T. C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

DİZİLERİN YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Ayşe KOÇ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2012

Tezin Başlığı : Dizilerin Yakınsaklığı Üzerine

Tezi Hazırlayan : Ayşe KOÇ

Sınav Tarihi : 29.06.2012

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN(Danışman)	(İnönü Üniversitesi)	________________
Prof. Dr. Bilal ALTAY	(İnönü Üniversitesi)	________________
Doç. Dr. Yılmaz YILMAZ	(İnönü Üniversitesi)	________________

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Asım KÜNKÜL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum " Dizilerin Yakınsaklığı Üzerine" başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Ayşe KOÇ

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

DİZİLERİN YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Ayşe KOÇ

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

43+vi sayfa

2012

Danışman: Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN

Bu tez dört bölümden oluşmaktadır. İlk bölüm giriş kısmına ayrılmıştır. İkinci bölümde sonraki bölümlerde kullanabileceğimiz bazı temel tanım ve teoremlere yer verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bazı yakınsaklık çeşitleri incelenmiştir. İlk olarak Banach limiti tanımlanmış ve bu tanıma bağlı olarak hemen hemen yakınsaklık kavramı verildi. Sonra $\sigma-$yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık, rough yakınsaklık ve rough istatistiksel yakınsaklıktan bahsedilmiştir.

Dördüncü bölümde, dizilerin çekirdeği üzerinde durulmuştur. İlk olarak Knopp Çekirdek Teoremi ile bir dizinin $r-$limit cümleleri ve bilinen çekirdeği arasındaki ilişki verilmiştir. Daha sonra $B-$çekirdek, istatistiksel çekirdek ve Rough çekirdek kavramları verildi.

ANAHTAR KELİMELER: Banach limit, Hemen hemen yakınsaklık, $\sigma-$yakınsaklık, İstatistiksel yakınsaklık, *Knopp* Çekirdek Teoremi, Rough limit, Rough çekirdek.

ABSTRACT

MSc Thesis

ON THE CONVERGENCE OF SEQUENCES

Ayşe KOÇ

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

43+vi pages

2012

Supervisor: Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN

This thesis consist of four chapters. The first chapter is devoted to the introduction. In the second chapter, some fundamental definitions and theorems which will be used in the later chapters are given.

In the third chapter, some convergence types are investigated. First, the concept of Banach limit is given and using this concept, almost convergence sequences are studied. Then $\sigma-$convergence, statistical convergence, rough convergence and rough statistical convergence are investigated.

In the last chapter, core of real sequences are introduced. The concept of $K - core$ and Knopp's Core Theorem are given. In addition, the relations between $r-$limit sets and ordinary core of a sequence are investigated. Finally, the concepts of $B - core$, statistical core and Rough core are studied.

KEY WORDS: Banach limit, Almost convergence, $\sigma-$convergence, Statistical convergence, $K - core$ and Knopp's Core Theorem, Rough limit, Rough core.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın belirlenmesi ve yürütülmesinde her türlü yardım ve desteğini esirgemeden beni yönlendiren tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Hüsamettin ÇOŞKUN'a, çalışmalarımız sırasında değerli bilgilerini benimle paylaşan ve tez yazım esnasında her ihtiyaç duyduğumda bana yardımcı olan çok değerli hocam Prof. Dr. Bilal ALTAY'a, teşekkürü bir borç bilirim. Ayrıca bu çalışmanın yazılmasında bana çok büyük katkısı olan, hayatım boyunca desteklerini gördüğüm aileme ve özellikle maddi, manevi her anlamda yanımda olan kardeşlerim Semra, Meral ve Zafer'e en içten teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGELER

$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar cümlesi,
$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi,
w	:	Reel terimli bütün dizilerin uzayı,
$(C,1)$	:	Birinci mertebeden Cesàro matrisi,
c	:	Reel terimli yakınsak dizilerin uzayı,
c_0	:	Reel terimli sıfıra yakınsak dizilerin uzayı,
ℓ_p	:	$(1 \leq p < \infty)$ için p mutlak toplanabilen dizilerin uzayı,
ℓ_∞	:	Reel terimli sınırlı dizilerin uzayı,
F	:	Reel terimli hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı,
F_0	:	Reel terimli sıfıra hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı,
V_σ	:	Reel terimli $\sigma-$ yakınsak dizilerin uzayı,
$V_{0\sigma}$	:	Reel terimli sıfıra $\sigma-$ yakınsak dizilerin uzayı,
χ_K	:	K cümlesinn karakteristik fonksiyonu,
$st-\lim$	:	İstatistiksel limit,
$st-\limsup$	:	İstatistiksel üst limit,
$st-\liminf$	:	İstatistiksel alt limit,
$\delta(K)$	:	K cümlesinin (doğal) yoğunluğu,
L_x	:	x dizisinin alışılmış limit noktalarının cümlesi,
$\wedge_x$	:	x dizisinin istatistiksel limit noktalarının cümlesi,
Γ_x	:	x dizisinin istatistiksel değme noktalarının cümlesi,
$st-LIM^r x$	:	x dizisinin r-istatistiksel limit noktaları cümlesi,
$LIMINF^r x$	:	x dizisinin rough limit inferiyoru,
$LIMSUP^r x$	:	x dizisinin rough limit superiyoru.

1. GİRİŞ

Dizilerin bilinen yakınsaklığından sonra Lorentz [**1**] (1948), Banach limitleri yardımıyla bir dizinin hemen hemen yakınsaklığını tanımlamış ve hemen hemen yakınsak dizileri karakterize etmiştir. Raimi [**2**], özel durumda Banach limiti olan, $\sigma-$ortalamaları kullanarak $\sigma-$yakınsak dizileri tanımlamış ve karakterize etmiştir.

Reel sayı dizisi için bilinen yakınsaklık kavramı, bağımsız olarak Fast [**3**] ve Schoenberg [**4**] tarafından istatistiksel yakınsaklığa genişletildi. Genel olarak istatistiksel yakınsaklık, alışılmış yakınsaklığın özelliklerini sağlar. Fridy ve Orhan [**5**] bir dizinin istatistiksel infimum ve supremum kavramlarını vererek, istatistiksel çekirdeğini tanımladılar.

Ölçüye göre yakınsaklık kavramının özel bir hali olan istatistiksel yakınsaklık kavramından sonra bu alandaki çalışmalar hem hız kazanmış hem de genişlemiştir [**5**], [**6**], [**7**].

Rough yakınsaklık kavramı ve bir dizinin roough limit infimum ve supremum tanımları ilk defa Phu [**8**] (2001) tarafından verilmiştir. Son zamanlarda Aytar [**9**] (2008), Rough istatistiksel yakınsaklığı tanımlamış ve bununla ilgili bazı sonuçlar ortaya koymuştur.

Biz bu çalışmamızda; yukarıda sözünü ettiğimiz kavramlarla ilgili yapılan çalışmaların bazılarını derleyip düzenledik.

2. TEMEL TANIM VE KAVRAMLAR

Bu bölümde, daha sonra kullanacağımız temel tanım ve teoremler verildi.

2.1. Temel Tanımlar

TANIM 2.1.1. [**10**] X boş olmayan bir cümle olmak üzere,

$$+ \ : X \times X \longrightarrow X \ , \ (x, y) \longrightarrow x + y$$

ve

$$\cdot \ : \mathbb{R} \times X \longrightarrow X, \quad (\lambda, x) \longrightarrow \lambda.x$$

fonksiyonları her $x, y, z \in X$ ve $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ için

l1) $x + y = y + x$
l2) $(x + y) + z = x + (y + z)$
l3) $x + \theta = x$ olacak şekilde bir $\theta \in X$ var
l4) $x + (-x) = \theta$ olacak şekilde bir $-x \in X$ var
l5) $1.x = x$
l6) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$
l7) $(\lambda + \mu) x = \lambda x + \mu x$
l8) $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu) x$

şartlarını sağlıyor ise, X cümlesine $\mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzay veya reel lineer uzay denir. Biz reel lineer uzay yerine lineer uzay ifadesini kullanacağız. Reel terimli bütün dizilerin cümlesi w ile gösterilir. w koordinatsal toplam ve skalerle çarpma işlemi diye bilinen $x, y \in w$; $\lambda \in \mathbb{R}$ için $(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$ ve $\lambda(x_n) = (\lambda x_n)$ işlemleriyle lineer uzaydır.

Y, X lineer uzayının bir alt cümlesi olsun. Eğer her $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ve her $y_1, y_2 \in Y$ için $\lambda y_1 + \mu y_2 \in Y$ ise Y ye X uzayının bir altuzayı denir. w uzayının her altuzayına bir dizi uzayı denir.

TANIM 2.1.2. [**11**] X, bir lineer uzay ve M de X uzayının boş olmayan bir alt cümlesi olsun. M deki vektörlerin bütün lineer kombinasyonlarının cümlesine M‘ nin gereni (lineer hull) denir ve $span\,(M)$ veya $hull\,(A)$ ile gösterilir.

TANIM 2.1.3. [**11**] X, bir lineer uzay olmak üzere, $f : X \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümüne fonksiyonel denir. Verilen bir f fonksiyoneli ve her $x, y \in X$ için,

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y)$$

ise f ye alttoplamsal,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

ise toplamsaldır denir.

Her $\alpha \geq 0$ ve $x \in X$ için $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ ise f fonksiyoneline homojendir denir. Eğer homojen bir fonksiyonel alttoplamsal ise altlineer, toplamsal ise lineerdir denir.

Tanım 2.1.4. [**10**] **(Metrik Uzay)** X boş olmayan bir cümle olsun. $d : X \times X \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y, z \in X$ için;

M1) $d(x,y) \geq 0$,

M2) $d(x,y) = 0 \Longleftrightarrow x = y$,

M3) $d(x,y) = d(y,x)$,

M4) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$

şartlarını sağlıyor ise d fonksiyonuna X üzerinde bir metrik, (X,d) ikilisine de bir metrik uzay denir. w lineer uzayı;

$$d(x,y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \frac{|x_n - y_n|}{(1 + |x_n - y_n|)}$$

ile bir metrik uzaydır.

Tanım 2.1.5. [**10**] X bir cümle olsun. X üzerinde tanımlanan $\preceq$ bağıntısı $x, y, z \in X$ için;

1) $x \preceq x$,

2) $x \preceq y$ ve $y \preceq x$ ise $x = y$,

3) $x \preceq y$ ve $y \preceq z$ ise $x \preceq z$

şartlarını sağlar ise $\preceq$ bağıntısına X üzerinde bir kısmi sıralama bağıntısı denir. Bu durumda X cümlesine kısmi sıralı cümle denir. Kısmi sıralı bir X cümlesi için;

$$x, y \in X \Longrightarrow x \preceq y \text{ veya } y \preceq x$$

özelliği geçerli ise tam sıralı cümle denir.

Teorem 2.1.1 (Hahn-Banach Teoremi). [**10**] *X bir lineer uzay, M, X uzayının bir alt uzayı ve $p : X \longrightarrow \mathbb{R}$ altlineer fonksiyonel olsun. f, M üzerinde reel değerli lineer bir fonksiyonel ve her $x \in M$ için*

$$f(x) \leq p(x)$$

oluyorsa, bu durumda f fonksiyonelinin X uzayına bir g lineer genişlemesi mevcuttur, öyleki her $x \in X$ için

$$g(x) \leq p(x)$$

ve ayrıca her $x \in M$ için

$$f(x) = g(x)$$

dir.

Tanım 2.1.6. [**10**] X bir lineer uzay ve $\|.\| : X \longrightarrow \mathbb{R}$ olsun. Eğer $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}$ için;

n1) $\|x\| = 0 \iff x = 0,$

n2) $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|,$

n3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şartları sağlanıyorsa, $\|.\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir norm ve $(X, \|.\|)$ ikilisine de normlu uzay denir.

Tanım 2.1.7. [**10**] X bir normlu uzay ve (x_k) da bu uzayda bir dizi olsun.

1) Eğer X uzayı,

$$\lim_{k \longrightarrow \infty} \|x_k - x\| = 0$$

olacak şekilde bir x elemanı içeriyorsa, (x_k) dizisi x noktasında yakınsaktır denir. Bu durum $x_k \longrightarrow x$ ile gösterilir ve x noktasına (x_k) dizisinin limiti adı verilir.

2) Eğer her $\varepsilon > 0$ sayısı ve $n, k > N$ için,

$$\|x_n - x_k\| < \varepsilon$$

olacak şekilde bir N sayısı varsa, (x_k) dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Tanım 2.1.8. [**10**] $(X, \|.\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi yakınsak ise, X uzayına tam normlu uzay veya Banach uzayı denir.

Dizi uzayları teorisinde sıklıkla kullanılan ve *standart dizi uzayları* olarak adlandırılan dizi uzayları;

$$\begin{aligned}
\ell_\infty &= \left\{ x = (x_k) : \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| < \infty \right\} \\
c &= \left\{ x = (x_k) : \exists\, l \in \mathbb{R} \quad \text{öyleki } \lim_k |x_k - l| = 0 \right\} \\
c_0 &= \left\{ x = (x_k) : \lim_k |x_k| = 0 \right\} \\
\ell_p &= \left\{ x = (x_k) : \sum_k |x_k|^p < \infty \right\}
\end{aligned}$$

dır. ℓ_∞, c ve c_0 uzayları;

$$\|x\|_\infty = \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k|$$

normu ile ve ℓ_∞ için ℓ_p uzayı;

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=0}^{\infty} |x_k|^p\right)^{1/p}$$

normu ile Banach uzaylardır. Bu uzaylardan elde edilebilen bazı dizi uzayları; $s_n = \sum_k x_k$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} bs &= \{x = (x_k) : (s_n) \in \ell_\infty\} \\ cs &= \{x = (x_k) : (s_n) \in c\} \\ bv &= \left\{x = (x_k) : \sum_k |x_k - x_{k+1}| < \infty\right\} \end{aligned}$$

dir. bs ve cs uzayları;

$$||x||_{bs} = \sup_n |s_n|$$

normu ile bv ve $bv_0 = bv \cap c_0$ uzayları da;

$$\begin{aligned} ||x||_{bv} &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| + lim x_k \\ ||x||_{bv_0} &= \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k+1}| \end{aligned}$$

normları ile Banach uzaylarıdır.

Tanım 2.1.9. **[10]** $I \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı, reel değerli fonksiyonların cümlesi $F(I)$ olsun. $(f_n) \subseteq F(I)$ dizisine fonksiyon dizisi veya değişken terimli dizi denir.

Tanım 2.1.10. **[10]** (f_n) dizisinin $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde bir f fonksiyonuna noktasal yakınsak olması için gerek ve yeter şart ; $\forall\varepsilon > 0$ ve her bir $x \in I$ için $\exists n_0$ öyleki $\forall n > n_0$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dir.

Tanım 2.1.11. **[10]** (f_n) dizisinin $I \subseteq \mathbb{R}$ aralığı üzerinde bir f fonksiyonuna düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart; $\forall\varepsilon > 0$ için $\exists n_0$ öyleki $\forall n > n_0$ ve $\forall x \in I$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ dir.

2.2. Matris Dönüşümleri

TANIM 2.2.1. $A = (a_{nk})$ reel terimli sonsuz bir matris $x = (x_k)$ bir dizi olsun. Eğer her n için,

$$A_n(x) = \sum_k a_{nk} x_k$$

serileri yakınsak ise, $(A_n(x))$ dizisine (x_k) dizisinin A matrisi ile elde edilen *dönüşüm dizisi* denir.

X, Y herhangi iki dizi uzayı ve A da sonsuz bir matris olsun. Eğer her $x \in X$ için $Ax = (A_n(x)) \in Y$ ise, A matrisi X uzayından Y uzayına bir matris dönüşümü denir. X uzayından Y uzayına tanımlı bütün matrislerin sınıfı (X, Y) ile gösterilir. Eğer Ax dönüşüm dizisi mevcut ve bir l değerine yakınsak ise x dizisi l ye $A-$toplanabilirdir denir ve $A - \lim x = l$ yazılır. Toplamı ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı $(X, Y; p)$ ile gösterilir. Özel olarak $X = Y = c$ alınırsa $A \in (c, c)$ matrisine konservatif matris, $A \in (c, c; p)$ matrisine regüler matris denir. Bir A matrisinin regülerlik şartları *Silverman-Toeplitz Teoremi* olarak bilinen aşağıdaki teoremle verildi.

TEOREM 2.2.1. **[10]** ***(Silverman-Toeplitz Teoremi)*** *Bir A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart*

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_n \textstyle\sum_k |a_{nk}| < \infty, \\ \lim_n a_{nk} &= 0\ ,\ \textit{her } k \ \textit{ için}\ , \\ \lim_n \textstyle\sum_k a_{nk} &= 1 \end{aligned}$$

şartlarını sağlamasıdır.

TANIM 2.2.2. **[10]** (q_n) , elemanlarının hepsi sıfır olmayan, pozitif sayıların bir dizisi ve

$$Q_n = q_1 + q_2 + ... + q_n, \quad n = 1, 2, ...$$

olsun. Bu durumda;

$$t_n = \frac{q_1 x_1 + q_2 x_2 + ... + q_n x_n}{Q_n}$$

ile tanımlı (t_n) dönüşümüne, x' in Riesz dönüşümü denir. Bu dönüşüme karşılık gelen Riesz matrisi,

$$r_{nk} = \begin{cases} \frac{q_k}{Q_n} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

ile verilir. Eğer her n için $q_n = 1$ alınırsa, Riesz matrisi birinci mertebeden Cesáro matrisi denilen ve $(C, 1)$ ile gösterilen

$$c_{nk} = \begin{cases} \frac{1}{n+1} & , \quad k \leq n \\ 0 & , \quad k > n \end{cases}$$

matrisine indirgenir. Cesáro matrisi regüler matrislere bir örnek olarak verilebilir.

3. YAKINSAKLIK ÇEŞİTLERİ

3.1. Banach Limiti ve Hemen Hemen Yakınsaklık

Bu bölümde Banach limiti ve buna bağlı olarak hemen hemen yakınsaklık kavramı verilmiştir. Hahn Banach teoreminin reel değerli bütün sınırlı dizilerin uzayı olan ℓ_∞ lineer uzayına bir uygulaması, Banach limit kavramının doğmasına yol açmıştır. Bu kavram ilk olarak Banach [**12**] tarafından tanıtıldı.

Tanım 3.1.1. [**13**] (*Banach Limiti*) $L : \ell_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ sürekli ve lineer bir fonksiyon olsun. Eğer

B1) Her $n = 0, 1, ...$ için $x_n \geq 0$ olmak üzere $L(x) \geq 0$,
B2) $Dx = D(\{x_n\}) = \{x_{n+1}\}$ olmak üzere her $x \in \ell_\infty$ için $L(x) = L(Dx)$,
B3) $e = (1, 1, ...)$ olmak üzere $L(e) = 1$

şartlarını sağlar ise L' ye bir Banach limiti denir.

Bu çalışma boyunca bütün Banach limitlerinin cümlesi α ile gösterilecektir.

Teorem 3.1.1. *L bir Banach limiti ise bütün $x \in \ell_\infty$ için*

$$\liminf_n x_n \leq L(x) \leq \limsup_n x_n \qquad (2.1)$$

dir.

Buna bağlı olarak eğer x yakınsak bir dizi ise her $L \in \alpha$ için

$$L(x) = \lim_n x_n$$

olur ve dolayısıyla yakınsak bir dizinin bütün Banach limitleri çakışıktır. Fakat Banach limitleri çakışık olup, yakınsak olmayan diziler de vardır. Örneğin yakınsak olmayan $x = (1, 0, 1, 0, ..)$ dizisi alındığında her $L \in \alpha$ için;

$$\begin{aligned} L(x) &= \tfrac{1}{2}[L(x) + L(Dx)] = \tfrac{1}{2}L(x + Dx) \\ &= \tfrac{1}{2}L(e) = \tfrac{1}{2} \end{aligned}$$

olduğundan bu dizinin bütün Banach limitleri çakışıktır. Banach limitleri çakışık olan dizileri karakterize etmek için Lorentz [**1**];

$p : \ell_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ olmak üzere;

$$(2.2) \qquad p(x) = \inf_k \limsup_j \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} x_{n_{i+j}}$$

fonksiyonelini tanımladı. Bu fonksiyonel aynı zamanda Banach limitlerinin varlığı hakkında da bilgi verir. p altlineer fonksiyoneli hakkında aşağıdaki teoremler bilinir.

Teorem 3.1.2. *$L \in \alpha$ ve $x \in \ell_\infty$ için*

$$\liminf x_n \leq -p(-x) \leq L(x) \leq p(x) \leq \limsup x_n$$

dır.

Teorem 3.1.3. *Bir $x \in \ell_\infty$ dizisinin bütün Banach limitlerinin çakışması için gerek ve yeter şart $p(x) = -p(-x)$ olmasıdır.*

Bu teorem hemen hemen yakınsak dizileri karakterize etmek için Lorentz'e [**1**] kaynak olmuştur.

Tanım 3.1.2. [**1**] *(Hemen Hemen Yakınsak Dizi)* Sınırlı bir x dizisinin bütün Banach limitleri çakışık ise x' e hemen hemen yakınsak dizi denir.
Hemen hemen yakınsak bütün dizilerin uzayı F, sıfıra hemen hemen yakınsak dizilerin uzayı da F_0 ile gösterilir. Eğer x dizisi bir b değerine hemen hemen yakınsak ise $F - \lim x = b$ yazılır. Teorem 3.1.3 den dolayı p yardımıyla F;

$$F = \{x \in \ell_\infty : p(x) = -p(-x)\}$$

şeklinde karakterize edilir.

Teorem 3.1.4. [**1**] *$F - \lim x = b$ olması için gerek ve yeter şart n' ye göre düzgün olarak*

$$\lim_m \frac{1}{m+1} \sum_{i=0}^{m} x_{n+i} = b$$

olmasıdır.

Tanım 3.1.3. Eğer $A \in (F, c; p)$; yani her $x \in F$ için $Ax \in c$ ve

$$F - \lim x = \lim Ax$$

ise, A matrisine *kuvvetli regüler matris* denir.

Teorem 3.1.5. [**1**] *Regüler bir A matrisinin kuvvetli regüler olması için gerek ve yeter şart*

$$\lim_n \sum_k |a_{n,k} - a_{n,k+1}| = 0$$

olmasıdır.

TANIM 3.1.4. Eğer $A \in (c, F; p)$ ise A matrisine hemen hemen regüler matris denir.

TEOREM 3.1.6. *Bir A matrisinin hemen hemen regüler olması için gerekli ve yeterli şartlar*

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_n \sum_k |a_{nk}| < \infty, \\ F - \lim_n a_{nk} &= 0, \text{ her } k \text{ için,} \\ F - \lim_n \sum_k a_{nk} &= 1 \end{aligned}$$

dır.

TANIM 3.1.5. Eğer her $x \in F$ için $f - \lim Ax = f - \lim x$ ise o zaman A, $F-$regülerdir, denir ve $A \in (F, F; p)$ ile gösterilir.

TEOREM 3.1.7. *A matrisinin F-regüler olması için gerek ve yeter şart $A-$hemen hemen regülerdir ve*

$$\lim_p \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{p+1} \left| \sum_{i=0}^{p} (a_{n+i,k} - a_{n+i,k+1}) \right| = 0, \quad i\text{' de düzgün olarak}$$

olmasıdır.

3.2. $\sigma-$yakınsaklık

TANIM 3.2.1. **[14]** $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ bire-bir bir dönüşüm olsun. Eğer $\phi : \ell_\infty \longrightarrow \mathbb{R}$ lineer ve sürekli fonksiyoneli aşağıdaki şartları sağlıyorsa ϕ fonksiyoneline bir $\sigma-$ limit (ortalama) denir.

i) Her n için $x_n \geq 0$ ise $\phi(x) \geq 0$,

ii) $e = (1, 1, 1, ...)$ için $\phi(e) = 1$,

iii) Her $x \in \ell_\infty$ için $\phi\left[\left(x_{\sigma(n)}\right)\right] = \phi(x)$.

Bütün $\sigma-$ ortalamaların cümlesi M_σ ile gösterilir. Her $\phi \in M_\sigma$ için $\phi(x) = b$ olan sınırlı diziye b değerine $\sigma-$ yakınsaktır, denir ve $\sigma - \lim x = b$ yazılır.

Bütün $\sigma-$ yakınsak dizilerin uzayı V_σ, sıfıra $\sigma-$ yakınsak dizilerin uzayı da $V_{0\sigma}$ ile gösterilir. Özel olarak $\sigma(n) = n + 1$ alınırsa; $\sigma-$limit, Banach limitine ve V_σ da F' ye indirgenir. Bu durumda her $\sigma-$limit, c üzerindeki lineer olan limit fonksiyonelinin ℓ_∞ uzayına genişletilmesidir. Dolayısıyla $c \subset V_\sigma$ olur.

TEOREM 3.2.1. **[14]** *Sınırlı bir dizinin $\sigma-$ yakınsak olması için gerek ve yeter şart*

$$t_{pn}(x) = \frac{1}{p+1} \sum_{i=0}^{p} x_{\sigma^i(n)}$$

olmak üzere, n doğal sayısına göre düzgün olarak

$$\lim_{p} t_{pn}\left(x\right) = b$$

olmasıdır.

Tanım 3.2.2. Eğer $A \in (c, V_\sigma; p)$ ise A matrisine $\sigma-$regüler matris denir.

Teorem 3.2.2. **[14]** *Bir A matrisinin $\sigma-$regüler olması için gerekli ve yeterli*

şartlar

$$\begin{aligned} \|A\| &= \sup_n \textstyle\sum_k |a_{nk}| < \infty, \\ \sigma - \lim_n a_{nk} &= 0 \quad , \quad \text{her } k \text{ için} \\ \sigma - \lim_n \textstyle\sum_k a_{nk} &= 1 \end{aligned}$$

olmasıdır.

Tanım 3.2.3. Eğer $A \in (V_\sigma, c; p)$ ise A matrisine $V_\sigma-$regüler matris denir.

Teorem 3.2.3. **[2]** *A regüler bir matris olsun. Bu durumda A matrisinin $V_\sigma-$regüler matris olması için gerek ve yeter şart*

$$\lim_n \sum_k \left|a_{nk} - a_{n,\sigma(k)}\right| = 0$$

olmasıdır.

3.3. İstatistiksel Yakınsaklık

$K \subset \mathbb{N}$ ve $|K|$ ile K cümlesinin kardinal sayısı gösterilsin.

Tanım 3.3.1. ([**15**], sh. 247) K, $\mathbb{N}$ nin bir alt cümlesi ve $K_n = \{k \leq n : k \in K\}$ olsun. Eğer

$$\delta\left(K\right) = \lim_n \frac{|K_n|}{n} \tag{2.3}$$

limiti mevcut ise $\delta\left(K\right)$ sayısına K cümlesinin doğal yoğunluğu veya yoğunluğu denir.

Tanım 3.3.2. **(Karakteristik Fonksiyon)** $\chi_K : K \longrightarrow [0,1]$ fonksiyonu

$$\chi_K\left(n\right) = \begin{cases} 1 & , \quad n \in K \\ 0 & , \quad n \notin K \end{cases}$$

şeklinde tanımlı ise χ_K fonksiyonuna K cümlesinin karakteristik fonksiyonu denir.

$\delta(K)$ veya $\delta(\mathbb{N} \setminus K)$ yoğunluklarından herhangi biri mevcut ise;

$$\delta(K) = 1 - \delta(\mathbb{N} \setminus K)$$

eşitliği mevcuttur. Eğer K cümlesi sonlu elemanlı bir cümle ise $\delta(K) = 0$ olduğu açıktır.

(a_k) pozitif sayıların bir dizisi ve $K = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(K)$ mevcut ise

$$\delta(K) = \lim_n \frac{n}{a_n}$$

dir. ([**15**], sh. 247). Örneğin,

$$K_1 = \left\{k^2 : k \in \mathbb{N}\right\} \text{ cümlesi için } \delta(K_1) = 0$$

ve

$$K_2 = \{2k+1 : k \in \mathbb{N}\} \text{ cümlesi için } \delta(K_2) = \frac{1}{2}$$

dir. Şüphesiz $\delta(\mathbb{N}) = 1$ dir.

K cümlesinin karakteristik fonksiyonu χ_K ve C_1 Cesáro matrisi olmak üzere;

$$(C_1\chi_K)_n = \frac{|K_n|}{n}$$

olduğundan (2.3) limiti

$$\delta(K) = \lim_n (C_1\chi_K)_n$$

ile verilebilir.

Bundan sonra $\delta(E) = 1$ olmak üzere her $k \in E$ için bir $P(k)$ özelliği gerçekleniyorsa hemen hemen her k için $P(k)$ özelliği gerçekleniyor diyeceğiz ve bunu “h.h.k” ile kısaltacağız.

Tanım 3.3.3. ([**3**], [**16**],[**6**]) Her $\varepsilon > 0$ için $K = K(\varepsilon) = \{k \in \mathbb{N} : |x_k - l| \geq \varepsilon\}$ cümlesinin yoğunluğu sıfır ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durumda $st - \lim x = l$ yazılacaktır.

Teorem 3.3.1. [**6**] *$st - \lim x = l$ olması için gerek ve yeter şart $\delta(E) = 0$ olacak biçimde $\mathbb{N}$ nin bir E alt cümlesi vardır ve $\mathbb{N} \setminus E = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ olmak üzere $x_{n_k} \to l$, (alışılmış anlamda), $(k \to \infty)$ olmasıdır.*

Bundan böyle, s, s_0, s_b sembolleriyle sırasıyla istatistiksel, sıfıra istatistiksel ve sınırlı istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı ifade edilecektir.

Şimdi bazı örnekler verelim.

Örnek 3.3.1.

$$x_k = \begin{cases} 1 & , \quad k = m^2 \quad (m = 1, 2, ...) \\ 0 & , \quad k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Her $\varepsilon > 0$ için

$$|\{k \leq n : |x_k| \geq \varepsilon\}| \leq |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \sqrt{n}$$

olduğundan

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : x_k \neq 0\}| \leq \lim_n \frac{\sqrt{n}}{n} = 0$$

elde edilir. Demek ki $\forall \varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}$ cümlesinin elemanları hariç diğer bütün k doğal sayıları için $|x_k - 0| < \varepsilon$ olduğundan $st - \lim x = 0$ dır.

Örnek 3.3.2.

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , \quad k = m^2 \quad (m = 1, 2, ...) \\ 1 & , \quad k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisi için $st - \lim x = 1$ dır.

Burada istatistiksel yakınsaklık ile Cauchy anlamında yakınsaklık arasında nasıl bir ilişki olabileceği sorusu akla gelebilir. Hemen belirtelim ki bilinen anlamda yakınsak olan her dizi istatistiksel yakınsaktır. Fakat yukarıdaki örneklerden de görülebileceği gibi sınırlı ıraksak ya da sınırsız ıraksak bazı diziler de istatistiksel yakınsak olabilmektedir.

İstatistiksel yakınsaklık ile klasik toplanabilme metodları arasındaki ilişki Friday [**6**] tarafından incelenmiştir.

Teorem 3.3.2. [**6**] *Hiç bir matris toplanabilme metodu istatistiksel yakınsaklık metodunu içermez. Yani her $x \in s$ için $A - \lim x = st - \lim x = l$ olacak biçimde bir A matrisi yoktur.*

Klasik matris metodlarının özel bir sınıfının arakesiti ile matris toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklık arasında kuvvetli bir ilişki Friday ve Miller [**17**] tarafından verilmiştir.

Matris toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklık arasında kesin bir sonuç elde etmek için matrislerin aşağıdaki sınıfını tanıtacağız.

Negatif olmayan alt üçgensel $A = (a_{nk})$ matrisleri için;

i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

ii) $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(K) = 0$ olduğunda $\lim \sum_{k \in K} a_{nk} = 0$

şartları sağlanır ise A matrisine τ sınıfındadır denir. τ sınıfına ait her bir A matrisi negatif olmayan terimlerden oluştuğundan (i) ve (ii) şartları, A matrisinin regülerliğini garanti eder.

Şimdi ilgili karakterizasyonu verebiliriz.

Teorem 3.3.3. **[17]** *Sınırlı bir x dizisi için $st - \lim x = l$ olması için gerek ve yeter şart her $A \in \tau$ için $A - \lim x = l$ olmasıdır.*

İstatistiksel yakınsaklık metodu $\left\{(-1)^k\right\}$ gibi periyodik bir diziyi toplayamaz, yani $\left\{(-1)^k\right\}$ dizisi istatistiksel yakınsak değildir. Bu nedenle istatistiksel yakınsaklık metodu, klasik toplanabilme metodlarının bir çoğunu içermez. Bu gözlemlerimiz Teorem3.3.2 ile birleştirilirse istatistiksel yakınsaklık metodunun aşikar olmayan herhangi bir matris metodu ile karşılaştırılamayacağını düşünebiliriz. Fakat durum böyle değildir. Bunun için aşağıdaki örneği gözönüne alalım.

Örnek 3.3.3.

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & , \quad n \text{ kare değil ve } k = n \\ \frac{1}{2} & , \quad k = n \text{ veya } k = (m-1)^2 \text{ ve } n = m^2, \qquad (m = 1, 2, 3, ...) \\ 0 & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde bir $A = (a_{nk})$ matrisi tanımlayalım. Herhangi bir x dizisi için;

$$(Ax)_n = \begin{cases} \frac{x_1}{2} & , \quad n = 1 \\ \frac{\left[x_{(m-1)^2} + x_{m^2}\right]}{2} & , \quad n = m^2 \quad , \quad (m = 1, 2, ...) \\ x_n & , \quad n \neq m^2 \end{cases}$$

elde edilir. Böylece $A = (a_{nk})$ matrisi üçgensel ve regülerdir. A matrisinin istatistiksel yakınsaklık tarafından içerildiğini görmek için $\lim_n (Ax)_n = l$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\lim\limits_{n \neq m^2} x_n = l$ ve

$$|\{k \leq n : (Ax)_n \neq x_n\}| \leq \sqrt{n}$$

olup

$$\lim_n \frac{1}{n} |\{k \leq n : (Ax)_n \neq x_n\}| \leq \lim_n \frac{1}{n} \sqrt{n} = 0$$

dır. Dolayısıyla h.h.k için $(Ax)_n = x_n$ olup $st - \lim x = l$ dir.

Burada uyaralım ki; $A = (a_{nk})$ matrisi, yakınsaklığa denk değildir. Bunun için $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} (-1)^m & , \quad k = m^2 \quad , \quad (m = 1, 2, ...) \\ 0 & , \quad k \neq m^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlayalım. Bu durumda $n > 1$ ve $(n \to \infty)$ için $(Ax)_n \to 0$ olur, fakat x dizisi yakınsak değildir.

3.4. İstatistiksel Üst Limit ve Alt Limit

Bu kısımda diziler reel terimli olmak üzere; öncelikle bir dizinin değme noktaları ve limit noktaları kavramının istatistiksel benzerleri, istatistiksel değme ve istatistiksel limit noktalarının temel özellikleri verilerek, bu noktalar ile alışılmış limit noktaları arasındaki benzerlikler ve farklar verilecektir.

Bu nedenle bazı önemli terminoloji ve notasyonları vereceğiz.

$x = (x_k)$ dizisinin değer cümlesi $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ ile gösterilir. $\left\{x_{k(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}$, $x = (x_k)$ dizisinin bir alt dizisi ve $K = \{k(j) : j \in \mathbb{N}\}$ ise $\left\{x_{k(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}$ yerine $\{x\}_K$ yazılır. $\delta(K) = 0$ ise $\{x\}_K$ dizisine sıfır yoğunluğa sahip bir alt dizi veya bir ince alt dizi denir. $\delta(K) \neq 0$ ise $\{x\}_K$ dizisine, $x = (x_k)$ dizisinin ince olmayan bir alt dizisidir denir [**5**].

Bir x dizisinin bir L sayısına yakınsayan bir alt dizisi varsa L sayısı x dizisinin alışılmış bir limit noktasıdır. İstatistiksel limit noktası ise x dizisinin, alt dizisinin yoğunluğu göz önüne alınarak Fridy ve C. Orhan [**5**] tarafından verilmiştir.

Tanım 3.4.1. [**5**] Bir x dizisinin bir λ sayısına yakınsayan ince olmayan bir alt dizisi varsa λ sayısına x dizisinin bir istatistiksel limit noktasıdır denir.

Bir x dizisinin alışılmış limit noktalarının cümlesi L_x ile, istatistiksel limit noktalarının cümlesi ise $\wedge_x$ ile gösterilir.

Örnek 3.3.1 de tanımlanan x dizisi için $L_x = \{0, 1\}$ ve $\wedge_x = \{0\}$ dır.

Herhangi bir x dizisi için $\wedge_x \subseteq L_x$ olduğu açıktır. $\wedge_x$ ve L_x çok farklı olabilir, örneğin $\wedge_x = \varnothing$ olduğunda $L_x = \mathbb{R}$ olacak şekilde bir x dizisi Fridy [**5**] tarafından verilmiştir.

Örnek 3.4.1. $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$, değer cümlesi tüm rasyonel sayılar cümlesi olan bir dizi ve $x = (x_k)$ dizisi

$$x_k = \begin{cases} r_n & , \quad k = n^2 \quad , \quad (n = 1, 2, ...) \\ k & , \quad k \neq n^2 \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

$$K = \left\{k = n^2 : n \in \mathbb{N}\right\}$$

olmak üzere $\delta(K) = 0$ olduğundan $\wedge_x = \varnothing$ dir. $\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ cümlesi $\mathbb{R}$ de yoğun olduğundan $L_x = \mathbb{R}$ dir [**5**].

Bir x dizisinin bir L limit noktası "L merkezli her açık aralık x dizisinin sonsuz çoklukta terimini içerir" ifadesi ile karakterize edilebilir.

Bu kriterin bir istatistiksel benzeri Friday [**5**] tarafından verilmiştir.

TANIM 3.4.2. [5] Her $\varepsilon > 0$ için $\{k \in \mathbb{N} : |x_k - \gamma| < \varepsilon\}$ cümlesi sıfır yoğunluğa sahip değilse γ sayısına x dizisinin bir istatistiksel değme noktası denir.

Bir x dizisinin tüm istatistiksel değme noktalarının cümlesi Γ_x ile gösterilir. Herhangi bir x dizisi için $\Gamma_x \subseteq L_x$ olduğu açıktır. Γ_x ve $\wedge_x$ arasındaki içerme bağıntısı aşağıdaki önerme ile verilmektedir.

ÖNERME 1. [5] *Herhangi bir x dizisi için $\wedge_x \subseteq \Gamma_x$ dir.*

Alışılmış limit noktaları ile ilgili tecrübelerimiz bizi $\wedge_x$ ve Γ_x cümlelerinin eşit olacağı ümidine götürür, fakat durumun böyle olmadığı Friday [5] tarafından gösterilmiştir.

Eğer $st - \lim x = \lambda$ ise $\wedge_x = \Gamma_x = \{\lambda\}$ dir. Fakat karşıtının doğru olmadığını Friday [5] göstermiştir:

$(x_k) = \left\{\left(1 + (-1)^k\right) k\right\}$ dizisi için $\wedge_x = \Gamma_x = \{0\}$ fakat $st - \lim x$ mevcut değildir.

Verilen bir x dizisinin istatistiksel yakınsaklığı veya istatistiksel yakınsak olmayışı, x dizisinin ince bir alt dizisinin değerlerini değiştirmekle değişmez.

Bu özelliğin istatistiksel limit noktaları ve istatisitksel değme noktaları içinde geçerli olduğu Friday [5] aşağıdaki teoremde göstermiştir.

TEOREM 3.4.1. *x ve y h.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde iki dizi olsun. Bu durumda $\wedge_x = \wedge_y$ ve $\Gamma_x = \Gamma_y$ dir.*

Şimdi istatistiksel üst limit ve alt limit kavramlarını ve alışılmış üst limit ve alt limitin özelliklerinin bazı istatistiksel benzerlerini vereceğiz.

Reel terimli bir $x = (x_k)$ dizisi için

$$B_x = \{b \in \mathbb{R} : \delta\{k : x_k > b\} \neq 0\}$$

ve

$$A_x = \{a \in \mathbb{R} : \delta\{k : x_k < a\} \neq 0\}$$

olsun.

Burada $\delta(K) \neq 0$ olmasını "$\delta(K) > 0$ veya K yoğunluğa sahip değil" anlamında alacağız.

TANIM 3.4.3. [5] Bir x dizisinin istatistiksel üst limiti

$$st - \limsup x = \begin{cases} \sup B_x & , \quad B_x \neq \varnothing \\ -\infty & , \quad B_x = \varnothing \end{cases}$$

ile verilir .

Benzer şekilde bir x dizisinin istatistiksel alt limiti

$$st-\liminf x=\begin{cases}\inf A_x & , \quad A_x\neq\varnothing\\ +\infty & , \quad A_x=\varnothing\end{cases}$$

ile verilir.

Tanım 3.4.4. [**18**] Bir $x=(x_k)$ dizisi için $\delta\{k:|x_k|>B\}=0$ olacak şekilde bir B sayısı varsa, x dizisine istatistiksel sınırlıdır denir.

Şimdi bir örnek verelim.

Örnek 3.4.2.

$$x_k=\begin{cases}k & , \quad k \text{ tek kare}\\ 2 & , \quad k \text{ çift kare}\\ 1 & , \quad k \text{ tek kare değil}\\ 0 & , \quad k \text{ çift kare değil}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x=(x_k)$ dizisini göz önüne alalım. x dizisi üstten sınırlı değildir. $\delta\{k\in\mathbb{N}:|x_k|>1\}=0$ olduğundan x dizisi istatistiksel sınırlıdır. (Örnek 3.3.1 de $\delta\{k=m^2:m=1,2,...\}=0$ olduğu gösterilmiştir). Böylece $B_x=(-\infty,1)$ ve $A_x=(0,+\infty)$ olup $st-\limsup x=1$ ve $st-\liminf x=0$ dır. x dizisi $0'$ a ve $1'$e yakınsayan pozitif yoğunluğa sahip iki (ayrık) alt diziye sahip olduğundan istatistiksel yakınsak değildir.

Örnek 3.4.2 de tanımlanan $x=(x_k)$ dizisinin istatistiksel değme noktalarının cümlesi $\Gamma_x=\{0,1\}$ ve $st-\limsup x$ bu cümlenin en büyük elemanına, $st-\liminf x$ ise bu cümlenin en küçük elemanına eşittir [**18**].

Bu gözlemlere göre aşağıdaki iki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.4.2. *$\beta=st-\limsup x$ sonlu ise her $\varepsilon>0$ için*

$$\delta\{k:x_k>\beta-\varepsilon\}\neq 0 \text{ ve } \delta\{k:x_k>\beta+\varepsilon\}=0 \tag{3.4.1}$$

dir.

Karşıt olarak her $\varepsilon>0$ için (3.4.1) gerçeklenirse $\beta=st-\limsup x$ dir [**18**].

Teorem 3.4.3. *$\alpha=st-\liminf x$ sonlu ise her $\varepsilon>0$ için*

$$\delta\{k:x_k<\alpha+\varepsilon\}\neq 0 \text{ ve } \delta\{k:x_k<\alpha-\varepsilon\}=0 \tag{3.4.2}$$

dir.

Karşıt olarak her $\varepsilon > 0$ için (3.4.2) gerçeklenirse $\alpha = st - \liminf x$ dir [**18**].

İstatistiksel değme noktası tanımından ve Teorem 3.4.2 ve Teorem 3.4.3 den $st - \limsup x$, x dizisinin en büyük istatistiksel değme noktası; $st - \liminf x$, x dizisinin en küçük istatistiksel değme noktası olarak yorumlayabiliriz.

Aşağıdaki teorem bu gözlemleri kuvvetlendirir.

TEOREM 3.4.4. [**18**] *Herhangi bir x dizisi için*

$$st - \liminf x \leq st - \limsup x$$

dir.

Teorem 3.4.4 den herhangi bir x dizisi için

$$\liminf x \leq st - \liminf x \leq st - \limsup x \leq \limsup x$$

olduğu açıktır.

Hemen belirtelim ki, istatistiksel sınırlılık $st - \limsup x$ ve $st - \liminf x$ değerlerinin sonlu olmasını gerektirir. Böylece (2.3) ve (2.4) şartları gerçeklenir.

Aşağıdaki sonuç yakınsak dizilerin temel bir özelliğinin bir istatistiksel benzeridir.

TEOREM 3.4.5. [**18**] *İstatistiksel sınırlı bir x dizisinin istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart*

$$st - \liminf x = st - \limsup x$$

olmasıdır.

TEOREM 3.4.6. [**18**] *Üstten sınırlı bir x dizisi $\beta = st - \limsup x$ değerine C_1-toplanabilirse $st - \lim x = \beta$ dır .*

Benzer şekilde aşağıdaki sonucu elde ederiz.

SONUÇ 2. [**18**] *Alttan sınırlı bir x dizisi $\alpha = st - \liminf x$ değerine C_1-toplanabilirse $st - \lim x = \alpha$ dır.*

Teorem 2.2.15 den üst sınır şartının atılamayacağı veya istatistiksel üst sınır zayıf şartı ile değiştirilemeyeceğine ilişkin bir örnek Friday ve Orhan [**18**] tarafından verildi:

ÖRNEK 3.4.3.

$$x_k = \begin{cases} \sqrt{k} & , \ k \text{ kare} \\ 0 & , \ k \text{ tek kare değil} \\ 1 & , \ k \text{ çift kare değil} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini gözönüne alalım. $\delta \{k : x_k = 0\} = \frac{1}{2} = \delta \{k : x_k = 1\}$ olduğundan $st-\limsup x = 1$ ve $st-\liminf x = 0$ olduğu açıktır. Bu nedenle x dizisi istatistiksel sınırlıdır. Şimdi $C_1 - \lim x = 1 = st - \limsup x$ olduğunu gösterelim.

K^2 : tam karelerin cümlesini

K^0 : kare olmayan tek tam sayıların cümlesini

K^1 : kare olmayan çift tam sayıların cümlesini göstersin. $[t] = maks \{k : k \leq t\}$ olsun.

$$
\begin{aligned}
(C_1 x)_n &= \tfrac{1}{n} \sum_{k \in K_n^0} x_k + \tfrac{1}{n} \sum_{k \in K_n^1} x_k + \sum_{k \in K_n^2} x_k \\
&= 0 + \tfrac{1}{n} \left(\tfrac{n - [\sqrt{n}]}{2} \right) + \tfrac{1}{n} \sum_{i \leq \sqrt{n}} i \\
&= 1 + \circ (1)
\end{aligned}
$$

olduğundan $C_1 - \lim x = 1$ dir.

3.5. Rough Yakınsaklık

Sonlu boyutlu normlu uzaylarda rough yakınsaklık fikri ilk olarak Phu [8] tarafından geliştirilmiştir. Phu, $\mathrm{LIM}^r x$ kümesinin sınırlı, kapalı ve konveks olduğunu göstermiş ve rough cauchy dizisi fikrini ilk olarak ortaya atmıştır. Ayrıca yakınsaklık ve diğer yakınsaklık tipleri arasındaki ilişkileri ve $\mathrm{LIM}^r x$ in $r-$roughluk derecesine bağlılığını araştırmıştır.

Şimdi kısaca rough yakınsaklık teorisindeki bazı temel kavramları tanımlayalım. r, bir non-negatif reel sayı olmak üzere eğer $x = (x_k)$ dizisi;

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} \quad : k \geq k_\varepsilon \quad \Longrightarrow |x_k - x_*| < r + \varepsilon$$

şartını sağlıyorsa (x_k) dizisi x_* a $r - yakınsaktır$ ve $x \xrightarrow{r} x_*$ ile gösterilir.

$$LIM^r x = \left\{ x_* \in \mathbb{R} : x_k \xrightarrow{r} x_* \right\}$$

kümesi $x = (x_k)$ dizisinin r limit cümlesi olarak adlandırılır. Eğer $LIM^r x \neq \varnothing$ ise $x = (x_k)$ dizisi $r - yakınsak$ olarak adlandırılır. Bu durumda r, $x = (x_k)$ dizisinin yakınsaklık derecesidir. $r = 0$ için bilinen yakınsaklık elde edilir.

Eğer $LIM^r x \neq \varnothing$ ise

$$LIM^r x = [\limsup x - r, \liminf x + r]$$

olduğu açıktır.

Önerme 3. [**8**] *Bir* $x = (x_k)$ *dizisinin* x_* *a yakınsak olması için gerek ve yeter şart*

$$\bar{B}_r(x_*) = \{y \in \mathbb{R} : |y - x_*| \leq r\} \text{ için } LIM^r x = \bar{B}_r(x_*)$$

olmasıdır.

Önerme 4. [**8**] *Reel sayıların bir* $x = (x_k)$ *dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart;*

$$LIM^r x \neq \varnothing$$

olacak şekilde bir $r \geq 0$ *olmasıdır.*

Önerme 5. [**8**] L_x, $x = (x_k) \subset \mathbb{R}$ *dizisinin bütün limit noktalarının cümlesi olsun. O zaman;*

$$LIM^r x = \bigcap_{c \in L_x} \bar{B}_r(c) = \left\{ x_* \in \mathbb{R} : L_x \subseteq \bar{B}_r(x_*) \right\}$$

olur. Her $x_* \in LIM^r x$ *ve her* $c \in L_x$ *için*

$$|x_* - c| \leq r$$

eşitsizliği sağlanır.

3.6. Rough Limit İnferiyor ve Superiyor

Tanım 3.6.1. [**19**] Bir $x = (x_k)$ dizisinin rough limit inferiyoru;

$$LIMINF^r x = \underset{k \to \infty}{LIM^r} \inf_{k \leq i} x_k$$

ve rough limit superiyoru;

$$LIMSUP^r x = \underset{k \to \infty}{LIM^r} \sup_{k \leq i} x_i$$

olarak tanımlanır. $x = (x_k)$ dizisi sınırlı ise Önerme 3 den;

$$LIMINF^r x = \bar{B}_r(\liminf x)$$

ve

$$LIMSUP^r x = \bar{B}_r(\limsup x)$$

olduğu açıktır.

Teorem 3.6.1. [**19**] *Eğer* $x = (x_k)$ *dizisi sınırlı ise* $\preceq$ *bağıntısının tanımlı olduğu aralıkta;*

$$LIMINF^r x \preceq LIMSUP^r x$$

bağıntısı geçerlidir.

İSPAT. x dizisi sınırlı olduğundan, $y_* = \lim\limits_{n\to\infty} \inf\limits_{n\leq i} x_i$ ve $z_* = \lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{n\leq i} x_i$ mevcuttur. Önerme 3 den;

$$LIMINF^r x = \bar{B}_r(y_*)$$

ve

$$LIMSUP^r x = \bar{B}_r(z_*)$$

yazarız. Limit inferiyor ve limit superiyor tanımlarını kullanarak;

$$y_* \leq z_*$$

yazarız. Buradan $\preceq$ bağıntısının tanımlı olduğu aralıkta;

$$\bar{B}_r(y_*) \preceq \bar{B}_r(z_*)$$

yazılır. Yani reel sayıların $[a,b]$ ve $[c,d]$ gibi iki aralığı için $[a,b] \preceq [c,d]$ olması için gerek ve yeter şart;

$$a \leq c \quad \text{ve} \quad b \leq d$$

olmasıdır. □

TEOREM 3.6.2. **[19]** $x = (x_k)$ *dizisi için*

$$LIM^r x = LIMINF^r x \cap LIMSUP^r x$$

dir.

SONUÇ 6. **[19]** $x = (x_k)$ *dizisi r - yakınsak olması için gerek ve yeter şart*

$$LIMINF^r x \cap LIMSUP^r x \neq \varnothing$$

olmasıdır.

3.7. Rough İstatistiksel Yakınsaklık

Bu kısımda $\mathbb{R}^n$, n-boyutlu normlu uzay olmak üzere rough istatistiksel yakınsaklık kavramından bahsedeceğiz. Bir dizinin rough istatistiksel limit noktalarının kümesini tanımlayıp, daha sonra bu kümenin kapalı ve konveks olduğunu göstereceğiz.

TANIM 3.7.1. **[9]** r negatif olmayan reel bir sayı olsun. $x = (x_k)$ dizisinin x_* sayısına r -istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için

$$\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_*\| \geq r + \varepsilon\}$$

kümesinin doğal yoğunluğunun sıfır olmasıdır. Diğer bir deyişle

$$st - \limsup \|x_k - x_*\| \leq r$$

veya her $\varepsilon > 0$ ve hemen hemen her k için

$$\|x_k - x_*\| \leq r + \varepsilon$$

olmalıdır. (x_k) dizisinin x_* sayısına r -istatistiksel yakınsak olmasını $x_k \xrightarrow{rst} x_*$ ile gösteririz. Burada r-roughluk derecesidir. r=0 için bilinen istatistiksel yakınsaklığı elde ederiz.

$y = (y_k)$ dizisinin istatistiksel yakınsak olduğunu ve kesin olarak ölçülemediğini ve hesaplanamadığını düşünelim. $x = (x_k)$ dizisi tüm i sayıları için (veya hemen hemen her i-için) $\|x_k - y_k\| \leq r$ şartını sağlasın. Başka bir deyişle

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_k\| > r\}\right) = 0$$

olsun. Bu durumda (x_k) dizisi istatistiksel yakınsak değildir, ancak aşağıdaki içerme bağıntısı geçerlidir:

$$\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - y_*\| \geq \varepsilon\} \supseteq \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_*\| \geq r + \varepsilon\}$$

Buradan $\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : \|y_k - y_*\| \geq \varepsilon\}\right) = 0$ elde ederiz. Dolayısıyla

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_*\| \geq r + \varepsilon\}\right) = 0$$

yazarız. Böylece x dizisi r-istatistiksel yakınsaktır, deriz.

Genellikle bir dizinin rough istatistiksel limit noktaları r-roughluk derecesi $r > 0$ olduğunda tek olmayabilir. Dolayısıyla (x_k) dizisinin r-istatistiksel rough limit noktalarının cümlesini;

$$st - LIM^r x = \left\{x_* \in \mathbb{R}^n : x_k \xrightarrow{rst} x_*\right\}$$

şeklinde tanımlarız. x dizisi $st - LIM^r x \neq \varnothing$ şartıyla r-istatistiksel yakınsaktır. Eğer $st - LIM^r x \neq \varnothing$ ise x dizisi için r-istatistiksel limit noktalarının cümlesi;

$$st - LIM^r x = [st - \limsup x - r, st - \liminf x + r]$$

şeklinde tanımlanır.

Sınırsız bir x dizisi için $LIM^r x = \varnothing$ olur. Fakat bu dizi rough istatistiksel yakınsak olabilir. Örneğin; $\mathbb{R}$ üzerinde x dizisi;

$$x_k = \begin{cases} (-1)^k & , \quad \text{eğer } k \neq n^2 \text{ ise } (n \in \mathbb{N}) \\ k & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. $\{1, 4, 9, 16, ...\}$ kümesinin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan;

$$st - LIM^r x = \begin{cases} \varnothing & , \quad r < 1 \text{ için} \\ [1-r, r-1] & , \quad \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

elde ederiz. Ayrıca tüm $r \geq 0$ için $LIM^r x = \varnothing$ olur.

Yukarıdaki örnekten de görülebileceği gibi $st - LIM^r x \neq \varnothing$ olması $LIM^r x \neq \varnothing$ olmasını gerektirmemektedir. Çünkü doğal sayıların sonlu bir cümlesinin doğal yoğunluğu sıfırdır. Fakat $LIM^r x \neq \varnothing$ olması $st - LIM^r x \neq \varnothing$ olduğunu gösterir. Böylece $LIM^r x \subseteq st - LIM^r x$ bağıntısını elde ederiz. Daha açık olarak;

$$\{r \geq 0 : LIM^r x \neq \varnothing\} \subseteq \{r \geq 0 : st - LIM^r x \neq \varnothing\}$$

yazılır. Buradan ise;

$$\inf \{r \geq 0 : LIM^r x \neq \varnothing\} \geq \inf \{r \geq 0 : st - LIM^r x \neq \varnothing\}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Yukarıda da bahsedildiği gibi r-roughluk derecesi $r > 0$ için bir dizinin rough istatisitksel limiti tektir, diyemeyiz.

[**8**] den $LIM^r x \neq \varnothing$ olan sınırlı bir dizi için negatif olmayan reel bir r-sayısı vardır. Çünkü $LIM^r x \neq \varnothing$ ifadesi, $st - LIM^r x \neq \varnothing$ olmasını gerektirir. Böylece aşağıdaki sonucu elde ederiz:

Sonuç 7. *$x = (x_k)$ dizisi sınırlı ise o zaman $st - LIM^r x \neq \varnothing$ olacak şekilde negatif olmayan bir r-reel sayısı vardır.*

Yukarıdaki sonucun tersi geçerli değildir. Eğer istatistiksel sınırlı bir dizi alırsak o zaman yukarıdaki sonuç geçerlidir. Bununla ilgili aşağıdaki teoremi verebiliriz:

Teorem 3.7.1. [**9**] *$x = (x_k)$ dizisi istatistiksel sınırlıdır gerek ve yeter şart $st - LIM^r x \neq \varnothing$ olacak şekilde negatif olmayan bir r-reel sayısı vardır.*

İspat. x dizisi istatistiksel sınırlı olduğundan öyle bir M reel sayısı vardır ki;

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k\| \geq M\}\right) = 0$$

olur. $K = \{k \in \mathbb{N} : \|x_k\| \geq M\}$ için;

$$r' = \sup\{\|x_k\| : k \in K^c\}$$

kümesini tanımlayalım. O zaman $st - LIM^{r'} x$ cümlesi $\mathbb{R}^n$ uzayının orijin noktasını içerir. Böylece $st - LIM^{r'} x \neq \varnothing$ yazabiliriz.

Eğer bazı $r \geq 0$ için $st - LIM^r x \neq \varnothing$ ise o zaman öyle bir $x_* \in st - LIM^r x$ vardır ki her $\varepsilon > 0$ için;

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - x_*\| \geq r + \varepsilon\}\right) = 0$$

olur. O zaman hemen hemen her x_k noktaları, r-sayısından daha büyük yarıçaplı bir aralığın içine düşer. Böylece (x_k) dizisi istatistiksel sınırlı olur. □

Şimdi $x = (x_k)$ dizisinin r-istatistiksel limit noktaları cümlesinin kapalı ve konveks olduğunu gösterelim.

Teorem 3.7.2. [**9**] $x = (x_k)$ *dizisinin r-istatistiksel limit cümlesi kapalıdır.*

İspat. Eğer $st - LIM^r x = \varnothing$ ise durum açıktır. $st - LIM^r x \neq \varnothing$ olduğunu varsayalım. O zaman bir $(y_k) \subseteq st - LIM^r x \neq \varnothing$ dizisi seçebiliriz öyleki $k \to \infty$ için $y_k \longrightarrow y_*$ olur. Eğer $y_* \in st - LIM^r x \neq \varnothing$ olduğunu gösterirsek ispatı tamamlamış oluruz.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $y_k \longrightarrow y_*$ olduğundan öyle bir $k_{\frac{\epsilon}{2}} \in \mathbb{N}$ vardır ki; tüm $k > k_{\frac{\epsilon}{2}}$ için;

$$\|y_k - y_*\| < \frac{\epsilon}{2}$$

olur. Şimdi bir $i_0 \in \mathbb{N}$ seçelim. O zaman;

$$\|y_{k_0} - y_*\| < \frac{\epsilon}{2}$$

yazabiliriz. Diğer bir yanda $(y_k) \subseteq st - LIM^r x \neq \varnothing$ olduğundan $y_{k_0} \in st - LIM^r x$ olur. Yani;

$$\delta\left(\left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_{k_0}\| \geq r + \frac{\epsilon}{2}\right\}\right) = 0 \tag{3.7.1}$$

olur.

Şimdi aşağıdaki içerme bağıntısını gösterelim:

$$\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_*\| < r + \varepsilon\} \supseteq \left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_{k_0}\| < r + \frac{\epsilon}{2}\right\} \tag{3.7.2}$$

$n \in \left\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_{k_0}\| < r + \frac{\epsilon}{2}\right\}$ alalım. O zaman; $\|x_n - y_{k_0}\| < r + \frac{\epsilon}{2}$ olur ve üstelik;

$$\|x_n - y_*\| \leq \|x_n - y_{k_0}\| + \|y_{k_0} - y_*\| < r + \varepsilon$$

yazılır. Bu ise $n \in \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_*\| < r + \varepsilon\}$ anlamına gelir. Dolayısıyla (3.7.2) içerme bağıntısı ispatlanmış olur.

(3.7.1) ifadesinden (3.7.2) bağıntısının sağ tarafındaki kümenin doğal yoğunluğunun 1 olduğunu söyleyebiliriz. O zaman (3.7.2) ifadesinin sol tarafındaki kümenin de doğal yoğunluğu 1 olur. Böylece;

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_*\| \geq r + \varepsilon\}\right) = 0$$

elde ederiz ki bu da ispatı tamamlar. $\square$

Teorem 3.7.3. **[9]** *$x = (x_k)$ dizisinin r-istatistiksel limit cümlesi konvekstir.*

İspat. $x = (x_k)$ dizisi için her $\varepsilon > 0$ olmak üzere $y_0, y_1 \in st - LIM^r x$ verilsin.

$$K_1 = \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_0\| \geq r + \varepsilon\}$$

ve

$$K_2 = \{k \in \mathbb{N} : \|x_k - y_1\| \geq r + \varepsilon\}$$

kümelerini tanımlayalım. $y_0, y_1 \in st - LIM^r x$ olduğundan

$$\delta(K_1) = \delta(K_2) = 0$$

yazılır. Böylece her $k \in K_1^c \cap K_2^c$ ve $\lambda \in [0,1]$ için;

$$\|x_k - [(1-\lambda) y_0 + \lambda y_1]\| = \|(1-\lambda)(x_k - y_0) + \lambda (x_k - y_1)\| < r + \varepsilon$$

olur. $\delta(K_1^c \cap K_2^c) = 1$ olduğundan;

$$\delta\left(\{k \in \mathbb{N} : \|x_k - [(1-\lambda) y_0 + \lambda y_1]\| \geq r + \varepsilon\}\right) = 0$$

elde ederiz. Bu ise $st - LIM^r x$ cümlesinin konveksliğini gösteren;

$$[(1-\lambda) y_0 + \lambda y_1] \in st - LIM^r x$$

ifadesinin doğruluğunu gösterir. $\square$

4. BİR DİZİNİN ÇEKİRDEĞİ

4.1. K-Çekirdek ve Knopp Çekirdek Teoremi

İlk önce bu bölümde çok kullandığımız konveks cümle tanımını ve onunla ilgili bir teoremi verelim.

Tanım 4.1.1. [**10**] M, bir E lineer uzayının alt cümlesi ve $\lambda, \mu \geq 0, \lambda + \mu = 1$ olmak üzere M kümesinin konveks olması için gerek ve yeter şart her bir $x, y \in M$ için $\lambda x + \mu y \in M$ olmasıdır.

Teorem 4.1.1. [**20**] *Konveks cümlelerin herhangi sayıda kesişimleri konvekstir.*

Tanım 4.1.2. [**21**] (s_n) kompleks sayıların bir dizisi ve C_n her $n \in \mathbb{N}$ için $s_n, s_{n+1}, s_{n+2}, ...$ noktalarını ihtiva eden sonlu kompleks düzlemin en küçük kapalı konveks bir cümlesi olsun. Açık olarak $C_1 \supset C_2 \supset C_3 \supset, , ,$ dir. Bu takdirde

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} C_n = C$$

cümlesine (s_n) *dizisinin çekirdeği* denir.

(s_n) dizisinin limit noktalarının cümlesi D ise bu takdirde $D \subset C$ dir. Bunu görmek için $s \in D$ ve $\lim_{i \to \infty} s_{n_i} = s$ olsun. Herhangi p pozitif tamsayısı aldığımızda daima $n_r \geq p$ olacak şekilde r belirtebiliriz. Bu takdirde $s_{n_r}, s_{n_{r+1}}, s_{n_{r+2}}, ... \subset C_p$ dir. C_p kapalı olduğundan kendisindeki her dizinin limit noktasını ihtiva eder. Dolayısıyla $s \in C_p$ ve p keyfi olduğundan $s \in C$ dir.

O halde C, dizinin limit noktalarını ihtiva eden en küçük kapalı konveks bir cümledir.

Eğer C tek noktadan ibaret ise, (s_n) yakınsaktır. C boş ise (yani; sonlu nokta ihtiva etmezse), (s_n) dizisine belirli ıraksak denir ve $(s_n) \sim \infty$ şeklinde gösterilir.

Şimdi bununla ilgili örnekler verelim. Eğer

$$s_n = \begin{cases} n & , \ n \text{ çift} \\ ni & , \ n \text{ tek} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış bir dizi ise, her bir C_n kompleks düzlemin birinci bölgesinin orijinle dik açılı üçgensel kısmı kaldırdıktan sonra kalan kısmı olduğundan C boş, yani; $(s_n) \sim \infty$ dır. $s_n = n + (-1)^n in^2$ ise yine $(s_n) \sim \infty$ dir. Fakat $s_n = ni^n$ veya $s_n = (-1)^n$ ise, bu takdirde her C_n kompleks düzlemin tamamı veya -1'den $+1$'e reel eksenden ibaret olduğundan bu dizilerin çekirdekleri boş değildir. Dolayısıyla söz konusu diziler belirli ıraksak değildir.

Son örnekten de görüldüğü gibi reel bir (x_n) dizisinin çekirdeği, a ve b sırasıyla (x_n) dizisinin sol ve sağ limitleri üzere $[a, b]$ aralığıdır.

Eğer $n, k = 1, 2, 3, ...$ için $A = (a_{nk})$ regüler bir matris ise; her yakınsak (s_n) dizisinin $A-$dönüşümünün çekirdeği, (s_n) dizisinin çekirdeği ile aynıdır. Her iki çekirdekte (s_n) dizisinin limit noktası olan tek noktadan ibarettir.

Şimdi K. Knopp' un temel teoremini verelim.

Teorem 4.1.2. **[21]** *$A = (a_{nk})$ non-negatif regüler bir matris ise, bu takdirde her (s_n) dizisinin çekirdeği, $t = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k$ dizisinin çekirdeğini ihtiva eder.*

İspat. İspatı önce reel diziler için daha sonra kompleks diziler için vereceğiz.

Reel bir (s_n) dizisinin çekirdeği, $[a, b]$ ve $s_n^{'} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} s_k^{'}$ nın çekirdeği $\left[a^{'}, b^{'}\right]$ olsun. $\left[a^{'}, b^{'}\right] \subset [a, b]$ olduğunu göstermek için $b \geq b^{'}$ ve $a \leq a^{'}$ olduğunu göstermek zorundayız. Eğer $b = \infty$ ise $b \geq b^{'}$ olduğu açıktır. Fakat b sonlu ise, (s_n) dizisinin sadece sonlu sayıda terimi $b+\varepsilon$ $(\varepsilon > 0)$ dan daha büyük kaldığından, $k > m$ oldukça $s_k < b + \varepsilon$ olacak şekilde bir m pozitif sayısı vardır. Şimdi

$$s_n^{'} = \sum_{k=1}^{m} a_{nk} s_k + \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} s_k \ , \quad \text{ve her } k \text{ için } \lim_{n \to \infty} a_{nk} = 0$$

olduğundan $s_n^{'}$ ve $s_n^{''} = \sum_{k=m+1}^{\infty} a_{nk} s_k$ dizileri aynı limit noktasına sahiptir. (a_{nk}) non-negatif bir regüler matris olduğundan

$$s_n^{''} < (b+\varepsilon) \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \longrightarrow (b+\varepsilon) \quad , \quad (n \longrightarrow \infty)$$

dir.

Böylece $s_n^{''}$ nün her bir limit noktası $b+\varepsilon$ dan küçüktür. ε keyfi olduğundan $b^{'} \leq b$ dir.

a sayısının alt limit olma özelliğini kullanarak, benzer şekilde $a \leq a^{'}$ olduğu gösterilebilir.

İkinci kısmın ispatı için kompleks terimli dizilere karşılık yeni bir çekirdek tanımına ihtiyaç vardır. □

Tanım 4.1.3. **[21]** Her L doğrusu düzlemi iki yarı-düzleme böler. Eğer S nokta cümlesi böyle bir yarı-düzlemde kalırsa (noktaların hepsi veya bir kısmı L üzerinde kalabilir) L ye S için bir 'sınır doğrusu' denir.

Bu tanımın ışığı altında kompleks diziler için çekirdek tanımını şöyle verebiliriz.

Kompleks terimli bir (s_n) dizisi verilmiş olsun. Eğer (s_n) sınır doğrusuna sahip değilse çekirdeği düzlemin tamamıdır. Sınır doğrusuna sahip ise, çekirdeği limit noktalarını ihtiva eden yarı-düzlemlerin arakesitidir.
Şimdi çekirdek için yukarıda verdiğimiz tanımların denk olduğunu gösterelim.

(s_n) dizisinin birinci tanımına göre çekirdeği E, limit noktalarını cümlesi D, D' yi içeren yarı-düzlemlerin arakesiti F olsun. Açık olarak $F \supset D$ ve $E \supset D$ dir. $E = F$ olduğunu göstermek için,
(i) Farzedelimki $a \notin E$ olsun. Bu takdirde bazı $n \in \mathbb{N}$ için $a \notin C_n$ dir. C_n konveks olduğundan a ile C_n uzayını ayıran bir L sınır doğrusu çizebiliriz. $D \subset C_n$ olduğundan L ile D yi ayırır. Böylece $a \notin F$ ve dolayısıyla $F \subset E$ dir.
(ii) (s_n) dizisi için bir sınır doğrusu L ve D yi ihtiva eden herhangi bir yarı-düzlem P olsun. Bu takdirde (s_n) nin sonlu sayıda terimi hariç hepsi L nin D ile aynı tarafında kalır. Aksi takdirde D den uzak L nin tarafında en az bir lmit noktası olabilir. Yani; $s_m, s_{m+1}, ... \subset P$ olacak şekilde bir m pozitif tamsayısı vardır. Dolayısıyla $C_m \subset P$ ve $E \subset P$ dir. P keyfi olduğundan $E \subset F$ dir. (i) ve (ii) den $E = F$ dir.
Şimdi Teorem 4.1.2 nin kompleks diziler için ispatını verelim.

İSPAT. Kompleks terimli bir (s_n) dizisinin çekirdeği C ve $s_n^{'} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}s_k$ nın çekirdeği $C^{'}$ olsun. Eğer C düzlemin tamamı ise ispat açıktır. Eğer (s_n) , $x = a$ şeklinde bir sınır doğrusuna sahip ise, örneğin $\varliminf_{k\to\infty} x_k = 0$ ise, reel dizilerden biliyoruz ki;

$$\varliminf_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k > a$$

dır. Böylece $x = a$ aynı zamanda $\left(s_n^{'}\right)$ için de bir sınır doğrusudur. Eğer imajiner eksenle pozitif yönde θ açısı yapan herhangi bir L doğrusu (s_n) için bir sınır doğrusu ise, bu takdirde $\left(e^{-i\theta}s_n\right)$ dizisi de $x = a$ tipinde bir sınır doğrusuna sahiptir. Dolayısıyla $x = a$ aynı zamanda $\left(e^{-i\theta}s_n^{'}\right)$ için bir sınır doğrusudur. Böylece L , $\left(s_n^{'}\right)$ için bir sınır doğrusudur

Böylece (s_n) dizisinin limit noktalarını ihtiva eden her yarı düzlem aynı zamanda $(s_n)^{'}$ nün limit noktalarını ihtiva eder. Dolayısıyla $C^{'} \subset C$ ve teorem tam olarak ispatlanmış olur. □

Çekirdeğin ikinci tanımından dolayı şunu ifade edebiliriz. Eğer iki dizinin limit noktalarının cümlesi aynı ise, bunların çekirdekleri aynıdır. Fakat tersi doğru değildir. Yani; aynı çekirdeğe sahip iki dizinin limit noktaları aynı olmak zorunda değildir. Örneğin;

$$(1, 0, 1, 0, 1, 0, ...) \quad \text{ve} \quad (1, 0, 1/2, 1, 0, 1/2, ...)$$

dizilerinin limit noktaları farklı olduğu halde çekirdekleri $[0,1]$ aralığıdır.

Şimdi aynı çekirdeğe sahip iki dizinin limit noktaları arasında nasıl bir ilişkinin olabileceğini görelim.

SONUÇ 8. *İki dizinin aynı çekirdeğe sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart bunlardan birinin limit noktalarının cümlesini ihtiva eden her yarı-düzlem, aynı zamanda diğerinin limit noktalarının cümlesini ihtiva etmesidir.*

İSPAT. ($\Rightarrow$:) Şart gerektir. Aynı E çekirdeğine sahip iki dizi (x_n) ve (y_n) , bunların limit noktalarının cümlesi D ve $D^{'}$ olsun. Farzedelimki D yi ihtiva eden bir yarı düzlem P olsun. Bu takdirde ikinci tanımdan $E \subset P$ ve $D^{'} \subset E$ olduğundan $D^{'} \subset P$ dir.

($\Leftarrow$:) Şart yeterdir. (x_n) ve (y_n) dizilerinin çekirdekleri sırasıyla E ve $E^{'}$ olsun. Eğer $a \in E$ ise, a, D' yi ihtiva eden yarı-düzlemlerin arakesitindedir. Hipotezden dolayı a, $D^{'}$ yü ihtiva eden yarı-düzlemlerin arakesitindedir. Yani; $a \in E^{'}$ ve dolayısıyla $E \subset E^{'}$ dür. Benzer şekilde $E^{'} \subset E$ olduğu gösterilebilir. Böylece $E = E^{'}$ ispatlanmış olur. $\square$

SONUÇ 9. *İki dizinin aynı çekirdeğe sahip olabilmesi için gerek ve yeter şart, bunlardan birinin limit noktalarının cümlesini ihtiva eden her kapalı konveks bölge, aynı zamanda diğerinin limit noktalarını ihtiva etmesidir.*

İSPAT. ($\Rightarrow$:) Şart gerektir. Çünkü D'yi ihtiva eden kapalı konveks bir P bölgesi $D^{'}$ yü ihtiva etmez ise $a \notin P$ olacak şekilde en az bir $a \in D^{'}$ ve a yı D den ayıran bir sınır doğrusu vardır. Yani; D yi ihtiva eden $D^{'}$ yü ihtiva etmeyen bir yarı düzlem vardır. Önceki sonuçtan dolayı bir çelişki teşkil eder.

($\Leftarrow$:) Şart yeterdir. (x_n) ve (y_n) dizileri aynı çekirdeğe sahip değilse, bu takdirde D yi ihtiva eden $D^{'}$ yü ihtiva etmeyen bir yarı-düzlem vardır. Bu ise hipoteze aykırıdır. Böylece (x_n) ve (y_n) dizileri aynı çekirdeğe sahiptir.

$\square$

4.2. Bir Dizin r-limit Cümleleri ve Bilinen Çekirdeği Arasındaki İlişki

Bu kısımda K-çek(x) sembolüyle gösterilen bir (x_k) dizisinin çekirdeğinin yakınsaklık yarıçapının;

$$\bar{r} = \inf \{r \geq 0 : LIM^r x \neq \varnothing\}$$

sayısına eşit ve üstelik K-çek(x) kümesinin her elemanının $\left(2\bar{r}\right)$ yakınsak olduğu gösterilmiştir. Yani;

$$\text{K-çek}(x) = LIM^{2\bar{r}} x$$

olduğu görülmüştür [**19**].

TEOREM 4.2.1. [**19**] *Eğer* $LIM^r x \neq \varnothing$ *ise* $\liminf x$ *ve* $\limsup x$ $LIM^{2r} x$ *kümesine aittir.*

İSPAT. Önerme 4 den $x = (x_k)$ dizisinin sınırlı olduğunu söylenebilir. Çünkü $\liminf x_k$ sayısı $x = (x_k)$ dizisinin bir limit noktasıdır. Buradan tüm $x_* \in LIM^r x$ için;

$$|x_* - \liminf x| \leq r$$

olur. Çünkü $x_* \in LIM^r x$ dir, $\forall \varepsilon > 0$ için $k_\varepsilon \in \mathbb{N} \ni$ vardır öyleki;

$$|x_* - \liminf x| \leq |x_k - x_*| + |x_* - \liminf x| < 2r + \varepsilon \quad ; \quad k > k_\varepsilon$$

yazılır. Buradan $\liminf x \in LIM^{2r} x$ dir. Benzer olarak ;

$$\limsup x \in LIM^{2r} x$$

olduğu da görülebilir. $LIM^{2r} x$ cümlesinin konveksliği ve Teorem 4.2.1. i dikkate alınarak aşağıdaki sonuç elde edilir. □

TEOREM 4.2.2. [**19**] $LIM^r x \neq \varnothing$ *ise o halde her bir* $c \in [\liminf x, \limsup x]$ *için* $c \in LIM^{2r} x$ *dir.*

TEOREM 4.2.3. [**19**] *Eğer* $LIM^r x \neq \varnothing$ *ise K-çek*$(x) \subseteq LIM^{2r} x$ *dir.*

İSPAT. K-çek$(x) = [\liminf x, \limsup x]$ olduğundan $x = (x_k)$ sınırlı bir dizidir. Böylece K-çek$(x) \subseteq LIM^{2r} x$ ifadesi Teorem 4.2.2. ye dayanarak elde edilir. □

Teorem 4.2.3 den $LIM^r x \neq \varnothing$ şartını çıkarılırsa teorem geçerli olmaz. Örneğin $x = (x_k) = (-1)^k$ dizisini ele alalım. O zaman her $r < 1/2$ için;

$$\text{K-çek}(x) = [-1, 1] \ \textit{ve}\ LIM^r x = \varnothing$$

elde edilir.

TEOREM 4.2.4. [**19**] *K-çek*(x) *kümesinin çapı* $r-$*sayısına eşittir gerek ve yeter şart*

$$\textit{K-çek}(x) = LIM^r x$$

olmasıdır.

İSPAT. Teoremin ispatı aşağıdaki gerçekten dolayı açıktır.

$$\begin{aligned} \text{çap}\,(\text{K-çek}(x)) = r &\iff \limsup x - \liminf x = r \\ &\iff \text{K-çek}(x) = [\liminf x, \limsup x] \\ &= [\limsup x - r, \liminf x + r] = LIM^r x \end{aligned}$$

olur. Üstelik bunu aşağıdaki şartları sağlayarak görebiliriz; □

(a) $r >$ çap (K-çek(x)) $\iff$ K-çek$(x) \subset LIM^r x$
(b) $r <$ çap (K-çek(x)) $\iff$ $LIM^r x \subset$ K-çek(x).

TEOREM 4.2.5. **[19]** *Eğer* $\bar{r} = \inf \{r \geq 0 : LIM^r x \neq \varnothing\}$ *ise*

$$\bar{r} = \textit{yarıçap}\,(\textit{K-çek}(x))$$

olur.

İSPAT. Eğer K-çek(x) kümesi bir elemanlı bir küme ise yarıçap (K-çek(x)) $= 0$ dır ve dizi yakınsaktır. Örneğin $LIM^0 x \neq \varnothing$ olsun. Buradan

$$\bar{r} = \text{yarıçap}\,(\text{K-çek}(x)) = 0$$

elde ederiz. Farzedelim ki K-çek(x) kümesi tek elemanlı olmasın. O zaman;

$$\text{K-çek}(x) = [a, b]$$

öyleki $a = \liminf x$, $b = \limsup x$ yazılır. Şimdi farzedelim ki;

$$\bar{r} \neq \text{yarıçap}\,(\text{K-çek}(x))$$

olsun. Eğer $\bar{r} <$ yarıçap (K-çek(x)) ise o zaman;

$$\varepsilon = \frac{\left(\frac{b-a}{2} - \bar{r}\right)}{3}$$

tanımlanır. Infimum tanımından;

$$\left(\bar{r} + \bar{\varepsilon}\right) \in \{r \geq 0 : LIM^r x \neq \varnothing\}$$

dır. Yani $LIM^{\bar{r}+\bar{\varepsilon}} x \neq \varnothing$ dir. O zaman $x_* \in \mathbb{R}$ vardır öyleki;

$$\forall \varepsilon \succ 0 \ \text{ için } \ \exists k_\varepsilon \in \mathbb{N} \ : k \geq k_\varepsilon \implies |x_k - x_*| < \left(\bar{r} + \bar{\varepsilon}\right) + \varepsilon$$

olmalıdır. Fakat bu a ve b sayılarının tanımıyla çelişir. Eğer $\bar{r} <$ yarıçap (K-çek(x)) ise

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\left(\bar{r} - \frac{b-a}{2}\right)}{3}$$

ve

$$r' = \bar{r} - 2\bar{\varepsilon}$$

yazılır. $0 \leq r' \leq \bar{r}$ olduğu açıktır. Ayrıca a ile b nin tanımından $\frac{b-a}{2}$ sayısı $LIM^{r'} x_k$ kümesinin içindedir. O zaman;

$$r' \in \{r \geq 0 : LIM^r x \neq \varnothing\}$$

elde edilir. Bu ise $r' \prec \bar{r}$ iken $\bar{r} = \inf\{r \geq 0 : LIM^r x \neq \varnothing\}$ tanımıyla çelişir. Yani

$$\bar{r} = \text{yarıçap}\,(\text{K-çek}(x))$$

dir. □

Teorem 4.2.4. ve Teorem 4.2.5. in direkt bir sonucu olarak aşağıdaki ifadeyi yazabiliriz;

SONUÇ 10. [**22**] *Bir $x = (x_k)$ dizisi için;*

$$K\text{-}çek(x) = LIM^{2\bar{r}} x$$

dir.

4.3. B-çekirdek ve İlgili Teoremler

c ve ℓ_∞ ,alışılmış supremum normuyla $x = (x_k)$ dizilerinin sürekli ve sınırlı reel lineer uzayları olmak üzere;

$$q\,(x) = \inf_{n,p} \limsup_{k} \frac{1}{p+1} \sum_{k=0}^{p} x_{k+n} \tag{4.3.1}$$

fonksiyonunun ℓ_∞ üzerinde bir alt lineer fonksiyonel olduğunu söyleyebiliriz.

Her $x \in M$ için $L\,(x) = \limsup x$ olduğunda $q\,(x) \leq L\,(x)$ dir.

Pozitif tamsayıların $\theta = (k_r)$ dizisi; eğer $k_0 = 0$, $r \longrightarrow \infty$ iken $0 \leq k_r \leq k_{r+1}$ ve $h_r = k_r - k_{r-1} \longrightarrow \infty$ oluyorsa *lacunary dizisi* olarak adlandırılır. $I_r = (k_{r-1}, k_r]$ olmak üzere bir θ lacunary dizisinin ℓ_∞ üzerinde alt lineer fonksiyonelini;

$$\psi_\theta\,(x) = \lim_{r} \sup \sup_{i} \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} x_{k+i}$$

olarak tanımlarız.

[**23**] de $x \in \ell_\infty$ için;

$$\psi_\theta\,(x) = q\,(x)$$

olduğu gösterilmiştir. Bu eşitliğe dayanarak x dizisinin hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter şart;

$$\psi_\theta\,(x) = -\psi_\theta\,(-x)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Buradan hemen hemen yakınsak dizilerin cümlesini;

$$F = \left\{ x \in m : \frac{1}{h_r} \sum_{k \in I_r} x_{k+i} \longrightarrow s, r \longrightarrow \infty \text{ iken, } i \text{ 'de düzgün olarak} \right\}$$

olarak ifade edebiliriz.

$A = (a_{nk})$ reel tamsayıların sonlu bir matrisi olsun. Eğer h ve g yukarıda tanımlanan fonksiyonellerden herhangi ikisi ise $hA \leq g$ yazabiliriz. Bunu göstermek için her sınırlı x dizisi için öyle bir $Ax = (A_n(x)) = \left(\sum_k a_{nk} x_k \right)$ dönüşümü vardır ki bu dönüşüm sınırlıdır ve $h(Ax) \leq g(x)$ dir.

h ve g fonksiyonelleri verilsin. $hA \leq g$ eşitsizliğinin sağlanması için A matrisinin üzerinde bulundurması gerekli ve yeterli koşulları inceleyelim. Örneğin $LA \leq L$ olması için gerekli ve yeterli şartlar A regüler ve

$$\sum_k |a_{nk}| \longrightarrow 1, (n \longrightarrow \infty) \tag{4.3.2}$$

olmasıdır [**10**], [**21**], [**24**].

Sınırlı bir x dizisinin Knopp çekirdeği (K-çek) $[\liminf x, \limsup x]$ kapalı aralığında tanımlı olmak üzere $LA \leq L$ eşitsizliğinden,

$$\text{K-çek}(Ax) \subset \text{K-çek}(x)$$

yazabiliriz.

q, (4.3.1) ile tanımlı olmak üzere bir $x \in \ell_\infty$ dizisinin Banach çekirdeği (B-çek) ise, $[-q(-x), q(x)]$ kapalı aralığında tanımlıdır.

$$q(x) \leq L(x), \quad x \in m \tag{4.3.3}$$

olduğundan dolayı $B-\text{çek}(x) \subset \text{K-çek}(x)$ yazabiliriz.

Şimdi daha sonraki kısımda sıklıkla kullanacağımız bir lemmayı ispatsız olarak vereceğiz.

Lemma 11. [**22**] *B, $(b_{nk}(i))$ sonlu matrislerin bir dizisi olsun. Eğer $\|B\| < \infty$ ve $\lim_n \sup_i |b_{nk}(i)| = 0$ ise o zaman öyle bir sınırlı y dizisi vardır ki $\|y\| \leq 1$ ve*

$$\limsup_n \sup_i \sum_k b_{nk}(i) y_k = \limsup_n \sup_i \sum_k |b_{nk}(i)|$$

dir [**27**].

Ayrıca $\|B\| = \sup_{n,i} \sum_k |b_{nk}(i)| < \infty$ olduğundan öyle bir $k > 0$ vardır ki tüm i ve n ler için $\sum_k |b_{nk}(i)| \leq k$ yazılır ve $\sum_k |b_{nk}(i)|$ serileri i üzerinde düzgün olarak yakınsar.

4.4. Altlineer Fonksiyonel İçeren Eşitsizlikler

Bu kısımda, A-matrisi üzerinde belirli şartlar altında;

$$LA \leq \psi_\theta, \quad \psi_\theta A \leq \psi_\theta \quad \text{ve} \quad \psi_\theta A \leq L$$

eşitsizliklerini sağlamaya çalıştık.

$x \in \ell_\infty$ olmak üzere $\psi_\theta(x) = q(x)$ olduğundan ilk eşitsizlik sağlanır. Fakat şimdi bunun başka bir ispatını verelim;

Teorem 4.4.1. **[22]** *$LA \leq \psi_\theta$, yani K-çek$(Ax) \subset B -$ K-çek(x) olması için gerek ve yeter şart A matrisinin kuvvetli regüler ve*

$$\sum_k |a_{nk}| \longrightarrow 1, \quad (n \longrightarrow \infty) \tag{4.4.1}$$

olmasıdır.

İspat. ($\Rightarrow$:) Şart gerektir. İlk olarak $LA \leq \psi_\theta$ olsun. O zaman;

$$\psi_\theta(x) = -\psi_\theta(-x)$$

olur. Bu hipoteze dayanarak

$$-\psi_\theta(-x) \leq -L(-Ax) \leq L(Ax) \leq \psi_\theta(x)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Böylece A matrisinin kuvvetli regüler olduğunu gösteren $\lim Ax = f - \lim x$ ifadesi elde edilir. Buradan da $Ax \in c$ yazılır. A regüler olduğundan Lemma 11 de B yerine A yazabiliriz. Böylece sınırlı bir y dizisi elde elde ederiz öyleki;

$$L(Ay) = \limsup_n \sum_k |a_{nk}|$$

yazılır. Buradan;

$$1 \leq \liminf_n \sum_k |a_{nk}| \leq \limsup_n \sum_k |a_{nk}| = L(Ay) \leq L(y) \leq \|y\| = 1$$

yazılır. Bu ise (4.4.1) ifadesinin doğru olduğunu gösterir.

($\Leftarrow$:) Şart yeterdir. $\varepsilon > 0$ verilsin. $x \in \ell_\infty$ ve her $k \geq 0$ için

$$\frac{1}{h_r} \sum_{j=k_{r-1}+k+1}^{k_r+k} x_j \psi_\theta(x) + \varepsilon \tag{4.4.2}$$

(Burada ispat boyunca r sabit olarak düşünülecektir.)

Buradan da görebiliriz ki;

(4.4.3)

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_k a_{nk} \frac{1}{h_r} \sum_{j=k_{r-1}+k+1}^{k_r+k} x_j - \frac{1}{h_r} \sum_{k=k_r}^{\infty} x_k \times \left[\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} (a_{n,k-1} - a_{nk}) \right] + \sum_{k=0}^{k_{r-1}} a_{nk} x_k - B_n$$

Burada;

$$B_n = -\frac{1}{h_r}\sum_{k=k_{r-1}+1}^{k_r-1} a_{n,k-k_{r-1}-1}x_k - \frac{1}{h_r}\sum_{k=k_{r-1}+1}^{k_r-1} a_{n,k-k_{r-1}-2}x_k - ... - \frac{1}{h_r}a_{n,k-k_r+1}x_k$$

A kuvvetli regüler olduğundan

$$B_n = \circ(1) \qquad \text{ve} \qquad \sum_{k=0}^{k_r-1} a_{nk}x_k = \circ(1)$$

dır. Eğer

$$F_{nr} = -\frac{1}{h_r}\sum_{k=k_r}^{\infty} x_k \left[\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} (a_{n,k-i} - a_{nk})\right] \tag{4.4.4}$$

olursa;

$$|F_{nr}| \le \frac{\|x\|}{h_r}\sum_{i=k_{r-1}+1}^{k_r} i\sum_{k=0}^{\infty}|a_{nk} - a_{n,k+1}| \le \frac{\|x\|}{2}(1+k_r+k_{r-1})\sum_{k=0}^{\infty}|a_{nk} - a_{n,k+1}|$$

elde edilir ve bu ifade A matrisinin kuvvetli regülerliğinden dolayı, $n \longrightarrow \infty$ için, sıfıra yakınsar.

Herhangi reel $\lambda, \lambda^+ = \max(\lambda, 0)$ ve $\lambda^- = \max(-\lambda, 0)$ ifadelerini tanımlayarak (4.4.2) den dolayı;

$$\begin{aligned} L(Ax) &\le \limsup_n \sum_k a_{nk}\tfrac{1}{h_r}\sum_{j=k_{r-1}+k+1}^{k_r+k} x_j \\ &\le \limsup_n \sum_k \left(a_{nk}^+\right)\tfrac{1}{h_r}\sum_{j\in I_r} x_j - \limsup_n \sum_k \left(a_{nk}^-\right)\tfrac{1}{h_r}\sum_{j\in I_r} x_j \\ &\le (\psi_\theta(x)+\varepsilon)\limsup_n \sum_k |a_{nk}| + \|x\|\limsup_n \sum_k (|a_{nk}| - a_{nk}). \end{aligned}$$

olduğu görülür. Hipotezden dolayı

$$L(Ax) \le (\psi_\theta(x)+\varepsilon)$$

elde edilir. ε keyfi olduğundan;

$$L(Ax) \le \psi_\theta(x)$$

eşitsizliğini elde ederiz. □

Teorem 4.4.2. **[22]** *$\psi_\theta(Ax) \le \psi_\theta(x)$, yani $B-$çek$(Ax) \subset B-$çek(x) olması için gerek ve yeter şart A matrisinin F-regüler ve*

$$\limsup_r \sup_i \sum_k \left|\frac{1}{h_r}\sum_{j\in I_r} a_{j+i,k}\right| = 1 \tag{4.4.5}$$

olmasıdır.

İSPAT. $\psi_\theta(Ax) \leq \psi_\theta(x)$ olduğunu farzedelim. Bu ifadede x dizisinin yerine $-x$ yazarak;

$$-\psi_\theta(-x) \leq -\psi_\theta(A(-x)) \leq \psi_\theta(Ax) \leq \psi_\theta(x) \tag{4.4.6}$$

eşitsizliğini elde ederiz.

Eğer $x \in F$ ise o zaman $-\psi_\theta(-x) = \psi_\theta(x)$ dır. Bu ifadeyi (4.4.6) eşitsizliğiyle birlikte değerlendirirsek A matrisinin $F-$regüler olduğunu görürüz. Şimdi;

$$b_{rk}(i) = \frac{1}{h_r} \sum_{j=k_{r-1}+i+1} a_{jk}$$

ifadesini yazalım. Lemma 11 den dolayı öyle bir sınırlı y vardır ki $\|y\| \leq 1$ ve

$$\limsup_r \sup_i \sum_k b_{nk}(i)\, y_k = \limsup_r \sup_i \sum_k |b_{nk}(i)|$$

olduğu görülür. Şimdi

$$\begin{aligned} 1 &\leq \liminf_r \sup_i \sum_k \left| \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} a_{j+i,k} \right| \leq \limsup_r \sup_i \sum_k \left| \frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} a_{j+i,k} \right| \\ &= \limsup_r \sup_i \sum_k \left(\frac{1}{h_r} \sum_{j \in I_r} a_{j+i,k} \right) y_k \leq \psi_\theta(y) \leq \limsup y_n \leq \|y\| \leq 1 \end{aligned}$$

olduğunu görebiliriz. Bu ise bize (4.4.5) ifadesinin varlığını gösterir.

Yeterlilik; $b_{nk}(i) = \frac{1}{h_n} \sum\limits_{j \in I_n} a_{j+i,k}$ için,

$$\psi_\theta(Ax) = \limsup_n \sup_i \frac{1}{h_n} \sum_{j \in I_n} A_{j+i}(x) = \limsup_n \sup_i \sum_k b_{nk}(i)\, x_k$$

yazabiliriz. Şimdi (4.4.3) ifadesinde a_{nk} yerine $b_{nk}(i)$ yazalım. $x \in \ell_\infty$ ve A matrisi $F-$regüler olduğundan (4.4.3) ifadesinde a_{nk} yerine $b_{nk}(i)$ yazılmasıyla elde edilen 3. ve 1. terimler i‘ de düzgün olarak $n \longrightarrow \infty$ için sıfıra doğru gider. Diğer bir yanda $|F_{nr}|$ ifadesinde; a_{nk} yerine $b_{nk}(i)$ yazarsak;

$$\begin{aligned} &\frac{\|x\|}{2h_r} h_r (1 + k_r + k_{r-1}) \sum_k |b_{nk}(i) - b_{n,k+1}(i)| \\ &= \frac{\|x\|}{2} (1 + k_r + k_{r-1}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{h_n} \left| \sum_{j \in I_n} (a_{j+i,k} - a_{j+i,k+1}) \right| \end{aligned}$$

ifadesinden büyük değildir. Ayrıca bu ifade A, F-regüler olduğundan dolayı $n \longrightarrow \infty$

için i' de düzgün olarak sıfıra yakınsar. Böylece (4.4.2) den dolayı;

$$\begin{aligned}
\psi_\theta(Ax) &\le \limsup_n \sup_i \sum_k \left(\frac{1}{h_n}\sum_{j\in I_n} a_{j+i,k}\right)\left(\frac{1}{h_r}\sum_{v=k_{r-1}+k+1}^{k_r+k} x_v\right) \\
&\le (\psi_\theta(x)+\varepsilon)\limsup_n \sup_i \sum_k \left|\frac{1}{h_n}\sum_{j\in I_n} a_{j+i,k}\right| \\
&\quad + \limsup_n \sup_i \sum_k \left(\frac{1}{h_n}\left|\sum_{j\in I_n} a_{j+i,k}\right| - \frac{1}{h_n}\sum_{j\in I_n} a_{j+i,k}\right)
\end{aligned}$$

elde ederiz. A matrisinin F-regülerliği ve (4.4.5) ifadesini kullanarak;

$$\psi_\theta(Ax) \le \psi_\theta(x) + \varepsilon$$

olduğunu görebiliriz. $\varepsilon-$keyfi olduğundan dolayı gerekli sonucu elde etmiş oluruz.

(4.3.2) ifadesinde de belirttiğimiz gibi $B-$çek$(x) \subset K-$çek(x) dir. Dolayısıyla Teorem 4.4.2. yi dikkate alarak;

(4.4.7) $$B - \text{çek}(Ax) \subset K - \text{çek}(x)$$

ifadesini elde ederiz.

Teorem 4.4.2 de $F-$regülerlik şartının yerine hemen hemen regülerlik şartını koyduğumuzda da (4.4.7) ifadesini elde ederiz. (Aşağıdaki teoremde görebiliriz.) Bir $F-$regüler matris hemen hemen regülerdir fakat karşıtı doğru değildir. □

TEOREM 4.4.3. **[22]** *$\psi_\theta(Ax) \le L(x)$, yani $B-$ çek$(Ax) \subset K-$ çek(x) olması için gerek ve yeter şart A matrisinin hemen hemen regüler ve (4.4.5) şartını sağlamasıdır.*

İSPAT. (⇒:) Şart gerektir. $\psi_\theta(Ax) \le L(x)$ olsun.

$$-L(-x) \le -\psi_\theta(-Ax) \le \psi_\theta(Ax) \le L(x)$$

Eğer $x \in c$ ise o zaman $L(x) = -L(-x) = \lim x$ dir. Böylece

$$-\psi_\theta(-Ax) = \psi_\theta(Ax) = \lim x$$

elde edilir ki bu da A matrisinin hemen hemen regüler olduğunu gösterir. Eğer;

(4.4.8) $$b_{rk}(i) = \frac{1}{h_r}\sum_{j\in I_r} a_{j+i,k}$$

yazarsak Lemma 11 in şartları sağlanır. Dolayısıyla burada öyle bir sınırlı y vardır ki $\|y\| \le 1$ ve

$$\psi_\theta(Ay) = \limsup_r \sup_i \sum_k b_{rk}(i)\, y_k = \limsup_r \sup_i \sum_k |b_{rk}(i)|$$

yazılır. A matrisinin hemen hemen regülerliğini kullanarak, Teorem 4.4.2 de olduğu gibi, (4.4.5) ifadesi sağlanır.

($\Leftarrow$:) Şart yeterdir. $(b_{rk}(i))$, (4.4.8) de olduğu gibi tanımlansın. Buradan;

$$\sum_k b_{rk}(i)\, x_k \leq \|x\| \sum_{k<m} |b_{rk}(i)| + \left(\sup_{k\geq m} x_k\right) \sum_k |b_{rk}(i)| + \|x\| \sum_k (|b_{rk}(i)| - b_{rk}(i))$$

ifadesini elde ederiz. A matrisi hemen hemen regüler ve (4.4.5) sağlandığından

$$\psi_\theta(Ax) \leq L(x)$$

eşitsizliğini elde ederiz. Bu da teoremi ispatlar. □

4.5. İstatistiksel Çekirdek

Bu kısımda bir dizinin istatistiksel çekirdeği kavramını tanıtacağız ve bir dizinin dönüşüm dizisinin çekirdeği, istatistiksel çekirdeğin bir alt cümlesi olacak şekildeki matrisleri karakterize edeceğiz.

Tanım 4.5.1. Herhangi bir kompleks $x = (x_n)$ dizisi için $H(x)$, h.h.k için x'_k yı içeren tüm kapalı yarı düzlemlerin kolleksiyonu olsun, yani

$$H(x) = \{H : H \text{ kapalı yarı-düzlem ve } \delta\{k : x_k \notin H\} = 0\}$$

olsun. x dizisinin istatistiksel çekirdeği

$$st - \text{çek}(x) = \bigcap_{H\in H(x)} H$$

ile verilir **[25]**.

$K-$çek(x) cümlesinin tanımında $C_n(x)$ kapalı konveks hull'u $\{x_k\}_{k\geq n}$ dizisini içeren tüm kapalı yarı-düzlemlerin arakesitidir. $st-$çek(x) nin tanımında, $\{x_k\}_{k\geq n}$ dizisinin yerine 1 yoğunluğa sahip keyfi bir alt dizi alındı. Böylece x dizisi için $st-$çek$(x) \subseteq K-$çek(x) olur.

x dizisi reel değerli ve istatistiksel sınırlı bir dizi ise x dizisinin istatistiksel çekirdeği, $[st - \liminf x, st - \limsup x]$ dir. Eğer x dizisi istatistiksel sınırlı değil ise x dizisinin istatistiksel çekirdeği ya $[st - \liminf x, \infty), (-\infty, +\infty)$, ya da $(-\infty, st - \limsup x]$ aralığıdır **[25]**.

Çekirdek kavramına ilişkin bazı içerirlik teoremleri verebilmek için istatistiksel çekirdeğe ilişkin aşağıdaki lemmaya ihtiyacımız vardır.

LEMMA 12. *x istatistiksel sınırlı bir dizi ve her bir $z \in \mathbb{C}$ için*

$$B_x(z) = \{w \in \mathbb{C} : |w - z| \leq st - \limsup |x_k - z|\}$$

olsun. Bu durumda,

$$st - \text{çek}(x) = \bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z)$$

dir [**25**].

x istatistiksel sınırlı bir dizi değilse yukarıdaki lemma doğru değildir. Bunu görmek için $\forall k \in \mathbb{N}$ için $x_k = k$ şeklinde tanımlanan $x = (x_k)$ dizisini göz önüne alalım. x dizisi bir istatistiksel değme noktasına sahip değildir ve $st-$çek$(x) = \varnothing$. Herhangi bir $z \notin \mathbb{C}$ için, h.h.k için x_k yı içeren sonlu yarıçaplı bir disk yoktur, böylece $st - \limsup_k |x_k - z| = \infty$ ve $B_x(z)$ kompleks düzlemin tamamı olup $\bigcap_{z \in \mathbb{C}} B_x(z) = \mathbb{C}$ dir.

Aşağıdaki teorem $K-$çek$(Ax) \subseteq st-$çek(x) olacak şekildeki matrisleri karakterize edecektir.

TEOREM 4.5.1. *$A = (a_{nk})$ matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ olsun. Her bir $x \in \ell_\infty$ için $K-$çek$(Ax) \subseteq st-$çek(x) olması için gerek ve yeter şart*

i) $A \in \tau^*$; yani A regüler ve $\delta(E) = 0$ özellikli her $E \subseteq \mathbb{N}$ için $\lim_n \sum_{k \in E} |a_{nk}| = 0$

ii) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = 1$

olmasıdır [**25**].

Herhangi bir x dizisinin istatistiksel çekirdeği, Knopp çekirdeğinin bir alt cümlesi olduğundan yukarıdaki teoremden aşağıdaki sonucu elde ederiz.

SONUÇ 13. *$A = (a_{nk})$ matrisi için $\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$ ve yukarıdaki teoremin i) ve ii) şartları gerçeklenirse her bir $x \in \ell_\infty$ için*

$$st - \text{çek}(Ax) \subseteq st - \text{çek}(x)$$

dir [**25**].

Şimdi yukarıdaki sonucun karşıtının doğru olmadığını göstereceğiz.

ÖRNEK 4.5.1. A matrisi h.h.k için $(Ax)_n = x_n$ olacak biçimde tanımlayalım. Yukarıdaki teoremden Ax ve x dizilerinin istatistiksel değme noktalarının cümlesi aynı olup $st-$çek$(Ax) \subseteq st-$çek(x) dir.

$$a_{nk} = \begin{cases} 1 & , \quad k = n \text{ ve } k \text{ kare değil} \\ 1 & , \quad k \leq n \text{ ve } n \text{ kare} \\ 1 & , \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan $A = (a_{nk})$ matrisini gözönüne alalım. Bu durumda

$$(Ax)_n = \begin{cases} x_n & , \quad n \text{ kare değil} \\ \sum\limits_{k=1}^{n} x_k & , \quad n \text{ kare} \end{cases}$$

olacaktır. A matrisi için $\sup\limits_n \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = \infty$ dir. A matrisi ne ii) özelliğini gerçekler ne de $\delta(E) = 0$ için $\lim\limits_n \sum\limits_{k \in E} |a_{nk}| = 0$ koşulunu gerçekler.

4.6. Rough Çekirdek

Bu bölümde bir dizinin çekirdeği ile ilgili sonuçları detaylarıyla göstermek için sadece reel diziler gözönüne alınmıştır. $x = (x_k)$ dizisinin rough çekirdeğinin;

$$\text{ÇEK}^r x = LIMINF^r x \cup LIMSUP^r x \quad ; \quad LIM^r x \neq \varnothing \text{ iken}$$

olduğu gösterilmiştir.

Sonuçta ‘bir dizi bilinen anlamda yakınsaktır gerek ve yeter şart rough çekirdeği aynı roughluk derecesinde rough limit kümesine eşitse‘ olduğu görülmüştür.

Tanım 4.6.1. [19] **(Rough Çekirdek)** R, $\mathbb{R}$ nin bir aralığı olsun.

$$R^r = \left\{ x \in \mathbb{R} : \inf_{y \in R} |x - y| = r \right\}$$

göstersin. R_n kümesi x_n, x_{n+1}, x_{n+2},... noktalarını içeren $\mathbb{R}$ nin en küçük kapalı konveks altkümesi olmak üzere;

$$\text{ÇEK}^r x = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n^r$$

kümesi $x = (x_k)$ dizisinin rough çekirdeği olarak adlandırılır. Burada $R_n \subseteq R_n^r$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\forall r \geq 0$ için

$$K - \text{çek}(x) \subseteq \text{ÇEK}^r x$$

dir. Eğer $r = 0$ ise o zaman;

$$\text{ÇEK}^r x = K - \text{çek}(x)$$

olduğu açıktır.

İki dizi limit noktaları farklı iken aynı rough çekirdeğe sahip olabilirler. Örneğin $x = (x_k) = (-1)^k$ ve $y = (y_k) = (-1, 0, 1, -1, 0, 1, ...)$ alalım. O zaman;

$$\text{Her } \ r \geq 0; \ L_x = \{-1, 1\} \ \text{ ve } \ L_y = \{-1, 0, 1\} \ \text{ iken ÇEK}^r x = \text{ÇEK}^r y$$

Eğer iki sınırlı dizi aynı limit noktalarına sahipse aynı rough çekirdeğe sahip oldukları açıktır. Örneğin;

$$L_x = L_y \ \text{ ise } \ \text{ÇEK}^r x = \text{ÇEK}^r y \ , \forall r \geq 0 \ \text{ için.}$$

TEOREM 4.6.1. **[19]** *Eğer* $LIM^r x \neq \varnothing$ *ise o zaman*

$$\text{\textit{ÇEK}}^r x = LIMINF^r x \cup LIMSUP^r x$$

dir.

İSPAT. $LIM^r x \neq \varnothing$ olduğundan $x = (x_k)$ dizisi sınırlıdır. Şimdi $y_* = \liminf x_k$ ve $z_* = \limsup x_k$ tanımlayalım. Bir önceki bölümdeki Önerme 3. gereği;

$$LIMINF^r x = \bar{B}_r (y_*)$$

ve

$$LIMSUP^r x = \bar{B}_r (z_*)$$

elde edilir.

$LIM^r x \neq \varnothing$ olduğundan bir önceki bölümdeki Sonuç.6 gereği ;

$$\bar{B}_r (y_*) \cap \bar{B}_r (z_*)$$

boştan farklıdır. Şimdi $\text{ÇEK}^r x = [a, b]$ yi tanımlayalım. Teoremin ispatını tamamlamak için;

$$[a, b] = [y_* - r, z_* + r]$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

$a \neq y_* - r$ olduğunu farzedelim. $a < y_* - r$ ise o zaman

$$\bar{\varepsilon} = \frac{y_* - (a + r)}{2}$$

tanımlanır. Limit inferiyor tanımı gereği $\left\{k \in \mathbb{N} : x_k < y_* - \bar{\varepsilon}\right\}$ kümesi sonlu sayıda elemana sahiptir.

$$k_0 = \max \left\{k \in \mathbb{N} : x_k < y_* - \bar{\varepsilon}\right\}$$

tanımlayalım. O zaman $a + r \notin R_k$; yani $a \notin R_k^r$, $\forall k > k_0$, olmalıdır. Bu ise a - sayısının $\text{ÇEK}^r x-$ kümesinin soldaki son nokta olmasıyla çelişir.

Eğer $a > y_* - r$ ise o zaman

$$\bar{\varepsilon} = \frac{(a+r) - y_*}{2}$$

tanımlanır. Limit inferiyor tanımından $\left\{k \in \mathbb{N} : x_k < y_* + \bar{\varepsilon}\right\}$ kümesi sonsuz çoklukta elemana sahiptir.

$R_n = [a_n, b_n]$ ve $[c, d] = \bigcap_{n=1}^{\infty} R_n$ tanımlayalım. O zaman $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_n < y_k + \bar{\varepsilon} < a + r$ olur. Böylece $c < a + r$ olur. Bu ise $K -$ çek(x) ve ÇEK$^r x$ in tanımıyla çelişir. Sonunda $a = y_* - r$ elde edilir.

Benzer olarak $b = z_* + r$ olduğu da gösterilebilir. □

Yukarıdaki teoremde eğer $LIM^r x = \varnothing$ alırsak o zaman eşitlik korunmayabilir. Örneğin $LIMINF^r x = \bar{B}_r(-1)$ ve $LIMSUP^r x = \bar{B}_r(1)$, $r < 1$ için $LIM^r x = \varnothing$ olur.

Teorem 4.6.2. *Bir $x = (x_k)$ dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bir $r > 0$ vardır öyleki*

$$\text{ÇEK}^r x = LIM^r x \neq \varnothing \text{ dir.}$$

İspat. Gereklilik: $x_* = \lim x = \liminf x = \limsup x$ dir. Önerme 1.1. den

$$LIM^r x = LIMSUP^r x = LIMINF^r x = \bar{B}_r(x_*) \neq \varnothing \text{ dir.}$$

Teorem 4.6.1 den;

$$\text{ÇEK}^r x = LIM^r x$$

elde ederiz.

Yeterlilik: $LIM^r x \neq \varnothing$ olup;

$$\text{ÇEK}^r x = [\liminf x - r, \limsup x + r]$$

ve

$$LIM^r x = [\limsup x - r, \liminf x + r]$$

dir. Üstelik ÇEK$^r x = LIM^r x$ kabulümüzden hemen

$$\liminf x = \limsup x$$

yani $x = (x_k)$ dizisinin yakınsak olduğu görülür. □

Yukarıdaki teoremde eğer $LIM^r x = \varnothing$ alınırsa o zaman eşitlik korunmayabilir. Örneğin $x = (x_k) = (k)$ dizisi tanımlansın. O zaman $x = (x_k)$ dizisi ıraksak iken;

$$\text{ÇEK}^r x = LIM^r x = \varnothing$$

olur.

KAYNAKLAR

[1] G. G. Lorentz, *A Contribution to the Theory of Divergent Sequences,* Acta Math. **80**(1948), 167-190.

[2] R. Raimi, *Invariant Means and Invariant Matrix Methods of Summability,* Duke Math. J. **30**(1963), 81-94.

[3] H. Fast, *Sur la Convergence Statistique,* Colloq. Math. **2**(1951), 241-244.

[4] I. J. Schoenberg, *The Integrability of Certain Functions and Related Summability Methods,* Amer. Math. Montly **66**(1959), 361-375.

[5] J.A. Fridy and C. Orhan, *Lacunary Statistical Convergence,* Pacific J. Math.**160**(1993), 43-51

[6] J.A. Fridy, *On Statistical Convergence,* Analysis **5**(1985), 301-313.

[7] D. Rath, B. C. Tripaty, *On Statistically Convergence and Statistically Cauchy Sequences,* Indian J. Pure Appl. Math. **25**(4)(1994), 381-386.

[8] H. X. Phu, *Rough Convergence in Normed Linear Spaces,* Numer. Funct. Anal. Optim. **22**(2001), 201-224.

[9] S. Aytar, *Rough Statistical Convergence,* Numer. Funct. Anal. Optim., **29**(3)(2008), 291-303.

[10] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1988.

[11] E. Kreyzig, *Introductory Functional Analysis with Applications*, John Wiley and Sons, New York, 1978.

[12] S. Banach, *Theorie des Operations Linearies,* Warszawa, 1932.

[13] B. Choudary, S. Nanda, *Functional Analysis with Applications,* John Wiley–Sons Inc., New Delhi, 1989.

[14] P. Schaefer, *Infinite Matrices and Invariant Means,* Proc. Amer. Math. Soc. **36**(1972), 104-110.

[15] I. Niven and H.S. Zuckerman, *An Introduction to the Theory of Numbers Fourth Ed.,*John Wiley, New York, 1980.

[16] H. Steinhaus, *Quality Control by Sampling,* Colloq. Math. **2**(1951), 98-108.

[17] J.A. Fridy and H.I. Miller, *A Matrix Characterization of Statistical Convergence,* Analysis **11**(1991), 59-66.

[18] E. Kolk, *Matrix Maps into the Space of Statistically Convergent Bounded Sequences,* Proc. Est. Acad. Sci. 2/3 **45**(1996), 187-192.

[19] S. Aytar, *The Rough Limit Set and the Core of a Real Sequence,* Numer. Funct. Anal. Optim., **29**(3)(2008), 283-290.

[20] M. H. Protter and C. M. Morrey, *A First Course in Real Analysis,* Berlin, (1977).

[21] R. G. Cooke, *Infinite Matrices and Sequence Spaces,* Macmillan, New York, 1950.

[22] C. Orhan, *Some Inequalities Involving Sublinear Functionals,*(1991)

[23] G. Das and S.K. Mishra, *Banach Limits and Lacunary Strong Almost Convergence,* J. Orissa Math. Society, **2**(1983), 61-70.

[24] S. Simons, *Banach Limits, Infinite Matrices and Sublinear Functionals,* J. Math. Anal. and Appl. **26**(1969), 640-655.

[25] J.A. Fridy and C. Orhan, *Statistical Limit Superior and Inferior,* Proc. Amer. Math. Soc. **125**(1997) n.12, 3625-3631.

[26] P. N. Natarajan, *On the Core of a Sequence Over Valued Fields,* J. Indian Math. Soc. , **55**(1990), 189-198.

[27] —,*Sublinear Functionals and a class of Conservative Matrices,* Bull. Inst. Math. Acad. Sin. **15**(1987), 89-106.

[28] J. Boos, *Classical and Modern Methods in Summability,* Oxford Univ. Press, 2000.

[29] J. Connor, *On Strong Summability with respect to A Modulus and Statistical Convergence,* Canad. Math. Bull. **32**(1989), 194-198.

[30] J. P. King, *Almost Summable Sequences,* Proc. Amer. Math. Soc. **26**(1972), 75-83.

[31] J. E. Duran, *Infinite Matrices and almost Convergence,* Math. Z. **128**(1972), 75-83.

[32] G. M. Petersen, *Regular Matrix Transformation,* Mc. Graw-Hill, (1996).

[33] H. Steinhaus, *Sur la Convergence Ordinaire et la Convergence Asymptotique,* Colloq. Math.**2**(1951), 73-74.

[34] J.A. Fridy and C. Orhan, *Statistical Core Theorems,* J. Math Anal. Appl. **208**(1997), 520-527.

[35] J.A. Fridy and C. Orhan, *Statistical Limit Points,* Poc. Amer. Math. Soc. **118**(1993), 1187-1192.

[36] R.C. Book, *Generalized Asymptotic Density.* Amer. J. Math. **75**(1953), 335-346.

ÖZGEÇMİŞ

15 Haziran 1987 tarihinde Malatya'da doğdu. İlk ve orta öğrenimini Malatya'da tamamladı. 2005 yılında İnönü Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü lisans programına kayıt yaptırdı ve 2009'da bu bölümden mezun oldu. Aynı yıl İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda yüksek lisans eğitimine başladı. Şu anda ise özel bir şirkette çalışmaktadır.