T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

QUASİLİNEER UZAYLAR ARASINDA TANIMLI QUASİLİNEER OPERATÖRLER ÜZERİNE

Halise Keziban BANAZILI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
Temmuz 2014

Tezin Başlığı : QUASİLİNEER UZAYLAR ARASINDA TANIMLI QUASİLİNEER OPERATÖRLER ÜZERİNE

Tezi Hazırlayan : Halise Keziban BANAZILI

Sınav Tarihi : 16.07.2014

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri (ilk isim jüri başkanı, ikinci isim tez danışmanı)

Prof.Dr. Sadık KELEŞ ____________________

Prof.Dr. Yılmaz YILMAZ ____________________

Yrd.Doç.Dr. Murat CANDAN ____________________

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

____

Prof.Dr. Mehmet ALPASLAN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum "Quasilineer Uzaylar Arasında Tanımlı Quasilineer Operatörler Üzerine" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlâk ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Halise Keziban BANAZILI

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

QUASİLİNEER UZAYLAR ARASINDA TANIMLI QUASİLİNEER OPERATÖRLER ÜZERİNE

Halise Keziban BANAZILI

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

87+vi sayfa

2014

Danışman: Prof.Dr. Yılmaz YILMAZ

Bu çalışmada genel olarak, quasilineer operatörler teorisinin geliştirilmesi amaçlanmış ve lineer operatörlere ilişkin bazı önemli teoremlerin quasilineer karşılıkları verilmiştir.

Beş bölümden oluşan bu çalışmanın ilk bölümünde küme-değerli fonksiyon sınıflarının bazı özelliklerinden bahsedilmiş ve bu sınıflara ait önemli örnekler verilmiştir.

İkinci bölüm ise sonraki bölümlere temel teşkil edecek bazı önemli tanım ve teoremlerin verilmesine ayrılmıştır. Ayrıca $\mathbb{R}^n$ nin kompakt ve kompakt-konveks alt kümelerinin ailesinden bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde quasilineer uzay ve altquasilineer uzay kavramı ele alınmış, normlu quasilineer uzaylardan bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde quasilineer bağımlılık-bağımsızlık tanımları verilmiş, baz ve boyut kavramları tanıtılmıştır. Ayrıca proper quasilineer uzaylardan bahsedilmiştir.

Beşinci ve son bölümde ise quasilineer operatörler ve bu operatörlerle ilgili yeni sonuçlar sunulmuştur. Ayrıca hem reel hem de interval matrisler yardımıyla elde quasilineer operatörler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Quasilineer Uzaylar, Normlu Quasilineer Uzaylar, Quasilineer Bağımlılık-Bağımsızlık, Proper Quasilineer Uzaylar, Quasilineer Operatörler.

ABSTRACT

M.Sc. Thesis

ON QUASILINEAR OPERATORS BETWEEN QUASILINEAR SPACES

Halise Keziban BANAZILI

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

87+vi pages

2014

Supervisor: Prof.Dr. Yılmaz YILMAZ

In this work, which consists of five chapter, our main object is to develop the theory of quasilinear operations and quasilinear counterparts of some important theorems and corollaries with respect to linear operations have been stated.

In the first chapter, some properties related to families of set-valued function have been presented and important examples have been given for this families.

In the second chapter, the basic definitions and theorems which will be useful in the next chapters have been introduced. Also, the family of compact and convex subsets of $\mathbb{R}^n$ has been mentioned.

In the third chapter, after the introduction of quasilinear spaces and quasilinear subspaces, normed quasilinear spaces have been considered.

In the fourth chapter, the concept of quasilinear depandence-independence have been introduced, the notions of bases and dimension have been stated. Furthermore, proper quasilinear spaces have been introduced.

In the fifth and final chapter, quasilinear operators and new corollaries with respect to these operations have been presented. In addition, quasilinear operations optained by the way of both real matrix and interval matrix have been discussed.

KEY WORDS: Quasilinear Spaces, Normed Quasilinear Spaces, Quasilinear Dependence-Independence, Proper Quasilinear Spaces, Quasilinear Operators.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tez danışmanlığımı üstlenen ve tezin hazırlanması sürecinde yardımlarını ve desteğini esirgemeyen kıymetli hocam Sayın Prof. Dr. Yılmaz YILMAZ 'a, lisans ve lisansüstü eğitimim boyunca beni yönlendiren ve tecrübeleriyle bana çok büyük katkıları olan Bölüm Başkanımız Sayın Prof. Dr. Sadık KELEŞ'e, tez ve seminer yardımında bana Latex programını öğreten ve yardımlarını hiç eksik etmeyen Sayın Doç. Dr. M. Kemal ÖZDEMİR'e, hayatım boyunca yanımda olan anneme, babama ve kardeşlerime, manevi desteğinden dolayı Nişanlıma ve değerli vaktini her zaman benimle paylaşan Esin GÖĞER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Fonksiyonel analiz alanında yer alan ve lineer uzay kavramı üzerine inşa edilen normlu uzaylar ve bu uzaylar üzerinde tanımlı lineer operatörlerin birtakım özellikleri sayesinde klasik tek değerli fonksiyonlarla oluşturulan diferensiyel denklemlerin birçok doğa problemine modellenmesinde etkili araçlar olmuşlardır. Ancak bazı özel doğa problemleri vardır ki bunlar klasik tek değerli fonksiyonların ürettiği diferensiyel veya integral denklemler tarafından modellenemez. İşte bu sorunun çözümü üzerine yapılan çalışmalar küme değerli fonksiyonlarla kurgulanan diferensiyel içermeler, fuzzy diferensiyel denklemleri ve küme diferensiyel denklemler gibi konuları ortaya çıkarmıştır. Ancak ne var ki bu tip problemleri kurgulamada temel teşkil eden fonksiyon uzaylarının lineer uzay yapısına sahip olmayışı, bu problemler için gerekli analizleri yapmayı zorlaştırmıştır. İşte bu problemlerde karşımıza çıkan fonksiyon uzayları gibi lineer uzay yapısına sahip olmayan daha birçok uzayı incelemek ve bu uzayların klasik teorisindeki analiz araçlarını geliştirmek için lineer uzaylardan daha geniş olan **quasilineer uzayları** geliştirme gereksinimi doğmuştur.

Yukarıda bahsi geçen lineer uzay teşkil etmeyen küme örneklerinden en önemlileri $\mathbb{R}^n$ nin kompakt ve kompakt-konveks alt kümelelerinin sınıfı olan $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ dir. Çünkü, sözgelimi birtakım doğa problemlerini modelleyen küme diferensiyel denklemlerinin oluşmasında $\mathbb{R}$ nin bir $I = [a, b]$ kapalı aralığından $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ye giden tüm sürekli fonksiyonların uzayı olan $C(I, \Omega_C(\mathbb{R}^n))$ uzayı önemli rol oynamaktadır. O bakımdan $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ sınıflarındaki quasilineer yapıyı daha iyi analiz etmek adına Bölüm-2 de $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ailelerini inceledik. Bu kısımda bahsedeceğimiz en önemli husus, toplama $(+)$ işlemi Minkowski toplamı ve skalerle çarpma $(\cdot)$ işlemi bir reel sayının bir kümeyle çarpımı olmak üzere keyfi bir $A \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için genelde

$$A + (-1) \cdot A \neq \{0\}$$

olmasıdır. İşte bu nedenle $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ bir lineer uzay olamaz.

Literatürde farklı quasilineer uzay kavramları vardır. Bunlardan biri Markov'un [2] numaralı çalışmasında yer almaktadır. Biz bu çalışmamızı Aseev'in [1] numaralı çalışmasını temel alarak oluşturduk. Zira Aseev quasilineer uzay tanımını yaparken bir kısmi sıralama bağıntısı kullanmış ve bu sayede klasik fonksiyonel analizin oldukça önemli bazı tanım ve teoremlerinin tutarlı karşılıklarını quasilineer uzaylar teorisinde de verebilmiştir. Yine bu sayede "=" bağıntısının bir kısmi sıralama bağıntısı olması nedeniyle her reel lineer uzayın bir quasilineer uzay teşkil ettiğini ve quasilineer uzaylar için tanımlanan norm fonksiyonu olma şartlarının lineer uzaylardaki norm fonksiyonu olma şartlaına dönüştüğünü görmüştür. Böylece klasik tek değerli fonksiyonların analizinde önemli yer tutan birçok teoremin, kümelerin ve küme değerli fonksiyonların normlu quasilineer uzaylardaki karşılıkları tutarlı bir şekilde verilebilmiştir.

Aseev'in [1] numaralı çalışması, quasilineer analizin temelini oluşturmakla beraber quasilineer analizin gelişimi için gerekli birçok kavram halen geliştirilmeyi beklemektedir. Quasilineer analizin gelişmesindeki en büyük engel bağımlılık-bağımsızlık ve baz kavramlarının yokluğudur. Bu nedenle çalışmamızın hedefi olan quasilineer operatörlere geçmeden önce Bölüm-3 te quasilineer bağımlılık-bağımsızlık ve baz kavramları verilmiş, ayrıca uygulamada sıkça karşılaşılan birçok quasilineer uzayın boyutu da tespit edilebilmiştir. Bu bölümdeki çalışmalarımız doğrultusunda biz quasilineer uzayı **regüler ve singüler** parçadan ibaret olarak, bir lineer uzayı ise sadece **regüler** parçadan ibaret olarak görmekteyiz. Yine bu bölümde quasilineer uzayların özel bir tipi olan **proper quasilineer uzaylar** fikri ortaya atılmış ve bu tip uzayların mutlaka bir baza sahip olduğu gösterilerek elemanları için tek türlü biçimde temsil de verilebilmiştir.

Çalışmamızın yapılış amacını taşıyan son bölümde ise öncelikle Aseev'in [1] numaralı çalışmasında temellerini attığı **quasilineer operatörler** tanıtılmıştır. Aseev, quasilineer operatör tanımını yaparken yine kısmi sıralama bağıntısı kullanmış ve bu sayede de "=" bağıntısıyla her lineer operatörün bir quasilineer operatör olduğunu görmüştür. Ayrıca bu son kısımda quasilineer operatörlere ilişkin temel teorem ve sonuçlar elde edilmiş, birçok quasilineer operatör örneği verilmiştir. İlaveten lineer cebirdeki "Sonlu boyutlu uzaylar arasındaki her lineer dönüşüme bir matris, her matrise bir lineer dönüşüm karşılık gelir." gerçeğine karşılık quasilineer cebirde elde ettiğimiz en önemli sonuç, $m \times n$ tipinde her reel matrisin $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ den $\Omega_C(\mathbb{R}^m)$ ye quasilineer bir operatör tanımlarken, $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ den $\Omega_C(\mathbb{R}^m)$ ye giden bir quasilineer operatörün bir matris tanımlayamayacağıdır. Ayrıca bu duruma paralel olarak, $m \times n$ tipinde her interval matrisin $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ den $\Omega_C(\mathbb{R}^m)$ ye quasilineer bir operatör tanımladığını fakat tersi bir durumun mevcut olmayabileceğini de ifade ettik.

2. TEMEL KAVRAMLAR

Bu bölümde çalışmamızda ihtiyaç duyulan küme teorisi, lineer cebir ve fonksiyonel analizin temel tanım ve teoremlerine yer verilecektir. Ayrıca bu bölümde bahsi geçen $\mathbb{K}$ cisminden $\mathbb{R}$ veya $\mathbb{C}$ anlaşılacaktır. Yine bu bölümde $\mathbb{R}^n$ nin kompakt alt kümelerinin ailesi ile $\mathbb{R}^n$ nin kompakt-konveks alt kümelerinin ailesi incelenecektir.

2.1 Bazı Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 2.1.1. *[4] Bir X kümesi üzerinde aşağıdaki şartları sağlayan "$\leq$" bağıntısına bir* ***kısmi sıralama bağıntısı****, $(X, \leq)$ kümesine de bir* ***kısmi sıralı küme*** *veya* ***poset*** *denir.*

$$\forall x \in X \text{ için } x \leq x$$

$$\forall x,\ y,\ z \in X \text{ için } x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z$$

$$\forall x,\ y \in X \text{ için } x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y$$

Tanım 2.1.2. *[4] $(X, \leq)$ kısmi sıralı kümesinde $x \leq y$ ya da $y \leq x$ önermesini sağlayan (x, y) elemanlarına* ***karşılaştırılabilir elemanlar*** *denir. Her iki elemanı karşılaştırılabilir olan bir kısmi sıralı kümeye de* ***tam sıralı küme*** *veya* ***zincir*** *denir.*

Örnek 2.1.1. *[4] $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin tüm alt kümelerinin ailesi olan $P(\mathbb{N})$, "$\subseteq$" ile gösterilen içerme bağıntısı ile kısmi sıralı bir kümedir, ancak bir zincir değildir.*

Tanım 2.1.3. *[4] $(X, \leq)$ bir kısmi sıralı küme ve $M \subset X$ olsun.*

*Bir $m \in M$ için $n \leq m$ olacak şekilde m den farklı bir $n \in M$ bulunamıyorsa m elemanına M kümesinin bir **minimal elemanı**,*

*Bir $u \in M$ için $u \leq v$ olacak şekilde u dan farklı bir $v \in M$ bulunamıyorsa u elemanına M kümesinin bir **maksimal elemanı**,*

*Her $m \in M$ için $a \leq m$ olacak şekilde bir $a \in M$ varsa a elemanına M kümesinin **en küçük elemanı** veya **minimumu**,*

*Her $m \in M$ için $m \leq b$ olacak şekilde bir $b \in M$ varsa b elemanına M kümesinin **en büyük elemanı** veya **maksimumu** denir.*

Lemma 2.1.1. *[4]**(Zorn Lemması)** $M \neq \emptyset$ bir kısmi sıralı küme olsun. M deki her C zincirinin bir üst sınıra sahip olduğunu varsayalım. Bu durumda M kümesi en az bir maksimal elemana sahiptir.*

Tanım 2.1.4. *[7] X boştan farklı bir küme ve $\mathbb{K}$ bir cisim olsun. X üzerinde $(+)$ toplama ve $(\cdot)$ skalerle çarpma diye adlandırılan işlemleri sırasıyla*

$$+ : X \times X \to X \ , \ (x, y) \to x + y$$

$$\cdot : \mathbb{K} \times X \to X \ , \ (\alpha, x) \to \alpha \cdot x$$

*olarak tanımlayalım. Eğer $\forall x, y, z \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$ için aşağıdaki şartlar sağlanırsa X e $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir **lineer uzay (vektör uzayı)** denir:*

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

$$x + y = y + x$$

*$x + \theta = x$ olacak şekilde X in **sıfır elemanı** denen bir $\theta \in X$ vardır.*

*$\forall x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde x in **tersi denen** bir $-x \in X$ vardır.*

$$\alpha \cdot (x+y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y$$

$$(\alpha+\beta) \cdot x = \alpha \cdot x + \beta \cdot x$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x$$

$$1 \cdot x = x$$

Tanım 2.1.5. *[7] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde $(+)$ toplama ve $(\cdot)$ skalerle çarpma işlemleriyle bir lineer uzay olsun. $Y \subseteq X$ alt kümesi de $(+)$ ve $(\cdot)$ işlemleriyle $\mathbb{K}$ üzerinde bir lineer uzay yapısına sahipse Y uzayına X in bir* ***alt vektör uzayı*** *denir.*

Teorem 2.1.1. *[7] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $Y \subseteq X$ alt kümesi verilsin.*

$$Y \text{ bir alt vektör uzayıdır} \Longleftrightarrow \alpha \cdot y_1 + \beta \cdot y_2 \in Y, \forall y_1, y_2 \in Y, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}$$

Tanım 2.1.6. *[5] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.*

$$[x,y] = \{\lambda x + (1-\lambda)y : \lambda \in [0,1]\}$$

kümesine x ile y noktalarını birleştiren ***doğru parçası (segment)*** *denir.*

Tanım 2.1.7. *[5] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer $\forall x, y \in A$ için $[x,y] \subseteq A$ oluyorsa A ya* ***konveks küme*** *denir.*

Örnek 2.1.2. *[5] $\mathbb{R}$ vektör uzayında $[a,b] = \{x : a \leq x \leq b,\ a,b \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{R}$ kümesi konveks bir kümedir.*

Örnek 2.1.3. *[5] $\mathbb{R}^2$ nin birim yuvarı olan*

$$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$$

kümesi $\mathbb{R}^2$ nin konveks bir alt kümesidir.

Tanım 2.1.8. *[7] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $x_1, x_2, ..., x_n \in X$ ve $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{K}$ olmak üzere*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + ... + c_n \cdot x_n$$

*vektörüne $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerinin bir **lineer kombinasyonu** denir.*

Tanım 2.1.9. *[7] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\emptyset \neq A \subset X$ altkümesini alalım. A nın sonlu sayıdaki elemanlarının tüm lineer kombinasyonlarının kümesine A* **nın** ***gereni*** *veya A* ***nın gerdiği alt uzay*** *denir. $SpanA$ veya SpA ile gösterilir. $SpanA = X$ ise A kümesi X* ***i geriyor*** *denir.*

Tanım 2.1.10. *[7] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.*

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\} = A \subset X$$

altkümesini alalım. $c_1, c_2, ..., c_n \in \mathbb{K}$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x_k = \theta \Leftrightarrow c_k = 0 \ ,(1 \leq k \leq n)$$

*oluyorsa A kümesi **lineer bağımsız**, aksi taktirde **lineer bağımlıdır** denir.*

Tanım 2.1.11. *[8] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. X in lineer bağımsız ve X i geren alt kümesine X için bir **baz** diğer adıyla **Hamel baz** denir.*

Teorem 2.1.2. *[8] Her vektör uzayı bir Hamel baza sahiptir.*

Teorem 2.1.3. *[8] Bir X vektör uzayının elemanlarının bir $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ kümesi bazdır $\Leftrightarrow$ X in her bir elemanı $x_1, x_2, ..., x_n$ elemanlarının bir lineer birleşimi olarak tek türlü biçimde ifade edilebilir.*

Teorem 2.1.4. *[8] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. X in bir bazı $\{x_1, x_2, ..., x_n\}$ ise diğer tüm bazlarda tam n- tane vektörden oluşur.*

Tanım 2.1.12. *[8] X, $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. X in içerdiği maksimum lineer bağımsız vektör sayısına X in **boyutu** denir ve $\dim X$ ile gösterilir. $\dim X < \infty$ ise X e **sonlu boyutlu** denir, aksi halde **sonsuz boyutludur** denir.*

Tanım 2.1.13. *[4] X boş olmayan bir küme olmak üzere, $d : X \times X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. d fonksiyonu $\forall x, y, z \in X$ için*

$$d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$$

$$d(x, y) = d(y, x)$$

$$d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$$

*şartlarını sağlıyorsa d ye X üzerinde bir **metrik**, (X, d) ikilisine ise bir **metrik uzay** denir.*

Örnek 2.1.4. *[4] $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi alışılmış $d(x, y) = |x - y|$ fonksiyonuyla bir metrik uzaydır. Bu metriğe $\mathbb{R}$ **nin alışılmış metriği (mutlak değer metriği)** denir.*

Örnek 2.1.5. *[4] $\mathbb{R}^2$ üzerinde $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ olmak üzere*

$$d(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2}$$

*fonksiyonu bir metrik tanımlar. Bu metriğe de $\mathbb{R}^2$ **nin Eucled metriği** denir.*

Örnek 2.1.6. *[4] ω tüm kompleks terimli dizilerin lineer uzayı olmak üzere*

$$\ell_\infty = \left\{ x \in \omega : \sup_n |x_n| < \infty \right\}$$

kümesi üzerinde

$$d\left(x,y\right)=\sup_n\left|x_n-y_n\right|$$

fonksiyonu metrik tanımlar. Dolayısıyla (ℓ_∞, d) *bir metrik uzaydır.*

Tanım 2.1.14. *[4]* (X,d) *metrik uzay ve* $M \subset X$ *olsun. Eğer* M *nin her noktasını içeren bir açık yuvar* M *nin bir alt kümesi ise* M *ye **açık küme** denir.* X *e göre tümleyeni açık olan kümeye de **kapalı küme** denir.*

Tanım 2.1.15. *[4]* (X,τ) *bir topolojik uzay ve* $S \subset X$ *olsun. Eğer* S *nin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa* S *ye **kompakt küme** denir.*

Önerme 2.1.1. *[4]* (X,d) *metrik uzay ve* $M \subset X$ *olsun.* M *nin kompakt olması için gerek ve yeter şart;* M *deki her dizinin yakınsak bir alt diziye sahip olmasıdır.*

Lemma 2.1.2. *[4] Bir metrik uzayın kompakt alt kümesi kapalı ve sınırlıdır.*

Tanım 2.1.16. *[4]* $X=(X,d_1)$ *ve* $Y=(Y,d_2)$ *birer metrik uzay,* $T:X\to Y$ *bir dönüşüm ve* $x_0\in X$ *olsun. Eğer her* $\varepsilon>0$ *için* $d_1(x,x_0)<\delta$ *iken* $d_2(Tx,Tx_0)<\varepsilon$ *olacak şekilde bir* $\delta>0$ *sayısı varsa* T *ye* x_0 *noktasında **sürekli dönüşüm** denir. Eğer* T*,* X *in her noktasında sürekli ise* X ***üzerinde süreklidir** denir.*

Teorem 2.1.5. *[4]* X *ve* Y *birer metrik uzay ve* $T:X\to Y$ *sürekli bir dönüşüm olsun.* X *in kompakt bir* M *alt kümesinin* T *altındaki görüntüsü de kompakttır.*

Tanım 2.1.17. *[4]* X*,* $\mathbb{K}$ *cismi üzerinde bir lineer uzay ve* $\|\cdot\|:X\to\mathbb{R}$ *bir fonksiyon olsun.* $\|\cdot\|$ *fonksiyonu* $\forall x,\ y\in X$ *ve* $\forall\alpha\in\mathbb{K}$ *için*

$$\|x\|=0\Leftrightarrow x=\theta$$

$$\|\alpha\cdot x\|=|\alpha|\cdot\|x\|$$

$$\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

şartlarını sağlıyorsa $\|\cdot\|$ *fonksiyonuna* X *üzerinde bir* ***norm****,* $(X, \|\cdot\|)$ *ikilisine ise bir* ***normlu uzay*** *denir.*

Teorem 2.1.6. *[4]* $(X, \|\cdot\|)$ *bir normlu uzay olsun.*

$$d : X \times X \to \mathbb{R}, \qquad d(x, y) = \|x - y\|$$

olarak tanımlanan d *fonksiyonu* X *üzerinde bir metrik fonksiyonudur.*

Bu teoremde tanımlanan d metriğine **normun ürettiği metrik** ya da **norm metriği** denir.

Sonuç 2.1.1. *[4] Her normlu uzay, norm metriğiyle bir metrik uzaydır.*

Teorem 2.1.7. *[4] Sonlu boyutlu normlu bir* X *uzayında herhangi bir* M *alt kümesinin kompakt olması için gerek ve yeter şart* M *nin kapalı ve sınırlı olmasıdır.*

Sonuç 2.1.2. *[4]* $\mathbb{R}^n$ *normlu uzayının bir* A *alt kümesi verilsin.*

$$A \text{ kompakttır.} \Leftrightarrow A \text{ kapalı ve sınırlıdır.}$$

Tanım 2.1.18. *[4]* (X, d) *bir metrik uzay ve* $x = (x_n)$ X *de bir dizi olsun.* $\forall \varepsilon > 0$ *için,*

$$m, n > N \text{ iken } d(x_m, x_n) < \varepsilon$$

olacak şekilde bir $N(\varepsilon)$ *sayısı varsa* (x_n) *dizisine bir* ***Cauchy dizisi*** *denir.*

Tanım 2.1.19. *[4]* (X, d) *bir metrik uzay olmak üzere* X *deki her* (x_n) *Cauchy dizisi* X *de yakınsaksa* (X, d) *ikilisine de* ***tam metrik uzay*** *denir.*

Örnek 2.1.7. *[4] $\mathbb{R}^n$, ℓ_∞, c_0 ve ℓ_p $(p \geq 1)$ birer tam metrik uzaydır.*

Teorem 2.1.8. *[4] (X, d) bir metrik uzay ve $K \subset X$ olsun. $x \in X$ olmak üzere,*

$$x \in \overline{K} \Leftrightarrow K \text{ da bir } (x_n) \text{ dizisi vardır öyle ki } x_n \to x \text{ dir.}$$

Tanım 2.1.20. *[4] $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay olsun. Eğer X, $\|\cdot\|$ normunun ürettiği $d(x, y) = \|x - y\|$ norm metriğiyle tam ise $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına bir* ***Banach uzayı*** *denir.*

Örnek 2.1.8. *[4] $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$*

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

Eucled normuyla sırasıyla reel ve kompleks Banach uzaylarıdır.

Tanım 2.1.21. *[4] Bir T lineer operatörü aşağıdaki şartları sağlayan bir dönüşümdür:*

(i) T nin $D(T)$ tanım kümesi bir vektör uzayıdır ve $R(T)$ görüntü kümesi $D(T)$ vektör uzayı ile aynı cisim üzerindeki bir vektör uzayının içindedir.

(ii) Her $x, y \in D(T)$ ve α skaleri için

$$T(x + y) = Tx + Ty$$

ve

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

dir.

Örnek 2.1.9. *[4] X vektör uzayı üzerinde*

$$I_X : X \to X \quad , \quad I_x(x) = x$$

şeklinde tanımlı özdeşlik operatörü lineerdir.

Tanım 2.1.22. *[4]*

$$N(T) = \{x \in D(T) : Tx = 0\}$$

kümesine T ***nin çekirdeği*** *denir.*

Teorem 2.1.9. *[4] T bir lineer operatör olsun.*

(a) *$R(T)$bir vektör uzayıdır.*

(b) $\dim D(T) = n$ *ise* $\dim R(T) \leq n$ *dir.*

(c) *$N(T)$ sıfır uzayı bir vektör uzayıdır.*

Teorem 2.1.10. *[4] X ve Y her ikisi de reel ya da her ikisi de kompleks iki vektör uzayı olsun. Tanım bölgesi $D(T) \subset X$ ve görüntü bölgesi $R(T) \subset Y$ olan $T : D(T) \to Y$ lineer operatörünü ele alalım. Bu durumda*

(a) *$T^{-1} : R(T) \to D(T)$ ters operatörünün mevcut olması için gerek ve yeter şart $T(x) = \theta$ iken $x = \theta$ olmasıdır.*

(b) *T^{-1} mevcut ise lineer bir operatördür.*

(c) $\dim D(T) = n < \infty$ *ve T^{-1} mevcut ise* $\dim D(T) = \dim R(T)$ *dir.*

Sonuç 2.1.3. *Bir T lineer operatörünün birebir olması için gerek ve yeter şart $T(x) = \theta$ iken $x = \theta$ olmasıdır.*

Tanım 2.1.23. *[4] X bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.*

$$f : X \to \mathbb{K}$$

dönüşümü lineer ise f ye bir ***lineer fonksiyonel*** *denir.*

Tanım 2.1.24. *[4] X ve Y bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde birer lineer uzay olsunlar. X den Y ye tüm lineer dönüşümlerin kümesi de fonksiyonların toplama ve skalerle çarpma* *işlemleriyle $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay yapısına sahiptir. Bu uzay $L(X,Y)$ ile gösterilir.*

Tanım 2.1.25. *[4] X bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. X den $\mathbb{K}$ ya tanımlı tüm lineer fonksiyonellerin uzayına X in* ***cebirsel duali*** *denir ve $\mathbf{L}(X,\mathbb{K}) = \mathbf{X}^*$ ile gösterilir.*

Tanım 2.1.26. *[4] X ve Y birer normlu uzay olsunlar. $T : X \to Y$ lineer operatörü verilsin. Eğer $\forall x \in X$ için*

$$\|T(x)\|_Y \leq k \cdot \|x\|_X$$

olacak şekilde bir $k \in \mathbb{R}^+$ sayısı varsa T ye ***sınırlıdır*** *denir.*

Tanım 2.1.27. *[4] X ve Y birer normlu uzay olsunlar. $T : X \to Y$ sınırlı lineer operatörü verilsin.*

$$\sup_{x \neq \theta} \left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \right\}$$

değerine T sınırlı lineer operatörünün ***normu*** *denir. Yani*

$$\|T\| = \sup_{x \neq \theta} \left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \right\}$$

dir.

Teorem 2.1.11. *[4] $\|T\| = \sup \left\{ \|T(x)\|_Y : \|x\|_X = 1 \right\}$ dir.*

Teorem 2.1.12. *[4] X ve Y birer normlu uzay ve $T : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Bu durumda,*

(**a**) *T süreklidir. $\Leftrightarrow$ T sınırlıdır.*

(**b**) *T bir noktada sürekliyse her noktada süreklidir.*

Tanım 2.1.28. *[4] X ve Y bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde birer normlu uzay olsunlar.*

$$B(X,Y) = \{T \in L(X,Y) \mid T \text{ sınırlı}\}$$

kümesi, dönüşümlerin toplama ve skalerle çarpma işlemleriyle bir lineer uzaydır. Üstelik,

$$\|T\| = \sup_{x \neq \theta} \left\{ \frac{\|T(x)\|_Y}{\|x\|_X} \right\}$$

normuyla bu uzay bir normlu uzaydır.

$B(X,Y)$ her zaman bir Banach uzayı olmayabilir. Şimdi $B(X,Y)$ nin hangi şart altında bir Banach uzayı olduğunu ifade eden teoremi verelim:

Teorem 2.1.13. *[4] X ve Y bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde birer normlu uzay olsunlar. Eğer Y bir Banach uzayı ise $B(X,Y)$ de bir Banach uzayıdır.*

Tanım 2.1.29. *[4] X bir $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir normlu uzay olsun.*

$$B(X,\mathbb{K}) = \{f \in L(X,\mathbb{K}) \mid f \text{ sınırlı (sürekli)}\}$$

kümesi,

$$\|f\| = \sup_{x \neq \theta} \left\{ \frac{|f(x)|}{\|x\|_X} \right\}$$

normuyla bir normlu uzaydır. Bu uzaya X in ***sürekli duali*** *ya da X in* ***dual uzayı*** *denir ve X' ile gösterilir.*

Teorem 2.1.14. *[4] Bir X normlu uzayının X' sürekli duali bir Banach uzayıdır.*

Tanım 2.1.30. *[11] $m, n \in \mathbb{N}$ ve $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ olmak üzere bütün (i,j) çiftlerinin cümlesi $B_\blacktriangledown \subset \mathbb{N} \times \mathbb{N}$ olsun. Bir $\mathbb{K}$ cisminde değer alan $B_\blacktriangledown$ deki bir*

$$f_\blacktriangledown : B_\blacktriangledown \to \mathbb{K}$$

fonksiyonunu

$$(i,j) \to f(i,j) = a_{ij}$$

şeklinde tanımlayalım ve $a_{ij} \in \mathbb{K}$ değerlerini

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

veya

$$A = [a_{ij}]$$

*biçiminde düzenleyelim. $\mathbb{K}$ dan seçilen bu cins $m \cdot n$ tane elemanın A tablosuna $\mathbb{K}$ **cismi üzerinde** $m \times n$ **matris** denir. Her (i,j), $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ çiftine karşılık gelen a_{ij} elemanına A matrisinin (i,j) **bileşeni** denir.*

$A = [a_{ij}]_{m \times n}$ ve $B = [b_{ij}]_{m \times n}$ olmak üzere matrislerin toplamı ve skalerle çarpımı işlemleri sırasıyla

$$[a_{ij}]_{m \times n} + [b_{ij}]_{m \times n} = [a_{ij} + b_{ij}]_{m \times n}$$

ve $c \in \mathbb{K}$ için

$$c \cdot [a_{ij}]_{m \times n} = [ca_{ij}]_{m \times n}$$

şeklinde tanımlanır. $\mathbb{K}$ cismi üzerindeki tüm $m \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi olan $\mathbb{K}_n^m$ de "+" ve "·" işlemleri aşağıdaki bağıntıları sağlar:

(i) $A + B = B + A$

(ii) $A + (B + C) = (A + B) + C$

(iii) $a \cdot (A + B) = a \cdot A + a \cdot B$

(iv) $(a + b) \cdot A = a \cdot A + b \cdot A$

(v) $a \cdot (b \cdot A) = (ab) \cdot A$

(vi) $\mathbf{1} \cdot A = A$

(vii) $A + \mathbf{0} = A$

(viii) $A + (-A) = \mathbf{0}$

dır [11]. Böylece şu teorem verilebilir:

Teorem 2.1.15. *[11] Bir $\mathbb{K}$ cismi üzerindeki tüm $m \times n$ tipindeki matrislerin cümlesi $\mathbb{K}$ cismi üzerinde bir vektör uzayıdır. (Bu vektör uzayına **matrislerin uzayı** denir.)*

Şimdi ise matrisler ve lineer dönüşümler arasındaki ilişkiyi inceleyelim [4]:

r- satırlı ve n- sütunlu reel bir $A = (a_{jk})$ matrisini ele alalım. $x = (x_j)$ ve $y = (y_j)$ sırayla n-bileşenli ve r- bileşenli iki sütun vektörü olsun. Bu durumda $A = (a_{jk})$ matrisi

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^r \quad , \quad x \to Tx = A \cdot x = y$$

şeklinde lineer bir dönüşüm tanımlar.

Tersine X ve Y aynı cisim üzerinde tanımlı sırasıyla n ve r boyutlu iki vektör uzayı ve T:$X \to Y$ lineer bir operatör olsun. $E = \{e_1, e_2, ..., e_n\}$ kümesi X için ve $B = \{b_1, b_2, ..., b_r\}$ kümesi Y için birer baz olsun. Böylece her bir $x \in X$ elemanı

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + ... + \alpha_n e_n \tag{2.1.1}$$

şeklinde tek türlü gösterime sahiptir. T lineer olduğundan

$$y = Tx = T(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(e_k) \qquad (2.1.2)$$

olur. (2.1.1) temsili tek türlü olduğundan $T(e_k) = y_k$ dersek (2.1.2) temsili de tek türlü olur. $y \in Y$ ve $T(e_k) = y_k \in Y$ olduğundan

$$y = \sum_{j=1}^{r} \beta_j b_j \qquad (2.1.3)$$

ve

$$T(e_k) = \sum_{j=1}^{r} \gamma_{jk} b_j \qquad (2.1.4)$$

temsilleri de tek türlüdür. Böylece (2.1.2), (2.1.3) ve (2.1.4) kullanılırsa

$$y = \sum_{j=1}^{r} \beta_j b_j = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k T(e_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \sum_{j=1}^{r} \gamma_{jk} b_j = \sum_{j=1}^{r} (\sum_{k=1}^{n} \gamma_{jk} \alpha_k) b_j$$

olur. $B = \{b_1, b_2, ..., b_r\}$ kümesi Y için baz olduğundan bu küme lineer bağımsızdır. Dolayısıyla bu son eşitliğin sağ ve sol tarafındaki katsayılar aynı olmalıdır. Yani

$$\beta_j = \sum_{k=1}^{n} \gamma_{jk} \alpha_k \quad , \quad 1 \leq j \leq r$$

olur. İşte bu son eşitliğin katsayıları r- satırlı ve n- sütunlu

$$T_{EB} = (\gamma_{jk})$$

matrisini verir. Ayrıca bu T_{EB} matrisi, X ve Y uzaylarının bazları ve T lineer operatörü ile tek türlü olarak belirlenir.

2.2 $\mathbb{R}^n$ nin Kompakt ve Kompakt-Konveks Alt Kümelerinin Aileleri

$\mathbb{R}^n$ nin tüm boştan farklı kompakt alt kümelerinin ailesini $\Omega(\mathbb{R}^n)$, $\mathbb{R}^n$ nin tüm boştan farklı kompakt-konveks alt kümelerinin ailesini ise $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ile göstereceğiz.

Tanım 2.2.1. *[6] A ve B kümeleri $\mathbb{R}^n$ nin boştan farklı herhangi iki alt kümesi olsun. $\lambda \in R$ alalım. Bu kümeler arasında **Minkowski** toplamı ve skalerle çarpma işlemleri sırasıyla*

$$A + B = \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

$$\lambda \cdot A = \{\lambda a : a \in A\}.$$

şekilde tanımlanır.

Önerme 2.2.1. *[6] $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ küme aileleleri yukarıda tanımlanan işlemlere göre kapalıdır. Ayrıca aşağıdaki özellikler sağlanır: $\forall A, B, C \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve $\forall \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için,*

$$A + \theta = \theta + A = A \text{ olacak şekilde } \theta = \{0\} \text{ birim eleman vardır.}$$

$$A + (B + C) = (A + B) + C$$

$$A + B = B + A$$

$$A + B = A + C \Rightarrow B = C$$

$$1 \cdot A = A$$

$$\lambda \cdot (A + B) = \lambda \cdot A + \lambda \cdot B$$

$$(\lambda + \mu) \cdot A \subseteq \lambda \cdot A + \mu \cdot A$$

olur.

Uyarı 2.2.1. *[10] Genel olarak $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ nin bir A elemanı için $A + (-1) \cdot A \neq \theta$ eşitsizliği doğrudur. Örneğin; $n = 1$ için $A = [-2, 1]$ olsun. O halde $(-1) \cdot A = [-1, 2]$ olur. Buradan,*

$$A + (-1) \cdot A = [-2, 1] + [-1, 2] = [-3, 3]$$

elde edilir. Görüldüğü gibi $A+(-1)\cdot A=[-3,3]\neq\theta$ *dır.*

Yukarıdaki örnekten anlaşılacağı üzere $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ nin bir elemanının -1 katının kendisiyle toplamı birim eleman $\theta=\{0\}$ ı vermek zorunda değildir. Bu ise $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega(\mathbb{R}^n)$ küme ailelerinin lineer uzay yapısına sahip olamayacaklarını gösterir. İşte bundan dolayı bu kümeler ailesi, lineer uzay kavramının kapsamlı genelleştirmesi olan quasilineer uzay yapısına uymaktadırlar [10].

Uyarı 2.2.2. *Genel olarak* $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ *de*

$$(\lambda+\mu)\cdot A=\lambda\cdot A+\mu\cdot A$$

şartı sağlanmaz. Örneğin; $n=1$ *için* $A=[-1,1]$ *olsun.*

$$(1+(-1))\cdot[-1,1]=0\cdot[-1,1]=\{0\}$$

iken

$$1\cdot[-1,1]+(-1)\cdot[-1,1]=[-1,1]+[-1,1]=[-2,2]$$

olur ki $\{0\}\subset[-2,2]$ *olduğundan*

$$(1+(-1))\cdot[-1,1]\subset 1\cdot[-1,1]+(-1)\cdot[-1,1]$$

dir.

3. QUASİLİNEER VE NORMLU QUASİLİNEER UZAYLAR

Bu bölümde quasilineer uzay, normlu quasilineer uzay ve quasilineer operatörlere ilişkin temel tanım, teorem ve sonuçlar verilecektir. Göreceğiz ki quasilineer uzay kavramı bir kısmi sıralı küme üzerine kurulmuştur. Bu uzayların en belirgin özelliği her elemanın tersinin mevcut olmayışıdır. Eğer bir quasilineer uzayda her elemanın tersi mevcut ise bu durumda bu uzaydaki kısmi sıralama bağıntısı eşitlikle verilir ve böylece bahsi geçen bu uzay bir lineer uzay olur. Yani quasilineer uzaylar, lineer uzayların bir genelleştirmesidir. Dolayısıyla herhangi bir lineer uzay bir quasilineer uzay örneği teşkil eder. Bunun dışında bir önceki bölümde tanıtılan $\Omega(\mathbb{R}^n)$ ve $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ aileleri en önemli lineer olmayan quasilineer uzay örnekleridir.

Quasilineer uzay kavramı ilk kez 1986 yılında Aseev tarafından ortaya atılmıştır. Aseev dışında Markov da [2] ve [3] numaralı çalışmalarında quasilineer uzay adını verdiği bir uzay çeşidiyle çalışmıştır. Fakat Aseev 'in quasilineer uzayı tanımlarken kısmi sıralama bağıntısını kullanmış olması normlu quasilineer uzaylar, quasilineer operatörler gibi daha birçok temel tanımın lineer uzaylardakiyle uyum içinde olmasını sağlamıştır. Bu yüzden bu bölüm genel olarak Aseev'in [1] numaralı çalışması temel alınarak oluşturulmuştur.

3.1 Quasilineer Uzaylar

Tanım 3.1.1. *[1] Bir X kümesine, kendisi üzerinde $\forall x, y, z, v \in X$ ve $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartları sağlayan bir "$\leq$" kısmi sıralama bağıntısı, bir cebirsel toplama işlemi ve reel sayılarla çarpma işlemi tanımlıysa bir* ***quasilineer uzay*** *denir:*

$$x \leq x \tag{3.1.1}$$

$$x \leq y,\ y \leq z \Rightarrow x \leq z \tag{3.1.2}$$

$$x \leq y,\ y \leq x \Rightarrow x = y \tag{3.1.3}$$

$$x + y = y + x \tag{3.1.4}$$

$$x + (y + z) = (x + y) + z; \tag{3.1.5}$$

$$x + \theta = x \text{ olacak şekilde bir } \theta \in X \text{ vardır.} \tag{3.1.6}$$

$$\alpha \cdot (\beta \cdot x) = (\alpha \cdot \beta) \cdot x \tag{3.1.7}$$

$$\alpha \cdot (x + y) = \alpha \cdot x + \alpha \cdot y \tag{3.1.8}$$

$$1 \cdot x = x \tag{3.1.9}$$

$$0 \cdot x = \theta \tag{3.1.10}$$

$$(\alpha + \beta) \cdot x \leq \alpha \cdot x + \beta \cdot x \tag{3.1.11}$$

$$x \leq y,\ z \leq v \Rightarrow x + z \leq y + v \tag{3.1.12}$$

$$x \leq y \Rightarrow \alpha \cdot x \leq \alpha \cdot y \tag{3.1.13}$$

Örnek 3.1.1. *[1] E herhangi bir normlu lineer uzay olmak üzere E nin tüm kapalı-sınırlı altkümelerinin ailesini $\Omega(E)$, yine E nin tüm kapalı-sınırlı ve konveks alt kümelerinin ailesini $\Omega_C(E)$ ile gösterelim. Bu $\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$ kümeleri "$\subseteq$" kısmi sıralama bağıntısı,*

$$A + B = \overline{\{a + b : a \in A, b \in B\}}$$

cebirsel toplama işlemi ve

$$\lambda \cdot A = \{\lambda a : a \in A\}$$

skalerle çarpma işlemleriyle birlikte birer quasilineer uzaydır. Burada eğer E sonlu boyutlu ise cebirsel toplama işlemi

$$A + B = \{a + b : a \in A, b \in B\}$$

şeklinde tanımlıdır, yani kapanışa ihtiyaç yoktur.

Lemma 3.1.1. *[1] Bir X quasilineer uzayında θ elemanı minimaldir. Yani,*

$$x \leq \theta \Rightarrow x = \theta$$

olur.

İspat. [1] $x \leq \theta$ olsun. $(-1) \cdot x \leq (-1) \cdot x$ olduğundan (3.1.12) şartından,

$$x + (-1) \cdot x \leq \theta + (-1) \cdot x = (-1) \cdot x$$

yani,

$$x + (-1) \cdot x \leq (-1) \cdot x$$

elde edilir. (3.1.10) ve (3.1.11) şartlarından,

$$\theta = 0 \cdot x = (1 + (-1)) \cdot x \leq x + (-1) \cdot x \leq (-1) \cdot x$$

dolayısıyla

$$\theta \leq (-1) \cdot x$$

olduğunu görürüz. Daha sonrasında (3.1.13) şartı

$$\begin{aligned}(-1) \cdot \theta &\leq (-1) \cdot ((-1) \cdot x) \\ &= x \\ (-1) \cdot \theta &\leq x\end{aligned}$$

bağıntısını verir. Ayrıca,

$$(-1) \cdot \theta = (-1) \cdot (0 \cdot x) = (-1 \cdot 0) \cdot x = \theta$$

olduğundan

$$\theta \leq x$$

elde edilir. Hipotezde $x \leq \theta$ idi. Dolayısıyla $x = \theta$ olur. O halde θ minimal elemandır. $\square$

Tanım 3.1.2. *[1] Bir X quasilineer uzayında $x' + x = \theta$ olacak şekilde bir $x' \in X$ var ise x' elemanına x in* ***tersi*** *denir.*

Eğer ters eleman mevcutsa tektir.

Lemma 3.1.2. *[1] Bir X quasilineer uzayında her elemanın bir tersi mevcut ise X deki kısmi sıralama bağıntısı eşitlikle verilir ve dağılma özelliği şartları sağlanır. Böylece X bir lineer uzay olur.*

İspat. $x \leq y$ olsun. $y' \leq y'$ olduğunu biliyoruz. (3.1.12) şartından $x + y' \leq y + y'$ diyebiliriz. Kabul gereği her elemanın tersi mevcut olduğundan $x + y' \leq \theta$ elde ederiz.

θ minimal eleman olduğundan $x + y' = \theta$ olur. Ters eleman tek olduğundan $x = y$ dir. Böylece X teki kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısı halini alır. Bu durumda (3.1.11) şartı dağılma özelliği şartına dönüşür ve (3.1.12) ile (3.1.13) şartları otomatik olarak sağlanır. Dolayısıyla X bir lineer uzay olur. □

Sonuç 3.1.1. *Her reel lineer uzay bir quasilineer uzaydır. Ancak bunun karşıtı her zaman doğru değildir.*

Sonuç 3.1.2. *Bir reel lineer uzayda (3.1.1)-(3.1.13) şartlarını sağlayacak şekilde bir kısmi sıralama bağıntısı sadece eşitlik ile elde edilir.*

İlerleyen konularda $-x = (-1) \cdot x$ eşitliğini kabul edeceğiz.

Tanım 3.1.3. *[9] Bir X quasilineer uzayında $x \in X$ elemanının tersi mevcut ise x e* ***regüler,*** *mevcut değilse* ***singüler eleman*** *denir. X in tüm regüler ve singüler elemanlarının kümesi sırasıyla X_r ve X_s olarak gösterilir.*

Önerme 3.1.1. *[9] Bir X quasilineer uzayında her regüler eleman minimaldir.*

İspat. Her $x \in X_r$ için $y \le x$ ise $y = x$ olduğunu göstermeliyiz..

$$y \le x \Rightarrow y + x' \le x + x' = \theta \Rightarrow y + x' \le \theta$$

olur. θ minimal eleman olduğundan $y + x' = \theta$ olur. Ters elemanın tekliğinden $x = y$ dir. □

Tanım 3.1.4. *X bir quasilineer uzay olsun. $Y \subseteq X$ verilsin. Eğer Y kümesi de X deki aynı işlemler ve kısmi sıralama bağıntısıyla bir quasilineer uzay teşkil ediyorsa Y ye X* ***in bir alt uzayı*** *denir.*

Örnek 3.1.2. *E bir reel normlu lineer uzay olmak üzere* $\Omega_C(E)$, $\Omega(E)$ *nin bir altuzayıdır.*

Teorem 3.1.1. *X bir quasilineer uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Y nin alt uzay olması için gerek ve yeter şartlar;*

(i) $\forall x, y \in Y$ için $z \leq x + y$ olacak şekilde $z \in Y$ vardır.

(ii) $\forall x \in Y$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha \cdot x \in Y$

dır.

Bu teoremin ispatı, klasik lineer cebirdeki karşılığının ispatına oldukça benzerdir.

Örnek 3.1.3. $X = \Omega_C(\mathbb{R})$ *ve*

$$Y = \{x \cdot [1, 2] : x \in \mathbb{R}\}$$

kümesini ele alalım. $Y \subseteq X$ dir ve bu kümedeki elemanların tanımından (ii) şartı sağlanır. Şimdi (i) şartını inceleyelim: $[1, 2]$,$[-4, -2] \in Y$ *alalım.* $[1, 2] + [-4, -2] = [-3, 0] \notin Y$ *dir, fakat $x \subseteq [-3, 0]$ olacak şekilde bir $x \in Y$ bulunabilir. Sözgelimi $x = [-2, -1] \subseteq [-3, 0]$ olup $x \in Y$ dir. O halde (i) şartı da sağlanır ve Y, X in bir alt uzayı olur.*

Sonuç 3.1.3. *Yukarıdaki teoreme göre $\forall x, y \in Y$ için $x + y \in Y$ olması* ***(i)*** *şartının sağlanması için yeterlidir. Dolayısıyla $\forall x, y \in Y$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ için $x + \lambda y \in Y$ olması Y nin alt uzay olması için yeterlidir.*

X bir quasilineer uzay ve $Y \subseteq X$ olsun. Y kümesindeki her bir x elemanının $x' \in Y$ olacak şekilde tersi mevcut ise lemma 3.1.2 den Y kümesi üzerindeki kısmi sıralama bağıntısı "=" bağıntısına dönüşür. Bu nedenle Y üzerindeki dağılma şartları sağlanır ve Y, X in lineer alt uzayı olur.

Tanım 3.1.5. *[9] X bir quasilineer uzay olsun. Eğer bir $x \in X$ için*

$$-x = x$$

*ise x elemanına **simetrik eleman** denir. X in tüm simetrik elemanlarının kümesi X_d ile gösterilir.*

Teorem 3.1.2. *[9] X_r, X_d ve $X_s \cup \{0\}$ kümeleri X quasilineer uzayının alt uzaylarıdır.*

İspat. $x, y \in X_r$ alalım. Bu durumda x in $x' \in X$ tersi ve y nin $y' \in X$ tersi mevcuttur. Dolayısıyla bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için $x' + \lambda y' \in X$ elemanı $x + \lambda y$ elemanının tersidir. Böylece $x + \lambda y \in X_r$ olup X_r, X in lineer bir alt uzayıdır.

$X_s \cup \{0\}$ kümesi X in bir alt uzayıdır: $x, y \in X_s \cup \{0\}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. $x = y = 0$ için ispat açıktır. $x \neq 0$ olsun. $(x+\lambda y) \notin X_s \cup \{0\}$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$(x + \lambda y) + u = 0$$

olacak şekilde bir $u \in X$ vardır. Buradan

$$x + (\lambda y + u) = 0$$

yazılırsa

$$x' = \lambda y + u$$

olur. Bu ise $x \in X_r$ demektir. Benzer şekilde $y \neq 0$ için de $y \in X_r$ olduğu görülür. Bu durum $x, y \in X_s \cup \{0\}$ olması ile çelişir. O halde $(x + \lambda y) \in X_s \cup \{0\}$ olup sonuç 3.1.3 den $X_s \cup \{0\}$ kümesi X in bir alt uzayıdır.

X_d kümesi X in bir alt uzayıdır: $x, y \in X_d$ ise $x = -x$ ve $y = -y$ olup bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$x + \lambda y = -x + \lambda(-y) = -(x + \lambda y)$$

olduğundan $x + \lambda y \in X_d$ olur ki bu yine sonuç 3.1.3 den X_d nin X in bir alt uzayı olması demektir. $\square$

Tanım 3.1.6. *[9] X_r, X_d ve $X_s \cup \{0\}$ uzaylarına X in sırasıyla* ***regüler, simetrik*** *ve* ***singüler alt uzayları*** *denir.*

Uyarı 3.1.1. *X_r, X in lineer bir alt uzayı iken $X_s \cup \{0\}$ lineer olmayan alt uzayıdır.*

Örnek 3.1.4. *[10] $X = \Omega_C(\mathbb{R})$ olmak üzere,*

$$V = \{0\} \cup \{[a, b] : a \neq b,\ a, b \in \mathbb{R}\} \subset \Omega_C(\mathbb{R})$$

alt kümesi verilsin. V, X in singüler bir alt uzayıdır. Öte yandan

$$W = \{\{a\} : a \in \mathbb{R}\} \subset \Omega_C(\mathbb{R})$$

alt kümesi ise X in regüler alt uzayıdır. Aslında herhangi bir E normlu lineer uzayı için her bir $\{a\}$ tek nokta kümesi, yani $\{a\} \subset E$, a elemanı ile belirlenir. Bu yüzden E lineer uzayı, $\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$ nin regüler alt uzayı olarak düşünülebilir.

3.2 Normlu Quasilineer Uzaylar

Tanım 3.2.1. *[1] X bir quasilineer uzay olsun. Bir $\|.\|_X : X \to \mathbb{R}$ reel fonksiyonu aşağıda verilen şartları sağlıyorsa, X üzerinde bir* ***norm*** *denir.*

$$x \neq \theta \Rightarrow \|x\|_X > 0 \tag{3.2.1}$$

$$\|x + y\|_X \leq \|x\|_X + \|y\|_X \tag{3.2.2}$$

$$\|\alpha \cdot x\|_X = |\alpha| \cdot \|x\|_X \tag{3.2.3}$$

$$x \leq y \Rightarrow \|x\|_X \leq \|y\|_X \tag{3.2.4}$$

$\forall\ \varepsilon > 0$ için $\exists\ x_\varepsilon \in X$ vardır, öyleki

$$x \leq y + x_\varepsilon \text{ ve } \|x_\varepsilon\|_X \leq \varepsilon \Rightarrow x \leq y \text{ olur.} \tag{3.2.5}$$

*Bir X quasilineer uzayı üzerinde bir norm fonksiyonu tanımlıysa X e bir **normlu quasilineer uzay** denir. Bir normlu quasilineer uzayda her elemanın toplamsal tersi varsa bu normlu quasilineer uzay, bilinen reel normlu lineer uzay yapısıyla örtüşür.*

Örnek 3.2.1. *Örnek (3.1.1) de verilen $\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$ quasilineer uzayları*

$$\|A\|_\Omega = \sup_{a \in A} \|a\|_E$$

normu ile birer normlu quasilineer uzaylardır.

Tanım 3.2.2. *[1] X bir normlu quasilineer uzay olsun. X üzerinde Hausdorff metrik tanımı şu şekilde yapılır: Her $x, y \in X$ için*

$$h_X(x, y) = \inf\left\{r \geq 0 : x \leq y + a_1^r,\ y \leq x + a_2^r,\ \|a_i^r\|_X \leq r\right\}. \tag{3.2.6}$$

$x, y \in X$ için

$$x \leq y + (x - y) \text{ ve } y \leq x + (y - x) \tag{3.2.7}$$

bağıntıları doğru olduğundan, $h_X(x, y)$ değeri her zaman tanımlıdır. Ayrıca tanımdan dolayı, $\forall\ x, y \in X$ için $h_X(x, y) \leq \|x - y\|_X$ eşitsizliği doğrudur. $h_X(x, y)$ fonksiyonu metrik aksiyomlarını sağlar. İşte bu metriğe **norm metriği** ya da **Hausdorff metrik** diyoruz. Dikkat edelim ki $h_X(x, y)$ norm vasıtasıyla elde edilmiş olsa da $h_X(x, y) = \|x - y\|_X$ olmayabilir.

Örnek 3.2.2. *[1] X bir reel tam normlu lineer uzay (bir reel Banach uzayı) olsun. Bu durumda X bir tam normlu quasilineer uzaydır. X i quasilineer uzay yapısına kavuşturan kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısıdır. Diğer taraftan, eğer X bir tam normlu quasilineer uzay ise ve $\forall\ x \in X$ için bir $x' \in X$ ters elemanı mevcut ise bu durumda X bir reel Banach uzayı olur ve kısmi sıralama bağıntısı eşitlik bağıntısına dönüşür. Üstelik*

$$h_X(x, y) = \|x - y\|_X$$

olur.

Lemma 3.2.1. *[1] X bir normlu quasilineer uzay olsun. Cebirsel toplama ve reel sayılarla çarpma işlemleri Hausdorff metriğe göre süreklidirler. Ayrıca X teki norm fonksiyonu Hausdorff metriğe göre süreklidir.*

Bir X normlu quasilineer uzayında aşağıdaki şartlar Hausdorff metriğe göre her zaman doğrudur:

$$\forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } h_X(\alpha \cdot x, \alpha \cdot y) = |\alpha| \cdot h_X(x, y) \tag{3.2.8}$$

$$h_X(x + y, z + v) \leq h_X(x, z) + h_X(y, v) \tag{3.2.9}$$

$$\|x\|_X = h_X(x, \theta). \tag{3.2.10}$$

Lemma 3.2.2. *[1] X bir normlu quasilineer uzay olmak üzere;*

a) *$x_n \to x_0$, $y_n \to y_0$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq y_n$ olsun. Bu durumda $x_0 \leq y_0$ olur.*

b) *$x_n \to x_0$ ve $z_n \to x_0$ olsun. Eğer $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq y_n \leq z_n$ ise $y_n \to x_0$ olur.*

c) *$x_n + y_n \to x_0$ ve $y_n \to \theta$ olsun. Bu durumda $x_n \to x_0$ olur.*

4. QUASİLİNEER UZAYLARDA HAMEL BAZLAR

Bu kısımda quasilineer uzaylara ait elde ettiğimiz yeni bilgileri sunacağız. Quasilineer uzayların ve devamında quasilineer analizin teorik gelişiminde en önemli eksiklik bağımlılık-bağımsızlık ve baz kavramlarının tutarlı bir şekilde verilememiş olmasıdır. Bu bölümde bu önemli kavramların elde ettiğimiz yeni tanımlarını sunacağız. Verdiğimiz tanımların lineer uzaylara ilişkin benzeri sonuçlarla tutarlılık içerisinde verildiğini de göstereceğiz. Elde ettiğimiz orjinal tanımlar, quasilineer uzayların genel şablonunu elde etmemizde bize oldukça yardımcı olmuştur. Bize şu şekilde bir konjektür vermektedir: Regüler elemanların minimalliği, bir quasilineer uzayın regüler alt uzayının tabanı oluşturduğunu ve singüler elemanların da uzayın üzerinde yattığı görüntüsünü verir. Sonuçlarımız vasıtasıyla ifade edeceğiz ki bir quasilineer uzayın bazı, regüler elemanlardan oluşan kümedir. Yani singüler elemanlardan oluşmuş bir küme bir quasilineer uzay için baz olamaz. Buna benzer elde ettiğimiz başka bazı sonuçlar şu temsili de bize vermiştir: Aslında bir quasilineer uzayın **özü**, regüler elemanlardan oluşmaktadır ki bu lineer uzaydır. Diğer elemanları (singüler elemanları) ise **köpük** olarak adlandıracağız. Böylece bir quasilineer uzay öz ve köpükten ibarettir. Ayrıca bu konjektürde diyeceğiz ki klasik lineer uzaylar, köpüğü olmayan quasilineer uzaylardır.

4.1 Giriş

Tanım 4.1.1. *X bir quasilineer uzay, $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ ve $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ olsun.*

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_n x_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k$$

*biçimindeki elemana $\{x_k\}_{k=1}^n$ kümesinin elemanlarının bir **kombinasyonu** denir.*

Tanım 4.1.2. *$(X, \leq)$ bir quasilineer uzay ve $A \subset X$ olsun. A **nın gerdiği küme;***

$$QspA = \{x \in X : \sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k \leq x,\ \ x_1, x_2, ..., x_n \in A,\ \ \alpha_1, \alpha_2, ...,\ \ \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

olarak tanımlanır.

Yani $QspA$, A nın tüm muhtemel quasilineer kombinasyonlarının kümesidir. Şunu belirtelim ki A nın tüm muhtemel quasilineer kombinasyonlarının kümesi, A nın tüm muhtemel lineer kombinasyonları (yani SpA) ve bu muhtemel kombinasyonlardan sıralama bağıntısına göre büyük veya eşit olan elemanlardan ibarettir. Burada

$$SpA = \{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k x_k : x_1, x_2, ..., x_n \in A,\ \ \alpha_1, \alpha_2, ...,\ \ \alpha_n \in \mathbb{R}\}$$

dir. $SpA \subseteq QspA$ olduğu açıktır.

Sonuç 4.1.1. *Eğer X lineer uzay olan bir quasilineer uzay ise $SpA = QspA$ olur. O taktirde $QspA$ kavramına ihtiyaç kalmaz.*

Örnek 4.1.1. *$(\Omega_C(\mathbb{R}), \subseteq)$ quasilineer uzayında $A = \{[1,3]\}$ kümesini düşünelim. A, $\Omega_C(\mathbb{R})$ de tek elemanlı bir küme olup A nın gerdiği küme;*

$$QspA = Qsp\{[1,3]\} = \{x \in \Omega_C(\mathbb{R}) : \lambda \cdot [1,3] \subseteq x,\ \ \lambda \in \mathbb{R}\}$$

dir. Örneğin; $[1,3] \in QspA$ *iken* $[2,3] \notin QspA$ *dır. Çünkü;* $\lambda[1,3] \subseteq [2,3]$ *olacak şekilde bir* $\lambda \in \mathbb{R}$ *mevcut değildir. Buradan da görülmektedir ki* $QspA \neq \Omega_C(\mathbb{R})$ *dir. Ayrıca* $[-3,3]$ *elemanı* SpA *nın elemanı değil iken* $QspA$ *nın bir elemanıdır.*

Örnek 4.1.2. $(\Omega_C(\mathbb{R}), \subseteq)$ *quasilineer uzayında* $B = \{\{\sqrt{2}\}\}$ *kümesinin gerdiği küme*

$$QspB = Qsp\{\{\sqrt{2}\}\} = \{x \in \Omega_C(\mathbb{R}) : \alpha \cdot \{\sqrt{2}\} \subseteq x, \alpha \in \mathbb{R}\} = \Omega_C(\mathbb{R})$$

dir. Gerçekten de $\forall x \in \Omega_C(\mathbb{R})$ *için*

$$\alpha \cdot \{\sqrt{2}\} \subseteq x$$

olacak şekilde bir $\alpha \in \mathbb{R}$ *mevcuttur. Ayrıca* $SpB = (\Omega_C(\mathbb{R}))_r$ *dir.*

Sonuç 4.1.2. $\mathbb{R}$ *nin bir elemanına yani* $\mathbb{R}$ *nin bir tek nokta kümesine dejenere aralık dediğimizi hatırlayalım. Tek noktadan oluşan bir dejenere aralık, yani* $a \in \mathbb{R}$ *olmak üzere* $\{\{a\}\}$ *kümesi* $\Omega_C(\mathbb{R})$ *yi gerer.*

Sonuç 4.1.3. *Yukarıdaki sonuçta verilen durum* $\mathbb{R}$ *deki bir tek nokta kümesinin (*$\{0\}$ *hariç)* $\mathbb{R}$ *yi germesine benzer. Örneğin* $Sp\{1\} = \mathbb{R}$ *dir. Buradan ise* $Qsp\{\{1\}\} = \Omega_C(\mathbb{R})$ *yazarız.*

Örnek 4.1.3. $(\Omega_C(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ *quasilineer uzayında*

$$u_1 = \{(x,y) : x = 0, 1 \leq y \leq 2\}$$

$$u_2 = \{(x,y) : y = 0, 1 \leq x \leq 2\}$$

olmak üzere $\{u_1, u_2\}$ *kümesinin gerdiği küme;*

$$Qsp\{u_1, u_2\} = \{v \in \Omega_C(\mathbb{R}^2) : \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 \subseteq v,\ \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}\}$$

dir.

Teorem 4.1.1. $(X, \leq)$ *bir quasilineer uzay ve* $A = \{x_1, x_2, ..., x_n\} \subset X$ *olsun.* $QspA$, X *in bir alt uzayıdır.*

İspat. $x, y \in QspA$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda bazı $\{a_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ ve $\{b_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ için $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k x_k \leq x$ ve $\sum\limits_{k=1}^{n} b_k x_k \leq y$ dir. Quasilineer uzay olma aksiyomları olan (3.1.11), (3.1.12) ve (3.1.13) kullanılırsa,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \sum_{k=1}^{n} \lambda b_k x_k \leq x + \lambda y$$

olur ki,

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + \lambda b_k) x_k \leq \sum_{k=1}^{n} a_k x_k + \sum_{k=1}^{n} \lambda b_k x_k \leq x + \lambda y$$

yazılır. Böylece $x + \lambda y \in QspA$ olur ki bu sonuç 3.1.3 den $QspA$ nın X in bir alt uzayı olması demektir. □

Tanım 4.1.3. $(X, \leq)$ *bir quasilineer uzay,* $\{x_k\}_{k=1}^n \subset X$ *ve* $\{\alpha_k\}_{k=1}^n \subset \mathbb{R}$ *olsun.*

$$0_X \leq \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n$$

eşitliği ancak ve ancak $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$ *için mümkün oluyorsa* $\{x_k\}_{k=1}^n$ *kümesine* ***quasilineer bağımsız (qs-bağımsız)****, aksi halde* ***quasilineer bağımlı (qs-bağımlı)*** *denir.*

Uyarı 4.1.1. *Her lineer uzayın "=" bağıntısıyla bir quasilineer uzay olduğu hatırlanırsa quasilineer bağımlılık-bağımsızlık kavramları, lineer uzaylarda lineer bağımlılık - bağımsızlık kavramlarıyla çakışır.*

Örnek 4.1.4. $(\Omega_C(\mathbb{R}), \subseteq)$ *quasilineer uzayında* $\{[1, 2]\}$ *kümesini ele alalım.*

$$\{0\} \subseteq \alpha \cdot [1, 2]$$

olması ancak ve ancak $\alpha = 0 \in \mathbb{R}$ için mümkündür. O halde $\{[1,2]\}$ kümesi quasilineer bağımsızdır. Yine bu uzayda $\{[-1,2]\}$ kümesini ele alalım.

$$\{0\} \subseteq \beta \cdot [-1,2]$$

ifadesi tüm $\beta \in \mathbb{R}$ sayıları için (sözgelimi $\beta = 2 \neq 0$ sayısı için) sağlandığından $\{[-1,2]\}$ kümesi quasilineer bağımlıdır.

Sonuç 4.1.4. *$\Omega_C(\mathbb{R})$ de sıfırı ihtiva eden bir intervalden oluşan tek nokta kümesi qs-bağımlıdır. Bu durum, lineer cebirde sıfır tek nokta kümesinin lineer bağımlı olmasına benzer.*

Sonuç 4.1.5. *$(X, \leq)$ quasilineer uzayında $0_X \leq x$ olacak şekildeki x elemanını barındıran bir A kümesi qs-bağımlı olmak zorundadır. Sözgelimi $(\Omega_C(\mathbb{R}), \subseteq)$ quasilineer uzayında $\{0\}$ ı kapsayan bir aralığı kapsayan aralıkların kümesi qs-bağımlıdır. İşte bu durum ise lineer cebirde sıfırı ihtiva eden bir kümenin lineer bağımlı olmasına benzer.*

Örnek 4.1.5. *$(\Omega_C(\mathbb{R}), \subseteq)$ quasilineer uzayında $\{[1,2], [-2,-1]\}$ kümesini gözönüne alalım.*

$$\{0\} \subseteq \lambda_1 \cdot [1,2] + \lambda_2 \cdot [-2,-1] \tag{4.1.1}$$

olsun. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ için (4.1.1) sağlanır. Dolayısıyla $\{[1,2], [-2,-1]\}$ kümesi $\Omega_C(\mathbb{R})$ quasilineer uzayında quasilineer bağımlıdır.

Örnek 4.1.6. *$(\Omega_C(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ quasilineer uzayında,*

$$v_1 = \{(x,y) : x = 0, -1 \leq y \leq 1\}$$

$$v_2 = \{(x,y) : y = 0, -1 \leq x \leq 1\}$$

olmak üzere $\{v_1, v_2\}$ *kümesini ele alalım.*

$$\{(0,0)\} \subseteq \lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2$$

olsun. $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ *alalım. Bu durumda*

$$\{(0,0)\} \subseteq v_1 + v_2$$

olduğundan $\{v_1, v_2\}$ *kümesi* $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *quasilineer uzayında quasilineer bağımlıdır.*

Teorem 4.1.2. $\Omega_C(\mathbb{R})$ *quasilineer uzayında iki elemanlı her küme quasilineer bağımlıdır.*

İspat. $\{u_1, u_2\}$, $\Omega_C(\mathbb{R})$ de iki elemanlı herhangi bir küme olsun. u_1 ve u_2 kümelerinden en az biri sıfırı içeriyorsa $\{u_1, u_2\}$ kümesinin qs-bağımlı olacağı açıktır. Şimdi kabul edelim ki u_1 ve u_2 kümeleri sıfırı içermesin. Buna göre,

1. Durum: u_1 ve u_2 birer tek nokta kümeleri olsun. $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $u_1 = \{a\}$ ve $u_2 = \{b\}$ diyelim.

$$\{0\} \subseteq \lambda_1 \cdot \{a\} + \lambda_2 \cdot \{b\}$$

olsun. Bu durumda

$$\{0\} \subseteq \{\lambda_1 a + \lambda_2 b\}$$

olur ki bu

$$0 = \lambda_1 a + \lambda_2 b$$

demektir.

$$\frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{-b}{a} \quad (a, b \neq 0)$$

olduğundan $\{u_1, u_2\}$ kümesi qs-bağımlıdır.

2. Durum: $u_1 = [a, b]$ ve $u_2 = [c, d]$ diyelim.

(a) $a \cdot c < 0$ ise $\lambda_1 = |c|$ ve $\lambda_2 = |a|$ alınırsa

$$\begin{aligned}\lambda_1 \cdot [a, b] + \lambda_2 \cdot [c, d] &= |c| \cdot [a, b] + |a| \cdot [c, d] \\ &= [a|c| + |a|c, b|c| + d|a|] \\ &= [0, b|c| + d|a|]\end{aligned}$$

olur ki bu

$$\{0\} \subseteq \lambda_1 \cdot [a, b] + \lambda_2 \cdot [c, d]$$

olacak şekilde $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ reel sayılarının mevcut olması demektir.

(b) $a \cdot c > 0$ ise $\lambda_1 = d$ ve $\lambda_2 = -a$ alınırsa

$$\lambda_1 \cdot [a, b] + \lambda_2 \cdot [c, d] = d \cdot [a, b] + (-a) \cdot [c, d]$$

olur. Burada iki durum vardır. Ya

$$d \cdot [a, b] + (-a) \cdot [c, d] = [0, bd - ac]$$

ya da

$$d \cdot [a, b] + (-a) \cdot [c, d] = [bd - ac, 0]$$

olur ki her iki durumda da $\lambda_1, \lambda_2 \neq 0$ reel sayıları için

$$\{0\} \subseteq \lambda_1 \cdot [a, b] + \lambda_2 \cdot [c, d]$$

elde edilir. Sonuç olarak herhangi $\{u_1, u_2\}$ kümesi $\Omega_C(\mathbb{R})$ de qs-bağımlıdır. □

Teorem 4.1.3. *$\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ quasilineer uzayında herhangi üç elemanlı bir küme quasilineer bağımlıdır.*

İspat. $\{u_1, u_2, u_3\}$, $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ de herhangi bir küme olsun. $u_1, u_{2,} u_3$ den en az biri sıfırı içeriyorsa $\{u_1, u_2, u_3\}$ kümesinin qs-bağımlı olacağı açıktır. Kabul edelim ki $\{u_1, u_2, u_3\}$ kümeleri sıfırı içermesin.

$$\{(0,0)\} \subseteq \alpha_1 \cdot u_1 + \alpha_2 \cdot u_2 + \alpha_3 \cdot u_3$$

olsun. Bu durumda bir $(x_{1,} y_1) \in u_1$, $(x_2, y_2) \in u_2$, $(x_3, y_3) \in u_3$ ve $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ vardır öyle ki,

$$\begin{aligned}(0,0) &= \alpha_1(x_{1,} y_1) + \alpha_2(x_2, y_2) + \alpha_3(x_3, y_3) \\ &= (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3, \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3)\end{aligned}$$

dir. Sıralı ikililerin eşitliği tanımından

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = 0$$

$$\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = 0$$

olur. Üç bilinmeyenli iki denklemden oluşan bu homojen lineer denklem sistemini çözerken bilinmeyenlerden birini parametreye bağlarız.

$$\alpha_1 = t$$

diyelim.

$$\alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3 = -t x_1$$

$$\alpha_2 y_2 + \alpha_3 y_3 = -t y_1$$

olur. Katsayılar matrisinin determinantı

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_2 & x_3 \\ y_2 & y_3 \end{vmatrix} = x_2 y_3 - x_3 y_2 \neq 0$$

olmak üzere gerekli işlemler yapıldığında

$$\alpha_2 = -t\frac{1}{x_2}(x_1 + \frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_3y_2 - x_2y_3})$$

$$\alpha_3 = t(\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_3y_2 - x_2y_3})$$

olur. Böylece her bir $t \in \mathbb{R}$ için sonsuz çoklukta sıfırdan farklı $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ sayıları bulunabilir. Dolayısıyla $\{u_1, u_2, u_3\}$, $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ de quasilineer bağımlıdır. □

Sonuç 4.1.6. *$\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ quasilineer uzayında herhangi $n+1$ elemanlı bir küme quasilineer bağımlıdır.*

İspat. İspatı tümevarım yöntemiyle yapılabilir. □

4.2 Bir Quasilineer Uzayda Baz ve Boyut Kavramı

Tanım 4.2.1. *X bir quasilineer uzay ve $A \subset X$ olsun. Eğer A kümesi quasilineer bağımsız ve $QspA = X$ ise A ya X in bir **bazı** denir.*

Örnek 4.2.1. *$A = \{\{1\}\}$ kümesi $(\Omega_C(\mathbb{R}), \subseteq)$ quasilineer uzayı için bir baz teşkil eder. Gerçekten;*

(1) *A kümesi qs-bağımsızdır.*

$$\{0\} \subseteq \lambda \cdot \{1\}$$

olması ancak ve ancak $\lambda = 0$ için mümkündür.

(2) *$QspA = X$ dir: $\forall x \in \Omega_C(\mathbb{R})$ için*

$$\lambda \cdot \{1\} \subseteq x$$

*olacak şekilde bir $\lambda \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Bu A kümesine $\Omega_C(\mathbb{R})$ **nin standart (kanonik) bazı** denir.*

Sonuç 4.2.1. *$a \neq 0, a \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\{\{a\}\}$ kümesi $\Omega_C(\mathbb{R})$ için bazdır.*

Örnek 4.2.2. *$B = \{\{(1,0)\}, \{(0,1)\}\}$ kümesi $(\Omega_C(\mathbb{R}^2), \subseteq)$ quasilineer uzayı için bir bazdır. Gerçekten;*

(1) *B kümesi qs-bağımsızdır.*

$$\begin{aligned}\{(0,0)\} &\subseteq \alpha_1 \cdot \{(1,0)\} + \alpha_2 \cdot \{(0,1)\} \\ &= \{(\alpha_1, \alpha_2)\}\end{aligned}$$

olması ancak ve ancak $(\alpha_1, \alpha_2) = (0,0)$ için yani $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ için mümkündür.

(2) *$QspB = \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ dir: $\forall x \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ için*

$$\alpha_1 \cdot \{(1,0)\} + \alpha_2 \cdot \{(0,1)\} \subseteq x$$

olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ mevcuttur. Bu B kümesine de $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ ***nin standart (kanonik) bazı*** *denir.*

Sonuç 4.2.2. *$a, b \neq 0$ ve $a, b \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\{\{(a,0)\}, \{(0,b)\}\}$ kümesi $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ için bir baz teşkil eder. Daha genel olarak $\{(a_1, b_1), (a_2, b_2)\}$ kümesi $\mathbb{R}^2$ için baz ise $\{\{(a_1, b_1)\}, \{(a_2, b_2)\}\}$ kümesi de $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ için bazdır.*

Örnek 4.2.3.

$$\mathcal{A} = \{0\} \cup \{[a,b] : a \neq b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

kümesi $\Omega_C(\mathbb{R})$ nin singüler alt uzayıdır. Bu uzay da $\Omega_C(\mathbb{R})$ üzerindeki aynı işlemlerle bir quasilineer uzaydır. Bu uzayda qs-bağımsız kümeler sıfırı ihtiva etmeyen bir intervalden oluşan tek nokta kümeleridir. Ancak bu tip kümeler de $\mathcal{A}$ yı geremez. Dolayısıyla $\mathcal{A}$ kümesi bir baza sahip olamaz.

Tanım 4.2.2. *Bir quasilineer uzayın boyutu, o uzayın regüler alt uzayı olan lineer uzayın boyutu olarak tanımlanır.*

Sonuç 4.2.3. $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ *quasilineer uzayının regüler alt uzayı* $\mathbb{R}^n$ *olduğundan*

$$boy\Omega_C(\mathbb{R}^n) = boy\mathbb{R}^n = n$$

dir.

Örnek 4.2.4. *Örnek (4.2.3) de verilen* $\Omega_C(\mathbb{R})$ *nin* $\mathcal{A}$ *singüler alt uzayının boyutu sıfırdır. Çünkü* $\mathcal{A}_r = \{\{0\}\}$ *dır.*

Örnek 4.2.5.

$$\mathcal{B} = \{[a,b] : a \leq 0 \leq b, \quad a, b, 0 \in \mathbb{R}\}$$

kümesi $\Omega_C(\mathbb{R})$ *nin alt uzayıdır. Bu uzayın regüler alt uzayı* $\mathcal{B}_r = \{\{0\}\}$ *aşikar quasilineer uzayıdır. Böylece* $boy\mathcal{B}_r = 0$ *olup* $boy\mathcal{B} = 0$ *dır.*

Örnek 4.2.6. $X = \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *olmak üzere*

$$V = X_s \cup \{(0,0)\}$$

kümesi $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *nin singüler alt uzayıdır. Ayrıca*

$$W = X_s \cup \{\{(x,y)\} : y = 0, x \in \mathbb{R}\}$$

kümesi de $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *nin bir alt uzayıdır. Bu uzayların regüler alt uzayları sırasıyla*

$$V_r = \{(0,0)\}$$

ve

$$W_r = \{\{(x,y)\} : y = 0, x \in \mathbb{R}\}$$

dır. $boyV_r = 0$, $boyW_r = 1$ *olduğundan verdiğimiz boyut tanımına göre* $boyV = 0$, $boyW = 1$ *olur. Ayrıca*

$$V \subset W \subset X$$

olup

$$boyV < boyW < boyX$$

bağıntısı vardır.

4.3 Proper Quasilineer Uzaylar

Tanım 4.3.1. $(X, \leq)$ *bir quasilineer uzay olsun. Her* $x, y \in X$ *için,*

$$\text{"}x \nleq y \Rightarrow z \leq x \wedge z \nleq y \text{ olacak şekilde } z \in X_r \text{ mevcuttur."}$$

önermesi sağlanıyor ise X *e* ***proper quasilineer uzay,*** *aksi halde* ***improper quasilineer uzay*** *denir. Bir başka deyişle; "x ve y elemanları bağlantılı değilse x ile bağlantılı olan ve y ile bağlantılı olmayan bir z regüler elemanı mevcuttur" şartı her* $x, y \in X$ *için sağlanıyorsa* X *uzayına proper quasilineer uzay denir.*

Önerme 4.3.1. $(X, \leq)$ *bir proper quasilineer uzay ise* X *in her elemanından önce en az bir regüler eleman gelir.*

Bu önermenin tersi doğru değildir.

Sonuç 4.3.1. *Her lineer uzay "=" bağıntısıyla bir proper quasilineeer uzaydır.*

Tanım 4.3.2. X *bir quasilineer uzay ve* $x \in X$ *olsun.* x *den önce gelen regüler elemanların kümesine* x ***elemanının zemini (floor)*** *denir ve* F_x *ile gösterilir. Böylece*

$$F_x = \{y \in X_r : y \leq x\}$$

dir. Bir X ***quasilineer uzayının zemini*** *ise o uzaya ait tüm elemanların zeminlerinin birleşiminden oluşan kümedir ve F_X ile gösterilir.*

Sonuç 4.3.2. *Bir X quasilineer uzayının zemini olan F_X kümesi X in bir alt uzayıdır.*

İspat. Öncelikle $x, y \in F_X$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ alalım. Bu durumda $x \in F_x$ ve $y \in F_y$ dir. $x \in F_x$ ise bir $z_1 \in X_r$ vardır öyleki $z_1 \leq x$ dir. Benzer şekilde $y \in F_y$ ise bir $z_2 \in X_r$ vardır öyle ki $z_2 \leq y$ dir. Quasilineer uzay olma aksiyomlarından 3.1.12 ve 3.1.13 kullanılırsa $z_1 + \lambda z_2 \leq x + \lambda y$ elde edilir. X_r nin X in bir alt uzayı olduğu hatırlanılırsa $z = z_1 + \lambda z_2 \in X_r$ olup $x + \lambda y \in F_{x+\lambda y}$ den $x + \lambda y \in F_X$ elde edilir. Böylece sonuç 3.1.3 den F_X kümesi X in bir alt uzayı olur. $\square$

Uyarı 4.3.1. *Bir X quasilineer uzayında bir $x \in X$ elemanının zemini alt uzay olmayabilir.*

Buna göre 4.3.1 tanımı şu şekilde de ifade edilebilir: Bir quasilineer uzayda farklı iki elemanın zemini farklı ise o uzaya proper quasilineer, aksi halde improper quasilineer uzay denir.

Sonuç 4.3.3. *Lineer uzaylarda bir elemanın zemini, kendinden ibaret tek nokta kümesidir. Bu nedenle de lineer uzaylar için zemin kavramını tartışmak gereksizdir.*

Örnek 4.3.1. *E bir normlu lineer uzay olmak üzere $\Omega(E)$ ve $\Omega_C(E)$ birer proper quasilineer uzaylardır: $A, B \in \Omega_C(E)$ ve $A \nsubseteq B$ olsun. Bu durumda $\exists a \in A$ vardır öyle ki $a \notin B$ dir. $a \in A$ ve $a \notin B$ ise $\{a\} \subseteq A$ ve $\{a\} \nsubseteq B$ olup $x = \{a\} \in (\Omega_C(E))_r$ dir. Böylece $A \nsubseteq B$ için $x \subseteq A$ ve $x \nsubseteq B$ olacak şekilde $x \in (\Omega_C(E))_r$ mevcut olduğundan $\Omega_C(E)$ proper quasilineer uzaydır.*

$\Omega(E)$ nin proper quasilineer uzay olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

Örnek 4.3.2.

$$\mathcal{A} = \{0\} \cup \{[a,b] : a \neq b,\ a,b \in \mathbb{R}\}$$

kümesi $\Omega_C(\mathbb{R})$ *nin singüler alt uzayıdır ve bu uzay improperdır. Çünkü, örneğin* $[1,2] \in \mathcal{A}$ *elemanından önce regüler bir eleman gelmez.*

Bu örnek bize improper quasilineer uzayların zeminlerinin sağlam olmadığı izlenimini çağrıştırır. Zira $\mathcal{A}$ nın $[1,2]$ elemanının zemini boş kümedir. Özellikle $\mathcal{A}$ quasilineer uzayının zemini ise $\{\{0\}\}$ kümesidir.

Örnek 4.3.3.

$$\mathcal{B} = \{[a,b] : a \leq 0 \leq b, \quad a,b,0 \in \mathbb{R}\}$$

kümesi $\Omega_C(\mathbb{R})$ *nin alt uzayıdır ve bu uzay improperdır. Çünkü,* $x = [-1,2] \in \mathcal{B}$ *ve* $y = [0,3] \in \mathcal{B}$ *elemanları için* $[-1,2] \nsubseteq [0,3]$ *dür. Fakat* $\mathcal{B}_r = \{\{0\}\}$ *olduğu göz önüne alınırsa*

$$\{0\} \subseteq [-1,2] \text{ iken } \{0\} \subseteq [0,3]$$

dür. Daha açık olarak bu uzaydaki birbirinden farklı her iki elemanın zemini hep aynıdır ve $\{\{0\}\}$ *kümesidir.*

Sonuç 4.3.4. *X quasilineer uzayının regüler alt uzayı $X_r = \{0\}$ ise X improper uzaydır. Dolayısıyla bir quasilineer uzayın singüler alt uzayı improperdır.*

Örnek 4.3.4. $X = \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *ve* $U = \{\{(x,y)\} : y = 0, x \in \mathbb{R}\}$ *olmak üzere*

$$V = X_s \cup \{\{(x,y)\} : y = 0, x \in \mathbb{R}\}$$

$$W = \{x \in V : \text{Bir } z \in U \text{ için } z \subseteq x\}$$

kümeleri $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ proper quasilineer uzayının improper alt uzaylarıdır. Çünkü,

$$v = \{\{(x,y)\} : x = 0,\ 1 \leq y \leq 2\}$$

olmak üzere $v \in V$ elemanından önce gelen regüler bir eleman mevcut değildir. Dolayısıyla V improperdır. Şimdi

$$w_1 = \{\{(x,y)\} : y = 0,\ 1 \leq x \leq 2\}$$

$$w_2 = \{\{(x,y)\} : -1 \leq y \leq 0,\ 1 \leq x \leq 2\}$$

olmak üzere $w_1, w_2 \in W$ alalım. $w_1 \neq w_2$ olduğu açıktır. Ancak w_1 elemanının zemini,

$$F_{w_1} = \{\{(x,y)\} : y = 0,\ 1 \leq x \leq 2\}$$

ve w_2 elemanının zemini

$$F_{w_2} = \{\{(x,y)\} : y = 0,\ 1 \leq x \leq 2\}$$

olup $F_{w_1} = F_{w_2}$ dir. W uzayı zeminleri aynı, farklı iki eleman barındırdığından improper uzaydır.

Sonuç 4.3.5. *Yukarıdaki örnekte bahsi geçen W improper uzayından da görüldüğü gibi bir uzayın her elemanından önce regüler bir elemanın geliyor olması o uzayın proper olmasını gerektirmez.*

Sonuç 4.3.6. *Yukarıdaki örnekten de görüldüğü gibi proper bir quasilineer uzayın improper alt uzayları mevcut olabilir.*

Örnek 4.3.5.

$$V = X_s \cup \{\{(x,y)\} : y = 0, x \in \mathbb{R}\}$$

olmak üzere

$$H = \{x \in V : (x_1, x_2) \in x \text{ ise } x_2 = 0 \text{ ve } a \leq x_1 \leq b,\ a, b \in \mathbb{R}\}$$

olarak verilen H kümesi V imporoper quasilineer uzayının proper bir alt uzayıdır.

Uyarı 4.3.2. *Son örnekten görüldüğü gibi improper bir quasilineer uzayın proper bir alt uzayı mevcut olabilir.*

Teorem 4.3.1. *Her proper quasilineer uzay bir Hamel baza sahiptir.*

İspat. X bir proper quasilineer uzay ve P, X in tüm qs-bağımsız alt kümelerinin bir ailesi olsun. P yi "$\subseteq$" bağıntısıyla kısmi sıralı küme yapısına kavuşturalım. Bu durumda P deki her C zinciri bir üst sınıra sahiptir. Böylece Zorn lemması gereğince P, bir B maksimal elemanına sahiptir. İşte göstereceğiz ki bu B kümesi, X proper quasilineer uzayı için baz teşkil eder.

(i) B kümesi qs-bağımsızdır: B nin tanımından, B nin her sonlu alt kümesi qs-bağımsızdır.

(ii) $QspB = X$ dir: $QspB = Y$ diyelim. Y nin X in bir alt uzayı olduğunu göstermiştik. Yani $Y \subseteq X$ dir. Göstereceğiz ki $X \subseteq Y$ dir. Kabul edelim ki $X \nsubseteq Y$ olsun. Bu durumda $\exists x \in X$ vardır öyle ki $x \notin Y$ dir. X proper quasilineer uzay olduğundan x den önce gelen en az bir $z \in X_r$ regüler elemanı mevcuttur. Dolayısıyla $\{z\} \subseteq X$ kümesi qs-bağımsızdır. Böylece $B \cup \{z\} \subseteq X$, X in qs-bağımsız bir alt kümesidir. Bu ise B nin maksimal eleman olması ile çelişir. O halde $X \subseteq Y$ dir. Böylece $QspB = X$ sonucuna ulaşılır. □

Şimdi ise bir quasilineer uzayda bir elemanı nasıl temsil edebileceğimizi görelim:

$(X, \leq)$ bir proper quasilineer uzay ve y bu uzayın herhangi bir elemanı olsun. Bu uzayda $x \leq y$ şartını sağlayan tüm x regüler elemanlarının kümesi karşılaştırılamayan elemanlardan oluşmaktadır. Çünkü $u, v \in X_r$, $u \neq v$, ise $u \leq v$ ya da $v \leq u$ yazamayız. Bu, regüler elemanların minimal olmalarından kaynaklanan bir durumdur. Şimdi y elemanının zemini olan

$$F_y = \{x \in X_r : x \leq y\}$$

kümesini düşünelim. Bu kümenin "$\leq$" bağıntısına göre üstten sınırlı olduğu açıktır. Çünkü $\forall x \in F_y$ için $x \leq y$ dir. İddia ediyoruz ki

$$y = \sup\{x \in X_r : x \in F_y\}$$

yani

$$y = \sup\{x \in X_r : x \leq y\} \tag{4.3.1}$$

dir.

Önerme 4.3.2. $(X, \leq)$ *bir proper quasilineer uzay ve* $y \in X$ *olsun. Bu durumda* $y = \sup\{x \in X_r : x \leq y\}$ *dir.*

İspat. $z \in X$ ve her $x \in F_y = \{x \in X_r : x \leq y\}$ için $x \leq z$ olduğunu kabul edelim. $y \leq z$ olduğunu göstermeliyiz. Kabul edelim ki $y \leq z$ olmasın. X bir proper quasilineer uzay olduğundan $u \leq y$ ve $u \nleq z$ olacak şekilde $u \in X_r$ mevcuttur. O halde $u \in F_y$ dir. Bu ise kabülden $u \leq z$ olmasını gerektirir. Bu durum $u \nleq z$ olması durumu ile çelişir. Sonuç olarak $y \leq z$ dir. Böylece ispat tamamlanır. $\square$

Şimdi (4.3.1) temsilinin tek türlü olduğunu vurgulayalım: Eğer X sonlu boyutlu ise (örneğin n- boyutlu) bu durumda X_r de n-boyutlu bir uzaydır. X_r, lineer bir uzay olduğundan X_r nin bir bazı $\{b_1, b_2, ..., b_n\}$ ise $x \in X_r$ elemanı

$$x = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^x b_k$$

şeklinde tek türlü bir gösterime sahiptir. Supremumun tekliğini de göz önüne alırsak böylece her bir $y \in X$ elemanı

$$y = \sup\{x \in X_r : x \leq y\}$$

şeklinde tek türlü bir gösterime sahip olur. Burada supremumun "$\leq$" bağıntısına göre tanımlı olduğunu unutmamalıyız.

Şimdi bu durumu bir örnekle daha iyi anlamaya çalışalım:

Örnek 4.3.6. $X = (\Omega_C(\mathbb{R}^2))$ *proper quasilineer uzayını ele alalım.*

$$A = \{(x_1, x_2) : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\}$$

kümesi $\mathbb{R}^2$ *nin kompakt- konveks alt kümesidir ve dolayısıyla* $A \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *dir.*

X_r *nin standart bazı olan* $\{\{(1,0)\}, \{(0,1)\}\}$ *kümesi yardımıyla bir* $x = \{(x_1, x_2)\} \in X_r$ *elemanının*

$$x = x_1 \cdot \{(1,0)\} + x_2 \cdot \{(0,1)\} \tag{4.3.2}$$

şeklinde tek türlü bir gösterime sahip olduğunu hatırlayalım. Ayrıca $x \in X_r$ *ve* $x = \{(x_1, x_2)\} \subseteq A$ *olması sebebiyle* $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ *yazarız. Şimdi*

$$\{x \in X_r : x \subseteq A\}$$

kümesini ele alalım. Bu küme "$\subseteq$" kısmi sıralama bağıntısına göre üstten sınırlıdır.

Çünkü A bu küme için bir üst sınırdır. Şimdi bu kümenin supremumunu bulalım:

$$
\begin{aligned}
\sup\{x \in X_r : x \subseteq A\} &= \sup\{x = \{(x_1, x_2)\} \in X_r : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \\
&= \sup\{x_1 \cdot \{(1,0)\} + x_2 \cdot \{(0,1)\} : x_1^2 + x_2^2 \leq 1\} \\
&= A
\end{aligned}
$$

olur ki lineer cebirden her bir $x = \{(x_1, x_2)\} \in X_r$ elemanının (4.3.2) şeklindeki temsilinin tekliğinden ve supremumun tekliğinden $A \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ elemanının böylesi temsili tek türlüdür.

Uyarı 4.3.3. *Klasik lineer cebirde de bir elemanın inşaası baz elemanları vasıtasıyla aynı şekilde yapılır. Örneğin $A = (2,3) \in \mathbb{R}^2$ elemanını göz önüne alalım. Bir lineer uzayın her elemanının regüler olduğunu ve bir lineer uzayın ancak "=" bağıntısıyla quasilineer uzay yapılabildiğini hatırlayalım ve bir önceki yöntemi de kullanarak $A = (2,3) \in \mathbb{R}^2$ elemanını inşaa edelim: Öncelikle $x \leq (2,3) \Longleftrightarrow x = (2,3)$ özelliğindeki tüm $x \in (\mathbb{R}^2)_r = \mathbb{R}^2$ regüler elemanları belirleyelim. Bu özel durumda böyle bir eleman bir tanedir ve $x = (2,3)$ dür. İlk olarak baz yardımıyla $(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$ şeklinde tek türlü yazıldığını söyleyelim. Sonrada $x = (2,3)$ şartına uyan x ler üzerinden supremum alalım. Fakat $x = (2,3)$ şartına uyan eleman tek olduğundan*

$$\sup\{x \in \mathbb{R}^2 : x = (2,3)\} = \sup\{2(1,0) + 3(0,1)\} = 2(1,0) + 3(0,1)$$

olup

$$(2,3) = 2(1,0) + 3(0,1)$$

temsili ortaya çıkacaktır. Görüldüğü gibi bu durumda supremuma ihtiyaç yoktur. Fakat lineer olmayan bir quasilineer uzayda kesinlikle supremum gerekmektedir.

Uyarı 4.3.4. *Genel olarak bir quasilineer uzayı; lineer uzay olan parçası ve üzerine konumlanmış quasilineer parçasından ibaret olarak şekillendirmek mümkündür. Proper bir quasilineer uzayın zeminini, yani regüler alt uzayını, üzerine singüler elemanlar yerleşmiş olarak düşünürüz. Singüler elemanları* ***köpük (foam)****, regüler elemanları ise* ***öz (essence)*** *olarak adlandırıyoruz. Singüler elemanlar için " köpük " tabirini kullanmamızın motivasyon sebebi, bir quasilineer uzayın baz elemanlarının, yani bir nevi özünün, singüler elemanlardan teşkil edilemiyor olmasıdır. Bu nedenle singüler elemanları köpük olarak tasavvur ediyoruz. Bundan başka bir quasilineer uzay bir baza sahip ise bazın elemanları regüler elemanlardan yani " öz " den oluşmak zorundadır. Sonuç olarak biz* ***" Bir quasilineer uzayın bazı özündedir"*** *tabirini kullanabiliriz.*

Örnek 4.3.7.

$$A = \{0\} \cup \{[a, b] : a \neq b, \ a, b \in \mathbb{R}\}$$

kümesi $\Omega_C(\mathbb{R})$ nin singüler alt uzayıdır. Bu quasilineer uzayın özü, $\{\{0\}\}$ aşikar vektör uzayıdır ve bu uzayın diğer tüm elemanları köpükten ibarettir. Bu nedenle de A ya ***" Köpükten ibaret quasilineer uzay "*** *deriz.*

Örnek 4.3.8.

$$V = (\Omega_C(\mathbb{R}^2))_s \cup \{\{(x, y)\} : y = 0, x \in \mathbb{R}\}$$

kümesi $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ nin alt uzayıdır. Bu uzay improper bir quasilineer uzay olduğu halde sadece köpükten ibaret bir quasilineer uzay değildir. Zira bu uzayın özü $\{\{(x, y)\} : y = 0, x \in \mathbb{R}\}$ dir ve bu uzay aşikar uzay değildir.

Sonuç 4.3.7. *Köpükten ibaret quasilineer uzaylar, tıpkı lineer cebirdeki aşikar alt uzay gibi boyutu sıfır olan uzaylardır. Bu uzayın elemanlarına köpük tabirini kullanmamızın* *bir diğer sebebi de budur. Bu değerlendirmelerden sonra bir quasilineer uzayın boyutu, özü (essence) dediğimiz lineer olan alt uzayının boyutu olacaktır. Örneğin bu tespite göre yukarıdaki örneklerde A nın boyutu 0, V nin boyutu 1 ve $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ nin boyutu da 2 dir.*

5. QUASİLİNEER OPERATÖRLER

Bu bölümde ilk olarak Aseev'in [1] numaralı çalışmasında ele aldığı quasilineer operatörlerle ilgili temel tanım ve teoremler verilecektir. Göreceğiz ki Aseev, quasilineer uzaylar arasındaki quasilineer operatör tanımını kurgularken yine kısmi sıralama bağıntısını kullanmış ve böylece quasilineer operatör tanımının lineer operatör tanımı ile uyum içinde olmasını sağlamıştır. Nasıl ki quasilineer uzaylar, lineer uzayların bir genelleştirilmesi ise quasilineer operatörler de lineer operatörlerin bir genelleştirilmesidir. Bu bölümün ikinci kısmında ise lineer operatörler için verilen bazı teorem ve sonuçların quasilineer opertörlerdeki karşılıkları ilk kez ele alınmış ve farklılıklar dile getirilmiştir. Yine bu bölümde " Sonlu boyutlu lineer uzaylar arasındaki her lineer dönüşüme bir matris, her matrise de bir lineer dönüşüm karşılık gelir" gerçeğinin quasilineer opertörlerdeki karşılığı incelenmiştir. Araştırmalarımız doğrultusunda $m \times n$ tipinde reel bir matrisin $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ den $\Omega_C(\mathbb{R}^m)$ ye quasilineer bir operatör tanımladığını, ancak tersinin mümkün olmadığını göstereceğiz. Ayrıca bu bölümün son kısmında önce [12] numaralı kaynaktan yararlanılarak interval matrisler incelenmiş ve daha sonra $m \times n$ tipinde bir interval matrisin $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ den $\Omega_C(\mathbb{R}^m)$ ye quasilineer operatör tanımladığı gösterilmiştir.

5.1 Temel Tanım ve Teoremler

Tanım 5.1.1. *[1] X ve Y birer quasilineer uzay olsunlar. $\Lambda : X \to Y$ bir dönüşüm olmak üzere, $\forall x, x_1, x_2 \in X$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için aşağıdaki şartları sağlaması durumunda*

Λ *ya bir* ***quasilineer operatör*** *denir:*

$$\Lambda(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot \Lambda(x) \tag{5.1.1}$$

$$\Lambda(x_1 + x_2) \leq \Lambda(x_1) + \Lambda(x_2) \tag{5.1.2}$$

$$x_1 \leq x_2 \Rightarrow \Lambda(x_1) \leq \Lambda(x_2)\,. \tag{5.1.3}$$

X ve Y birer lineer uzay ise quasilineer operatör tanımı klasik lineer operatör tanımıyla çakışır ve (5.1.3) şartı kendiliğinden sağlanır.

Tanım 5.1.2. *[1] X ve Y birer normlu quasilineer uzay olsunlar. $\Lambda : X \to Y$ quasilineer dönüşümü verilsin. Eğer $\forall x \in X$ için*

$$\|\Lambda(x)\|_Y \leq k \cdot \|x\|_X$$

olacak şekilde $\exists k > 0$ reel sayısı varsa Λ ya ***sınırlı quasilineer operatör*** *denir.*

Lemma 5.1.1. *[1] X ve Y birer normlu quasilineer uzay olsunlar. $\Lambda : X \to Y$ quasilineer operatörü verilsin.*

$$\Lambda \text{ sınırlıdır} \Leftrightarrow \Lambda,\ \theta \in X \text{ noktasında süreklidir.}$$

Ayrıca Λ nın θ daki sürekliliği, Λ nın X üzerinde düzgün sürekliliğini gerektirir.

Şimdi sınırlı quasilineer operatörlerin uzayını tanıyalım [1]:

X ve Y birer normlu quasilineer uzay olmak üzere, X den Y ye tüm sınırlı quasilineer operatörlerin ailesi $\Lambda(X, Y)$ ile gösterilir. $\Lambda(X, Y)$ sınırlı quasilineer operatörler ailesi

$$\Lambda_1 \lesssim \Lambda_2 \Leftrightarrow \forall x \in X \text{ için } \Lambda_1(x) \leq \Lambda_2(x)$$

şeklinde tanımlı kısmi sıralama bağıntısı ve

$$+ : \Lambda(X, Y) \times \Lambda(X, Y) \to \Lambda(X, Y)$$

$$(\Lambda_1 + \Lambda_2)(x) = \Lambda_1(x) + \Lambda_2(x)$$

$$\cdot : \mathbb{R} \times \Lambda(X, Y) \to \Lambda(X, Y)$$

$$(\alpha \cdot \Lambda)(x) = \alpha \cdot \Lambda(x)$$

işlemleri ile bir quasilineer uzaydır. Burada " $\leq$ " sembolü Y deki kısmi sıralamadır. " $+$ " ve " $\cdot$ " işlemleri Y nin işlemleri olup aynı semboller $\Lambda(X, Y)$ için de kullanılmıştır. Ayrıca,

$$\|\Lambda\|_\Lambda = \sup_{\|x\|_X = 1} \|\Lambda(x)\|_Y$$

normuyla $\Lambda(X, Y)$ bir normlu quasilineer uzaydır [1].

Teorem 5.1.1. *[1] X bir normlu quasilineer uzay, Y ise tam normlu quasilineer uzay olsun. Bu durumda $\Lambda(X, Y)$ bir tam normlu quasilineeer uzaydır.*

X bir normlu quasilineer uzay olsun. $X^{\otimes}$, $\Lambda(X, \Omega(\mathbb{R}))$ olarak ve $X_C^{\otimes}$ ise $\Lambda(X, \Omega_C(\mathbb{R}))$ olarak tanımlanır.

Tanım 5.1.3. *[1] X den $\Omega_C(\mathbb{R})$ ye tanımlı bir quasilineer operatöre **quasilineer fonksiyonel** denir.*

X ve Y normlu quasilineer uzaylar ve $\Lambda \in \Lambda(X, Y)$ olsun. $\forall \varphi \in Y^{\otimes}$ elemanına $X^{\otimes}$'ın bir ψ elemanını

$$\psi(x) = (\varphi \circ \Lambda)(x)$$

kuralıyla karşılık getirebiliriz. Sonuç olarak $\Lambda^{\otimes} : Y^{\otimes} \to X^{\otimes}$ operatörü tanımlıdır. Ayrıca $\Lambda^{\otimes} : Y^{\otimes} \to X^{\otimes}$ operatörü quasilineer olup $\Lambda^{\otimes} \in \Lambda(Y^{\otimes}, X^{\otimes})$ ve

$\|\Lambda^{\otimes}\|_{\Lambda} = \|\Lambda\|_{\Lambda}$ dir. Burada tanımlanan $\Lambda^{\otimes} : Y^{\otimes} \to X^{\otimes}$ operatörüne $\Lambda : X \to Y$ quasilineer operatörünün **dual operatörü** veya **adjoint operatörü** denir [1].

5.2 Quasilineer Operatörlerle İlgili Yeni Sonuçlar

Bu kısıma (5.1.1) de verilen quasilineer operatör tanımını daha ayrıntılı sunarak başlayalım.

Tanım 5.2.1. *X ve Y birer quasilineer uzay olsun. X ve Y arasında tanımlı bir T dönüşümüne aşağıdaki şartları sağlaması durumunda bir* ***quasilineer operatör*** *denir:*

(i) T nin tanım uzayı olan $D(T)$ bir quasilineer uzay,

(ii) $\forall x, y \in D(T)$ için

$$T(x+y) \leq T(x) + T(y)$$

(iii) $\forall x \in D(T)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$T(\lambda x) = \lambda T(x)$$

(iv)

$$x \leq y \ \text{ iken } \ T(x) \leq T(y)$$

dir.

Burada $D(T)$ ye T quasilineer operatörünün **tanım kümesi**, $R(T)$ ye ise **görüntü kümesi** denir, $D(T) \subseteq X$ ve $R(T) \subseteq Y$ dir. Bu durumda $D(T)$ den Y ye tanımlı olan T içine dönüşümü, $D(T)$ den $R(T)$ üzerinedir. Ayrıca

$$N(T) = \{x \in D(T) : Tx = \theta\}$$

kümesine de T **nin çekirdeği (kernel-null)** denir.

Uyarı 5.2.1. *X ve Y lineer uzay ise yukarıda verilen quasilineer operatör tanımı klasik lineer operatör tanımıyla çakışır ve* ***(iv)*** *şartı kendiliğinden sağlanır.*

Örnek 5.2.1. *X bir quasilineer uzay olmak üzere,*

$$I : X \to X \qquad , \qquad x \to I(x) = x$$

şeklinde tanımlı I ***özdeşlik (birim) operatörü*** *quasilineerdir.*

Örnek 5.2.2. *$\Omega_C(\mathbb{R})$ ailesinin "$\subseteq$" kısmi sıralama bağıntısıyla bir quasilineer uzay olduğunu hatırlayalım.*

$$f : \Omega_C(\mathbb{R}) \to \Omega_C(\mathbb{R}) \qquad , \qquad x = [a, b] \to f(x) = f([a, b]) = [2a, 2b]$$

dönüşümü quasilineer operatördür:

(i) $[a, b], [c, d] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ alalım.

$$\begin{aligned} f([a, b] + [c, d]) &= f([a + c, b + d]) \\ &= [2(a + c), 2(b + d)] \\ &= [2a + 2c, 2b + 2d] \\ &= [2a, 2b] + [2c, 2d] \\ &= f([a, b]) + f([c, d]) \end{aligned}$$

olur.

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ ve$[a, b] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ alalım.

1. $\lambda \geq 0$ ise

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot [a,b]) &= f([\lambda a, \lambda b]) \\ &= [2(\lambda a), 2(\lambda b)] \\ &= [\lambda(2a), \lambda(2b)] \\ &= \lambda \cdot [2a, 2b] \\ &= \lambda \cdot f([a,b]) \end{aligned}$$

dir.

2. $\lambda < 0$ ise

$$\begin{aligned} f(\lambda \cdot [a,b]) &= f([\lambda b, \lambda a]) \\ &= [2(\lambda b), 2(\lambda a)] \\ &= [\lambda(2b), \lambda(2a)] \\ &= \lambda[2a, 2b] \\ &= \lambda \cdot f([a,b]) \end{aligned}$$

olur.

(iii) $[a,b] \subseteq [c,d]$ olsun. (3.1.13) den

$$2[a,b] \subseteq 2[c,d]$$

olup

$$f([a,b]) \subseteq f([c,d])$$

bulunur.

Örnek 5.2.3. $\mathbb{R}$ *reel sayılar kümesinin "=" bağıntısıyla bir quasilineer uzay olduğunu hatırlayalım. Böylece*

$$g : \mathbb{R} \to \Omega_C(\mathbb{R}) \qquad , \qquad x \to g(x) = x \cdot [1,2]$$

şeklinde tanımlı g dönüşümü quasilineer bir operatördür:

(1)

$$\begin{aligned} g(x_1 + x_2) &= (x_1 + x_2) \cdot [1,2] \\ &\subseteq x_1 \cdot [1,2] + x_2 \cdot [1,2] \\ &= g(x_1) + g(x_2) \end{aligned}$$

(2) $\alpha \in \mathbb{R}$ için

$$\begin{aligned} g(\alpha x) &= (\alpha x) \cdot [1,2] \\ &= \alpha \cdot (x \cdot [1,2]) \\ &= \alpha \cdot g(x) \end{aligned}$$

dir.

(3) $x_1 = x_2$ olsun. Bu durumda yine (3.1.13) den

$$x_1 \cdot [1,2] = x_2 \cdot [1,2]$$

olup $g(x_1) = g(x_2)$ ve dolayısıyla

$$g(x_1) \subseteq g(x_2)$$

bulunur.

Sonuç 5.2.1. *Örnek 5.2.3 den de görüldüğü gibi quasilineer uzaylar arasındaki quasilineer bir operatör, regüler bir alt kümeyi regüler bir alt kümeye dönüştürmek zorunda değildir. Yani bir quasilineer operatör özü, öze dönüştürmeyebilir.*

Teorem 5.2.1. *X ve Y birer quasilineer uzay, $f : X \to Y$ quasilineer bir operatör, $f \neq 0$ olsun. Bu durumda f birebir ise köpüğü köpüğe dönüştürür.*

İspat. Kabul edelim ki $f \neq 0$ olmak üzere f quasilineer operatörü köpüğü öze dönüştürsün. Herhangi bir $x \in X$ alalım. Bu durumda 3.2.7 den $x \leq y$ olacak şekilde bir $y \in X$ mevcuttur. f quasilineer olduğundan $x \leq y$ ise $f(x) \leq f(y)$ dir. Kabul gereği f, köpüğü öze dönüştürdüğünden $f(y) \in Y$ elemanının $-f(y)$ tersi mevcuttur. Quasilineer uzay olma aksiyomları olan 3.1.12 den

$$f(x) \leq f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) \leq f(y) - f(y) \Rightarrow f(x) - f(y) \leq \theta$$

olur. Yine f nin quasilineerliğinden

$$f(x-y) \leq f(x) - f(y) \leq \theta \Rightarrow f(x-y) \leq \theta$$

olur ki bir quasilineer uzayda θ elemanı minimal olduğundan

$$f(x-y) = \theta$$

olmak zorundadır. Buradan ise $f \neq 0$ ve f birebir olduğundan

$$x - y = \theta$$

elde edilir. Bu ise x in $y \in X$ elemanının tersi olması demektir. Yani $y \in X_r$ olur. Bu durum $x \leq y$ olması ile çelişir. Çünkü bir quasilineer uzayda regüler elemanlar minimaldir. O halde kabülümüz yanlıştır. Buna göre sıfır operatörü hariç tüm birebir olan quasilineer operatörler köpüğü köpüğe dönüştürmek zorundadır. □

Teorem 5.2.2. $\Omega_C(\mathbb{R})$ *den* $\mathbb{R}$ *ye tanımlı sıfır operatöründen başka quasilineer operatör yoktur.*

İspat. $g : \Omega_C(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ quasilineer operatörünü göz önüne alalım. Herhangi bir $[a,b] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ için

$$[a,b] \subseteq [-c,c]$$

olacak şekilde bir $c \in \mathbb{R}$ vardır. Buradan

$$[a,b] \subseteq [-c,c] = [-c,0] + [0,c]$$

yazabiliriz. g quasilineer olduğundan

$$\begin{aligned} g([a,b]) &= g([-c,0] + [0,c]) \\ &= g([-c,0]) + g([0,c]) \\ &= g((-1)\cdot[0,c]) + g([0,c]) \\ &= -g([0,c]) + g([0,c]) \\ &= \theta \end{aligned}$$

olur. O halde $\Omega_C(\mathbb{R})$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlı tek quasilineer operatör sıfır operatörüdür. □

Örnek 5.2.4.

$$\Pi_1 : \Omega_C(\mathbb{R}^2) \to \Omega_C(\mathbb{R}) \qquad , \qquad A \to \Pi_1(A) = \{x : (x,y) \in A\}$$

şeklinde tanımlı Π_1 *dönüşümü quasilineerdir:* $A, B \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *ve* $\lambda \in \mathbb{R}$ *verilsin.* $(x_1,y_1) \in A$ *ve* $(x_2,y_2) \in B$ *olmak üzere,*

(1) Minkowski toplamından

$$A + B = \{(x_1+x_2, y_1+y_2) : (x_1,y_1) \in A, (x_2,y_2) \in B\}$$

olduğunu hatırlayalım. Bu durumda

$$\begin{aligned}\Pi_1(A+B) &= \{x_1+x_2 : (x_1+x_2, y_1+y_2) \in A+B\} \\ &= \{x_1 : (x_1,y_1) \in A\} + \{x_2 : (x_2,y_2) \in B\} \\ &= \Pi_1(A) + \Pi_1(B)\end{aligned}$$

olur.

(2) Yine

$$\lambda \cdot A = \{(\lambda x_1, \lambda y_1) : (x_1,y_1) \in A\}$$

olduğu hatırlanılırsa

$$\begin{aligned}\Pi_1(\lambda \cdot A) &= \{\lambda x_1 : (\lambda x_1, \lambda y_1) \in \lambda \cdot A\} \\ &= \lambda \cdot \{x_1 : (x_1,y_1) \in A\} \\ &= \lambda \cdot \Pi_1(A)\end{aligned}$$

olur.

(3) $A \subseteq B$ olsun. Bu durumda $\forall\ (x_1,y_1) \in A$ için $(x_2,y_2) \in B$ dir ve

$$\Pi_1(A) = \{x_1 : (x_1,y_1) \in A\} \subseteq \{x_1 : (x_1,y_1) \in B\} = \Pi_1(B)$$

elde edilir.

Örnek 5.2.5.

$$\Pi_2 : \Omega_C(\mathbb{R}^2) \to \Omega_C(\mathbb{R}) \qquad , \qquad A \to f(A) = \{y : (x,y) \in A\}$$

şeklinde tanımlı Π_2 *dönüşümü quasilineerdir. Bu dönüşümün quasilineer olduğu yukarıdakine benzer şekilde gösterilebilir.*

Tanım 5.2.2.

$$\Pi_1 : \Omega_C(\mathbb{R}^2) \to \Omega_C(\mathbb{R}) \quad , \quad A \to f(A) = \{x : (x, y) \in A\}$$

şeklinde tanımlı Π_1 *quasilineer dönüşüme* $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *nin* $\Omega_C(\mathbb{R})$ *üzerine* **1. *quasiizdüşümü (1. projeksiyonu)*** *denir. Benzer biçimde*

$$\Pi_2 : \Omega_C(\mathbb{R}^2) \to \Omega_C(\mathbb{R}) \quad , \quad A \to f(A) = \{y : (x, y) \in A\}$$

şeklinde tanımlı Π_2 *quasilineer dönüşüme* $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *nin* $\Omega_C(\mathbb{R})$ *üzerine* **2. *quasiizdüşümü (2. projeksiyonu)*** *denir.*

Teorem 5.2.3. *X ve Y birer quasilineer uzay, $D(T) \subseteq X$ ve $T : D(T) \to Y$ bir quasilineer operatör olsun.*

(i) *$R(T)$ bir quasilineer uzaydır.*

(ii) $\dim D(T) = n < \infty$ *ise* $\dim R(T) \leq n$ *dir.*

(iii) *$N(T)$ bir quasilineer uzaydır.*

İspat. (i) $R(T)$ nin Y nin bir alt uzayı olduğunu göstereceğiz. Öncelikle $y_1, y_2 \in R(T)$ için $y_3 \leq y_1 + y_2$ olacak şekilde $y_3 \in R(T)$ bulmalıyız: $y_1, y_2 \in R(T)$ ise $T(x_1) = y_1$ ve $T(x_2) = y_2$ olacak şekilde $x_1, x_2 \in D(T)$ mevcuttur. $D(T)$ bir quasilineer uzay olduğundan $x_1 + x_2 \in D(T)$ dir. T nin quasilineerliğinden

$$T(x_1 + x_2) \leq T(x_1) + T(x_2) = y_1 + y_2$$

olur. $T(x_1 + x_2) \in R(T)$ olacağından aradığımız $y_3 = T(x_1 + x_2) \in R(T)$ elemanını bulmuş oluruz. Şimdi $y \in R(T)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda \cdot y \in R(T)$ olduğunu göstermeliyiz: $y \in R(T)$ ise $T(x) = y$ olacak şekilde $x \in D(T)$ mevcuttur. $D(T)$ bir quasilineer uzay olduğundan $\lambda \cdot x \in D(T)$ dir. T nin quasilineerliğinden

$$T(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot T(x) = \lambda \cdot y$$

olur. $T(\lambda \cdot x) \in R(T)$ olacağından $\lambda \cdot y \in R(T)$ dir.

(ii) $R(T)$ de keyfi $y_1, y_2, ..., y_{n+1}$ elemanlarını alalım. Bu durumda $T(x_1) = y_1$, $T(x_2) = y_2, ..., T(x_{n+1}) = y_{n+1}$ olacak şekilde $x_1, x_2, ..., x_{n+1} \in D(T)$ mevcuttur. $\dim D(T) = n$ olduğundan $\{x_1, x_2, ..., x_{n+1}\}$ kümesi quasilineer bağımlıdır. Böylece hepsi birden sıfır olmayan $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}$ skalerleri için,

$$0_X \leq \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_{n+1} x_{n+1}$$

dir. T nin quasilineerliğinden

$$T(0_X) \leq T(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + ... + \alpha_{n+1} x_{n+1})$$

olur. Buradan

$$0_Y \leq \alpha_1 T(x_1) + \alpha_2 T(x_2) + ... + \alpha_{n+1} T(x_{n+1})$$

olup

$$0_Y \leq \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2 + ... + \alpha_{n+1} y_{n+1}$$

elde edilir. Böylece $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{n+1}$ skalerlerinin hepsinin birden sıfır olmadığı göz önüne alınırsa $\{y_1, y_2, ..., y_{n+1}\}$ kümesi quasilineer bağımlı olur. $y_1, y_2, ..., y_{n+1} \in R(T)$ keyfi olduğundan bu sonuç $R(T)$ den alınan $n+1$ ya da daha fazla sayıda elemanın quasilineer bağımlı olacağını söyler. O halde $\dim R(T) \leq n$ dir.

(iii) $x_1, x_2 \in N(T)$ için $z \leq x_1 + x_2$ olacak şekilde $z \in N(T)$ mevcuttur: $x_1, x_2 \in N(T)$ ise $T(x_1) = \theta$ ve $T(x_2) = \theta$ dır. Yine T nin quasilineerliğinden

$$T(x_1 + x_2) \leq T(x_1) + T(x_2) = \theta$$

olur. θ elemanının minimalliğinden

$$T(x_1 + x_2) = \theta$$

olur. Bu ise $x_1 + x_2 \in N(T)$ demektir. Böylece $z = x_1 + x_2$ için $T(z) = \theta$ olur ki $z \leq x_1 + x_2$ olacak şekilde $z \in N(T)$ bulunur. Ayrıca $x \in N(T)$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda \cdot x \in N(T)$ dir: $x \in N(T)$ olduğundan $T(x) = \theta$ dır. T nin quasilineer olduğu da kullanılırsa

$$T(\lambda \cdot x) = \lambda \cdot T(x) = \lambda \cdot \theta = \lambda \cdot (0 \cdot x) = (\lambda \cdot 0).x = 0 \cdot x = \theta$$

bulunur ki $\lambda \cdot x \in N(T)$ olur.

$\square$

Lineer operatörlerden bildiğimiz gibi bir $T : D(T) \to Y$ lineer operatörünün birebirliği

$$Tx = \theta \text{ iken } x = \theta$$

olmasına denk idi. Ancak quasilineer operatörlerde bu durum biraz farklıdır:

Teorem 5.2.4. *X ve Y birer quasilineer uzay, $T : D(T) \to Y$ quasilineer bir operatör, $D(T) \subseteq X$ ve $R(T) \subseteq Y$ olsun. Bu durumda $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ tersi mevcut ise*

$$Tx = \theta \quad \textit{ise} \quad x = \theta$$

dır.

İspat. $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ tersi mevcut olsun. Bu durumda T birebirdir. Yani

$$T(x_1) = T(x_2) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2$$

dir. $x_2 = \theta$ alınırsa

$$T(x_1) = T(\theta) = \theta \quad \Longrightarrow \quad x_1 = \theta$$

olur. □

Uyarı 5.2.2. *Yukarıdaki teoremin tersi doğru değildir. Yani $Tx = \theta$ iken $x = \theta$ olması T nin birebir olmasını ($T^{-1} : R(T) \to D(T)$ mevcut olmasını) gerektirmez. Halbuki lineer uzaylarda yani lineer olan quasilineer uzaylarda bu gerektirmenin mevcut olduğunu biliyoruz.*

Örnek 5.2.6.

$$T : \mathbb{R} \to \Omega_C(\mathbb{R}) \qquad , \qquad x \to T(x) = \begin{cases} [-x, x] & , \quad x \geq 0 \\ [x, -x] & , \quad x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlı operatör quasilineerdir:

(i) $x, y \in \mathbb{R}$ için $T(x+y) \subseteq T(x) + T(y)$ dir:

1. $x, y < 0$ ise $x + y < 0$ olur. Buradan

   $$T(x+y) = [x+y, -(x+y)] = [x+y, -x-y] = [x, -x] + [y, -y] = T(x) + T(y)$$

   olur.

2. $x, y \geq 0$ ise $x + y \geq 0$ olur. Buradan

   $$T(x+y) = [-(x+y), x+y] = [-x-y, x+y] = [-x, x] + [-y, y] = T(x) + T(y)$$

   olur.

3. $x \leq 0$ ve $y \geq 0$ olsun. $x+y<0$ ise

$$T(x+y) = [x+y, -(x+y)] = [x+y, -x-y] \subseteq [x,-x]+[-y,y] = T(x)+T(y)$$

olur. Eğer $x+y \geq 0$ ise

$$T(x+y) = [-(x+y), x+y] = [-x-y, x+y] \subseteq [x,-x]+[-y,y] = T(x)+T(y)$$

olur.

4. $x \geq 0$ ve $y \leq 0$ olsun. $x+y<0$ ise

$$T(x+y) = [x+y, -(x+y)] = [x+y, -x-y] \subseteq [-x,x]+[y,-y] = T(x)+T(y)$$

olur. Eğer $x+y \geq 0$ ise

$$T(x+y) = [-(x+y), x+y] = [-x-y, x+y] \subseteq [-x,x]+[y,-y] = T(x)+T(y)$$

olur.

(ii) $x \in \mathbb{R}$ ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ dir:

1. $\lambda < 0$ olsun. $x > 0$ ise $\lambda x < 0$ olup

$$T(\lambda x) = [\lambda x, -\lambda x] = \lambda[-x, x] = \lambda T(x)$$

dir. $x \leq 0$ ise $\lambda x \geq 0$ olup

$$T(\lambda x) = [-\lambda x, \lambda x] = \lambda[x, -x] = \lambda T(x)$$

dir. Burada $\lambda < 0$ iken $[\lambda a, \lambda b] = \lambda[b, a]$ olduğu dikkate alınmalıdır.

2. $\lambda > 0$ olsun. $x \geq 0$ ise $\lambda x \geq 0$ olup

$$T(\lambda x) = [-\lambda x, \lambda x] = \lambda[-x, x] = \lambda T(x)$$

dir. $x < 0$ ise $\lambda x < 0$ olup

$$T(\lambda x) = [\lambda x, -\lambda x] = \lambda[x, -x] = \lambda T(x)$$

bulunur.

3. $\lambda = 0$ ise

$$T(\lambda x) = T(0 \cdot x) = T(\theta) = \{0\}$$

olur.

(iii) $x = y$ olsun.

$$T(x) = \begin{cases} [-x, x] & , \quad x \geq 0 \\ [x, -x] & , \quad x < 0 \end{cases} = \begin{cases} [-y, y] & , \quad y \geq 0 \\ [y, -y] & , \quad y < 0 \end{cases} = T(y)$$

olur ki $T(x) \subseteq T(y)$ sağlanır. O halde T quasilineerdir.

Ayrıca $T(x) = \theta = \{0\}$ iken $x = 0$ dır. Ancak T birebir değildir: Örneğin; $-1 \neq 1$ için $T(-1) = [-1, 1]$ ve $T(1) = [-1, 1]$ olup $T(-1) = T(1)$ dir.

Lineer operatörlerden hatırlanılacağı üzere eğer bir T lineer operatörünün T^{-1} inversi mevcut ise T^{-1} de lineer idi. Ancak quasilineer operatörlerde bu durum farklıdır.

Uyarı 5.2.3. *T bir quasilineer operatör iken $T^{-1} : R(T) \to D(T)$ tersi quasilineer olmayabilir. Örneğin;*

$$T : \mathbb{R} \to \Omega_C(\mathbb{R}) \quad , \quad x \to T(x) = x \cdot [0, 2]$$

operatörü quasilineerdir. T birebir olduğundan $T^{-1} : R(T) \to \mathbb{R}$ tersi mevcuttur. Ancak T^{-1} quasilineer değildir. Çünkü $y_1 = \frac{1}{2} \cdot [0,2] \in R(T)$ ve $y_2 = 1 \cdot [0,2] \in R(T)$ için

$$\frac{1}{2} \cdot [0,2] \subseteq 1 \cdot [0,2]$$

iken $T^{-1}(y_1) = \frac{1}{2}$ ve $T^{-1}(y_2) = 1$ olup

$$\frac{1}{2} \neq 1$$

dir. Burada $\mathbb{R}$ nin "$=$" bağıntısıyla bir quasilineer uzay olduğu unutulmamalıdır.

Şimdi $m \times n$ tipindeki reel bir $A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisinin nasıl bir quasilineer operatör tanımladığını gösterelim:

$A = [a_{ij}]_{m\times n}$ matrisi $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ den $\Omega_C(\mathbb{R}^m)$ ye bir quasilineer operatör tanımlar, şöyle ki;

$$f : \Omega_C(\mathbb{R}^n) \to \Omega_C(\mathbb{R}^m) \qquad , \qquad V \to f(V) = A \odot V = \{A \cdot v : v \in V \subset \mathbb{R}^n\} \quad (5.2.1)$$

şeklindedir. Bu eşitlik iyi tanımlıdır. Zira $V \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için $f(V) \in \Omega_C(\mathbb{R}^m)$ dir. Burada belirtelim ki $v \in \mathbb{R}^n$ için $A{\cdot}v$ bilinen matris çarpımıdır. Şimdi ise iyi tanımlılığı göstermek için $f(V) = \{A \cdot v : v \in V \subset \mathbb{R}^n\}$ yazalım. V, $\mathbb{R}^n$ nin kompakt bir alt kümesi olduğundan ve A matrisi $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}^m$ ye sürekli bir dönüşüm tanımladığından teorem 2.1.5 gereğince $f(V)$ de $\mathbb{R}^m$ nin kompakt bir alt kümesidir. Aynı zamanda A matrisi $\mathbb{R}^n$ den $\mathbb{R}^m$ ye lineer bir dönüşüm tanımlar. Lineer dönüşümler konveks kümeleri, konveks kümelere dönüştüreceğinden $V \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için $f(V)$ de $\mathbb{R}^m$ nin konveks bir alt kümesi olur. Sonuç olarak $f(V) \in \Omega_C(\mathbb{R}^m)$ olup f iyi tanımlıdır.

Şimdi 5.2.1 de tanımlanan f nin quasilineer bir operatör olduğunu gösterelim:

(1) $V_1, V_2 \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ alalım.

$$
\begin{aligned}
f(V_1 + V_2) &= A \odot (V_1 + V_2) \\
&= \{A \cdot (v_1 + v_2) : v_1 + v_2 \in V_1 + V_2\} \\
&= \{A \cdot v_1 + A \cdot v_2 : v_1 \in V_1, v_2 \in V_2\} \\
&= \{A \cdot v_1 : v_1 \in V_1\} + \{A \cdot v_2 : v_2 \in V_2\} \\
&= A \odot V_1 + A \odot V_2 \\
&= f(V_1) + f(V_2)
\end{aligned}
$$

olur.

(2) $\lambda \in \mathbb{R}$, $V \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ alalım.

$$
\begin{aligned}
f(\lambda \cdot V) &= A \odot (\lambda \cdot V) \\
&= \{A \cdot (\lambda \cdot v) : \lambda \cdot v \in \lambda \cdot V\} \\
&= \{\lambda \cdot (A \cdot v) : v \in V\} \\
&= \lambda \cdot \{A \cdot v : v \in V\} \\
&= \lambda \cdot (A \odot V) \\
&= \lambda \cdot f(V)
\end{aligned}
$$

olur.

(3) $V_1 \subseteq V_2$ olsun. Bu durumda $\forall v_1 \in V_1$ için $v_1 \in V_1$ olup $A \cdot v_1 \in f(V_1)$ için

$A \cdot v_1 \in f(V_2)$ dir. Böylece

$$\begin{aligned} f(V_1) &= \{A \cdot v_1 : v_1 \in V_1\} \\ &\subseteq \{A \cdot v_1 : v_1 \in V_2\} \\ &= f(V_2) \end{aligned}$$

bulunur.

Uyarı 5.2.4. *$\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ den $\Omega_C(\mathbb{R}^m)$ ye tanımlı her quasilineer operatöre bir matris karşılık gelmeyebilir. Bu durumu bir örnekle açıklayalım:*

Örnek 5.2.7. *$B_{\mathbb{R}^2}$,$\mathbb{R}^2$ nin birim küresi olmak üzere*

$$\widetilde{f} : \Omega_C(\mathbb{R}) \to \Omega_C(\mathbb{R}^2) \qquad , \qquad [a,b] \to \widetilde{f}([a,b]) = [a,b] \odot B_{\mathbb{R}^2} = \{\lambda \cdot B_{\mathbb{R}^2} : \lambda \in [a,b]\}$$

dönüşümü quasilineerdir. Öncelikle bu dönüşümün quasilineer olduğunu gösterelim:

(i) $[a,b], [c,d] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ alalım.

$$\begin{aligned} \widetilde{f}([a,b]+[c,d]) = \widetilde{f}([a+c,b+d]) &= [a+c,b+d] \odot B_{\mathbb{R}^2} \\ &= \{(\lambda_1+\lambda_2) \cdot B_{\mathbb{R}^2} : \lambda_1+\lambda_2 \in [a+c,b+d]\} \\ &\subseteq \{\lambda_1 \cdot B_{\mathbb{R}^2} + \lambda_2 \cdot B_{\mathbb{R}^2} : \lambda_1 \in [a,b], \lambda_2 \in [c,d]\} \\ &= \{\lambda_1 \cdot B_{\mathbb{R}^2} : \lambda_1 \in [a,b]\} + \{\lambda_2 \cdot B_{\mathbb{R}^2} : \lambda_2 \in [c,d]\} \\ &= \widetilde{f}([a.b]) + \widetilde{f}([c,d]) \end{aligned}$$

olur.

(ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $[a,b] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ alalım.

1. $\alpha \geq 0$ için

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(\alpha \cdot [a,b]) = \widetilde{f}([\alpha a, \alpha b]) &= [\alpha a, \alpha b] \odot B_{\mathbb{R}^2} \\ &= \{(\lambda \cdot \alpha) \cdot B_{\mathbb{R}^2} : \lambda \cdot \alpha \in [\alpha a, \alpha b]\} \\ &= \{\alpha \cdot (\lambda \cdot B_{\mathbb{R}^2}) : \lambda \in [a,b]\} \\ &= \alpha \cdot \{\lambda \cdot B_{\mathbb{R}^2} : \lambda \in [a,b]\} \\ &= \alpha \cdot \widetilde{f}([a,b])\end{aligned}$$

ve

2. $\alpha < 0$ için

$$\begin{aligned}\widetilde{f}(\alpha \cdot [a,b]) = \widetilde{f}([\alpha b, \alpha a]) &= [\alpha b, \alpha a] \odot B_{\mathbb{R}^2} \\ &= \{(\lambda \cdot \alpha) \cdot B_{\mathbb{R}^2} : \lambda \cdot \alpha \in [\alpha b, \alpha a]\} \\ &= \{\alpha \cdot (\lambda \cdot B_{\mathbb{R}^2}) : \lambda \in [a,b]\} \\ &= \alpha \cdot \{\lambda \cdot B_{\mathbb{R}^2} : \lambda \in [a,b]\} \\ &= \alpha \cdot \widetilde{f}([a,b])\end{aligned}$$

olur.

(iii) $[a,b] \subseteq [c,d]$ olsun.

$$\begin{aligned}\widetilde{f}([a,b]) &= \{\lambda \cdot B_{\mathbb{R}^2} : \lambda \in [a,b]\} \\ &\subseteq \{\lambda \cdot B_{\mathbb{R}^2} : \lambda \in [c,d]\} \\ &= \widetilde{f}([c,d])\end{aligned}$$

bulunur.

Ancak bu quasilineer dönüşüme bir matris karşılık gelmez. Şimdi bunu gösterelim. Kabul edelim ki bu $\widetilde{f}$ quasilineer dönüşümü, 5.2.1 de verilen kurala uygun olarak 2×1 tipinde bir matris verebilsin. (Başka tipten olma ihtimali yapısal uyumsuzluktan dolayı yoktur.) Bu durumda $[0,1] \in \Omega_C(\mathbb{R})$ için

$$\widetilde{f}([0,1]) = [0,1] \odot B_{\mathbb{R}^2} = \{v \cdot B_{\mathbb{R}^2} : v \in [0,1]\} = \{(xv, yv) : x^2 + y^2 \leq 1, v \in [0,1]\}$$

dir. Eğer bu $\widetilde{f}$ dönüşümü 2×1 tipinde bir matrisle temsil edilebiliyorsa $A = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix}$ ve $a_{11}, a_{21} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} \widetilde{f}([0,1]) &= A \odot [0,1] \\ &= \{A \cdot v : v \in [0,1]\} \\ &= \{\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{bmatrix} \cdot v : v \in [0,1]\} \\ &= \{(a_{11}v, a_{21}v) : v \in [0,1]\} \end{aligned}$$

olup bu durum $\{(a_{11}v, a_{21}v) : v \in [0,1]\} = \{(xv, yv) : x^2 + y^2 \leq 1, v \in [0,1]\}$ olmasını gerektirirdi ki bu eşitlik doğru olmadığından istenen çelişki bulunmuş olur ve ispat tamamlanır. Ayrıca yukadaki eşitliklerde yazılan "·" çarpımı, bir matrisin bir skalerle çarpımıdır.

5.3 İnterval Matrisler ve Quasilineer Operatörler

Bu kısımda öncelikle interval matrislerin genel hatlarıyla tanıtımı yapılacak ve daha sonra interval matrisler yardımıyla elde edilen quasilineer operatörler tanıtılacaktır.

Tanım 5.3.1. *[12] Her bir elemanı interval olan matrislere **interval matrisler** denir.*

Örnek 5.3.1.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [1,2] & [-1,1] \\ [0,4] & [6,8] \end{pmatrix}$$

bir interval matristir.

Bir A interval matrisinin elemanları A_{ij}, B interval matrisinin elemanları B_{ij} olsun. Eğer $\forall i, j$ için $B_{ij} \subseteq A_{ij}$ ise $B \in A$ dır.

Tanım 5.3.2. *[12] Bir A interval matrisinin **normu**,*

$$\|A\| = \max_i \sum_j |A_{ij}|$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $B \in A$ *ise bu durumda* $\|B\| \leq \|A\|$ *dır. Burada* $A_{ij} = [a_{ij}, b_{ij}]$ *olmak üzere* $|A_{ij}| = \max\{|\lambda| : \lambda \in [a_{ij}, b_{ij}]\}$ *dir.*

Tanım 5.3.3. *[12] Bir A interval matrisinin **genişliği** ve **orta noktası** sırasıyla,*

$$w(A) = \max_{i,j} w(A_{ij})$$

ve

$$m(A) = (m(A))_{ij} = m(A_{ij})$$

olarak tanımlanır. Açıkça görülür ki $m(A) \in A$ *dır. Burada* $A_{ij} = [a_{ij}, b_{ij}]$ *olmak üzere* $w(A_{ij}) = b_{ij} - a_{ij}$ *ve* $m(A_{ij}) = \frac{a_{ij}+b_{ij}}{2}$ *dir.*

Örnek 5.3.2. *Örnek 5.3.1 de verilen A matrisi için*

$$\begin{aligned}\|A\| &= \max_i\{|A_{i1}| + |A_{i2}|\} \\ &= \max\{|A_{11}| + |A_{12}|\,, |A_{21}| + |A_{22}|\} \\ &= \max\{|[1,2]| + |[-1,1]|\,, |[0,4]| + |[6,8]|\} \\ &= \max\{2+1, 4+8\} \\ &= 12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}w(A) &= \max\{w(A_{11}), w(A_{12}), w(A_{21}), w(A_{22})\} \\ &= \max\{w([1,2]), w([-1,1]), w([0,4]), w([6,8])\} \\ &= \max\{1,2,4\} \\ &= 4\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}m(A) &= m\begin{pmatrix} m([1,2]) & m([-1,1]) \\ m([0,4]) & m([6,8]) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0,5 & 0 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

bulunur.

Şimdi $m \times n$ tipinde bir interval matrisin nasıl bir quasilineer operatör tanımladığını görelim:

$m \times n$ tipinde bir interval matris $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ den $\Omega_C(\mathbb{R}^m)$ ye şu şekilde bir quasilineer operatör tanımlar:

$A_{ij} = [x_{ij}, y_{ij}]$ birer interval , $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ ve $x \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ olmak üzere

$$f:\Omega_C(\mathbb{R}^n)\to\Omega_C(\mathbb{R}^m) \quad , \quad x\to f(x)=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn}\end{pmatrix}\circledast x$$

olup buradaki " $\circledast$ " çarpımı

$$\begin{aligned} f(x) &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn}\end{pmatrix}\circledast x \qquad (5.3.1) \\ &= \{(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j,...,\sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j) : (y_1,...,y_n)\in x, a_{ij}\in A_{ij}, 1\le i\le m, 1\le j\le n\}\end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır. Burada " $\circledast$ " ile gösterilen matris çarpımı klasik matris çarpımı değildir. Fakat örneğin, $m=n=2$, $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} [1,2] & [-1,1] \\ [0,4] & [6,8]\end{pmatrix}$ olmak üzere $a_{11}=\frac{3}{2}\in A_{11}$, $a_{12}=\frac{1}{2}\in A_{12}$, $a_{21}=1\in A_{21}$, $a_{22}=7\in A_{22}$ ve $b=(b_1,b_2)\in x\subset\mathbb{R}^2$ için $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot b=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 7\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2}b_1+\frac{1}{2}b_2 \\ b_1+7b_2\end{bmatrix}$ çarpımı bilinen matris çarpımıdır ve $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2\end{bmatrix}\in f(x)$ dir.

Şimdi f nin iyi tanımlı olduğunu, yani $x\in\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için $f(x)\in\Omega_C(\mathbb{R}^m)$ olduğunu gösterelim: Bunun için ise $f(x)$ in $\mathbb{R}^m$ nin kompakt-konveks alt kümesi olduğunu göstermeliyiz.

1. *$f(x)$ konveks kümedir:*

$$y=(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j,\sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j,...,\sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j) \quad , \quad (y_1,y_2,...,y_n)\in x$$

$$z=(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}z_j,\sum_{j=1}^{n} a_{2j}z_j,...,\sum_{j=1}^{n} a_{mj}z_j) \quad , \quad (z_1,z_2,...,z_n)\in x$$

olmak üzere $y, z \in f(x)$ ve $\lambda \in [0,1]$ alalım.

$$\lambda y + (1-\lambda)z = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(\lambda y_j + (1-\lambda)z_j), ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}(\lambda y_j + (1-\lambda)z_j))$$

olur. $x \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ olduğundan x, $\mathbb{R}^n$ nin konveks bir alt kümesidir. Böylece $(y_1, y_2, ..., y_n), (z_1, z_2, ..., z_n) \in x$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$(\lambda y_1 + (1-\lambda)z_1, \lambda y_2 + (1-\lambda)z_2, ..., \lambda y_n + (1-\lambda)z_n) \in x$$

dir. Bu durumda $\lambda y + (1-\lambda)z \in f(x)$ olur ki bu $f(x)$ in konveks bir küme olması demektir.

2. *$f(x)$ kümesi $\mathbb{R}^m$ de sınırlıdır:*

$\forall y \in f(x)$ için $\|y\| \leq K$ olacak şekilde $K > 0$ sayısının mevcut olduğunu gösterebilirsek $f(x)$ in $\mathbb{R}^m$ de sınırlı bir küme olduğunu göstermiş oluruz. Şimdi

$$y = (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j) \quad , \quad (y_1, y_2, ..., y_n) \in x$$

olmak üzere $y \in f(x)$ alalım. Bu durumda

$$\|y\| = \sqrt{\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j\right)^2 + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j\right)^2 + ... + \left(\sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j\right)^2}$$

olur.

$$a_i = \max\{a_{ij} : 1 \leq j \leq n\} \quad , \quad 1 \leq i \leq m$$

dersek

$$\|y\| \leq \sqrt{a_1^2(\sum_{j=1}^{n} y_j)^2 + a_2^2(\sum_{j=1}^{n} y_j)^2) + ... + a_m^2(\sum_{j=1}^{n} y_j)^2}$$

olur. $x \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ olduğundan x, $\mathbb{R}^n$ nin sınırlı bir alt kümesidir. Böylece $(y_1, y_2, ..., y_n) \in x$ için $\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + ... + y_n^2} \leq k$ olacak şekilde $k > 0$ mevcuttur.

Ayrıca $(y_1+y_2+...+y_n)^2 \leq y_1^2+y_2^2+...+y_n^2$ olduğu göz önünde bulundurulursa $(y_1+y_2+...+y_n)^2 \leq \sum_{j=1}^{n} y_j^2 \leq k^2$ olur. Bu durumda da

$$\begin{aligned}
\|y\| &\leq \sqrt{a_1^2(\sum_{j=1}^{n} y_j)^2 + a_2^2(\sum_{j=1}^{n} y_j)^2) + ... + a_m^2(\sum_{j=1}^{n} y_j)^2} \\
&\leq \sqrt{a_1^2(\sum_{j=1}^{n} y_j^2) + a_2^2(\sum_{j=1}^{n} y_j^2) + ... + a_m^2(\sum_{j=1}^{n} y_j^2)} \\
&\leq \sqrt{a_1^2k^2 + a_2^2k^2 + ... + a_m^2k^2} \\
&= \sqrt{k^2(a_1^2 + a_2^2 + ... + a_m^2)} \\
&= k \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_m^2}
\end{aligned}$$

olur ki $K = k \cdot \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + ... + a_m^2} > 0$ sayısı mevcut olduğundan $f(x)$ kümesi $\mathbb{R}^m$ de sınırlı olur.

3. *$f(x)$ kümesi $\mathbb{R}^m$ de kapalıdır:*

   $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(y_1^n, y_2^n, ..., y_n^n) \in x$ olmak üzere $f(x)$ de keyfi bir

$$(y^n) = ((\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j^n, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j^n, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j^n))$$

dizisini alalım. Kabul edelim ki $(y^n) \to y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$ olsun. Eğer $y \in f(x)$ olduğunu gösterebilirsek $f(x)$ in $\mathbb{R}^m$ de kapalı bir küme olduğunu göstermiş oluruz.

$(y^n) \to y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in \mathbb{R}^m$ kabülünden

$$
\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j^n) &\to y_1 \\
(\sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j^n) &\to y_2 \\
&\vdots \\
(\sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j^n) &\to y_m
\end{aligned}
\tag{5.3.2}
$$

olur. x, $\mathbb{R}^n$ de kompakt bir küme olduğundan dizisel kompaktlık tanımına göre $((y_1^n, y_2^n, ..., y_n^n)) \subset x$ dizisinin yakınsak bir $((y_1^{k_n}, y_2^{k_n}, ..., y_n^{k_n}))$ alt dizisi mevcuttur. Şimdi

$$((y_1^{k_n}, y_2^{k_n}, ..., y_n^{k_n})) \to (y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*) \in x \tag{5.3.3}$$

diyelim. Ayrıca 5.3.2 de verilen diziler yakınsak olduğundan bu dizilerin her alt dizisi de yakınsak olacaktır. O halde

$$
\begin{aligned}
(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j^{k_n}) &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} (y_j^{k_n}) \to y_1 \\
(\sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j^{k_n}) &= \sum_{j=1}^{n} a_{2j} (y_j^{k_n}) \to y_2 \\
&\vdots \\
(\sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j^{k_n}) &= \sum_{j=1}^{n} a_{mj} (y_j^{k_n}) \to y_m
\end{aligned}
$$

olur. Böylece 5.3.3 den

$$\begin{aligned}
y_1 &= \sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j^* \\
y_2 &= \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j^* \\
&\vdots \\
y_m &= \sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j^*
\end{aligned}$$

olur ki $(y_1^*, y_2^*, ..., y_n^*) \in x$ olduğundan $y = (y_1, y_2, ..., y_m) \in f(x)$ olur. O halde $f(x)$, $\mathbb{R}^m$ de kapalıdır.

Sonuç olarak $f(x)$ kümesi $\mathbb{R}^m$ nin kompakt-konveks alt kümesi olduğundan $x \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ için $f(x) \in \Omega_C(\mathbb{R}^m)$ olup f iyi tanımlıdır. Şimdi ise f nin quasilineer olduğunu gösterelim:

(i) $x_1, x_2 \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ alalım. $(y_1, y_2, ..., y_n) \in x_1$ ve $(z_1, z_2, ..., z_n) \in x_2$ için

$$x_1 + x_2 = \{(y_1 + z_1, y_2 + z_2, ..., y_n + z_n) : (y_1, y_2, ..., y_n) \in x_1, (z_1, z_2, ..., z_n) \in x_2\}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
f(x_1 + x_2) = \{(&\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(y_j + z_j), \sum_{j=1}^{n} a_{2j}(y_j + z_j), ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}(y_j + z_j)) \\
&: (y_1 + z_1, ..., y_n + z_n) \in x_1 + x_2, a_{ij} \in A_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \\
&= \{(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} y_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj} y_j) + (\sum_{j=1}^{n} a_{1j} z_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j} z_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj} z_j) \\
&: (y_1, y_2, ..., y_n) \in x_1, (z_1, z_2, ..., z_n) \in x_2, a_{ij} \in A_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}
\end{aligned}$$

olur. Minkowski toplamından bu son eşitlik

$$\{(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j) : (y_1, ..., y_n) \in x, a_{ij} \in A_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$
$$+\{(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j) : (y_1, ..., y_n) \in x, a_{ij} \in A_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$$

şeklinde yazılır. Böylece

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

olur.

(ii) $\lambda \in \mathbb{R}$ ve $x \in \Omega_C(\mathbb{R}^n)$ alalım.

$$\lambda \cdot x = \{(\lambda y_1, \lambda y_2, ..., \lambda y_n) : (y_1, y_2, ..., y_n) \in x, \lambda \in \mathbb{R}\}$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned} f(\lambda x) &= \{(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}(\lambda y_j), \sum_{j=1}^{n} a_{2j}(\lambda y_j), ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}(\lambda y_j)) \\ &: \quad \lambda y_1, \lambda y_2, ..., \lambda y_n) \in \lambda x, a_{ij} \in A_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \\ &= \{\lambda \cdot (\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j) \\ &: (y_1, y_2, ..., y_n) \in x, a_{ij} \in A_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \\ &= \lambda \cdot \{(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}y_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}y_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}y_j) \\ &: (y_1, y_2, ..., y_n) \in x, a_{ij} \in A_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \\ &= \lambda \cdot f(x) \end{aligned}$$

olur.

(iii) $x_1 \subseteq x_2$ iken $f(x_1) \subseteq f(x_2)$ olacağı açıktır.

Böylece f dönüşümü quasilineerdir. Nihayetinde $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ den $\Omega_C(\mathbb{R}^m)$ ye bir quasilineer operatör tanımlamış oluruz.

Yukarıda 5.3.1 eşitliğiyle tanımlanan " $\circledast$ " çarpımı kullanılarak $m \times n$ tipinde bir interval matrise $\mathbb{R}^n$ den $\Omega_C(\mathbb{R}^m)$ ye tanımlı bir quasilineer dönüşüm karşılık geleceğini de kolayca söyleyebiliriz. Bu durumu şu sonuçla ifade ederiz:

Sonuç 5.3.1. *$m \times n$ tipinde bir interval matris $\mathbb{R}^n$ den $\Omega_C(\mathbb{R}^m)$ ye şu şekilde bir quasilineer operatör tanımlar:*

$x = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ olsun. $A = [A_{ij}]_{m\times n}$, $1 \leq i \leq m$, $1 \leq j \leq n$ ve $A_{ij} = [a_{ij}, b_{ij}]$ intervali verilsin.

$$T : \mathbb{R}^n \to \Omega_C(\mathbb{R}^m),\ \ x = (x_1, x_2, ..., x_n) \to T(x) = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \circledast \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

olup buradaki " $\circledast$ " çarpımı

$$\begin{aligned} T(x) &= \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \cdots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \cdots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix} \circledast \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \\ &= \{(\sum_{j=1}^{n} a_{1j}x_j, \sum_{j=1}^{n} a_{2j}x_j, ..., \sum_{j=1}^{n} a_{mj}x_j) : a_{ij} \in A_{ij}, 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlıdır.

$m\times n$ tipinde bir interval matrise $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ den $\Omega_C(\mathbb{R}^m)$ ye quasilineer bir dönüşümün karşılık geldiğini gösterdik. Ancak bu durumun tersi doğru değildir.

Uyarı 5.3.1. $\Omega_C(\mathbb{R}^n)$ *den* $\Omega_C(\mathbb{R}^m)$ *ye tanımlı her quasilineer dönüşüme bir matris karşılık gelmeyebilir. Şöyle ki örnek 5.2.7 i hatırlayalım. Buradaki* $\widetilde{f}$ *quasilineer dönüşümüne* 2×1 *tipinde bir (klasik) matris karşılık gelmediğini söylemiştik. Her reel matrisi bir interval matris olarak görebileceğimizden bu* $\widetilde{f}$ *quasilineer dönüşümüne de bir interval matris karşılık gelemeyeceğini söyler.*

Genel olarak $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ nin bir elemanının (örneğin bir dairenin), 5.3.1 şeklinde $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ den $\Omega_C(\mathbb{R}^2)$ ye tanımlanan interval matris dönüşümü altındaki görüntüsünü belirlemek (bildiğimiz geometrik şekillerden birine dönüşebildiğini görmek) zahmetli bir iş olsa da bu tip interval matris dönüşümlerinin uygulamadaki yerini görmek açısından önemlidir.

Şimdi bu amaç doğrultusunda 2×2 tipindeki bir interval matrisin, öncelikle tek nokta kümelerini, sonra dikdörtgensel bölgeleri ve daha sonra da dairesel bölgeleri nasıl bir elemana dönüştürdüğünü görelim:

Örnek 5.3.3.

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} [0.5, 1] & [-1, 0] \\ [-1, 1] & \{0\} \end{pmatrix}$$

olmak üzere 5.3.1 eşitliğiyle tanımlanan

$$f : \Omega_C(\mathbb{R}^2) \to \Omega_C(\mathbb{R}^2)$$

dönüşümü verilsin. $x = \{(1, 2)\} \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ *elemanının* f *dönüşümü altındaki görüntüsü*

$$f(x) = \{(a_{11}y_1 + a_{12}y_2, a_{21}y_1 + a_{22}y_2) : (y_1, y_2) = (1, 2), a_{11} \in [0.5, 1], a_{12} \in [-1, 0],$$
$$a_{21} \in [-1, 1], a_{22} = 0\}$$

şeklindedir. $f(x)$ kümesini daha iyi tanımak adına bu kümenin birkaç elemanını yazalım:

$(-1.5,-1) \in f(x), (-0.5,-1) \in f(x), (-1.5,1) \in f(x), (-0.25,0) \in f(x), (1,1) \in f(x), ...$

Burada görülür ki $f(x)$ kümesini oluşturan elemanların birinci bileşenleri

$$A_{11}y_1 + A_{12}y_2 = [0.5,1] \cdot 1 + [-1,0] \cdot 2 = [-1.5,1]$$

aralığında iken ikinci bileşenleri ise

$$A_{21}y_1 + A_{22}y_2 = [-1,1] \cdot 1 + \{0\} \cdot 2 = [-1,1]$$

aralığındadır. Böylece

$$f(x) = \{(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2 : -1.5 \leq y_1 \leq 1, -1 \leq y_2 \leq 1\}$$

olup $f(x)$ kümesi dikdörtgensel bir bölgedir.

Şimdi ise $x = \{(a_1,a_2) : |a_1| \leq 1, |a_2| \leq 1\} \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ elemanının f dönüşümü altındaki görüntüsüne bakalım.

$$f(x) = \{(a_{11}y_1 + a_{12}y_2, a_{21}y_1 + a_{22}y_2) : y_1,y_2 \in [-1,1], a_{11} \in [0.5,1], a_{12} \in [-1,0], \\ a_{21} \in [-1,1], a_{22} \in \{0\}\}$$

Bu kümenin elemanlarını daha açık yazacak olursak

$\{(0.5,1) \in f(x), (0,-0.75) \in f(x), (-0.5,0.8) \in f(x), (0,1) \in f(x), (-2,-1) \in f(x), ...$

şeklindedir. Burada görülür ki $f(x)$ kümesini oluşturan elemanların birinci bileşenleri

$$A_{11}y_1 + A_{12}y_2 = [0.5,1] \cdot [-1,1] + [-1,0] \cdot [-1,1] = [-2,2]$$

aralığında iken ikinci bileşenleri ise

$$A_{21}y_1 + A_{22}y_2 = [-1,1] \cdot [-1,1] + \{0\} \cdot [-1,1] = [-1,1]$$

aralığındadır. O halde

$$f(x) = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : -2 \leq y_1 \leq 1, -1 \leq y_2 \leq 1\}$$

olup $f(x)$ kümesi dikdörtgensel bir bölgedir.

Yukarıda verilen örnekte şöyle bir soru akla gelir. Acaba "5.3.1 eşitliğiyle tanımlı interval dönüşümleri elemanların şekillerini korur mu?" Aşağıda vereceğimiz örnek bu soruya cevap niteliğindedir:

Örnek 5.3.4.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

reel matrisini alalım. (Her reel matris bir interval matris olarak görülebilir.) 5.3.1 eşitliğiyle tanımlanan

$$f : \Omega_C(\mathbb{R}^2) \to \Omega_C(\mathbb{R}^2)$$

dönüşümü verilsin. $x = \{(y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2 : y_1^2 + y_2^2 \leq 1\} \in \Omega_C(\mathbb{R}^2)$ elemanının f dönüşümü altındaki görüntüsü

$$f(x) = \{(a_{11}y_1 + a_{12}y_2, a_{21}y_1 + a_{22}y_2) : (y_1, y_2) \in x, a_{11} = a_{21} = a_{22} = 1, a_{12} = 0\}$$

olup

$$\begin{aligned} f(x) &= \{(1 \cdot y_1 + 0 \cdot y_2, 1 \cdot y_1 + 1 \cdot y_2) : y_1^2 + y_2^2 \leq 1\} \\ &= \{(y_1, y_1 + y_2) : y_1^2 + y_2^2 \leq 1\} \end{aligned}$$

şeklindedir. Şimdi $f(x)$ in düzlemde nasıl bir geometrik şekil belirttiğini gösterelim:

$$(z_1, z_2) = (y_1, y_1 + y_2)$$

diyelim.

$$z_1 = y_1$$
$$z_2 = y_1 + y_2$$

olur. Buradan

$$y_2 = z_2 - z_1$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} y_1^2 + y_2^2 &= z_1^2 + (z_2 - z_1)^2 \\ &= z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 + z_1^2 \\ &= 2z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 \end{aligned}$$

olur. $y_1^2 + y_2^2 \leq 1$ *olduğu göz önüne alınırsa*

$$2z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 \leq 1$$

yazılır. Önce $2z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 = 1$ *denklemini ele alırsak bu denklem döndürülmüş bir* ***elips*** *denklemidir. Buna göre* $2z_1^2 + z_2^2 - 2z_1z_2 \leq 1$ *eşitsizliği bir elips ve bu elipsin iç kısmını belirtir.*

Sonuç 5.3.2. *İnterval matris dönüşümleri tek nokta kümelerini, çubukları ve dikdörtgensel bölgeleri korurlar. Fakat örnek 5.3.4 den de görüldüğü gibi bu dönüşümler dairesel bölgeleri dairesel bölgelere dönüştürmeyebilir. Yani interval matris dönüşümleri şekli* ***deforme edebilirler.***

6. KAYNAKLAR

[1] **S. M. Aseev,** *Quasilinear operators and their application in the theory of multivalued mappings,* Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics, Issue 2, 1986, p. 23-52.

[2] **S. Markov,** *On the algebraic properties of convex bodies and some applications,* J. Convex Analysis 7, 2000, p. 129-166.

[3] **S. Markov,** *On quasilinear spaces of convex bodies and intervals,* J. Comput. Appl. Math. 162, 2004, p. 93-112.

[4] **E. Kreyszig,** *Introductory functional analysis with applications*, John Wiley and Sons, New York, 1973.

[5] **A. Wilansky,** *Modern methods in topological vector spaces,* Mc Graw-Hill Int. Book Comp., New York, USA, 1978

[6] **V. Lakshmikantham, T. Gnana Bhaskar, J. Vasundhara Devi,** *Theory of set differential equations in metric spaces,* Cambridge Scientific Publishers, Cambridge, 2006.

[7] **K. Hoffman, R. Kunze,** *Linear algebra,* Prentice Hall (Second Edition), New Jersey, 1971.

[8] **I. J. Maddox,** *Elements of functional analysis*, Cambridge University Press (Second Edition), Cambridge, 1988.

[9] **Y. Yılmaz, S. Çakan, Ş. Aytekin,** *Topological quasilinear spaces,* Absract and Applied Analysis, vol.2012, Article ID 951374, 10 paces, 2012. doi:10.1155/2012/951374.

[10] **F.Temizsu,** *Bazı küme değerli fonksiyon uzayları ve bu uzaylar arasındaki operatörlerin analizi üzerine,* İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, Malatya, 2012.

[11] **H. H. Hacısalihoğlu,** *Lineer Cebir,* Cilt-1, Ankara, 2000.

[12] **Ramon E. Moore, R. Baker Kearfott, Michael J. Cloud,** *Introduction to interval analysis,* Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, 2009.

ÖZGEÇMİŞ

03/09/1990 tarihinde Malatya'da doğdu. İlk, orta ve lise öğrenimini Malatya'da tamamladı. 2008 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve Haziran 2012'de öğrenimini tamamladı. Eylül 2012'de İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans öğrenimine başladı.