T.C.

İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ

FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK (SOFT) ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Talat GÜL

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İlhan İÇEN

AĞUSTOS 2021

T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

ESNEK (SOFT) ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Talat GÜL
(36183614035)

Matematik Anabilim Dalı

Tez Danışmanı: Prof. Dr. İlhan İÇEN
Eş Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gülay OĞUZ

AĞUSTOS 2021

TEŞEKKÜR VE ÖNSÖZ

Yüksek lisans tezimin hazırlanması sürecinde akademik bilgi ve tecrübesi ile bana yol gösteren, sahip olduğu kişisel donanım ile her daim örnek aldığım saygıdeğer hocam Prof. Dr. İlhan İÇEN'e derin şükranlarımı sunarım. Bu süreçte yardım ve desteğini eksik etmeyerek değerli zamanını ayırıp tezi detaylı inceleyen eş danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Gülay OĞUZ' a teşekkürü borç bilirim. Ayrıca, tüm hayatım boyunca bana destek olan sevgili aile bireylerime çok teşekkür ederim.

ONUR SÖZÜ

Yüksek lisans tezi olarak “Esnek(soft) Çaprazlanmış Modüller” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığına ve yararlandığım bütün kaynakların hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Talat GÜL

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER VE KISALTMALAR

$\forall$	: Her
$\exists$	: En az
$\in$	: Elemanıdır
$\notin$	: Elemanı değil
$=$	: Eşittir
$\neq$	: Eşit değil
Z	: Tam sayılar kümesi
Q	: Rasyonel sayılar kümesi
R	: Reel(gerçel) sayılar kümesi
C	: Kompleks sayılar kümesi
U	: Evrensel küme
E	: Parametreler ailesi
$\mathrm{P(U)}$	: Kuvvet kümesi
e	: Birim eleman
$\subset$	: Alt küme
$\emptyset$	: Boş küme
$\leq$	: Alt küme
$\trianglelefteq$	: Normal alt grup
$\cong$	: İzomorfik grup
$\mathrm{Z(G)}$	: G grubunun merkezi
$(\mathrm{M},*)$	: Matematiksel yapı
$(\mathrm{M},\mathrm{G},\delta,\theta)$	: Çaprazlamış modül
$<\alpha,\theta>$	: İç çarpım
(F,A)	: Soft küme
$\cup$	: Birleşim
$\cap$	: Kesişim
f,g	: Dönüşüm
$\urcorner \mathrm{a}_{\mathrm{k}}$	: Parametrelerin değili
$(\mathrm{U},\mathrm{F},\mathrm{A})$	: U üzerinde soft küme

$\sim$	: Soft homomorfizm
$\simeq$	: Soft İzomorfizm
μ_α	: Soft dönüşüm
S_n	: Permütasyonların grubu
(U, G, δ, A)	: Soft çaprazlanmış modül
μ_H, μ_G	: Konjuge etki
$< f, f^* >$	: Soft çaprazlanmış modül homomorfizmi
F^c	: F nin soft tümleyen fonksiyonu
$\tilde{\cap}$	: Soft kümelerde kesişim
$\tilde{\cup}$	: Soft kümelerde birleşim
$\tilde{<}$	: Soft alt grup
$Stab_G$	: Bir soft kümenin sabitleyicisi
Fix_G	: Bir soft alt kümenin sabitleyicisi
C_G	: G soft grubunun merkezi
N_G	: G soft grubunun merkezleştiricisi
$Sym(X)$	: X kümesinin permütasyonlar grubu

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

ESNEK (SOFT) ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Talat GÜL

İnönü Üniversitesi

Fen Bilimleri Enstitüsü

Matematik Anabilim Dalı

37+vii sayfa

2021

Danışman: Prof. Dr. İlhan İÇEN

Eş Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Gülay OĞUZ

Bu yüksek lisans tez çalışmasında soft küme teorisi ile ilgili tanımlara ve çözümlenmiş örneklere yer verilerek çaprazlanmış modül, soft grup ve soft çaprazlanmış modül kavramları incelenmiştir. Bu tez çalışması yedi bölümden oluşmaktadır.

İlk bölümde tezin temelini oluşturan kavramların gelişim süreci ile ilgili literatür taraması yapılmıştır.

İkinci bölümde, tezin sürekliliğini ve bütünlüğünü sağlamak amacıyla temel kavramlar ve etki kavramı sunulmuştur.

Üçüncü bölümde ise bir grubun bir küme üzerine etkisi tanımlanmış ve örneklendirilerek bazı önemli karekterizasyonlar çalışılmıştır.

Dördüncü bölümde belirsizliğe güçlü bir matematiksel yaklaşım olarak ortaya atılan soft küme teorisi sunulmuştur, soft küme teorisi ile ilgili örneklere ve temel tanımlara yer verilmiştir.

Beşinci bölümde ise soft gruplar incelenerek bir grubun başka bir grup üzerine etkisi incelenmiş, tanımlara yer verilmiş, örnekler çözümlenmiş ve bazı önemli özellikleri verilmiştir.

Altıncı bölümde ise soft çaprazlanmış modül kavramı incelenerek sonuç bölümü ile bu tez çalışması tamamlanmıştır.

Anahtar Kelimeler: Gruplar, etki, çaprazlanmış modüller, soft küme, soft gruplar, soft çaprazlanmış modüller.

ABSTRACT

Master Thesis

SOFT CROSSED MODULES

Talat GÜL

Inonu University

Graduate School of Nature and Applied Sciences

Department of Mathematics

37+vii pages

2021

Supervisor: Prof. Dr. İlhan İÇEN

Co-Consultant: Assist. Prof. Dr. Gülay OĞUZ

In this master thesis, the concepts of crossed module, soft group and soft crossed module were examined by giving definitions and solved examples related to "soft set theory". This thesis consists of seven chapters.

In the first part, a literature review was conducted on the development process of the concepts that form the basis of the thesis.

In the second part, the basic concepts and the concept of action are presented in order to ensure the continuity and integrity of the thesis.

In the third part, the action of a group on a set is defined and some important characterizations are studied by exemplifying.

In the fourth chapter, soft set theory, which is put forward as a strong mathematical approach to uncertainty, is presented, examples and basic definitions related to soft set theory are given.

In the fifth chapter, the action of one group on another group are examined by examining soft groups, definitions are given, examples are analyzed and some important features are given.

In the sixth chapter, the concept of soft crossed module is presented and this thesis study is completed by giving examples, and in the last chapter, the result is given.

Keywords: Groups, action, crossed modules, soft set, soft groups, soft crossed modules.

1. GİRİŞ

Grup kavramı matematiğin farklı alanlarında zaman aldıkça ortaya çıkarak fikirlerin soyutlanması ile gelişimini sürdürmüştür. Bu kavramın ilk kez 1854 yılında Cayley ile verildiği kabul görmektedir. Bununla birlikte grup kavramının birçok matematikçi tarafından çalışıldığı görülmektedir. Euler, Lagrange Teoreminde grup kavramının bir özel halini ele almıştır. Bu teoremde sonlu bir grup ele alıp, “bu grubun her alt grubunun mertebesi o grubun mertebesine bölenidir” ifadesini kullanmıştır.

Daha sonrasında 1801 yılında Euler’in çalışmalarını geliştiren bilim adamı Gauss’ dur. Gauss elemanların mertebesini incelemiştir. Devirli grubun mertebesini bölebilen her sayı böldüğü mertebeden alt grubun var olduğunu kanıtlamıştır. Aynı zamanda Gauss kuadratik formları incelerken Abel grupları kullanmış ve dönüşümlerin birleşme özelliğini ispatlamıştır.

Soyut grup tanımının çıkış noktası, köklerin permütasyonları vasıtasıyla incelenmesi sürecine denk gelir. Permütasyonlar kavramının ilerlemesinde Cauchy’ nin rolü büyüktür. Cauchy, permütasyonlar ile alakalı birçok tanımı ortaya koymuştur. Abel, 1824 yılında derecesi yüksek olan beşinci dereceden denklemlerin çözümünün kökler yardımı ile çözülemeyeceğini permütasyonu kullanarak ispatlamıştır. Grup tanımından faydalanmıştır ama açık biçimde bahsetmemiştir. Grup sözcüğünü ilk kullanan ise 1831 yılında Galois olmuştur. Denklemin köklerinin permütasyonların grubu ile yakından ilgili olup, permütasyonlar grubunun normal alt grubunun önemini ifade etmiştir.

Galois’ in fikirlerinin tam anlamıyla açıklanması 1851 de Bett ve Jordan’ ın çalışmaları ile ortaya çıkmıştır. Soyut grup kavramında Klein’ in etkisini unutmamak gerekir. Buradaki amaç geometrilerin gruplar ile sınıflandırılmasıdır.

Buradan “Grup” kavramı ilk tanımlayanın Cayley olduğu kabul edilmiş olup Galois grupları günümüzde cebirsel geometri alanının ve birçok alanın temel uğraş alanları içerisinde bulunur.

Gruplar ile ilgili çalışmaların potansiyeli hızla artarak Rotman ve Robinson ileri tarihlerde yani 1995-1996 yıllarında çalışmalar yapmıştır. Rotman gruplar teorisine giriş yapmıştır [1]. Robinson ise sonlu ve sonsuz gruplar hakkında çalışarak değişmeli ve değişmeli olmayan gruplar için kapsamlı ve geniş bir inceleme yapmıştır. Grup yanında halka teorisini hatta cebir alanında da önemli çalışmalar ortaya koymuştur [2].

Geçmişten günümüze bilim insanları birçok alanda yaşamış oldukları karmaşık problemlerin içerdikleri belirsizlikler üzerinde çalışıp bunların üstesinden gelmeye çaba göstermişlerdir. Bilim adamları kesin olmayan bilgiyi modelleme arayışına girmiştir. Bunun sonucu olarak fuzzy küme teorisi, esnek (soft) küme teorisi ve yaklaşımlı (rough) küme teorisi gibi bazı yeni teoriler geliştirilmiştir [5–8]. Bu belirsizliklerle ilgili olarak yapılan çalışmalardan olan fuzzy küme teorisi Zadeh tarafından tanıtılmıştır. Zadeh, bulanık kümedeki elemanların doğruluk değerini [0,1] arasındaki reel sayı ile ifade etmiştir [9].

Bu teorilerden biri olan esnek küme kavramı ise Molodtsov tarafından 1999 yılında ortaya atılmıştır [5]. Üyelik fonksiyonunun oluşumu her bireyde farklı olduğundan birden fazla üyelik fonksiyonu oluşumu ve kümeye aitliği, herkese göre değişim gösterir. Bunun üzerine Molodtsov esnek küme teorisini tanıtmıştır. Esnek küme teorisi küme değerli fonksiyon ile ilgilenirken bulanık kümelerde ise reel değerli fonksiyon ile belirsizliği ortadan kaldırmıştır. Üyelik fonksiyonu kurma sorunu esnek kümede bulunmamaktadır. Böylece daha kullanışlıdır. Bunun neticesinde birçok alanda çalışmalar için kolaylık sağlamıştır [10–17].

Babitha ve Sunil esnek kümeler üzerinde çalışmalar yapmış ve kartezyen çarpımı, bağıntı, denklik bağıntısı gibi kavramları ortaya çıkarmıştır [12]. Soft gruplar ile alakalı birçok çalışma mevcuttur [17–23]. Bu çalışmalara ek olarak Kharal ve Ahmed ise esnek dönüşümü tanımlamıştır [14]. Esnek kümelerde cebirsel yapıyı ise Aktaş ve Çağman çalışmıştır. Esnek grupları incelemiş ve bulanık ile kaba kümelerin esnek gruplardan farkını ve karşılaştırmasını sunmuşlardır [10]. Soft gruplar ile alakalı bir başka çalışma da Oğuz tarafından incelenen soft topolojik dönüşüm gruplarıdır [23].

Bu kavramlar kadar önemli olan bir diğer kavram ise grup teoride çok önemli yer tutan etki kavramıdır. Grup etkilerinin cebir, topoloji, analiz ve geometri gibi birçok alanda uygulaması vardır.

Buradan yola çıkarak gruplar üzerinde etki kavramını tanımlayıp yeni bir cebirsel yapı olan ve bazı cebirsel problemlere çözüm olan çaprazlanmış modül(crossed modül) kavramı ortaya çıkmıştır [24]. Bu kavramı Whitehead tanımlamıştır [25]. Cebirsel topolojiye bu kavram farklı bir boyut kazandırmıştır.

G. Oguz, I. Icen ve M. H. Gürsoy soft gruplar için etki kavramını tanımlamıştır [31]. Buradan hareketle ilk defa soft çaprazlanmış modül kavramı G. Oguz’ un tezinde verilmiştir [30].

Bu tezde düzeni sağlamak için literatürde mevcut olan kavramlar ve örnekler verilmiştir. Birçok kavramın temeli olan grup kavramı sunulmuştur. Bir grubun bir küme üzerine etkisi tanımlanmıştır. Bu kavram ile alakalı çeşitli örneklere yer verilerek çaprazlanmış modül, soft küme ve soft çaprazlanmış modül tanımları literatür taraması sonucu detaylı olarak incelenmiştir. Bu kavramların anlaşılabilmesi için bazı örnekler verilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Matematik literatüründe Grup Teorisi oldukça önemli bir noktada olup fizik, kimya, mühendislik vb. alanlarda da çalışılan bir konudur. Grup Teorisi simetrileri konu alan matematiğin bir dalıdır. Bu teori Simetri Teorisi olarak da adlandırılır. Bir nesnenin simetrisinden kasıt, o simetriyi nesneye uyguladığımızda nesnede hiçbir fark yaratmayan dönüşümlerdir. Bütün nesnelerin mutlaka bir tane simetrisi vardır. Bu dönüşümler aradığımız özellikleri karşılar ve bu dönüşümlerin tersleri de mevcuttur. Özelliklerin içinde birleşim işlemi aslında dönüşümlerin art arda yapılması işlemidir. Bu işlem birleşimli işlemdir. Sırası ile birim elemana sahip olma, elemanların tersi olma son olarak grup işleminin birleşmeli olması grup şartını sağlar. Bu işlemlerin olması için ikili bir işlemin tanımlı olması gerekir. Burada bu konu ile ilgili genel tanımlar ve bazı temel özellikler verilmiştir.

Tanım 2.0.1. Boştan farklı olan bir M kümesinin üzerinde bir ikili işlem

$$* : M \times M \to M$$
$$(x, y) \to x * y$$

şeklinde tanımlanan bir dönüşüm olsun. Üzerinde bir $*$ işlemi tanımlanan bir M kümesine bir **matematiksel yapı** denir ve $(M,*)$ ile gösterilir [2].

Tanım 2.0.2. Aşağıdaki koşulları sağlayan $(M,*)$ matematiksel yapısına grup adı verilir [3].

i. $\forall x, y, z \in M$ için $x * (y * z) = (x * y) * z$ **(Birleşme özelliği),**

ii. $\forall\, x \in M$ için $x * e = e * x = x$ olacak şekilde bir tek $e \in M$ vardır. **(Birim elemanı özelliği),**

iii. $\forall\, x \in M$ için $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$ olacak şekilde bir tek $x^{-1} \in M$ vardır **(Ters elemanı özelliği).**

Ayrıca, $\forall\, x, y \in M$ için $x * y = y * x$ koşulu sağlanıyor ise $(M,*)$ matematiksel yapısına **değişmeli (abelyan) grup** denir.

Birleşme özelliği ve birim elemanı şartını sağlayan $(M,*)$ matematiksel yapısına **monoid** denir.

Örnek 2.0.1. M bir grup olmak üzere otomorfizmlerin kümesi $Aut(M)$ bir gruptur.

i. $f, h \in Aut(M)$ olsun. $\forall x \in M$ için $f(x), h(x), M$ nin elemanları ve $(M,*)$ bir grup olduğundan $(f \circ h)(x) = f(x) * h(x) \in M$ olur. Bu durumda $f \circ h \in AutM$ olup " $\circ$ " bileşke işlemi $AutM$ de bir ikili işlemdir.

ii. $\forall f, g, h \in Aut(M)$ ve $\forall x \in M$ için,

$$[(f \circ g) \circ h](x) = (f \circ g)(x) * h(x) = [f(x) * g(x)] * h(x),$$
$$[f \circ (g \circ h)](x) = f(x) * (g \circ h)(x) = f(x) * [g(x) * h(x)]$$

eşitliklerinden, M de birleşme özelliği gözönüne alınarak, $Aut(M)$ de birleşme özelliğinin sağlandığı görülür.

iii. $\mathrm{I} : M \to M$ birim dönüşümü bire-bir, örten ve homomorfizmdir. O halde $\mathrm{I} \in Aut(M)$ dir. Üstelik $\mathrm{I} \circ f = f \circ \mathrm{I} = f$ dir. Gerçekten,

$$(\mathrm{I} \circ f)(x) = \mathrm{I}(\mathrm{f}(\mathrm{x})) = f(x),$$
$$(f \circ \mathrm{I})(x) = f(\mathrm{I}(\mathrm{x})) = f(x)$$

iv. $Aut(M)$ için, $f^{-1}(x) = f(x)^{-1}$ ile $f^{-1} \in Aut(M)$ fonksiyonu tanımlayalım. $(M,*)$ bir grup olduğundan, bu tanım anlamlıdır ve $\forall x \in M$ için,

$$(f \circ f^{-1})(x) = f(x) * f(x)^{-1} = \mathrm{I}$$
$$(f^{-1} \circ f)(x) = f(x)^{-1} * f(x) = \mathrm{I}$$

bulunur. Dolayısıyla tanımlanan f^{-1} fonksiyonu f nin tersidir.

Tanım 2.0.3. $X \neq \emptyset$ kümesi üzerinde 1:1 ve örten olan fonksiyonların kümesi $\boldsymbol{Sym(X)}$ şeklinde gösterilsin. Burada $\boldsymbol{Sym(X)}$' in her elemanına permütasyon denir. $\boldsymbol{Sym(X)}$ kümesi permütasyonların bileşke işlemine göre X kümesi üzerinde gruptur ve bu gruba **simetrik grup** yada **permütasyonların grubu** denir [3].

Özel durum olarak; $X = \{1,2,3, \dots, n\}$ ise $S_n$sembolü ile gösterilir.

Örnek 2.0.2.

$$\boldsymbol{S_3} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)(3)$$

(3) mertebeye katkısı olmaz. Bu permütasyonlar grubunun mertebesi 2 dir.

Örnek 2.0.3. $G = \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ olmak üzere $(M, +)$ matematiksel yapısı bir grup yapısına sahip olduğu açıktır [2].

$(\mathbb{Z}, +)$ yapısının bir grup olduğunu gösterelim:

i. $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $x + y \in \mathbb{Z}$ olur**(Kapalılık özelliği).** Burada kapalılık özelliği sağlandığı açıktır.

ii. $\forall x, y, z \in \mathbb{Z}$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$ olur**(Birleşme Özelliği).** Birleşme özelliği sağlanır.

iii. $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x + 0 = 0 + x = x$ olur**(Birim eleman özelliği).** Birim elemanı ‘’+’’ işlemine göre 0 dır.

iv. $\forall x \in \mathbb{Z}$ için $x + (-x) = (-x) + x = 0$ olup $-x \in \mathbb{Z}$ dir**(Ters eleman özelliği).**

Bu dört özellik sağlandığı için $(\mathbb{Z}, +)$ ikilisi bir gruptur.

Ek olarak;

v. $\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $x + y = y + x$ sağlanır**(Değişme özelliği).** $(\mathbb{Z}, +)$ bir abelyan gruptur.

Aynı şekilde $(\mathbb{Q}, +)$ ve $(\mathbb{R}, +)$ nın da aynı özellikleri sağladığı kolay bir şekilde gösterilebilir.

Diğer yandan; $(\mathbb{Z}, \cdot)$ bir grup değildir çünkü $3 \in \mathbb{Z}$ için

$3^{-1} = \frac{1}{3} \notin \mathbb{Z}$ olup ters eleman özelliği sağlanmadığı açıktır.

Tanım 2.0.4. H boştan farklı olsun ve H, bir M grubunun alt kümesi olarak tanımlansın. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa H ye M grubunun bir **alt grubu** denir ve $H \leq M$ ile gösterilir [3].

i. $\forall\, x, y \in H$ için $xy \in H$.

ii. M grubunun birim elemanı e olma$k$ $üzere$ $e \in H$.

iii. $\forall x \in H$ için $x^{-1} \in H$.

H alt grubu M grubunun üzerinde uygulanan ikili işleme göre bir gruptur.

Önerme 2.0.1. $M \neq \emptyset$ bir grup ve H, M gurubunun bir alt kümesi olsun.

Bu takdirde,

$$H \;\leq\; M \Leftrightarrow \forall x, y \in H \; için \; xy^{-1} \in H$$

dir [2].

Örnek 2.0.4. Herhangi bir M grubu için $H = M$ ve $H = \{e\}$ aşikâr alt gruplardır [4].

Örnek 2.0.5. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ kümeleri $(\mathbb{C}, +)$ nın birer alt grubudur [2].

Tanım 2.0.5. M bir grup ve $H \leq M$ olsun. Eğer $\forall g \in M$ için $Hg = gH$ ise H ya M nin bir **normal alt grubu** denir ve $H \trianglelefteq M$ sembolü ile gösterilir [3].

Eğer M grubu değişmeli olursa M grubunun her alt grubu normaldir. $H = M$ ve $H = \{e\}$ aşikar normal alt gruplardır.

Örnek 2.0.6. Bir M grubunun merkezi

$$Z(M) = \{x \in M : xg = gx, \forall g \in M\}$$

alt grubudur. Ayrıca $Z(M)$ alt grubunun M nin bir normal alt grubu olduğu kolayca ispatlanabilir [1].

Tanım 2.0.6. M ve H grupları arasında bir $\varphi : M \longrightarrow H$ dönüşümü $\forall x, y \in M$ için $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ koşulunu sağlıyor ise bu dönüşüme **grup homomorfizmi** denir. 1:1 ve örten olan φ grup homomorfizmine bir **izomorfizm,** M ve H gruplarına ise **izomorfik gruplar** denir ve $M \cong H$ ile gösterilir [2].

Örnek 2.0.7. $(G,\cdot)$ ve $(Z, +)$ grupları verilsin.

$$\varphi : G \to Z$$

$\forall a^x \in G$ için $\varphi(a^x) = x \,, x \in Z$ olsun.

$\forall a^y, a^z \in G \,, y, z \in Z$ için $\varphi(a^y \cdot a^z) = a^y + a^z$

$$\varphi(a^y \cdot a^z) = \varphi(a^{y+z}) = y + z = \varphi(a^y) + \varphi(a^z)$$

burada φ bir homomorfizmadır.

i. Bire-birlik için

$$\varphi(a) = \varphi(b) \Longrightarrow a = b \;\; veya \;\; a \neq b \;\; ise \; \varphi(a) \neq \varphi(b) \;\; \text{olmalıdır.}$$

$$\varphi(a^y) = \varphi(a^z) \Longrightarrow a^y = a^z \Longrightarrow y = z$$

birebir olma şartını sağlar.

ii. Örtenlik için

$\forall x \in Z$ için $\varphi(a^x) = x$ olacak şekilde $\exists a^x \in G$ vardır.

İzomorfizmadır [2].

2.1. Etki

Grup etkilerinin topoloji, geometri, analiz, cebir gibi birçok alanda uygulamaları bulunur. Whitehead gruplar üzerinde etki tanımını uygulayarak çaprazlanmış modül kavramını tanımlamıştır.

Tanım 2.1.1. $M \neq \emptyset$ küme ve G bir grup olarak verilsin. $\cdot : G \times M \longrightarrow M$, $(g,x) \longrightarrow g \cdot x$ işlemi için aşağıdaki iki koşul sağlanıyor ise G grubu M kümesi üzerine (**soldan)etki** eder denir [3].

i. $\forall x \in M$ için $e \cdot x = x$

ii. $\forall x \in M$ ve $\forall g,h \in$ G için $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$.

G grubunun kendi üzerine **üç farklı doğal etkisi** mevcuttur ve aşağıdaki gibi verilebilir.

Örnek 2.1.1. G grubunun kendi üzerine sol dönüşüm etkisi:

$$\theta : G \times G \to G$$
$$(g,x) \to \theta(g \cdot x) = gx$$

i. $\forall\, x \in G$ için $e \cdot x = ex = x$

ii. $\forall\, x \in G$ ve $\forall g,h \in G$ için
$$\begin{aligned} g \cdot (h \cdot x) &= g \cdot (hx) \\ &= ghx \\ &= (gh) \cdot x. \end{aligned}$$

Örnek 2.1.2. G grubunun kendi üzerine sağ dönüşüm etkisi:

$$\theta : G \times G \to G$$
$$(g,x) \to \theta(x.g) = xg$$

i. $\forall x \in G$ için $e \cdot x = xe = x$

ii. $\forall x \in G$ ve $\forall g,h \in G$ için
$$\begin{aligned} g \cdot (h \cdot x) &= g \cdot (xh) \\ &= xhg \\ &= x(hg). \end{aligned}$$

Örnek 2.1.3. G grubunun kendi üzerine ters eleman ile sağ dönüşüm etkisi:

$$\theta : G \times G \to G$$
$$(g,x) \to \theta(g \cdot x) = xg^{-1}$$

olsun.

i. $\forall x \in G$ için $e \cdot x = xe^{-1} = x$

ii. $\forall x \in G$ ve $\forall g, h \in G$ için $g \cdot (h \cdot x) = g \cdot (xh^{-1})$

$$= xh^{-1}g^{-1}$$

$$= x(gh)^{-1}$$

$$= (gh)x.$$

Örnek 2.1.4. G grubunun kendi üzerine konjuge etkisi:

$$\theta : G \times G \to G$$

$$(g, x) \to \theta(g \cdot x) = gxg^{-1}$$

i. $\forall x \in G$ için $e \cdot x = exe^{-1} = x$

ii. $\forall x \in G$ ve $\forall g, h \in G$ için $g \cdot (h \cdot x) = g \cdot (hxh^{-1})$

$$= ghxh^{-1}g^{-1}$$

$$= (gh)x(gh)^{-1}$$

$$= (gh) \cdot x.$$

Örnek 2.1.5. G bir grup ve otomorfizmlerinin grubu $Aut(G)$ olsun.

$$Aut(G) \times G \to G$$

$$(g, \theta) \to \theta(g)$$

şeklinde tanımlanan fonksiyonun $Aut(G)$ nin G ye bir sol etki fonksiyonu olduğunu gösterelim.

i. $g \in G$ ve $1: G \to G$ birim otomorfizm olmak üzere $1_g = 1(g) = g$ olup birinci şart sağlanır.

ii. $h, t \in AutG$ ve $g \in G$ için $\big(t(hg)\big) = t\big(h(g)\big) = (t \circ h)(g) = (t \circ h)_g$ olup ikinci şart da sağlanmış olur.

3. ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Bu kavramı ilk olarak Whitehead 1946 yılında tanımlamıştır [25]. Gruplar üzerine tanımlanmış olan çaprazlanmış modül kavramı daha sonra bazı cebirsel yapılar üzerine taşınmıştır. Bu bölümde çaprazlanmış modüllere ve çeşitli örneklere yer verilmiştir.

Tanım 3.0.1. G ve M iki grup ve $\delta: M \rightarrow G$ sınır dönüşümü olarak adlandırılan grup homomorfizmi olsun. G nin M üzerine **sol etkisi**

$$\theta: G \times M \rightarrow M$$
$$(g, m) \rightarrow \theta(g, m) = g \cdot m$$

şeklinde verilsin. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa (M, G, δ, θ) matematiksel yapısına **çaprazlanmış modül** denir [25-26].

i. $\forall m \in M,\ \forall g \in G\ için\ \delta(g \cdot m) = g\delta(m)g^{-1}$,

ii. $\forall m, m_1 \in M\ için\ \delta(m) \cdot m_1 = m m_1 m^{-1}$.

Örnek 3.0.1. G bir grup ve $M \trianglelefteq G$ olsun. G grubunun M üzerine **konjuge etkisi**

$$\theta: G \times M \rightarrow M$$
$$(g, m) \rightarrow \theta(g, m) = gmg^{-1}$$

olsun ve sınır dönüşümü olarak

$$\delta: M \rightarrow G$$
$$m \rightarrow \delta(m) = m$$ verilsin.

i. $\forall m \in M\ ve\ \forall g \in G\ için$

$$\delta(g \cdot m) = gmg^{-1}$$
$$= g\delta(m)g^{-1}$$

ii. $\forall m, m_1 \in N\ için$

$$\delta(m) \cdot m_1 = \delta(m) m_1 \delta(m)^{-1}$$
$$= m m_1 m^{-1}.$$

olup (M, G, δ, θ) dörtlüsü bir **çaprazlanmış modüldür** [27].

Örnek 3.0.2. M ve G iki abelyan grup olsun. Bu durumda herhangi bir $\delta: M \to G$ grup homomorfizmi ve

$$\theta: G \times M \to M$$
$$(g, m) \to \theta(g, m) = m$$

aşikar etkisi ile birlikte $(\boldsymbol{M}, \boldsymbol{G}, \boldsymbol{\delta}, \boldsymbol{\theta})$ dörtlüsü bir **çaprazlanmış modül** olur [27].

Örnek 3.0.3. G herhangi bir grup ve M abel grup olsun.

$$\theta : G \times M \to M$$
$$(g, m) \to \theta(g, m) = g \cdot m$$

burada θ dönüşümüne sol etki denir ve bu etki

$$\delta: M \to G$$
$$m \to e_G$$

aşikar homomorfizmi ile verilsin.

$$\begin{aligned}\delta(g \cdot m) &= g\delta(m)g^{-1}\\ &= ge_G g^{-1}\\ &= gg^{-1}\\ &= e_G\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\delta(m) \cdot m_1 &= mm_1m^{-1}\\ &= e_m m\\ &= m\end{aligned}$$

olup (M, G, δ) üçlü yapısı bir **çaprazlanmış modüldür** [28].

Örnek 3.0.4. G birim elemanı e olan bir grup olmak üzere

$$G \times \{e\} \to \{e\}$$
$$(g, e) \to g \cdot e = e$$

etkisi ve

$$1_{\{e\}}: \{e\} \to G$$
$$e \to e$$

özdeşlik dönüşümüyle $(G, e, 1_{\{e\}})$ üçlüsü **çaprazlanmış modüldür**.

$$1_{\{e\}}(g \cdot e) = I(e) = e$$

ilk şart sağlanmış olup şimdi ikinci şartın sağlandığını gösterelim.

$$1_{\{e\}}(e) \cdot e = e \cdot e = e$$

[28].

Tanım 3.0.2. Aşağıda verilen şartları sağlayan (S, H, θ') üçlü yapısına (T, G, θ) çaprazlanmış modülünün bir **alt çaprazlanmış modülü** denir [28].

- **i.** H, G nin ve S, T nin altgrubudur.
- **ii.** $\theta' : S \to H$ de θ nın kısıtlamasıdır.
- **iii.** S ın H üzerine etkisi T nin G üzerine etkisinden üretilmiştir.

Tanım 3.0.3. Aşağıdaki koşulları sağlayan (S, H, θ') üçlü yapısına (T, G, θ) çaprazlanmış modülün **normal alt çaprazlanmış modülü** denir [28].

- **i.** H, G nin normal altgrubudur.
- **ii.** $\forall g \in G$ ve $\forall s \in S$ için $g \cdot s \in S$ dir.
- **iii.** $\forall h \in H,\ \forall t \in T$ için $(h \cdot t)t^{-1} \in S$ dir.

Tanım 3.0.4. $(T, G, \theta)\ ve\ (T', G', \theta')$ iki çaprazlanmış modül olsun ve $f_1 : T \to T'$, $f_2 : G \to G'$ grup morfizmi olsunlar. Aşağıdaki şartlar sağlanırsa (f_1, f_2) ye **çaprazlanmış modül morfizmi** denir [28].

- **i.** $f_2\theta = \theta' f_1$
- **ii.** $\forall g \in G$ ve $t \in T$ için

$f_1(g \cdot t) = f_2(g) \cdot f_1(t)$ olur.

Başka bir ifadeyle;

$$\begin{tikzcd}
T \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "\theta"'] & T' \arrow[d, "\theta'"] \\
G \arrow[r, "f_2"'] & G'
\end{tikzcd}$$

değişmeli diyagramdır [28].

Önerme 3.0.1. $< \alpha , \emptyset > : (T, G, \theta) \to (T', G', \theta')$ çaprazlanmış modül morfizmi olsun. $(Ker\alpha , Ker\theta , \theta)$ üçlüsü (T, G, θ) nın **normal alt çaprazlanmış modülüdür** [28]**.**

İspat. $< \alpha , \emptyset >$ dönüşümü çaprazlanmış modül morfizmidir. Bundan dolayı aşağıda verilecek diyagram değişmeli olur [28].

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\theta"'] & T' \arrow[d, "\theta'"] \\ G \arrow[r, "\emptyset"] & G' \end{tikzcd}$$

Ayrıca $Ker\alpha = \{t \in T \mid \alpha(t) = e_{T'}\}$ ve $Ker\emptyset = \{g \in G \mid \emptyset(g) = e_{G'}\}$ dir. Buradan

$$G \times T \to T$$
$$(g, t) \to g \cdot t$$

etkisinin $Ker\alpha$ ya kısıtlaması

$$Ker\emptyset \times Ker\alpha \to Ker\alpha$$
$$(g, t) \to g \cdot t$$

şeklindedir.

$$\begin{tikzcd} T \arrow[r, "\theta"] & G \\ Ker\alpha \arrow[u, "i_{Ker}"] \arrow[r, "\theta_{Ker\emptyset}"'] & Ker\theta \arrow[u, "i_{Ker\theta}"'] \end{tikzcd}$$

diyagramı değişmelidir. Bu işlemlerden sonra $(Ker\alpha, Ker\emptyset, \theta)$ bu üçlünün **normal alt çaprazlanmış modül** şartlarını sağladığı açıktır [28].

i. $Ker\emptyset$ çekirdek olduğundan dolayı G nin normal altgrubudur.

ii. $\forall g \in G, \forall t \in Ker\alpha$ için

$$\alpha(g \cdot t) = \emptyset(g) \cdot \alpha(t) = \emptyset(g) \cdot e_{T'} = e_{T'}$$

olduğundan $g \cdot t \in Ker\alpha$ dır.

iii. $\forall g \in Ker\emptyset, \forall t \in T$ için

$$\begin{aligned}\alpha\big((g\cdot t)t^{-1}\big)=\alpha(g\cdot t)\alpha(t^{-1}) &= (\emptyset(g)\cdot\alpha(t))\cdot(\alpha(t))^{-1}\\ &= (e_{G'}\alpha(t))(\alpha(t))^{-1}\\ &= \alpha(t)(\alpha(t))^{-1}\\ &= e_{T'}\end{aligned}$$

olduğundan $(g\cdot t)t^{-1}\in Ker\alpha$ dır.

4. SOFT (ESNEK) KÜME TEORİSİ

Bu bölümde, 1999 yılında Molodtsov tarafından belirsizliğe bir matematiksel yaklaşım olarak ortaya atılan soft küme teorisinin temelleri sunularak soft kümeler ile ilgili bazı özellikler verilmiştir.

4.1. Soft Kümeler

Tanım 4.1.1. U bir evrensel küme ve E parametrelerin bir kümesi olsun. U' nun kuvvet kümesi $P(U)$ ve $A \subset E$ olmak üzere herhangi bir $F : A \longrightarrow P(U)$ dönüşümüne U üzerinde bir **soft küme** denir ve (F, A) ile gösterilir [5].

Genel olarak söylenebilir ki U üzerinde bir soft küme U evrensel kümesinin alt kümelerinin bir parametrelendirilmiş ailesidir. $\beta \in A$ için $F(\beta)$ ailesi (F, A) soft kümesinin $\boldsymbol{\beta}$ **−yaklaşımlı** elemanlarının bir kümesi olarak düşünülebilir. Bazen U üzerinde bir (F, A) soft kümesi (U, F, A) ile gösterilecektir.

Örnek 4.1.1. U bir evrensel kümesi ve E parametrelerin kümesi

$E = \{e_1(Sanruflu), e_2(Kampana\ frenli), e_3(Disk\ frenli), e_4(Hava\ yast\imath\text{klı}), e_5(Koltuk\ \imath s\imath tmal\imath)\}$

verilsin. $A \subset E$ olsun.

$$F : A \rightarrow P(U)$$

$$U = \{Arabalar\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$$

$A = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ olarak alalım.

$$F(e_1) = \{f_1\ , f_4\}$$

$$F(e_2) = \{f_1\ , f_6\}$$

$$F(e_3) = \{f_2\ , f_3\}$$

$$F(e_4) = \{f_1\ , f_5\ , f_6\}$$

olsun.

$$(F, A) = \big\{\{f_1\ , f_4\}\ , \{f_1\ , f_6\}\ , \{f_2\ , f_3\}\ , \{f_1\ , f_5\ , f_6\}\big\}$$

elde edilir.

Şimdi ise Maji' nin tanımladığı soft alt küme tanımını verelim.

Tanım 4.1.2. U evrenseli üzerinde (F,A) ve (G,B) iki soft küme olsun. Eğer aşağıdaki koşullar sağlanıyorsa (G,B)' ye (F,A)' nın bir **soft alt kümesi** denir ve $(G,B) \tilde{\subset} (F,A)$ ile gösterilir [15].

i. $B \subset A$.

ii. $\forall\, \beta \in B$ için $G(\beta)$ ve $F(\beta)$ eşit yaklaşımlardır.

Örnek 4.1.2. U evrensel kümesini verelim. E parametrelerin kümesi

$$E = \{e_1(Sanruflu), e_2(Kampana\ frenli), e_3(Disk\ frenli), e_4(Hava\ yastıklı), e_5(Koltuk\ ısıtmalı)\}$$

olsun.

$$F : E \to P(U)$$

$$U = \{Arabalar\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$$

verilsin.

$$A = \{e_1(Sanruflu)\ , e_5(Koltuk\ ısıtmalı)\} \subset E$$

$$B = \{e_1(Sanruflu)\ , e_2(Kampana\ frenli)\ , e_5(Koltuk\ ısıtmalı)\} \subset E$$

buradan $A \subset B$ olduğu açıktır.

(F,A) ve (G,B) alalım. Yani;

$$F: A \longrightarrow P(U)$$

ve

$$G: B \longrightarrow P(U)$$

olsun.

$$F(e_1) = \{f_1\ , f_6\}$$

$$F(e_5) = \{f_4\ , f_5, f_6\}$$

$$G(e_1) = \{f_1\ , f_6\}$$

$$G(e_2) = \{f_4\ , f_5\}$$

$$G(e_5) = \{f_4\ , f_5, f_6\}$$

şeklinde tanımlansın. Buradan da görülüyor ki (F,A), (G,B) nın soft alt kümesidir.

Tanım 4.1.3. U evrensel kümesi üzerinde alınmış (F,A) ve (G,B) iki soft küme olmak üzere eğer (F,A), (G,B)' nin soft alt kümesi ve (G,B) de (F,A)' nın soft alt kümesi ise (F,A) ve (G,B)' ye **soft denktir** denir [15].

Tanım 4.1.4. $A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_k\}$ sonlu parametre kümesi olmak üzere her indiste yani a_k‘ nın her k için değiline A’ nın değili denir ve $\urcorner a_k$ ile gösterilir [15].

Öyle ki;

$$\urcorner A = \{\urcorner a_1, \urcorner a_2, \dots, \urcorner a_k\}$$

şeklinde gösterilir.

Önerme 4.1.1.

i. $\urcorner(\urcorner A) = A$

ii. $\urcorner(A \cup B) = \urcorner A \cup \urcorner B$

iii. $\urcorner(A \cap B) = \urcorner A \cap \urcorner B$

eşitlikleri sağlanır [15].

Tanım 4.1.5. Bir (F, A) soft kümesinin tümleyeni $(F, A)^c = (F^c, \urcorner A)$ çiftidir öyle ki $\forall \alpha \in \urcorner A$ için

$$F^c: \urcorner A \to P(X)$$

$$\alpha \to F^c(\alpha) = X - F(\urcorner A)$$

şeklinde tanımlıdır [15].

Örnek 4.1.3.

$$A = \{\, a_1(Sanruflu), a_2(Hava\ yastıklı)\}$$

kümesini ele alalım.

$$\urcorner A = \{\urcorner a_1(Sanruf olmayan), \urcorner a_2(Hava\ yastığı\ olmayan)\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.1.6. U evrensel kümesi üzerinde tanımlı (F, A) bir soft küme olsun. $\forall \beta \in A$ için $F(\beta)$ boş küme ise (F, A)’ ya **boş (null) soft küme** denir. $\emptyset$ ile gösterilir [15].

Alınan her parametre F dönüşümü altında karşılığı yok ise boş küme olur.

Örnek 4.1.4. U arabaların kümesi ve parametrelerin kümesi ise E olsun.

$$F: E \to P(U)$$

dönüşümü tanımlansın.

$$U = \{f_1, f_2, f_3, f_4\}$$

$$E = \{e_1(Sanruflu), e_2(Kampana\ frenli), e_3(Disk\ frenli)\}$$

verilsin.

$$\mathrm{F}\big(e_1(Sanruflu)\big) = \emptyset$$

$$\mathrm{F}\big(e_2(Kampana\ frenli)\big) = \emptyset$$

$$\mathrm{F}\big(e_3(Disk\ frenli)\big) = \emptyset$$

bu durumda açıktır ki (F, E) bir boş (null) soft küme dir.

Tanım 4.1.7. (F, A), (G, B) iki soft küme olsun. U evrensel kümesi üzerine (F, A) ve (G, B) nin **kartezyen çarpımı** $(F, A) \times (G, B) = (H, A \times B)$ olarak tanımlanır. Burada $\forall (a, b) \in A \times B$ için

$$H = F \times G : A \times B \to P(U \times U)$$

$$H(a, b) = F(a) \times G(b)$$

dir [29].

Tanım 4.1.8. (F, A) ve (G, B), U evrensel kümesi üzerine bir soft küme olsun. $(H, C) \subseteq (F, A) \times (G, B)$, yani $C \subseteq A \times B$ ve $\forall (a, b) \in C$ için $H(a, b) \subseteq F(a) \times G(b)$ ise (H, C) ye (F, A) dan (G, B) ye **soft bağıntı** denir [29].

Örnek 4.1.5. (F, A) soft kümesi arabaların rengi (G, B) soft kümesi de arabaların özelliklerini temsil etsin.

$U = \{arabalar\} = \{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7\}$ olsun ve

$F : A \to P(U)$ ve $G : B \to P(U)$ dönüşümleri tanımlansın.

$$A = \{Kırmızı\ , Beyaz\ , Siyah\}$$

$$B = \{Sanruflu\ , Kampana\ frenli\ , Disk\ frenli\}$$

kümeleri verilsin.

$$F(Kırmızı) = \{f_3, f_5, f_7\}$$

$$F(Beyaz) = \{f_1, f_2\}$$

$$F(Siyah) = \{f_5, f_7\}$$

$$G(Sanruflu) = \{f_2, f_5\}$$

$$G(Kampana\ frenli) = \{f_4, f_7\}$$

$$G(Disk\ frenli) = \{f_5, f_6, f_7\}$$ olsun.

$$H : A \times B \to P(U)$$

$$H(Kırmızı, Sanruflu) = \{f_5\}$$
$$H(Kırmızı, Kampana\ frenli) = \{f_7\}$$
$$H(Kırmızı, Disk\ frenli) = \{f_5\ , f_7\}$$
$$H(Beyaz, Sanruflu) = \{f_2\}$$
$$H(Beyaz, Kampana\ frenli) = \emptyset$$
$$H(Beyaz, Disk\ frenli) = \emptyset$$
$$H(Siyah, Sanruflu) = \{f_5\}$$
$$H(Siyah, Kampana\ frenli) = \emptyset$$
$$H(Siyah, Disk\ frenli) = \{f_5, f_6\}$$

elde edilir ve $(H, A \times B)$ soft bağıntıdır.

Tanım 4.1.9. (F, A) soft kümesi U üzerinde bir soft bağıntı ve $\forall\ \beta \in A$ için $F(\beta) \neq \emptyset$ olsun. Her $\beta \in A$ için $F(\beta)$, U üzerinde bir denklik bağıntısı ise (F, A)' ya U üzerinde bir **soft denklik bağıntısı** denir [11].

Örnek 4.1.6. U evrenseli $\{f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6\}$arabalarının olduğu küme ve A parametrelerin kümesi

a_1Parametresi 'Sanruflu',

a_2Parametresi 'Kampana frenli',

a_3Parametresi 'Disk frenli',

a_4Parametresi 'Hava yastıklı',

a_5Parametresi 'Koltuk ısıtmalı',

olmak üzere

$$A = \{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$$

parametre kümesi verilsin. Tanımlanacak soft küme; sanruflu arabaları, kampana frenli arabaları, disk frenli arabaları vb. şeklinde arabaların kategorizasyonunu belirleyecektir. $E \subset A$ olsun.

$E = \{a_1, a_2, a_3\}$ kümesi için,

$$F(a_1) = \{f_2\}$$
$$F(a_2) = \{f_1, f_3\}$$

$F(a_3) = \{f_4, f_5, f_6\}$ olarak verilsin.

$F(a_1) = \{f_2\}$ sanruflu arabaları

$F(a_2) = \{f_1, f_3\}$ kampana frenli arabaları

$F(a_3) = \{f_4, f_5, f_6\}$ disk frenli arabaları

temsil eder. E de verilen parametrelere göre arabaları kategorize eden (F, E) soft kümesi U evrensel kümesi üzerinde soft denklik bağıntısıdır.

Denklik sınıfları ise;

$$[F(a_1)] = \{\{f_2\}, \{f_1, f_3, f_4, f_5, f_6\}\}$$
$$[F(a_2)] = \{\{f_1, f_3\}, \{f_2, f_4, f_5, f_6\}\}$$
$$[F(a_3)] = \{\{f_4, f_5, f_6\}, \{f_1, f_2, f_3\}\}$$

şeklindedir.

Tanım 4.1.10. U üzerinde (F, A) ve (H, B) soft kümeler olsun. Bunların **birleşimi** de bir (K, C) soft kümesidir. Öyle ki $C = A \cup B$ ve $\forall\beta \in C$ için;

$$K(\beta) = \begin{cases} F(\beta), & \beta \in A - B \\ H(\beta), & \beta \in B - A \\ F(\beta) \cup H(\beta), & \beta \in A \cap B \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır. $(F, A) \tilde{\cup} (H, B) = (K, C)$ şeklinde yazılır [15].

Tanım 4.1.11. U evrenseli üzerinde (F, A) ve (H, B) soft kümeler tanımlı olsun. Bunların **kesişimi** bir (K, C) soft kümesini temsil etsin öyleki $C = A \cap B$ ve $\forall\beta \in C$ için $M(\beta) = F(\beta) \cap H(\beta)$ olarak tanımlanıp $(F, A) \tilde{\cap} (H, B) = (M, C)$ ile gösterilir [15].

Aşağıda verilen eşitlikler kolaylıkla ispatlanabilir [15].

Önerme 4.1.2.

- **i.** $(F, A) \tilde{\cup} (F, A) = (F, A)$
- **ii.** $(F, A) \tilde{\cap} (F, A) = (F, A)$
- **iii.** $\Phi\ boş\ soft\ küme\ olsun\ (F, A) \tilde{\cup} \Phi = (F, A)$
- **iv.** $(F, A) \tilde{\cap} \Phi = \Phi$
- **v.** A mutlak soft küme $(F, A) \tilde{\cup} \tilde{A} = \tilde{A}$

Önerme 4.1.3.

i. $((F,A) \tilde{\cup} (H,B))^c = (F,A)^c \tilde{\cup} (H,B)^c$

ii. $((F,A) \tilde{\cap} (H,B))^c = (F,A)^c \tilde{\cap} (H,B)^c$

Önerme 4.1.4.

i. $(F,A) \tilde{\cup} \big((H,B) \tilde{\cup} (K,C)\big) = ((F,A) \tilde{\cup} (H,B)) \tilde{\cup} (K,C)$

ii. $(F,A) \tilde{\cap} \big((H,B) \tilde{\cap} (K,C)\big) = ((F,A) \tilde{\cap} (H,B)) \tilde{\cap} (K,C)$

iii. $(F,A) \tilde{\cup} \big((H,B) \tilde{\cap} (K,C)\big) = ((F,A) \tilde{\cup} (H,B)) \tilde{\cap} ((F,A) \tilde{\cup} (K,C))$

iv. $(F,A) \tilde{\cap} \big((H,B) \tilde{\cup} (K,C)\big) = ((F,A) \tilde{\cap} (H,B)) \tilde{\cup} ((F,A) \tilde{\cap} (K,C))$

5. SOFT GRUPLAR

Aktaş ve Cagman tarafından soft grup kavramı tanımlanarak bazı özellikleri verilmiştir [10]. Bu bölümde soft grupların temel karekterizasyonları verilecektir.

G bir grup ve A boştan farklı bir küme olsun.

Tanım 5.0.1. (F, A) çifti G üzerinde bir soft küme olsun. Eğer $\forall x \in A$ için $F(x) \ \leq G$ ise yani alt grubu ise (F, A)' ya G üzerinde bir **soft grup** denir [10].

Örnek 5.0.1.

$$G = A = \ S_3 = \{e, (12), (13), (23), (123), (132)\}$$

ve

$$F(x) = \{\, y \in G \mid xRy \ \Leftrightarrow y = x^n, n \in N\,\}$$

küme değerli fonksiyonu dikkate alınsın. Bu durumda (F, A) soft grubu, G grubunun alt koleksiyonunun ailesidir.

$$F(e) = \{e\},$$

$$F(12) = \{e, (12)\},$$

$$F(13) = \{e, (13)\},$$

$$F(23) = \{e, (23)\},$$

$$F(123) = F(132) = \{e, (123), (132)\}$$

şeklinde elde edilir. Buradan $\forall x \in A$ için $F(x)$, G‘ nin alt grupları olduğundan (F, A), G üzerinde bir soft gruptur [10].

Önerme 5.0.1. (F, A) ve (H, A), G üzerinde iki soft grup olsun. Bu iki soft grubun soft kesişimi $(F, A) \mathbin{\tilde{\cap}} (H, A)$ da G üzerinde bir soft gruptur [10].

Önerme 5.0.2. G üzerinde (F, A) ve (H, B) birer soft grup olsun. Eğer $A \cap B = \emptyset$ ise bunların soft birleşimi olan $(F, A) \mathbin{\tilde{\cup}} (H, B)$ de G üzerinde bir soft gruptur [10].

Önerme 5.0.3. G soft grup ve $Aut(G)$ bir soft gruptur.

İspat. (A, F, G) bir soft grup olsun. Yani $\forall \alpha \in A$ için $F(\alpha) \leq G$ alt gruptur. Daha önce bölüm 2 örnek 2.0.1. de $Aut(G)$ nin grup olduğu gösterilmiştir. $Aut(G) = (A, F', AutG)$ bir soft grup olduğunu göstermek için $\alpha \in A$ alalım ve

$$F': A \rightarrow P(Aut(G))$$

$$\alpha \rightarrow F'(\alpha) = Aut(F(\alpha))$$

olarak tanımlayalım. Açıktır ki

$\forall\alpha$ için $Aut\big(F(\alpha)\big) = \{f \mid f: F(\alpha) \rightarrow F(\alpha)\ grup\ otomorfizm\}$ kümesi bir gruptur ve $Aut(F(\alpha)) \leq Aut(F(\alpha))$ dir. O halde $Aut(G)$ bir soft gruptur.

Tanım 5.0.2. $(F, A), G$ üzerinde bir soft grup olsun. Bu durumda,

i. G' nin birim elemanı e olmak üzere $\forall x \in A$ için $F(x) = \{e\}$ ise (F, A)' ya G üzerinde bir **birim soft grup** denir [10].

ii. $\forall\beta \in A$ için $F(\beta) = G$ ise (F, A)' ya G üzerinde bir **mutlak soft grup** denir [10].

Tanım 5.0.3. (F, A) ve (H, B) ikilileri G üzerinde birer soft grup olsun. Bu durumda

i. $B \subset A$ ve

ii. $\forall x \in B$ için $H(x) \leq F(x)$

şartları sağlanıyorsa (H, B) ye (F, A)' nın bir **soft alt grubu** denir ve $(H, B) \lesssim (F, A)$, ile gösterilir [10].

Örnek 5.0.2. $G = S_3$, $A = S_3$, $K = A_3$ olsun.

$$F(x) = \{ y \in S_3 \mid xRy \iff y = x^n , n \in N \}$$

ve

$$H(x) = \{ y \in A_3 \mid xRy \iff y \in < x > \}$$

şeklinde tanımlanır ise

$A_3 \subset S_3$ ve $\forall x \in A_3$ için $H(x) < F(x)$ olduğundan $(H, K) \leq (F, A)$ olur [10].

Tanım 5.0.4. G üzerinde (F, A) bir soft grup ve $(H, B) \tilde{\lhd} (F, A)$ olsun. Eğer her $\beta \in B$ için $H(\beta)$ grubu $F(\beta)$' nın bir normal alt grubu yani $H(\beta) \trianglelefteq F(\beta)$ ise (H, B)' ye (F, A)' nın bir **normal soft alt grubu** denir ve $(H, B) \tilde{\trianglelefteq} (F, A)$ şeklinde yazılır [10].

Önerme 5.0.3. (F, A) ve (H, B), G üzerinde soft gruplar ve $(F, A) \lesssim (H, B)$ olsun. Bu durumda, $f : G \rightarrow K$ bir homomorfizm ise $(f(F), A)$ ve $(f(H), B)$ ikilileri K üzerinde birer soft gruptur ve $(f(F), A) \lesssim (f(H), B)$ olur [10].

Tanım 5.0.5. (F, A) ve (H, B) sırasıyla G ve M üzerinde birer soft grup olmak üzere $f : G \longrightarrow M$ ve $g : A \longrightarrow B$ fonksiyonları verilsin. Eğer

i. f örten bir homomorfizm,

ii. g örten dönüşüm ve

iii. $\forall x \in A$ için $f\big(F(x)\big) = H(g(x))$

şartları sağlanırsa (f, g) ikilisine bir **soft homomorfizm deni**r. Ayrıca (F, A) ile (H, B) **soft homomorfik** olarak adlandırılır ve $(F, A) \sim (H, B)$ şeklinde gösterilir [10].

Bu tanımda, f, G den M ya bir izomorfizm, g de A dan B üzerine bire-bir ve örten bir fonksiyon olarak alınırsa (f, g) çiftine bir **soft izomorfizm** denir ve (F, A) ile (H, B) **soft izomorfik** denir. $(F, A) \simeq (H, B)$ şeklinde gösterilir [10].

Tanım 5.0.6. $(F, A), (H, B)$ sırasıyla G ve K üzerinde soft grup olsun. (F, A) ve (H, B) soft gruplarının çarpımı $\forall(\alpha, \beta) \in A \times B$ için

$$U(\alpha, \beta) = F(\alpha) \times H(\beta)$$

olmak üzere

$$(F, A) \times (H, B) = (U, A \times B)$$

şeklinde tanımlıdır [10].

Önerme 5.0.4. $(F, A), (H, B)$ sırasıyla G ve K üzerinde soft grup olsun. Bunların çarpımı olan $(F, A) \times (H, B)$ de $G \times K$ üzerinde soft gruptur [10].

5.1. Soft Grupların Etkileri

Bu bölümde soft grup kavramının ardından önemli yere sahip olan soft etki kavramı araştırılmıştır. Bu kavram G. Oğuz, I. Icen ve M.H. Gürsoy tarafından literatüre kazandırılmıştır [31]. Bu bölümde soft grupların etkileri ile ilgili tanımlara ve çeşitli örneklere yer verilerek soft çaprazlanmış modülün zemini oluşturulmuştur.

Tanım 5.1.1. $G = (G, F, A)$ bir soft grup ve $X = (Y, F', A)$ bir soft küme olsun. Bu durumda, X üzerinde G nin bir (sol) **soft $\boldsymbol{G}$-etkisi** bir

$$\mu_\beta : F(\beta) \times F'(\beta) \longrightarrow F'(\beta)$$

ikili işlemidir öyle ki her $\beta \in A$ için

i. $\forall x \in F'(\beta)$ için $\mu_\beta(e, x) = x$,

ii. $\forall x \in F'(\beta)$ ve $\forall g, h \in F(\beta)$ için $\mu_\beta(g, \mu_\beta(h, x)) = \mu_\beta(gh, x)$

şartları sağlanır. Burada, her $\beta \in A$ için μ_β bir (sol) G −etki dönüşümü olup G soft grubunun X soft kümesi üzerinde (soldan) **soldan etkisi** denir ve X soft kümesi bir ***G* −soft küme** olarak adlandırılır [30].

Özel olarak, (X, F', A) soft kümesi bir soft grup olarak alınırsa ve her $\beta \in A$ için μ_β dönüşümü **i** ve **ii.** şartlarına ek olarak

iii. $\forall x, y \in F'(\beta)$ ve $\forall g \in F(\beta)$ için $\mu_\beta(g, xy) = \mu_\beta(g, x)\mu_\beta(g, y)$

şartını da sağlıyorsa G soft grubu X soft grubu üzerine (soldan) soft etkir denir. Bu etki ile birlikte X bir ***G*-soft grup** adını alır.

Örnek 5.1.1. $S = \{1,2,3\}$ üzerinde permütasyonların grubu S_3 olmak üzere $A = G = S_3$ alınsın. $G = (G, F, A)$ soft grubu

$$F(e) = \{e\},$$
$$F(12) = \{e, (12)\},$$
$$F(13) = \{e, (13)\},$$
$$F(23) = \{e, (23)\},$$
$$F(123) = F(132) = \{e, (123), (132)\}$$

şeklinde ve $X = \{1,2,3\}$ olmak üzere $X = (X, F', A)$ soft kümesi de;

$$F'(e) = \{1\},$$
$$F'(12) = \{1,2\},$$
$$F'(13) = \{1,3\},$$
$$F'(23) = \{2,3\},$$
$$F'(123) = F'(132) = \{1,2,3\},$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda, her $\beta \in A$ için

$$\mu_\beta : F(\beta) \times F'(\beta) \longrightarrow F'(\beta)$$
$$(g, x) \rightarrow \mu_\beta(g, x) = \sigma(x)$$

dönüşümü bir (sol) grup etkisidir. Açıktır ki $e \in G$ birim eleman olmak üzere $\mu_\beta(e, x) = x$ olup her $g, h \in F(\beta)$ için $\mu_\beta\left(g, \mu_\beta(h, x)\right) = \mu_\beta(gh, x)$ dir. Böylece $X = (X, F, A)$ soft kümesi bir G − soft kümedir [30].

Örnek 5.1.2. H bir G soft grubunun soft alt grubu verilsin. H nın bir (sağ) soft koset kümesi

$$X = \{Hg : g \in F(\beta)\}$$

olmak üzere her $g_1 \in F(\beta)$ için

$$\mu_\beta : F'(\beta) \times F(\beta) \longrightarrow F'(\beta)$$
$$(Hg, g_1) \rightarrow \mu_\beta(Hg, g_1) = H(gg_1)$$

dönüşümünün grup etkisi olduğu açıktır. Her $g_1, g_2 \in F(\beta)$ için

i. $\mu_\beta(Hg, e) = H(ge) = Hg$

ii.
$$\begin{aligned} \mu_\beta\big(\mu_\beta(Hg, g_1), g_2\big) &= \mu_\beta(H(gg_1), g_2) \\ &= H((gg_1)g_2) \\ &= H(g(g_1g_2)) \\ &= Hg(g_1g_2) \\ &= \mu_\beta(Hg, g_1g_2) \end{aligned}$$

koşulları sağlanır [30].

Şimdi ise aşikâr soft etkiye örnek verelim.

Örnek 5.1.3. Her G soft grubu kendi üzerine şu şekilde etki eder: $X = G$ alınmak üzere $\forall\, \beta \in A$ için

$$\mu_\beta : F(\beta) \times F(\beta) \longrightarrow F(\beta)$$
$$(g, h) \rightarrow \mu_\beta(g, h) = h$$

etki dönüşümüdür. Bu etki G' nin kendi üzerindeki **aşikâr (trivial) soft etkisi** olarak adlandırılır [30].

Örnek 5.1.4. Her G soft grubu aşağıda tanımlanan **çarpım** aracılığıyla kendi üzerine etki eder. Her $\beta \in A$ için

$$\mu_\beta : F(\beta) \times F(\beta) \longrightarrow F(\beta)$$
$$(g, h) \longrightarrow \mu_\beta(g, h) = gh$$

i. $\forall\, x \in F(x)$ için $\mu_\beta(e, x) = x$

$$\mu_\beta(e, x) = ex = x$$

ii. $\forall\, x \in F(\beta)\ ve\ \forall g, h \in F(\beta)\ için\ \mu_\beta(g, \mu_\beta(h, x)) = \mu_\beta(gh, x)$

$$\mu_\beta(g, \mu_\beta(h, x)) = \mu_\beta(g, hx) = ghx = \mu_\beta(gh, x)$$

dönüşümünün bir etki olduğu görülür.

Örnek 5.1.5. Her G soft grubu aşağıda verilen **konjuge** işlemiyle kendi üzerinde bir soft etkiye sahiptir. $\forall\beta \in A$ için

$$\mu_\beta : F(\beta)\times F(\beta) \longrightarrow F(\beta)$$
$$(g,h) \rightarrow \mu_\beta(g,h) = ghg^{-1}$$

dönüşümü bir etki olduğu açıktır [30].

i. $\forall\, x \in F(\beta)$ için $\mu_\beta(e,x) = x$

$$\mu_\beta(e,x) = exe^{-1} = x$$

ii. $\forall\, x \in F(\beta)\ ve\ \forall g,h \in F(\beta)\ için\ \mu_\beta(\mathrm{g},\mu_\beta(h,x)) = \mu_\beta(gh,x)$

$$\mu_\beta\left(g,\mu_\beta(h,x)\right) = \mu_\beta(g,hxh^{-1}) = ghxh^{-1}g^{-1} = ghx(gh)^{-1} = \mu_\beta(gh,x)$$

dönüşümünün bir etki olduğu açıktır.

Uyarı 5.1.1. G soft grubu değişmeli (abelyan) ise, G' nin konjuge işlemiyle kendi üzerindeki soft etkisi aşikâr soft etkiye dönüşür [30].

Örnek 5.1.6. $Y = (Y,F'',A)$ herhangi bir soft küme olmak üzere $G = (G,F,A)$ soft grubunun $X = (X,F',A)$ üzerindeki soft etkisi

$$\mu_\beta : F(\beta)\times F'(\beta) \longrightarrow F'(\beta)$$
$$(g,h) \rightarrow \mu_\beta(g,x)$$

olsun. $f : X \longrightarrow Y$ bire-bir dönüşüm ve $F'' = f(F')$ olmak üzere her $\beta \in A$ için

$$\mu'_\beta : F(\beta)\times f\big(F'(\beta)\big) \longrightarrow f(F'(\beta))$$
$$\big(g,f(x)\big) \rightarrow \mu'_\beta\big(g,f(x)\big) = f(\mu_\beta(g,x))$$

şeklinde tanımlanan dönüşümde bir etkidir. Bu soft etki ile (Y,F'',A) bir G −soft kümedir [30].

Örnek 5.1.7. $A = G = S_n$ olmak üzere $G = (G,F,A)$ bir soft grup ve $f(P_1,P_2,\dots,P_n)$ de $\{P_1,P_2,\dots,P_n\}$ kümesinin polinomlarını göstermek üzere $Y = (Y,F',A)$ bir soft küme olsun.

Bu durumda,

$$\mu_\beta : F(\beta) \times F'(\beta) \longrightarrow F'(\beta)$$

$$\big(\sigma, f(P_1, P_2, \dots, P_n)\big) \rightarrow \mu_\beta\big(\sigma, f(P_1, P_2, \dots, P_n)\big) = f(P_{\sigma(1)}, P_{\sigma(2)}, \dots, P_{\sigma(n)})$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm için

i. $\sigma = e$ için $\mu_\beta\big(e, f(P_1, P_2, \dots, P_n)\big) = \mathrm{f}(P_{e(1)}, P_{e(2)}, \dots, P_{e(n)}) = f(P_1, P_2, \dots, P_n)$

ii. Her $\sigma, \sigma' \in S_n$ için

$$\begin{aligned} \mu_\beta\left(\sigma, \mu_\beta\big(\sigma', f(P_1, P_2, \dots, P_n)\big)\right) &= \mu_\beta\left(\sigma, f\big(P_{\sigma'(1)}, P_{\sigma'(2)}, \dots, P_{\sigma'(n)}\big)\right) \\ &= f(P_{\sigma(\sigma'(1))}, P_{\sigma(\sigma'(2))}, \dots, P_{\sigma(\sigma'(n))}) \\ &= \mu_\beta(\sigma\sigma', f(P_1, P_2, \dots, P_n))) \end{aligned}$$

şartları sağlandığından bu dönüşüm bir etki olup X bir G −soft kümedir [30].

Örnek 5.1.8. (A, F, G) bir soft grup olduğunda G' nin otomorfizmlerin grubu $(A, F', Aut(G))$ bir soft grup olduğunu Önerme 5.0.3. de göstermiştik. Şimdi $(A, F', Aut(G))$ soft grubu (A, F, G) soft grubu üzerine etki tanımlar öyle ki her $\beta \in A$ için,

$$\mu_\beta : Aut(F(\beta)) \times F(\beta) \rightarrow F(\beta)$$

$$(g, a) \rightarrow g(a)$$

etki şartlarını sağladığı kolaylıkla gösterilir.

Tanım 5.1.2. Bir (G, F, A) soft grubunun (X, F', A) soft kümesi üzerindeki bir soft etkisinde her $\beta \in A$ ve $x, y \in F'(\beta)$ için bir $g \in F(\beta)$ var olup $\mu_\beta(g, x) = y$ ise bu soft etkiye **geçişmelidir(transitive)** denir [30].

Tanım 5.1.3. Bir (G, F, A) soft grubunun (X, F', A) soft kümesi üzerindeki bir soft etkisinde her $\beta \in A$ ve birbirinden farklı her $g, h \in F(\propto)$ için bir $x \in F'(\beta)$ var olup, $\mu_\beta(g, x) \neq \mu_\beta(h, x)$ ise bu soft etkiye **efektiftir** denir [29].

Bu tanıma denk olarak, $F(\beta)$' nın farklı elemanları $F'(\beta)$ üzerinde farklı şekilde etki ediyorsa bu soft etkiye **efektiftir** denir [30].

Tanım 5.1.4. Bir (G, F, A) soft grubu (X, F', A) soft kümesi bir soft etkiye sahip olmak üzere eğer her $\beta \in A$ ve $g, h \in F(\beta)$ için $\mu_\beta(g, x) = \mu_\beta(h, x)$ olacak şekilde bir $x \in F'(\beta)$ var öyleki $g = h$ ise bu soft etkiye **serbesttir** denir.

Başka bir ifadeyle, bir $x \in F'(\beta)$ için $\mu_\beta(g,x) = x$ olacak şekilde bir $g \in F(\beta)$ var ise bu g elemanı birimdir [30].

Tanım 5.1.5. Bir (G, F, A) soft grubunun (X, F', A) soft kümesi üzerindeki soft etkisi hem geçişmeli hem de serbest ise **regülerdir** denir. Yani, her $\beta \in A$ ve $x, y \in F'(\beta)$ için bir tek $g \in F(\beta)$ vardır öyleki $\mu_\beta(g,x) = y$ ise bu soft etki **regüler** olarak adlandırılır [30].

Sonuç 5.1.1. Herhangi bir G soft grubunun çarpım aracılığıyla kendi üzerindeki soft etkisi hem regüler hem de efektiftir [30].

Tanım 5.1.6. $X = (X, F', A)$ bir G-soft küme olsun. $\forall \alpha \in A$ ve $x \in F'(\alpha)$ için

$$Stab_G(x) = \{g \in F(\alpha): \mu_\alpha(g,x) = x\}$$

kümesine **x**' in **sabitleyicisi** denir.

Genel olarak, herhangi $Y \tilde{\subseteq} X$ soft kümesinin sabitleyicisi ise

$$Fix_G Y = \{g \in F(\alpha) : \mu_\alpha(g,x) = x, x \in F'(\alpha) \cap Y\}$$

olarak tanımlanır [31].

Önerme 5.1.1. $Stab_{\boldsymbol{G}}(X)$ ve $Fix_G Y$ kümeleri, G üzerinde birer soft gruptur [31].

İspat. $\forall x \in X$ için

$$Stab_G : X \to P(G)$$
$$x \to Stab_G(x)$$

tanımlı olup $Stab_G(x)$' in G' nin alt grubu olduğu açıktır. Böylece,
$(G, Stab_G, X)$ yapısı soft gruptur. Benzer biçimde, $\forall x \in Y$ için

$$Fix_G : Y \to P(G)$$
$$x \to Fix_G(x)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan, $Fix_G(x)$' in G' nin alt grubu olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Böylece $(Fix_G(x), Y)$ ikilisi G üzerinde soft gruptur [31].

Önerme 5.1.2. $Stab_G(x)$ ve $Fix_G Y$ verilen soft grupları G soft grubunun soft alt grubu değildir [31].

Önerme 5.1.3. Bir önceki önerme de tanımlanan $Stab_G(x)$ ve $Fix_G Y$ için

$$Fix_G Y = \cap_{x \in F'(\alpha) \cap Y} Stab_G(x) \text{ [31].}$$

İspat. $g \in Fix_G Y$ alalım. $\forall x \in F'(\alpha) \cap Y$ için $\mu_\alpha(g,h) = x$ olduğundan $g \in Stab_G(x)$ mevcuttur. Böylece $g \in \cap_{x \in F'(\alpha)\cap Y} Stab_G(x)$ olur. Bu durumda $Fix_G Y \subseteq \cap_{x \in F'(\alpha)\cap Y} Stab_G(x)$ elde edilir. Tersine olarak $g \in \cap_{x \in F'(\alpha)\cap Y} Stab_G(x)$ alalım. Böylece $\forall x \in F'(\alpha) \cap Y$ için $g \in Stab_G(x)$ olduğundan $\mu_\alpha(g,h) = x$ bulunur. Buradan $g \in Fix_G Y$ elde edilir. Böylece ispat tamamlanmış olur [31].

Tanım 5.1.7. $G = (G, F, A)$ soft grubunu alalım. Bu soft grup kendi üzerine konjuge etki etsin. $\forall \alpha \in A$ ve $h \in F(\alpha)$ için h' nin yörüngeleri yani

$$C_G(h) = \{g \in F(\alpha) : \ \mu_\alpha(g,h) = \mu_\alpha(h,g)\}$$

kümesi h' nin **merkezleştiricisi** olarak adlandırılır.
Ayrıca, $F(\alpha)$ da bulunan tüm elemanların merkezleştiricilerinin mevcut kesişimi

$$Z(G) = \{g \in F(\alpha) : \mu_\alpha(g,h) = \mu_\alpha(h,g), \forall h \in F(\alpha)\}$$

şekilde tanımlı olup $Z(G)$' ye G soft grubunun merkezi denir [31].

Önerme 5.1.4. (C_G, G, G) yapısı soft gruptur [31].

İspat. $\forall h \in F(\alpha)$ için

$$C_G : G \to P(G)$$
$$h \to C_G(h)$$

tanımlansın. $C_G(h)$' nin G grubunun alt grubu olduğu açıktır. Böylece (C_G, G) ikilisi G grubu üzerinde soft gruptur.

Tanım 5.1.8. $G = (G, F, A)$ soft grubunu kendi üzerine konjuge etki ile gözönüne alalım. H kümesi G' nin soft alt kümesi olsun. $\forall \alpha \in A$ için soft alt grubu

$$N_G(H) = \{g \in F(\alpha) : \mu_\alpha(g,h) = h, h \in F(\alpha) \cap H\}$$

şeklinde tanımlı olup G' ye H' nin **normalleştiricisi** denir [31].

Ayrıca, H soft alt kümesi G'nin soft alt grubu kabul ederek H aynı zamanda $N_G(H)$' nın da soft alt grubudur. Ayrıca H soft alt kümesi G' nin normal soft alt grubu ise böylece $N_G(H)$ kümesi G soft grubunun en geniş soft alt grubudur.

Tanım 5.1.9. Bir X kümesi alalım ve A parametrelerin kümesi olsun. X kümesinin permütasyonlar grubu $\boldsymbol{Sym(X)}$ olduğu biliniyor ve bu grubun tüm alt gruplarının kümesi de $P(Sym(X))$ olsun. Böylece $\alpha \in A$ için;

$$F: A \to P(Sym(X))$$

dönüşümü ile $F(\alpha)$ kümesi $\boldsymbol{Sym(X)}$' in alt grubu ise $(Sym(X), F, A)$' ya **soft simetrik grup** denir [31].

Önerme 5.1.5. $G = (G, F, A)$ soft grubunun $X = (X, F', A)$ bu soft kümesi üzerine etkisi tanımlansın. Böylece G' den $Sym(X)$' e soft homomorfizm mevcuttur [31].

6. SOFT ÇAPRAZLANMIŞ MODÜLLER

Matematiğin birçok alanında önemli uygulamaları olan çaprazlanmış modüller Whitehead tarafından tanımlanmış önemli bir kavramdır [25]. Bu bölümde G. Oguz [30] doktora tezinde vermiş olduğu soft çaprazlanmış modül tanımı ve örneklerine yer verilmiştir. Aynı zamanda soft çaprazlanmış modül homomorfizmi tanımlanmıştır.

Tanım 6.0.1. $H = (H, F', A)$ ve $G = (G, F, A)$ birer soft grup olmak üzere bunlar arasında $\delta = (\delta_0, g_0) : H \longrightarrow G$ dönüşümü bir soft homomorfizm olsun. G' nin H üzerine $\sigma : G \times H \longrightarrow H$ (sol) soft $G -$ etkisi her $\beta \in A$ için

$$\mu_\beta : F(\beta) \times F'(\beta) \longrightarrow F'(\beta)$$
$$(g, h) \rightarrow \mu_\beta(g, h) = g \cdot h$$

şeklinde gösterilsin. Eğer her $\beta \in A$ için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa (H, G, δ, A) dörtlüsüne bir **soft çaprazlanmış modül** denir [30].

i. $\forall h \in F'(\beta)$ ve $\forall g \in F(\beta)$ için $\delta_0(g \cdot h) = g\delta_0(h)g^{-1}$

ii. $\forall h, h_1 \in F'(\beta)$ için $\delta_0(h) \cdot h_1 = hh_1h^{-1}$

Örnek 6.0.1. H bir abelyan grup olmak üzere (H, F', A) ve (G, F, A) birer soft grup olsun. Bu durumda,

$\delta : (H, F', A) \longrightarrow (G, F, A)$ bir soft homomorfizm ve her $\beta \in A$ için

$$\mu_\beta : F(\beta) \times F'(\beta) \longrightarrow F'(\beta)$$
$$(g, h) \rightarrow \mu_\beta(g, h) = h$$

aşikar etkisi ile birlikte (H, G, δ, A) yapısı bir soft çaprazlanmış modüldür [30].

Örnek 6.0.2. (G, F, A) soft grubu kendi üzerine konjuge etki ile etki etsin. $\mathrm{I} = (\mathrm{I}_\mathrm{G}, \mathrm{I}_\mathrm{A}) : \mathrm{G} \longrightarrow \mathrm{G}$ soft homomorfizmi ile (G, G, I, A) dörtlüsü bir soft çaprazlanmış modül yapısına sahiptir [30].

Örnek 6.0.3. G bir abelyan grup olmak üzere (G, F, A) soft grup olsun. Bu durumda,

$$\delta : G \rightarrow G$$
$$h \rightarrow \delta(h) = h \qquad \text{olsun.}$$

$$\sigma : F(\beta) \times F(\beta) \longrightarrow F(\beta)$$
$$(g,h) \rightarrow \sigma(g,h) = g \cdot h \cdot g^{-1}$$

i. $\forall\, h \in F(\beta)$ ve $\forall g \in F(\beta)$ için

$$\begin{aligned}\delta(g \cdot h) &= g \cdot \delta(h) \cdot g^{-1}\\ &= g \cdot h \cdot g^{-1}\\ &= g \cdot \delta(h) \cdot g^{-1}\end{aligned}$$

ii. $\forall\, h, h_1 \in F(\beta)$ için

$$\begin{aligned}\delta(h) \cdot h_1 &= h \cdot h_1 \cdot h^{-1}\\ &= \delta(h) \cdot h_1 \cdot \delta(h)^{-1}\\ &= h \cdot h_1 \cdot h^{-1}.\end{aligned}$$

Örnek 6.0.4. $G = (A, F, G)$ ve $Aut(G) = (A, F', Aut(G))$ soft gruplar olmak üzere

$$\delta : G \rightarrow Aut(G)$$
$$a \rightarrow \partial(a) : G \rightarrow G \quad \text{otomorfizmi için,}$$

$\partial(a)(b) = bab^{-1}$ sınır dönüşümü ile her $\beta \in A$ için

$$\mu_\beta : Aut(F(\beta)) \times F(\beta) \rightarrow F(\beta)$$
$$(g,a) \rightarrow g(a)$$

etkisiyle birlikte $(G, Aut(G), \delta)$ bir soft çaprazlanmış modül olur. Daha önce Örnek 5.1.8. de her $\beta \in A$ için,

$$\mu_\beta : Aut(F(\beta)) \times F(\beta) \rightarrow F(\beta)$$

bir etki olduğunu göstermiştik. Şimdi $\delta : G \rightarrow Aut(G)$ sınır dönüşümünün bir homomorfizm olduğunu gösterelim.

$$g \rightarrow \partial(g) : G \rightarrow G$$
$$s \rightarrow \partial(g)(s) = gsg^{-1}$$

şeklinde tanımlayalım. $g, h \in G$ için $\partial(gh) = \partial(g) \circ \partial(h)$ olduğunu gösterirsek ∂' nin bir grup homomorfizması olduğunu göstermiş oluruz.

$$\big(\partial(g) \circ \partial(h)\big)(s) = \partial(g)\big(\partial(h)(s)\big) = \partial(g)(hsh^{-1})$$

$$= g(hsh^{-1})g^{-1} = (gh)s(h^{-1}g^{-1})$$

$$= (gh)s(gh)^{-1} = \partial(gh)(s)$$

G bir grup olduğundan birleşme özelliği vardır. Dolayısıyla ∂ bir grup homomorfizmasıdır.

i. $\theta \in Aut(G)$ ve $g \in G$ olsun.

$$\partial(\theta_g)(s) = \partial(\theta(g))(s) = \theta(g)s\theta(g)^{-1}$$

ve

$$(\theta \circ \partial(g) \circ \theta^{-1})(s) = (\theta \circ \partial(g))(\theta^{-1}(s)) = \theta\left(\partial(g)(\theta^{-1}(s))\right)$$

$$= \theta(g\theta^{-1}(s)g^{-1}) = \theta(g)(\theta \circ \theta^{-1})(s)\theta(g^{-1})$$

$$= \theta(g)s\theta^{-1}(g)$$

olup $\partial(\theta_g) = \theta\partial(g)\theta^{-1}$ bulunur.

ii. Her $g, s \in G$ için $\partial(g)_s = \partial(g)(s) = gsg^{-1}$ olup ikinci şart da sağlanır.

Sonuç olarak $(G, Aut(G), \partial)$ bir çaprazlanmış modüldür.

Tanım 6.0.2. (H, G, δ, A) ve (H', G', δ', B) iki soft çaprazlanmış modül olmak üzere

$$f = (f_1, g_1) : (H, K, A) \longrightarrow (H', K', B)$$

ve

$$f^* = (f_2, g_2) : (G, F, A) \longrightarrow (G', F', B)$$

birer soft homomorfizm olsun. Eğer her $\beta \in A$ için

i. $f_2\delta = \delta' f_1$

ii. $\forall\, g \in F(\beta)$ ve $\forall\, h \in K(\beta)$ olmak üzere $f_1(g.h) = f_2(g) \cdot f_1(h)$

iii. $(f_2 \times f_1)(F(\beta), K(\beta)) = (F' \times K')(g_2(\beta), g_1(\beta))$

şartları sağlanıyorsa (f, f^*) çiftine bir **soft çaprazlanmış modül homomorfizmi** denir ve $< f, f^* > : (H, G, \delta, A) \longrightarrow (H', G', \delta', B)$ ile gösterilir [30].

7. SONUÇ

Bu tez çalışmasında soft kavramına ve ondan elde edilen bazı cebirsel yapılara yer verilmiştir. Soft kavramından önce tezin akışını ve bütünlüğünü korumak için grup, etki, çaprazlanmış modül gibi kavramlar tanımlanmıştır. Soft teori kesin olmayan kavramları parametrelere bağlayarak, belirli ve daha kolay çözümler elde etmeyi sağlar. Bu çalışma Molodtsov tarafından yapılmıştır [5]. Daha sonrasında bu kavram üzerinde birçok bilim insanı çalışmıştır. Bu çalışmalardan biri de Oguz, Icen ve Gursoy tarafından soft etki kavramı literatüre kazandırılmıştır [31]. D. A. Molodtsov tarafından literatüre kazandırılan soft küme teorisinden hareketle G. Oğuz tarafından elde edilen soft çaprazlanmış modül kavramı gelecekte matematikçilere yeni problemlere kapı aralayacaktır.

Soft çaprazlanmış modül kavramı, iki soft grup arasında bir soft homomorfizm ve birbiri üzerine tanımlanan bir etki yardımıyla elde edilen bazı özellikleri sağlayan bir cebirsel yapıdır.

Bu tez çalışmasında soft kavramı ile çaprazlanmış modül kavramının birlikte yorumlanıp soft çaprazlanmış modül kavramının geliştirilmesiyle bazı topolojik problemlere cebirsel yaklaşımlar sağlanacağı düşünülmüş ve çeşitli örneklere yer verilerek kavramların anlaşılması amaçlanmıştır.

Bu tez çalışmasında bazı sonuçlara yer verilmiştir.

i. Soft küme kavramlarının daha kolay anlaşılması için özgün örnekler verilmiştir.

ii. Soft grup teorisini tanıtmak için gerekli olan cebirsel yapılar, örnekleri ile birlikte konunun anlaşılması için ayrıntılı bir şekilde sunulmuştur.

iii. Bir grubun bir küme üzerine etkisi kavramı, bir soft grubun bir soft küme üzerine etki kavramına taşınarak soft etki kavramı verilmiştir. Soft çaprazlanmış modül kavramının tanımlanabilmesi için alınan bir dönüşümün soft homomorfizm olması ve bir soft etkinin tanımlanması gerektiği ve bu kavramlar arası geçişi ortaya koyan çalışmaların olduğu anlaşılmıştır. Bu tezde kavramlar arasındaki geçişi ortaya koyup bu kavramlar ile alakalı çeşitli örneklere yer verilmiştir.

iv. Öneri olarak da bu tezde verilen cebirsel yapılara topolojik yapılar yüklenerek özgün bir çalışmaya dönüştürülebilir.

KAYNAKÇA

[1] J. J. Rotman, *An Introduction to the Theory of Groups*, 4th ed. New York: Springer, 1995.

[2] D. J. S. Robinson, *A Cours in the Theory of Groups*, 2nd ed. New York: Graduate Texts in Mathematics, Grup, Springer-Verlag, 1996.

[3] J. L. Alperin and R. B. Bell, *Groups and representations*, Vol. 162. New York: Graduate Texts in Mathematics,Springer-Verlag, 1995.

[4] H. Zassenhaus, *The Theory of Groups*, 2nd ed. New York: Chelsea Publishing Company, 1995.

[5] D. Molodtsov, “Soft set theory - First results,” *Comput. Math. with Appl.*, vol. 37, no. 4–5, pp. 19–31, Feb. 1999, doi: 10.1016/s0898-1221(99)00056-5.

[6] Z. Pawlak, “Information systems theoretical foundations,” *Inf. Syst.*, vol. 6, no. 3, pp. 205–218, 1981, doi: 10.1016/0306-4379(81)90023-5.

[7] F. Feng and Y. Li, “Soft subsets and soft product operations,” *Inf. Sci. (Ny).*, vol. 232, pp. 44–57, 2013, doi: 10.1016/j.ins.2013.01.001.

[8] N. Aman and S. Enginolu, “Soft set theory and uni-int decision making,” *Eur. J. Oper. Res.*, vol. 207, no. 2, pp. 848–855, 2010, doi: 10.1016/j.ejor.2010.05.004.

[9] L. Zadeh, “Fuzzy sets,” *Inf. Control*, vol. 8, pp. 338–353, 1965.

[10] H. Aktas and N. Çağman, “Soft sets and soft groups,” *Inf. Sci.*, vol. 177, pp. 2726–2735, Jul. 2007, doi: 10.1016/j.ins.2006.12.008.

[11] M. Ali, F. Feng, X. Liu, W. Min and M. Shabir, “On some new operations in soft set theory,” *Comput. Math. with Appl.*, vol. 57, pp. 1547–1553, May 2009, doi: 10.1016/j.camwa.2008.11.009.

[12] K. V. Babitha and J. J. Sunil, “Soft set relations and functions,” *Comput. Math. with Appl.*, vol. 60, no. 7, pp. 1840–1849, 2010, doi: 10.1016/j.camwa.2010.07.014.

[13] G. Oguz, M. H. Gursoy and I. Icen, “On soft topological categories,” *Hacettepe J. Math. Stat.*, vol. 48, no. 6, pp. 1675–1681, 2019, doi: 10.15672/HJMS.2018.600.

[14] A. Kharal and B. Ahmad, “Mappings on fuzzy soft classes,” *Adv. Fuzzy Syst.*, pp. 1–11, 2009, doi: 10.1155/2009/407890.

[15] P. K. Maji, R. Biswas and A. R. Roy, “Soft set theory,” *Comput. Math. with Appl.*, vol. 45, no. 4–5, pp. 555–562, 2003, doi: 10.1016/S0898-1221(03)00016-6.

[16] M. H. Gursoy, G. Oguz, I. Icen, “A new concept in the soft theory: soft groupoids,” *Southeast Asian Bull. Math.*, vol. 44(4), pp. 555–565, 2020.

[17] M. Shabir and M. Naz, “On soft topological spaces,” *Comput. Math. with Appl.*, vol. 61, no. 7, pp. 1786–1799, 2011, doi: 10.1016/j.camwa.2011.02.006.

[18] U. Acar, F. Koyuncu and B. Tanay, “Soft sets and soft rings,” *Comput. Math. with Appl.*, vol. 59, no. 11, pp. 3458–3463, 2010, doi: 10.1016/j.camwa.2010.03.034.

[19] N. Çağman, F. Çitak and H. Aktaş, “Soft int-group and its applications to group theory,” *Neural Comput. Appl.*, vol. 21, no. SUPPL. 1, pp. 151–158, 2012, doi: 10.1007/s00521-011-0752-x.

[20] S. Das and S. K. Samanta, “Operators on Soft Inner Product Spaces,” *Fuzzy Inf. Eng.*, vol. 6, no. 4, pp. 435–450, 2014, doi: 10.1016/j.fiae.2015.01.003.

[21] E. Türkmen and A. Pancar, “On some new operations in soft module theory,” *Neural Comput. Appl.*, vol. 22, no. 6, pp. 1233–1237, 2013, doi: 10.1007/s00521-012-0893-6.

[22] G. Oguz and B. Davvaz, “Soft topological hyperstructure,” *J. Intell. Fuzzy Syst.*, vol. 40, pp. 8755–8764, 2021.

[23] G. Oguz, “Soft topological transformation groups,” *Mathematics*, vol. 8, no. 9, 2020, doi: 10.3390/math8091545.

[24] J. Liu, Q.M. Sun, Z.L. Zhang, “Soft sets and soft modules,” *Int. Conf. Rough Sets Knowl. Technol.*, vol. 5009, pp. 403–409, 2008.

[25] J. H. C. Whitehead, “Note on a Previous Paper Entitled On Adding Relations to Homotopy Groups,” *Ann. Math.*, vol. 47, no. 4, p. 806, 1946, doi: 10.2307/1969237.

[26] S. Eilenberg and S. MacLane, “General Theory of Natural Equivalences,” *Trans. Am. Math. Soc.*, vol. 58, no. 2, p. 231, 1945, doi: 10.2307/1990284.

[27] P. J. Higgins, R. Sivera and R. Brown, “Nonabelian Algebraic Topology: Filter sapaces, crossed complexes and cubical homotopy groupoids,” *EMS Tracts Math.*, vol. 15, p. 703, 2011.

[28] S. Temel, “Topolojik 2-Gruplar,” Yüksek Lisans Tezi, Erciyes Üniversitesi, Kayseri, p. 62, 2012.

[29] K. Qin, Q. Liu and Y. Xu, “Redefined soft relations and soft functions,” *Int. J. Comput. Intell. Syst.*, vol. 8, no. 5, pp. 819–828, 2015, doi: 10.1080/18756891.2015.1063244.

[30] G. Oguz, “Bazı Cebirsel Yapılara Esnek (Soft) Yaklaşım,” Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Malatya, pp. 1–26, 2018.

[31] M. H. Gursoy, G. Oguz, I. Icen, “Actions of Soft Groups,” *Commun. Fac. Sci. Univ. Ank. Ser. A1 Math. Stat.*, vol. 68, no. 1, pp. 1163–1174, 2019.

ÖZGEÇMİŞ

Ad-Soyad **:** Talat GÜL

ÖĞRENİM DURUMU:

- **Lisans:** 2018, İnönü Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik Bölümü Mezunu