T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

LİNEER OLMAYAN VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMLERİN ÇÖZÜMLERİNİN ASİMPTOTİK KARARLILIĞI

Bekir İLHAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
HAZİRAN 2012

Tezin Başlığı	:	Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemlerin Çözümlerinin Asimptotik Kararlılığı
Tezi Hazırlayan	:	Bekir İLHAN
Sınav Tarihi	:	27.06.2012

Yukarıda adı geçen tez, jürimizce değerlendirilerek Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri

Prof. Dr. Ömer Faruk TEMİZER	(İnönü Üniversitesi)	__________
Doç. Dr. İsmet ÖZDEMİR (Danışman)	(İnönü Üniversitesi)	__________
Doç. Dr. Yılmaz YILMAZ	(İnönü Üniversitesi)	__________

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof. Dr. Asım KÜNKÜL
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum " Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemlerin Çözümlerinin Asimptotik Kararlılığı" başlıklı bu çalışmanın, bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Bekir İLHAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi
Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemlerin Çözümlerinin Asimptotik Kararlılığı
Bekir İLHAN
İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı
50+v sayfa
2012
Danışman: Doç. Dr. İsmet ÖZDEMİR

Dört bölümden oluşan bu tezin birinci bölümünde, integral denklemlerin tarihsel gelişimi ve kullanım alanları hakkında genel bilgiler verildi.

İkinci bölümde, diğer bölümlerin daha kolay anlaşılmasını sağlayacak bazı temel tanımlar ve teoremler verildi. Lineer uzay, normlu uzay, topolojik uzay, sürekli operatör ve kompaktlık gibi kavramlardan bahsedildi.

Üçüncü bölümde, kompaktsızlık ölçüsü kavramı tanıtılarak, keyfi bir Banach uzayı üzerinde tanımlı olan Kuratowski ve Hausdorff kompaktsızlık ölçüleri verildi. Ayrıca bu bölümde, kompaktsızlık ölçüsü ile birleştirilen bir sabit nokta teoremi kullanılarak, lineer olmayan Volterra tipi bir integral denklemin çözümünün varlığı ve asimptotik kararlılığı incelendi.

Dördüncü bölümde ise, üçüncü bölümde ele alınan integral denklemin çözümünün varlığı ve asimptotik kararlılığının, kompaktsızlık ölçüsü kullanılmadan, üçüncü bölümdekinden daha zayıf şartlar altında da elde edilebileceğine ilişkin yeter şartlar ve bazı sonuçlar incelendi.

ANAHTAR KELİMELER: Lineer olmayan Volterra integral denklemleri, Kompaktsızlık ölçüsü, Sınırlı ve sürekli olan fonksiyonların uzayı, Sabit nokta teoremi, Asimptotik kararlı çözüm.

ABSTRACT

MSc Thesis

Asymptotic Stability of The Solutions of The Nonlinear Volterra Integral Equations

Bekir İLHAN

İnönü University

Graduate School of Natural and Applied Sciences

Department of Mathematics

50+v pages

2012

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. İsmet ÖZDEMİR

In the first chapter of this work, consisting of four chapters, historical developments and usage areas of the integral equations are given.

In the second chapter, some basic definitions and theorems are given to understand other chapters easily. Basic concepts such as linear space, metric space, normed space, topological space, continuous operator and compactness are given.

In the third chapter, by defining the measure of noncompactness, Kuratowski measure of noncompactness and Hausdorff measure of noncompactness, which are defined on any Banach space, are given. Moreover, the existence and the asymptotic stability of the solutions of the nonlinear Volterra integral equation is examined by using a fixed point theorem associated with the measure of noncompactness.

In the fourth chapter, without using measure of noncompactness, sufficient conditions and some results about that the existence and asymptotic stability of the solution of the nonlinear Volterra integral equation, which are handled in third chapter, can also be obtained under weaker conditions than that of the third chapter are examined.

KEYWORDS: Nonlinear Volterra integral equations, Measure of noncompactness, The space of bounded and continuous functions, Fixed point theorem, Asymptotic stable solution.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmamda danışmanlığımı yürüten, bu tezin hazırlanmasında ve yazılmasında; ilgisini, desteğini ve yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen değerli hocam, sayın Doç. Dr. İsmet ÖZDEMİR'e minnet ve şükranlarımı sunarım.

Açmış olduğu lisansüstü derslerle, integral denklemlere ilişkin kavramları öğrenmeme katkıda bulunan sayın Prof. Dr. Ö. Faruk TEMİZER'e ve bu tezin yazılmasında kullandığım "Latex" programı ile ilgili karşılaştığım bazı güçlükleri aşmamda bana yardımcı olan sayın Prof. Dr. Bilal ALTAY'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SEMBOLLER

$\mathbb{R}$	:	Reel sayılar cümlesi,
$\mathbb{R}^+$	:	$[0, \infty)$ aralığı,
$\mathbb{N}$	:	Doğal sayılar cümlesi,
$\mathbb{C}$	:	Kompleks sayılar cümlesi,
I	:	Kapalı ve sınırlı $[a, b]$ aralığı,
$B(I)$	:	I aralığında tanımlı, reel değerli ve sınırlı fonksiyonların uzayı,
$C(I)$	:	I aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayı,
$BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$	:	$\mathbb{R}^+$'da tanımlı, reel değerli, sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı,
$C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^+$'dan $\mathbb{R}^n$ cümlesine tanımlı ve sürekli fonksiyonların uzayı,
$BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$	:	$\mathbb{R}^+$'dan $\mathbb{R}^n$ cümlesine tanımlı, sürekli ve sınırlı fonksiyonların uzayı,
sup	:	Supremum,
inf	:	İnfimum,
E	:	Banach Uzayı,
$\mathfrak{M}_E$	:	E Banach uzayının boştan farklı ve sınırlı alt cümlelerinin ailesi,
$\mathfrak{N}_E$	:	$\mathfrak{M}_E$'nin kapanışı kompakt olan alt cümlelerinin ailesi,
$\overline{A}$	:	A cümlesinin kapanışı,
μ	:	Nonkompaktlık (kompaktsızlık) ölçüsü,
α	:	Kuratowski kompaktsızlık ölçüsü,
χ	:	Hausdorff kompaktsızık ölçüsü,
$B(x, r)$	:	x merkezli r yarıçaplı açık yuvar,
$B[x, r]$	:	x merkezli r yarıçaplı kapalı yuvar,
$\operatorname{Conv} X$	:	X'i ihtiva eden konveks ve kapalı cümlelerin en küçüğü,
$w(x, \epsilon)$	:	x'in, $\epsilon \geq 0$ sayısına karşılık gelen süreklilik modülü,
$X(t)$	:	$\{x(t) : x \in X\}$, $(X \subset BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}))$,
$\operatorname{diam} X(t)$	:	$X(t)$ cümlesinin çapı,
$\limsup_{t\to\infty} \operatorname{diam} X(t)$	:	$\operatorname{diam} X(t)$ fonksiyonunun limit supremumu.

1. GİRİŞ

İntegral işareti altında bilinmeyen bir fonksiyonu ihtiva eden denklemler olarak tanımlanan integral denklemler, bu yüzyılın başlarında incelenmeye ve üzerinde araştırmalar yapılmaya başlanmış bir konudur. 1823 yılında Abel tarafından bir integral denkleme rastlanmış ve integral denklem tabiri ilk defa 1888 yılında De Bois Reymond tarafından kullanılmıştır, [**1**, syf. 1]. Pek çok konu gibi, integral denklemler de çeşitli ihtiyaçlar sonucu ortaya çıkmış ve zamanın problemlerine cevap verecek şekilde geliştirilerek olgunlaştırılmıştır. İntegral denklemler gün geçtikçe daha çok kullanım alanları bulmakta, teknolojide ve birçok mühendislik alanında yaygın olarak kullanılmaktadır. Esneklik, plastisite, kütle ve ısı aktarımı, akışkanlar mekaniği, salınma kuramı, stokastik modelleme, kemoterapi, ekonomi ve tıp, integral denklemlerin kullanıldığı bazı alanlardır, [**2**, syf. 6-7].

İntegral denklemler, lineer ve lineer olmayan integral denklemler olarak iki grupta incelenir. x bilinmeyen fonksiyon olmak üzere;

$$x(t) = f(t) + \int_0^t K(t,s)x(s)ds$$

formundaki denklem bir lineer integral denklem,

$$x(t) = f(t) + \int_0^t K(t,s)x^n(s)ds, \ (n \neq 1)$$

denklemi ise lineer olmayan bir integral denklemdir. Lineer olmayan integral denklemler daha genel olarak,

$$x(t) = f(t) + \int_0^t u(t,s,x(s))ds$$

şeklinde de verilebilir, [**3**].

Trafik araç teorisi ve biyoloji bilimindeki bazı problemlerin çözümü,

$$x(t) = f(t,x(t)) \int_0^1 u(t,s,x(s))ds, \ t \in [0,1]$$

formundaki lineer olmayan integral denklemine bağlı olarak incelenir, [**3**].

İntegral denklemler integral sınırlarına göre Fredholm ve Volterra olmak üzere iki tipten oluşmaktadır. Fredholm integral denkleminde integralin sınırları sabittir. Volterra tipi integral denklemlerde ise integral sınırlarından biri değişkendir, [**4**]. Volterra tipi integral denklemlere ait çalışmalar ilk olarak, 1860-1940 yılları arasında yaşamış olan İtalyan matematikçilerinden Vito Volterra tarafından yapılmıştır, [**4**]. Volterra tipi integral denklemlerin belirli fiziksel problemlere karşılık geldikleri anlaşılınca bu alanda yapılan çalışmalar artmıştır, [**5**]. A. Friedman, konvolüsyon çekirdekli Volterra integral denklemlerin, kuvvetli hipotez şartları altında pozitif ve monoton çözümlerini elde edip, çözümlerin asimptotik davranışıyla ilgilenmiştir, [**6**].

R. Ling, konvolüsyon çekirdekli lineer Volterra integral denklemi için " Özdeşlik Teoremi " ni verip, bu teoreme dayanarak birim kaynaklı, pozitif ve monoton çekirdekli denklemlerin çözümlerinin pozitif ve sınırlı fonksiyonlar olduğunu göstermiştir, [**6**].

$$x(t) = (Tx)(t) \int_0^t u(t,s,x(s))ds$$

ve

$$x(t) = f(t,x(t)) \int_0^t u(t,s,x(s))ds$$

formundaki lineer olmayan Volterra tipi integral denklemlerin kapalı ve sınırlı bir aralıkta tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların Banach uzayındaki çözülebilirliğine dair incelemelerin yapıldığı çalışmalar da vardır, [**3**]. Yine

$$x(t) = a(t) + x(t) \int_0^t v(t,\tau,x(\tau))d\tau$$

ve

$$x(t) = a(t) + (Tx)(t) \int_0^t f(\phi(t,s))\varphi(x(s))ds$$

eşitlikleriyle verilen lineer olmayan Volterra tipi integral denklemlerin çözülebilirliği, I aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların uzayında incelenmiştir, [**7**].

Bu çalışmada ise, önce, kompaktsızlık ölçüsüyle birleştirilen bir teknik yardımıyla,

$$x(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t u(t, s, x(s))ds, \ (t \geq 0)$$

eşitliğiyle verilen lineer olmayan Volterra integral denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ Banach uzayında çözülebilirliği ve çözümlerin asimptotik kararlılığı incelendi, [**8**]. Daha sonra, kompaktsızlık ölçüsünü kullanmaksızın, aynı denklemin $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ ve $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ uzaylarında bir çözüme sahip olmasını ve çözümlerin asimptotik kararlılığını garanti eden yeter şartlar incelendi, [**9**].

2. TEMEL TANIM VE TEOREMLER

Bu bölümde, sonraki bölümlerde kullanacağımız bazı temel tanımlar ile teoremler verildi.

2.1. Temel Kavramlar

TANIM 2.1.1. **(Lineer Uzay)** [**10**, syf. 69] Boş olmayan bir L cümlesi ve bir $\mathbb{F}$ cismi verilmiş olsun. Eğer $x, y \in L$, $\lambda \in \mathbb{F}$ için $+(x,y) = x + y$ ve $\cdot(\lambda, x) = \lambda x$ ile tanımlanan $+ : L \times L \to L$ ve $\cdot : \mathbb{F} \times L \to L$ fonksiyonları, her $x, y, z \in L$ ve her $\lambda, \beta \in \mathbb{F}$ için aşağıdaki eşitlikleri sağlıyorsa, L cümlesine, $\mathbb{F}$ cismi üzerinde bir **lineer uzay** (vektör uzayı) denir.

(a) $x + y = y + x$,

(b) $(x + y) + z = x + (y + z)$,

(c) $\forall x \in L$ için $x + \theta = \theta + x = x$ olacak şekilde bir $\theta \in L$ vardır,

(d) $\forall x \in L$ için $x + (-x) = (-x) + x = \theta$ olacak şekilde bir $(-x) \in L$ vardır,

(e) $(\lambda + \beta)x = \lambda x + \beta x$,

(f) $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$,

(g) $(\lambda\beta)x = \lambda(\beta x)$,

(h) $1x = x$.

$F = \mathbb{R}$ olması halinde L'ye reel, $F = \mathbb{C}$ olması halinde ise L'ye kompleks lineer uzay denir.

TANIM 2.1.2. **(Topolojik Uzay)** [**11**, syf. 23] X, bir cümle ve τ da $P(X)$ in bir alt cümlesi olsun. Eğer aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa, τ'ya X üzerinde bir **topoloji** denir ve (X, τ) ikilisine de bir topolojik uzay adı verilir.

(t_1) $X, \emptyset \in \tau$,

(t_2) $\forall (A_i)_{i \in I} \subset \tau$ (I, herhangi bir indis cümlesi) için $\bigcup_{i \in I} A_i \in \tau$'dur. Yani τ'dan alınan herhangi sayıda elemanın birleşimi τ'ya aittir.

(t_3) $\forall (A_i)_{i\in J} \subset \tau$ (J, sonlu indis cümlesi) için $\bigcap_{i\in J} A_i \in \tau$'dur. Yani τ'dan alınan sonlu sayıda elemanın kesişimi τ'ya aittir.

Tanım 2.1.3. **(Açık Cümle)** [**11**, syf. 24] (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda; τ'nun her elemanına, X üzerindeki τ topolojisine göre bir **açık cümle** denir.

Tanım 2.1.4. **(Kapalı Cümle)** [**11**, syf. 24] (X, τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda; X uzayına göre tümleyeni açık olan cümleye τ topolojisine göre **kapalı cümle** denir. Yani, " $F \subset X$ kapalıdır $\Leftrightarrow F^c \in \tau$ " önermesi doğrudur.

Tanım 2.1.5. **(Kapanış)** [**11**, syf. 66] (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A'yı ihtiva eden bütün kapalı cümlelerin arakesitine A'nın **kapanışı** denir ve $\overline{A}$ ile gösterilir.

Tanım 2.1.6. **(Sürekli fonksiyon)** [**11**, syf. 81] (X, τ) ve (X', τ') iki topolojik uzay, $f : X \to X'$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. X' uzayında $f(x_0)$'ın her N' komşuluğu için, X uzayında x_0'ın $f(N) \subset N'$ olacak şekilde bir N komşuluğu varsa, f fonksiyonuna x_0 noktasında τ **ve** τ' **ye göre süreklidir** denir.

Tanım 2.1.7. **(Normlu Uzay)** [**10**, syf. 103] X, bir lineer uzay ve $\mathbb{K}$ reel veya kompleks cisim olsun. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{K}$ fonksiyonu, $\forall x, y \in X$ ve $\forall a \in \mathbb{K}$ için aşağıdaki şartları sağlıyorsa, $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir **norm** ve $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine de bir **normlu uzay** denir.

(N1) $\|x\| \geq 0$,
(N2) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,
(N3) $\|ax\| = |a|\|x\|$,
(N4) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$.

Tanım 2.1.8. **(Yakınsak Dizi)** [**12**, syf. 75] (x_n), $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olsun. $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x_0\| = 0$ ise (x_n) dizisi x_0 noktasına **yakınsıyor** denir ve bu durum, $x_n \to x_0$ $(n \to \infty)$ veya $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.9. [**12**, syf. 75] Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayı, $x_0 \in X$ noktası ve pozitif r sayısı verilsin. O zaman

$$B(x_0, r) = \{x \in X : \|x - x_0\| < r\}$$

cümlesine x_0 merkezli r yarıçaplı **açık yuvar** ve

$$B[x_0, r] = \{x \in X : \|x - x_0\| \leq r\}$$

cümlesine de x_0 merkezli r yarıçaplı **kapalı yuvar** adı verilir.

Tanım 2.1.10. **(Cauchy Dizisi)** [**12**, syf. 77] (x_n), $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi olsun. Her $\epsilon > 0$ için $m, n > n_\epsilon$ olduğunda, $\|x_m - x_n\| < \epsilon$ olacak şekilde ϵ'a bağlı bir n_ϵ doğal sayısı bulunabiliyorsa (x_n) dizisine bir **Cauchy dizisi** denir.

Tanım 2.1.11. **(Banach Uzayı)** [**12**, syf. 82] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa, bu $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına tam normlu uzay veya **Banach Uzayı** denir.

Tanım 2.1.12. **(Operatör)** [**13**, syf. 67] X ve Y lineer uzaylar ve $D \subset X$ olsun. D'nin her elemanına Y'nin birtek elemanını karşılık getiren bir kurala X'ten Y'ye bir **operatör** denir ve $T : X \to Y$ ile gösterilir. Burada D'ye, T operatörünün tanım cümlesi denir ve $D(T)$ ile gösterilir.

$$R = R(T) = \{y \in Y : y = T(x),\ x \in D(T)\}$$

cümlesine T operatörünün görüntü cümlesi denir. Buna göre, $T : X \to Y$ gösteriminde, $D(T) \neq X$ veya $R(T) \neq Y$ olabileceğine dikkat edilmelidir, [**12**, syf. 123].

Tanım 2.1.13. **(Operatörün Bir Noktadaki Sürekliliği)** [**12**, syf. 125] X ve Y normlu uzayları ve $T : X \to Y$ operatörü verilsin. Aşağıdakilerden biri sağlandığında, T operatörü (dönüşümü) $x_0 \in D(T)$ **noktasında süreklidir** denir.

(a) Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık $\|x - x_0\| < \delta$ şartını sağlayan her $x \in D(T)$ için $\|T(x) - T(x_0)\| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon, x_0) > 0$ sayısı vardır.

(b) $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ olan her $(x_n) \subset D(T)$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} T(x_n) = T(x_0)$'dır.

TANIM 2.1.14. **(Sürekli Operatör)** [**12**, syf. 126] X ve Y normlu uzaylar olmak üzere $T : X \to Y$ operatörü $D(T)$'nin her noktasında sürekli ise T operatörü $D(T)$ üzerinde süreklidir denir.

TANIM 2.1.15. **(Düzgün Süreklilik)** [**14**, syf. 16] X ve Y normlu uzayları ve $T : X \to Y$ operatörü verilsin. Her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, $\|x - y\| < \delta$ şartını sağlayan her $x, y \in X$ için $\|Tx - Ty\| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa T operatörüne düzgün süreklidir denir.

TANIM 2.1.16. **(Eşsüreklilik)** [**15**, syf. 276] $X \subset C[a, b]$ olsun. Bu durumda, $\forall \epsilon > 0$ sayısına karşılık, $|t_1 - t_2| < \delta$ eşitsizliğini sağlayan her $t_1, t_2 \in [a, b]$ ve her $x \in X$ için $|x(t_1) - x(t_2)| < \epsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı varsa X cümlesine **eşsüreklidir** denir.

TANIM 2.1.17. **(Sınırlı Operatör)** [**12**, syf. 126] X ve Y normlu uzayları ve $T : X \to Y$ operatörü verilsin. $\forall x \in D(T)$ için $\|Tx\| \leq c\|x\|$ olacak şekilde sabit bir $c \geq 0$ sayısı varsa T operatörü $D(T)$ üzerinde sınırlıdır denir.

TEOREM 2.1.1. [**12**, syf. 127] *X ve Y iki normlu uzay olsun. $T : X \to Y$ lineer operatörünün $D(T)$ üzerinde sınırlı olması için gerek ve yeter şart T operatörünün $D(T)$ üzerinde sürekli olmasıdır.*

TANIM 2.1.18. [**12**, syf. 223] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında açık cümlelerin bir ailesi $\mathcal{D} = (D_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ olsun. Eğer bir $E \subset X$ cümlesi için $E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} D_\lambda$ oluyorsa $\mathcal{D}$ ailesine E cümlesinin bir **açık örtüsü** denir. Eğer $\Lambda_0 \subset \Lambda$ sonlu ve $E \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda_0} D_\lambda$ ise $\mathcal{D}_0 = (D_\lambda)_{\lambda \in \Lambda_0}$ ailesine E cümlesinin **sonlu alt örtüsü** adı verilir.

TEOREM 2.1.2. [**12**, syf. 89] *$(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve $A \subset X$ olsun. $x \in \overline{A}$ olması için gerek ve yeter şart, terimleri A'da olan ve x noktasına yakınsayan bir (x_n) dizisinin olmasıdır.*

TANIM 2.1.19. **(Kompakt Cümle)** [**12**, syf. 224] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayının bir altcümlesi E olsun. Eğer E cümlesinin her açık örtüsünün sonlu bir alt örtüsü varsa E cümlesine X' te **kompakt cümle** denir. Eğer E cümlesinin $\overline{E}$ kapanışı

X'te kompakt bir cümle ise E'ye X'te bir **relatif (göreceli) kompakt cümle** denir. X kompakt (relatif kompakt) bir cümle ise $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayına kompakt (relatif kompakt) normlu uzay adı verilir.

TANIM 2.1.20. **(Dizisel Kompakt)** [**12**, syf. 224] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayının bir alt cümlesi E olsun. E içindeki her dizinin, limiti E'de olan yakınsak bir alt dizisi varsa E cümlesine, X'te **dizisel kompakt cümle** denir.

LEMMA 2.1.1. [**12**, syf. 227] $(X, \|\cdot\|)$ *normlu uzayı ve* $E \subset X$ *alt cümlesi verilsin.* E *cümlesinin* X*'te kompakt olması için gerek ve yeter şart,* E *cümlesinin* X*'te dizisel kompakt olmasıdır.*

TANIM 2.1.21. **(Sınırlı Cümle)** [**16**, syf. 4] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay ve $A \subset X$ olsun. $\forall x \in A$ için $\|x\| \leq M$ olacak şekilde bir $M > 0$ sayısı mevcutsa A cümlesine sınırlıdır denir.

TEOREM 2.1.3. [**17**, syf. 28] ***(Arzela-Ascoli)*** $C[a,b]$*'nin bir* E *alt cümlesinin relatif kompakt olması için gerek ve yeter şart,* E*'nin sınırlı ve eşsürekli olmasıdır.*

TANIM 2.1.22. **(Büzülme Dönüşümü)** [**17**, syf. 17] $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay ve $T : X \to X$ dönüşümü verilsin. Eğer $\forall x, y \in X$ için

$$\|Tx - Ty\| \leq K\|x - y\|$$

olacak şekilde bir K $(0 \leq K < 1)$ sabiti varsa T'ye bir "büzülme dönüşümü" denir.

TEOREM 2.1.4. [**17**, syf. 17] ***(Sabit Nokta Teoremi)*** $(X, \|\cdot\|)$ *bir Banach uzayı ve* $T : X \to X$ *bir büzülme dönüşümü olsun. Bu durumda* T *dönüşümünün sabit bıraktığı, yani* $Tx_0 = x_0$ *olacak şekilde, birtek* $x_0 \in X$ *noktası vardır.*

3. LİNEER OLMAYAN VOLTERRA TİPİ BİR İNTEGRAL DENKLEMİN $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ UZAYINDAKİ ÇÖZÜMLERİ

Bu bölümde kompaktsızlık ölçülerinin önemi ve tarihi gelişimine ilişkin bazı bilgiler ve kompaktsızlık ölçüsü kavramının tanımı verilecektir. Daha sonra keyfi bir Banach uzayında tanımlanan Kuratowski ve Hausdorff kompaktsızlık ölçülerinden bahsedilerek bu iki ölçünün denkliği ifade edilecektir. Ayrıca bu bölümde, kapalı ve sınırlı bir aralıkta tanımlı, reel değerli ve sürekli olan fonksiyonların monotonluğuyla ilgili bazı kavramlar incelenecek, bu kavramlar dikkate alınarak bu uzaylarda tanımlı olan bazı kompaktsızlık ölçüleri verilecek ve bu kompaktsızlık ölçülerinin regüler (düzenli) olup olmadığı ve biribirine denkliği ele alınacaktır. Yine bu bölümde lineer olmayan Volterra tipi bir integral denklemin; $\mathbb{R}^+$da tanımlı, reel değerli, sınırlı ve sürekli olan fonksiyonların $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ Banach uzayındaki çözümünün varlığı ve asimptotik kararlılığı araştırılacaktır. Çözümün varlığı ve asimptotik kararlılığı gösterilirken sabit nokta teoremi ve kompaktsızlık ölçüsü kullanılacaktır.

3.1. Kompaktsızlık Ölçüleri

Kompaktsızlık ölçüleri lineer olmayan analizde önemli bir yere sahiptir. Operatör teorisi ve Banach uzaylarındaki geometri kadar, diferansiyel ve integral denklemler teorisinde de kullanılırlar. Kompaktsızlık ölçüsü kavramı Kuratowski ve Darbo'nun temel çalışmalarıyla başlamıştır, [**18**]. 1970'lerden başlayarak bu kavram ve onun uygulamalarıyla ilgili pekçok çalışma yapılmıştır. Kompaktsızlık ölçüsü teorisinde Kuratowski ve Hausdorff kompaktsızlık ölçüleri önemli bir yere sahiptir. Özellikle Hausdorff ölçüsü lineer olmayan analizin birçok dalında ve uygulamalarında kullanılmaktadır, [**18**]. Kompaktsızlık ölçüsünün farklı tanımları arasında en kullanışlı olanı aksiyomatik yaklaşıma sahip olanıdır. Şimdi bazı yardımcı bilgileri hatırlatarak kompaktsızlık ölçüsü kavramının tanımını verelim.

E, $\|.\|$ normuyla bir Banach uzayı olmak üzere; E'nin boştan farklı bir X alt cümlesi için $\overline{X}$ ile, X in kapanışını ve Conv$X$ ile, X in konveks kapanışını gösterelim. Ayrıca, $X, Y \subset E$ için $X + Y = \{x + y : x \in X$ ve $y \in Y\}$ ve $\lambda X = \{\lambda x : x \in X\}$ olsun. E'nin boştan farklı ve sınırlı alt cümlelerinin ailesini $\mathfrak{M}_E$ ile ve $\mathfrak{M}_E$'deki relatif kompakt (kapanışı kompakt) alt cümlelerin ailesini de $\mathfrak{N}_E$ ile gösterelim. Şimdi, aşağıdaki tanımı verebiliriz.

Tanım 3.1.1. **[18]** Bir $\mu : \mathfrak{M}_E \to \mathbb{R}^+ = [0, \infty)$ fonksiyonu, aşağıdaki şartları sağlarsa, bu fonksiyona E'de bir **nonkompaktlık (kompaktsızlık) ölçüsü** denir.

(1) ker $\mu = \{X \in \mathfrak{M}_E : \mu(X) = 0\} \neq \emptyset$ ve ker $\mu \subset \mathfrak{N}_E$'dir,

(2) $X \subset Y \Rightarrow \mu(X) \leq \mu(Y)$,

(3) $\mu(\overline{X}) = \mu(\text{ Conv } X) = \mu(X)$,

(4) $\mu(\lambda X + (1 - \lambda)Y) \leq \lambda\mu(X) + (1 - \lambda)\mu(Y), \lambda \in [0, 1]$,

(5) Eğer $(X_n), (n = 1, 2, \ldots), \mathfrak{M}_E$'deki kapalı cümlelerin, $X_{n+1} \subset X_n$ ve $\lim_{n\to\infty} \mu(X_n) = 0$ şartlarını sağlayan bir dizisi ise o zaman $X_\infty = \bigcap_{n=1}^{\infty} X_n$ cümlesi boş değildir.

(1)'de tanımlanan ker μ ailesi, "μ nonkompaktlık (kompaktsızlık) ölçüsünün çekirdeği" olarak adlandırılır. Eğer $(1) - (5)$ şartlarına ilave olarak,

(6) $\mu(X \cup Y) = \text{ maks}\{\mu(X), \mu(Y)\}$,

(7) $\mu(X + Y) \leq \mu(X) + \mu(Y)$,

(8) $\mu(\lambda X) = |\lambda|\, \mu(X), (\lambda \in \mathbb{R})$ ve

(9) ker $\mu = \mathfrak{N}_E$

şartları da sağlanıyorsa μ'ye regüler (düzenli) bir kompaktsızlık ölçüsü adı verilir.

Daha öncede bahsettiğimiz önemli kompaktsızlık ölçülerinden Kuratowski ölçüsü aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.1.2. E bir Banach uzayı ve $X \in \mathfrak{M}_E$ olmak üzere;
$\alpha(X) = \inf\{\epsilon > 0 : X,$ çapı ϵ'dan küçük olan sonlu sayıdaki küme ile örtülebilir$\}$

şeklinde tanımlanan $\alpha : \mathfrak{M}_E \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonuna Kuratowski kompaktsızlık ölçüsü adı verilir ve α regüler (düzenli) bir kompaktsızlık ölçüsüdür, [**18**].

Tanım 3.1.3. **(ϵ-Ağ)** (X, d) bir metrik uzay, A, X'in bir alt cümlesi ve $\epsilon > 0$ olsun. $X = \cup_{y \in A} B(y, \epsilon)$ ise yani $\forall x \in X$ için $d(x, y) < \epsilon$ olacak şekilde bir $y \in A$ elemanı mevcut ise A'ya X için bir ϵ-ağ denir, [**19**, syf. 173].

Diğer bir önemli ve kullanışlı ölçü olan Hausdorff kompaktsızlık ölçüsü de aşağıda verilmektedir.

Tanım 3.1.4. E bir Banach uzayı olmak üzere;
$\chi : \mathfrak{M}_E \to \mathbb{R}^+, \quad \chi(X) = \inf\{\epsilon > 0 : X, E\text{'de sonlu bir } \epsilon\text{-ağına sahiptir}\}$
şeklinde tanımlanan χ fonksiyonuna Hausdorff nonkompaktlık (kompaktsızlık) ölçüsü denir, [**18**].

$\forall X \in \mathfrak{M}_E$ için $\chi(X) \leq \alpha(X) \leq 2\chi(X)$ eşitsizliği geçerli olduğundan χ ve α denktir, [**18**].

Şimdi E Banach uzayı yerine, kapalı ve sınırlı $[a, b]$ aralığında tanımlı, reel değerli ve sürekli fonksiyonların maksimum normuyla verilen $C[a, b]$ uzayını alalım. Bu durumda; $X \in \mathfrak{M}_{C[a,b]}$ yani; X, $C[a, b]$ uzayının boş olmayan ve sınırlı bir alt cümlesi olmak üzere; $x \in X$ ve $\epsilon > 0$ için x'in süreklilik modülü olarak bilinen $w(x, \epsilon)$ sayısını,

$$w(x, \epsilon) = \sup\{|x(s) - x(t)| : t, s \in [a, b] \text{ ve } |s - t| \leq \epsilon\}$$

eşitliğiyle tanımlayalım. Ayrıca,

$$w(X, \epsilon) = \sup\{w(x, \epsilon) : x \in X\} \text{ ve } w_0(X) = \lim_{\epsilon \to 0} w(X, \epsilon)$$

olsun. Böylece;

$$\chi(X) = \frac{w_0(X)}{2} \tag{3.1.1}$$

eşitliği geçerlidir, [**18**].

3.2. $C[a,b]$ Uzayında Bazı Kompaktsızlık Ölçüleri

Bu kısımda $I=[a,b]$ kapalı ve sınırlı aralığında tanımlı, reel değerli ve sınırlı olan fonksiyonların supremum normuyla ifade edilen $B(I)$ uzayında bazı cümlelerin nicelikleri incelenerek $C(I)=C[a,b]$ fonksiyon uzayında tanımlanan bazı kompaktsızlık ölçülerinden bahsedilecektir.

$x\in B(I)$ ve $\epsilon>0$ verildiğinde;

$$d(x,\epsilon)=\sup\{|x(s)-x(t)|-[x(s)-x(t)] : t,s\in I, t\leq s \text{ ve } s-t\leq\epsilon\}$$

ve

$$i(x,\epsilon)=\sup\{|x(s)-x(t)|-[x(t)-x(s)] : t,s\in I, t\leq s \text{ ve } s-t\leq\epsilon\}$$

olsun. $\epsilon=b-a$ için $d(x,b-a)$ ve $i(x,b-a)$ yerine, sırasıyla, $d(x)$ ve $i(x)$ gösterimleri kullanılır. Burada $d(x,\epsilon)$, azalış modülü, $i(x,\epsilon)$, artış modülü, $d(x)$, x fonksiyonunun azalış derecesi ve $i(x)$'te x fonksiyonunun artış derecesi olarak adlandırılır, [**18**].

$$x\in B(I), I\text{'da azalmayandır} \quad \Leftrightarrow \quad \forall s_1,s_2\,[s_1,s_2\in I \text{ ve } s_1<s_2\Rightarrow x(s_1)\leq x(s_2)]\,,$$

$$x\in B(I), I\text{'da artmayandır} \quad \Leftrightarrow \quad \forall s_1,s_2\,[s_1,s_2\in I \text{ ve } s_1<s_2\Rightarrow x(s_1)\geq x(s_2)]$$

önermelerinin doğruluğu da dikkate alınırsa aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.1. [**18**]

(1) *$x\in B(I)$ ve x, I'da azalmayan ise $\forall\epsilon>0$ için $d(x,\epsilon)=0$ dır.*

(2) *$x\in B(I)$ ve x, I'da artmayan ise $\forall\epsilon>0$ için $i(x,\epsilon)=0$ dır.*

İspat. (1) x, I'da azalmayan ve $\epsilon>0$ olsun. Bu durumda;

$$\begin{aligned} d(x,\epsilon) &= \sup\{|x(s)-x(t)|-[x(s)-x(t)] : t,s\in I, t\leq s \text{ ve } s-t\leq\epsilon\} \\ &= \sup\{x(s)-x(t)-x(s)+x(t) : t,s\in I, t\leq s \text{ ve } s-t\leq\epsilon\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

dır. x, I'da artmayan ise $i(x,\epsilon)=0$ olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. □

Teorem 3.2.2. [**18**] *$x\in B(I)$ ve $\epsilon>0$ olsun. Bu durumda;*

(1) $d(x, \epsilon) = 0$ *ise* x, I*'da azalmayandır,*

(2) $i(x, \epsilon) = 0$ *ise* x, I*'da artmayandır.*

İSPAT. $x \in B(I)$ ve $\epsilon > 0$ olmak üzere; $d(x, \epsilon) = 0$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda; (1)'de verilen önermenin doğru olduğunu yani, x fonksiyonunun I'da azalmayan olduğunu görelim. Bunun için;

$$\forall t, s\,[(t, s \in I \text{ ve } t < s) \Rightarrow x(t) \leq x(s)] \tag{3.2.1}$$

önermesinin doğru olduğunu göstermeliyiz. (3.2.1) önermesinin yanlış olduğunu kabul edelim. Buna göre,

$$\exists t, s\,[(t, s \in I \text{ ve } t < s) \text{ ve } x(t) > x(s)] \tag{3.2.2}$$

önermesi doğrudur. Şu halde iki durum söz konusudur.

(I) $s - t \leq \epsilon$ ise

$$|x(s) - x(t)| - [x(s) - x(t)] = x(t) - x(s) - x(s) + x(t) = 2(x(t) - x(s)) > 0$$

olup buradan,

$$d(x, \epsilon) = \sup\{|x(s) - x(t)| - [x(s) - x(t)] : t, s \in I, t \leq s \text{ ve } s - t \leq \epsilon\} > 0$$

olur. Bu ise $d(x, \epsilon) = 0$ hipotezi ile çelişir.

(II) $s - t > \epsilon$ olsun. Bu durumda $\frac{s-t}{n} \leq \epsilon$ olacak şekilde bir n doğal sayısı bulunabilir. Şimdi, $t = t_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = s$ olacak şekildeki $t_0, t_1, t_2, \ldots, t_n$ noktalarının yardımıyla $[t, s]$ aralığını n eşit aralığa bölelim. Buna göre (3.2.2)'den, $x(t) = x(t_0) > x(t_n) = x(s)$ yazılabilir.

$$\exists i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \text{ için } x(t_i) > x(t_{i+1})$$

önermesinin doğru olduğunu görelim. Aksi halde,

$$\forall i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\} \text{ için } x(t_i) \leq x(t_{i+1})$$

önermesi doğru olur ki bu da $x(t_0) \leq x(t_n)$ olmasını gerektirir. Bu ise, $x(t_0) > x(t_n)$ ile çelişir. Böylece $i \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$ olan en az bir i için $t_{i+1} - t_i \leq \epsilon$ ve

$x(t_i) > x(t_{i+1})$ olduğundan,

$$\begin{aligned} d(x,\epsilon) &= \sup\{|x(s)-x(t)| - [x(s)-x(t)] : t,s \in I, t \leq s \text{ ve } s-t \leq \epsilon\} \\ &\geq |x(t_{i+1})-x(t_i)| - [x(t_{i+1})-x(t_i)] = 2(x(t_i)-x(t_{i+1})) > 0 \end{aligned}$$

elde edilir. Bu da $d(x,\epsilon)=0$ hipotezi ile çelişir.

(2)'nin ispatı benzer şekilde yapılabilir. Böylece ispat tamamlanır. □

Teorem 3.2.1 ve Teorem 3.2.2'den aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.2.1. **[18]** *$x \in B(I)$ ve herhangi bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda;*
(1) $d(x,\epsilon)=0 \Leftrightarrow x, I$'da azalmayandır.
(2) $i(x,\epsilon)=0 \Leftrightarrow x, I$'da artmayandır.

$X \in \mathfrak{M}_{B(I)}$ ve $\epsilon > 0$ için;

$$d(X,\epsilon) = \sup\{d(x,\epsilon) : x \in X\},\ d_0(X) = \lim_{\epsilon\to 0} d(X,\epsilon)$$

ve

$$i(X,\epsilon) = \sup\{i(x,\epsilon) : x \in X\},\ i_0(X) = \lim_{\epsilon\to 0} i(X,\epsilon)$$

olmak üzere;

$$d(X,\cdot) : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ \epsilon \to d(X,\epsilon)$$

ve

$$i(X,\cdot) : (0,\infty) \to \mathbb{R},\ \epsilon \to i(X,\epsilon)$$

olarak tanımlanan $d(X,\cdot)$ ve $i(X,\cdot)$ fonksiyonlarını ele alalım. $\epsilon_1 < \epsilon_2$ ve bir $x \in B(I)$ için

$$d(x,\epsilon_1) \leq d(x,\epsilon_2) \tag{3.2.3}$$

dir. (3.2.3) eşitsizliğinde $x \in B(I)$ elemanları üzerinden supremum alınırsa,

$$\sup\{d(x,\epsilon_1) : x \in X\} \leq \sup\{d(x,\epsilon_2) : x \in X\} \tag{3.2.4}$$

olacağından (3.2.4)'ten $d(X,\epsilon_1) \leq d(X,\epsilon_2)$ elde edilir, yani $d(X,\cdot)$ fonksiyonu azalmayandır. $i(X,\cdot)$ fonksiyonun da azalmayan olduğu benzer şekilde görülebilir.

SONUÇ 3.2.2. **[18]** *$\epsilon > 0$ ve $X \in \mathfrak{M}_{B(I)}$ olsun. Bu durumda;*

(1) *$d(X, \epsilon) = 0 \Leftrightarrow X$ cümlesindeki fonksiyonlar I aralığında azalmayandır.*

(2) *$i(X, \epsilon) = 0 \Leftrightarrow X$ cümlesindeki fonksiyonlar I aralığında artmayandır.*

İSPAT. (1)'de verilen önermenin doğruluğunu görelim. (2)'nin ispatı da benzer şekilde yapılabilir.

$\Rightarrow)$: $d(X, \epsilon) = \sup\{d(x, \epsilon) : x \in X\} = 0$ olsun. Bu durumda; $\forall x \in X$ için $d(x, \epsilon) = 0$ olur. Sonuç 3.2.1'den, $\forall x \in X$ için x, I'da azalmayandır.

$\Leftarrow)$: X cümlesindeki fonksiyonlar I aralığında azalmayan olsun. Bu durumda; $\forall x \in X$ fonksiyonu I aralığında azalmayandır. Böylece, Sonuç 3.2.1'den; $\forall x \in X$ için $d(x, \epsilon) = 0$ dır. Şu halde; $d(X, \epsilon) = \sup\{d(x, \epsilon) : x \in X\} = 0$ dır. □

Sonuç 3.2.2, $d_0(X)$ ve $i_0(X)$ için geçerli değildir. Yani $d_0(X) = 0$ ($i_0(X) = 0$) olduğu halde X cümlesindeki fonksiyonlar azalmayan (artmayan) olmayabilir. Bu durum Örnek 3.2.1'de ele alınacaktır.

$X \in \mathfrak{M}_{B(I)}$ cümlesindeki fonksiyonların I'da azalmayan (artmayan) olması durumunda $d_0(X) = 0$ ($i_0(X) = 0$) olacağı Sonuç 3.2.2'den açıktır. Şimdi, $B(I)$ uzayının kapalı bir alt uzayı olan $C = C(I)$ sürekli fonksiyonlar uzayını ele alalım. $X \in \mathfrak{M}_C$ ve bir $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda; $t, s \in I, t \leq s$ ve $s - t \leq \epsilon$ olmak üzere;

$$\begin{aligned} d(x, \epsilon) &= |x(s) - x(t)| - [x(s) - x(t)] \\ &\leq 2|x(s) - x(t)| \\ &\leq 2w(x, \epsilon) \end{aligned} \tag{3.2.5}$$

olur. (3.2.5)'te $x \in X$ elemanları üzerinden supremum alınırsa,

$$d(X, \epsilon) \leq 2w(X, \epsilon) \tag{3.2.6}$$

ve (3.2.6)'da $\epsilon \to 0$ için limit alınırsa,

$$d_0(X) \leq 2w_0(X) \tag{3.2.7}$$

eşitsizliği elde edilir.

$$i_0(X) \leq 2w_0(X) \tag{3.2.8}$$

olduğu da benzer şekilde gösterilebilir. Böylece (3.1.1) eşitliği kullanılarak aşağıdaki sonuca ulaşılır.

Sonuç 3.2.3. *Eğer $X, C(I)$ uzayında eş sürekli fonksiyonların sınırlı bir alt cümlesi ise $d_0(X) = i_0(X) = 0$ dır,* **[18]**.

İspat. X, $C(I)$ uzayında eş sürekli fonsiyonların sınırlı alt cümlesi olduğundan, Ascoli-Arzela teoremi gereğince relatif (göreceli) kompakttır. Relatif kompakt cümlelerin Hausdorff ölçüleri ise sıfırdır. Böylece (3.1.1)'den, $w_0(X) = 0$ olup, (3.2.7) ve (3.2.8)'den $d_0(X) = i_0(X) = 0$ dır. □

Örnek 3.2.1. **[18]** $C[0,\pi]$ uzayında $X = \left\{x_n : x_n(t) = \frac{sin(nt)}{n} : n = 1, 2, \ldots\right\}$ cümlesini alalım. $\delta > 0$ sayısı için $n_0 \geq \frac{2}{\delta}$ olacak şekilde bir $n_0 \in \mathbb{N}$ $(n_0 \geq 2)$ seçelim. Bu durumda X cümlesi, $X_1 = \{x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{n_0-1}\}$ ve $X_2 = \{x_{n_0}, x_{n_0+1}, \ldots\}$ gibi ayrık iki cümlenin birleşimi olarak yazılabilir. X_1 kompakt olduğundan (3.1.1)'den $w_0(X_1) = 0$ dır. Diğer taraftan $n \geq n_0$ ve keyfi $s, t \in [0, \pi]$ için $|x_n(s) - x_n(t)| \leq \frac{2}{n} \leq \delta$ olacağından $w_0(X_2) \leq \delta$ olur. δ keyfi olduğundan $w_0(X_2) = 0$ dır. w_0 fonksiyonu Tanım 3.1.1'deki (6). şartı da sağladığından $w_0(X) = 0$ olduğu sonucuna ulaşılır. Böylece (3.2.7) ve (3.2.8)'den $d_0(X) = i_0(X) = 0$ olur. Halbuki X cümlesindeki fonksiyonlar $[0, \pi]$ aralığında monoton değildir.

Örnek 3.2.2. **[18]** $n = 1, 2, \ldots$ için $x_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, $x_n(t) = t^n$ olmak üzere; $X \subset C[0, 1]$ alt cümlesini, $X = \{x_n : n = 1, 2, \ldots\}$ olarak alalım. Bu durumda herhangi bir $0 < \epsilon \leq 1$ ve $n = 1, 2, \ldots$ için

$$\begin{aligned}
d(x_n, \epsilon) &= \sup\{|x_n(s) - x_n(t)| - [x_n(s) - x_n(t)] : t, s \in [0, 1],\ t \leq s \text{ ve } s - t \leq \epsilon\} \\
&= \sup\{|s^n - t^n| - [s^n - t^n] : t, s \in [0, 1],\ t \leq s \text{ ve } s - t \leq \epsilon\} \\
&= \sup\{s^n - t^n - [s^n - t^n] : t, s \in [0, 1],\ t \leq s \text{ ve } s - t \leq \epsilon\} \\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan,

$$d(X,\epsilon) = \sup\{d(x_n,\epsilon) : x_n \in X\} = 0$$

dır. Buna göre, $d_0(X) = \lim_{\epsilon\to 0} d(X,\epsilon) = 0$ olur. Şimdi, $w_0(X) = 1$ olduğunu görelim. $x_n \in X$ olsun. Bu durumda $\epsilon \in (0,1]$ olmak üzere;

$$w(x_n,\epsilon) = \sup\left\{|s^n - t^n| : t,s \in [0,1] \text{ ve } |s-t| \leq \epsilon\right\}$$

olduğu bilinmektedir. $0 < \epsilon \leq 1$ için

$$(s,t \in [0,1] \text{ ve } |s-t| \leq \epsilon) \Leftrightarrow (t \in [0,1] \text{ ve } s \in [t-\epsilon, t+\epsilon] \cap [0,1])$$

olduğundan,

$$f : [0, 1-\epsilon] \to \mathbb{R},\ f(t) = (t+\epsilon)^n - t^n$$

ve

$$g : [\epsilon, 1] \to \mathbb{R},\ g(t) = t^n - (t-\epsilon)^n$$

fonksiyonlarının supremumunu hesabedelim.

$$t \in [0, 1-\epsilon] \text{ için } f'(t) = n(t+\epsilon)^{n-1} - nt^{n-1} \geq 0$$

ve

$$t \in [\epsilon, 1] \text{ için } g'(t) = nt^{n-1} - n(t-\epsilon)^{n-1} \geq 0$$

olduğundan, f ve g fonksiyonları azalmayandır. $f(1-\epsilon) = g(1) = 1-(1-\epsilon)^n$ olup, $w(x_n,\epsilon) = 1-(1-\epsilon)^n$ olur. Şu halde; $0 < \epsilon \leq 1$ için

$$w(X,\epsilon) = \sup\left\{w(x_n,\epsilon) : x_n \in X\right\} = \sup\left\{1-(1-\epsilon)^n : n \in \mathbb{N}\right\} = 1$$

elde edilir. Böylece, $w_0(X) = \lim_{\epsilon\to 0} w(X,\epsilon) = 1$ olur.

$$\begin{aligned} i(x_n,\epsilon) &= \sup\{|s^n - t^n| - [t^n - s^n] : t,s \in [0,1], t \leq s \text{ ve } s-t \leq \epsilon\} \\ &= \sup\{2(s^n - t^n) : t,s \in [0,1], t \leq s \text{ ve } s-t \leq \epsilon\} = 2 - 2(1-\epsilon)^n \end{aligned}$$

olduğu da benzer şekilde görülebilir. Buna göre, $0 < \epsilon \leq 1$ için

$$i(X,\epsilon) = \sup\left\{i(x_n,\epsilon) : x \in X\right\} = \sup\left\{2-2(1-\epsilon)^n : n \in \mathbb{N}\right\} = 2$$

olacağından, $i_0(X) = \lim_{\epsilon\to 0} i(X,\epsilon) = 2$ olur.

d_0 ve i_0 fonksiyonlarının, Tanım 3.1.1'deki (1). aksiyomu sağlamadıkları ve böylece $C(I)$ uzayında birer kompaktsızlık ölçüsü olmadıkları görülebilir, [**18**].

ÖRNEK 3.2.3. [**18**] $n = 1, 2, \ldots$ için $y_n : [-1, 1] \to \mathbb{R},\ y_n(t) = t^{2n}$ olmak üzere; $Y \subset C[-1, 1]$ alt cümlesini, $Y = \{y_n : n = 1, 2, \ldots\}$ olarak alalım. Bu durumda herhangi bir $0 < \epsilon \leq 2$ ve $n = 1, 2, \ldots$ için

$$\begin{aligned} d(y_n, \epsilon) &= \sup\{|y_n(s) - y_n(t)| - [y_n(s) - y_n(t)] : t, s \in [-1, 1],\ t \leq s \text{ ve } s - t \leq \epsilon\} \\ &= \sup\{|s^{2n} - t^{2n}| - [s^{2n} - t^{2n}] : t, s \in [-1, 1],\ t \leq s \text{ ve } s - t \leq \epsilon\} \end{aligned}$$

olup, $|t| < |s|$ ise $|s^{2n} - t^{2n}| - [s^{2n} - t^{2n}] = 0$ olduğundan,

$$d(y_n, \epsilon) = \sup\{2(t^{2n} - s^{2n}) : t, s \in [-1, 1],\ t \leq s, |t| \geq |s| \text{ ve } s - t \leq \epsilon\}$$

olur.

$0 < \epsilon \leq 1$ için

$$f : [-1, -\epsilon] \to \mathbb{R},\ f(t) = 2[t^{2n} - (t + \epsilon)^{2n}]$$

ve

$$g : [-\epsilon, 0] \to \mathbb{R},\ g(t) = 2t^{2n}$$

fonksiyonlarını tanımlayalım. Bu durumda;

$$\forall t \in [-1, -\epsilon] \text{ için } f'(t) = 4n[t^{2n-1} - (t + \epsilon)^{2n-1}] < 0$$

ve

$$\forall t \in [-\epsilon, 0] \text{ için } g'(t) = 4nt^{2n-1} \leq 0$$

olduğundan f azalan ve g artmayandır. $f(-1) = 2[1 - (\epsilon - 1)^{2n}]$ ve $g(-\epsilon) = 2\epsilon^{2n}$ olup, maks $\{f(-1), g(-\epsilon)\} = 2[1 - (\epsilon - 1)^{2n}]$ olur. Sonuç olarak; $0 < \epsilon \leq 1$ olan her ϵ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $d(y_n, \epsilon) = 2[1 - (\epsilon - 1)^{2n}]$ olur.

$1 < \epsilon \leq 2$ ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} d(y_n, \epsilon) &= d(y_n, \epsilon) = \sup\{2(t^{2n} - s^{2n}) : t, s \in [-1, 1],\ t \leq s, |t| \geq |s| \text{ ve } s - t \leq \epsilon\} \\ &= \sup\{2t^{2n} : t \in [-1, 0)\} \\ &= 2 \end{aligned}$$

olur. Buna göre, $0 < \epsilon \leq 2$ için

$$d(Y,\epsilon) = \sup\{d(y_n,\epsilon) : y_n \in Y\} = \begin{cases} \sup\{2[1-(\epsilon-1)^{2n}] : n \in \mathbb{N}\} & , \quad 0 < \epsilon \leq 1 \text{ ise} \\ 2 & , \quad 1 < \epsilon \leq 2 \text{ ise} \end{cases}$$
$$= 2$$

olacağından $d_0(Y) = \lim_{\epsilon\to 0} d(Y,\epsilon) = 2$ elde edilir. Ayrıca, $w_0(Y) = 1$ ve $i_0(Y) = 2$ olduğu da görülebilir. Böylece (3.2.7) ve (3.2.8) eşitsizliklerinde eşitlik halinin de olabileceği görülmüş olur.

Şimdi, $C(I)$ uzayında, kompaktsızlık ölçüsü olmayan d_0 ve i_0 fonksiyonları yardımıyla tanımlanan yeni bir kompaktsızlık ölçüsünün olduğunu görelim. Bunun için önce aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 3.2.3. *$\mathfrak{M}_{C(I)}$ uzayındaki herhangi bir X cümlesi için,*

$$\frac{1}{4}(d_0(X) + i_0(X)) \leq w_0(X) \leq \frac{1}{2}(d_0(X) + i_0(X)) \tag{3.2.9}$$

eşitsizliği geçerlidir, [**18**].

İspat. $d_0(X) \leq 2w_0(X)$ ve $i_0(X) \leq 2w_0(X)$ eşitsizliklerinden,

$$\frac{1}{4}(d_0(X) + i_0(X)) \leq w_0(X)$$

elde edilir. $\lim_{\epsilon\to 0} d(X,\epsilon) = \alpha$ olsun. Bu durumda her $\delta > 0$ sayısı için

$$\forall\epsilon\left(0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \Rightarrow |d(X,\epsilon) - \alpha| < \frac{\delta}{2}\right)$$

önermesi doğru olacak şekilde ve böylece

$$\forall\epsilon\left(0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \Rightarrow d(X,\epsilon) < \alpha + \frac{\delta}{2}\right) \tag{3.2.10}$$

önermesi doğru olacak şekilde en az bir $\epsilon_0 > 0$ sayısı vardır. Benzer şekilde $\beta = i_0(X)$ ise her $\delta > 0$ sayısı için,

$$\forall\epsilon\left(0 < \epsilon \leq \epsilon_0 \Rightarrow i(X,\epsilon) < \beta + \frac{\delta}{2}\right) \tag{3.2.11}$$

önermesi doğru olacak şekilde en az bir $\epsilon_0 > 0$ sayısı vardır.

$x \in X$ ve $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ olmak üzere; $t, s \in I, t \leq s$ ve $s - t \leq \epsilon$ olan her t ve s için (3.2.10) ve (3.2.11) eşitsizliklerinden,

$$|x(s) - x(t)| - [x(s) - x(t)] < \alpha + \frac{\delta}{2} \tag{3.2.12}$$

ve

$$|x(s) - x(t)| - [x(t) - x(s)] \quad < \quad \beta + \frac{\delta}{2} \tag{3.2.13}$$

eşitsizlikleri elde edilir. (3.2.12) ve (3.2.13) eşitsizlikleri taraf tarafa toplanırsa,

$$2|x(s) - x(t)| < \alpha + \beta + \delta \tag{3.2.14}$$

bulunur. Şu halde; (3.2.14)'ten $\forall x \in X$ için,

$$2w(x, \epsilon) \leq \alpha + \beta + \delta \tag{3.2.15}$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.2.15)'te $x \in X$ elemanları üzerinden supremum alınırsa, her $\delta > 0$ ve $0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ olan her ϵ için

$$2w(X, \epsilon) \leq \alpha + \beta + \delta \tag{3.2.16}$$

olur. (3.2.16)'da bir $\delta > 0$ sayısı seçilerek $\epsilon \to 0$ için limit alınırsa,

$$2w_0(X) \leq \alpha + \beta + \delta \tag{3.2.17}$$

bulunur. $\delta > 0$ sayısı keyfi olduğundan (3.2.17)'den,

$$2w_0(X) \leq \alpha + \beta$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır. □

Şimdi,

$$\mu : \mathfrak{M}_{C(I)} \to \mathbb{R}^+, \ \mu(X) = d_0(X) + i_0(X)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. μ fonksiyonu, $C(I)$ uzayında regüler (düzenli) bir kompaktsızlık ölçüsüdür. (3.2.9) ve (3.1.1)'den,

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{4}\mu(X) \leq w_0(X) \leq \tfrac{1}{2}\mu(X) \quad &\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{4}\mu(X) \leq 2\chi(X) \leq \tfrac{1}{2}\mu(X) \\ &\Leftrightarrow \quad \tfrac{1}{8}\mu(X) \leq \chi(X) \leq \tfrac{1}{4}\mu(X) \end{aligned} \tag{3.2.18}$$

olacağından μ, $C(I)$ da tanımlanan χ Hausdorff kompaktsızlık ölçüsüne denktir. μ ve χ'nin denkliğinden, "$\mu(X) = 0 \Leftrightarrow \chi(X) = 0$" sonucuna ulaşılır. Bu ise μ ve χ nin çekirdeklerinin çakışık olması demektir. Dolayısıyla μ fonksiyonu Tanım 3.1.1'deki (1) ve (9) şartlarını sağlar. μ fonksiyonunun Tanım 3.1.1'deki diğer şartları da sağladığı görülebilir. μ'nün Tanım 3.1.1'deki (8). şartı sağladığını görelim. Bunun için $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere; $\mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X)$ olduğunu göstermeliyiz.

$\lambda \geq 0$ ve $\epsilon > 0$ için

$$\begin{aligned} d(\lambda x, \epsilon) &= \sup\{|\lambda x(s) - \lambda x(t)| - [\lambda x(s) - \lambda x(t)] : t, s \in I, t \leq s \text{ ve } s - t \leq \epsilon\} \\ &= \sup\{|\lambda||x(s) - x(t)| - \lambda[x(s) - x(t)] : t, s \in I, t \leq s \text{ ve } s - t \leq \epsilon\} \\ &= \sup\{\lambda|x(s) - x(t)| - \lambda[x(s) - x(t)] : t, s \in I, t \leq s \text{ ve } s - t \leq \epsilon\} \quad (3.2.19) \\ &= \lambda \sup\{|x(s) - x(t)| - [x(s) - x(t)] : t, s \in I, t \leq s \text{ ve } s - t \leq \epsilon\} \\ &= \lambda d(x, \epsilon) \end{aligned}$$

olacağından, (3.2.19)'dan;

$$d(\lambda X, \epsilon) = \sup\{d(\lambda x, \epsilon) : x \in X\} = \lambda \sup\{d(x, \epsilon) : x \in X\} = \lambda d(X, \epsilon) \quad (3.2.20)$$

olur. Benzer şekilde, $\lambda \geq 0$ ve $\epsilon > 0$ için $i(\lambda X, \epsilon) = \lambda i(X, \epsilon)$ olduğu da görülebilir. Buradan (3.2.20)'yi de dikkate alarak, $\lambda \geq 0$ iken;

$$\begin{aligned} \mu(\lambda X) &= d_0(\lambda X) + i_0(\lambda X) \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} [d(\lambda X, \epsilon) + i(\lambda X, \epsilon)] \\ &= \lim_{\epsilon \to 0} [\lambda d(X, \epsilon) + \lambda i(X, \epsilon)] \qquad (3.2.21) \\ &= \lambda \lim_{\epsilon \to 0} [d(X, \epsilon) + i(X, \epsilon)] \\ &= \lambda [d_0(X) + i_0(X)] \end{aligned}$$

elde edilir. Şu halde; (3.2.21)'den,

$$\mu(\lambda X) = \lambda \mu(X) \quad (3.2.22)$$

olur.

$\lambda < 0$ ve $\epsilon > 0$ için, $d(\lambda X, \epsilon) = -\lambda i(X, \epsilon)$ ve $i(\lambda X, \epsilon) = -\lambda d(X, \epsilon)$

olacağından,

$$\begin{aligned} \mu(\lambda X) &= d_0(\lambda X) + i_0(\lambda X) \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[d(\lambda X,\epsilon) + i(\lambda X,\epsilon)\right] \\ &= \lim_{\epsilon\to 0}\left[-\lambda d(X,\epsilon) - \lambda i(X,\epsilon)\right] \\ &= -\lambda \lim_{\epsilon\to 0}\left[d(X,\epsilon) + i(X,\epsilon)\right] \\ &= -\lambda \lim_{\epsilon\to 0}\left[d_0(X) + i_0(X)\right] \\ &= -\lambda\mu(X) \end{aligned} \tag{3.2.23}$$

olur. (3.2.22) ve (3.2.23)'ten,

$$\mu(\lambda X) = |\lambda|\mu(X)$$

eşitliğine ulaşılır. Böylece μ fonksiyonu Tanım 3.1.1'deki (8). da şartı sağlar. μ fonksiyonunun Tanım 3.1.1'in diğer şartlarını da sağladığı görülebilir. Buna göre aşağıdaki teoremi verebiliriz.

Teorem 3.2.4. *$\mu : \mathfrak{M}_{C(I)} \to \mathbb{R}^+,\ \mu(X) = d_0(X) + i_0(X)$ fonksiyonu, $C(I)$ uzayında tanımlanan χ Hausdorff ölçüsüne denk olan regüler (düzenli) bir kompaktsızlık ölçüsüdür,* [**18**].

(3.2.18) ve (3.1.1)'in kullanılmasıyla, herhangi bir $X \in \mathfrak{M}_{C(I)}$ için,

$$2w_0(X) \le \mu(X) \le 4w_0(X) \tag{3.2.24}$$

veya (3.2.24)'e denk olan;

$$4\chi(X) \le \mu(X) \le 8\chi(X) \tag{3.2.25}$$

eşitsizliği elde edilir. Örnek 3.2.2 ve Örnek 3.2.3, (3.2.24) ve (3.2.25) eşitsizliklerinin eşitlik halidir.

Şimdi, $C(I)$ uzayında,

$$\mu_d : \mathfrak{M}_{C(I)} \to \mathbb{R}^+,\ \mu_d(X) = w_0(X) + d_0(X)$$

ve

$$\mu_i : \mathfrak{M}_{C(I)} \to \mathbb{R}^+,\ \mu_i(X) = w_0(X) + i_0(X)$$

olarak tanımlanan μ_d ve μ_i fonksiyonlarını alalım. w_0, d_0 ve i_0 fonksiyonlarının özellikleriyle birlikte,

$$w_0(X) \leq \mu_d(X) \leq 3w_0(X) \tag{3.2.26}$$

ve

$$w_0(X) \leq \mu_i(X) \leq 3w_0(X) \tag{3.2.27}$$

eşitsizlikleri de kullanılarak μ_d ve μ_i'nin χ Hausdorff ölçüsüne denk kompaktsızlık ölçüleri olduğu görülebilir. μ_d ve μ_i, Tanım 3.1.1'deki (8). şart dışındaki bütün şartları sağlar. Ayrıca, Örnek 3.2.2 ve Örnek 3.2.3 ile, (3.2.26) ve (3.2.27)'deki eşitsizliklerin eşitlik hali elde edilir.

3.3. Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemlerin Çözümlerinin Asimptotik Kararlılığı

Bu kısımda,

$$x(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t u(t, s, x(s))ds, \ (t \in \mathbb{R}^+) \tag{3.3.1}$$

formundaki lineer olmayan Volterra integral denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında bir çözüme sahip olmasını sağlayan yeter şartlar verilecek ve bu çözümün $\mathbb{R}^+$ da asimptotik kararlı olduğu gösterilecektir.

Tanım 3.3.1. $X \subset BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$, (3.3.1) denkleminin çözümlerinin bir cümlesi ve $x \in X$ olsun. Bu durumda; her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, $t \geq T$ olan her t sayısı ve (3.3.1) denkleminin X cümlesinde olan her y çözümü için $|x(t) - y(t)| \leq \epsilon$ olacak şekilde en az bir $T = T(\epsilon) > 0$ sayısı mevcutsa x'e $\mathbb{R}^+$ üzerinde "asimptotik kararlıdır" denir, [**8**].

(3.3.1) denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ da bir x çözümüne sahip olduğunu göstermek için, kompaktsızlık ölçüsü ile birleştirilmiş bir sabit nokta teoreminden yararlanılacaktır. Şimdi bu teoremi verelim.

Teorem 3.3.1. *Y, E Banach uzayının boş olmayan, sınırlı, kapalı ve konveks bir alt cümlesi ve $F : Y \to Y$ dönüşümü sürekli olsun. X, Y'nin boş olmayan herhangi bir alt cümlesi, $k \in [0, 1)$ bir sabit ve μ, $\mu(FX) \leq k\mu(X)$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde E de bir kompaktsızlık ölçüsü olsun. Bu taktirde F'nin Y cümlesinde sabit bıraktığı en az bir nokta vardır,* [**8**].

Teorem 3.3.2. *Teorem* 3.3.1*'deki F dönüşümünün sabit bıraktığı noktaların cümlesi A olsun. Bu taktirde A, $\ker\mu$ ailesine ait olan kompakt bir cümledir,* [**8**].

İspat. Bunun için, önce,

$$A = \{x \in Y : Fx = x\} \Rightarrow \mu(A) = 0 \tag{3.3.2}$$

önermesinin doğru olduğunu göstermeliyiz. $A = \{x \in Y : Fx = x\}$ olmak üzere; (3.3.2) önermesi yanlış, yani $\mu(A) \neq 0$ olsun. Bu durumda, $\mu(A) > 0$ olur. $A \subset Y$ olduğundan,

$$\mu(FA) \leq k\mu(A) \tag{3.3.3}$$

olur. $FA = A$ olduğundan, (3.3.3)'ten,

$$\mu(A) \leq k\mu(A)$$

ve böylece $1 \leq k$ çelişkisi elde edilir. Dolayısıyla,

$$A = \{x \in Y : Fx = x\} \Rightarrow \mu(A) = 0$$

önermesi doğrudur. μ bir kompaktsızlık ölçüsü ve $\mu(A) = 0$ olduğundan $\overline{A}$ kompakttır. Şimdi, A cümlesinin kapalı olduğunu görelim. $x \in \overline{A}$ olsun. Bu durumda Teorem 2.1.2 gereğince, $(x_n) \subset A$ ve $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ olacak şekilde bir (x_n) dizisi vardır. Buna göre,

$$Fx_n = x_n \tag{3.3.4}$$

olur. F'nin sürekliliği de dikkate alınarak (3.3.4)'te $n \to \infty$ için limit alınırsa $Fx = x$ elde edilir. Şu halde $x \in A$ olur. Bu ise A'nın kapalı olması demektir. Sonuç olarak A kompakttır. □

$\mathbb{R}^+$ da tanımlı, reel değerli, sınırlı ve sürekli fonksiyonların uzayı olan $BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ Banach uzayındaki norm, $\|x\| = \sup_{t\geq 0}|x(t)|$ eşitliğiyle verilmektedir.

$BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ uzayında tanımlı bir kompaktsızlık ölçüsü aşağıdaki şekilde tanımlanmaktadır.
$BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$'nin boş olmayan, sınırlı bir X alt cümlesini ve pozitif bir T sayısını alalım. $x \in X$ ve $\epsilon \geq 0$ için x' in [0, T] aralığındaki süreklilik modülü $w^T(x,\epsilon)$,

$$w^T(x,\epsilon) = \sup\{|x(t)-x(s)| : t,s \in [0,T] \text{ ve } |t-s| \leq \epsilon\}$$

olarak tanımlanmaktadır.

$$w^T(X,\epsilon) = \sup\left\{w^T(x,\epsilon) : x \in X\right\},\ w_0^T(X) = \lim_{\epsilon\to 0} w^T(X,\epsilon)$$

ve

$$w_0(X) = \lim_{T\to\infty} w_0^T(X)$$

olmak üzere; $t \in \mathbb{R}^+$ sabit sayısı için

$$X(t) = \{x(t) : x \in X\}$$

ve

$$\text{diam} X(t) = \sup\{|x(t)-y(t)| : x,y \in X\}$$

olsun. $\mathfrak{M}_{BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})}$ üzerinde,

$$\mu(X) = w_0(X) + \limsup_{t\to\infty} \text{diam} X(t)$$

eşitliğiyle tanımlanan μ fonksiyonu $BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ uzayında bir kompaktsızlık ölçüsüdür, [**8**].

Teorem 3.3.3. *$k \in [0,1)$ bir sabit, $a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonu sürekli ve $\lim_{t\to\infty} a(t) = 0$ olmak üzere; $F : BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}) \to BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ operatörü, $BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ uzayındaki her x,y elemanları ve $\forall t \in \mathbb{R}^+$ için*

$$|(Fx)(t)-(Fy)(t)| \leq k|x(t)-y(t)| + a(t) \tag{3.3.5}$$

eşitsizliğini sağlasın. Ayrıca, $x = x(t)\,(x \in BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}))$, $x = Fx$ operatör denkleminin bir çözümü olsun. Buna göre, bu çözüm asimptotik kararlıdır, [**8**].

İSPAT. Bunun için; " her $\epsilon > 0$ sayısına karşılık, $t \geq T$ olan her t sayısı ve $x = Fx$ denkleminin çözümü olan her y fonksiyonu için $|x(t) - y(t)| \leq \epsilon$ olacak şekilde en az bir $T > 0$ sayısı vardır" önermesinin doğru olduğunu göstermeliyiz. Bu önermenin yanlış olduğunu kabul edelim. Bu durumda; " en az bir $\epsilon_0 > 0$ sayısı vardır öyle ki $T > 0$ olan her T sayısı için $|x(t) - y(t)| \geq \epsilon_0$ olacak şekilde $t \geq T$ şartını sağlayan en az bir t sayısı ve $x = Fx$ denkleminin en az bir y çözümü vardır" önermesi doğrudur. Buna göre; her $n \in \mathbb{N}$ için $t_n \geq n$ olacak şekilde bir (t_n) dizisi ve $|x(t_n) - y_n(t_n)| \geq \epsilon_0$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde $x = Fx$ denkleminin bir y_n çözümü vardır. Şu halde; (3.3.5)'ten;

$$|x(t_n) - y_n(t_n)| \leq k|x(t_n) - y_n(t_n)| + a(t_n) \tag{3.3.6}$$

yazılabilir. (3.3.6)'dan da,

$$0 \leq (1-k)\epsilon_0 \leq (1-k)|x(t_n) - y_n(t_n)| \leq a(t_n) \tag{3.3.7}$$

elde edilir. (3.3.7)'de $n \to \infty$ için limit alınırsa, $0 \leq (1-k)\epsilon_0 \leq 0$ olacağından $(1-k)\epsilon_0 = 0$ ve $1 - k \neq 0$ olduğundan, $\epsilon_0 = 0$ elde edilir ki bu çelişki ispatı tamamlar. □

TEOREM 3.3.4.

$$x(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t u(t, s, x(s))ds, \ (t \geq 0) \tag{3.3.8}$$

lineer olmayan Volterra integral denkleminde aşağıdaki şartlar sağlansın.

(i) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu süreklidir,*
$g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \ g(t) = f(t, 0)$ *eşitliğiyle tanımlanan g fonksiyonu $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayının bir elemanıdır,*

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ *ve* $\forall t \geq 0$ *için* $|f(t, x) - f(t, y)| \leq k|x - y|$ *olacak şekilde bir* $k \in [0, 1)$ *sabiti vardır,*

(iii) $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *fonksiyonu sürekli olup,*

$$\lim_{t \to \infty} a(t) \int_0^t b(s)ds = 0$$

ve

$$\forall t, s \in \mathbb{R}^+ (s \leq t) \text{ ve } \forall x \in \mathbb{R} \text{ için } |u(t,s,x)| \leq a(t)b(s)$$

olacak şekilde sürekli $a, b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonları vardır.

Bu taktirde (3.3.8) *denklemi, $\mathbb{R}^+$'da asimptotik kararlı olan en az bir $x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ çözümüne sahiptir,* [**8**].

İSPAT. $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonunu,

$$v(t) = a(t) \int_0^t b(s)ds$$

eşitliğiyle tanımlayalım. Açık olarak v sürekli olup, $\lim_{t\to\infty} v(t) = 0$ dır.

$x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ olmak üzere; F operatörünü,

$$(Fx)(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t u(t, s, x(s))ds$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda; hipotezler dikkate alındığında, $Fx : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli olduğu anlaşılır. Ayrıca, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ için

$$\begin{aligned} |(Fx)(t)| &\leq |f(t,x(t)) - f(t,0)| + |f(t,0)| + \textstyle\int_0^t |u(t,s,x(s))|ds \\ &\leq k|x(t)| + |f(t,0)| + a(t) \textstyle\int_0^t b(s)ds \\ &= k|x(t)| + |f(t,0)| + v(t) \\ &\leq k\|x\| + \sup\{|f(t,0)| + v(t) : t \geq 0\} \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

olduğundan, $Fx \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ olur. Şu halde F, $F : BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}) \to BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ olan bir operatördür. (3.3.9)'dan;

$$\sup\{|(Fx)(t)| : t \geq 0\} \leq k\|x\| + \sup\{|f(t,0)| + v(t) : t \geq 0\}$$

ve böylece,

$$\|Fx\| \leq k\|x\| + Q;\ Q = \sup\{|f(t,0)| + v(t) : t \geq 0\} \tag{3.3.10}$$

eşitsizliği elde edilir. $B_r = B[\theta, r]$ ve $r = \frac{Q}{1-k}$ olmak üzere; F'nin, $F : B_r \to B_r$ olan bir dönüşüm olduğunu görelim. $x \in B_r$ olduğundan (3.3.10)'dan,

$$\|Fx\| \leq kr + Q = k\frac{Q}{1-k} + Q = \frac{Q}{1-k} = r$$

olur. Böylece F, B_r'den B_r'ye tanımlıdır. Şimdi; $F : B_r \to B_r$ dönüşümünün, B_r yuvarında sürekli olduğunu gösterelim. Bunun için $\forall\epsilon > 0$ sayısı ve $\forall x, y \in B_r$ elemanlarına karşılık,

$$\|x - y\| \leq \delta \Rightarrow \|Fx - Fy\| \leq \epsilon$$

önermesi doğru olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısının olduğunu göstermek yeterlidir.

$$\begin{aligned} |(Fx)(t) - (Fy)(t)| &\leq k\epsilon + \textstyle\int_0^t |u(t, s, x(s)) - u(t, s, y(s))|ds \\ &\leq k\epsilon + 2a(t) \textstyle\int_0^t b(s)ds \\ &= k\epsilon + 2v(t) \end{aligned} \tag{3.3.11}$$

dir. Şimdi $t \geq T$ için; $2a(t) \int_0^t b(s)ds \leq \epsilon$ olan bir $T \in \mathbb{R}^+$ sayısını seçelim. Burada iki durum söz konusudur.

(1) $t \geq T$ için (3.3.11)'den,

$$|(Fx)(t) - (Fy)(t)| \leq k\epsilon + \epsilon = (k + 1)\epsilon$$

elde edilir.

(2) $t \leq T, w = w(\epsilon)$ fonksiyonunu aşağıdaki gibi tanımlayalım.

$$w(\epsilon) = \sup\{|u(t, s, x) - u(t, s, y)| : t, s \in [0, T], x, y \in [-r, r] \text{ ve } |x - y| \leq \epsilon\}$$

$u = u(t, s, x)$ fonksiyonu $[0, T] \times [0, T] \times [-r, r]$ üzerinde düzgün sürekli olduğundan, $\epsilon \to 0$ iken $w(\epsilon) \to 0$ olur. (3.3.11)'den,

$$|(Fx)(t) - (Fy)(t)| \leq k\epsilon + \int_0^t w(\epsilon)ds \leq k\epsilon + Tw(\epsilon)$$

olup, (1) ve (2)'den; F'nin B_r üzerinde sürekli olduğu görülür.

Şimdi, $X \subset B_r$ olacak şekilde boştan farklı bir X alt cümlesini alalım. $T > 0, \epsilon > 0, x \in X, t, s \in [0, T]$ ve $|t - s| \leq \epsilon$ olmak üzere;

$$\begin{aligned}
|(Fx)(t) - (Fx)(s)| &\leq |f(t, x(t)) - f(s, x(s))| + \\
&\quad + \left|\int_0^t u(t, \tau, x(\tau))d\tau - \int_0^s u(s, \tau, x(\tau))d\tau\right| \\
&\leq |f(t, x(t)) - f(t, x(s))| + |f(t, x(s)) - f(s, x(s))| + \\
&\quad \left|\int_0^t u(t, \tau, x(\tau))d\tau - \int_0^s u(s, \tau, x(\tau))d\tau\right| \\
&\leq k|x(t) - x(s)| + |f(t, x(s)) - f(s, x(s))| \\
&\quad + \left|\int_s^t u(t, \tau, x(\tau))d\tau\right| + \left|\int_0^s [u(t, \tau, x(\tau)) - u(s, \tau, x(\tau))]d\tau\right| \\
&\leq kw^T(x, \epsilon) + w_r^T(f, \epsilon) + \epsilon \sup\{a(t)b(\tau) : 0 \leq t \leq T, 0 \leq \tau \leq T\} \\
&\quad + T\overline{w}_r^T(u, \epsilon)
\end{aligned} \tag{3.3.12}$$

elde edilir. Burada $w_r^T(f, \epsilon)$ ve $\overline{w}_r^T(u, \epsilon)$,

$$\begin{aligned}
w_r^T(f, \epsilon) &= \sup\{|f(t, x) - f(s, x)| : t, s \in [0, T], |t - s| \leq \epsilon \text{ ve } |x| \leq r\} \\
\overline{w}_r^T(u, \epsilon) &= \sup\{|u(t, \tau, x) - u(s, \tau, x)| : t, s \in [0, T], |t - s| \leq \epsilon, \tau \in [0, T] \text{ ve } |x| \leq r\}
\end{aligned}$$

eşitlikleriyle tanımlanmaktadır. Hipotezlerden; $f = f(t, x)$ fonksiyonu, $[0, T] \times [-r, r]$ cümlesi üzerinde ve $u = u(t, \tau, x)$ fonksiyonu da, $[0, T] \times [0, T] \times [-r, r]$ cümlesi üzerinde düzgün süreklidir. Böylece, $\epsilon \to 0$ iken; $w_r^T(f, \epsilon) \to 0$ ve $\overline{w}_r^T(u, \epsilon) \to 0$ olur. Şu halde; (3.3.12)'den,

$$\begin{aligned}
w^T(Fx, \epsilon) &\leq kw^T(x, \epsilon) + w_r^T(f, \epsilon) + T\overline{w}_r^T(u, \epsilon) + \\
&\quad + \epsilon \sup\{a(t)b(\tau) : t, \tau \in [0, T]\}
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

sonucu elde edilir. (3.3.13)'te $x \in X$ elemanları üzerinden supremum alınırsa,

$$\begin{aligned}
w^T(FX, \epsilon) &\leq kw^T(X, \epsilon) + w_r^T(f, \epsilon) + T\overline{w}_r^T(u, \epsilon) + \\
&\quad + \epsilon \sup\{a(t)b(\tau) : t, \tau \in [0, T]\}
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

olur. (3.3.14)'te, sırasıyla, $\epsilon \to 0$ ve $T \to \infty$ için limit alınırsa,

$$w_0(FX) \leq kw_0(X) \tag{3.3.15}$$

eşitsizliğine ulaşılır. Ayrıca herhangi bir $t \in \mathbb{R}^+$ ve $x, y \in X$ için,

$$
\begin{aligned}
|(Fx)(t) - (Fy)(t)| &\leq |f(t, x(t)) - f(t, y(t))| + \\
&\quad + \int_0^t |u(t, s, x(s))| ds + \int_0^t |u(t, s, y(s))| ds \\
&\leq k|x(t) - y(t)| + 2\int_0^t a(t)b(s) ds
\end{aligned}
$$

olduğundan,

$$|(Fx)(t) - (Fy)(t)| \leq k|x(t) - y(t)| + 2v(t) \tag{3.3.16}$$

ve şu halde; (3.3.16)'dan;

$$\mathrm{diam}(FX)(t) \leq k\,\mathrm{diam}X(t) + 2v(t)$$

olur. Böylece,

$$\limsup_{t\to\infty} \mathrm{diam}(FX)(t) \leq k \limsup_{t\to\infty} \mathrm{diam}X(t) \tag{3.3.17}$$

olup, (3.3.15) ve (3.3.17) birlikte dikkate alındığında,

$$\mu(FX) \leq k\mu(X) \tag{3.3.18}$$

elde edilir.

(3.3.18) eşitsizliği ve Teorem 3.3.1'in kullanılmasıyla, (3.3.8) denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında en az bir $x = x(t)$ çözümüne sahip olduğu anlaşılır. Diğer taraftan (3.3.16) ve Teorem 3.3.3'ten bu çözümün $\mathbb{R}^+$'da asimptotik kararlı olduğu sonucu elde edilir ve bu da ispatı tamamlar. □

Aşağıda, Teorem 3.3.4'ün şartlarını sağlayan lineer olmayan Volterra tipi integral denklemler verilmiştir.

$$x(t) = \frac{t}{1+t^2} x(t) + \int_0^t e^{-t} \frac{sx(s)}{1+|x(s)|} ds, \tag{3.3.19}$$

$$x(t) = \frac{\ln(1+t)}{1+t} \sin x(t) + \int_0^t \frac{s^2 \arctan x(s)}{1+t^4} ds. \tag{3.3.20}$$

Teorem 3.3.4'e göre (3.3.19) ve (3.3.20) denklemlerinin, $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında en az bir çözümü vardır ve bu çözüm $\mathbb{R}^+$'da asimptotik kararlıdır.

4. LİNEER OLMAYAN BİR VOLTERRA İNTEGRAL DENKLEMİN $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ VE $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ UZAYLARINDAKİ ÇÖZÜMLERİ VE BAZI SONUÇLAR

Üçüncü bölümde kompaktsızlık ölçüsüyle birleştirilen bir sabit nokta teoremi vasıtasıyla, lineer olmayan Volterra tipi bir integral denklemin, $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında çözümünün varlığı ve asimptotik kararlılığı incelendi. Bu bölümde ise farklı bir sabit nokta teoremiyle, kompaktsızlık ölçüsünü kullanmaksızın, aynı denklemin $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ uzayında çözümünün varlığı ve asimptotik kararlılığının daha zayıf şartlar altında da gösterilebileceğini ve ilave bir şart altında bu çözümün, $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ uzayına ait olacağını göreceğiz.

4.1. Üçüncü Bölüme İlişkin Bazı Sonuçlar

$$x(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t u(t, s, x(s))ds, \ (t \geq 0) \tag{4.1.1}$$

integral denkleminde;

(i) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir ve $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $g(t) = f(t, 0)$ olarak tanımlanan g fonksiyonu $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayının bir elemanıdır,

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $\forall t \geq 0$ için

$$|f(t, x) - f(t, y)| \leq \alpha |x - y|$$

olacak şekilde bir $\alpha \in [0, 1)$ sabiti vardır ve

(iii) $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu süreklidir. Ayrıca,

$$\lim_{t \to \infty} a(t) \int_0^t b(s)ds = 0, \ \forall t, s \in \mathbb{R}^+ (s \leq t)$$

ve

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ için } |u(t, s, x)| \leq a(t)b(s)$$

olacak şekilde sürekli $a, b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonları vardır, şartlarının sağlanması halinde, (4.1.1) integral denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında bir çözümünün mevcut ve asimptotik kararlı olduğu, üçüncü bölümde gösterildi.

Sonuç 4.1.1. *(ii) şartı,*

$$x = f(0, x) \tag{4.1.2}$$

denkleminin bir ve yalnız bir x_0 çözümünün olmasını gerektirir. Gerçekten; (4.1.1) denkleminin $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ uzayında olan her x çözümü için $x(0) = x_0$ olmak üzere; x_0, (4.1.2) denkleminin bir çözümüdür. (4.1.2) denkleminin x_0 dan farklı x_1 gibi bir çözümünün de mevcut olduğunu kabul edelim. Bu durumda (ii) şartı dikkate alınarak,

$$|x_0 - x_1| = |f(0, x_0) - f(0, x_1)| \leq \alpha |x_0 - x_1| \tag{4.1.3}$$

eşitsizliğine ulaşılır. (4.1.3)'ten;

$$(1 - \alpha)|x_0 - x_1| \leq 0 \tag{4.1.4}$$

olup, $\alpha \in [0, 1)$ olduğundan, $1 - \alpha \neq 0$ dır. Şu halde; (4.1.4)'ten; $x_0 = x_1$ elde edilir. Demek ki $x(0) = x_0$, (4.1.2) denkleminin tek çözümüdür.

Şimdi,

$$x(t) = f(t, x(t)) + \int_0^t u(t, s, x(s))ds, \ (t \geq 0) \tag{4.1.5}$$

denklemini ve aşağıdaki şartları gözönüne alalım.

(i^*) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu sürekli ve en az bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ için $x_0 = f(0, x_0)$ olsun. $t > 0$ olan her t için $0 \leq k(t) < 1$ ve

$$\lim_{t \to 0^+} \frac{f(t, x_0) - f(0, x_0)}{1 - k(t)} = 0 \tag{4.1.6}$$

şartını sağlayan en az bir sürekli $k : \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$ fonksiyonu vardır,

(ii^*) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall t \in \mathbb{R}^+$ için

$$\|f(t, x) - f(t, y)\|_{\mathbb{R}^n} \leq k(t) \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$$

eşitsizliği sağlansın ve

(iii^*) $u : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu süreklidir ve $\forall t, s \in \mathbb{R}^+ (s \leq t)$ ve $\forall x \in \mathbb{R}^n$ için

$$\|u(t,s,x)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a(t)b(s),$$
$$\lim_{t\to 0^+} \frac{a(t)}{1-k(t)} \int_0^t b(s)ds = 0$$

ve

$$\lim_{t\to \infty} \frac{a(t)}{1-k(t)} \int_0^t b(s)ds = 0$$

olacak şekilde sürekli $a, b : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ fonksiyonları vardır.

Sonuç 4.1.2. *$(i)-(iii)$ şartları sağlanıyorken, $n = 1$ olmak üzere, $(i^*)-(iii^*)$ şartları da sağlanır,* **[9]**.

İspat. $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(t) = f(0,t)$ olarak tanımlanan h fonksiyonu, $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için

$$|h(x) - h(y)| = |f(0,x) - f(0,y)| \leq \alpha |x - y|$$

eşitsizliğini sağladığından bir büzülmedir. Buna göre, $h(x_0) = x_0$, yani $f(0, x_0) = x_0$ olacak şekilde birtek $x_0 \in \mathbb{R}$ vardır.

$k : \mathbb{R}^+ \to [0,1], k(t) = \alpha$ olarak tanımlanan k fonksiyonu sürekli olup $\forall t \geq 0$ için $0 \leq k(t) < 1$ dir. Ayrıca, f sürekli olduğundan,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{f(t,x_0) - f(0,x_0)}{1-k(t)} = 0$$

eşitliği sağlanır.

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ ve $\forall t \geq 0$ için,

$$|f(t,x) - f(t,y)| \leq k(t)|x - y|$$

eşitsizliği geçerlidir.

Diğer taraftan;

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{a(t)}{1-k(t)} \int_0^t b(s)ds = \frac{a(0)}{1-\alpha}.0 = 0$$

ve

$$\lim_{t\to \infty} \frac{a(t)}{1-k(t)} \int_0^t b(s)ds = \frac{1}{1-\alpha} \lim_{t\to\infty} a(t) \int_0^t b(s)ds = \frac{1}{1-\alpha}.0 = 0$$

eşitliği de sağlanır. □

4.2. Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemlerin $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ ve $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ Uzaylarındaki Asimptotik Kararlı Çözümleri

TEOREM 4.2.1. *(i^*) ve (ii^*) şartları sağlansın. Bu durumda;*

$$\psi(t) = f(t, \psi(t)) \tag{4.2.1}$$

denklemini sağlayan bir tek $\psi \in C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ fonksiyonu vardır. Ayrıca $t > 0$ için

$$\psi(t) \leq \frac{\|f(t,0)\|_{\mathbb{R}^n}}{1 - k(t)} \tag{4.2.2}$$

eşitsizliği geçerli olup,

$$g : (0, \infty) \to \mathbb{R}^n, \ g(t) = \frac{f(t,0)}{1 - k(t)} \tag{4.2.3}$$

olarak tanımlanan g fonksiyonunun sınırlı olması halinde $\psi \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ olur, [**9**].

İSPAT. Her pozitif m tamsayısı için $\psi : \left[\frac{1}{m}, m\right] \to \mathbb{R}^n$ şeklinde sınırlı ve sürekli fonksiyonların oluşturduğu $(X_m, \|.\|_m)$ Banach uzayını supremum normuyla dikkate alalım ve

$$S_m : X_m \to X_m, \ (S_m\psi)(t) = f(t, \psi(t)), \ t \in \left[\frac{1}{m}, m\right]$$

dönüşümünü tanımlayalım. Buna göre,

$$\begin{aligned} \|S_m\psi_1 - S_m\psi_2\|_m &= \sup_{\frac{1}{m} \leq t \leq m} \|f(t, \psi_1(t)) - f(t, \psi_2(t))\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \sup_{\frac{1}{m} \leq t \leq m} k(t)\|\psi_1(t) - \psi_2(t)\|_{\mathbb{R}^n} \\ &= \alpha_m \sup_{\frac{1}{m} \leq t \leq m} \|\psi_1(t) - \psi_2(t)\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \alpha_m \|\psi_1 - \psi_2\|_m \end{aligned}$$

olup $0 \leq \alpha_m < 1$ olduğundan S_m bir büzülmedir. Şu halde; S_m'nin ψ_m gibi birtek sabit noktası vardır. $t \in (0, \infty)$ ise $t \in \left[\frac{1}{m_0}, m_0\right]$ olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ olacağından,

$\psi : (0,\infty) \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu, yani $\psi : \cup_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m}, m\right] \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonunu,

$$\psi : \bigcup_{m=1}^{\infty}\left[\frac{1}{m}, m\right] \to \mathbb{R}^n,\ \psi(t) = \psi_{m_0}(t) = f(t, \psi_{m_0}(t)) \tag{4.2.4}$$

şeklinde tanımlayalım.

$t \in \left[\frac{1}{n_0}, n_0\right]$ $(n_0 \neq m_0)$ ise $\psi(t) = \psi_{n_0}(t) = f(t, \psi_{n_0}(t))$ olup,

$$\begin{aligned} \|\psi_{m_0}(t) - \psi_{n_0}(t)\|_{\mathbb{R}^n} &= \|f(t, \psi_{m_0}(t)) - f(t, \psi_{n_0}(t))\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq k(t)\|\psi_{m_0}(t) - \psi_{n_0}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

olacağından (4.2.5)'ten,

$$(1 - k(t))\|\psi_{m_0}(t) - \psi_{n_0}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq 0 \tag{4.2.6}$$

elde edilir. $t > 0$ olduğundan $1 - k(t) > 0$ olur. Şu halde; (4.2.6)'dan, $\psi_{m_0}(t) = \psi_{n_0}(t)$ bulunur. Bu ise, (4.2.4) eşitliğiyle tanımlanan ψ fonksiyonunun iyi tanımlı ve tek olması demektir.

Şimdi, $t \to 0^+$ iken $\psi(t) \to x_0$ olduğunu görelim.

$$\begin{aligned} \|\psi(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} &= \|f(t, \psi(t)) - f(0, x_0)\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \|f(t, \psi(t)) - f(t, x_0)\|_{\mathbb{R}^n} + \|f(t, x_0) - f(0, x_0)\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq k(t)\|\psi(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} + \|f(t, x_0) - f(0, x_0)\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

olduğundan (4.2.7)'den,

$$(1 - k(t))\|\psi(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|f(t, x_0) - f(0, x_0)\|_{\mathbb{R}^n} \tag{4.2.8}$$

olup, (4.2.8)'den de, $t > 0$ için

$$\|\psi(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\|f(t, x_0) - f(0, x_0)\|_{\mathbb{R}^n}}{1 - k(t)} \tag{4.2.9}$$

elde edilir. (4.1.6) ve (4.2.9)'dan, $\lim_{t\to 0^+} \|\psi(t) - x_0\|_{\mathbb{R}^n} = 0$ olacağından, $\lim_{t\to 0^+} \psi(t) = x_0$ olup, $\psi(0) = x_0$ olarak tanımlanırsa $\psi(0) = f(0, \psi(0))$ eşitliği sağlanır. Ayrıca ψ sürekli olup (4.2.1) denklemini sağlar. Diğer taraftan; $t>0$ için

$$\begin{aligned} \|\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} &= \|\psi(t)-f(t,0)+f(t,0)\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \|\psi(t)-f(t,0)\|_{\mathbb{R}^n}+\|f(t,0)\|_{\mathbb{R}^n} \\ &= \|f(t,\psi(t))-f(t,0)\|_{\mathbb{R}^n}+\|f(t,0)\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq k(t)\|\psi(t)-0\|_{\mathbb{R}^n}+\|f(t,0)\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

olduğundan (4.2.10)'dan,

$$(1-k(t))\|\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|f(t,0)\|_{\mathbb{R}^n} \tag{4.2.11}$$

ve (4.2.11)'den de,

$$\|\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\|f(t,0)\|_{\mathbb{R}^n}}{1-k(t)}$$

elde edilir, yani (4.2.2) sağlanır. Ayrıca, (4.2.3)'te tanımlanan g fonksiyonu sınırlı ise $\psi \in BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)$ olur ki böylece Teorem 4.2.1'in ispatı tamamlanır. □

SONUÇ 4.2.1. *(ii^*) şartı sağlanıyorken,*

$$x=f(0,x) \tag{4.2.12}$$

denkleminin birden fazla çözümü olabilir. Ancak (4.2.12) *denkleminin* (4.1.6) *şartını sağlayan $x_0 \in \mathbb{R}^n$ çözümü tektir,* **[9]**.

İSPAT. x_0, (4.2.12) denkleminin (4.1.6) şartını sağlayan bir çözümü ise

$$x_0=f(0,x_0)$$

ve

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t,x_0)-f(0,x_0)}{1-k(t)}=0 \tag{4.2.13}$$

eşitlikleri sağlanır. Şimdi, $y_0 \in \mathbb{R}^n$ noktasının, (4.2.12) denklemini ve (4.1.6) eşitliğini sağladığını ve x_0'dan farklı olduğunu kabul edelim. Bu durumda;

$$y_0=f(0,y_0)$$

ve

$$\lim_{t\to 0^+}\frac{f(t,y_0)-f(0,y_0)}{1-k(t)}=0 \tag{4.2.14}$$

olur.

$$\begin{aligned} \|x_0 - y_0\|_{\mathbb{R}^n} &= \|x_0 - \psi(t) + \psi(t) - y_0\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \|x_0 - \psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} + \|y_0 - \psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned} \tag{4.2.15}$$

olup, (4.2.9) eşitsizliğinin kullanılmasıyla, (4.2.15)'ten, $t > 0$ için

$$\|x_0 - y_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{\|f(t, x_0) - f(0, x_0)\|_{\mathbb{R}^n}}{1 - k(t)} + \frac{\|f(t, y_0) - f(0, y_0)\|_{\mathbb{R}^n}}{1 - k(t)} \tag{4.2.16}$$

elde edilir. (4.2.13) ve (4.2.14) eşitlikleri dikkate alınarak (4.2.16)'da $t \to 0^+$ için limit alınırsa, $\|x_0 - y_0\|_{\mathbb{R}^n} \leq 0$ olur ki buradan $x_0 = y_0$ sonucuna ulaşılır. □

ÖRNEK 4.2.1. **[9]** $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ve $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ sürekli fonksiyonlar olmak üzere;

$$\forall x, y \in \mathbb{R}^n \text{ için } \|g(x) - g(y)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \|x - y\|_{\mathbb{R}^n}$$

eşitsizliği sağlansın. Ayrıca, $x_0 = g(x_0)$ ve $v(0) = g(x_0)$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}^n$ mevcut olsun. Şimdi,

$$f(t, x) = e^{-t} g(x) + v(t)(e^t - 1)$$

fonksiyonunu tanımlayalım. Eğer $k(t) = e^{-t}$ olarak alınırsa, (i^*) ve (ii^*) şartları sağlanır. Gerçekten; $f(0, x_0) = g(x_0) = x_0$ olup,

$$\begin{aligned} \lim_{t \to 0^+} \frac{f(t, x_0) - f(0, x_0)}{1 - k(t)} &= \lim_{t \to 0^+} \frac{e^{-t} g(x_0) + v(t)(e^t - 1) - g(x_0)}{(1 - e^{-t})} \\ &= \lim_{t \to 0^+} \left[\frac{g(x_0)(e^{-t} - 1)}{(1 - e^{-t})} + \frac{v(t)(e^t - 1)e^t}{(e^t - 1)} \right] \\ &= 0 \end{aligned}$$

olduğundan (i^*) sağlanır. Diğer taraftan; $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ ve $\forall t \in \mathbb{R}^+$ için

$$\begin{aligned} \|f(t, x) - f(t, y)\|_{\mathbb{R}^n} &= \|e^{-t} g(x) + v(t)(e^t - 1) - e^{-t} g(y) - v(t)(e^t - 1)\|_{\mathbb{R}^n} \\ &= \|e^{-t} (g(x) - g(y))\|_{\mathbb{R}^n} \\ &= e^{-t} \|g(x) - g(y)\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq e^{-t} \|x - y\|_{\mathbb{R}^n} \end{aligned}$$

olduğundan (ii^*) sağlanır. Buna göre Teorem 4.2.1'den, $\forall t \in \mathbb{R}^+$ için $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ olan ve $\psi(t) = f(t, \psi(t))$ eşitliğini sağlayan birtek sürekli ψ fonksiyonu vardır. Eğer

$n = 1$ ve $g(x) = \sin(x+1)$ alınırsa, x_0, $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında $x = \sin(x+1)$ denkleminin tek çözümüdür.

(i^*) ve (ii^*)'daki $\mathbb{R}^+$ kümesinin sonlu bir aralıkla değiştirilmesi halinde Teorem 4.2.1 yine geçerlidir. Böylelikle $\mathbb{R}^+$ üzerinde sayılabilir adette nokta için $k(t) = 1$ oluyorsa her sonlu aralıkta Teorem 4.2.1'i uygulayarak aşağıdaki sonuca ulaşırız.

Sonuç 4.2.2. **[9]** (i^{**}) $f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ *fonksiyonu sürekli ve*

$$E = \{t_m \in \mathbb{R}^+ : m = 1, 2, 3, \ldots \ \textit{ve}\ t_m < t_{m+1}\}$$

kümesinin elemanı olmayan her t *için* $0 \leq k(t) < 1$ *eşitsizliğini sağlayacak şekilde en az bir* $k : \mathbb{R}^+ \to [0, 1]$ *sürekli fonksiyonu mevcut olsun. Ayrıca,* $m \to \infty$ *iken* $t_m \to \infty$ *olup,* $(x_m) \subset \mathbb{R}^n$ *dizisi,*

$$x_m = f(t_m, x_m),$$

$$\lim_{t \to t_m} \frac{f(t, x_m) - f(t_m, x_m)}{1 - k(t)} = 0$$

eşitliklerini ve (ii^*) *şartını sağlasın. Bu taktirde;* (4.2.1) *denkleminin çözümü olan birtek* $\psi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^n$ *sürekli fonksiyonu vardır.*

Örnek 4.2.2. **[9]** $\mu : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon olmak üzere;

$$f(t, x) = \cos t \sin x + \mu(t) \sin^3 t$$

fonksiyonunu ele alalım. Eğer $t_m = m\pi,\ x_m = 0\ (m = 1, 2, \ldots)$ ve $k(t) = |\cos t|$ alınırsa, $(i)^{**}$ ve $(ii)^*$ şartları sağlanır.

$$f(t, x_m) = \cos t \sin(x_m) + \mu(t) \sin^3 t = \mu(t) \sin^3 t$$

ve

$$f(t_m, x_m) = \cos(t_m) \sin(x_m) + \mu(t_m) \sin^3(t_m) = 0$$

olup,

$$\begin{aligned}
\lim_{t\to t_m}\frac{f(t,x_m)-f(t_m,x_m)}{1-k(t)} &= \lim_{t\to m\pi}\frac{\mu(t)\sin^3 t}{1-|\cos t|}\\
&= \mu(m\pi)\lim_{t\to m\pi}\frac{\sin^3 t}{1-|\cos t|}\\
&= 0
\end{aligned}$$

olduğundan (i^{**}) sağlanır. Ayrıca, $\forall x,y\in\mathbb{R}$ ve $\forall t\in\mathbb{R}^+$ için

$$\begin{aligned}
|f(t,x)-f(t,y)| &= \left|\cos t\sin x+\mu(t)\sin^3 t-\cos t\sin y-\mu(t)\sin^3 t)\right|\\
&= |\cos t||\sin x-\sin y|\\
&= k(t)\left|2\sin\left(\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(\frac{x+y}{2}\right)\right|\\
&\le 2k(t)\frac{|x-y|}{2}\\
&= k(t)|x-y|
\end{aligned}$$

olduğundan (ii^{*}) şartı da sağlanmış olur. Şu halde; Sonuç 4.2.2'den, $\psi(t)=f(t,\psi(t))$ eşitliğini sağlayan bir tek $\psi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu vardır.

Teorem 4.2.2. *Y, S Banach uzayının boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt cümlesi olsun. $A:Y\to S$ ve $B:S\to S$ dönüşümleri,*

(i) *B, $\alpha<1$ sabitli bir büzülmedir,*

(ii) *A süreklidir ve AY, S'nin kompakt bir altcümlesi tarafından kapsanır ve*

(iii) $\forall y\,[(y\in Y$ *ve* $x=Bx+Ay)\Rightarrow x\in Y]$

(Herhangi bir $y\in Y$ için $x=Bx+Ay$ denkleminin bir x çözümü varsa $x\in Y$'dir) şartlarını sağlasın. Bu taktirde; $Ay+By=y$ eşitliğini sağlayan en az bir $y\in Y$ vardır, [**20**].

Teorem 4.2.3. *$q:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ fonksiyonu sürekli ve $\lim_{t\to\infty}q(t)=0$ olsun. $\{\phi_k\}$, $\phi_k:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^n$ olan ve $\forall t\in\mathbb{R}^+$ için*

$$\|\phi_k(t)\|_{\mathbb{R}^n}\le q(t),\ (k=1,2,\ldots)$$

eşitsizliğini sağlayan eş sürekli fonksiyonların bir dizisi ise $\{\phi_k\}$*'nın,* $\mathbb{R}^+$ *üzerinde* $\|\phi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq q(t)$ *şartını sağlayan sürekli bir* ϕ *fonksiyonuna düzgün yakınsak olan bir alt dizisi mevcuttur,* [**21**].

Teorem 4.2.4. $(i^*) - (iii^*)$ *şartları altında,* (4.1.5) *integral denkleminin* $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ *uzayında en az bir çözümü mevcuttur ve bu çözüm* $\mathbb{R}^+$*'da asimptotik kararlıdır. Ayrıca;* ψ, (4.2.1) *eşitliğini sağlayan fonksiyon ve* x, (4.1.5)*'in bir çözümü olmak üzere;*

$$\lim_{t \to \infty} \|x(t) - \psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} = 0$$

eşitliği geçerlidir. $(i^*) - (iii^*)$ *şartlarına ilaveten,* (4.2.3)*'te tanımlanan* g *fonksiyonu da sınırlı ise* x *çözümü* $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ *uzayına aittir,* [**9**].

İspat. İspat için, sırasıyla, Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.2.3'ten faydalanacağız.
ψ, (4.2.1) eşitliğini sağlayan sürekli fonksiyon olmak üzere; (4.1.5) integral denklemini,

$$x(t) = y(t) + \psi(t) = f(t, y(t) + \psi(t)) + \int_0^t u\left(t, s, y(s) + \psi(s)\right) ds$$

veya, $f(t, \psi(t)) = \psi(t)$ eşitliğini dikkate alarak,

$$y(t) = f(t, y(t) + \psi(t)) - f(t, \psi(t)) + \int_0^t u\left(t, s, y(s) + \psi(s)\right) ds \qquad (4.2.17)$$

şeklinde yazalım. Eğer (4.2.17) denkleminin bir $y \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ çözümünün mevcut olduğu gösterilebilirse böylece $x = y + \psi$ fonksiyonu, (4.1.5) denkleminin $C(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ uzayındaki bir çözümü olur. Diğer taraftan, "x sınırlıdır $\Leftrightarrow$ ψ sınırlıdır " önermesi doğru olduğundan (4.2.3)'te tanımlanan g fonksiyonunun sınırlı olması halinde, (4.2.2)'den, $x \in BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ olur.

X_m, Teorem 4.2.1'in ispatında tanımlanan Banach uzayı,

$$Y_m = \{\phi \in X_m : \|\phi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq q(t)\}$$

ve

$$q(t) = \frac{a(t)}{1 - k(t)} \int_0^t b(s) ds, \; q(0) = 0$$

olmak üzere; $P : X_m \to X_m$ dönüşümünü,

$$\begin{aligned} (P\phi)(t) &= f(t, \phi(t) + \psi(t)) - f(t, \psi(t)) + \textstyle\int_{\frac{1}{m}}^{t} u(t, s, \phi(s) + \psi(s))\, ds \\ &= (B\phi)(t) + (A\phi)(t) \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

eşitliğiyle tanımlayalım. (4.2.18)'deki A ve B dönüşümleri,

$$(A\phi)(t) = \int_{\frac{1}{m}}^{t} u(t, s, \phi(s) + \psi(s))\, ds$$

ve

$$(B\phi)(t) = f(t, \phi(t) + \psi(t)) - f(t, \psi(t))$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Hipotezlerden; Y_m cümlesinin, X_m'nin boş olmayan, kapalı ve konveks bir alt cümlesi olduğu kolayca görülebilir.
Şimdi, Teorem 4.2.2'yi kullanmak için, B'nin bir büzülme ve AY_m'nin kompakt olduğunu görelim.

ϕ'nin sürekliliği dikkate alınarak,

$$(P\phi)(t) = f(t, \phi(t) + \psi(t)) - f(t, \psi(t)) + \int_{\frac{1}{m}}^{t} u(t, s, \phi(s) + \psi(s))ds$$

eşitliğinden $P\phi$'nin sürekliliği kolayca görülebilir.

$\forall \phi \in Y_m$ için

$$\begin{aligned} \|(A\phi)(t)\|_{\mathbb{R}^n} &= \left\| \int_{\frac{1}{m}}^{t} u(t, s, \phi(s) + \psi(s))\, ds \right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq a(t) \int_{\frac{1}{m}}^{t} b(s)ds \\ &\leq a(t) \int_{0}^{t} b(s)ds \\ &\leq q(t) \end{aligned}$$

olduğundan A, $A : Y_m \to Y_m$ olan bir dönüşümdür.

Şimdi, $\forall \phi_1, \phi_2 \in X_m$ için,

$$\|B\phi_1 - B\phi_2\|_m \leq \alpha \|\phi_1 - \phi_2\|_m$$

olacak şekilde bir $\alpha \in [0,1)$ sabitinin olduğunu, yani B'nin bir büzülme olduğunu görelim.

$$\begin{aligned}
\|(B\phi_1)(t)-(B\phi_2)(t)\|_{\mathbb{R}^n} &= \|f\left(t,\phi_1(t)+\psi(t)\right)-f\left(t,\phi_2(t)+\psi(t)\right)\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq k(t)\|\phi_1(t)+\psi(t)-\phi_2(t)-\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \\
&= k(t)\|\phi_1(t)-\phi_2(t)\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \alpha\|\phi_1-\phi_2\|_m, \ \left(\alpha=\sup_{\frac{1}{m}\leq t\leq m} k(t)\right)
\end{aligned} \tag{4.2.19}$$

olduğundan (4.2.19)'dan,

$$\|B\phi_1-B\phi_2\|_m \leq \alpha\|\phi_1-\phi_2\|_m$$

elde edilir. $0 \leq \alpha < 1$ olduğundan $B: X_m \to X_m$ bir büzülme dönüşümüdür. Yani Teorem 4.2.2'nin (i) şartı sağlanır.

A'nın Y_m üzerinde sürekli olduğunu görelim. $\epsilon > 0$ sayısı verilsin. Bu durumda;

$$\forall\phi,\eta,t\left(\phi,\eta\in Y_m, \|\psi-\eta\|_m<\delta \text{ ve } \frac{1}{m}\leq t\leq m\right)\Rightarrow \|A\phi-A\eta\|_m<\epsilon$$

önermesi doğru olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısının olduğunu gösterelim.

$$H=\sup_{0\leq t\leq m} q(t)+\sup_{0\leq t\leq m}\|\psi(t)\|$$

tanımlayalım. Bu durumda; $\|\phi\|_m \leq H$ ve $\|\eta\|_m \leq H$ olup, $u = u(t,s,y)$ fonksiyonu,

$$K=\left\{(t,s,y): \frac{1}{m}\leq s\leq t\leq m \text{ ve } \|y\|_{\mathbb{R}^n}\leq H\right\}$$

cümlesi üzerinde düzgün sürekli olduğundan, $\forall\epsilon > 0$ sayısı için

$$\frac{1}{m}\leq s\leq t\leq m \text{ ve } \|\phi(s)-\eta(s)\|_{\mathbb{R}^n}<\delta$$

olduğunda,

$$\|u\left(t,s,\phi(s)+\psi(s)\right)-u\left(t,s,\eta(s)+\psi(s)\right)\|_{\mathbb{R}^n}<\frac{\epsilon}{m}$$

olacak şekilde bir $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ sayısı vardır. Böylece,

$$\begin{aligned}\|(A\phi)(t) - (A\eta)(t)\|_{\mathbb{R}^n} &= \left\| \int_{\frac{1}{m}}^{t} u\left(t, s, \phi(s) + \psi(s)\right) - u\left(t, s, \eta(s) + \psi(s)\right) ds \right\|_{\mathbb{R}^n} \\ &\leq \int_{\frac{1}{m}}^{t} \|u(t, s, \phi(s) + \psi(s)) - u(t, s, \eta(s) + \psi(s))\|_{\mathbb{R}^n} \, ds \\ &< \frac{\epsilon}{m}\left(t - \frac{1}{m}\right) \leq \frac{\epsilon}{m}\left(m - \frac{1}{m}\right) < \frac{\epsilon}{m} m = \epsilon\end{aligned}$$

olduğundan, $\|A\phi - A\eta\|_m < \epsilon$ olur. Yani; A, Y_m üzerinde süreklidir. Buna göre, Teorem 4.2.2'nin (ii) şartının birinci kısmı sağlanır.

Şimdi, AY_m'nin, Y_m'nin kompakt bir alt cümlesi olduğunu görelim.

$$A : Y_m \to Y_m, \ (Ay)(t) = \int_{\frac{1}{m}}^{t} u(t, s, y(s) + \psi(s)) ds$$

olmak üzere AY_m cümlesi düzgün sınırlıdır. Gerçekten; $AY_m = \{Ay : y \in Y_m\}$ olup $\forall y \in Y_m$ için $\|Ay\|_m \leq K$ olacak şekilde bir $K \geq 0$ sabiti vardır. Bunu görelim.

$$\|Ay\|_m = \sup_{\frac{1}{m} \leq t \leq m} \|(Ay)(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \sup_{\frac{1}{m} \leq t \leq m} a(t) \int_{\frac{1}{m}}^{t} b(s) ds = K$$

olduğundan AY_m, Y_m'nin düzgün sınırlı bir alt cümlesidir. AY_m cümlesinin eş sürekli olduğu da görülebilir, [**22**, syf. 43]. Sonuç olarak; AY_m cümlesinin kompakt olduğu anlaşılır ve böylece Teorem 4.2.2'nin (ii) şartının ikinci kısmı da sağlanır.

P'nin Y_m'de sabit bıraktığı bir ϕ_m noktası olduğunu görelim.

Bir $\eta \in Y_m$ için $D : X_m \to X_m$ dönüşümünü, $(D\phi)(t) = (B\phi)(t) + (A\eta)(t)$ eşitliğiyle tanımlayalım. $D\phi = \phi$ denkleminin bir ϕ çözümü varsa bu çözümün Y_m'nin bir elemanı olduğunu görelim. $D\phi = \phi$ olduğundan,

$$\|\phi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq k(t)\|\phi(t)\|_{\mathbb{R}^n} + a(t) \int_0^t b(s) ds \tag{4.2.20}$$

olur. (4.2.20)'den,

$$(1 - k(t))\|\phi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a(t) \int_0^t b(s) ds \tag{4.2.21}$$

ve (4.2.21)'den,

$$\|\phi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{a(t)}{1 - k(t)} \int_0^t b(s) ds \tag{4.2.22}$$

olup, (4.2.22)'den, $\|\phi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq q(t)$ olacağından, $\phi \in Y_m$ olur. Yani, Teorem 4.2.2'nin (iii) şartı da sağlanır. Şu halde Teorem 4.2.2'ye göre, Y_m'de P'nin sabit bıraktığı bir ϕ_m noktası vardır.

Son olarak, y bilinmeyenli

$$y(t) = f(t, y(t) + \psi(t)) - f(t, \psi(t)) + \int_0^t u(t, s, y(s) + \psi(s))ds \tag{4.2.23}$$

denkleminin, $BC(\mathbb{R}^+, \mathbb{R}^n)$ uzayında, $t > 0$ için

$$\|\phi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq q(t) \tag{4.2.24}$$

şartını sağlayan bir ϕ çözümüne sahip olduğunu görelim.

$$(P\phi)(t) = f(t, \phi(t) + \psi(t)) - f(t, \psi(t)) + \int_{\frac{1}{m}}^t u(t, s, \phi(s) + \psi(s))ds$$

olmak üzere ϕ_m, P'nin Y_m'de sabit bıraktığı nokta olsun. Bu taktirde;

$$\phi_m(t) = f(t, \phi_m(t) + \psi(t)) - f(t, \psi(t)) + \int_{\frac{1}{m}}^t u(t, s, \phi_m(s) + \psi(s))ds \tag{4.2.25}$$

olup, (4.2.25)'ten,

$$\|\phi_m(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq k(t)\|\phi_m(t)\|_{\mathbb{R}^n} + a(t)\int_0^t b(s)ds \tag{4.2.26}$$

ve (4.2.26)'dan,

$$(1 - k(t))\|\phi_m(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq a(t)\int_0^t b(s)ds \tag{4.2.27}$$

olacağından, $\frac{1}{m} \leq t \leq m$ olmak üzere; (4.2.27)'den,

$$\|\phi_m(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq \frac{a(t)}{1 - k(t)}\int_0^t b(s)ds \leq q(t) \leq \sup_{\tau > 0} q(\tau) = \gamma \tag{4.2.28}$$

elde edilir. Böylece; ϕ_m, sürekli olacak ve (4.2.28)'i sağlayacak şekilde, $\mathbb{R}^+$ cümlesine genişletilebilir. Şu halde; her m için $\|\phi_m\| \leq \gamma$ ve $\phi_m(0) = 0$ olup, $\{\phi_m\}$, $\mathbb{R}^+$'da düzgün sınırlı bir dizidir.

Şimdi, $\{\phi_m\}$ dizisinin $\mathbb{R}^+$ da eş sürekli olduğunu gösterelim.

$\epsilon > 0$ ve $t_0 \in (0, \infty)$ sayısı verilsin. Bu durumda; $t_0 \in \left(\frac{1}{m_0}, m_0\right)$ olacak şekilde bir $m_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilir. Bir $\delta_1 > 0$ sayısını, $\delta_1 = \min\left\{\frac{1}{2}\left(t_0 - \frac{1}{m_0}\right), \frac{1}{2}\left(m_0 - \frac{1}{t_0}\right)\right\}$

olarak seçelim. Eğer $|t-t_0|<\delta_1$ ise o zaman $m \geq m_0$ için $t \in \left[\frac{1}{m_0}, m_0\right] \subset \left[\frac{1}{m}, m\right]$ olur ve

$$\begin{aligned}
\|\phi_m(t)-\phi_m(t_0)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \|f\left(t,\phi_m(t)+\psi(t)\right)-f\left(t_0,\phi_m(t_0)+\psi(t_0)\right)\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\quad +\|f\left(t,\psi(t)\right)-f\left(t_0,\psi(t_0)\right)\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\quad +\left\|\int_{\frac{1}{m}}^{t} u\left(t,s,\phi_m(s)+\psi(s)\right)ds-\int_{\frac{1}{m}}^{t_0} u(t_0,s,\phi_m(s)+\psi(s))ds\right\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\leq \|f(t,\phi_m(t)+\psi(t))-f(t,\phi_m(t_0)+\psi(t_0))\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\quad +\|f(t,\phi_m(t_0)+\psi(t_0))-f(t_0,\phi_m(t_0)+\psi(t_0))\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\quad +\|f(t,\psi(t))-f(t_0,\psi(t_0))\|_{\mathbb{R}^n} \\
&\quad +\left\|\int_{\frac{1}{m}}^{t} u(t,s,\phi_m(s)+\psi(s))ds-\int_{\frac{1}{m}}^{t_0} u(t_0,s,\phi_m(s)+\psi(s))ds\right\|_{\mathbb{R}^n} \\
&= \|f(t,\phi_m(t)+\psi(t))-f(t,\phi_m(t_0)+\psi(t_0))\|_{\mathbb{R}^n}+Q_m(t,t_0)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$$k_0=\sup\{k(t): t_0-\delta_1 \leq t \leq t_0+\delta_1\}$$

ve

$$H_1=\gamma+\sup\{\|\psi(t)\|_{\mathbb{R}^n}: 0 \leq t \leq t_0+\delta_1\}$$

olmak üzere; f ve u, sırasıyla, $[0,t_0+\delta_1]\times[0,t_0+\delta_1]$ ve

$$[0,t_0+\delta_1]\times[0,t_0+\delta_1]\times\{x\in\mathbb{R}^n: \|x\|_{\mathbb{R}^n}\leq H_1\}$$

cümleleri üzerinde düzgün sürekli olduklarından, $m \geq m_0$ olan her m ve $|t-t_0|<\delta_2$ şartını sağlayan her t için,

$$\|\psi(t)-\psi(t_0)\|+Q_m(t,t_0)<\epsilon(1-k_0)$$

olacak şekilde bir $\delta_2>0$ sayısı vardır. $\delta_3=\min\{\delta_1,\delta_2\}$ olmak üzere; $|t-t_0|<\delta_3$ olan her t ve $m \geq m_0$ olan her m için,

$$\begin{aligned}
\|\phi_m(t)-\phi_m(t_0)\|_{\mathbb{R}^n} &\leq \|f(t,\phi_m(t)+\psi(t))-f(t_0,\phi_m(t_0)+\psi(t_0))\|_{\mathbb{R}^n}+Q_m(t,t_0) \\
&\leq k(t)\|\phi_m(t)-\phi_m(t_0)\|_{\mathbb{R}^n}+k(t)\|\psi(t)-\psi(t_0)\|_{\mathbb{R}^n}+Q_m(t,t_0) \\
&< k_0\|\phi_m(t)-\phi_m(t_0)\|_{\mathbb{R}^n}+\epsilon(1-k_0)
\end{aligned}$$

olacağından, $(1-k_0)\|\phi_m(t)-\phi_m(t_0)\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon(1-k_0)$ yani, $\|\phi_m(t)-\phi_m(t_0)\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon$ olur.

ϕ_k, $k=1,2,\ldots,m_0$ için t_0 noktasında sürekli olduğundan, her $\epsilon>0$ sayısına karşılık,

$$\forall t\,(|t-t_0|<\delta_4 \Rightarrow \|\phi_k(t)-\phi_k(t_0)\|_{\mathbb{R}^n} < \epsilon)$$

önermesi doğru olacak şekilde bir $\delta_4=\delta_4(\epsilon)>0$ sayısı bulunabilir. $\delta=\min\{\delta_3,\delta_4\}$ alınırsa, $|t-t_0|<\delta$ olan her t ve her $m\in\mathbb{N}$ için $\|\phi_m(t)-\phi_m(t_0)\|_{\mathbb{R}^n}<\epsilon$ olur. $\phi_m(0)=0$ olup, (iii^*) şartından, $t\to 0$ iken $\|\phi_m(t)\|_{\mathbb{R}^n}\le q(t)\to 0$ olduğundan $\{\phi_m\}$, $t_0=0$ noktasında eş süreklidir. Böylece, $\{\phi_m\}$,

$$\|\phi_m(t)\|_{\mathbb{R}^n} \le q(t) \tag{4.2.29}$$

eşitsizliğini sağlayan eş sürekli bir dizidir. Şu halde; Teorem 4.2.3'ten, $\{\phi_m\}$; $\mathbb{R}^+$ üzerinde, sürekli bir ϕ fonksiyonuna düzgün yakınsak olan bir alt diziye sahiptir. $\lim_{k\to\infty}\phi_{m_k}(t)=\phi(t)$ olmak üzere; (4.2.25) eşitliğinden,

$$\phi_{m_k}(t)=f(t,\phi_{m_k}(t)+\psi(t))-f(t,\psi(t))+\int_{\frac{1}{m_k}}^{t} u(t,s,\phi_{m_k}(s)+\psi(s))ds \tag{4.2.30}$$

yazılabilir. (4.2.30) eşitliğinde $k\to\infty$ için limit alınırsa,

$$\phi(t)=f(t,\phi(t)+\psi(t))-f(t,\psi(t))+\int_0^t u(t,s,\phi(s)+\psi(s))ds$$

elde edilir. Şu halde ϕ, (4.2.23) denkleminin, yani, bilinmeyeni y olan

$$y(t)=f(t,y(t)+\psi(t))-f(t,\psi(t))+\int_0^t u(t,s,y(s)+\psi(s)) \tag{4.2.31}$$

denkleminin bir çözümüdür. Ayrıca, (4.2.29) eşitsizliğinden,

$$\|\phi_{m_k}(t)\|_{\mathbb{R}^n} \le q(t) \tag{4.2.32}$$

olacağından, (4.2.32) eşitsizliğinde $k\to\infty$ için limit alınırsa,

$$\|\phi(t)\|_{\mathbb{R}^n} \le q(t)$$

elde edilir. (4.2.31) denkleminden,

$$y(t)+f(t,\psi(t))=f(t,y(t)+\psi(t))+\int_0^t u(t,s,y(s)+\psi(s))$$

olup, $f(t,\psi(t)) = \psi(t)$ eşitliğinin geçerliliği de dikkate alınarak $x(t) = \phi(t) + \psi(t)$ alınırsa, x fonksiyonunun,

$$x(t) = f(t,x(t)) + \int_0^t u(t,s,x(s))$$

denkleminin, yani (4.1.5) denkleminin $C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)$ uzayındaki bir çözümü olacağı kolayca görülebilir. Diğer taraftan; (4.2.3)'te tanımlanan g fonksiyonu sınırlı ise (4.2.1)'den $x \in BC(\mathbb{R}^+,\mathbb{R}^n)$ olacağı açıktır.

Eğer x_1 ve x_2, (4.1.5) denkleminin herhangi iki çözümü, ϕ_1 ve ϕ_2 de (4.2.24)'ü sağlayan fonksiyonlar ise,

$$x_i(t) = \phi_i(t) + \psi(t), \quad (i = 1,2) \tag{4.2.33}$$

olup, (4.2.33)'ten,

$$\|x_1(t) - x_2(t)\|_{\mathbb{R}^n} = \|\phi_1(t) - \phi_2(t)\|_{\mathbb{R}^n} \leq 2q(t) \tag{4.2.34}$$

ve (4.2.34)'ten,

$$\lim_{t\to\infty} \|x_1(t) - x_2(t)\|_{\mathbb{R}^n} = 0$$

olur. Yani, (4.1.5) denkleminin her çözümü asimptotik kararlıdır ve bir x çözümü için (4.2.33)'ten, $\lim_{t\to\infty} \|x(t) - \psi(t)\|_{\mathbb{R}^n} = 0$ olur. Böylece ispat tamamlanmış olur. $\square$

Örnek 4.2.3. **[9]** $v : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ve $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları sürekli olsun ve $\forall x, y \in \mathbb{R}$ için $|g(x) - g(y)| \leq |x - y|$ eşitsizliği sağlansın. Ayrıca, $x_0 = g(x_0)$ ve $v(0) = g(x_0)$ olacak şekilde bir $x_0 \in \mathbb{R}$ mevcut olsun. $\beta : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sürekli fonksiyonu da, $\forall t, s \in \mathbb{R}^+$ ve $\forall x \in \mathbb{R}$ için,

$$|\beta(t,s,x)| \leq \frac{2t(1+s)}{(1+t)^4}$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu durumda;

$$x(t) = e^{-t}g(x) + v(t)(e^t - 1) + \int_0^t \beta\left(t,s,x(s)\right) \frac{x^{1/3}(s)}{1 + |x^{1/3}(s)|} ds \tag{4.2.35}$$

denklemi için $(i^*)-(iii^*)$ şartlarının sağlandığı görülebilir. Böylece, Teorem 4.2.4'ten, (4.2.35) denkleminin, $C(\mathbb{R}^+,\mathbb{R})$ uzayında asimptotik kararlı olan en az bir x çözümüne sahip olduğunu söyleyebiliriz.

KAYNAKLAR

[1] M. Bocher, *An Introduction to the Study of Integral Equations*, Hafner Press, Royal Oak, 1971.

[2] A. Polyanin and A. Menzhirov, *Handbook of Integral Equations*, Crs Press, New York, 1998.

[3] **K. Taşkıran**, *"Lineer Olmayan Kuadratik Volterra İntegral Denklemleri"*, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Malatya, 2008.

[4] **Ö. F. Temizer**, *"Volterra İntegral Denklemleri"*, Yüksek Lisans Tezi, Ankara Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, 1987.

[5] Z. B. Tsalyuk, *Volterra Integral Equations*, **Matematicheskii Analiz**, 15(1977) 133-198.

[6] **İ. Özdemir**, *"Konvolüsyon Çekirdekli Volterra İntegral Denklemleri"*, Yüksek Lisans Tezi, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Malatya, 1998.

[7] **O. Karakurt**, *"Lineer Olmayan Nonhomojen Kuadratik Volterra İntegral - Denklemleri"*, Yüksek Lisans Tezi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Matematik Anabilim Dalı, Malatya, 2009.

[8] J. Banas and B. Rzepka, *An Application of a Measure of Noncompactness in the study of Asymptotic Stability*, **Appl. Math. Lett.**, 16(2003) 1-6.

[9] T. A. Burton and B. Zhong, *Fixed Points ans Stability of an Integral Equations: Nonuniqueness*, **Appl. Math. Lett.**, 17 (2004) 839-846.

[10] I. J. Maddox, *Elements of Functional Analysis*, Cambridge University Press. Cambridge, 1970.

[11] G. Aslım, *Genel Topoloji*, Ege Üniversitesi Basımevi, İzmir, 1988.

[12] B. Musayev, M. Alp, *Fonksiyonel Analiz*, Kütahya, 2000.

[13] V. Hutson, J. Sydney Pym, M. J. Cloud, *Applications of Functional Analysis And Operator Theory*, Academic Press Inc., London, 1980.

[14] E. W. Cheney, *Analysis for Applied Mathematics*, Springer-Verlag Inc., New York, 2001.

[15] A. E. Taylor, *Introduction to Functional Analysis*, John Wiley & Sons. Inc., New York, 1967.

[16] C. Costara, D. Popa, *Exercises in Functional Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Netherlands, 2003.

[17] C. Goffman, G. Pedrick, *First Course in Functional Analysis*, Prentice-Hall. Inc., 1965.

[18] J. Banas and K. Sadarangani, *On Some Measures of Noncompactness in the space of Continuous Functions*, **Nonlinear Analysis** , 68 (2008) 377-383.

[19] S. Shirali and H. L. Vasudeva, *Metric Spaces*, Springer-Verlag, London, 2006.

[20] T. A. Burton, *A fixed-point theorem of Krasnoselskii*, **Appl. Math. Lett.**, 11:1 (1998) 85-88.

[21] T. A. Burton and T. Furumochi, *A note on stability by Schauder's theorem*, **Funkcialaj Ekvacioj**, 44 (2001) 73-82.

[22] T. A. Burton, *Differential Inequalities for integral and delay equations, In Comparison Methods and Stability Theory*, Marcel Dekker, New York, 1994.

ÖZGEÇMİŞ

1977 yılı Malatya doğumludur. İlk ve Orta öğrenimini Malatya'da tamamladı. 1997 yılında Ortadoğu Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümünü kazandı. 2001 yılında bu bölümden mezun oldu ve aynı yıl Milli Eğitim Bakanlığı'nın Matematik Öğretmenliği kadrosuna atandı.

2009-2010 Eğitim-Öğretim yılında, İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitimine başladı. Halen Milli Eğitim Bakanlığına bağlı bir Orta Öğretim Kurumunda Matematik Öğretmeni olarak görev yapmaktadır.