acute{E}, \H{E} \in \Gamma(Rad\ TM)$ için

$$\bar{g}([\bar{\phi}\acute{E}, \bar{\phi}\H{E}], \bar{\phi}E) = \bar{g}([\bar{\phi}\acute{E}, \bar{\phi}\H{E}], \bar{\phi}W) = \bar{g}([\bar{\phi}\acute{E}, \bar{\phi}\H{E}], N) = \bar{g}([\bar{\phi}\acute{E}, \bar{\phi}\H{E}], \xi) = \bar{g}([\bar{\phi}\acute{E}, \bar{\phi}\H{E}], X) = 0$$

olmasıdır. (1.3.28) ve (1.4.52) eşitliklerinin kullanılması ile

$$\begin{aligned}
\bar{g}([\bar{\phi}\acute{E}, \bar{\phi}\H{E}], \bar{\phi}E) &= -\bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\acute{E}}\bar{\phi}\H{E}, E) + \bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\H{E}}\bar{\phi}\acute{E}, E) \\
&= \bar{g}((\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\acute{E}}\bar{\phi})\bar{\phi}\H{E}, E) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\acute{E}}\H{E}, E) \\
&\quad -\bar{g}((\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\H{E}}\bar{\phi})\bar{\phi}\acute{E}, E) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\H{E}}\acute{E}, E) \\
&= -\bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\acute{E}}\H{E}, E) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\H{E}}\acute{E}, E) \qquad (3.3.56) \\
&= -\bar{g}(\nabla_{\bar{\phi}\acute{E}}\H{E} + h^l(\bar{\phi}\acute{E}, \H{E}) + h^s(\bar{\phi}\acute{E}, \H{E}), E) \\
&\quad +\bar{g}(\nabla_{\bar{\phi}\H{E}}\acute{E} + h^l(\bar{\phi}\H{E}, \acute{E}) + h^s(\bar{\phi}\H{E}, \acute{E}), E) \\
&= -\bar{g}(h^l(\bar{\phi}\acute{E}, \H{E}), E) + \bar{g}(h^l(\bar{\phi}\H{E}, \acute{E}), E)
\end{aligned}$$

ve benzer şekilde

$$\begin{aligned}
\bar{g}([\bar{\phi}\acute{E}, \bar{\phi}\H{E}], \bar{\phi}W) &= -\bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\acute{E}}\H{E}, W) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\H{E}}\acute{E}, W) \qquad (3.3.57) \\
&= -\bar{g}(h^s(\bar{\phi}\acute{E}, \H{E}), W) + \bar{g}(h^s(\bar{\phi}\H{E}, \acute{E}), W)
\end{aligned}$$

bulunur. Diğer taraftan (1.3.19) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\bar{g}([\bar{\phi}\acute{E}, \bar{\phi}\H{E}], N) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\acute{E}}\bar{\phi}\H{E}, N) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\H{E}}\bar{\phi}\acute{E}, N) \\
&= \bar{\phi}\H{E}\bar{g}(\bar{\phi}\acute{E}, N) - \bar{g}(\bar{\phi}\H{E}, \bar{\nabla}_{\bar{\phi}\acute{E}}N) \\
&\quad -\bar{\phi}\acute{E}\bar{g}(\bar{\phi}\H{E}, N) + \bar{g}(\bar{\phi}\acute{E}, \bar{\nabla}_{\bar{\phi}\H{E}}N) \qquad (3.3.58) \\
&= -\bar{g}(\bar{\phi}\H{E}, \bar{\nabla}_{\bar{\phi}\acute{E}}N) + \bar{g}(\bar{\phi}\acute{E}, \bar{\nabla}_{\bar{\phi}\H{E}}N) \\
&= \bar{g}(A_N\bar{\phi}\acute{E}, \bar{\phi}\H{E}) - \bar{g}(A_N\bar{\phi}\H{E}, \bar{\phi}\acute{E})
\end{aligned}$$

elde edilir. Şimdi (1.4.1) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}
\bar{g}([\bar{\phi}\acute{E}, \bar{\phi}\H{E}], \xi) &= -\bar{g}(\bar{\phi}\H{E}, \bar{\nabla}_{\bar{\phi}\acute{E}}\xi) + \bar{g}(\bar{\phi}\acute{E}, \bar{\nabla}_{\bar{\phi}\H{E}}\xi) \\
&= \bar{g}(\bar{\phi}\H{E}, \bar{\phi}^2\acute{E}) - \bar{g}(\bar{\phi}\acute{E}, \bar{\phi}^2\H{E}) \qquad (3.3.59) \\
&= \bar{g}(\bar{\phi}\H{E}, \acute{E}) - \bar{g}(\bar{\phi}\acute{E}, \H{E}) \\
&= 0
\end{aligned}$$

olur. Son olarak (1.3.28) eşitliği ve $\bar{\phi}D_0 = D_0$ olduğu göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} \bar{g}([\bar{\phi}\acute{E},\bar{\phi}\H{E}],X) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\acute{E}}\bar{\phi}\H{E},X) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\H{E}}\bar{\phi}\acute{E},X) \\ &= \bar{g}((\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\acute{E}}\bar{\phi})\H{E},X) - \bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\acute{E}}\H{E},X) \\ &\quad -\bar{g}((\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\H{E}}\bar{\phi})\acute{E},X) + \bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\H{E}}\acute{E},X) \\ &= -\bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\acute{E}}\H{E},\bar{\phi}X) + \bar{g}(\bar{\nabla}_{\bar{\phi}\H{E}}\acute{E},\bar{\phi}X) \\ &= g(A^*_{\H{E}}\bar{\phi}\acute{E},\bar{\phi}X) - g(A^*_{\acute{E}}\bar{\phi}\H{E},\bar{\phi}X) \end{aligned} \tag{3.3.60}$$

elde edilir. Böylece (3.3.56) - (3.3.60) eşitliklerinden ispat tamamlanır. □

Teorem 3.3.5. *$(\bar{M},\bar{\phi},\xi,\eta,\bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve M de $\bar{M}$ nin $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir parakontakt CR-lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda radikal distribüsyonunun her lifinin M de tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(D_0)$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ $W \in \Gamma(L_1)$ ve $E,\acute{E},\H{E} \in \Gamma(Rad\ TM)$ için*

i) $A^*_{\acute{E}}\H{E} \notin, \Gamma(D_0 \perp \bar{\phi}ltr(TM))$

ii) $\bar{g}(h^s(\acute{E},\bar{\phi}\H{E}),W) = 0$

iii) $\bar{g}(h^*(\acute{E},\bar{\phi}\H{E}),N) = 0$

olmasıdır.

İspat. Parakontakt CR-lightlike altmanifold tanımı göz önüne alındığında radikal distribüsyonunun bir lifinin M de tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(D_0)$, $N \in \Gamma(ltr(TM))$ $W \in \Gamma(L_1)$ ve $E,\acute{E},\H{E} \in \Gamma(Rad\ TM)$ için

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\H{E},\bar{\phi}E) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\H{E},\bar{\phi}W) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\H{E},\bar{\phi}N) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\H{E},\xi) = \bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\H{E},X) = 0$$

olmasıdır. (1.3.16) ve (1.3.28) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} g(\nabla_{\acute{E}}\H{E},\xi) &= \bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\H{E},\xi) \\ &= \acute{E}\bar{g}(\H{E},\xi) - \bar{g}(\H{E},\bar{\nabla}_{\acute{E}}\xi) \\ &= \bar{g}(\H{E},\bar{\phi}\acute{E}) = 0, \end{aligned} \tag{3.3.61}$$

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\H{E},\bar{\phi}E) &= \bar{g}(-A^*_{\H{E}}\acute{E} + \nabla^{*\perp}_{\acute{E}}\H{E},\bar{\phi}E) \\ &= -\bar{g}(A^*_{\H{E}}\acute{E},\bar{\phi}E), \end{aligned} \tag{3.3.62}$$

ve

$$\bar{g}(\nabla_{\acute{E}}\H{E},X) = -\bar{g}(A^*_{\H{E}}\acute{E},X) \tag{3.3.63}$$

eşitlikleri bulunur. Diğer taraftan (1.3.16), (1.3.27) ve (1.4.52) eşitlikleri kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\text{\H{E}}, \bar{\phi}W) &= -\bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_{\acute{E}}\text{\H{E}}, W) \\
&= \bar{g}((\bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi})\text{\H{E}}, W) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi}\text{\H{E}}, W) \\
&= -\bar{g}(\acute{E}, \text{\H{E}})\eta(W) + \bar{g}(\acute{E}, W)\eta(\mathrm{E}) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi}\text{\H{E}}, W) \\
&= -\bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi}\text{\H{E}}, W) \\
&= -\bar{g}(\nabla_{\acute{E}}\bar{\phi}\mathrm{E} + h^l(\acute{E}, \bar{\phi}\mathrm{E}) + h^s(\acute{E}, \bar{\phi}\mathrm{E}), W) \\
&= -\bar{g}(h^s(\acute{E}, \bar{\phi}\text{\H{E}}), W)
\end{aligned}
\tag{3.3.64}
$$

ve son olarak

$$
\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\text{\H{E}}, \bar{\phi}N) &= -\bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_{\acute{E}}\text{\H{E}}, N) \\
&= \bar{g}((\bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi})\text{\H{E}}, N) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi}\text{\H{E}}, N) \\
&= -\bar{g}(\acute{E}, \text{\H{E}})\eta(N) + \bar{g}(\acute{E}, N)\eta(\mathrm{E}) - \bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi}\mathrm{E}, N) \\
&= -\bar{g}(\bar{\nabla}_{\acute{E}}\bar{\phi}\text{\H{E}}, N) \\
&= \bar{g}(\nabla^*_{\acute{E}}\bar{\phi}\mathrm{E} + h^*(\acute{E}, \bar{\phi}\mathrm{E}), N) \\
&= \bar{g}(h^*(\acute{E}, \bar{\phi}\mathrm{E}), N)
\end{aligned}
\tag{3.3.65}
$$

elde edilir. Böylece (3.3.61) - (3.3.65) eşitliklerinden ispat tamamlanır. □

3.3.3 Radikal Transversal Lightlike Altmanifoldlar

Tanım 3.3.3. *$(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$, $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ para-Sasakian manifoldunun $\xi \in \Gamma(TM)$ olacak şekilde bir lightlike altmanifoldu olsun. Eğer*

$$\bar{\phi}(Rad\ TM) = ltr(TM), \tag{3.3.66}$$

$$\bar{\phi}(S(TM)) = S(TM) \tag{3.3.67}$$

şartları sağlanıyor ise M ye $\bar{M}$ nin bir radikal transversal lightlike altmanifoldu denir.

Örnek 3.3.2. *Kabul edelim ki $\bar{M}$, Örnek 1.4.1 de verilen $(\bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ yapısı ile birlikte 9-boyutlu hemen hemen parakontakt metrik manifold olsun. $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ hemen hemen parakontakt metrik manifoldun*

$$x_1 = y_3,\ x_2 = -y_4,\ x_3 = y_1,\ x_4 = -y_2$$

ile verilen bir M hiperyüzeyini göz önüne alalım. Bu durumda

$$U_1 = \frac{\partial}{\partial x_3} + \frac{\partial}{\partial y_1},\ U_2 = -\frac{\partial}{\partial x_4} + \frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$U_3 = \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial y_3},\ U_4 = -\frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial y_4},\ U_5 = \frac{\partial}{\partial z}$$

olmak üzere $TM = Sp\{U_1, U_2, U_3, U_4, U_5\}$ *dır. O halde radikal distribüsyon ve lightlike transversal distribüsyon sırasıyla*

$$Rad\ TM = Sp\{U_1, U_2\}$$

ve

$$ltr(TM) = Sp\left\{N_1 = -\frac{\partial}{\partial x_3} - \frac{\partial}{\partial y_1},\ N_2 = -\frac{\partial}{\partial x_1} - \frac{\partial}{\partial y_3}\right\}$$

ile verilir. Bu durumda

$$\bar{\phi}U_1 = -N_2 \text{ ve } \bar{\phi}U_3 = -N_1$$

yani $\bar{\phi}(Rad\ TM) = ltr(TM)$ *dir. Ayrıca*

$$\bar{\phi}U_2 = -U_4$$

olduğundan $\bar{\phi}(S(TM)) = S(TM)$ *dir. Böylece* M, $\bar{M}$ *nin bir radikal transversal 2-lightlike altmanifoldu olur.*

Önerme 3.3.7. $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *bir para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda* $\bar{M}$ *nin 1-lightlike radikal transversal lightlike altmanifoldu yoktur.*

İspat. Kabul edelim ki M, $\bar{M}$ para-Sasakian manifoldunun 1-lightlike radikal transversal altmanifoldu olsun. Bu durumda $Rad\,TM = Sp\{E\}$ ve $ltr(TM) = Sp\{N\}$ ve g(E,N)=1 olacak ekilde E ve N lokal null kesitleri vardır. Böylece (1.4.6) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{\phi}E, E) &= -\bar{g}(\bar{\phi}^2E, \bar{\phi}E) + \eta(\bar{\phi}E)\eta(E) \\
&= -\bar{g}(E - \eta(E)\xi, \bar{\phi}E)
\end{aligned}$$

olur. Buradan

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{\phi}E, E) &= -\bar{g}(E - \eta(E)\xi, \bar{\phi}E) \\
&= -\bar{g}(E, \bar{\phi}E)
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece

$$\bar{g}(\bar{\phi}E, E) = 0 \tag{3.3.68}$$

olur. Diğer taraftan (3.3.66) göz önüne alınırsa $\bar{\phi}E = N \in \Gamma(ltr(TM))$ dir. Burada

$$\bar{g}(\bar{\phi}E, E) = \bar{g}(N, E) = 1$$

elde edilir. Bu ise (3.3.68) ile çelişir. Böylece ispat tamamlanır. □

Önerme 3.3.8. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold olsun. Bu durumda $\bar{M}$ nin izotropik ya da tamamen lightlike radikal transversal lightlike altmanifoldu yoktur.*

Teorem 3.3.6. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ de $\bar{M}$ nin bir radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda $S(TM^{\perp})$ distribüsyonu $\bar{\phi}$ altında invaryanttır.*

İspat. Her $W \in \Gamma(S(TM^{\perp}))$ ve $E \in \Gamma(Rad\, TM)$ için (1.4.6) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\bar{g}(\bar{\phi}W, E) &= -\bar{g}(\bar{\phi}^2 W, \bar{\phi}E) + \eta(\bar{\phi}W)\eta(E) \\
&= -\bar{g}(W, \bar{\phi}E) \\
&= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan (1.4.1) ve (1.4.4) eşitlikleri göz önüne alınırsa

$$\bar{g}(\bar{\phi}W, E) = -\bar{g}(W, \bar{\phi}E) = 0 \tag{3.3.69}$$

dır. Benzer şekilde $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için

$$\bar{g}(\bar{\phi}W, N) = -\bar{g}(W, \bar{\phi}N) = 0 \tag{3.3.70}$$

olur. Bu eşitliklerden

$$\bar{\phi}(S(TM^{\perp})) \cap Rad\, TM = \{0\}$$

ve

$$\bar{\phi}(S(TM^{\perp})) \cap ltr(TM) = \{0\}$$

olduğu görülür. $X \in \Gamma(S(TM))$ için (1.4.1), (1.4.6) ve (1.4.29) eşitliklerinden

$$\bar{g}(\bar{\phi}W, X) = -\bar{g}(W, \bar{\phi}X) = 0 \tag{3.3.71}$$

bulunur. Bu ise $\bar{\phi}(S(TM^{\perp})) \cap S(TM) = \{0\}$ demektir. Böylece (3.3.69), (3.3.70) ve (3.3.71) eşitliklerinden ispat tamamlanır. □

$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ de $\bar{M}$ nin bir radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. $S(TM)$ ve $Rad\ TM$ üzerindeki projeksiyon dönüşümleri sırasıyla T ve Q olmak üzere her $X \in \Gamma(TM)$ için

$$X = TX + QX \tag{3.3.72}$$

yazılabilir. Burada $TX \in \Gamma(S(TM))$ ve $QX \in \Gamma(Rad\ TM)$ dir. (3.3.72) eşitliğine $\bar{\phi}$ uygulanırsa

$$\bar{\phi}X = \bar{\phi}TX + \bar{\phi}QX \tag{3.3.73}$$

olur. Burada $\bar{\phi}TX = SX \in \Gamma(S(TM))$ ve $\bar{\phi}QX = LX \in \Gamma(ltr(TM))$ olmak üzere

$$\bar{\phi}X = SX + LX \tag{3.3.74}$$

elde edilir. $\bar{M}$ nin para-Sasakian manifold olduğu göz önüne alınarak (1.3.16), (1.3.19) ve (3.3.74) eşitliklerinden

$$\begin{aligned} -\bar{g}(X,Y)\xi + \eta(Y)X &= \nabla_X SY + h^l(X,SY) + h^s(X,SY) \\ &\quad -A_{LY}X + \nabla^l_X LY + D^s(X,LY) \\ &\quad -S\nabla_X Y - L\nabla_X Y - \bar{\phi}h^l(X,Y) \\ &\quad -\bar{\phi}h^s(X,Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Son denklemin sırasıyla teğet, ekran transversal ve lightlike ekran transversal bileşenleri ayrı ayrı yazılırsa

$$(\nabla_X S)Y = -\bar{g}(X,Y)\xi + \eta(Y)X + \bar{\phi}h^l(X,Y) + A_{LY}X, \tag{3.3.75}$$

$$h^l(X,SY) + \nabla^l_X LY - L\nabla_X Y = 0 \tag{3.3.76}$$

$$h^s(X,SY) + D^s(X,LY) - \bar{\phi}h^s(X,Y) = 0 \tag{3.3.77}$$

eşitliklerine ulaşılır.

Lightlike altmanifoldlarda indirgenmiş konneksiyon metrik konneksiyon değildir [44]. Şimdi indirgenmiş konneksiyonun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şartları inceleyelim.

Teorem 3.3.7. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ de $\bar{M}$ nin bir radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda ∇ indirgenmiş konneksiyonun metrik konneksiyon olması için gerek ve yeter şart $X \in \Gamma(TM)$, $Y \in \Gamma(Rad\ TM)$ için $A_{\bar{\phi}Y}X \in \Gamma(Rad\ TM)$ olmasıdır.*

İspat. Kabul edelim ki ∇ indirgenmiş konneksiyon, metrik konneksiyon olsun. (1.3.16) eşitliğinden her $X \in \Gamma(TM),\ Y \in \Gamma(Rad\ TM)$ ve $Z \in \Gamma(S(TM))$ için

$$g(\nabla_X Y, Z) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y - h^l(X,Y) - h^s(X,Y), Z)$$

olur. Buradan

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z) = 0$$

elde edilir. Diğer taraftan (1.4.6) eşitliğinden

$$\bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_X Y, \bar{\phi}Z) - \eta(\bar{\nabla}_X Y)\eta(Z) = 0$$

yazılabilir. Bu durumda

$$\bar{g}(-(\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y + \bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, \bar{\phi}Z) = 0$$

olur. Son eşitlikte (1.4.52) kullanılırsa

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, \bar{\phi}Z) = 0$$

elde edilir. M bir radikal transversal lightlike altmanifold olduğundan (1.3.19) eşitliğinden

$$g(A_{\bar{\phi}Y}X, \bar{\phi}Z) = 0$$

dir. Yani $A_{\bar{\phi}Y}X$ vektör alanının $S(TM)$ bileşeni yoktur.

Tersine $A_{\bar{\phi}Y}X$ vektör alanının $S(TM)$ bileşeni olmadığını kabul edelim. Yani $X \in \Gamma(TM),\ Y \in \Gamma(Rad\ TM)$ ve $Z \in \Gamma(S(TM))$ için $g(A_{\bar{\phi}Y}X, Z) = 0$ olsun. Burada (1.3.19) eşitliği kullanılırsa

$$\bar{g}(-\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y + \nabla^l_X \bar{\phi}Y + D^s(X, \bar{\phi}Y), Z) = 0$$

yani

$$\bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi}Y, Z) = 0$$

elde edilir. Bu durumda (1.3.16) ve (1.4.52) eşitliğinden

$$-\bar{g}(X,Y)\eta(Z) + \bar{g}(X,Z)\eta(Y) + \bar{g}(\bar{\phi}\bar{\nabla}_X Y, Z)$$
$$+\bar{g}(\bar{\phi}h^l(X,Y), Z) + \bar{g}(\bar{\phi}h^s(X,Y), Z) = 0$$

olur. O halde

$$\bar{g}(\bar{\phi}\nabla_X Y, Z) = 0$$

dır. (1.4.6) eşitliği göz önüne alınarak

$$\begin{aligned}
-\bar{g}(\bar{\phi}^2\nabla_X Y, \bar{\phi}Z) + \eta(\bar{\phi}\nabla_X Y)\eta(Z) &= 0 \\
\bar{g}(\nabla_X Y, \bar{\phi}Z) &= 0
\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlik $\nabla_X Y \in \Gamma(Rad\ TM)$ olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.3.8. $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *bir para-Sasakian manifold ve* $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ *de* $\bar{M}$ *nin bir radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda* $S(TM)$ *distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart her* $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ *için*

$$h^l(X, SY) = h^l(Y, SX)$$

olmasıdır.

İspat. Her $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ için (3.3.76) eşitliğinde X ve Y nin rolleri değiştirilirse

$$h^l(Y, SX) + \nabla^l_Y LX - L\nabla_Y X = 0 \tag{3.3.78}$$

elde edilir. Burada $LX = 0 = LY$ olacağından, (3.3.76) ve (3.3.78) eşitlikleri göz önüne alınarak

$$L\nabla_X Y - L\nabla_Y X = h^l(X, SY) - h^l(Y, SX) + \nabla^l_X LY - \nabla^l_Y LX$$

yani

$$L[X, Y] = h^l(X, SY) - h^l(Y, SX)$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.3.9. $(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ *bir para-Sasakian manifold ve* $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ *de* $\bar{M}$ *nin bir radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda* $Rad\,TM$ *distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart* $X, Y \in \Gamma(Rad\,TM)$ *için*

$$A_{LX}Y = A_{LY}X$$

olmasıdır.

İspat. Her $X, Y \in \Gamma(Rad\ TM)$ için (3.3.75) eşitliğinden

$$(\nabla_X S)Y = \bar{\phi}h^l(X,Y) + A_{LY}X$$

elde edilir. Buradan $X, Y \in \Gamma(Rad\ TM)$ için

$$-S\nabla_X Y = \bar{\phi}h^l(X,Y) + A_{LY}X \tag{3.3.79}$$

yazılabilir. Yukarıdaki eşitlikte X ve Y nin rolleri değiştirilirse

$$-S\nabla_Y X = \bar{\phi}h^l(Y,X) + A_{LX}Y \tag{3.3.80}$$

bulunur. (3.3.79) ve (3.3.80) eşitlikleri göz önüne alındığında

$$S\nabla_X Y - S\nabla_Y X = A_{LX}Y - A_{LY}X + \bar{\phi}h^l(Y,X) - \bar{\phi}h^l(X,Y)$$

olur. h^l simetrik olduğundan

$$S[X,Y] = A_{LX}Y - A_{LY}X$$

bulunur ve ispat tamamlanır. □

Teorem 3.3.10. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ de $\bar{M}$ nin bir radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda radikal distribüsyonun M üzerinde tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Gamma(Rad\ TM)$ için $A_{\bar{\phi}Y}X \in \Gamma(Rad\ TM)$ olmasıdır.*

İspat. Radikal transversal lightlike altmanifold tanımı göz önüne alındığında radikal distribüsyonunun tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart $X, Y \in \Gamma(Rad\,TM)$ ve $Z \in \Gamma(S(TM))$ için $g(\nabla_X Y, Z) = 0$ olmasıdır. (1.3.16) eşitliğinden

$$g(\nabla_X Y, Z) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, Z)$$

olur. $\bar{\nabla}$ konneksiyonu metrik konneksiyon olduğundan

$$g(\nabla_X Y, Z) = X\bar{g}(Y,Z) - \bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X Z)$$

yazılabilir. Buradan

$$g(\nabla_X Y, Z) = -\bar{g}(Y, \bar{\nabla}_X Z)$$

bulunur. Bu eşitlikte (1.4.6) eşitliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \bar{g}(\bar{\phi}Y, \bar{\phi}\bar{\nabla}_X Z) - \eta(Y)\eta(\bar{\nabla}_X Z) \\ &= \bar{g}(\bar{\phi}Y, \bar{\phi}\bar{\nabla}_X Z) \end{aligned}$$

dir. Böylece (1.4.52) den

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= \bar{g}(\bar{\phi}Y, -(\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Z + \bar{\nabla}_X \bar{\phi}Z) \\ &= \bar{g}(X, Z)\bar{g}(\bar{\phi}Y, \xi) - \bar{g}(X, \bar{\phi}Y)\eta(Z) + \bar{g}(\bar{\phi}Y, \bar{\nabla}_X \bar{\phi}Z) \\ &= -\bar{g}(X, \bar{\phi}Y)\eta(Z) + \bar{g}(\bar{\phi}Y, \bar{\nabla}_X \bar{\phi}Z) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu eşitlikte önce (1.3.16) daha sonra (1.3.27) eşitlikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= -\bar{g}(X, \bar{\phi}Y)\eta(Z) + \bar{g}(\bar{\phi}Y, \nabla_X \bar{\phi}Z + h^l(X, \bar{\phi}Z) + h^s(X, \bar{\phi}Z)) \\ &= -\bar{g}(X, \bar{\phi}Y)\eta(Z) + \bar{g}(\bar{\phi}Y, \nabla_X \bar{\phi}Z) \\ &= -\bar{g}(X, \bar{\phi}Y)\eta(Z) + \bar{g}(\bar{\phi}Y, \nabla^*_X \bar{\phi}Z + h^*(X, \bar{\phi}Z)) \\ &= -\bar{g}(X, \bar{\phi}Y)\eta(Z) + \bar{g}(\bar{\phi}Y, h^*(X, \bar{\phi}Z)) \\ &= -\bar{g}(X, \bar{\phi}Y)\eta(Z) + g(A_{\bar{\phi}Y}X, \bar{\phi}Z) \end{aligned}$$

olur. Öyleyse

$$g(\nabla_X Y, Z) = g(A_{\bar{\phi}Y}X, \bar{\phi}Z)$$

bulunur ve ispat tamamlanır. □

Teorem 3.3.11. *$(\bar{M}, \bar{\phi}, \xi, \eta, \bar{g})$ bir para-Sasakian manifold ve $(M, g, S(TM), S(TM^{\perp}))$ de $\bar{M}$ nin bir radikal transversal lightlike altmanifoldu olsun. Bu durumda ekran distribüsyonun M üzerinde tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ ve $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için $A^*_{\bar{\phi}N}X$ in $S(TM)$ de bileşeninin olmamasıdır.*

İspat. Radikal transversal lightlike altmanifold tanımı göz önüne alındığında ekran distribüsyonunun tamamen geodezik olması için gerek ve yeter şart her $X, Y \in \Gamma(S(TM))$ ve $N \in \Gamma(ltr(TM))$ için $g(\nabla_X Y, N) = 0$ olmasıdır. Buradan

$$g(\nabla_X Y, N) = \bar{g}(\bar{\nabla}_X Y, N)$$

olur. Böylece (1.4.52) eşitliğinden

$$\begin{aligned} g(\bar{\nabla}_X Y, N) &= \bar{g}((\bar{\nabla}_X \bar{\phi})Y - \bar{\nabla}_X \bar{\phi} Y), \bar{\phi} N) \\ &= -\bar{g}(X, Y)\eta(\bar{\phi} N) + \bar{g}(X, \bar{\phi} N)\eta(Y) - \bar{g}(\bar{\nabla}_X \bar{\phi} Y, \bar{\phi} N) \\ &= -g(\bar{\nabla}_X \bar{\phi} Y, \bar{\phi} N) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece (1.3.16) eşitliği göz önüne alınırsa

$$\begin{aligned} g(\bar{\nabla}_X Y, N) &= -g(\nabla_X \bar{\phi} Y + h^l(X, \bar{\phi} Y) + h^s(X, \bar{\phi} Y), \bar{\phi} N) \\ &= -g(h^l(X, \bar{\phi} Y), \bar{\phi} N) \\ &= -g(A^*_{\bar{\phi} N} X, \bar{\phi} Y) \end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

KAYNAKLAR

[1] Blair, D. (2002). *Riemannian geometry of contact and sympletic manifold,* Birkhauser, Boston, 260p.

[2] Sato, I. (1976). On a structure similar to the almost contact structure I. *Tensor N. S.* **30**, 219-224.

[3] Sato, I. (1977). On a structure similar to the almost contact structure II.*,* Tensor N. S., **31**, 199-205.

[4] Sasaki, S. (1960). On differentiable manifolds with certain structures with are closely related to almost contact structure I, *Tohoku Math. J.* **12 (2)**, 459-476.

[5] Blair, D. (1976). *Contact manifolds in Riemannian geometry.* Lectures Notes in Mathematics, Springer-Verlag, 146p.

[6] O'Neill, B. (1983). *Semi-Riemann geometry.* Academic Press Inc., 468p.

[7] Takahashi, T. (1969). Sasakian manifolds with pseudo-Riemannian metric. *Tohoku Math. J.* **12 (2)**, 644-653.

[8] Matsumoto, K. (1989). On Lorentzian paracontact manifolds. *Bulletin Yamagata Univ. Nat. Sci.* **12 (2)**, 161-166.

[9] Tripathi, M. M., Kılıç, E., Perktaş, S. Y., and Keleş, S. (2010). Indefinite almost paracontact metric manifolds. *International Journal of Mathematics and Mathematical Sci.* Art. ID 846195, 19pp.

[10] Kaneyuki, S., and Konzai, M. (1985). Paracomplex structure and affine symmetric spaces.*Tokyo J. Math.* **8**, 301-308.

[11] Zamkovoy, S. (2009). Canonical connection on paracontact manifolds. *Ann. Glob. Anal. Geo.* **36**, 37-60.

[12] Yano, K., and Kon, M. (1976). Anti-invariant submanifold. *Lect. Notes Pure Apll. Math.* 21, Marcel-Dekker, New York.

[13] Kon, M. (1976). Invariant submanifolds in Sasakian manifolds. *Math. Ann.* **219**, 277-290.

[14] Deprez, J. (1985). Semi-parallel surfaces in the Euclidean space. *J. of Geometry* **25**, 192-200.

[15] Arslan, K., Lumiste, Ü., Murathan, C., Özgür, C. (2000). 2-semi-parallel surfaces in space forms I. two particular cases. *Proc. Estonian Aca. Sci. Phys. Math.* **49 (3)**, 139-148.

[16] Yano, K., and Kon, M. (1984). *Structure on Manifolds,* World Scientific, 508p.

[17] Özgür, C., Murathan, C. (2009). On invariant submanifolds of Lorentzian para-Sasakian manifolds. *Arab J. Sci. Eng. Sect. A Sci.* **34 (2)**, 177-185.

[18] Bejancu, A. (1978). CR-submanifolds of a Kaehler manifold. *Proc. Amer. Math. Soc.* **69 (1)**, 135-142.

[19] Bejancu, A., and Papaghuic, N. (1981). Semi-invariant submanifolds of a Sasakian manifold. *An. St. Univ. Al. I. Cuza Iasi* **27**, 163-170.

[20] Kobayashi, M. (1981). CR-submanifolds of a Sasakian manifold. *Tensor* **35**, 297-307.

[21] Matsumoto, K., Shadid, M.H. and Mihai, I. (1994). Semi-invariant submanifolds of certain almost contact manifolds. *Yamagata Univ. Nat. Sci.* **13 (3)**, 183-192.

[22] Yano, K., and Kon, M. (1989). On contact CR-submanifolds. *J. Korean Math. Soc.* **26**, 231-262.

[23] Kim, J. S., Liu, X. and Tripathi, M. M. (2004). On semi-invariant submanifolds of nearly trans-Sasakian manifolds. *Int. J. Pure and Appl. Mat. Sci.* **1**, 15-34.

[24] Küpeli, D. N. (2010). *Singuler semi-Riemannian geometry.* Kluwer Academic Publisher, 192p.

[25] Duggal, K. L. and Bejancu A. (1996). *Lightlike submanifolds of semi-Riemannian manifolds and Applications*. Kluwer Academic Publisher, 300p.

[26] Bejancu, A. (1996). Null hypersurfaces semi-Euclidean spaces. *Saitama Math. J.* **14**, 25-40.

[27] Güneş, R., Şahin, B., Kılıç, E. (2003). On lightlike hypersurfaces semi-Riemannian space form. *Turkish J. Math.* **27**, 283-297.

[28] Ioan, C. I. (1997). Totally umbilical lightlike submanifolds. *Tensor N. S.* **58**, 18-30.

[29] Duggal, K. L. and Bejancu, A. (1993). Lightlike CR-hypersurfaces of indefinite Kaehler manifolds. *Acta Apll. Math.* **39**, 171-190.

[30] Duggal, K. L. and Jin H. (2003). Totally umbilical lightlike submanifolds. *Kodai Math. J.* **26**, 49-68.

[31] Şahin, B. (2007). Lightlike hypersurface of semi-Euclidean spaces satisfying curvature conditions of semi-symmetric type. *Turkish J. Math.* **31**, 139-162.

[32] Kang, T. H. , Jung, S. D., Kim, B. H. Pak, H. K., Pak, J. S. (2003). Lightlike hypersurfaces of indefinite Sasakian Manifolds. *Indian J. Pure Appl. Math.* **34 (9)**, 1369-1380.

[33] Duggal, K. L. and Şahin, B. (2007). Lightlike submanifolds of indefinite Sasakian Manifolds. *Int. J. Math. and Math. Sci.* DOI=10.1155/2007/57585.

[34] Duggal, K. L. and Şahin, B. (2009). Generalized Cauchy Riemannian lightlike submanifolds of indefinite Sasakian manifolds. *Acta Math. Hungarica* **122(1-2)**, 45-58.

[35] Lungiambudila, O., Massamba, F., and Tossa, J. (2010). Symmetry properties of lightlike hypersurfaces in indefinite Sasakian manifold. *SUT Journal of Math.* **46 (2)**, 177-204.

[36] Duggal, K. L. and Şahin, B. (2005). Generalized screen Cauchy Riemannian lightlike submanifolds. *Acta Math. Hungarica* **106 (1-2)**, 137-165.

[37] Hacısalihoğlu, H. H. (1983). *Diferensiyel Geometri.* İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Yayınları No. 2, 207p.

[38] Brickell, F. and Clark, R. S. (1970). *Diffrentiable Manifold.* Van Nostrand London, 289p.

[39] Chen, B. Y. (1973). *Geometry of submanifolds.,* Pure and Apllied Mathematics, Marcel Dekker Inc., New York, 298p.

[40] Kaneyuki, S., Williams, F. L. (1985). Almost paracontact and parahodge structure on manifolds. *Nagoya Math. J.* **99**, 173-177.

[41] Welyczko, J. (2012). Para CR-structure on almost paracontact metric manifolds. arxiv:1202-6382v2.

[42] Zamkovoy, S. (2008). Para-Sasakian manifolds with a constant paraholomorphic section curvature. arXiv:0812.1676v1.

[43] Bejancu, A. (1986). *Geometry of CR-Submanifolds*. D. Reidel Publ. Co., Holland, 169p.

[44] Duggal, K. L. and Şahin, B. (2010). *Differential Geometry of Lightlike Submanifolds,* Frontiers in Mathematics, 475p.

ÖZGEÇMİŞ

Ad Soyad: Bilal Eftal ACET

Doğum Yeri ve Tarihi: Malatya / 03.07.1984

Adres: Altınşehir Mah. Sefa-4 Sitesi A Blok No: 12 Merkez / ADIYAMAN

E-Posta: eacet@adiyaman.edu.tr

Lisans: İnönü Üniversitesi Fen- Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü

Yüksek Lisans: Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı

Mesleki Deneyim ve Ödüller:

Yayın Listesi:

Yıldız A., Acet B. E., "On Weak Symmetries of (κ,μ)-Contact Metric Manifolds", Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 19 (2009), 41-46.

Yıldız A., De U. C., Acet B. E.,"On Kenmotsu Manifolds Satisfying Certain Curvature Condition" SUT Journal of Mathematics, 2 (2009), 89-101.

Yıldız A., Turan M., Acet B. E., "On Para-Sasakian Manifolds", Dumlupınar Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi, 24 (2011), 27-34.

Yıldız A., Turan M., Acet B. E., "On Three Dimensional Lorentzian α-Sasakian Manifolds", Bulletin of Mathematical Analysis And Applications, 3(2009), 90-98.

De, U. C., Yıldız A., Turan M., Acet B. E., "3-Dimensional Quasi-Sasakian Manifolds With Semi-Symmetric Non-Metric Connection" Hacettepe Journal of Math. and Statistics, 41 (2012), 127-137.(SCI-EXP)

Acet B. E., Kılıç E., Perktaş S. Y., “Some Curvature Conditions on a Para-Sasakian Manifold With Canonical Paracontact Connection”, International Journal of Math. and Math. Sciences, Vol 2012, Article ID 395462, 24 pages.

Acet B. E., Perktaş, S. Y., Kılıç, E., "Kenmotsu Manifold with Generalized Tanaka-Webster Connection", Adıyaman Journal of Science, 3, 2013,79-93.

TEZDEN TÜRETİLEN YAYINLAR / SUNUMLAR

Yüksel Perktaş S., Kılıç E., **Acet B. E.**, “Lightlike Hypersurfaces of a Para-Sasakian Space Form”, Gulf Journal of Math., 2(2), 7-18, 2014.

Acet B. E., Yüksel Perktaş S., Kılıç E., On Lightlike Geometry of Para-Sasakian Manifolds, Scientific World Journal, Volume 2014 (2014), Article ID 696231, 12 pages.(SCI-EXP)