

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**1-BOYUTLU ROSENAU DENKLEMİNİN
NÜMERİK ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

Zeynep ÖRNEK

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sibel ÖZER

AĞUSTOS 2021

**T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**1-BOYUTLU ROSENAU DENKLEMİNİN
NÜMERİK ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE**



YÜKSEK LİSANS TEZİ

**Zeynep ÖRNEK
(36183614063)**

Matematik Ana Bilim Dalı

Tez Danışmanı: Dr. Öğr. Üyesi Sibel ÖZER

AĞUSTOS 2021

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında danışmanlığımı üstlenen, tezin hazırlanması sürecinde yardımlarını ve desteklerini devamlı olarak üzerimde hissettiğim çok kıymetli hocam Sayın Dr.Öğrt. Üyesi Sibel ÖZER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Tezin hazırlanması sürecinde karşılaştığım her türlü güçlüğü üstesinden gelmem için bana yol gösteren, bilgi ve görüşlerinden istifade ettiğim hocalarım, Sayın Prof. Dr. Selçuk KUTLUAY'a, Doç. Dr. Nuri Murat YAĞMURLU'ya ve özellikle nümerik şemaların yazılması ve çalıştırılmasında büyük katkılarda bulunan Doç. Dr. Yusuf UÇAR'a ayrıca tez yazımı sürecinde yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Mustafa Kemal ÖZDEMİR'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Eğitim hayatım boyunca sabır ve sevgiyle büyük fedakarlıklar yapan, maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen değerli AİLEME sonsuz teşekkürlerimi sunarım.



ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “1-Boyutlu Rosenau Denkleminin Nümerik Çözümü Üzerine ” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Zeynep ÖRNEK



İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ.....	i
ONUR SÖZÜ.....	ii
İÇİNDEKİLER.....	iii
ÇİZELGELER DİZİNİ.....	iv
ŞEKİLLER DİZİNİ.....	vi
SEMBOLLER VE KISALTMALAR.....	vii
ÖZET.....	viii
ABSTRACT.....	ix
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	3
2.1 Korunumlu Sonlu Fark Yaklaşımı.....	3
2.2 Rosenau Denklemi.....	4
2.2.1 Model Problemler.....	5
3. ROSENAU DENKLEMİNİN KORUNUMLU SONLU FARK YAKLAŞIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMÜ.....	6
3.1 Lineerleştirme 1 (LİN-1).....	6
3.1.1 Kararlılık Analizi.....	9
3.1.2 Nümerik Sonuçlar.....	9
3.2 Lineerleştirme 2:Rubin-Graves (LİN-2).....	12
3.2.1 Nümerik Sonuçlar.....	14
3.3 Lineerleştirme 3 (LİN-3).....	16
3.3.1 Nümerik Sonuçlar.....	18
4. ZAMANA GÖRE PARÇALANAN ROSENAU DENKLEMİNİN KORUNUMLU SONLU FARK YAKLAŞIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMÜ.....	22
4.1 Lineerleştirme 1 (LİN-1).....	23
4.1.1 Kararlılık Analizi.....	25
4.1.2 Nümerik Sonuçlar.....	26
4.2 Lineerleştirme 2:Rubin-Graves (LİN-2).....	28
4.2.1 Nümerik Sonuçlar.....	31
4.3 Lineerleştirme 3 (LİN-3).....	33
4.3.1 Nümerik Sonuçlar.....	35
5. KONUMA GÖRE PARÇALANAN ROSENAU DENKLEMİNİN KORUNUMLU SONLU FARK YAKLAŞIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMÜ.....	39
5.1 Lineerleştirme 1 (LİN-1).....	40
5.1.1 Kararlılık Analizi.....	42
5.1.2 Nümerik Sonuçlar.....	42
5.2 Lineerleştirme 2:Rubin-Graves (LİN-2).....	44
5.2.1 Nümerik Sonuçlar.....	46
5.3 Lineerleştirme 3 (LİN-3).....	48
5.3.1 Nümerik Sonuçlar.....	51
6. SONUÇLAR.....	54
KAYNAKLAR.....	57



ÇİZELGELER DİZİNİ

Çizelge 3.1 : Problem 1'in KSF LİN-1 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 10, 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.	10
Çizelge 3.2 : Problem 1'in KSF LİN-1 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001$ için nümerik ve tam çözümleri.	11
Çizelge 3.3 : Problem 1'in KSF LİN-1 $T = 1$ zamanında $k = h^2$ için hata normlarının kıyaslanması.	11
Çizelge 3.4 : Problem 2'nin KSF LİN-1 ile $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.	12
Çizelge 3.5 : Problem 1'in KSF LİN-2 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 10, 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.	15
Çizelge 3.6 : Problem 1'in KSF LİN-2 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001$ için nümerik ve tam çözümleri.	15
Çizelge 3.7 : Problem 1'in KSF LİN-2 ile $T = 1$ anında $k = h^2$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.	15
Çizelge 3.8 : Problem 2'nin KSF LİN-2 ile $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.	16
Çizelge 3.9 : Problem 1'in KSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 10, 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.	19
Çizelge 3.10 : Problem 1'in KSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001$ için nümerik ve tam çözümleri.	19
Çizelge 3.11 : Problem 1'in KSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $k = h^2$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.	20
Çizelge 3.12 : Problem 2'nin KSF LİN-3 ile $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.	20
Çizelge 4.1 : Problem 1'in ZKSF LİN-1 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 10, 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.	27
Çizelge 4.2 : Problem 1'in ZKSF LİN-1 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.1, 0.01, 0.001$ için nümerik ve tam çözümleri.	27
Çizelge 4.3 : ZKSF LİN-1 şeması ile Problem 1'in $T = 1$ zamanında $k = h^2$ için hata normlarının kıyaslanması.	27
Çizelge 4.4 : ZKSF LİN-1 şeması ile Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.	28
Çizelge 4.5 : Problem 1'in ZKSF LİN-2 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 10, 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.	31
Çizelge 4.6 : Problem 1'in ZKSF LİN-2 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.1, 0.01, 0.001$ için nümerik ve tam çözümleri.	32
Çizelge 4.7 : ZKSF LİN-2 şeması ile Problem 1'in $T = 1$ zamanında $k = h^2$ için hata normlarının kıyaslanması.	32
Çizelge 4.8 : ZKSF LİN-2 şeması ile Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.	33
Çizelge 4.9 : Problem 1'in ZKSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 10, 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.	36
Çizelge 4.10 : Problem 1'in ZKSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.1, 0.01, 0.001$ için nümerik ve tam çözümleri.	37

Çizelge 4.11: ZKSF LİN-3 şeması ile Problem 1'in $T = 1$ zamanında $k = h^2$ için hata normlarının kıyaslanması.....	37
Çizelge 4.12: ZKSF LİN-3 şeması ile Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hata normlarının kıyaslanması.....	38
Çizelge 5.1 : Problem 1'in KKSF LİN-1 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.	43
Çizelge 5.2 : Problem 1'in KKSF LİN-1 şeması ile $T = 1$ zamanında $k = h^2$ için hata normlarının kıyaslanması.....	43
Çizelge 5.3 : KKSF LİN-1 şeması ile Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.	44
Çizelge 5.4 : Problem 1'in KKSF LİN-2 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.	47
Çizelge 5.5 : Problem 1'in KKSF LİN-2 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001$ için nümerik ve tam çözümleri.	47
Çizelge 5.6 : Problem 1'in KKSF LİN-2 şeması ile $T = 1$ zamanında $k = h^2$ için hata normlarının kıyaslanması.....	47
Çizelge 5.7 : KKSF LİN-2 şeması ile Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.	48
Çizelge 5.8 : Problem 1'in KKSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.	51
Çizelge 5.9 : Problem 1'in KKSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001$ için nümerik ve tam çözümleri.	52
Çizelge 5.10: Problem 1'in KKSF LİN-3 şeması ile $T = 1$ zamanında $k = h^2$ için hata normlarının kıyaslanması.....	52
Çizelge 5.11: KKSF LİN-3 şeması ile Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.	53
Çizelge 6.1 : Problem 1'e uygulanan KSF, ZKSF, KKSF şemalarının LİN-1, LİN-2, LİN-3 ile $k = h^2$ için $T = 1$ anında elde edilen L_2 hata normlarının karşılaştırması	54
Çizelge 6.2 : Problem 1'e uygulanan KSF, ZKSF, KKSF şemalarının LİN-1, LİN-2, LİN-3 ile $k = h^2$ için $T = 1$ anında elde edilen L_∞ hata normlarının karşılaştırması	55
Çizelge 6.3 : Problem 2'ye uygulanan KSF, ZKSF, KKSF şemalarının LİN-1, LİN-2, LİN-3 ile $k = h^2$ için $T = 10$ anında elde edilen L_2 hata normlarının karşılaştırması	56
Çizelge 6.4 : Problem 2'ye uygulanan KSF, ZKSF, KKSF şemalarının LİN-1, LİN-2, LİN-3 ile $k = h^2$ için $T = 10$ anında elde edilen L_∞ hata normlarının karşılaştırması	56

ŞEKİLLER DİZİNİ

Şekil 3.1 : Problem 1'in KSF LİN-1 ile $T = 0.5$, $T = 1$ zamanında $J = 20$ ve $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	11
Şekil 3.2 : Problem 2'nin $T = 10$ zamanında KSF LİN-2 ile $J = 16$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	12
Şekil 3.3 : Problem 1'in KSF LİN-2 ile $T = 0.5$ ve $T = 1$ zamanlarında $J = 80$, $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	16
Şekil 3.4 : Problem 2'nin KSF LİN-2 ile $T = 10$ zamanında $J = 32$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	17
Şekil 3.5 : Problem 1'in KSF LİN-3 ile $T = 0.5$, $T = 1$ zamanında $J = 20$ ve $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	20
Şekil 3.6 : Problem 2'nin KSF LİN-2 ile $T = 10$ zamanında $J = 32$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	21
Şekil 4.1 : Problem 1'in ZKSF LİN-1 ile $T = 0.5$ ve $T = 1$ zamanlarında $J = 20$, $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	28
Şekil 4.2 : Problem 2'nin ZKSF LİN-2 ile $T = 10$ zamanında $J = 16$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	28
Şekil 4.3 : Problem 1'in ZKSF LİN-2 ile $T = 0.5$ ve $T = 1$ zamanlarında $J = 20$, $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	32
Şekil 4.4 : Problem 2'nin $T = 10$ zamanında ZKSF LİN-2 ile $J = 32$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	33
Şekil 4.5 : Problem 1'in ZKSF LİN-3 ile $T = 0.5$, $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	36
Şekil 4.6 : Problem 2'nin ZKSF LİN-3 ile $T = 10$ zamanında $J = 32$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	38
Şekil 5.1 : Problem 1'in KKSF LİN-1 ile $T = 0.5$, $T = 1$ zamanında $J = 80$ ve $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	44
Şekil 5.2 : Problem 2'nin KKSF LİN-2 ile $T = 10$ zamanında $J = 16$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	44
Şekil 5.3 : Problem 1'in KKSF LİN-2 ile $T = 0.5$, $T = 1$ zamanında $J = 80$ ve $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	48
Şekil 5.4 : Problem 2'nin $T = 10$ zamanında KKSF LİN-2 ile $J = 32$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	49
Şekil 5.5 : Problem 1'in KKSF LİN-3 ile $T = 0.5$, $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	52
Şekil 5.6 : Problem 2'nin $T = 10$ zamanında KKSF LİN-2 ile $J = 16$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.	53

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

- h** : Konum Adım Uzunluğu
k : Zaman Adım Uzunluğu
KdV : Korteweg-De Vries Equation
LİN-1 : Lineerleştirme 1
LİN-2 : Lineerleştirme 2
LİN-3 : Lineerleştirme 3
KSF : Korunumlu Sonlu Fark
ZKSF : Zamana Göre Parçalanan Korunumlu Sonlu Fark
KKSF : Konuma Göre Parçalanan Korunumlu Sonlu Fark



ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

1-BOYUTLU ROSENAU DENKLEMİNİN NÜMERİK ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

ZEYNEP ÖRNEK

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Ana Bilim Dalı

59+x sayfa

2021

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Sibel ÖZER

Altı bölümden oluşan bu yüksek lisans tezinin birinci bölümünde, tezde göz önüne alınan Rosenau denkleminin tarihçesi hakkında kısaca bilgi verildikten sonra tezin amacından bahsedildi. İkinci bölümde, tezde kullanılan korunumlu sonlu fark yaklaşımı sunuldu ve Rosenau denkleminiyle ilgili bilgi verildikten sonra tez çalışmasında göz önüne alınan model problemler tanıtıldı. Üçüncü bölümde korunumlu sonlu fark yaklaşımı uygulanan Rosenau denkleminde lineer olmayan terim yerine 3 farklı lineerleştirme tekniği kullanıldı ve elde edilen nümerik şemalar daha önceki bölümde tanıtılan model problemlere uygulandı. Şemaların uygulanmasıyla hesaplanan nümerik sonuçlar çizelge ve grafikler halinde verildi. Elde edilen nümerik şemaların kararlılık analizleri benzer olacağından sadece LİN-1 şemasının kararlılık analizi von-Neumann yöntemiyle incelendi. Dördüncü bölümde, Rosenau denklemi zamana göre parçalanarak lineer olmayan terim yerine Bölüm 3'te verilen lineerleştirme teknikleri kullanılarak korunumlu sonlu fark yaklaşımıyla nümerik şemalar elde edildi. Elde edilen nümerik şemalar Bölüm 2'de verilen model problemlere uygulanarak nümerik sonuçlar hesaplandı. Nümerik sonuçlar çizelge ve grafikler halinde verildi. Nümerik şemalardan sadece LİN-1 ile elde edilen şemanın kararlılık analizi von Neumann yöntemiyle incelendi. Beşinci bölümde, $u_{xx} = v$ dönüşümü uygulanarak elde edilen konuma göre parçalanmış Rosenau denkleminde önceki bölümlerde kullanılan lineerleştirme teknikleri ve korunumlu sonlu fark yaklaşımı uygulanarak nümerik şemalar elde edildi. Elde edilen nümerik şemalar Bölüm 2'de verilen model problemlere uygulanarak nümerik sonuçlar bulundu. Nümerik sonuçlar çizelge ve grafikler halinde sunuldu. Bu bölümde de sadece LİN-1 ile elde edilen şemanın kararlılık analizi von-Neumann yöntemiyle incelendi. Son olarak altıncı bölümde, uygulanan tüm yöntem ve lineerleştirme tekniklerinden elde edilen sonuçlar her bir model problem için kendi içerisinde çizelgeler halinde karşılaştırılarak öne çıkan yöntem ve lineerleştirmeler sunuldu.

Anahtar Kelimeler: Rosenau denklemi, Korunumlu Sonlu Fark Yöntemi, Lineerleştirme Teknikleri.

ABSTRACT

Master Thesis

ON THE NUMERICAL SOLUTION OF THE 1-DIMENSIONAL ROSENAU EQUATION

Zeynep ÖRNEK

Inonu University
Graduate School of Nature and Applied Sciences
Department of Mathematics

59+x pages

2021

Supervisor: Assist. Prof. Dr. Sibel ÖZER

In the first chapter of this master's thesis, which consists of six chapters, the purpose of the thesis is mentioned after giving brief information about the history of the Rosenau equation considered in the thesis. In the second chapter, the conservative finite difference approach used in the thesis is introduced, and after giving information about the Rosenau equation, the model problems considered in the thesis study are introduced. In the third chapter, the conservative finite difference approach is applied in the Rosenau equation, instead of the non-linear term, 3 different linearization techniques are used and the obtained numerical schemes are applied to the model problems introduced in the previous chapter. The numerical results obtained by applying the schemes are given in tables and graphics. Since the stability analyzes of the obtained numerical schemes will be similar, stability analysis of the scheme obtained only with LIN-1 is examined by the von Neumann method. In the fourth chapter, the Rosenau equation was split by time and instead of the non-linear term, the linearization techniques given in Chapter 3 are used to obtain numerical schemes with conservative finite difference approach. Numerical results are calculated by applying the obtained numerical schemes to the model problems given in Chapter 2. Numerical results are given in tables and graphs. The stability analysis of the numerical schemes obtained only with LIN-1 is analyzed by the von Neumann method. In the fifth chapter, numerical schemes are obtained by applying linearization techniques and conservative finite difference approach given in the previous chapters to the Rosenau equation split by position obtained by applying the $u_{xx} = v$ transformation. Numerical results were found by applying the obtained numerical schemes to the model problems given in Chapter 2. The numerical results are presented in tables and graphs. In this section, the stability analysis of the scheme obtained by LIN-1 is analyzed using the von Neumann method. Finally, the results obtained from all methods and linearization techniques applied in the sixth chapter are compared within themselves in graphs for each model problem, and prominent methods and linearizations are presented.

Keywords: Rosenau equation, Conservative Finite Difference Method, Linearization Techniques.

1. GİRİŞ

Doğada karşılaşılan olaylar fiziksel yasalar yardımıyla matematiksel olarak ifade edilmek istendiğinde çoğunlukla diferansiyel denklemler veya diferansiyel denklem sistemleri ile karşılaşılır. Karşılaşılan bu diferansiyel denklemler (veya diferansiyel denklem sistemleri) lineer veya nonlinear olabilir ve tam çözümleri bilinen mevcut yöntemler yardımıyla elde edilemeyebilir. Diferansiyel denklemlerin tam çözümlerinin elde edilemediği durumlarda nümerik çözüm yöntemleri ile yaklaşık olarak çözümleri elde edilmeye çalışılır. En çok bilinen nümerik çözüm yöntemleri olarak sonlu fark ve sonlu eleman yöntemleri verilebilir. Günümüzde, bilgisayarların işlem yapabilme hızlarının ve veri depolama kapasitelerinin artmasından dolayı tam çözümü bilinen diferansiyel denklemlerin sonlu fark veya sonlu elemanlar yöntemleriyle bulunan yaklaşık çözümlerinin oldukça küçük hatalar ile elde edildiği görülmektedir. Bu ise, tam çözümü bilinmeyen diferansiyel denklemlerin sonlu fark veya sonlu elemanlar yöntemleriyle elde edilen yaklaşık çözümlerinin güvenilirliğini artırmaktadır.

Doğa olayları arasında yer alan aşağı yukarı veya ileri geri hareketler dalga olarak isimlendirilir ve dalgaların araştırmacılar tarafından oldukça fazla şekilde ilgilenilen konulardan biri olduğu görülmektedir. Dalganın davranışını açıklamak için kullanılan diferansiyel denklemlerden bazıları Korteweg-de Vries (KdV) denklemi, düzenli uzun dalga "Regularized Long Wave" (RLW) denklemi, Rosenau denklemi, Rosenau-KdV denklemi, Rosenau-RLW denklemi vd. olarak verilebilir. 1895 yılında Diederik Korteweg ve Gustav de Vries [1] tarafından verilen ve kendi isimleriyle tanınan KdV denklemi, μ bilinen bir sabit olmak üzere

$$u_t + \mu u_{xxx} + uu_x = 0 \quad (1.0.1)$$

şeklinde literatürde yerini aldı. KdV denklemi, sığ su yüzeyinde oluşan dalganın davranışını tanımlamaktadır. Bu denklemde uu_x terimi nonlinearliği, u_{xxx} terimi dispersif etkiyi temsil etmektedir. Nonlinearlik dalganın dikleşerek şeklinin bozulmasına neden olurken dispersif etki dalganın tepesinin yassılaşmasına (düzleşmesine) sebep olmaktadır. Dalgaların tek yönlü yayılımı KdV denklemi ile tanımlanmakta olup dalga-dalga ve dalga-duvar etkileşimlerini tanımlamak mümkün değildir. Ayrıca yüksek genlikli dalgaların şekli ve davranışı da bu denklemle yeterince iyi ifade edilemez. KdV denkleminin bu zayıf yönlerinin giderilmesi amacıyla 1988 yılında Rosenau tarafından

$$u_t + u_x + u_{xxxxt} + uu_x = 0 \quad (1.0.2)$$

biçimindeki Rosenau denklemi önerilmiştir [2]. Rosenau denkleminin çözümünün varlığı ve tekliği Park [3] tarafından kanıtlanmıştır. Chung ve Ha [4], Galerkin sonlu elemanlar yöntemini kullanarak Rosenau denkleminin nümerik olarak çözümünü elde etmişlerdir. Chung [5], Rosenau denklemi için bir lineer olmayan korunumlu sonlu fark şeması önermiş ve önerdiği şemanın nümerik çözümünün varlığı ve tekliğini göstermiştir. Lee ve Ahn [6], Rosenau denklemi için ayrık Galerkin tipi yaklaşımları incelemişlerdir. Chung ve Pani [7], Rosenau denkleminin nümerik çözümünü elde etmek için Galerkin sonlu eleman yöntemini kullanmışlardır. Omrani ve arkadaşları [8], üç adım korunumlu sonlu fark şeması ile Rosenau denkleminin nümerik çözümünü elde etmişlerdir. Hu ve Zheng [9], korunumlu sonlu fark yöntemini kullanarak biri nonlineer diğeri lineer olmak üzere iki şema sunarak Rosenau denkleminin nümerik çözümünü elde etmişlerdir. Atouani ve Omrani [10], yüksek mertebeli yeni bir korunumlu sonlu fark şeması elde ederek Rosenau denkleminin nümerik çözümünü elde etmiştir. Atouani ve arkadaşları [11], homojen olmayan Rosenau denklemi için Galerkin sonlu eleman metodunu uygulayarak nümerik çözüm elde etmişlerdir. Erbay ve arkadaşları [12], Petviashvili iterasyon metodunu kullanarak Rosenau denkleminin soliter dalga çözümlerini nümerik olarak elde etmişlerdir.

Bu tezde, Rosenau denklemine, zamana göre parçalanan Rosenau denklemine ve konuma göre parçalanan Rosenau denklemine korunumlu sonlu fark yöntemi uygulandı. Daha sonra, bu denklemlerdeki $(u^p)_x$ nonlineer terimine tezde LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 olarak isimlendirilen farklı lineerleştirme teknikleri uygulanarak elde edilen nümerik şemalar yardımıyla model problemlerin nümerik çözümleri bulundu. Lineerleştirme teknikleri uygulanarak elde edilen nümerik çözümlerin noktasal değerleri ile hata normları çizelgeler halinde verildi ve grafikler çizildi. Ayrıca, hata normları mevcut çalışmalarla karşılaştırıldı. LİN-1 lineerleştirme tekniği uygulanarak elde edilen nümerik şemaların kararlılık analizleri von-Neumann yöntemi ile incelendi.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Korunumlu Sonlu Fark Yaklaşımı

Başlangıç ve sınır koşulları verilen bir kısmi diferansiyel denklemin nümerik çözüm yöntemlerinden biri sonlu fark yöntemleridir. Sonlu fark yöntemlerinin doğruluğunun kolayca hesaplanabilir olması ve diğer yöntemlere göre daha az işleme ihtiyaç duyması tercih edilme sebeplerinden bazıları olarak verilebilir [13]. Sonlu fark yöntemleri bir kısmi diferansiyel denkleme uygulanırken öncelikle ele alınan başlangıç-sınır değer probleminin çözüm bölgesi sonlu sayıda genellikle dikdörtgensel veya karesel kafeslere bölünür. Yöntem bu kafeslerin kesişim noktası olan düğüm noktasında problemin nümerik çözümünü hesaplama esasına dayanır. Bu amaçla diferansiyel denklemde ve sınır şartlarında yer alan kısmi türevli terimler yerine Taylor serisi kullanılarak elde edilen sonlu fark yaklaşımları yazılır. Böylece başlangıç-sınır değer problemi cebirsel denklem sistemine dönüştürülmüş olur. Elde edilen cebirsel denklem sisteminde çözüm bölgesi dışında kalan hayali noktalar problemin sınır şartlarına uygun sonlu fark yaklaşımları yazılarak yok edilir. Daha sonra yöntemin yakınsaklığı incelenir. Lax'ın denklik teoremine göre bir sonlu fark yönteminin yakınsak olması için gerek ve yeter şart kararlı ve tutarlı olmasıdır. Sonlu fark yöntemleri Taylor serisinden yararlanılarak oluşturulduğundan çoğunlukla tutarlıdır. Dolayısıyla sadece yöntemin kararlılığını incelemek yeterlidir. Son olarak cebirsel denklem sistemi uygun bir yöntemle çözülerek göz önüne alınan başlangıç-sınır değer probleminin yaklaşık çözümleri elde edilir [14, 15].

Şimdi bu tez çalışması boyunca kullanılacak notasyonlardan ve korunumlu sonlu fark yaklaşımından bahsedelim. x ve t sırasıyla konum ve zaman değişkenlerini göstermek üzere problemin çözüm bölgesi $(x, t) \in [x_l, x_r] \times [0, T]$ olsun. J ve N bölüntü sayılarını temsil etmek üzere konum yönündeki adım uzunluğu $\Delta x = h = (x_r - x_l) / J$ ve zaman yönündeki adım uzunluğu $\Delta t = k = T / N$ olmak üzere kafes üzerindeki (x_j, t_n) düğüm noktaları

$$x_j = x_l + jh, \quad j = 0, 1, 2, \dots, J$$

$$t_n = nk, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N$$

şeklinindedir. Temsili bir $P(x_j, t_n)$ düğüm noktası üzerinde $u(x, t)$ fonksiyonunun yaklaşık değeri için u_j^n ile gösterilecektir. Yani $u(x_j, t_n) = u_j^n$ gösterimi kullanılacaktır.

Korunumlu sonlu fark yaklaşımı ile klasik sonlu fark yaklaşımındaki düşük mertebeli türevler arasında farklılık görülmemektedir. Ancak yüksek mertebeden türevler incelendiğinde problemin çözüm bölgesi dışında kalan hayali nokta sayısını azaltması böylece problemi çözmek için daha az sayıda sınır şartına ihtiyaç duyması ve hata mertebesinin yüksek olması gibi sebeplerden dolayı korunumlu sonlu fark yaklaşımları tercih edilmektedir. $u(x, t)$ fonksiyonunun x konum değişkenine göre (x_j, t_n) düğüm noktasındaki ileri, geri ve merkezi sonlu fark yaklaşımları için hatalar ihmal edilerek

$$\begin{aligned}(u_j^n)_x &\approx \frac{u_{j+1}^n - u_j^n}{h} \\ (u_j^n)_{\bar{x}} &\approx \frac{u_j^n - u_{j-1}^n}{h} \\ (u_j^n)_{\hat{x}} &\approx \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h}\end{aligned}\quad (2.1.1)$$

gösterimleri ve t zaman değişkenine göre ileri sonlu fark yaklaşımı için

$$(u_j^n)_t \approx \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k}\quad (2.1.2)$$

gösterimi ayrıca ardışık iki zaman seviyesinin ortalaması için

$$u_j^{n+1/2} = \frac{u_j^{n+1} + u_j^n}{2}\quad (2.1.3)$$

gösterimi kullanılacaktır [9, 10]. Bu yaklaşımlar kullanılarak (1.0.2) ile verilen Rosenau denkleminin korunumlu sonlu fark şemaları elde edilecektir.

2.2 Rosenau Denklemi

Bu tezde

$$u_t + au_{xxxxt} + bu_x + c(u^p)_x = g(x, t) \quad x \in [x_l, x_r], \quad t \in [0, T]\quad (2.2.1)$$

Rosenau denkleminin

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [x_l, x_r]\quad (2.2.2)$$

başlangıç şartı ve

$$\left. \begin{aligned}u(x_l, t) &= u(x_r, t) = 0, \\ u_x(x_l, t) &= u_x(x_r, t) = 0, \\ u_{xx}(x_l, t) &= u_{xx}(x_r, t) = 0,\end{aligned} \right\}, \quad t \in (0, T]\quad (2.2.3)$$

sınır şartlarıyla korunumlu sonlu fark yöntemiyle nümerik çözümü elde edilecektir. Bu denklemden, a , b ve c reel sayılar, $p \geq 2$ olacak şekilde bir tamsayı ve u_0 ve $g(x, t)$ sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca, $u(x, t)$ dalganın profili, u_t lineer oluşum terimi, u_x adveksiyon terimi, u_{xxxxt} dissipative terimidir [2].

2.2.1 Model Problemler

Bu kısımda, (2.2.1) ile verilen Rosenau denklemi ile birlikte göz önüne alınacak farklı başlangıç ve sınır şartına sahip biri nonhomojen diğeri homojen olmak üzere iki model problem tanımlandı.

İlk problem olarak, (2.2.1) denkleminde $p = 2$, $a = 1$, $b = 1$ ve $c = 1/2$ alınarak

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + \frac{1}{2} (u^2)_x = g(x,t), \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,1] \quad (2.2.4)$$

şeklinde elde edilen Rosenau denklemi

$$u(x,0) = x^3(1-x^3), \quad x \in [0,1] \quad (2.2.5)$$

başlangıç şartı ve

$$\left. \begin{aligned} u(0,t) &= u(1,t) = 0, \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0, \\ u_{xx}(0,t) &= u_{xx}(1,t) = 0, \end{aligned} \right\}, \quad t \in [0,T] \quad (2.2.6)$$

sınır şartları ile ele alınacaktır. Burada

$$\begin{aligned} g(x,t) &= (x^6 - 9x^5 + 18x^4 - 13x^3 + 36x^2 - 360x + 72)e^{-t} \\ &+ (6x^{11} - 33x^{10} + 75x^9 - 90x^8 + 60x^7 - 21x^6 + 3x^5)e^{-2t} \end{aligned} \quad (2.2.7)$$

dir. Problem 1'in tam çözümü

$$u(x,t) = x^3(1-x^3)e^{-t} \quad (2.2.8)$$

şeklindedir [11].

Problem 2

(2.2.1) denkleminde $p = 4$, $a = 1$, $b = 1$ ve $c = 1$ alınarak

$$u_t + u_{xxxxt} + u_x + (u^4)_x = 0 \quad (x,t) \in [0,1] \times [0,T] \quad (2.2.9)$$

şeklinde elde edilen Rosenau denklemi

$$u(x,0) = x^4(1-x)^4, \quad x \in ([0,1]) \quad (2.2.10a)$$

başlangıç şartı ve

$$\left. \begin{aligned} u(0,t) &= u(1,t) = 0, \\ u_x(0,t) &= u_x(1,t) = 0, \\ u_{xx}(0,t) &= u_{xx}(1,t) = 0, \end{aligned} \right\}, \quad t \in [0,T] \quad (2.2.11)$$

sınır şartları ile ele alınacaktır. Bu problemin tam çözümü mevcut değildir [9].

3. ROSENAU DENKLEMİNİN KORUNUMLU SONLU FARK YAKLAŞIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde, (2.2.1) ile verilen Rosenau denkleminin Bölüm 2’de verilen korunumlu sonlu fark yaklaşımları kullanılarak

$$(u_j^n)_t + a(u_j^n)_{xx\bar{x}\bar{t}} + b(u_j^{n+1/2})_{\hat{x}} + c(u_j^{n+1/2})_{\hat{x}}^p = g_j^{n+1/2} \quad (3.0.1)$$

şeklinde korunumlu sonlu fark (KSF) şeması yazıldı ve

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in [x_l, x_r] \quad (3.0.2)$$

$$u_{\hat{x}}(x_r, t) = u_{\hat{x}}(x_l, t) = 0, \quad t \in [0, T]$$

şeklinde başlangıç ve sınır şartları ile göz önüne alındı [9]. KSF şemasında yer alan $(u_j^{n+1/2})_{\hat{x}}^p$ lineer olmayan terim için üç farklı lineerleştirme tekniği uygulandı. Elde edilen lineer şemalar yardımıyla Bölüm 2’de tanımlanan model problemlerin nümerik çözümü bulundu. Nümerik çözümlerin analitik çözümlere ne kadar yakın olduğunu göstermek için (x_j, t_n) noktasında u ’nun tam ve nümerik değerleri sırasıyla $(u_j^n)_{tam}$ ve $(u_j^n)_{nümerik}$ olmak üzere

$$L_2 = \left(h \sum_{j=1}^J \left| (u_j^n)_{tam} - (u_j^n)_{nümerik} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

ve

$$L_\infty = \max_j \left| (u_j^n)_{tam} - (u_j^n)_{nümerik} \right|$$

olarak tanımlanan hata normları hesaplandı [16]. Elde edilen hata normları literatürde mevcut olan diğer araştırmacıların elde ettikleri hata normları ile karşılaştırılarak çizelgeler halinde verildi. Tam ve nümerik sonuçların birlikte yer aldığı grafikler çizildi. Lineerleştirme teknikleri uygulandıktan sonra elde edilen şemaların kararlılık analizleri von Neumann yöntemiyle yapıldı.

3.1 Lineerleştirme 1 (LİN-1)

(2.2.1) Rosenau denkleminde $(u^p)_x$ lineer olmayan terimi

$$\begin{aligned} (u^p)_x &= \frac{1+p}{1+p} (u^p)_x \\ &= \frac{1}{1+p} (u^p)_x + \frac{p}{1+p} (u^p)_x \\ &= \frac{p}{1+p} u^{p-1} u_x + \frac{p}{1+p} (u^p)_x \\ &= \frac{p}{1+p} (u^{p-1} u_x + (u^p)_x) \end{aligned}$$

şeklinde düzenlendikten sonra (3.0.1) denklemi ile verilen korunumlu sonlu fark şemasında $(u_j^{n+1/2})_{\hat{x}}^p$ terimi

$$(u_j^{n+1/2})_{\hat{x}}^p = \frac{p}{1+p} \left\{ (u_j^n)^{p-1} (u_j^{n+1/2})_{\hat{x}} + \left[(u_j^n)^{p-1} (u_j^{n+1/2}) \right]_{\hat{x}} \right\} \quad (3.1.1)$$

biçiminde yazıldı [9, 17]. Daha sonra Bölüm 2’de verilen korunumlu sonlu fark gösterimleri kullanılarak (3.1.1) denklemi (3.0.1) denkleminde yerine yazıldıktan sonra elde edilen denklemde yer alan türevler için

$$(u_j^n)_t = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} \quad (3.1.2)$$

$$(u_j^{n+1/2})_{\hat{x}} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{4h} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{4h} \quad (3.1.3)$$

$$(u_j^n)_{xx\bar{x}\bar{t}} = \frac{u_{j+2}^{n+1} - u_{j+2}^n}{kh^4} - \frac{4(u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n)}{kh^4} + \frac{6(u_j^{n+1} - u_j^n)}{kh^4} - \frac{4(u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n)}{kh^4} + \frac{u_{j-2}^{n+1} - u_{j-2}^n}{kh^4} \quad (3.1.4)$$

$$(u_j^{n+1/2})_{\hat{x}}^p = \frac{p}{1+p} \left\{ (u_j^n)^{p-1} \left[\frac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n}{4h} - \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j-1}^n}{4h} \right] + \frac{(u_{j+1}^n)^{p-1} (u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n)}{4h} - \frac{(u_{j-1}^n)^{p-1} (u_{j-1}^{n+1} + u_{j-1}^n)}{4h} \right\} \quad (3.1.5)$$

korunumlu sonlu fark yaklaşımları yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\Psi_1 = \frac{p}{1+p} (u_j^n)^{p-1}, \quad \Psi_2 = \frac{p}{1+p} (u_{j+1}^n)^{p-1}, \quad \Psi_3 = \frac{p}{1+p} (u_{j-1}^n)^{p-1},$$

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a}{kh^4}, & \beta_1 &= \frac{a}{kh^4}, \\ \alpha_2 &= -\frac{4a}{kh^4} - \frac{b}{4h} - \frac{c\Psi_1}{4h} - \frac{c\Psi_3}{4h}, & \beta_2 &= -\frac{4a}{kh^4} + \frac{b}{4h} + \frac{c\Psi_1}{4h} + \frac{c\Psi_3}{4h}, \\ \alpha_3 &= \frac{6a}{kh^4} + \frac{1}{k}, & \beta_3 &= \frac{6a}{kh^4} + \frac{1}{k}, \\ \alpha_4 &= -\frac{4a}{kh^4} + \frac{b}{4h} + \frac{c\Psi_1}{4h} + \frac{c\Psi_2}{4h}, & \beta_4 &= -\frac{4a}{kh^4} - \frac{b}{4h} - \frac{c\Psi_1}{4h} - \frac{c\Psi_2}{4h}, \\ \alpha_5 &= \frac{a}{kh^4}, & \beta_5 &= \frac{a}{kh^4} \end{aligned}$$

olmak üzere $j = 1, 2, \dots, J-1$ için

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_{j-2}^{n+1} + \alpha_2 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_3 u_j^{n+1} + \alpha_4 u_{j+1}^{n+1} + \alpha_5 u_{j+2}^{n+1} = \\ \beta_1 u_{j-2}^n + \beta_2 u_{j-1}^n + \beta_3 u_j^n + \beta_4 u_{j+1}^n + \beta_5 u_{j+2}^n + g_j^{n+1/2} \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

şeklinde $J+3$ bilinmeyenli $J-1$ tane denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. u_0 ve u_J bilinmeyenleri

$$u(x_r, t) = u(x_l, t) = 0$$

3.1.1 Kararlılık Analizi

Bu bölümde KSF LİN-1 şemasının von Neumann yöntemiyle kararlılık analizi yapıldı [15, 18]. von-Neuman kararlılık analizi yöntemi, sonlu fark şemalarının kararlılıklarını incelemek için sıklıkla kullanılan bir yöntemdir. Bu amaçla $n = 0, 1, 2, \dots, N$ için (3.1.6) sonlu fark şemasında u_j^n terimi yerine

$$u_j^n = e^{ij\theta} \xi^n, \quad i = \sqrt{-1} \quad (3.1.7)$$

yazılır. Burada θ dalga sayısı, $j = 1, 2, \dots, J-1$ ve ξ büyüme çarpanıdır. Şemanın kararlı olması için $|\xi| \leq 1$ olmalıdır. Bu durumda

$$\max_j \left| (u_j^n)^{p-1} \right| = M$$

olduğu kabul edilerek

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$$

Euler özdeşliğinden yararlanarak

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{2 \cos 2\theta}{kh^4} - \frac{8 \cos \theta}{kh^4} + \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k} \\ \tilde{B} &= \frac{(1+M) \sin \theta}{4h} \end{aligned}$$

olmak üzere büyüme çarpanı

$$\xi = \frac{\tilde{A} - i\tilde{B}}{\tilde{A} + i\tilde{B}}$$

olarak elde edilir. Böylece $|\xi| \leq 1$ olduğundan KSF LİN-1 şeması şartsız kararlıdır.

3.1.2 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, Bölüm 2’de verilen model problemlere KSF LİN-1 şeması uygulanarak elde edilen nümerik sonuçların mevcut tam çözümle veya literatürdeki diğer araştırmacıların sonuçlarıyla kıyaslaması yapılarak grafikler çizildi.

Çizelge 3.1’de Problem 1’in KSF LİN-1 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ olmak üzere $J = 10, 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri verildi. Çizelge incelendiğinde k sabit tutulup J bölüntü sayısı arttıkça hata normlarının küçüldüğü ve nümerik sonuçların analitik sonuçlara gittikçe yaklaştığı görülmektedir. Çizelge 3.2’de Problem 1’in KSF LİN-1 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001$ için nümerik ve tam çözümleri verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere J sabit değeri için küçülen k değerleri ile nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı

Çizelge 3.1 : Problem 1'in KSF LİN-1 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 10, 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$J = 10$	$J = 20$	$J = 40$	$J = 80$	
0.1	0.0005417084	0.0003440146	0.0002876097	0.0002730719	0.0002681841
0.2	0.0016395445	0.0015532379	0.0015192604	0.0015099907	0.0015068342
0.3	0.0032493057	0.0033848653	0.0034024826	0.0034058696	0.0034069315
0.4	0.0046773837	0.0050033225	0.0050662043	0.0050807618	0.0050855654
0.5	0.0052430608	0.0056424755	0.0057229375	0.0057418407	0.0057481163
0.6	0.0046756854	0.0050029033	0.0050660741	0.0050807020	0.0050855654
0.7	0.0032468304	0.0033842598	0.0034022961	0.0034057851	0.0034069315
0.8	0.0016375626	0.0015527617	0.0015191152	0.0015099257	0.0015068342
0.9	0.0005409593	0.0003438420	0.0002875575	0.0002730486	0.0002681841
L_2	$2.87070e-4$	$6.47521e-5$	$1.58659e-5$	$3.96830e-6$	
L_∞	$5.05055e-4$	$1.05640e-4$	$2.51787e-5$	$6.27552e-6$	

görülmektedir. Çizelge 3.3'de Problem 1 için $T = 1$ zamanında $k = h^2$ ve $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}, \frac{1}{160}$ için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Atouani ve arkadaşları [11] tarafından verilen L_2 ve L_∞ hata normları ile kıyaslandı. Çizelgeden görüldüğü üzere, h konum adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının da küçüldüğü gözlemlendi ve Atouani ve arkadaşlarının [11] elde ettiği sonuçlara yakın sonuçlar elde edildiği görüldü. Şekil 3.1'de Problem 1'in $T = 0.5$ ve $T = 1$ zamanında $J = 20$, $k = h^2$ için tam ve nümerik çözüm grafikleri yer almaktadır. Nümerik ve tam çözüm grafikleri birbirinden ayırt edilemeyecek kadar yakın olduğundan çözümlere ait olan iki grafik üst üste gelmektedir. Bu da nümerik ve tam çözümün birbirine çok yakın ve uyumlu oldukları anlamına gelmektedir. Bu durum Çizelge 3.3 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan KSF LİN-1 şeması tam çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir.

Problem 2' nin tam çözümü mevcut olmadığından $k = 0.1$ ve $J = 160$ için elde edilen nümerik çözüm tam çözüm olarak alınmaktadır. Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ olduğunda $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Çizelge 3.4'de verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere, k sabit tutulup h konum adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının da küçüldüğü gözlemlendi. Ayrıca Çizelge 3.4'de L_∞ hata normu Hu ve Zheng [9] tarafından verilen L_∞ hata normu ile kıyaslandı ve sonuçların birbirine oldukça yakın olduğu görüldü.

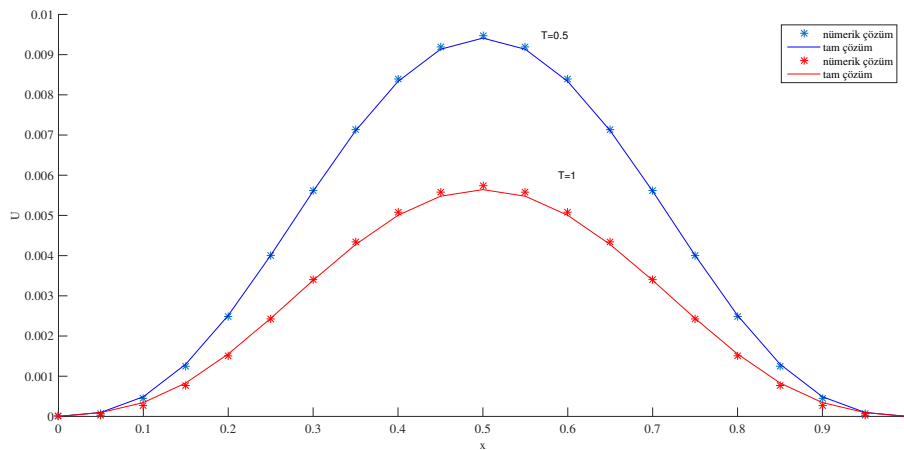
Şekil 3.2'de Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $J = 16$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafiği birlikte yer almaktadır. Çözümlere ait olan iki grafiğin üst üste olduğu görülmektedir. Bu da nümerik ve tam çözümün birbiriyle uyumlu olduğu anlamına gelmektedir. Bu durum

Çizelge 3.2 : Problem 1'in KSF LİN-1 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001$ için nümerik ve tam çözümleri.

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.01$	$k = 0.001$	$k = 0.0001$	
0.1	0.0002876097	0.0002876133	0.0002876133	0.0002681841
0.2	0.0015192604	0.0015192816	0.0015192819	0.0015068342
0.3	0.0034024826	0.0034025309	0.0034025314	0.0034069315
0.4	0.0050662043	0.0050662765	0.0050662772	0.0050855654
0.5	0.0057229375	0.0057230192	0.0057230200	0.0057481163
0.6	0.00506660741	0.0050661464	0.0050661471	0.0050855654
0.7	0.0034022961	0.0034023445	0.0034023450	0.0034069315
0.8	0.0015191152	0.0015191365	0.0015191367	0.0015068342
0.9	0.0002875575	0.0002875611	0.0002875612	0.0002681841
L_2	$1.58659e-5$	$1.58367e-5$	$1.58364e-5$	
L_∞	$2.51787e-5$	$2.50971e-5$	$2.50962e-5$	

Çizelge 3.3 : Problem 1'in KSF LİN-1 $T = 1$ zamanında $k = h^2$ için hata normlarının kıyaslanması.

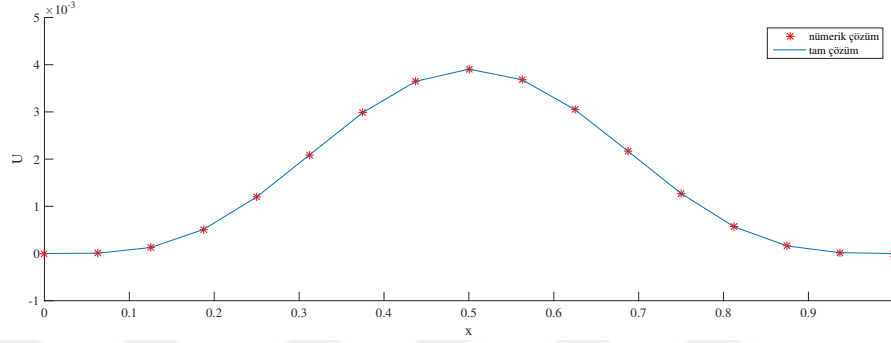
h	KSF LİN-1		[11]	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
$\frac{1}{20}$	$6.47222e-5$	$1.05562e-4$	$7.03223e-6$	$1.20408e-5$
$\frac{1}{40}$	$1.58365e-5$	$2.50966e-5$	$1.79433e-6$	$3.07175e-6$
$\frac{1}{80}$	$3.93932e-6$	$6.19317e-6$	$4.51615e-7$	$7.72899e-7$
$\frac{1}{160}$	$9.83530e-7$	$1.54247e-6$	$1.13476e-7$	$1.94085e-7$



Şekil 3.1 : Problem 1'in KSF LİN-1 ile $T = 0.5, T = 1$ zamanında $J = 20$ ve $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

Çizelge 3.4 : Problem 2'nin KSF LİN-1 ile $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.

h	KSF LİN-1		[9]
	L_2	L_∞	L_∞
$\frac{1}{8}$	$3.66816e-6$	$5.08001e-6$	$5.4204e-7$
$\frac{1}{16}$	$9.49444e-7$	$1.32876e-6$	$1.0197e-7$
$\frac{1}{32}$	$2.32497e-7$	$3.29189e-7$	$2.3657e-8$



Şekil 3.2 : Problem 2'nin $T = 10$ zamanında KSF LİN-2 ile $J = 16$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

Çizelge 3.4 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan KSF LİN-1 şeması tam çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir.

3.2 Lineerleştirme 2:Rubin-Graves (LİN-2)

Bu kısımda (2.2.1) ile verilen Rosenau denkleminde $(u^p)_x$ lineer olmayan terimi

$$(u^p)_x = pu^{p-1}u_x$$

şeklinde düzenlendikten sonra (3.0.1) denklemi ile verilen korunumlu sonlu fark şemasında $(u_j^{n+1/2})_{\hat{x}}$ terimi

$$(pu^{p-1}u_x)^{n+1/2} = \frac{p}{2}(u^{p-1}u_x)^{n+1} + \frac{p}{2}(u^{p-1}u_x)^n$$

şeklinde yazıldıktan sonra eşitliğin sağ tarafındaki ilk terime Rubin Graves [19, 20] lineerleştirme uygulanırsa

$$(pu^{p-1}u_x)^{n+1/2} = \frac{p}{2} \left[(u_j^n)^{p-1} (u_j^{n+1})_{\hat{x}} + (p-1) (u_j^n)^{p-2} (u_j^n)_{\hat{x}} u_j^{n+1} - (p-1) (u_j^n)^{p-1} (u_j^n)_{\hat{x}} \right] + \frac{p}{2} \left[(u_j^n)^{p-1} (u_j^n)_{\hat{x}} \right]$$

elde edilir. Bu denklem, (3.0.1) denklemiyle verilen KSF şemasında yerine yazıldıktan sonra elde edilen denklemde yer alan türevler için Bölüm 2'de verilen korunumlu sonlu fark

yaklaşımları yerine yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$(u_j^{n+1/2})_x^p = \left[\frac{p}{2} (u_j^n)^{p-1} \left(\frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{2h} \right) + (p-1) (u_j^n)^{p-2} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \right) u_j^{n+1} \right. \\ \left. + (2-p) (u_j^n)^{p-1} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \right) \right]$$

şeklinde yazılır. Burada

$$(u_j^n)^{p-1} = \varphi_1$$

ve

$$(p-1) (u_j^n)^{p-2} \left(\frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{2h} \right) = \varphi_2$$

şeklinde tanımlanarak

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a}{kh^4}, & \beta_1 &= \frac{a}{kh^4}, \\ \alpha_2 &= -\frac{4a}{kh^4} - \frac{b}{4h} - \frac{c\varphi_1 p}{4h}, & \beta_2 &= -\frac{4a}{kh^4} + \frac{b}{4h} + \frac{c\varphi_1 p(2-p)}{4h}, \\ \alpha_3 &= \frac{6a}{kh^4} + \frac{1}{k} + \frac{c\varphi_2 p}{2}, & \beta_3 &= \frac{6a}{kh^4} + \frac{1}{k}, \\ \alpha_4 &= -\frac{4a}{kh^4} + \frac{b}{4h} + \frac{c\varphi_1 p}{4h}, & \beta_4 &= -\frac{4a}{kh^4} - \frac{b}{4h} - \frac{c\varphi_1 p(2-p)}{4h}, \\ \alpha_5 &= \frac{a}{kh^4}, & \beta_5 &= \frac{a}{kh^4} \end{aligned}$$

olmak üzere $j = 1, 2, \dots, J-1$ için

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_{j-2}^{n+1} + \alpha_2 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_3 u_j^{n+1} + \alpha_4 u_{j+1}^{n+1} + \alpha_5 u_{j+2}^{n+1} = \\ \beta_1 u_{j-2}^n + \beta_2 u_{j-1}^n + \beta_3 u_j^n + \beta_4 u_{j+1}^n + \beta_5 u_{j+2}^n + g_j^{n+1/2} \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

şeklinde $J+3$ bilinmeyenli $J-1$ denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. u_{-1} , u_0 , u_J ve u_{J+1} noktaları Kısım 3.1'de verildiği gibi sınır şartları kullanılarak yok edilerek bilinmeyen sayısının $J-1$ olması sağlanır. Böylece elde edilen denklem sistemi

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_3 + \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & & & & & & \\ & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & & & & \\ & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & & & \\ & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 + \alpha_5 & & & \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_3 + \beta_1 & \beta_4 & \beta_5 & & & & & & & & \\ & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & & & & & & \\ & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & & & \\ & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & & & \\ & & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 + \beta_5 & & & \end{bmatrix},$$

$$U = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_{J-2} \quad u_{J-1}]^T, \quad G = \left[\begin{array}{cccc} \frac{g_1^{n+1}+g_1^n}{2} & \frac{g_2^{n+1}+g_2^n}{2} & \dots & \frac{g_{J-2}^{n+1}+g_{J-2}^n}{2} & \frac{g_{J-1}^{n+1}+g_{J-1}^n}{2} \end{array} \right]^T$$

olmak üzere

$$AU^{n+1} = BU^n + G, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

şeklinde matris formunda yazılır. $n = 0, 1, 2, \dots$ için bu denklem sistemi ardışık olarak çözümlenerek istenilen T zamanında nümerik sonuçlar elde edilir. U^1 değerini hesaplamak için gerekli olan U^0 değeri (3.0.2) ile verilen başlangıç şartından elde edilir. Tezin sonraki kısımlarında bu şema KSF LİN-2 olarak isimlendirilmektedir.

3.2.1 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, Bölüm 2’de verilen model problemlere KSF LİN-2 şeması uygulanarak elde edilen nümerik sonuçların mevcut tam çözümle veya literatürdeki diğer araştırmacıların sonuçlarıyla kıyaslaması yapılarak grafikler çizildi.

Çizelge 3.5’de Problem 1’in KSF LİN-2 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ olmak üzere $J = 10, 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri verildi. Çizelge incelendiğinde k sabit değeri için J bölüntü sayısı katlanarak arttıkça hata normlarının küçüldüğü ve nümerik sonuçların analitik sonuçlara yaklaştığı görülmektedir. Çizelge 3.6’de Problem 1’in KSF LİN-2 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001$ için nümerik ve tam çözümleri verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere J sabit değeri için küçülen k değerleri ile nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı görülmektedir. Çizelge 3.7’de Problem 1 için $T = 1$ zamanında $k = h^2$ ve $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}, \frac{1}{160}$ için L_2 ve L_∞ hata normları Atouani ve arkadaşları [11] tarafından verilen L_2 ve L_∞ hata normları ile kıyaslandı. Çizelgeden görüldüğü üzere, h konum adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının da küçüldüğü ve [11] tarafından verilen sonuçlar ile yakın sonuçlar elde edildiği görüldü. Şekil 3.3’de Problem 1’in $T = 0.5$ ve $T = 1$ zamanında $J = 80, k = h^2$ için tam ve nümerik çözüm grafiği birlikte yer almaktadır. Şekilden çözümlere ait olan iki garfiğin üst üste geldiği görülmektedir. Bu da nümerik ve tam çözümün birbirine çok yakın ve uyumlu oldukları anlamına gelmektedir. Bu durum Çizelge 3.7 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan KSF LİN-2 şeması tam çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir.

Problem 2’ nin tam çözümü mevcut olmadığından $k = 0.1$ ve $J = 160$ için elde edilen nümerik çözüm tam çözüm olarak alınmaktadır. Problem 2’nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ olduğunda $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Çizelge 3.8’de verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere, k sabit olup h konum adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının

Çizelge 3.5 : Problem 1'in KSF LİN-2 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 10, 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.

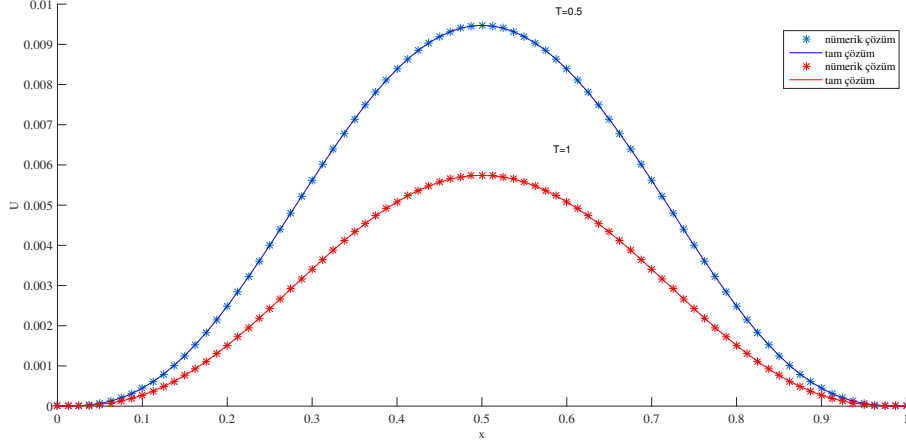
x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$J = 10$	$J = 20$	$J = 40$	$J = 80$	
0.1	0.0005416905	0.0003440088	0.0002876080	0.0002730715	0.0002681841
0.2	0.0016394890	0.0015532189	0.0015192549	0.0015099893	0.0015068342
0.3	0.0032492090	0.0033848314	0.0034024727	0.0034058670	0.0034069315
0.4	0.0046772560	0.0050032774	0.0050661910	0.0050807582	0.0050855654
0.5	0.0052429219	0.0056424261	0.0057229228	0.0057418368	0.0057481163
0.6	0.0046755584	0.0050028580	0.0050660606	0.0050806983	0.0050855654
0.7	0.0032467344	0.0033842257	0.0034022860	0.0034057822	0.0034069315
0.8	0.0016375073	0.0015527423	0.0015191094	0.0015099241	0.0015068342
0.9	0.0005409413	0.0003438360	0.0002875557	0.0002730481	0.0002681841
L_2	$2.87133e-4$	$6.47700e-5$	$1.58707e-5$	$3.96962e-6$	
L_∞	$5.05194e-4$	$1.05690e-4$	$2.51934e-5$	$6.27949e-6$	

Çizelge 3.6 : Problem 1'in KSF LİN-2 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001$ için nümerik ve tam çözümleri.

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.01$	$k = 0.001$	$k = 0.0001$	
0.1	0.0002875993	0.0002876029	0.0002876029	0.0002681841
0.2	0.0015192300	0.0015192510	0.0015192512	0.0015068342
0.3	0.0034024373	0.0034024853	0.0034024857	0.0034069315
0.4	0.0050661594	0.0050662313	0.0050662320	0.0050855654
0.5	0.0057229081	0.0057229896	0.0057229905	0.0057481163
0.6	0.0050660652	0.0050661376	0.0050661383	0.0050855654
0.7	0.0034023011	0.0034023496	0.0034023501	0.0034069315
0.8	0.0015191230	0.0015191444	0.0015191446	0.0015068342
0.9	0.0002875609	0.0002875646	0.0002875647	0.0002681841
L_2	$1.58756e-5$	$1.58464e-5$	$1.58461e-5$	
L_∞	$2.52081e-5$	$2.51266e-5$	$2.51258e-5$	

Çizelge 3.7 : Problem 1'in KSF LİN-2 ile $T = 1$ anında $k = h^2$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.

h	KSF LİN-2		[11]	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
$\frac{1}{20}$	$6.47401e-5$	$1.05612e-4$	$7.03223e-6$	$1.20408e-5$
$\frac{1}{40}$	$1.58414e-5$	$2.51113e-5$	$1.79433e-6$	$3.07175e-6$
$\frac{1}{80}$	$3.94078e-6$	$6.19764e-6$	$4.51615e-7$	$7.72899e-7$
$\frac{1}{160}$	$9.83821e-7$	$1.54337e-6$	$1.13476e-7$	$1.94085e-7$



Şekil 3.3 : Problem 1'in KSF LİN-2 ile $T = 0.5$ ve $T = 1$ zamanlarında $J = 80$, $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

Çizelge 3.8 : Problem 2'nin KSF LİN-2 ile $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.

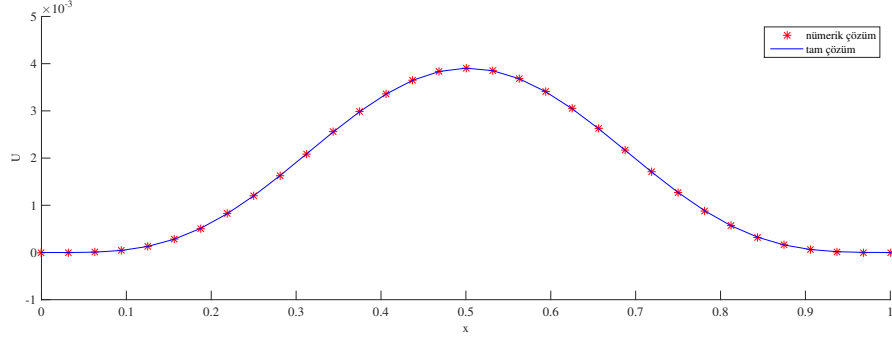
h	KSF LİN-2		[9]
	L_2	L_∞	L_∞
$\frac{1}{8}$	$3.66816e-6$	$5.08001e-6$	$5.4204e-7$
$\frac{1}{16}$	$9.49445e-7$	$1.32876e-6$	$1.0197e-7$
$\frac{1}{32}$	$2.32498e-7$	$3.29190e-7$	$2.3657e-8$

da küçüldüğü gözlemlendi. Ayrıca L_∞ hata normu Hu ve Zheng [9] tarafından verilen L_∞ hata normu ile kıyaslandı ve Hu ve Zheng [9] tarafından verilen L_∞ hata normunun daha küçük olduğu görüldü. Şekil 3.4'de Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $J = 32$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafiği birlikte yer almaktadır. Çözümlere ait olan iki grafiğin üst üste olduğu görülmektedir. Bu da nümerik ve tam çözümün birbiriyle uyumlu olduğu anlamına gelmektedir. Bu durum Çizelge 3.8 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan KSF LİN-2 şeması tam çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir.

3.3 Lineerleştirme 3 (LİN-3)

(2.2.1) ile verilen Rosenau denkleminde $(u^p)_x$ lineer olmayan terimi

$$(u^p)_x = pu^{p-1}u_x \quad (3.3.1)$$



Şekil 3.4 : Problem 2'nin KSF LİN-2 ile $T = 10$ zamanında $J = 32$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

şeklinde düzenlendikten sonra $z = pu^{p-1}$ olmak üzere (3.0.1) denklemi ile verilen korunumlu sonlu fark şemasında $(u_j^{n+1/2})_x^p$ terimi

$$(pu^{p-1}u_x)^{n+1/2} = zu_x^{n+1/2} \quad (3.3.2)$$

biçiminde lineerleştirilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a}{kh^4}, & \beta_1 &= \frac{a}{kh^4}, \\ \alpha_2 &= -\frac{4a}{kh^4} - \frac{b}{4h} - \frac{cz}{4h}, & \beta_2 &= -\frac{4a}{kh^4} + \frac{b}{4h} + \frac{cz}{4h}, \\ \alpha_3 &= \frac{6a}{kh^4} + \frac{1}{k}, & \beta_3 &= \frac{6a}{kh^4} + \frac{1}{k}, \\ \alpha_4 &= -\frac{4a}{kh^4} + \frac{b}{4h} + \frac{cz}{4h}, & \beta_4 &= -\frac{4a}{kh^4} - \frac{b}{4h} - \frac{cz}{4h}, \\ \alpha_5 &= \frac{a}{kh^4}, & \beta_5 &= \frac{a}{kh^4} \end{aligned}$$

olmak üzere $j = 1, 2, \dots, J-1$ için

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_{j-2}^{n+1} + \alpha_2 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_3 u_j^{n+1} + \alpha_4 u_{j+1}^{n+1} + \alpha_5 u_{j+2}^{n+1} = \\ \beta_1 u_{j-2}^n + \beta_2 u_{j-1}^n + \beta_3 u_j^n + \beta_4 u_{j+1}^n + \beta_5 u_{j+2}^n + g_j^{n+1/2} \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

şeklinde $J+3$ bilinmeyenli $J-1$ denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. u_{-1} , u_0 , u_J ve u_{J+1} noktaları Kısım 3.1'de verildiği gibi sınır şartları kullanılarak yok edilerek bilinmeyen sayısının $J-1$ olması sağlanır. Böylece elde edilen denklem sistemi

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_3 + \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & & & & & \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & & & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 + \alpha_5 & & & \end{bmatrix},$$

Çizelge 3.9 : Problem 1'in KSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 10, 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$J = 10$	$J = 20$	$J = 40$	$J = 80$	
0.1	0.0005417002	0.0003440075	0.0002876027	0.0002730650	0.0002681841
0.2	0.0016395232	0.0015532183	0.0015192411	0.0015099715	0.0015068342
0.3	0.0032492778	0.0033848395	0.0034024571	0.0034058442	0.0034069315
0.4	0.0046773630	0.0050033040	0.0050661860	0.0050807435	0.0050855654
0.5	0.0052430591	0.0056424754	0.0057229374	0.0057418406	0.0057481163
0.6	0.0046757029	0.0050029215	0.0050660922	0.0050807201	0.0050855654
0.7	0.0032468556	0.0033842853	0.0034023215	0.0034058104	0.0034069315
0.8	0.0016375820	0.0015527811	0.0015191345	0.0015099449	0.0015068342
0.9	0.0005409668	0.0003438491	0.0002875644	0.0002730555	0.0002681841
L_2	$2.87071e-4$	$6.47521e-5$	$1.58658e-5$	$3.96826e-6$	
L_∞	$5.05057e-4$	$1.05640e-4$	$2.51789e-5$	$6.27564e-6$	

Çizelge 3.10 : Problem 1'in KSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001$ için nümerik ve tam çözümleri.

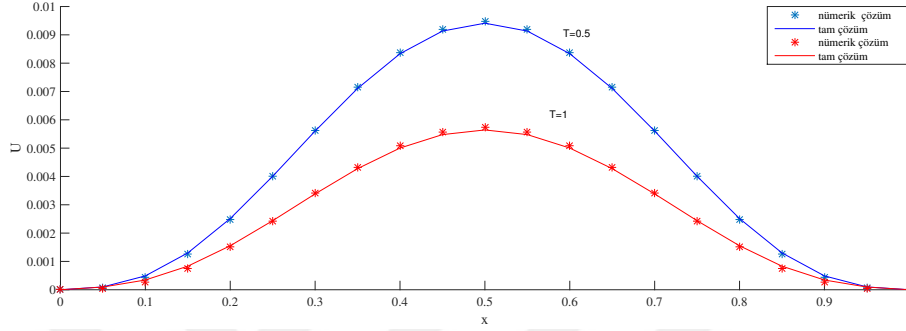
x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.01$	$k = 0.001$	$k = 0.0001$	
0.1	0.0002875887	0.0002875924	0.0002875924	0.0002681841
0.2	0.0015192024	0.0015192236	0.0015192238	0.0015068342
0.3	0.0034024061	0.0034024544	0.0034024549	0.0034069315
0.4	0.0050661493	0.0050662216	0.0050662223	0.0050855654
0.5	0.0057229371	0.0057230188	0.0057230196	0.0057481163
0.6	0.0050661284	0.0050662007	0.0050662014	0.0050855654
0.7	0.0034023722	0.0034024205	0.0034024210	0.0034069315
0.8	0.0015191730	0.0015191943	0.0015191945	0.0015068342
0.9	0.0002875784	0.0002875820	0.0002875820	0.0002681841
L_2	$1.58659e-5$	$1.58367e-5$	$1.58364e-5$	
L_∞	$2.51791e-5$	$2.50974e-5$	$2.50966e-5$	

Çizelge 3.11'de verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere, h konum adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının da küçüldüğü ve [11] tarafından verilen hata normlarına çok yakın sonuçlar elde edildiği gözlemlendi. Şekil 3.5 ile verilen grafikte Problem 1'in $T = 0.5$ ve $T = 1$ zamanında $J = 20$, $k = h^2$ için tam ve nümerik çözüm grafiği birlikte yer almaktadır. Çözümlere ait olan iki grafiğin üst üste olduğu görülmektedir. Bu da nümerik çözüm ile tam çözümün birbirine çok yakın ve uyumlu oldukları anlamına gelmektedir. Bu durum Çizelge 3.11 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan KSF LİN-3 şeması tam çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir.

Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ olduğunda $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Çizelge 3.12'da verildi. Çizelge 3.12'da L_∞ hata normu H_u ve Zheng [9] tarafından

Çizelge 3.11 : Problem 1'in KSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $k = h^2$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.

h	KSF LİN-3		[11]	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
$\frac{1}{20}$	$6.47222e-5$	$1.05562e-4$	$7.03223e-6$	$1.20408e-5$
$\frac{1}{40}$	$1.58365e-5$	$2.50967e-5$	$1.79433e-6$	$3.07175e-6$
$\frac{1}{80}$	$3.93928e-6$	$6.19329e-6$	$4.51615e-7$	$7.72899e-7$
$\frac{1}{160}$	$9.83625e-7$	$1.54331e-6$	$1.13476e-7$	$1.94085e-7$



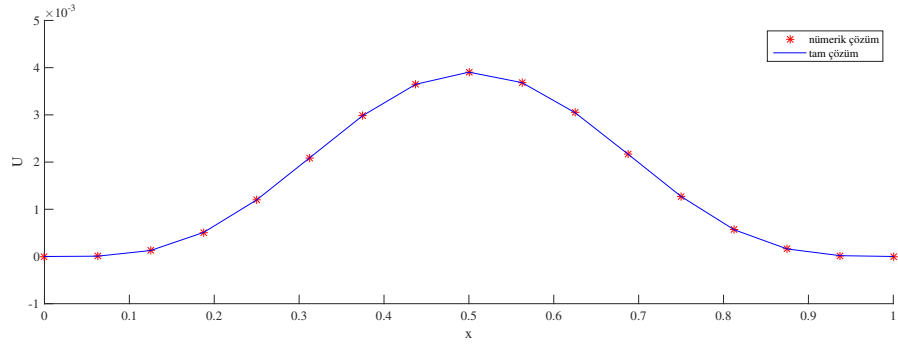
Şekil 3.5 : Problem 1'in KSF LİN-3 ile $T = 0.5$, $T = 1$ zamanında $J = 20$ ve $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

elde edilen L_∞ hata normu ile karşılaştırıldı. [9] tarafından elde edilen L_∞ hata normunun KSF LİN-3 ile edilen L_∞ hata normundan daha küçük olduğu görüldü.

Şekil 3.6 ile verilen grafikte Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $J = 16$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafiği birlikte yer almaktadır. Çözümlere ait olan iki grafiğin üst üste olduğu görülmektedir. Bu da nümerik çözüm ile tam çözümün birbirine çok yakın ve uyumlu oldukları anlamına gelmektedir. Bu durum Çizelge 3.12 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan KSF LİN-3 şeması tam çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir.

Çizelge 3.12 : Problem 2'nin KSF LİN-3 ile $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.

h	KSF LİN-3		[9]
	L_2	L_∞	L_∞
$\frac{1}{8}$	$3.66816e-6$	$5.08001e-6$	$5.4204e-7$
$\frac{1}{16}$	$9.49445e-7$	$1.32876e-6$	$1.0197e-7$
$\frac{1}{32}$	$2.32498e-7$	$3.29189e-7$	$2.3657e-8$



Şekil 3.6 : Problem 2'nin KSF LİN-2 ile $T = 10$ zamanında $J = 32$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

4. ZAMANA GÖRE PARÇALANAN ROSENAU DENKLEMİNİN KORUNUMLU SONLU FARK YAKLAŞIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde (2.2.1) ile verilen Rosenau denklemi

$$u_t + au_{xxxxt} + bu_x = g(x, t) \quad (4.0.1)$$

$$u_t + au_{xxxxt} + c(u^p)_x = 0 \quad (4.0.2)$$

olarak zamana göre parçalanarak

$$(u_j^n)_t + a(u_j^n)_{xxxxt} + b(u_j^{n+1/2})_{\hat{x}} = g_j^n \quad (4.0.3)$$

$$u(x, 0) = u_0^{(n)}(x), \quad x \in [x_l, x_r] \quad (4.0.4)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x_l, t) = u(x_r, t) = 0 \\ u_{\hat{x}}(x_l, t) = u_{\hat{x}}(x_r, t) = 0 \end{aligned} \right\}, \quad t \in [0, T] \quad (4.0.5)$$

ve

$$(u_j^n)_t + a(u_j^n)_{xxxxt} + c(u_j^{n+1/2})_{\hat{x}}^p = 0 \quad (4.0.6)$$

$$u(x, 0) = u_0^{(n+1)}(x), \quad x \in [x_l, x_r] \quad (4.0.7)$$

$$\left. \begin{aligned} u(x_l, t) = u(x_r, t) = 0 \\ u_{\hat{x}}(x_l, t) = u_{\hat{x}}(x_r, t) = 0 \end{aligned} \right\}, \quad t \in [0, T] \quad (4.0.8)$$

şeklinde korunumlu sonlu fark (ZKSF) şeması uygulanarak nümerik çözüm elde edildi. Zamana göre parçalanmış olan denklemlerden (4.0.2) denkleminde yer alan lineer olmayan terim yerine üç farklı lineerleştirme tekniği kullanıldı. Daha sonra bu şemalar kullanılarak Bölüm 2’de verilen model problemlerin nümerik çözümleri bulundu ve L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı. Elde edilen sonuçlar birbirleri ya da literatürde mevcut olan diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlar ile karşılaştırıldı.

4.1 Lineerleştirme 1 (LİN-1)

(4.0.3) ile verilen denklemde yer alan türevler yerine

$$(u_j^n)_t = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} \quad (4.1.1)$$

$$(u_j^{n+1/2})_{\hat{x}} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{4h} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{4h} \quad (4.1.2)$$

$$(u_j^n)_{xx\bar{x}\bar{t}} = \frac{u_{j+2}^{n+1} - u_{j+2}^n}{kh^4} - \frac{4(u_{j+1}^{n+1} - u_{j+1}^n)}{kh^4} + \frac{6(u_j^{n+1} - u_j^n)}{kh^4} - \frac{4(u_{j-1}^{n+1} - u_{j-1}^n)}{kh^4} + \frac{u_{j-2}^{n+1} - u_{j-2}^n}{kh^4} \quad (4.1.3)$$

korunumlu sonlu fark yaklaşımları uygulanır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{a}{kh^4}, & \beta_1 &= \frac{a}{kh^4}, \\ \alpha_2 &= -\frac{4a}{kh^4} - \frac{b}{4h}, & \beta_2 &= -\frac{4a}{kh^4} + \frac{b}{4h}, \\ \alpha_3 &= \frac{6a}{kh^4} + \frac{1}{k}, & \beta_3 &= \frac{6a}{kh^4} + \frac{1}{k}, \\ \alpha_4 &= -\frac{4a}{kh^4} + \frac{b}{4h}, & \beta_4 &= -\frac{4a}{kh^4} - \frac{b}{4h}, \\ \alpha_5 &= \frac{a}{kh^4}, & \beta_5 &= \frac{a}{kh^4} \end{aligned}$$

olmak üzere $j = 1, 2, \dots, J-1$ için

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_{j-2}^{n+1} + \alpha_2 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_3 u_j^{n+1} + \alpha_4 u_{j+1}^{n+1} + \alpha_5 u_{j+2}^{n+1} = \\ \beta_1 u_{j-2}^n + \beta_2 u_{j-1}^n + \beta_3 u_j^n + \beta_4 u_{j+1}^n + \beta_5 u_{j+2}^n + g_j^n \end{aligned} \quad (4.1.4)$$

şeklinde $J+3$ bilinmeyenli $J-1$ denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. u_{-1} , u_0 , u_J ve u_{J+1} noktaları Kısım 3.1'de verildiği gibi sınır şartları kullanılarak yok edilerek bilinmeyen sayısının $J-1$ olması sağlanır. Böylece elde edilen denklem sistemi

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_3 + \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & & & & \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 + \alpha_5 & & \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} \mu_3 + \mu_1 & \mu_4 & \mu_5 & & & & & & & & \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & & & & & & & \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & & & & & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & & \\ & & & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & & & \\ & & & & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & & & \\ & & & & & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 + \mu_5 & & & \\ & & & & & & & & & & \end{bmatrix},$$

$$U^* = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{J-2} \ u_{J-1}]^T$$

olmak üzere

$$CU^{n+1} = DU^{*n} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1.7)$$

şeklinde matris formunda yazılır. Burada ilk olarak $n = 0$ için (4.1.5) denklemiyle verilen denklem sistemi çözülür. Elde edilen U^1 çözümü (4.1.7) denklemiyle verilen denklem sisteminde U^{*0} yerine yazılarak (4.1.7) denklem sistemi çözülerek U^1 çözümü elde edilir. Bu şekilde (4.1.5) ve (4.1.7) denklem sistemleri ardışık olarak çözülerek istenilen T zamanında nümerik sonuçlar elde edilir. U^1 değerini hesaplamak için gerekli olan U^0 değeri (4.0.4) ile verilen başlangıç şartından elde edilir.

4.1.1 Kararlılık Analizi

Bu bölümde ZKSF şemasında LİN-1 lineerleştirilmesi uygulanarak elde edilen lineer şemanın von Neumann yöntemiyle kararlılık analizi yapıldı (4.1.4) ile verilen denklemde $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $u_j^n = e^{ij\theta} \xi_1^n$ yazıldıktan sonra Euler özdeşliğinden yararlanarak

$$\tilde{A} = \frac{2 \cos 2\theta}{kh^4} - \frac{8 \cos \theta}{kh^4} + \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k}$$

$$\tilde{B} = \frac{2 \sin \theta}{4h}$$

olmak üzere büyüme çarpanı

$$\xi_1 = \frac{\tilde{A} - i\tilde{B}}{\tilde{A} + i\tilde{B}}$$

olarak elde edilir. Böylece $|\xi_1| \leq 1$ bulunur.

Benzer şekilde (4.1.6) ile verilen denklemde $\max_j \left| (u_j^n)^{p-1} \right| = M$ olarak kabul edilir ve $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere $u_j^n = e^{ij\theta} \xi_2^n$ yazıldıktan sonra Euler özdeşliğinden yararlanarak

$$\tilde{A} = \frac{2 \cos 2\theta}{kh^4} - \frac{8 \cos \theta}{kh^4} + \frac{6}{kh^4} + \frac{1}{k}$$

$$\tilde{C} = \frac{4M \sin \theta}{4h}$$

olmak üzere büyüme çarpanı

$$\xi_2 = \frac{\tilde{A} - i\tilde{C}}{\tilde{A} + i\tilde{C}}$$

olarak elde edilir. Böylece $|\xi_2| \leq 1$ bulunur. Bu durumda $|\xi_1||\xi_2| \leq 1$ olduğundan korunumlu sonlu fark şeması şartsız kararlıdır.

4.1.2 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, Bölüm 2’de verilen model problemlere ZKSF LİN-1 şeması uygulanarak elde edilen nümerik sonuçların mevcut tam çözümle veya literatürdeki diğer araştırmacıların sonuçlarıyla kıyaslaması yapılarak grafikler çizildi.

Çizelge 4.1’de Problem 1’in ZKSF LİN-1 ile $k = 0.01$ olmak üzere $J = 10, 20, 40, 80$ için $T = 1$ zamanında nümerik ve tam çözümleri verildi. Çizelge incelendiğinde k sabit olup J bölüntü sayısı arttıkça hata normlarının küçüldüğü ve nümerik sonuçların analitik sonuçlara gittikçe yaklaştığı görülmektedir. Çizelge 4.2’de Problem 1’in ZKSF LİN-1 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.1, 0.01, 0.001$ için nümerik ve tam çözümleri verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere J sabit değeri için küçülen k değerleri ile nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı görülmektedir. Problem 1 için $T = 1$ zamanında L_2 ve L_∞ hata normları $k = h^2$ ve $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}, \frac{1}{160}$ için hesaplanarak Atouani ve arkadaşları [11] tarafından verilen sonuçlar ile Çizelge 4.3’de kıyaslandı. Çizelgede görüldüğü üzere h konum adımı küçülmeye devam ederken L_2 ve L_∞ hata normlarının da küçülmeye devam ettiği gözlemlendi. Şekil 4.1 ile verilen grafikte Problem 1’in $T = 0.5$ ve $T = 1$ zamanında $J = 20$, $k = h^2$ için tam ve nümerik çözüm grafiği birlikte yer almaktadır. Grafikler incelendiğinde nümerik çözümler ile tam çözümlerin grafikleri üst üste gelmekte ve burada tek bir grafik gibi görülmektedirler. Bu da nümerik çözüm ile tam çözümün birbiri ile çok uyumlu olduğunu göstermektedir. Bu durum Çizelge 4.3 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan ZKSF LİN-1 şeması tam çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir.

Çizelge 4.4’de Problem 2’nin $T = 1$ zamanında $k = 0.1$ olduğunda $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ için L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere, $k = 0.1$ sabit tutulup h konum adımı $1/2$ oranında küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının da azaldığı gözlemlendi. Bu çizelgede L_∞ hata normu Hu ve Zheng [9] tarafından elde edilen L_∞ hata normu ile karşılaştırıldı ve Hu ve Zheng [9] tarafından elde edilen L_∞ hata normunun daha küçük olduğu görüldü. Şekil 4.2 ile verilen grafikte Problem 2’nin $T = 10$ zamanında $J = 16$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafiği birlikte yer almaktadır. Şekil incelendiğinde nümerik çözümler ile tam çözümlerin grafikleri üst üste geldiği ve tek bir grafik gibi görüldüğü gözlenmektedir. Bu da nümerik çözüm ile tam

Çizelge 4.1 : Problem 1'in ZKSF LİN-1 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 10, 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.

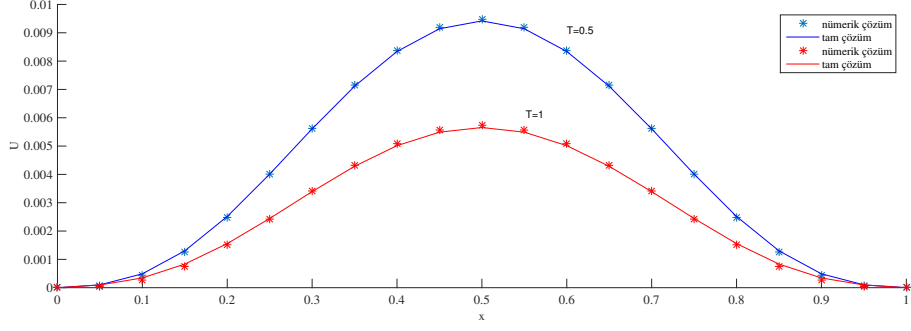
x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$J = 10$	$J = 20$	$J = 40$	$J = 80$	
0.1	0.0005426462	0.0003459745	0.0002899116	0.0002755654	0.0002681841
0.2	0.0016518528	0.0015660843	0.0015324763	0.0015236499	0.0015068342
0.3	0.0032794493	0.0034145198	0.0034324089	0.0034364950	0.0034069315
0.4	0.0047232862	0.0050478471	0.0051108993	0.0051263490	0.0050855654
0.5	0.0052952197	0.0056929109	0.0057735022	0.0057933700	0.0057481163
0.6	0.0047217142	0.0050475418	0.0051108805	0.0051264007	0.0050855654
0.7	0.0032771602	0.0034140808	0.0034323848	0.0034365727	0.0034069315
0.8	0.0016500251	0.0015657428	0.0015324617	0.0015237152	0.0015068342
0.9	0.0005419614	0.0003458544	0.0002899092	0.0002755915	0.0002681841
L_2	$2.63374e-4$	$5.05095e-5$	$2.34727e-5$	$2.79460e-5$	
L_∞	$4.52896e-4$	$7.77904e-5$	$2.57104e-5$	$4.52537e-5$	

Çizelge 4.2 : Problem 1'in ZKSF LİN-1 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.1, 0.01, 0.001$ için nümerik ve tam çözümleri.

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.1$	$k = 0.01$	$k = 0.001$	
0.1	0.0003092056	0.0002899116	0.0002879496	0.0002681841
0.2	0.0016457670	0.0015324763	0.0015209565	0.0015068342
0.3	0.003690535	0.0034324089	0.0034061622	0.0034069315
0.4	0.0054972926	0.0051108993	0.0050716106	0.0050855654
0.5	0.0062108760	0.0057735022	0.0057290303	0.0057481163
0.6	0.0054981536	0.0051108805	0.0050715033	0.0050855654
0.7	0.0036917998	0.0034323848	0.0034060083	0.0034069315
0.8	0.0016467957	0.0015324617	0.0015208369	0.0015068342
0.9	0.0003096034	0.0002899092	0.0002879069	0.0002681841
L_2	$2.75278e-4$	$2.34727e-5$	$1.40084e-5$	
L_∞	$4.62759e-4$	$2.57104e-5$	$2.00095e-5$	

Çizelge 4.3 : ZKSF LİN-1 şeması ile Problem 1'in $T = 1$ zamanında $k = h^2$ için hata normlarının kıyaslanması.

h	ZKSF LİN-1		[11]	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
$\frac{1}{20}$	$6.00219e-5$	$9.25591e-5$	$7.03223e-6$	$1.20408e-5$
$\frac{1}{40}$	$1.45154e-5$	$2.09418e-5$	$1.79433e-6$	$3.07175e-6$
$\frac{1}{80}$	$3.32767e-6$	$5.31985e-6$	$4.51615e-7$	$7.72899e-7$
$\frac{1}{160}$	$2.39398e-6$	$2.89539e-6$	$1.13476e-7$	$1.94085e-7$



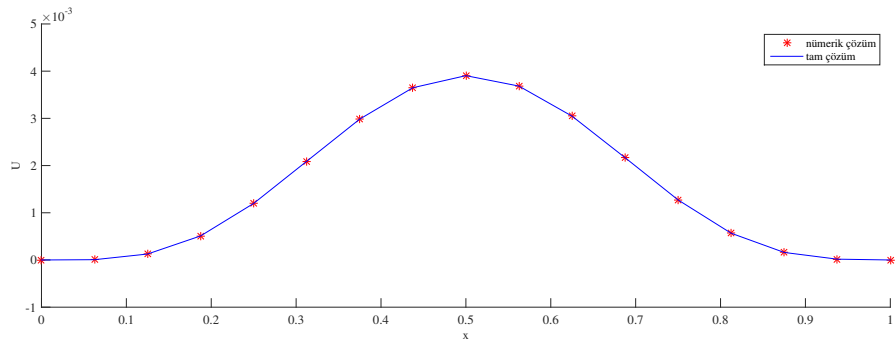
Şekil 4.1 : Problem 1'in ZKSF LİN-1 ile $T = 0.5$ ve $T = 1$ zamanlarında $J = 20$, $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

Çizelge 4.4 : ZKSF LİN-1 şeması ile Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.

ZKSF LİN-1		[9]	
h	L_2	L_∞	L_∞
$\frac{1}{8}$	$3.66816e-6$	$5.08001e-6$	$5.4204e-7$
$\frac{1}{16}$	$9.49446e-7$	$1.32875e-6$	$1.0197e-7$
$\frac{1}{32}$	$2.32498e-7$	$3.29175e-7$	$2.3657e-8$

çözümün birbiri ile uyumlu olduğunu göstermektedir. Bu durum Çizelge 4.4 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan ZKSF LİN-1 şeması tam çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir.

4.2 Lineerleştirme 2:Rubin-Graves (LİN-2)



Şekil 4.2 : Problem 2'nin ZKSF LİN-2 ile $T = 10$ zamanında $J = 16$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

(4.0.3) ile verilen denklemde yer alan türevler yerine (4.1.1)-(4.1.3) ile verilen korunumlu sonlu fark yaklaşımları yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \frac{a}{kh^4}, & \beta_1 &= \frac{a}{kh^4} \\ \alpha_2 &= -\frac{4a}{kh^4} - \frac{b}{4h}, & \beta_2 &= -\frac{4a}{kh^4} + \frac{b}{4h} \\ \alpha_3 &= \frac{6a}{kh^4} + \frac{1}{k}, & \beta_3 &= \frac{6a}{kh^4} + \frac{1}{k} \\ \alpha_4 &= -\frac{4a}{kh^4} + \frac{b}{4h}, & \beta_4 &= -\frac{4a}{kh^4} - \frac{b}{4h} \\ \alpha_5 &= \frac{a}{kh^4}, & \beta_5 &= \frac{a}{kh^4}\end{aligned}$$

olmak üzere $j = 1, 2, \dots, J - 1$ için

$$\begin{aligned}\alpha_1 u_{j-2}^{n+1} + \alpha_2 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_3 u_j^{n+1} + \alpha_4 u_{j+1}^{n+1} + \alpha_5 u_{j+2}^{n+1} = \\ \beta_1 u_{j-2}^n + \beta_2 u_{j-1}^n + \beta_3 u_j^n + \beta_4 u_{j+1}^n + \beta_5 u_{j+2}^n + g_j^n\end{aligned}\quad (4.2.1)$$

şeklinde $J + 3$ bilinmeyenli $J - 1$ denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. u_{-1} , u_0 , u_J ve u_{J+1} noktaları Kısım 3.1’de verildiği gibi sınır şartları kullanılarak yok edilerek bilinmeyen sayısının $J - 1$ olması sağlanır. Böylece elde edilen denklem sistemi

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_3 + \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & & & & \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 + \alpha_5 & & \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_3 + \beta_1 & \beta_4 & \beta_5 & & & & & & \\ \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & & & & & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & & \\ & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & & \\ & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 + \beta_5 & & \end{bmatrix},$$

$$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{J-2} \ u_{J-1}]^T, \quad G = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_{J-2} \ g_{J-1}]^T$$

olmak üzere

$$AU^{n+1} = BU^n + G, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.2.2)$$

şeklinde matris formunda yazılır.

Benzer şekilde (4.0.6) ile verilen denklemde lineer olmayan $\left(u_j^{n+1/2}\right)_{\hat{x}}$ terimi için Bölüm 3’te verilen LIN-2 lineerleştirilmesi yapıldıktan sonra denklemde görülen türevler yerine

Çizelge 4.5 : Problem 1'in ZKSF LİN-2 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 10, 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$J = 10$	$J = 20$	$J = 40$	$J = 80$	
0.1	0.0005426092	0.0003459091	0.0002897874	0.0002753226	0.0002681841
0.2	0.0016517405	0.0015658726	0.0015320666	0.0015228437	0.0015068342
0.3	0.0032792583	0.0034141470	0.0034316777	0.0034350482	0.0034069315
0.4	0.0047230432	0.0050473572	0.0051099255	0.0051244104	0.0050855654
0.5	0.0052949681	0.0056923873	0.0057724470	0.0057912558	0.0057481163
0.6	0.0047214961	0.0050470760	0.0051099301	0.0051244847	0.0050855654
0.7	0.0032770036	0.0034137414	0.0034316862	0.0034351573	0.0034069315
0.8	0.0016499388	0.0015655565	0.0015320767	0.0015229327	0.0015068342
0.9	0.0005419344	0.0003457982	0.0002897939	0.0002753572	0.0002681841
L_2	$2.63480e-4$	$5.05640e-5$	$2.28892e-5$	$2.66293e-5$	
L_∞	$4.53148e-4$	$7.77249e-5$	$2.52424e-5$	$4.31394e-5$	

4.2.1 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, Bölüm 2'de verilen model problemlere ZKSF LİN-2 şeması uygulanarak elde edilen nümerik sonuçların mevcut tam çözümle veya literatürdeki diğer araştırmacıların sonuçlarıyla kıyaslaması yapılarak grafikler çizildi.

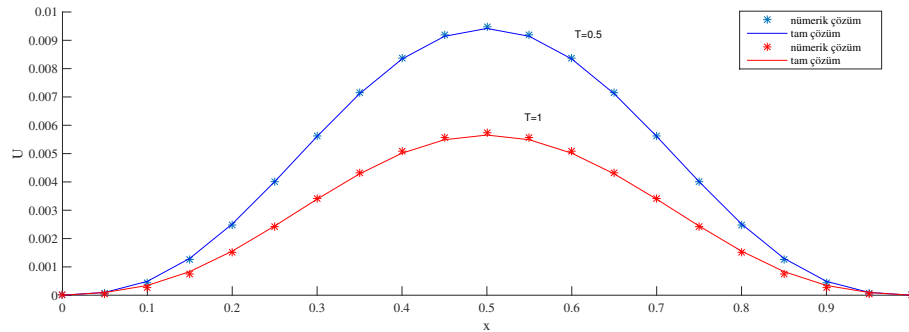
Çizelge 4.5'de Problem 1'in $T = 1$ zamanında ZKSF LİN-2 ile $k = 0.01$ olmak üzere $J = 10, 20, 40, 80$ için nümerik çözüm ve tam çözümleri verildi. Çizelge incelendiğinde k sabit olup J bölüntü sayısı arttıkça hata normlarının küçüldüğü ve nümerik sonuçların analitik sonuçlara gittikçe yaklaştığı görülmektedir. Çizelge 4.6'de Problem 1'in ZKSF LİN-2 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.1, 0.01, 0.001$ için nümerik ve tam çözümleri verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere J sabit değeri için küçülen k değerleri ile nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı görülmektedir. Çizelge 4.7'de Problem 1 için $T = 1$ zamanında $k = h^2$ olduğunda $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}, \frac{1}{160}$ için L_2 ve L_∞ hata normları verildi. Çizelgede elde edilen hata normları Atouani ve arkadaşlarının [11] elde ettikleri hata normları ile kıyaslandı ve elde edilen hata normlarının Atouani ve arkadaşlarının [11] elde ettikleri hata normlarına yakın olduğu görüldü. Sonuçlardan görüldüğü üzere h konum adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının da küçüldüğü gözlemlendi. Şekil 4.3'te Problem 1'in $T = 0.5$ ve $T = 1$ zamanında $J = 20, k = h^2$ için tam ve nümerik çözüm grafikleri yer almaktadır. Şekilden nümerik ve tam çözümlerin grafiklerinin üst üste olduğu görülmektedir. Bu da nümerik çözüm ile tam çözümün birbirine çok yakın ve uyumlu oldukları anlamına gelmektedir. Bu durum Çizelge 4.7 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan ZKSF LİN-2 şeması tam çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir. Çizelge 4.8'de Problem 2'nin $T = 10$

Çizelge 4.6 : Problem 1'in ZKSF LİN-2 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.1, 0.01, 0.001$ için nümerik ve tam çözümleri.

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.1$	$k = 0.01$	$k = 0.001$	
0.1	0.0003090734	0.0002897735	0.0002878108	0.0002681841
0.2	0.0016453379	0.0015320281	0.0015205062	0.0015068342
0.3	0.0036897868	0.0034316270	0.0034053765	0.0034069315
0.4	0.0054963256	0.0051098891	0.0050705955	0.0050855654
0.5	0.0062098657	0.0057724467	0.0057279698	0.0057481163
0.6	0.0054972784	0.0051099661	0.0050705844	0.0050855654
0.7	0.0036911794	0.0034317366	0.0034053570	0.0034069315
0.8	0.0016464639	0.0015321150	0.0015204885	0.0015068342
0.9	0.0003095063	0.0002898077	0.0002878049	0.0002681841
L_2	$2.74649e-4$	$2.28891e-5$	$1.42548e-5$	
L_∞	$4.61749e-4$	$2.52807e-5$	$2.01465e-5$	

Çizelge 4.7 : ZKSF LİN-2 şeması ile Problem 1'in $T = 1$ zamanında $k = h^2$ için hata normlarının kıyaslanması.

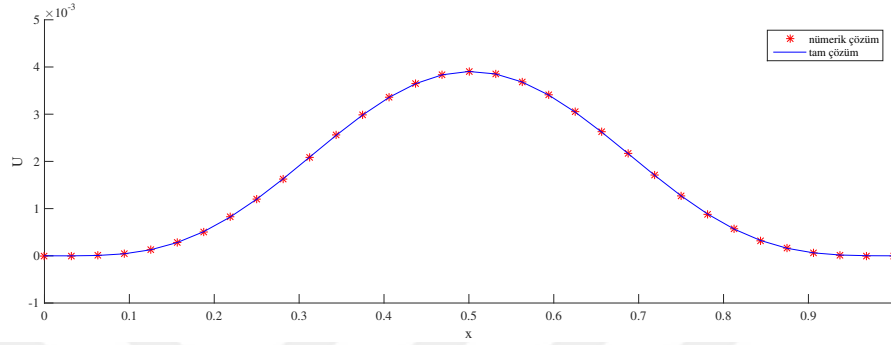
h	ZKSF LİN-2		[11]	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
$\frac{1}{20}$	$6.01861e-5$	$9.30849e-5$	$7.03223e-6$	$1.20408e-5$
$\frac{1}{40}$	$1.48016e-5$	$2.20023e-5$	$1.79433e-6$	$3.07175e-6$
$\frac{1}{80}$	$3.68696e-6$	$5.42106e-6$	$4.51615e-7$	$7.72899e-7$
$\frac{1}{160}$	$9.23339e-7$	$1.35899e-6$	$1.13476e-7$	$1.94085e-7$



Şekil 4.3 : Problem 1'in ZKSF LİN-2 ile $T = 0.5$ ve $T = 1$ zamanlarında $J = 20$, $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

Çizelge 4.8 : ZKSF LİN-2 şeması ile Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.

	ZKSF LİN-2		[9]
h	L_2	L_∞	L_∞
$\frac{1}{8}$	$3.66816e-6$	$5.08002e-6$	$5.4204e-7$
$\frac{1}{16}$	$9.49446e-7$	$1.32876e-6$	$1.0197e-7$
$\frac{1}{32}$	$2.32499e-7$	$3.29196e-7$	$2.3657e-8$



Şekil 4.4 : Problem 2'nin $T = 10$ zamanında ZKSF LİN-2 ile $J = 32$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

zamanında $k = 0.1$ olduğunda $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ için L_2 ve L_∞ normları verildi. Çizelgeden konum adım uzunluğu küçüldükçe hata normlarının küçüldüğü ancak Hu ve Zheng [9] tarafından elde edilen L_∞ hata normunun daha küçük olduğu görülmektedir. Şekil 4.4'de Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $J = 32$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri yer almaktadır. Grafikler incelendiğinde nümerik ve tam çözümlerin grafiklerinin üst üste geldiği ve burada tek bir grafik gibi görüldüğü gözlenmektedir. Bu da nümerik çözüm ile tam çözümün birbiri ile uyumlu olduğunu göstermektedir. Bu durum Çizelge 4.8 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan ZKSF LİN-2 şeması tam çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir.

4.3 Lineerleştirme 3 (LİN-3)

(4.0.3) ile verilen denklemde yer alan türevler yerine (4.1.1)-(4.1.3) ile verilen korunumlu sonlu fark yaklaşımları yazılır ve düzenlenirse

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{a}{kh^4} & \beta_1 &= \frac{a}{kh^4} \\
 \alpha_2 &= -\frac{4a}{kh^4} - \frac{b}{4h} & \beta_2 &= -\frac{4a}{kh^4} + \frac{b}{4h} \\
 \alpha_3 &= \frac{6a}{kh^4} + \frac{1}{k} & \beta_3 &= \frac{6a}{kh^4} + \frac{1}{k} \\
 \alpha_4 &= -\frac{4a}{kh^4} + \frac{b}{4h} & \beta_4 &= -\frac{4a}{kh^4} - \frac{b}{4h} \\
 \alpha_5 &= \frac{a}{kh^4} & \beta_5 &= \frac{a}{kh^4}
 \end{aligned}$$

olmak üzere $j = 1, 2, \dots, J - 1$ için

$$\begin{aligned} & \alpha_1 u_{j-2}^{n+1} + \alpha_2 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_3 u_j^{n+1} + \alpha_4 u_{j+1}^{n+1} + \alpha_5 u_{j+2}^{n+1} = \\ & \beta_1 u_{j-2}^n + \beta_2 u_{j-1}^n + \beta_3 u_j^n + \beta_4 u_{j+1}^n + \beta_5 u_{j+2}^n + g_j^n \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

şeklinde $J + 3$ bilinmeyenli $J - 1$ denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. u_{-1} , u_0 , u_J ve u_{J+1} noktaları Kısım 3.1'de verildiği gibi sınır şartları kullanılarak yok edilerek bilinmeyen sayısının $J - 1$ olması sağlanır. Böylece elde edilen denklem sistemi

$$A = \begin{bmatrix} \alpha_3 + \alpha_1 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & & & & & & \\ & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & & & & \\ & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & \alpha_5 & & \\ & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 & & \\ & & & & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 + \alpha_5 & & \end{bmatrix},$$

$$B = \begin{bmatrix} \beta_3 + \beta_1 & \beta_4 & \beta_5 & & & & & & & & \\ & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & & & & & & \\ & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & & & & \\ & & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & \beta_5 & & \\ & & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \beta_4 & & \\ & & & & & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 + \beta_5 & & \end{bmatrix},$$

$$U = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{J-2} \ u_{J-1}]^T, \quad G = [g_1 \ g_2 \ \dots \ g_{J-2} \ g_{J-1}]^T$$

olmak üzere

$$AU^{n+1} = BU^n + G, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.2)$$

şeklinde matris formunda yazılır.

Benzer şekilde (4.0.6) ile verilen denklemde lineer olmayan $\left(u_j^{n+1/2}\right)_{\hat{x}}$ terimi için Bölüm 3'te verilen LIN-3 lineerleştirilmesi yapıldıktan sonra denklemde görülen türevler yerine (4.1.1)-(4.1.3) korunumlu sonlu fark yaklaşımları yazılarak düzenlenirse

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \frac{a}{kh^4}, & \mu_1 &= \frac{a}{kh^4} \\ \lambda_2 &= -\frac{4a}{kh^4} - \frac{cz}{4h}, & \mu_2 &= -\frac{4a}{kh^4} + \frac{cz}{4h} \\ \lambda_3 &= \frac{6a}{kh^4} + \frac{1}{k}, & \mu_3 &= \frac{6a}{kh^4} + \frac{1}{k} \\ \lambda_4 &= -\frac{4a}{kh^4} + \frac{cz}{4h}, & \mu_4 &= -\frac{4a}{kh^4} - \frac{cz}{4h} \\ \lambda_5 &= \frac{a}{kh^4}, & \mu_5 &= \frac{a}{kh^4} \end{aligned}$$

olmak üzere $j = 1, 2, \dots, J - 1$ için

$$\begin{aligned} & \lambda_1 u_{j-2}^{n+1} + \lambda_2 u_{j-1}^{n+1} + \lambda_3 u_j^{n+1} + \lambda_4 u_{j+1}^{n+1} + \lambda_5 u_{j+2}^{n+1} = \\ & \mu_1 u_{j-2}^n + \mu_2 u_{j-1}^n + \mu_3 u_j^n + \mu_4 u_{j+1}^n + \mu_5 u_{j+2}^n \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

şeklinde $J + 3$ bilinmeyenli $J - 1$ denklemden oluşan bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. u_{-1} , u_0 , u_J ve u_{J+1} noktaları Kısım 3.1'de verildiği gibi sınır şartları kullanılarak yok edilerek bilinmeyen sayısının $J - 1$ olması sağlanır. Böylece elde edilen denklem sistemi

$$C = \begin{bmatrix} \lambda_3 + \lambda_1 & \lambda_4 & \lambda_5 & & & & & & \\ \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & & & & & \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & \lambda_5 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \alpha_4 & \lambda_5 & & \\ & & & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & \lambda_4 & & \\ & & & & \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 + \lambda_5 & & \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} \mu_3 + \beta_1 & \mu_4 & \mu_5 & & & & & & \\ \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & & & & & \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \\ & & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & \mu_5 & & \\ & & & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 & \mu_4 & & \\ & & & & \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 + \mu_5 & & \end{bmatrix},$$

$$U^* = [u_1 \quad u_2 \quad \dots \quad u_{J-2} \quad u_{J-1}]^T$$

olmak üzere

$$CU^{n+1} = DU^{*n} \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3.4)$$

şeklinde matris formunda yazılır. Burada ilk olarak $n = 0$ için (4.3.2) denklemiyle verilen denklem sistemi çözülür. Elde edilen U^1 çözümü (4.3.4) denklemiyle verilen denklem sisteminde U^{*0} yerine yazılarak (4.3.4) denklem sistemi çözülerek U^1 çözümü elde edilir. Bu şekilde denklem sistemleri ardışık olarak çözülerek istenilen T zamanında nümerik sonuçlar elde edilir. U^1 değerini hesaplamak için gerekli olan U^0 değeri (4.0.4) ile verilen başlangıç şartından elde edilir. (4.3.3) denklemine uygulanan lineerleştirmeden kaynaklanan hatayı azaltmak için Kısım 3.3'te verildiği gibi (4.3.4) denklem sistemine her bir zaman adımında iç iterasyon bir kaç kez uygulanarak sonuçların iyileştirilmesi sağlanır.

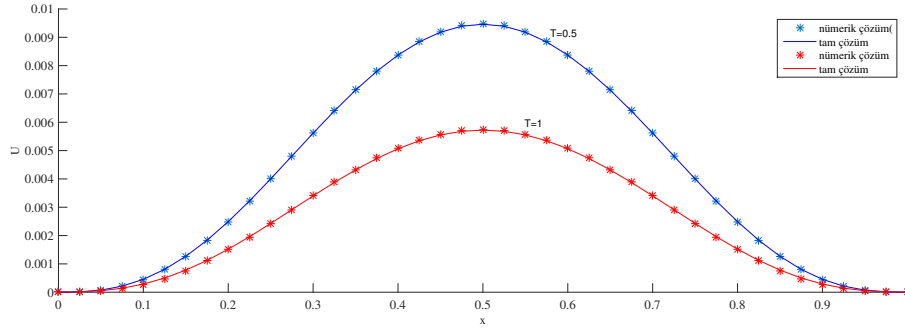
4.3.1 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, Bölüm 2'de verilen model problemlere ZKSF LİN-3 şeması uygulanarak elde edilen nümerik sonuçların mevcut tam çözümle veya literatürdeki diğer araştırmacıların sonuçlarıyla kıyaslaması yapılarak grafikler çizildi.

Çizelge 4.9'de Problem 1'in $T = 1$ zamanında ZKSF LİN-3 ile $k = 0.01$ olmak üzere $J = 10, 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri verildi. Çizelge incelendiğinde k sabit

Çizelge 4.9 : Problem 1'in ZKSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 10, 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.

x	Nümerik Çözüm				Tam Çözüm
	$J = 10$	$J = 20$	$J = 40$	$J = 80$	
0.1	0.0005417004	0.0003440076	0.0002876028	0.0002730651	0.0002681841
0.2	0.0016395237	0.0015532187	0.0015192415	0.0015099718	0.0015068342
0.3	0.0032492784	0.0033848400	0.0034024576	0.0034058447	0.0034069315
0.4	0.0046773634	0.0050033044	0.0050661863	0.0050807439	0.0050855654
0.5	0.0052430591	0.0056424754	0.0057229374	0.0057418406	0.0057481163
0.6	0.0046757025	0.0050029212	0.0050660918	0.0050807198	0.0050855654
0.7	0.0032468551	0.0033842848	0.0034023210	0.0034058099	0.0034069315
0.8	0.0016375816	0.0015527807	0.0015191341	0.0009315577	0.0015068342
0.9	0.0005409666	0.0003438490	0.0002875643	0.0002730554	0.0002681841
L_2	$2.87071e-4$	$6.47521e-5$	$1.58658e-5$	$3.96826e-6$	
L_∞	$5.05057e-4$	$1.05640e-4$	$2.51789e-5$	$6.27563e-6$	



Şekil 4.5 : Problem 1'in ZKSF LİN-3 ile $T = 0.5, T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

tutulup J bölüntü sayısı arttıkça hata normlarının küçüldüğü ve nümerik sonuçların analitik sonuçlara gittikçe yaklaştığı görülmektedir. Çizelge 4.10'de Problem 1'in ZKSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.1, 0.01, 0.001$ için nümerik ve tam çözümleri verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere J sabit değeri için küçülen k değerleri ile nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı görülmektedir. Çizelge 4.11'de Problem 1'in $T = 1$ zamanında $k = h^2$ olduğunda $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}, \frac{1}{160}$ için L_2 ve L_∞ hata normları Atouani ve arkadaşları [11] tarafından verilen sonuçlar ile kıyaslanarak verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere, h konum adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının da küçüldüğü gözlemlendi. Şekil 4.5'te Problem 1'in $T = 0.5$ ve $T = 1$ zamanında $J = 40, k = h^2$ için tam ve nümerik çözüm grafikleri yer almaktadır. Şekilden iki grafiğin üst üste olduğu görülmektedir. Bu da nümerik çözüm ile tam çözümün birbirine çok yakın ve uyumlu oldukları anlamına gelmektedir. Bu durum Çizelge 4.11 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan ZKSF LİN-3 şeması tam çözüme çok yakın sonuçlara ulaştırmaktadır.

Çizelge 4.10 : Problem 1'in ZKSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.1, 0.01, 0.001$ için nümerik ve tam çözümleri.

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.1$	$k = 0.01$	$k = 0.001$	
0.1	0.0002872288	0.0002875890	0.0002875924	0.0002681841
0.2	0.0015170881	0.0015192032	0.0015192237	0.0015068342
0.3	0.0033975882	0.0034024071	0.0034024545	0.0034069315
0.4	0.0050589357	0.0050661501	0.0050662216	0.0050855654
0.5	0.0057147694	0.0057229371	0.0057230188	0.0057481163
0.6	0.0050588943	0.0050661277	0.0050662006	0.0050855654
0.7	0.0033975253	0.0034023712	0.0034024204	0.0034069315
0.8	0.0015170363	0.0015191722	0.0015191942	0.0015068342
0.9	0.0002872101	0.0002875781	0.0002875820	0.0002681841
L_2	$1.91620e-5$	$1.58659e-5$	$1.58367e-5$	
L_∞	$3.33468e-5$	$2.51791e-5$	$2.50974e-5$	

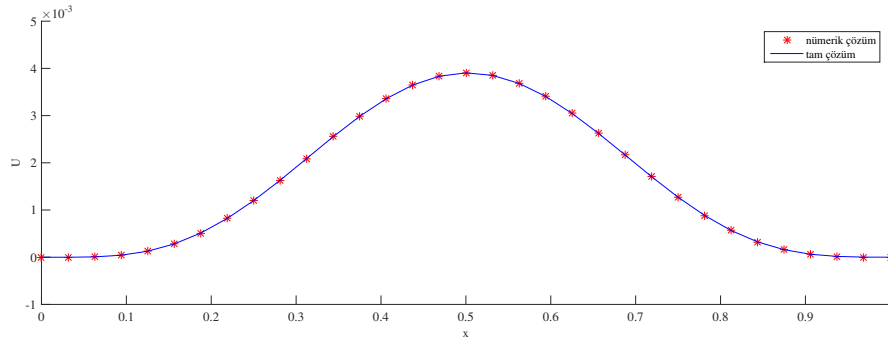
Çizelge 4.11 : ZKSF LİN-3 şeması ile Problem 1'in $T = 1$ zamanında $k = h^2$ için hata normlarının kıyaslanması.

h	ZKSF LİN-3		[11]	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
$\frac{1}{20}$	$6.01861e-5$	$9.30849e-5$	$7.03223e-6$	$1.20408e-5$
$\frac{1}{40}$	$1.48016e-5$	$2.20023e-5$	$1.79433e-6$	$3.07175e-6$
$\frac{1}{80}$	$3.68696e-6$	$5.42104e-6$	$4.51615e-7$	$7.72899e-7$
$\frac{1}{160}$	$9.23306e-7$	$1.35884e-6$	$1.13476e-7$	$1.94085e-7$

Çizelge 4.12’de Problem 2’nin $T = 10$ anında $k = 0.1$ olduğunda $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ için L_2 ve L_∞ normları ve bu hata normlarından L_∞ hata normu Hu ve Zheng [9] tarafından verilen L_∞ hata normu ile kıyaslanarak verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere h konum adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının da küçüldüğü gözlemlendi. Şekil 4.6’da Problem 2’nin $T = 10$ zamanında $J = 32$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri yer almaktadır. Şekil incelendiğinde nümerik ve tam çözümlerin grafiklerinin üst üste geldiği ve tek bir grafik gibi görülmektedirler. Bu da nümerik ve tam çözümün birbiri ile uyumlu olduğunu göstermektedir. Bu durum Çizelge 4.12 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan ZKSF LİN-3 şeması tam çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir.

Çizelge 4.12 : ZKSF LİN-3 şeması ile Problem 2’nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hata normlarının kıyaslanması.

h	ZKSF LİN-3		[9]
	L_2	L_∞	L_∞
$\frac{1}{8}$	$3.66816e-6$	$5.08002e-6$	$5.4204e-7$
$\frac{1}{16}$	$9.49444e-7$	$1.32876e-6$	$1.0197e-7$
$\frac{1}{32}$	$2.32497e-7$	$3.29193e-7$	$2.3657e-8$



Şekil 4.6 : Problem 2’nin ZKSF LİN-3 ile $T = 10$ zamanında $J = 32$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

5. KONUMA GÖRE PARÇALANAN ROSENAU DENKLEMİNİN KORUNUMLU SONLU FARK YAKLAŞIMIYLA NÜMERİK ÇÖZÜMÜ

Bu bölümde,

$$v = u_{xx}$$

dönüşümü kullanılarak (1.0.2) ile verilen Rosenau denklemi

$$u_t + au_{xxxxt} + bu_x + c(u^p)_x = g(x, t) \quad (5.0.1)$$

$$v - u_{xx} = 0 \quad (5.0.2)$$

şeklinde konuma göre parçalanarak diferansiyel denklem sistemine dönüştürüldü. Elde edilen diferansiyel denklem sisteminin başlangıç şartı

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x) \quad (5.0.3)$$

ve sınır şartları

$$\left. \begin{aligned} u(x_l, t) = u(x_r, t) = 0, \quad v(x_l, t) = v(x_r, t) = 0 \\ u_x(x_l, t) = u_x(x_r, t) = 0, \quad v_x(x_l, t) = v_x(x_r, t) = 0 \end{aligned} \right\}, \quad t \in (0, T] \quad (5.0.4)$$

olarak alındı. (5.0.1) ve (5.0.2) denklemlerine

$$(u_j^n)_t + a(v_j^n)_{x\bar{t}} + b(u_j^{n+1/2})_{\hat{x}} + c(u_j^{n+1/2})_{\hat{x}}^p = g_j^{n+1/2} \quad (5.0.5)$$

$$(u_j^{n+1/2})_{x\bar{x}} - (v_j^{n+1/2}) = 0 \quad (5.0.6)$$

şeklinde korunumlu sonlu fark (KKSF) şeması uygulanarak nümerik olarak çözüldü. Konuma göre parçalanmış olan denklemlerden (5.0.5) denkleminde yer alan lineer olmayan terim yerine üç farklı lineerleştirme tekniği kullanıldı. Daha sonra bu şemalar kullanılarak Bölüm 2’de verilen model problemlerin nümerik çözümleri bulundu ve L_2 ve L_∞ hata normları hesaplandı. Elde edilen sonuçlar birbirleri ya da literatürde mevcut olan diğer araştırmacıların verdikleri sonuçlar ile karşılaştırıldı.

5.1 Lineerleştirme 1 (LİN-1)

KKSF şemasının ilk denklemi olan (5.0.5) de yer alan $\left(u_j^{n+1/2}\right)_{\hat{x}}^p$ lineer olmayan terimi için Bölüm 3'te verilen LİN-1 lineerleştirilmesi yapıldıktan sonra (5.0.5) denkleminde bulunan türevler yerine

$$\left(u_j^n\right)_t = \frac{u_j^{n+1} - u_j^n}{k} \quad (5.1.1)$$

$$\left(u_j^{n+1/2}\right)_{\hat{x}} = \frac{u_{j+1}^{n+1} - u_{j-1}^{n+1}}{4h} + \frac{u_{j+1}^n - u_{j-1}^n}{4h} \quad (5.1.2)$$

$$\left(v_j^n\right)_{x\bar{x}} = \frac{1}{kh^2} \left(v_{j+1}^{n+1} - 2v_j^{n+1} + v_{j-1}^{n+1} - v_{j+1}^n + 2v_j^n - v_{j-1}^n\right) \quad (5.1.3)$$

şeklinde korunumlu sonlu fark yaklaşımları yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\frac{b}{4h} - \frac{c\Psi_1}{4h} - \frac{c\Psi_3}{4h}, & \beta_1 &= \frac{a}{kh^2}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{k}, & \beta_2 &= \frac{-2a}{kh^2}, \\ \alpha_3 &= \frac{b}{4h} + \frac{c\Psi_1}{4h} + \frac{c\Psi_2}{4h}, & \beta_3 &= \frac{a}{kh^2} \end{aligned}$$

olmak üzere $j = 1, 2, \dots, J-1$ için

$$\begin{aligned} \alpha_1 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_2 u_j^{n+1} + \alpha_3 u_{j+1}^{n+1} + \beta_1 v_{j-1}^{n+1} + \beta_2 v_j^{n+1} + \beta_3 v_{j+1}^{n+1} = \\ -\alpha_1 u_{j-1}^n + \alpha_2 u_j^n - \alpha_3 u_{j+1}^n + \beta_1 v_{j-1}^n + \beta_2 v_j^n + \beta_3 v_{j+1}^n + g_j^{n+1/2} \end{aligned} \quad (5.1.4)$$

şeklinde bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir.

Benzer şekilde KKSF şemasında yer alan (5.0.6) ile verilen denklemde yer alan türevler için

$$\left(u_j^{n+1/2}\right)_{x\bar{x}} = \frac{u_{j+1}^{n+1} + u_{j+1}^n}{2h^2} - \frac{2\left(u_j^{n+1} + u_j^n\right)}{2h^2} + \frac{u_{j-1}^{n+1} + u_{j-1}^n}{2h^2} \quad (5.1.5)$$

$$\left(v_j^{n+1/2}\right) = \frac{v_j^{n+1} + v_j^n}{2} \quad (5.1.6)$$

yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\gamma_1 = \frac{1}{2h^2}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{h^2}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{2h^2}, \quad \theta_1 = -\frac{1}{2}$$

olmak üzere $j = 1, 2, \dots, J-1$ için

$$\begin{aligned} \gamma_1 u_{j-1}^{n+1} + \gamma_2 u_j^{n+1} + \gamma_3 u_{j+1}^{n+1} + \theta_1 v_j^{n+1} = \\ -\gamma_1 u_{j-1}^n - \gamma_2 u_j^n - \gamma_3 u_{j+1}^n + \theta_1 v_j^n \end{aligned} \quad (5.1.7)$$

şeklinde bir lineer cebirsel denklem sistemi elde edilir. (5.1.4) ve (5.1.7) denklem sistemlerindeki u_0, v_0, u_J ve v_J noktaları (5.0.4) denkleminle verilen sınır şartları kullanılarak yok edilirse

$$\begin{aligned}
 P &= \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \end{bmatrix}_{(J-1) \times (J-1)}, & R &= \begin{bmatrix} \beta_2 & \beta_3 & & & & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \\ & & & \beta_1 & \beta_2 & \end{bmatrix}_{(J-1) \times (J-1)} \\
 S &= \begin{bmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & & & & \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \\ & & & \gamma_1 & \gamma_2 & \end{bmatrix}_{(J-1) \times (J-1)}, & F &= \begin{bmatrix} \theta_1 & & & & & \\ & \theta_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \theta_1 & & \\ & & & & \theta_1 & \\ & & & & & \theta_1 \end{bmatrix}_{(J-1) \times (J-1)}, \\
 K &= \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\alpha_3 & & & & \\ -\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_3 & \\ & & -\alpha_1 & \alpha_2 & & \end{bmatrix}_{(J-1) \times (J-1)}, \\
 Z &= [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{J-2} \ u_{J-1} \ v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{J-2} \ v_{J-1}]^T, \\
 G &= \left[\frac{g_1^{n+1} + g_1^n}{2} \ \frac{g_2^{n+1} + g_2^n}{2} \ \dots \ \frac{g_{J-2}^{n+1} + g_{J-2}^n}{2} \ \frac{g_{J-1}^{n+1} + g_{J-1}^n}{2} \ 0 \ \dots \ 0 \right]^T
 \end{aligned}$$

olmak üzere bu iki denklem sistemi birleştirilerek

$$AZ^{n+1} = BZ^n + G, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.1.8)$$

şeklinde matris formunda yazılır. Burada A ve B matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} P & R \\ S & F \end{bmatrix}_{(2J-2) \times (2J-2)}, \quad B = \begin{bmatrix} K & R \\ -S & -F \end{bmatrix}_{(2J-2) \times (2J-2)}$$

şeklinde. $n = 0, 1, 2, \dots$ için (5.1.8) denklem sistemi ardışık olarak çözülerek istenilen T zamanında nümerik sonuçlar elde edilir. Z^1 değerini hesaplamak için gerekli olan Z^0 değeri (5.0.3) ile verilen başlangıç şartından elde edilir. Tezin daha sonraki bölümlerinde bu şema kısaca KKSFLİN-1 olarak isimlendirildi.

5.1.1 Kararlılık Analizi

Bu bölümde KKSF şemasında LİN-1 lineerleştirilmesi uygulanarak elde edilen lineer şemanın von Neumann yöntemiyle kararlılık analizi yapıldı. Bu amaçla (5.1.4) ve (5.1.7) şeklinde bulunan sonlu fark şemalarında $i = \sqrt{-1}$ olmak üzere

$$u_j^n = P \xi^n e^{ij\theta}, \quad v_j^n = W \xi^n e^{ij\theta}$$

yazılarak ve Euler özdeşliğinden yararlanılarak

$$\begin{aligned} \tilde{A} &= \frac{2 \sin \theta (1+2M)}{4h}, \quad \tilde{B} = \frac{2 \cos \theta - 2}{kh^2}, \quad \tilde{C} = \frac{1}{k}, \\ \tilde{D} &= \frac{2 \cos \theta - 2}{2h^2}, \quad \tilde{E} = \frac{-1}{2} \end{aligned}$$

olmak üzere

$$P [\xi (\tilde{C} + i\tilde{A}) - (\tilde{C} - i\tilde{A})] + W [\xi \tilde{B} - \tilde{B}] = 0 \quad (5.1.9)$$

$$(\xi + 1) (P\tilde{D} + W\tilde{E}) = 0 \quad (5.1.10)$$

şeklinde bilinmeyenleri P ve W olan iki denklemden oluşan bir homojen denklem sistemi elde edilir. Bu homojen denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümünün olması için katsayılar matrisinin determinatının sıfır olması gerekir. Bu durumda

$$\begin{vmatrix} \xi (\tilde{C} + i\tilde{A}) - (\tilde{C} - i\tilde{A}) & \xi \tilde{B} - \tilde{B} \\ (\xi + 1)\tilde{D} & (\xi + 1)\tilde{E} \end{vmatrix} = 0$$

olmalıdır. Böylece büyüme çarpanı

$$\xi = \frac{-\tilde{D}\tilde{B} + \tilde{E}\tilde{C} - i\tilde{E}\tilde{A}}{-\tilde{D}\tilde{B} + \tilde{E}\tilde{C} + i\tilde{E}\tilde{A}}, \quad \xi = -1$$

ve $|\xi| \leq 1$ olarak bulunur. Dolayısıyla elde edilen korunumlu sonlu fark şeması kararlıdır.

5.1.2 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, Bölüm 2’de verilen model problemlere KKSF LİN-1 şeması uygulanarak elde edilen nümerik sonuçların mevcut tam çözümle veya literatürdeki diğer araştırmacıların sonuçlarıyla kıyaslaması yapılarak grafikler çizildi.

Çizelge 5.1’de Problem 1’in KKSF LİN-1 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ olmak üzere $J = 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri verildi. Çizelge incelendiğinde k sabit olup J

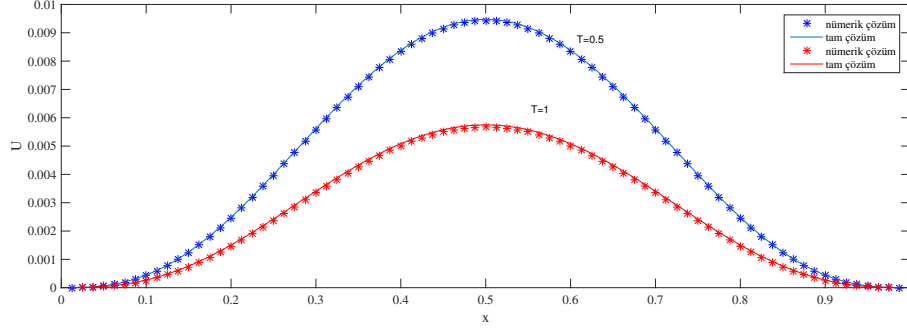
Çizelge 5.1 : Problem 1'in KKSF LİN-1 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$J = 20$	$J = 40$	$J = 80$	
0.1	-0.0000729399	0.0001848155	0.0002490125	0.0002681841
0.2	0.0008215114	0.0013455393	0.0014761164	0.0015068342
0.3	0.0024372349	0.0031869081	0.0033737618	0.0034069315
0.4	0.0039306789	0.0048301735	0.0050544009	0.0050855654
0.5	0.0045287068	0.0054809583	0.0057183467	0.0057481163
0.6	0.0039292700	0.0048299695	0.0050544951	0.0050855654
0.7	0.0024349148	0.0031865662	0.0033739094	0.0034069315
0.8	0.0008191302	0.0013451798	0.0014762569	0.0015068342
0.9	-0.0000744530	0.0001845817	0.0002490949	0.0002681841
L_2	$8.49633e-4$	$1.91038e-4$	$2.76084e-5$	
L_∞	$1.21940e-3$	$2.67157e-4$	$3.32249e-5$	

Çizelge 5.2 : Problem 1'in KKSF LİN-1 şeması ile $T = 1$ zamanında $k = h^2$ için hata normlarının kıyaslanması.

h	KKSF LİN-1		[11]	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
$\frac{1}{20}$	$8.73860e-4$	$1.26114e-3$	$7.03223e-6$	$1.20408e-5$
$\frac{1}{40}$	$2.18143e-4$	$3.14859e-4$	$1.79433e-6$	$3.07175e-6$
$\frac{1}{80}$	$5.45213e-5$	$7.86969e-5$	$4.51615e-7$	$7.72899e-7$

bölüntü sayısının artışıyla birlikte nümerik sonuçların tam çözüme giderek yaklaştığı ve hata normlarının küçüldüğü görülmektedir. Çizelge 5.2'de Problem 1'in $T = 1$ zamanında $k = h^2$ olduğunda $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}, \frac{1}{160}$ için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Atouani ve arkadaşları [11] tarafından elde edilen hata normları ile kıyaslaması verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere h konum adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının da küçüldüğü gözlemlendi ve Atouani ve arkadaşları [11] tarafından elde edilen hata normlarına yakın olduğu görüldü. Şekil 5.1'de Problem 1'in $T = 0.5$ ve $T = 1$ zamanında $J = 80$, $k = h^2$ için tam ve nümerik çözüm grafikleri yer almaktadır. Şekilden nümerik ve tam çözümlere ait olan iki grafiğin üst üste olduğu görülmektedir. Bu da nümerik ve tam çözümün birbiri ile uyumlu olduğunu göstermektedir. Çizelge 5.3'de Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ olduğunda ve $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Hu ve Zheng [9] tarafından verilen L_∞ hata normu ile kıyaslanarak verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere h konum adımının küçülmesiyle beraber hata normları da giderek küçüldüğü ve [9]'da yer alan L_∞ hata normunun daha küçük olduğu görüldü. Şekil 5.2'de Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $J = 16$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri yer almaktadır. Şekil incelendiğinde nümerik ve tam çözümlerin grafiklerinin üst üste



Şekil 5.1 : Problem 1'in KKSF LİN-1 ile $T = 0.5$, $T = 1$ zamanında $J = 80$ ve $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

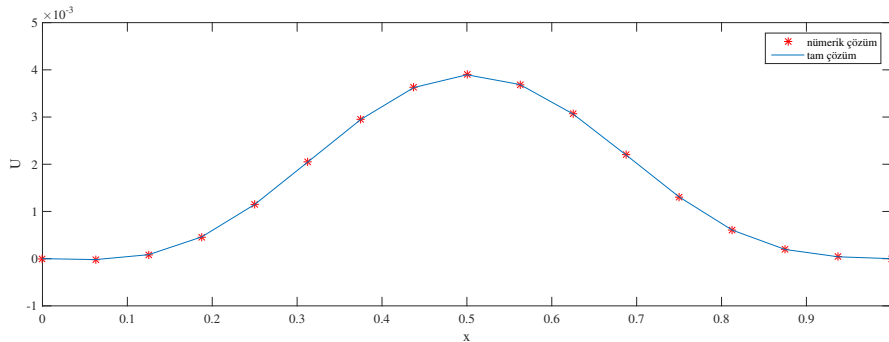
Çizelge 5.3 : KKSF LİN-1 şeması ile Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.

h	KKSF LİN-1		[9]
	L_2	L_∞	L_∞
$\frac{1}{8}$	$2.83542e-6$	$4.06575e-6$	$5.4204e-7$
$\frac{1}{16}$	$7.21999e-7$	$1.04055e-6$	$1.0197e-7$
$\frac{1}{32}$	$1.75275e-7$	$2.57159e-7$	$2.3657e-8$

olduğu görülmektedirler. Bu da nümerik çözüm ile tam çözümün birbiri ile uyumlu olduğunu göstermektedir.

5.2 Lineerleştirme 2:Rubin-Graves (LİN-2)

KKSF şemasının ilk denklemleri olan (5.0.5) de yer alan $\left(u_j^{n+1/2}\right)_{\hat{x}}$ lineer olmayan terimi için Bölüm 3'te verilen LİN-2 lineerleştirilmesi yapıldıktan sonra (5.0.5) denkleminde bulunan türevler yerine (5.1.1)-(5.1.3) ile verilen korunumlu sonlu fark yaklaşımları yazılarak gerekli



Şekil 5.2 : Problem 2'nin KKSF LİN-2 ile $T = 10$ zamanında $J = 16$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{b}{4h} - \frac{c\varphi_1 p}{4h}, & \sigma_1 &= \frac{b}{4h} + \frac{c\varphi_1 p(2-p)}{4h}, & \beta_1 &= \frac{a}{kh^2}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{k} + \frac{c\varphi_2 p}{4h}, & \sigma_2 &= \frac{1}{k}, & \beta_2 &= \frac{-2a}{kh^2}, \\ \alpha_3 &= \frac{b}{4h} + \frac{c\varphi_1 p}{4h}, & \sigma_3 &= \frac{b}{4h} - \frac{c\varphi_1 p(2-p)}{4h}, & \beta_3 &= \frac{a}{kh^2}\end{aligned}$$

olmak üzere $j = 1, 2, \dots, J-1$ için

$$\begin{aligned}\alpha_1 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_2 u_j^{n+1} + \alpha_3 u_{j+1}^{n+1} + \beta_1 v_{j-1}^{n+1} + \beta_2 v_j^{n+1} + \beta_3 v_{j+1}^{n+1} = \\ \sigma_1 u_{j-1}^n + \sigma_2 u_j^n + \sigma_3 u_{j+1}^n + \beta_1 v_{j-1}^n + \beta_2 v_j^n + \beta_3 v_{j+1}^n + g_j^{n+1/2}\end{aligned}\quad (5.2.1)$$

şeklinde bir lineer cebirsel denklem sistemi bulunur. Benzer şekilde (5.0.6) ile verilen denklemde bulunan türevler yerine (5.1.5) ve (5.1.6) ile verilen korunumlu sonlu fark yaklaşımları yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\gamma_1 = \frac{1}{2h^2}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{h^2}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{2h^2}, \quad \theta_1 = -\frac{1}{2}$$

olmak üzere $j = 1, 2, \dots, J-1$ için

$$\begin{aligned}\gamma_1 u_{j-1}^{n+1} + \gamma_2 u_j^{n+1} + \gamma_3 u_{j+1}^{n+1} + \theta_1 v_j^{n+1} = \\ -\gamma_1 u_{j-1}^n - \gamma_2 u_j^n - \gamma_3 u_{j+1}^n + \theta_1 v_j^n\end{aligned}\quad (5.2.2)$$

şeklinde bir lineer cebirsel denklem sistemi bulunur. (5.2.1) ve (5.2.2) denklem sistemlerindeki u_0, v_0, u_J ve v_J noktaları (5.0.4) denklemiyle verilen sınır şartları kullanılarak yok edilirse

$$\begin{aligned}P &= \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix}_{(J-1) \times (J-1)}, & R &= \begin{bmatrix} \beta_2 & \beta_3 & & & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ & & & \beta_1 & \beta_2 \end{bmatrix}_{(J-1) \times (J-1)}, \\ S &= \begin{bmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & & & \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ & & & \gamma_1 & \gamma_2 \end{bmatrix}_{(J-1) \times (J-1)}, & F &= \begin{bmatrix} \theta_1 & & & & \\ & \theta_1 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & \theta_1 & \\ & & & & \theta_1 \end{bmatrix}_{(J-1) \times (J-1)}, \\ K &= \begin{bmatrix} \sigma_2 & \sigma_3 & & & \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ & & & \sigma_1 & \sigma_2 \end{bmatrix}_{(J-1) \times (J-1)},\end{aligned}$$

$$Z = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{J-2} \ u_{J-1} \ v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{J-2} \ v_{J-1}]^T,$$

$$G = \left[\frac{g_1^{n+1} + g_1^n}{2} \quad \frac{g_2^{n+1} + g_2^n}{2} \quad \dots \quad \frac{g_{J-2}^{n+1} + g_{J-2}^n}{2} \quad \frac{g_{J-1}^{n+1} + g_{J-1}^n}{2} \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right]^T$$

olmak üzere bu iki denklem sistemi birleştirilerek

$$AZ^{n+1} = BZ^n + G, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.2.3)$$

şeklinde matris formunda yazılır. Burada A ve B matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} P & R \\ S & F \end{bmatrix}_{(2J-2) \times (2J-2)}, \quad B = \begin{bmatrix} K & R \\ -S & -F \end{bmatrix}_{(2J-2) \times (2J-2)}$$

şeklinindedir. $n = 0, 1, 2, \dots$ için (5.2.3) denklem sistemi ardışık olarak çözümlenerek istenilen T zamanında nümerik sonuçlar elde edilir. Z^1 değerini hesaplamak için gerekli olan Z^0 değeri (5.0.3) ile verilen başlangıç şartından elde edilir. Tezin daha sonraki bölümlerinde bu şema kısaca KKSFLİN-2 olarak isimlendirildi.

5.2.1 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, Bölüm 2’de verilen model problemlere KKSFLİN-2 şeması uygulanarak elde edilen nümerik sonuçların mevcut tam çözümle veya literatürdeki diğer araştırmacıların sonuçlarıyla kıyaslaması yapılarak grafikler çizildi.

Çizelge 5.4’de Problem 1’in KKSFLİN-2 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ olmak üzere $J = 20, 40, 80$ için nümerik çözüm ve tam çözümleri verildi. Çizelge incelendiğinde k sabit tutulup J bölüntü sayısının artışıyla birlikte nümerik sonuçların tam çözüme giderek yaklaştığı ve hata normlarının küçüldüğü görülmektedir. Çizelge 5.5’de Problem 1’in KKSFLİN-2 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001$ için nümerik ve tam çözümleri verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere J sabit değeri için küçülen k değerleri ile nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı görülmektedir. Çizelge 5.6’de Problem 1 için $T = 1$ zamanında $k = h^2$ olduğunda $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}, \frac{1}{160}$ için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Atouani ve arkadaşları [11] tarafından verilen L_2 ve L_∞ hata normları ile kıyaslandı. Çizelgeden görüldüğü üzere h konum adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının da küçüldüğü ve [11] tarafından daha iyi sonuçlar elde edildiği görüldü. Şekil 5.3’de Problem 1’in $T = 0.5$ ve $T = 1$ zamanında $J = 80$, $k = h^2$ için tam ve nümerik çözüm grafikleri yer almaktadır. Tam ve nümerik çözümlere ait olan iki grafiğin birbirine yakın olduğu görülmektedir. Bu da nümerik ve tam çözümün birbiri

Çizelge 5.4 : Problem 1'in KKSFLİN-2 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.

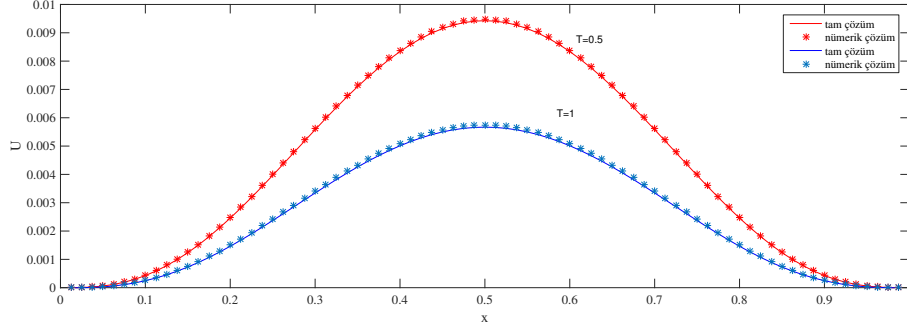
x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$J = 20$	$J = 40$	$J = 80$	
0.1	-0.0000768924	0.0001821569	0.0002466761	0.0002681841
0.2	0.0008051825	0.0013318415	0.0014630742	0.0015068342
0.3	0.0024030710	0.0031565092	0.0033443014	0.0034069315
0.4	0.0038810427	0.0047850561	0.0050104100	0.0050855654
0.5	0.0044729488	0.0054299855	0.0056685668	0.0057481163
0.6	0.0038794730	0.0047846999	0.0050103541	0.0050855654
0.7	0.0024004899	0.0031559206	0.0033442057	0.0034069315
0.8	0.0008025400	0.0013312353	0.0014629716	0.0015068342
0.9	-0.0000785668	0.0001817711	0.0002466088	0.0002681841
L_2	$8.82011e-4$	$2.20010e-4$	$5.50047e-5$	
L_∞	$1.27516e-3$	$3.18130e-4$	$7.95495e-5$	

Çizelge 5.5 : Problem 1'in KKSFLİN-2 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001$ için nümerik ve tam çözümleri.

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.01$	$k = 0.001$	$k = 0.0001$	
0.1	0.0001820819	0.0001820855	0.0001820857	0.0002681841
0.2	0.0013317148	0.0013317361	0.0013317365	0.0015068342
0.3	0.0031563753	0.0031564241	0.0031564249	0.0034069315
0.4	0.0047849688	0.0047850423	0.0047850437	0.0050855654
0.5	0.0054299833	0.0054300674	0.0054300691	0.0057481163
0.6	0.0047847831	0.0047848586	0.0047848603	0.0050855654
0.7	0.0031560511	0.0031561030	0.0031561045	0.0034069315
0.8	0.0013313595	0.0013313838	0.0013313850	0.0015068342
0.9	0.0001818448	0.0001818502	0.0001818508	0.0002681841
L_2	$2.20011e-4$	$2.19963e-4$	$2.19962e-4$	
L_∞	$3.18132e-4$	$3.18048e-4$	$3.18047e-4$	

Çizelge 5.6 : Problem 1'in KKSFLİN-2 şeması ile $T = 1$ zamanında $k = h^2$ için hata normlarının kıyaslanması.

h	KKSFLİN-2		[11]	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
$\frac{1}{20}$	$8.81960e-4$	$1.27508e-3$	$7.03223e-6$	$1.20408e-5$
$\frac{1}{40}$	$2.19962e-4$	$3.18046e-4$	$1.79433e-6$	$3.07175e-6$
$\frac{1}{80}$	$5.49600e-5$	$7.94712e-5$	$4.51615e-7$	$7.72899e-7$
$\frac{1}{160}$	$1.37018e-5$	$1.98088e-5$	$1.13476e-7$	$1.94085e-7$



Şekil 5.3 : Problem 1'in KKSF LİN-2 ile $T = 0.5$, $T = 1$ zamanında $J = 80$ ve $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

Çizelge 5.7 : KKSF LİN-2 şeması ile Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.

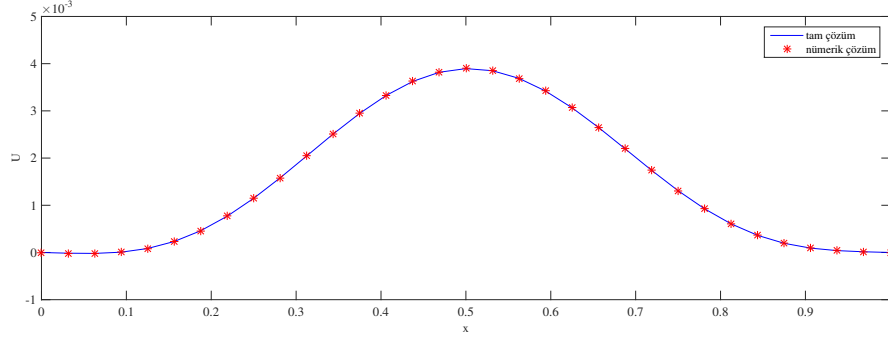
h	KKSF LİN-2		[9]
	L_2	L_∞	L_∞
$\frac{1}{8}$	$2.83542e - 6$	$4.06575e - 6$	$5.4204e - 7$
$\frac{1}{16}$	$7.21999e - 7$	$1.04055e - 6$	$1.0197e - 7$
$\frac{1}{32}$	$1.75275e - 7$	$2.57158e - 7$	$2.3657e - 8$

ile uyumlu olduğunu göstermektedir. Bu durum Çizelge 5.6 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan KKSF LİN-2 şeması tam çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir.

Çizelge 5.7'de Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ olduğunda ve $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Hu ve Zheng [9] tarafından verilen sonuçlar ile kıyaslandı. Çizelgeden görüldüğü üzere h konum adımının küçülmesiyle beraber hata normlarının da giderek küçüldüğü ve [9]'da yer alan L_∞ hata normunun daha küçük olduğu görüldü. Şekil 5.4 ile verilen grafikte Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $J = 32$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafiği birlikte yer almaktadır. Şekil incelendiğinde nümerik ve tam çözümlerin grafikleri üst üste geldiği ve tek bir grafik gibi görülmektedirler. Bu da nümerik çözüm ile tam çözümün birbiri ile uyumlu olduğunu göstermektedir. Bu durum Çizelge 5.7 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan KKSF LİN-2 şeması tam çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir.

5.3 Lineerleştirme 3 (LİN-3)

KKSF şemasının ilk denklemleri olan (5.0.5) de yer alan $\left(u_j^{n+1/2}\right)_x^p$ lineer olmayan terimi için Bölüm 3'te verilen LİN-3 lineerleştirilmesi yapıldıktan sonra (5.0.5) denkleminde bulunan türevler yerine (5.1.1)-(5.1.3) ile verilen korunumlu sonlu fark yaklaşımları yazılarak gerekli



Şekil 5.4 : Problem 2'nin $T = 10$ zamanında KKSF LİN-2 ile $J = 32$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

düzenlemeler yapılırsa

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= -\frac{b}{4h} - \frac{cz}{4h}, & \beta_1 &= \frac{a}{kh^2}, \\ \alpha_2 &= \frac{1}{k}, & \beta_2 &= -\frac{2a}{kh^2}, \\ \alpha_3 &= \frac{b}{4h} + \frac{cz}{4h}, & \beta_3 &= \frac{a}{kh^2}\end{aligned}$$

olmak üzere $j = 1, 2, \dots, J-1$ için

$$\begin{aligned}\alpha_1 u_{j-1}^{n+1} + \alpha_2 u_j^{n+1} + \alpha_3 u_{j+1}^{n+1} + \beta_1 v_{j-1}^{n+1} + \beta_2 v_j^{n+1} + \beta_3 v_{j+1}^{n+1} = \\ -\alpha_1 u_{j-1}^n + \alpha_2 u_j^n - \alpha_3 u_{j+1}^n + \beta_1 v_{j-1}^n + \beta_2 v_j^n + \beta_3 v_{j+1}^n + g_j^{n+1/2}\end{aligned}\quad (5.3.1)$$

şeklinde bir lineer cebirsel denklem sistemi bulunur.

Benzer şekilde KKSF şemasında yer alan (5.0.6) ile verilen denklemde yer alan türevler yerine (5.1.5) ve (5.1.6) ile verilen korunumlu sonlu fark yaklaşımları yazılarak gerekli düzenlemeler yapılırsa

$$\gamma_1 = \frac{1}{2h^2}, \quad \gamma_2 = -\frac{1}{h^2}, \quad \gamma_3 = \frac{1}{2h^2}, \quad \theta_1 = -\frac{1}{2}$$

olmak üzere $j = 1, 2, \dots, J-1$ için

$$\begin{aligned}\gamma_1 u_{j-1}^{n+1} + \gamma_2 u_j^{n+1} + \gamma_3 u_{j+1}^{n+1} + \theta_1 v_j^{n+1} = \\ -\gamma_1 u_{j-1}^n - \gamma_2 u_j^n - \gamma_3 u_{j+1}^n + \theta_1 v_j^n\end{aligned}\quad (5.3.2)$$

şeklinde bir lineer cebirsel denklem sistemi bulunur. (5.3.1) ve (5.3.2) denklem sistemlerindeki u_0, v_0, u_J ve v_J bilinmeyenleri (5.0.4) denklemiyle verilen sınır şartları kullanılarak yok edilirse

$$P = \begin{bmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 & & & & \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \\ & & & \alpha_1 & \alpha_2 & \end{bmatrix}_{(J-1) \times (J-1)}, \quad R = \begin{bmatrix} \beta_2 & \beta_3 & & & & \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 & \\ & & & \beta_1 & \beta_2 & \end{bmatrix}_{(J-1) \times (J-1)},$$

$$S = \begin{bmatrix} \gamma_2 & \gamma_3 & & & & \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 & \\ & & & \gamma_1 & \gamma_2 & \end{bmatrix}_{(J-1) \times (J-1)}, \quad F = \begin{bmatrix} \theta_1 & & & & & \\ & \theta_1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \theta_1 & & \\ & & & & \theta_1 & \end{bmatrix}_{(J-1) \times (J-1)},$$

$$K = \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\alpha_3 & & & & \\ -\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & -\alpha_1 & \alpha_2 & -\alpha_3 & \\ & & & -\alpha_1 & \alpha_2 & \end{bmatrix}_{(J-1) \times (J-1)},$$

$$Z = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_{J-2} \ u_{J-1} \ v_1 \ v_2 \ \dots \ v_{J-2} \ v_{J-1}]^T,$$

$$G = \left[\frac{g_1^{n+1} + g_1^n}{2} \ \frac{g_2^{n+1} + g_2^n}{2} \ \dots \ \frac{g_{J-2}^{n+1} + g_{J-2}^n}{2} \ \frac{g_{J-1}^{n+1} + g_{J-1}^n}{2} \ 0 \ \dots \ 0 \right]^T$$

olmak üzere bu iki denklem sistemi birleştirilerek

$$AZ^{n+1} = BZ^n + G, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.3.3)$$

şeklinde matris formunda yazılır. Burada A ve B matrisleri

$$A = \begin{bmatrix} P & R \\ S & F \end{bmatrix}_{(2J-2) \times (2J-2)}, \quad B = \begin{bmatrix} K & R \\ -S & -F \end{bmatrix}_{(2J-2) \times (2J-2)}$$

şeklinde $n = 0, 1, 2, \dots$ için (5.3.3) denklem sistemi ardışık olarak çözümlenerek istenilen T zamanında nümerik sonuçlar elde edilir. Z^1 değerini hesaplamak için gerekli olan Z^0 değeri (5.0.3) ile verilen başlangıç şartından elde edilir. (5.0.5) denklemine uygulanan lineerleştirilmeden kaynaklanan hatayı azaltmak için Kısım 3.3'te verildiği gibi (5.3.3) denklem sistemine her bir zaman adımında iç iterasyon bir kaç kez uygulanarak sonuçların iyileştirilmesi sağlanır.

Çizelge 5.8 : Problem 1'in KKSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ ve $J = 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri.

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$J = 20$	$J = 40$	$J = 80$	
0.1	-0.0000768739	0.0001821761	0.0002466955	0.0002681841
0.2	0.0008052138	0.0013318739	0.0014631068	0.0015068342
0.3	0.0024031041	0.0031565435	0.0033443358	0.0034069315
0.4	0.0038810643	0.0047850784	0.0050104324	0.0050855654
0.5	0.0044729493	0.0054299859	0.0056685672	0.0057481163
0.6	0.0038794522	0.0047846784	0.0050103325	0.0050855654
0.7	0.0024004574	0.0031558870	0.0033441719	0.0034069315
0.8	0.0008025092	0.0013312033	0.0014629394	0.0015068342
0.9	-0.0000785850	0.0001817521	0.0002465896	0.0002681841
L_2	$8.82010e-4$	$2.20009e-4$	$5.50045e-5$	
L_∞	$1.27516e-3$	$3.18130e-4$	$7.95491e-5$	

5.3.1 Nümerik Sonuçlar

Bu kısımda, Bölüm 2'de verilen model problemlere KKSF LİN-3 şeması uygulanarak elde edilen nümerik sonuçların mevcut tam çözümle veya literatürdeki diğer araştırmacıların sonuçlarıyla kıyaslaması yapılarak grafikler çizildi.

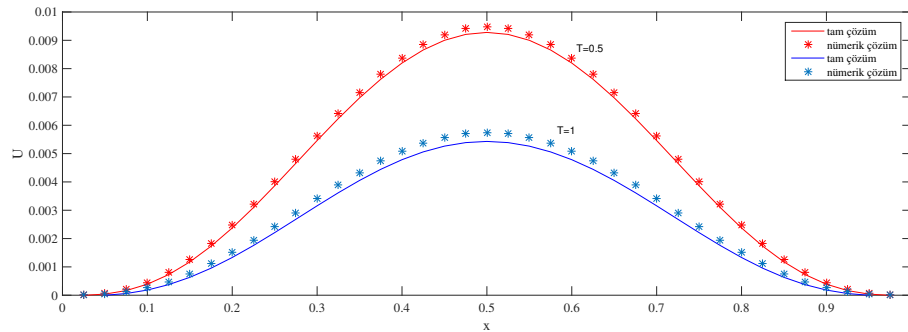
Çizelge 5.8'de Problem 1'in KKSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $k = 0.01$ olmak üzere $J = 20, 40, 80$ için nümerik ve tam çözümleri verildi. Çizelge incelendiğinde k sabit tutulup J bölüntü sayısının artışıyla birlikte nümerik sonuçların tam çözüme giderek yaklaştığı ve hata normlarının küçüldüğü görülmektedir. Çizelge 5.9'de Problem 1'in KKSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001$ için nümerik ve tam çözümleri verildi. Çizelgeden görüldüğü üzere J sabit değeri için küçülen k değerleri ile nümerik çözümlerin tam çözüme yaklaştığı görülmektedir. Çizelge 5.10'de Problem 1 için $T = 1$ zamanında $k = h^2$ olduğunda $h = \frac{1}{20}, \frac{1}{40}, \frac{1}{80}, \frac{1}{160}$ için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Atouani ve arkadaşları [11] tarafından verilen L_2 ve L_∞ hata normları ile kıyaslandı. Çizelgeden görüldüğü üzere h konum adımı küçüldükçe L_2 ve L_∞ hata normlarının da küçüldüğü ve [11] tarafından daha iyi sonuçlar elde edildiği görüldü. Şekil 5.5'de Problem 1'in $T = 0.5$ ve $T = 1$ zamanında $J = 40, k = h^2$ için tam ve nümerik çözüm grafiği birlikte yer almaktadır. Çözümlere ait olan iki grafiğin birbirine yakın olduğu görülmektedir. Bu da nümerik ve tam çözümün birbiri ile uyumlu olduğunu göstermektedir. Bu durum Çizelge 5.10 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan KKSF LİN-3 şeması tam çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir.

Çizelge 5.9 : Problem 1'in KKSF LİN-3 ile $T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = 0.01, 0.001, 0.0001$ için nümerik ve tam çözümleri.

x	Nümerik Çözüm			Tam Çözüm
	$k = 0.01$	$k = 0.001$	$k = 0.0001$	
0.1	0.0001821203	0.0001821248	0.0001821244	0.0002681841
0.2	0.0013317796	0.0013318023	0.0013318022	0.0015068342
0.3	0.0031564438	0.0031564940	0.0031564943	0.0034069315
0.4	0.0047850133	0.0047850878	0.0047850883	0.0050855654
0.5	0.0054299841	0.0054300682	0.0054300686	0.0057481163
0.6	0.0047847401	0.0047848147	0.0047848149	0.0050855654
0.7	0.0031559839	0.0031560343	0.0031560345	0.0034069315
0.8	0.0013312956	0.0013313185	0.0013313187	0.0015068342
0.9	0.0001818069	0.0001818114	0.0001818116	0.0002681841
L_2	$2.20011e-4$	$2.19963e-4$	$2.19962e-4$	
L_∞	$3.18132e-4$	$3.18048e-4$	$3.18047e-4$	

Çizelge 5.10 : Problem 1'in KKSF LİN-3 şeması ile $T = 1$ zamanında $k = h^2$ için hata normlarının kıyaslanması.

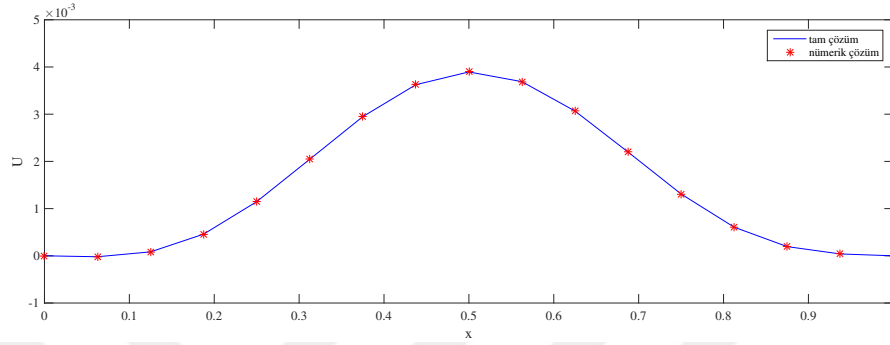
h	KKSF LİN-3		[11]	
	L_2	L_∞	L_2	L_∞
$\frac{1}{20}$	$8.81960e-4$	$1.27507e-3$	$7.03223e-6$	$1.20408e-5$
$\frac{1}{40}$	$2.19961e-4$	$3.18045e-4$	$1.79433e-6$	$3.07175e-6$
$\frac{1}{80}$	$5.49597e-5$	$7.94692e-5$	$4.51615e-7$	$7.72899e-7$
$\frac{1}{160}$	$1.38568e-5$	$2.00577e-5$	$1.13476e-7$	$1.94085e-7$



Şekil 5.5 : Problem 1'in KKSF LİN-3 ile $T = 0.5, T = 1$ zamanında $J = 40$ ve $k = h^2$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

Çizelge 5.11 : KKSF LİN-3 şeması ile Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ için hesaplanan hata normlarının kıyaslanması.

KKSF LİN-3		[9]	
h	L_2	L_∞	L_∞
$\frac{1}{8}$	$2.83542e-6$	$4.06575e-6$	$5.4204e-7$
$\frac{1}{16}$	$7.21999e-7$	$1.04055e-6$	$1.0197e-7$
$\frac{1}{32}$	$1.75275e-7$	$2.57159e-7$	$2.3657e-8$



Şekil 5.6 : Problem 2'nin $T = 10$ zamanında KKSF LİN-2 ile $J = 16$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafikleri.

Çizelge 5.11'de Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $k = 0.1$ olduğunda ve $h = \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}$ için L_2 ve L_∞ hata normları hesaplanarak Hu ve Zheng [9] tarafından verilen L_∞ hata normu ile kıyaslandı. Çizelgeden görüldüğü üzere h konum adımının küçülmesiyle beraber hata normlarının da giderek küçüldüğü ve [9]'da yer alan L_∞ hata normunun daha küçük olduğu görüldü. Şekil 5.6'de Problem 2'nin $T = 10$ zamanında $J = 16$, $k = 0.1$ için nümerik ve tam çözüm grafiği birlikte yer almaktadır. Şekil incelendiğinde nümerik ve tam çözümlerin grafiklerinin üst üste geldiği ve tek bir grafik gibi gözüktüğü görülmektedirler. Bu da nümerik ve tam çözümün birbiri ile uyumlu olduğunu göstermektedir. Bu durum Çizelge 5.11 ile birlikte göz önüne alındığında kullanılan KKSF LİN-3 şeması tam çözüme çok yakın sonuçlar vermektedir.

6. SONUÇLAR

Bu bölümde, Bölüm 3-5'te Rosenau denkleminin farklı yöntem ve lineerleştirme teknikleri kullanılarak korunumlu sonlu fark yaklaşımıyla elde edilen nümerik şemaların model problemlere uygulanmasıyla elde edilen sonuçlar her bir problem için kendi içerisinde karşılaştırıldı. Hangi lineerleştirmenin daha iyi sonuç verdiği çizelgeler halinde karşılaştırılarak verildi.

Çizelge 6.1 de Problem 1'e uygulanan KSF, ZKSF ve KKSF şemaları ile LİN-1-3 lineerleştirmeleri için L_2 hata normlarının birbirleri ve [11] tarafından verilen sonuçlarla karşılaştırılması verildi. KSF için LİN-1 ve LİN-3 lineerleştirmelerinin birbirine çok yakın olduğu ve h konum adımı küçüldükçe LİN-1 ile daha iyi sonuçlar elde edildiği ve ZKSF ve KKSF için de LİN-1 lineerleştirmesinin daha iyi sonuç verdiği görüldü. Çizelge 6.2 de Problem 1'e uygulanan KSF, ZKSF ve KKSF şemaları ile LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 lineerleştirmeleri için L_∞ hata normlarının birbirleri ve [11] tarafından verilen sonuçlarla karşılaştırılması verildi. KSF, ZKSF ve KKSF için LİN-1 ile daha iyi sonuçlar elde edildiği görüldü.

Çizelge 6.1 : Problem 1'e uygulanan KSF, ZKSF, KKSF şemalarının LİN-1, LİN-2, LİN-3 ile $k = h^2$ için $T = 1$ anında elde edilen L_2 hata normlarının karşılaştırması

	h	LİN - 1	LİN - 2	LİN - 3	[11]
KSF	$\frac{1}{20}$	$6.47222e - 5$	$6.47401e - 5$	$6.47222e - 5$	$7.03223e - 6$
	$\frac{1}{40}$	$1.58365e - 5$	$1.58414e - 5$	$1.58365e - 5$	$1.79433e - 6$
	$\frac{1}{80}$	$3.93932e - 6$	$3.94078e - 6$	$3.93928e - 6$	$4.51615e - 7$
	$\frac{1}{160}$	$9.83530e - 7$	$9.83821e - 7$	$9.83625e - 7$	$1.13476e - 7$
ZKSF	$\frac{1}{20}$	$6.00219e - 5$	$6.01861e - 5$	$6.01861e - 5$	$7.03223e - 6$
	$\frac{1}{40}$	$1.45154e - 5$	$1.48016e - 5$	$1.48016e - 5$	$1.79433e - 6$
	$\frac{1}{80}$	$3.32767e - 6$	$3.68696e - 6$	$3.68696e - 6$	$4.51615e - 7$
	$\frac{1}{160}$	$2.39398e - 6$	$9.23339e - 7$	$9.23306e - 7$	$1.13476e - 7$
KKSF	$\frac{1}{20}$	$8.73860e - 4$	$8.81960e - 4$	$8.81960e - 4$	$7.03223e - 6$
	$\frac{1}{40}$	$2.18143e - 4$	$2.19962e - 4$	$2.19961e - 4$	$1.79433e - 6$
	$\frac{1}{80}$	$5.45213e - 5$	$5.49600e - 5$	$5.49597e - 5$	$4.51615e - 7$
	$\frac{1}{160}$	$1.36239e - 5$	$1.37018e - 5$	$1.38568e - 5$	$1.13476e - 7$

Çizelge 6.2 : Problem 1'e uygulanan KSF, ZKSF, KKSF şemalarının LİN-1, LİN-2, LİN-3 ile $k = h^2$ için $T = 1$ anında elde edilen L_∞ hata normlarının karşılaştırması

	h	LİN-1	LİN-2	LİN-3	[11]
KSF	$\frac{1}{20}$	$1.05562e-4$	$1.05612e-4$	$1.05562e-4$	$1.20408e-5$
	$\frac{1}{40}$	$2.50966e-5$	$2.51113e-5$	$2.50967e-5$	$3.07175e-6$
	$\frac{1}{80}$	$6.19317e-6$	$6.19764e-6$	$6.19329e-6$	$7.72899e-7$
	$\frac{1}{160}$	$1.54247e-6$	$1.54337e-6$	$1.54331e-6$	$1.94085e-7$
ZKSF	$\frac{1}{20}$	$9.25591e-5$	$9.30849e-5$	$9.30849e-5$	$1.20408e-5$
	$\frac{1}{40}$	$2.09418e-5$	$2.20023e-5$	$2.20023e-5$	$3.07175e-6$
	$\frac{1}{80}$	$5.31985e-6$	$5.42106e-6$	$5.42104e-6$	$7.72899e-7$
	$\frac{1}{160}$	$2.89539e-6$	$1.35899e-6$	$1.35884e-6$	$1.94085e-7$
KKSF	$\frac{1}{20}$	$1.26114e-3$	$1.27508e-3$	$1.27507e-3$	$1.20408e-5$
	$\frac{1}{40}$	$3.14859e-4$	$3.18046e-4$	$3.18045e-4$	$3.07175e-6$
	$\frac{1}{80}$	$7.86969e-5$	$7.94712e-5$	$7.94692e-5$	$7.72899e-7$
	$\frac{1}{160}$	$1.96708e-5$	$1.98088e-5$	$2.00577e-5$	$1.94085e-7$

Çizelge 6.3 de Problem 2'ye uygulanan KSF, ZKSF ve KKSF şemaları ile LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 lineerleştirmeleri için L_2 hata normlarının karşılaştırılması verildi. KSF için LİN-1 lineerleştirmesinin daha iyi sonuç verdiği görüldü. ZKSF için birbirine çok yakın sonuçlar elde edildiği h konum adımı küçüldükçe LİN-3 ile sonuçların daha küçüldüğü görüldü. Çizelge 6.4 de Problem 2'ye uygulanan KSF, ZKSF ve KKSF şemaları ile LİN-1, LİN-2 ve LİN-3 lineerleştirmeleri için L_∞ hata normlarının birbirleri ve [9] tarafından verilen sonuçlarla karşılaştırılması verildi. KSF için birbirine çok yakın sonuçlar elde edildiği h konum adımı küçüldükçe LİN-3 ile sonuçların daha küçüldüğü görüldü. ZKSF için LİN-1 lineerleştirmesinin daha iyi sonuç verdiği görüldü. KKSF için tüm lineerleştirmelerin birbirine çok yakın sonuçlar verdiği görüldü. Genel olarak yöntemler kıyaslandığında konuma göre parçalama ile daha küçük sonuçlar alınmıştır.

Çizelge 6.3 : Problem 2'ye uygulanan KSF, ZKSF, KKSF şemalarının LİN-1, LİN-2, LİN-3 ile $k = h^2$ için $T = 10$ anında elde edilen L_2 hata normlarının karşılaştırması

	h	LİN-1	LİN-2	LİN-3
KSF	$\frac{1}{8}$	$3.66816e-6$	$3.66816e-6$	$3.66816e-6$
	$\frac{1}{16}$	$9.49444e-7$	$9.49445e-7$	$9.49445e-7$
	$\frac{1}{32}$	$2.32497e-7$	$2.32498e-7$	$2.32498e-7$
ZKSF	$\frac{1}{8}$	$3.66816e-6$	$3.66816e-6$	$3.66816e-6$
	$\frac{1}{16}$	$9.49446e-7$	$9.49446e-7$	$9.49444e-7$
	$\frac{1}{32}$	$2.32498e-7$	$2.32499e-7$	$2.32497e-7$
KKSF	$\frac{1}{8}$	$2.83542e-6$	$2.83542e-6$	$2.83542e-6$
	$\frac{1}{16}$	$7.21999e-7$	$7.21999e-7$	$7.21999e-7$
	$\frac{1}{32}$	$1.75275e-7$	$1.75275e-7$	$1.75275e-7$

Çizelge 6.4 : Problem 2'ye uygulanan KSF, ZKSF, KKSF şemalarının LİN-1, LİN-2, LİN-3 ile $k = h^2$ için $T = 10$ anında elde edilen L_∞ hata normlarının karşılaştırması

	h	LİN-1	LİN-2	LİN-3	[9]
KSF	$\frac{1}{8}$	$5.08001e-6$	$5.08001e-6$	$5.08001e-6$	$5.4204e-7$
	$\frac{1}{16}$	$1.32876e-6$	$1.32876e-6$	$1.32876e-6$	$1.0197e-7$
	$\frac{1}{32}$	$3.29189e-7$	$3.29190e-7$	$3.29189e-7$	$2.3657e-8$
ZKSF	$\frac{1}{8}$	$5.08001e-6$	$5.08002e-6$	$5.08002e-6$	$5.4204e-7$
	$\frac{1}{16}$	$1.32875e-6$	$1.32876e-6$	$1.32876e-6$	$1.0197e-7$
	$\frac{1}{32}$	$3.29175e-7$	$3.29196e-7$	$3.29193e-7$	$2.3657e-8$
KKSF	$\frac{1}{8}$	$4.06575e-6$	$4.06575e-6$	$4.06575e-6$	$5.4204e-7$
	$\frac{1}{16}$	$1.04055e-6$	$1.04055e-6$	$1.04055e-6$	$1.0197e-7$
	$\frac{1}{32}$	$2.57159e-7$	$2.57158e-7$	$2.57159e-7$	$2.3657e-8$

Rosenau denklemdeki lineer olmayan terim yerine 3 farklı lineerleştirme tekniğinin uygulanabildiği ve korunumlu sonlu fark yaklaşımı ile iyi sonuçlar elde edildiği görülmüştür. Sonuç olarak bu tezde uygulanan yöntemler benzer problemlere de kolaylıkla uygulanabilir.

KAYNAKLAR

- [1] **Korteweg, D.J. ve de Vries, G.** (1895). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves, *Philosophical Magazine*, 39, 422–443.
- [2] **Rosenau, P.** (1988). Dynamics of dense discrete systems, *Progress of Theoretical Physics*, 79, 1028–1042.
- [3] **Park, M.A.** (1993). On the Rosenau equation in multidimensional space, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, 21(1), 77–85.
- [4] **Chung, S. ve Ha, S.** (1994). Finite element Galerkin solutions for the Rosenau equation, *Applicable Analysis*, 54, 39–56.
- [5] **Chung, S.** (1998). Finite difference approximate solutions for the Rosenau equation, *Applicable Analysis*, 69, 1–2, 149–156.
- [6] **Lee, H.Y. ve Ahn, M.J.** (1996). The convergence of the fully discrete solution for the Rosenau equation, *Korean Journal of Computational and Applied Mathematics*, 32, 15–22.
- [7] **Chunk, S.K. ve Pani, A.K.** (2001). Numerical methods for the Rosenau equation, *Applicable Analysis*, 77, 351–369.
- [8] **Omrani, K., Abidi, F., Achouri, T. ve Khiari, N.** (2008). A new conservative finite difference scheme for the Rosenau equation, *Applied Mathematics and Computation*, 201, 35–43.
- [9] **Hu, J. ve Zheng, K.** (2010). Two conservative difference schemes for the generalized Rosenau equation, *Boundary Value Problems*, 2010, 18.
- [10] **Atouani, N. ve Omrani, K.** (2015). A new conservative high-order accurate difference scheme for the Rosenau equation, *Applicable Analysis*, 94, 2435–2455.
- [11] **Atouani, N., Ouali, Y. ve Omrani, K.** (2017). Mixed finite element methods for the Rosenau equation, *Korean Society for Computational and Applied Mathematics*, 57, 393–420.
- [12] **Erbay, H.A., Erbay, S. ve Erkip, A.** (2020). Numerical computation of solitary wave solutions of the Rosenau equation, *Wave Motion*, 98, 102618.
- [13] **Özişik, M.N.**, (1994), Finite Difference Methods in Heat Transfer, CRC-Press.
- [14] **Thomas, J.W.**, (1995), Numerical partial differential equations: Finite difference methods, Springer-Verlag New York.
- [15] **Smith, G.D.** (1987). Numerical Solution of Partial Differential equations, Finite Difference Methods., *Oxford: Clarendon*.
- [16] **Burden, R.L. ve Faires, J.D.** (1980). Numerical Analysis., *PWS Publishing Company*.

- [17] **Wang, H., Li, S. ve Wang, J.** (2017). A conservative weighted finite difference scheme for the generalized Rosenau-RLW equation, *Computational and Applied Mathematics*, 36, 63–78.
- [18] **Strikwerda, J.** (2004). Finite Diference Schemes and Partial Differential Equations, *SIAM Philadelphia*.
- [19] **Rubin, S.G. ve Graves, R.A.** (1975). Cubic spline approximation for problems in fluid mechanics, *Nasa TR R-436, Washington, DC*.
- [20] **Rashidinia, J. ve Rasoulizadeh, M.N.** (2019). Numerical methods based on radial basis function-generated finite difference (RBF-FD) for solution of GKdVB equation, *Wave Motion*, 90, 152–167.



ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad : Zeynep ÖRNEK

Doğum Tarihi ve Yeri :

E-Posta :

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** İnönü Üniversitesi, İlköğretim Matematik Öğretmenliği

