T.C.
İNÖNÜ ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

RİEMANN MANİFOLDLARI ARASINDAKİ KONFORM DÖNÜŞÜMLER

ŞENER YANAN

YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK ANABİLİM DALI

MALATYA
2012

Tezin Başlığı : Riemann Manifoldları Arasındaki Konform Dönüşümler

Tezi Hazırlayan : Şener YANAN

Sınav Tarihi : 30.10.2012

Yukarıda adı geçen tez jürimizce değerlendirilerek Matematik Ana Bilim Dalında Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

Sınav Jürisi Üyeleri

Prof.Dr.Sadık KELEŞ ....

Prof.Dr.Bayram ŞAHİN ....

Prof.Dr.Rıfat GÜNEŞ ....

İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Onayı

Prof.Dr.Mehmet ALPASLAN
Enstitü Müdürü

ONUR SÖZÜ

Yüksek Lisans Tezi olarak sunduğum “Riemann Manifoldları Arasındaki Konform Dönüşümler” başlıklı bu çalışmanın bilimsel ahlak ve geleneklere aykırı düşecek bir yardıma başvurmaksızın tarafımdan yazıldığını ve yararlandığım bütün kaynakların, hem metin içinde hem de kaynakçada yöntemine uygun biçimde gösterilenlerden oluştuğunu belirtir, bunu onurumla doğrularım.

Şener YANAN

ÖZET

Yüksek Lisans Tezi

Riemann Manifoldları Arasındaki Konform Dönüşümler

Şener YANAN

İnönü Üniversitesi
Fen Bilimleri Enstitüsü
Matematik Anabilim Dalı

69+iv sayfa

2012
Danışman: Prof.Dr. Bayram ŞAHİN

Üç bölümden oluşan bu tezin birinci bölümü giriş kısmına ayrılmıştır. Burada, tezin amacı ve kullanım alanları belirtilmiştir.

İkinci bölümde, üçüncü bölüm için temel teşkil eden Riemann manifoldları, Riemann altmanifoldları, Riemann submersiyonları ve Riemann manifoldları üzerindeki bazı operatörler incelenmiştir.

Son olarak üçüncü bölümde, daha önce elde edilen ifadelerin konform dönüşümler ve konform submersiyonlar altındaki bazı özellikleri incelenmiştir. Bunlara bağlı olarak Riemann manifoldları arasındaki konform dönüşümler verilmiştir.

ANAHTAR KELİMELER: Riemann Manifoldu, Altmanifoldlar, Submersiyon, Riemann Submersiyonu, Konform Dönüşüm, Yatay Zayıf Konform Dönüşüm, Yatay Konform Submersiyon

ABSTRACT

Graduate Thesis

Conformal Maps Between Riemannian Manifolds

Şener YANAN

İnönü University
Graduate School of Natural and Applied Sciences
Department of Mathematics

69+iv pages
2012
Supervisor: Prof.Dr. Bayram ŞAHİN

The present thesis consists of three chapters. The first chapter of this thesis is devoted to introduction. In this part, the aim of thesis and using areas is stated.

In the second chapter, Riemannian manifolds, Riemannian submanifolds, Riemannian submersions and some operations on Riemannian manifolds are given for using in the third chapter.

Lastly, in the third chapter, some properties of the results obtained from other chapters are investigated under the topics of conformal maps and conformal submersions. Depending on this properties, conformal maps between Riemannian manifolds are given.

KEYWORDS: Riemannian Manifolds, Submanifolds, Submersion, Riemannian Submersion, Conformal Map, Horizontally Weakly Conformal Map, Horizontally Conformal Submersion

TEŞEKKÜR

Tez konumu bana vererek bilgisi ve görüşleriyle beni yönlendiren her konuda bana destek olan danışman hocam Sayın Prof.Dr.Bayram ŞAHİN'e, lisansüstü çalışmalarımda sağladığı imkanlar ve teşviklerinden dolayı Matematik bölümü başkanı Sayın Prof.Dr.Sadık KELEŞ'e, bilgisinden yararlandığım Sayın Arş.Gör.Mehmet GÜLBAHAR'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

1. GİRİŞ

Riemann manifoldları arasındaki diferensiyellenebilir dönüşümlerin teorisi Riemann geometride geniş bir yer kaplamaktadır. Bu tür dönüşümler iki manifold arasındaki geometrik özellikleri kıyaslamada kullanışlı araçlardır. Bu tür dönüşümlerin en iyi bilinenleri Riemann manifoldları arasındaki izometrik immersiyonlar ve Riemann submersiyonlarıdır. $\pi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ Riemann manifoldları arasındaki bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. π_* türev dönüşümü birebir ve her $X, Y \in \Gamma TM$ için

$$g(X,Y) = h(\pi_* X, \pi_* Y)$$

eşitliği sağlanıyorsa π dönüşümüne bir izometrik immersiyon denir. İzometrik immersiyonlar teorisi Gauss'un Öklidyen uzaylarda yüzeyler üzerine olan çalışmalarından ortaya çıkmıştır. Diğer taraftan, Riemann submersiyonları ise O'Neill [1] ve Gray [2] tarafından çalışılmıştır, [3] ve [4] nolu kaynaklarda da ele alınmıştır. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve $\pi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. π_* türev dönüşümü örten ve her $X, Y \in \Gamma(\text{çek}\pi_*)^\perp$ için yukarıdaki denklemi sağlıyorsa π dönüşümüne Riemann submersiyonu denir. O'Neill, izometrik immersiyonlardaki ikinci temel form ve şekil operatörüne karşılık makalesinde iki tane tensör alanı tanımlayarak, bu tür dönüşümlerin geometrisini ayrıntılı olarak inceledi. Daha sonra birçok yazar bu tür dönüşümlerin geometrisini farklı uzaylarda inceledi.

(M^m, g) ve (N^n, h) iki Riemann manifoldu ve $\pi : M \longrightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $\lambda \in C^\infty(M, IR)$ olmak üzere

$$\pi^* g = \lambda^2 h$$

ise π dönüşümüne konform dönüşüm adı verilir. Burada $\Lambda(p)$ ye kare dilation denir ve pozitiftir. $\Lambda(p)$ nin karekökü olan $\lambda(p)$ ye ise dilation denir. Riemann submersiyonlar ve izometrik immersiyonlar, manifoldlar arasındaki konform dönüşümlerin özel hali olarak karşımıza çıkar. Dolayısıyla konform dönüşümler izometrik immersiyonları ve Riemann submersiyonlarını içeren daha geniş bir sınıf olup manifoldların geometrik yapısını anlamada daha zengin bir geometrik yapı ortaya çıkarırlar. (M^m, g) ve (N^n, h) iki Riemann manifoldu ve $\pi : M \longrightarrow N$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Λ pozitif bir fonksiyon olmak üzere her $X,Y \in \Gamma((\text{ç}ek\pi_*)^{\perp})$ için

$$\Lambda g(X,Y) = h(\pi_* X, \pi_* Y)$$

şartı sağlanıyorsa π dönüşümüne yatay konform submersiyon denir. Yatay konform submersiyonlar Riemann submersiyonlarından daha geniş dönüşümlerdir. Gerçekten, $\Lambda = 1$ ise yatay konform submersiyon bir Riemann submersiyonudur. Yatay konform dönüşümler esas olarak Fuglede ve İshihara tarafından harmonik morfizmlerin karakterizasyonunda kullanıldı.

Bu tezde esas olarak yatay konform submersiyonların geometrisi incelenmektedir. Bu amaçla 2. bölümde temel kavramlar, izometrik immersiyonlar ve Riemann submersiyonları sunulmaktadır. 3. bölüm dört altbölüm altında incelenmektedir. Birinci altbölümde zayıf konform dönüşümler tanımlanarak örnekler verilmektedir. Sonrada yatay homoteti ve konform immersiyonlar tanıtılmaktadır. İkinci altbölümde yatay zayıf konform dönüşüm çalışılmaktadır. Üçüncü altbölümde ise bir dönüşüm boyunca tanımlı geometrik kavramlar verilmekte ve birbirleriyle olan ilişki gösterilmektedir. Son altbölümde, yatay konform submersiyonlar incelenmekte, bileşim teoremleri sunulmakta ve bir yatay konform submersiyonun baz ve kaynak manifoldlarının eğrilikleri arasındaki bağıntılar verilmektedir.

2. GENEL BİLGİLER

Bu bölümde manifoldlar için bazı temel kavramlar ve bunların özellikleri verilip örneklendirilecektir.

2.1 Riemann Manifoldları

Tanım 2.1.1. M bir diferensiyellenebilir manifold olsun. Eğer M üzerinde simetrik, pozitif tanımlı, bilineer g formu varsa (M,g) ikilisine Riemann manifoldu ve g metriğine de Riemann metriği denir [3]. Yani g

$$g : \Gamma TM \times \Gamma TM \longrightarrow C^{\infty}(M,R)$$

bilineer formu

$$g(X,Y) = g(Y,X)$$

simetrik ve

$$g(X,X) \geq 0 (\Leftrightarrow X = 0 \;\; ise)$$

pozitif tanımlıdır.

Bir X vektör alanının uzunluğu $|X| = \sqrt{g(X,X)}$ dir. X ve Y vektör alanları arasındaki açı $\cos\theta = \frac{g(X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y)}$ dir.

M, Riemann manifoldu ve $e_1, e_2, ..., e_n$ M manifoldunun bir yerel çatısı olsun. Bu durumda

$$e_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, e_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}, ..., e_n = \frac{\partial}{\partial x_n}$$

olmak üzere, bunlara dual olan baz

$$w^1 = dx^1, w^2 = dx^2, ..., w^n = dx^n$$

dır. $X,Y \in \Gamma TM$, $g(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}) = g_{ij}$ olmak üzere

$$g(X,Y) = g(\sum_{i=1}^{n} dx^i(X)\frac{\partial}{\partial x_i}, \sum_{j=1}^{n} dx^j(Y)\frac{\partial}{\partial x_j})$$

olup $X=\sum\lambda^i\frac{\partial}{\partial x_i}$ yazabiliriz. $dx^j(X)=\sum\lambda^i dx^j(\frac{\partial}{\partial x_i})$ dolayısıyla $\lambda^i=dx^j(X)$ dir.

$$g(X,Y)=\sum_{i,j=1}^{n} dx^i(X)dx^j(Y)g_{ij}$$

olup bu eşitlik $\forall X,Y$ için doğru olduğundan

$$g=\sum_{i,j} g_{ij}dx^i dx^j=\sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}dx^i\wedge dx^j$$

dir.

Tanım 2.1.2. M bir manifold, ∇ afin konneksiyon ve $[,]$ Lie braketi olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} T:\Gamma TM\times\Gamma TM &\rightarrow \Gamma TM \\ (X,Y) &\rightarrow T(X,Y)=\nabla_X Y-\nabla_Y X-[X,Y] \end{aligned}$$

tensörüne torsiyon tensörü denir [3].

Tanım 2.1.3. M bir manifold ve M üzerinde tanımlı simetrik, bilineer form g olsun. M üzerinde

(1) $T(X,Y)=0$ yani $[X,Y]=\nabla_X Y-\nabla_Y X$

(2) $(\nabla_X g)(Y,Z)=0$ yani $Xg(Y,Z)=g(\nabla_X Y,Z)+g(Y,\nabla_X Z)$

olacak şekilde ∇ afin konneksiyonuna Levi-Civita konneksiyonu denir [3].

Aşağıdaki teorem Riemann manifoldu üzerinde Levi-Civita konneksiyonunun varlığını garanti eder [3].

Teorem 2.1.1. *Her Riemann manifoldu üzerinde birtek Levi-Civita konneksiyonu vardır.*

$$\begin{aligned} R:\Gamma TM\times\Gamma TM\times\Gamma TM &\rightarrow \Gamma TM \\ (X,Y,Z) &\rightarrow R(X,Y)Z=\nabla_X\nabla_Y Z-\nabla_Y\nabla_X Z-\nabla_{[X,Y]}Z \end{aligned}$$

tensör alanına da eğrilik tensör alanı denir [3].

M bir manifold ve $\forall X,Y,Z\in\Gamma TM$ için

(1) $T(X,Y)=0$ ise ∇ konneksiyonuna torsiyonsuz denir.

(2) $R(X,Y)Z=0$ ise ∇ konneksiyonuna flat(düzlemsel) denir.

Böylece her Riemann manifoldu torsiyonsuz konneksiyona sahiptir[3].

Önerme 2.1.1. (M,g) *bir Riemann manifoldu ve eğrilik tensörü R olmak üzere her* $X,Y,Z,W \in \Gamma TM$ *için*

(1) *g(R(X,Y)Z,W)=-g(R(Y,X)Z,W)*

(2) *g(R(X,Y)Z,W)=-g(R(X,Y)W,Z)*

(3) *g(R(X,Y)Z,W)=g(R(Z,W)X,Y)*

(4) *g(R(X,Y)Z,W)+g(R(Y,Z)X,W)+g(R(Z,X)Y,W)=0*

eşitlikleri sağlanır [5].

Tanım 2.1.4. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $\gamma : I \longrightarrow M$ bir eğri olsun. $X \in \Gamma TM$ vektör alanı için $\dot{\gamma} = \gamma_*(\frac{\partial}{\partial t})$ olmak üzere $\nabla_{\dot{\gamma}} X = 0$ ise X vektör alanına γ boyunca paraleldir denir[6].

M_1 ve M_2 iki manifold, $F : M_1 \longrightarrow M_2$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu durumda $X_p \in T_{F(p)}M_2$ ise $X : M_1 \longrightarrow TM_2$ fonksiyonuna F boyunca vektör alanı denir[6].

Örnek 2.1.1. $\gamma : I \longrightarrow M$ bir eğri olsun. Her t parametresini γ nın hız vektörüne karşılık getiren dönüşüm

$$T : I \longrightarrow T_p M$$

$$t \longrightarrow T_t = \dot{\gamma}(t)$$

olsun. T, γ eğrisi boyunca vektör alanıdır[6].

Tanım 2.1.5. M bir Riemann manifoldu ve $\gamma : I \longrightarrow M$, $t_1, t_2 \in I$, $\gamma(t_1) = p$, $\gamma(t_2) = q$ olacak şekilde bir eğri olsun. X paralel vektör alanı olmak üzere

$$P_{t_1}^{t_2}\gamma : T_p M \longrightarrow T_q M$$

ile tanımlı $X(t_1) = X \in T_p M$ ve $P_{t_1}^{t_2}\gamma(X) = Z_\lambda X(t_2) = Z$ olacak şekilde $P_{t_1}^{t_2}\gamma$ dönüşümüne p den q ya γ boyunca paralel öteleme denir[6].

Lemma 2.1.1. $P_{t_1}^{t_2}\gamma : T_p M \longrightarrow T_q M$ *paralel ötelemesi bir lineer izometridir[6].*

Tanım 2.1.6. $\gamma : I \longrightarrow M$ bir eğri olsun. Eğer $\nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{\gamma} = 0$ ise γ ya geodezik denir[6].

Teorem 2.1.2. *(M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda her $v \in T_pM$ için $\dot{\gamma}(t_0) = v$ olacak şekilde $\gamma : I \longrightarrow M$ geodeziği vardır ve tektir[6].*

Tanım 2.1.7. M bir Riemann manifoldu ve R manifoldun eğrilik tensör alanı olsun. Bu durumda $X,Y,Z,W \in \Gamma TM$ olmak üzere

$$K : \Gamma TM \times \Gamma TM \times \Gamma TM \times \Gamma TM \longrightarrow C^{\infty}(M,R)$$

$$(X,Y,Z,W) \longrightarrow K(X,Y,Z,W) = g(R(X,Y)Z,W)$$

ile tanımlı fonksiyona Riemann-Christoffel eğriliği denir[7].

Tanım 2.1.8. M bir Riemann manifoldu, M nin bir p noktasındaki tanjant uzayının 2-boyutlu bir altuzayı P ve P yi geren vektörler X_p ve Y_p ise

$$K(p) = K(X \wedge Y) = \frac{g(R(X,Y)X,Y)}{g(X,X)g(Y,Y) - g(X,Y)^2}$$

eğriliğine kesit eğriliği denir[7].

Eğer X ve Y ortonormal vektörler ise

$$K(p) = g(R(X,Y)X,Y)$$

dir[7].

Tanım 2.1.9. M n-boyutlu bir Riemann manifoldu ve $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ lokal ortonormal çatı olsun. Bu durumda $X,Y \in \Gamma TM$, $\forall X_p \in T_pM$ için

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,X)Y,e_i)$$

ile tanımlı olan $(0,2)$ mertebeli tensör alanına Ricci tensör alanı denir[7].

T_pM tanjant uzayının bir $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ ortonormal bazını alalım. Bu durumda P_i ye göre kesit eğrilikleri

$$K(e_i,X,e_i,X) = g(R(e_i,X)e_i,X)$$

olmak üzere M nin p noktasındaki X_p doğrultusundaki Ricci eğriliği

$$k(X) = \frac{S(X,X)}{g(X,X)}$$

ile tanımlanır[7].

Tanım 2.1.10. M n-boyutlu bir Riemann manifoldu olsun. $p \in M$ olmak üzere T_pM nin 2-boyutlu altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına skaler eğrilik denir ve

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i)$$

ile ifade edilir[7].

2.2 Riemann Altmanifoldları ve Distribüsyonlar

Tanım 2.2.1. (M, g) ve $(\overline{M}, \overline{g})$ Riemann manifoldları olsun. $i : M \longrightarrow \overline{M}$ inclusion dönüşümünü gözönüne alalım. $X, Y \in \Gamma TM$ için $g(X,Y) = \overline{g}(i_*X, i_*Y)$ ise M ye $\overline{M}$ nın Riemann altmanifoldu ve i dönüşümüne de izometrik immersiyon denir[8].

i inclusion dönüşümü olduğundan $i(M) = M$ ve $i_*(X) = X$ alınacaktır. $p \in M$ için (T_pM, g) ve $(T_{i(p)}\overline{M}, \overline{g})$ de iç çarpım uzayları oluşturur. $X \in \Gamma TM$ için $i_*(X) = X$ olacağından X vektör alanına M boyunca bir vektör alanı denir. $i_* : T_pM \longrightarrow T_{i(p)}\overline{M}$ dönüşümü ve $X \in \Gamma TM$ için $X_p \in T_{i(p)}\overline{M}$ ise

$$T_pM^{\perp} = \{X \in T_p\overline{M} | \overline{g}(X,Y) = 0, \forall Y \in T_pM\}$$

olup

$$T_p\overline{M} = T_pM \oplus T_pM^{\perp}$$

olarak yazılabilir. Burada $T_pM^{\perp}$ altuzayına altmanifoldun normal uzayı denir. $\overline{M}$ ve M üzerindeki konneksiyonlar sırasıyla $\overline{\nabla}$ ve ∇ olmak üzere $\forall X, Y \in \Gamma TM$ için

$$\overline{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \sigma(X,Y) \tag{2.2.1}$$

dir. Bu şekilde tanımlanan ∇ bir Riemann konneksiyonudur. Burada σ

$$\sigma : \Gamma TM \times \Gamma TM \longrightarrow \Gamma TM^{\perp}$$

ile tanımlanan simetrik bilineer formdur. (2.2.1) denklemine Gauss formülü ve σ bilineer formuna M altmanifoldunun ikinci temel formu denir. $X \in \Gamma TM$, $V \in \Gamma TM^{\perp}$ ve $\nabla^{\perp}$, $TM^{\perp}$ üzerindeki Levi-Civita konneksiyonu olmak üzere

$$\overline{\nabla}_X V = \nabla^{\perp}_X V - A_V X$$

denklemine Weingarten formülü ve $A_V : \Gamma TM \longrightarrow \Gamma TM$ ile tanımlı self-adjoint tensörüne de Weingarten tensörü denir[7].

Tanım 2.2.2. $\overline{M}$ m-boyutlu bir manifold ve M de $\overline{M}$ manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. σ ikinci temel form, $X,Y \in \Gamma TM$ ve $V \in \Gamma TM^{\perp}$ olmak üzere

$$\nabla_X^{\perp} V = 0$$

ise V vektör alanına paralel ve

$$\nabla_X \sigma = 0$$

ise ikinci temel form paraleldir denir[8].

Tanım 2.2.3. $\overline{M}$ m-boyutlu bir manifold ve M de $\overline{M}$ manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. Eğer her $X,Y \in \Gamma TM$ için $\sigma(X,Y) = 0$ ise M ye $\overline{M}$ nin total geodezik altmanifoldu denir[7].

Tanım 2.2.4. $\overline{M}$ m-boyutlu bir manifold ve M de $\overline{M}$ manifoldunun n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. T_xM nin bir bazı $\{e_1, e_2, ...e_n\}$ olmak üzere

$$H_x = \frac{1}{n} iz(\sigma_x) = \sum_{i=1}^{n} h(e_i, e_i)$$

vektörüne $x \in M$ için M altmanifoldunun ortalama eğrilik vektörü denir. Eğer $H = 0$ ise M altmanifolduna minimal altmanifold denir[7].

Tanım 2.2.5. $\overline{M}$ m-boyutlu bir manifold ve M de $\overline{M}$ nin n-boyutlu bir altmanifoldu olsun. $\alpha \in C^{\infty}(M,R)$, I birim dönüşüm olmak üzere $\forall V \in \Gamma TM^{\perp}$ için

$$A_V = \alpha I$$

ise M ye total umbiliktir denir[7].

Tanım 2.2.6. $\overline{M}$ m-boyutlu bir manifold olsun. $\overline{M}$ üzerinde

$$\mathcal{V} : \overline{M} \longrightarrow T_x\overline{M}$$

$$x \longrightarrow \mathcal{V}_x \subset T_x\overline{M}$$

ile tanımlanan $\mathcal{V}$ dönüşümüne bir distribüsyon denir[8].

$X \in \Gamma T\overline{M}$ için $X_p \in \mathcal{V}_p$ ise X vektör alanına $\mathcal{V}$ distribüsyonuna aittir denir. Eğer her p noktası için $\mathcal{V}$ distribüsyonuna ait r-tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı varsa $\mathcal{V}$ distribüsyonuna diferensiyellenebilirdir denir ve $\mathcal{V}$ distribüsyonunun boyutu r- dir [7].

Tanım 2.2.7. $\overline{M}$ bir C^∞ manifold ve $\mathcal{V}$, $\overline{M}$ manifoldu üzerinde q-boyutlu bir C^∞ distribüsyon ve M, $\overline{M}$ nin altmanifoldu olsun. Eğer her $x \in M$ noktasında M altmanifoldunun tanjant uzayı ile $\mathcal{V}_x$ aynı ise M manifolduna $\mathcal{V}$ nin integral altmanifoldu denir[8]. Yani

$$\pi : M \longrightarrow \overline{M}$$

bir imbedding olmak üzere $\forall x \in M$ için

$$\pi_x(T_x M) = \mathcal{V}_x$$

dir. Eğer $\mathcal{V}$ distribüsyonunun M altmanifoldunu kapsayan bir başka integral manifoldu yoksa M altmanifolduna $\mathcal{V}$ nin bir maksimal integral manifoldu(leaf) denir[8].

Tanım 2.2.8. $\overline{M}$ bir C^∞ manifold ve M, $\overline{M}$ nin altmanifoldu olsun. Eğer $\forall x \in M$ için $\mathcal{V}$ distribüsyonunun x noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa $\mathcal{V}$ distribüsyonuna integrallenebilirdir denir[8].

Tanım 2.2.9. $\overline{M}$ bir C^∞ manifold ve $\mathcal{V}$, $\overline{M}$ üzerinde bir distribüsyon olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma(\mathcal{V})$ için $[X,Y] \in \Gamma(\mathcal{V})$ ise $\mathcal{V}$ distribüsyonuna involütivedir denir [7].

Tanım 2.2.10. (M, g) bir Riemann manifoldu ve (M, g) üzerindeki lineer konneksiyonda ∇ olsun. Eğer $X \in \Gamma TM$, $Y \in \Gamma TM^{\mathcal{V}}$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma TM^{\mathcal{V}}$$

ise $\mathcal{V}$ distribüsyonuna paraleldir denir[8].

2.3 Riemann Submersiyonları

Bu kısımda submersiyon, Riemann submersiyon tanımları verilecektir. Bu tanımlar ve bazı geometrik kavramlar kullanılarak eğrilikler incelenecektir.

Tanım 2.3.1. (M,g) ve (N,h) sırasıyla m ve n boyutlu Riemann manifoldları olmak üzere

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir örten C^∞ dönüşümü için

$$rankd\pi_x = boyN$$

oluyorsa π ye $x \in M$ noktasında bir submersiyon denir[4, 8].

Herhangi bir $x \in N$ için $F_x = \pi^{-1}(x)$ üzerindeki lif, (M,g) manifoldunun $r = (m-n)$-boyutlu bir altmanifoldudur. $\pi^{-1}(x)$ altmanifoldlarına submersiyonun lifleri denir[8].

Tanım 2.3.2. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir C^∞ dönüşüm olsun. $x \in M$ için

$$\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_x(\pi) = \text{ç}ekd\pi_x = \{X \in T_xM | d\pi_x(X) = 0\} \subset T_xM$$

ve

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_x(\pi) = \mathcal{V}_x^\perp \subset T_xM$$

olarak tanımlayalım. $\mathcal{V}_x$ uzayına π dönüşümünün x noktasındaki dikey uzayı denir. M deki g metriğine göre $\mathcal{V}_x$ dikey uzayının dik tümleyeni olan $\mathcal{H}_x$ uzayına ise π dönüşümünün x noktasındaki yatay uzayı denir[8, 9].

Böylece, M Riemann manifoldu $x \in M$ de

$$T_xM = \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{H}_x = \mathcal{V}_x \oplus \mathcal{V}_x^\perp$$

ortogonal ayrışımına sahiptir.

Tanım 2.3.3. M üzerindeki bir X vektör alanı yatay distribüsyona aitse X vektör alanına yatay vektör alanı denir ve yatay vektör alanlarının kümesi $\Gamma TM^{\mathcal{H}}$ gösterilir[8].

Tanım 2.3.4. M üzerindeki bir X vektör alanı dikey distribüsyona aitse X vektör alanına dikey vektör alanı denir ve dikey vektör alanlarının kümesi $\Gamma TM^{\mathcal{V}}$ ile gösterilir[8].

Herhangi bir $E \in \Gamma TM$ vektör alanı için, E nin dikey ve yatay bileşenleri sırasıyla vE ve hE ile gösterilir[8].

Tanım 2.3.5. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu durumda, M üzerinde izdüşürülebilir vektör alanlarının uzayı $\Gamma TM^{\mathcal{C}}$ ile gösterilir. Yani $\Gamma TM^{\mathcal{C}}$ uzayının her elemanı M üzerinde bir vektör alanıdır öyleki N üzerindeki bir vektör alanına π-bağlıdır[8].

Tanım 2.3.6. M ve N Riemann manifoldları olsunlar. Eğer X yatay ve N üzerindeki X' vektör alanına π-bağlı ise M üzerindeki X vektör alanına temel(basic) vektör alanı denir[8].

Temel vektör alanlarının uzayı

$$\Gamma TM^{\mathcal{B}} = \Gamma TM^{\mathcal{C}} \cap \Gamma TM^{\mathcal{H}}$$

dır.

Tanım 2.3.7. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir C^{∞} dönüşüm olsun. Her $x \in M$ ve $U_x, V_x \in T_xM$ için

$$g(U_x,V_x) = h(\pi_*(U_x), \pi_*(V_x))$$

oluyorsa π dönüşümüne M den N ye bir izometri denir[8, 9].

Tanım 2.3.8. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları olsun.

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir C^{∞} submersiyonu aşağıdaki şartı sağlıyorsa π dönüşümüne bir Riemann submersiyonu denir:
Her $p \in M$ noktasında π_{*p} dönüşümü yatay vektörlerin uzunluğunu korur. Yani

$$g_p(u,v) = h_{\pi(p)}(\pi_{*p}u, \pi_{*p}v), \quad u,v \in \mathcal{H}_p, p \in M$$

dir[4, 8].

Önerme 2.3.1. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları,*

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu, ∇ ve ∇' sırasıyla M ve N nin Levi-Civita konneksiyonları olsun. M üzerindeki X,Y temel vektör alanları X',Y' vektör alanlarına π-bağlı olsun. Bu durumda

(1) $g(X,Y) = h(X',Y') \circ \pi$

(2) *$h[X,Y]$ temel vektör alanı $[X',Y']$ vektör alanına π-bağlıdır.*

(3) *$h(\nabla_X Y)$ temel vektör alanı $\nabla'_{X'}Y'$ vektör alanına π-bağlıdır.*

(4) *Herhangi bir $V \in \Gamma TM^{\mathcal{V}}$ için $[X,V]$ dikey vektör alanıdır[8].*

Riemann submersiyonları için B. O'Neill tarafından tanımlanan temel tensörler tanıtılacaktır.

Tanım 2.3.9. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $(1,2)$ mertebeli T temel tensör alanı $E,F \in \Gamma TM$ olmak üzere

$$T(E,F) = T_E F = h\nabla_{vE} vF + v\nabla_{vE} hF$$

ile tanımlanır[1, 8].

T temel tensör alanı aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $E,F \in \Gamma TM$ için T_E anti-simetrik ve lineer operatördür. Yani $g(T_E F, G) = -g(T_E G, F)$ dir.

(ii) $E \in \Gamma TM$ için T_E yatay ve dikey altuzayların rollerini değiştirir.

(iii) T dikey tensör alanıdır. Yani $E \in \Gamma TM$ için $T_E = T_{vE}$ dir.

(iv) T dikey tensör alanı simetriktir. Yani $V,W \in \Gamma TM^{\mathcal{V}}$ için $T_V W = T_W V$ dir[1, 8].

Tanım 2.3.10. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $(1,2)$ mertebeli A temel tensör alanı $E,F \in \Gamma TM$ olmak üzere

$$A(E,F) = A_E F = v\nabla_{hE} hF + h\nabla_{hE} vF$$

ile tanımlanır[1, 8].

A temel tensör alanı aşağıdaki özellikleri sağlar:

(i) $E,F \in \Gamma TM$ için A_E anti-simetrik ve lineer operatördür.Yani $g(A_E F, G) = -g(A_E G, F)$ dir.

(ii) $E \in \Gamma TM$ için A_E yatay ve dikey altuzayların rollerini değiştirir.

(iii) A yatay tensör alanıdır. Yani $E \in \Gamma TM$ için $A_E = A_{hE}$ dir.

(iv) A yatay tensör alanı alterneleyendir. Yani $X,Y \in \Gamma TM^{\mathcal{H}}$ için $A_X Y = -A_Y X$ dir[1, 8].

Önerme 2.3.2. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve*

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu olsun. $X,Y \in \Gamma TM^{\mathcal{H}}$ için

$$A_X Y = \frac{1}{2} v[X,Y]$$

dir[8].

Aksi belirtilmedikçe liflerin geometrik özelliklerini ˆ sembolü ile göstereceğiz.

Lemma 2.3.1. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve*

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere $X,Y \in \Gamma TM^{\mathcal{H}}$ ve $V,W \in \Gamma TM^{\mathcal{V}}$ için

(1) $\nabla_V W = T_V W + \hat{\nabla}_V W$,

(2) $\nabla_V X = h\nabla_V X + T_V X$,

(3) $\nabla_X V = A_X V + v\nabla_X V$,

(4) $\nabla_X Y = h\nabla_X Y + A_X Y$

dir[8].

Teorem 2.3.1. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve*

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu ve (M,g) üzerindeki yatay distribüsyon $\mathcal{H}$ olsun. Bu durumda $\mathcal{H}$ yatay distribüsyonunun integrallenebilir olması için gerek ve yeter şart $A = 0$ olmasıdır[8].

Tanım 2.3.11. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu olsun. (M,g) Riemann manifoldunun dikey distribüsyonu $\mathcal{V}$ ve yatay distribüsyonu $\mathcal{H}$ üzerine olan projeksiyonlar v ve h olmak üzere $E,F \in \Gamma TM$ için

$$\bar{\nabla}_E F = v(\nabla_E vF) + h(\nabla_E hF)$$

ile tanımlı konneksiyona Schouten konneksiyonu denir[4, 8].

Lemma 2.3.2. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve*

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda her $E,F \in \Gamma TM$ için

$$\nabla_E F = \bar{\nabla}_E F + T_E F + A_E F$$

dir[4, 8].

Önerme 2.3.3. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve*

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $x \in N$ için herhangi bir $\pi^{-1}(x)$ lifi üzerindeki $\bar{\nabla}$ Schouten konneksiyonu, g metrik tensöründen indirgenen metrik tarafından belirlenen Levi-Civita konneksiyonu ile çakışır[8].

T dikey tensör alanının $\Gamma TM^{\mathcal{V}} \times \Gamma TM^{\mathcal{V}}$ ye kısıtlanması herhangi bir $\pi^{-1}(x)$ lifinin ikinci temel formuna karşılık gelir.

Tanım 2.3.12. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Eğer T tensör alanı sıfır ise π dönüşümünün herhangi bir $\pi^{-1}(x)$ lifine M manifoldunun total geodezik altmanifoldu denir[4, 8].

Şimdi, T ve A temel tensörlerinin kovaryant türevlerini kullanarak manifoldlar arasındaki eğrilikleri inceleyelim.

Tanım 2.3.13. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $E,F,H \in \Gamma TM$ olsun. $(1,2)$ mertebeli A ve T tensör alanlarının kovaryant türevleri

$$(\nabla_E A)_F H = (\nabla_E A)(F,H) = \nabla_E (A_F H) - A_{\nabla_E F}(H) - A_F(\nabla_E H)$$

ve

$$(\nabla_E T)_F H = (\nabla_E T)(F,H) = \nabla_E (T_F H) - T_{\nabla_E F}(H) - T_F(\nabla_E H)$$

ile tanımlanır[4].

Lemma 2.3.3. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve*

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $X,Y \in \Gamma TM^{\mathcal{H}}$ ve $V,W \in \Gamma TM^{\mathcal{V}}$ için

(1) $(\nabla_V A)_W = -A_{T_V W}$,

(2) $(\nabla_X T)_Y = -T_{A_X Y}$,

(3) $(\nabla_X A)_W = -A_{A_X W}$,

(4) $(\nabla_V T)_Y = -T_{T_V Y}$,

dir[4].

Lemma 2.3.4. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve*

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda $(1,1)$ *mertebeli* ∇A *ve* ∇T *temel tensörleri ve* $X,Y \in \Gamma TM^{\mathcal{H}}$, $U,V,W \in \Gamma TM^{\mathcal{V}}$ *için*

(1) $g((\nabla_U A)_X V, W) = g(T_U V, A_X W) - g(T_U W, A_X V)$,

(2) ∇T *simetriktir. Yani* $g((\nabla_E T)_V W, X) = g((\nabla_E T)_W V, X)$,

(3) ∇A *anti-simetriktir. Yani* $g((\nabla_E A)_X Y, V) = -g((\nabla_E A)_Y X, V)$

dir[4].

Önerme 2.3.4. (M,g) *ve* (N,h) *Riemann manifoldları ve*

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere

(1) *A yatay tensör alanı paralel ise* $A = 0$ *,*

(2) *T dikey tensör alanı paralel ise* $T = 0$

dır[8].

Paralel A tensör alanına sahip bir Riemann submersiyonda yatay distribüsyon integrallenebilir ve paralel T tensör alanına sahip bir Riemann submersiyonunda ise lifler total geodezik olur.

Tanım 2.3.14. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve (M,g) manifoldunun yatay distribüsyonu $\mathcal{H}$ olsun. $\Gamma TM^{\mathcal{H}}$ üzerinde $(1,3)$ mertebeli eğrilik tensör alanını R^* ile gösterelim. Herhangi $X,Y,Z \in \Gamma TM^{\mathcal{H}}$ ve $p \in M$ için

$$R'_{\pi(p)}(\pi_{*p}X_p, \pi_{*p}Y_p, \pi_{*p}Z_p)$$

tensörünün yatay lifti $R^*(X,Y,Z)$ ile ifade edilir. (N,h) manifoldunun R' Riemann eğriliği;

$$\pi_*(R^*(X,Y,Z)) = R'(\pi_*X, \pi_*Y, \pi_*Z)$$

ile tanımlanır[8].

Herhangi $X,Y,Z,H \in \Gamma TM^{\mathcal{H}}$ için

$$\begin{aligned} R^*(X,Y,Z,H) &= g(R^*(X,Y,Z),H) \\ &= R'(\pi_*X, \pi_*Y, \pi_*Z, \pi_*H) \circ \pi \end{aligned}$$

dir. $x \in N$ için herhangi bir $(\pi^{-1}(x), \hat{g}_x)$ lifinin Riemann eğriliğini $\hat{R}$ ile gösterelim.

Teorem 2.3.2. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları*

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu ve $R, R', \hat{R}$ sırasıyla M, N ve $(\pi^{-1}(x), \hat{g}_x)$ lifinin Riemann eğrilik tensörleri olsun. Bu durumda herhangi $X,Y,Z,H \in \Gamma TM^{\mathcal{H}}$ ve $U,V,W,F \in \Gamma TM^{\mathcal{V}}$ için

$$\begin{aligned}
g(R(U,V)W,F) &= g(\hat{R}(U,V)W,F) + g(T_U W, T_V F) - g(T_V W, T_U F), \\
g(R(U,V)W,X) &= g((\nabla_U T)_V W, X) - g((\nabla_V T)_U W, X), \\
g(R(X,Y)Z,V) &= -g((\nabla_Z A)_X Y, V) - g(A_X Y, T_V Z) + g(A_Y Z, T_V X) - g(A_X Z, T_V Y), \\
g(R(X,Y)V,W) &= g((\nabla_V A)_X Y, W) - g((\nabla_W A)_X Y, V) + g(A_X V, A_Y W) - g(A_X W, A_Y V) \\
&- g(T_V X, T_W Y) + g(T_W X, T_V Y), \\
g(R(X,V)Y,W) &= g((\nabla_X T)_V W, Y) + g((\nabla_V A)_X Y, W) - g(T_V X, T_W Y) + g(A_X V, A_Y W)
\end{aligned}$$

dir [1, 4, 8].

Teorem 2.3.3. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları*

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu ve $K, K', \hat{K}$ sırasıyla M, N ve $(\pi^{-1}(x), \hat{g}_x)$ lifinin kesit eğrilikleri olsun. X,Y ortonormal yatay vektörler ve U,V ortonormal dikey vektörler olmak üzere

$$\begin{aligned}
K(U,V) &= \hat{K}(U,V) + \|T_U V\|^2 - g(T_U U, T_V V), \\
K(X,Y) &= K'(X',Y') \circ \pi - 3\|A_X Y\|^2, \\
K(X,V) &= g((\nabla_X T)_V V, X) - \|T_V X\|^2 + \|A_X V\|^2
\end{aligned}$$

dir[1, 8].

Tanım 2.3.15. (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X_i \in \Gamma TM^{\mathcal{H}}$ ve $\forall U_j \in \Gamma TM^{\mathcal{V}}$ olmak üzere (M,g) üzerindeki bir $\{X_i, U_j\}_{1 \le i \le n, 1 \le j \le r}$ lokal ortonormal çatıya π-uyumlu çatı denir[8].

Lemma 2.3.5. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları*

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir Riemann submersiyonu, X,Y yatay vektör alanları ve U,V dikey vektör alanları olsun. (M,g) üzerindeki $\{X_i,U_j\}_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq r}$ bir π-uyumlu çatı olmak üzere

(1) $\sum_{i=1}^{n} g(T_U X_i, T_V X_i) = \sum_{j=1}^{r} g(T_U U_j, T_V U_j)$

(2) $\sum_{i=1}^{n} g(A_X X_i, A_Y X_i) = \sum_{j=1}^{r} g(A_X U_j, A_Y U_j)$

(3) $\sum_{i=1}^{n} g(A_X X_i, T_U X_i) = \sum_{j=1}^{r} g(A_X U_j, T_U U_j)$

dır[8].

Tanım 2.3.16. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $\mathcal{V}$ dikey distribüsyonun bir lokal ortonormal çatısı $\{U_j\}_{1\leq j\leq r}$ olsun. (M,g) üzerindeki N yatay vektör alanı lokal olarak

$$N = \sum_{j=1}^{r} T_{U_j} U_j$$

ile tanımlanır[8].

Tanım 2.3.17. (M^m,g) ve (N^n,h) Riemann manifoldları

$$\pi : (M^m,g) \longrightarrow (N^n,h)$$

bir Riemann submersiyonu olmak üzere $r=(m-n)$-boyutlu herhangi bir lifin ortalama eğrilik vektör alanı

$$H = \frac{1}{r} iz(T) = \frac{1}{r} \sum_{j=1}^{r} T_{U_j} U_j$$

ile tanımlanır[8].

Lemma 2.3.6. $\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ *bir Riemann submersiyonu ve $\mathcal{V}$ distribüsyonunun bir lokal ortonormal çatısı $\{U_j\}_{1\leq j\leq r}$ olsun. Bu durumda herhangi bir $E \in \Gamma TM$ ve $X \in \Gamma TM^{\mathcal{H}}$ için*

$$g(\nabla_E N, X) = \sum_{j=1}^{r} g((\nabla_E T)_{U_j} U_j, X)$$

dır[8].

Önerme 2.3.5. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları*

$$\pi:(M,g)\longrightarrow(N,h)$$

bir Riemann submersiyonu ve $\{X_i,U_j\}$ bir π-uyumlu çatı olsun. Bu durumda herhangi bir $X,Y\in\Gamma TM^{\mathcal{B}}$ ve $U,V\in\Gamma TM^{\mathcal{V}}$ için ρ Ricci tensörü aşağıdaki özellikleri sağlar:

$$\begin{aligned}
\rho(U,V) &= \hat{\rho}(U,V)-g(N,T_UV)\\
&+ \sum_i\{g((\nabla_{X_i}T)_UV,X_i)+g(A_{X_i}U,A_{X_i}V)\},\\
\rho(X,Y) &= \rho'(X',Y')\circ\pi+\frac{1}{2}\{g(\nabla_XN,Y)+g(\nabla_YN,X)\}\\
&- 2\sum_i g(A_XX_i,A_YX_i)-\sum_j g(T_{U_j}X,T_{U_j}Y),\\
\rho(U,X) &= g(\nabla_UN,X)-\sum_j g((\nabla_{U_j}T)_{U_j}U,X)\\
&+ \sum_i\{g((\nabla_{X_i}A)_{X_i}X,U)-2g(A_XX_i,T_UX_i)\}
\end{aligned}$$

Burada X,Y ve X',Y' vektör alanları π-bağlıdır[8].

Önerme 2.3.6. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları*

$$\pi:(M,g)\longrightarrow(N,h)$$

bir Riemann submersiyonu olsun. Bu durumda

$$\tau=\hat{\tau}+\tau'\circ\pi-\|N\|^2-\|A\|^2-\|T\|^2+2\sum_i g(\nabla_{X_i}N,X_i)$$

dir[8]. Burada τ skaler eğriliği göstermektedir.

2.4 Riemann Manifoldları Üzerinde Operatörler

Bu alt bölümde Riemann manifoldu üzerinde tanımlı bazı operatörler tanıtılacaktır.

Tanım 2.4.1. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $Z\in\Gamma TM$ olsun. (M,g) üzerinde Z vektör alanının diverjansı

$$divZ=iz\nabla Z$$

olarak tanımlanır [10].

Eğer $\{X_1,...,X_n\}$ lokal ortonormal çatı ise

$$divZ=\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{X_i}Z,X_i)$$

olur.

Tanım 2.4.2. $f:(M,g)\to\mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. (M,g) üzerinde f dönüşümünün gradyenti

$$\nabla f=g^{\sharp}(df)$$

olarak tanımlanır [10]. Burada, $g^{\sharp}:\Gamma TM^{*}\to\Gamma TM$ dönüşümü $g^{\flat}:\Gamma TM\to\Gamma TM^{*}$, $g^{\flat}(X)=g(X,\cdot)$ şeklinde tanımlanan müzikal izomorfizmin tersidir.

∇f, M üzerinde bir vektör alanıdır ve $X\in\Gamma TM$ için

$$g(\nabla f,X)=df(X)=X(f)$$

olarak tanımlanır [10].

Tanım 2.4.3. $f:(M,g)\to\mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun.

$$h_f:\Gamma TM\to\Gamma TM$$

$$h_f(X)=\nabla_X\nabla f$$

lineer dönüşümüne (M,g) üzerinde f fonksiyonunun Hessian tensörü denir [10].

Önerme 2.4.1. *$f:(M,g)\to\mathbb{R}$ dönüşümünün Hessian tensörü h_f olsun. Bütün $X,Y\in\Gamma TM$ için h_f self-adjointtir. Yani*

$$g(h_f(X),Y)=g(X,h_f(Y))$$

dir [10].

Tanım 2.4.4. $f:(M,g)\to\mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun.

$$H_f:\Gamma TM\times\Gamma TM\to C^{\infty}M$$

$$H_f(X,Y)=g(h_f(X),Y)$$

lineer dönüşümüne (M,g) üzerinde f nin Hessian formu denir [10].

f fonksiyonunun Hessian tensörü self-adjoint olduğundan, Hessian formu (M,g) üzerinde simetrik, $(0,2)$ tipli tensör alanıdır.

Tanım 2.4.5. $f:(M,g)\to\mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. (M,g) üzerinde f fonksiyonunun Laplasyanı

$$\Delta f = -div\nabla f$$

olarak tanımlanır [10].

f fonksiyonunun Laplasyanı Δf, h_f Hessian tensörünün izinin negatifidir. Gerçekten de

$$\begin{aligned}
\Delta f &= -div\nabla f \\
&= -\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_{X_i}\nabla f, X_i) \\
&= -\sum_{i=1}^{n} g(h_f(X_i), X_i) \\
&= -izh_f
\end{aligned}$$

olur.

Tanım 2.4.6. $f:(M,g)\to\mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. Eğer $\Delta f = 0$ ise f, (M,g) üzerinde harmoniktir denir. Eğer $\Delta f < 0$ ise f, (M,g) üzerinde subharmoniktir denir [10].

Önerme 2.4.2. *$f,k:(M,g)\to\mathbb{R}$ birer dönüşüm ve $X,Y\in\Gamma TM$ olsun. Bu durumda*

(1) $div(fX) = g(\nabla f, X) + f divX$

(2) $\nabla(fk) = f\nabla k + k\nabla f$

(3) $h_{fk}(X) = fh_k(X) + kh_f(X) + g(\nabla f, X)\nabla k + g(\nabla k, X)\nabla f$

(4) $H_{fk}(X,Y) = fH_k(X,Y) + kH_f(X,Y) + g(\nabla f, X)g(\nabla k, Y) + g(\nabla k, X)g(\nabla f, Y)$

(5) $\Delta(fk) = f\Delta k + k\Delta f - 2g(\nabla f, \nabla k)$

eşitlikleri sağlanır [10].

3. RİEMANN MANİFOLDLARI ARASINDA KONFORM DÖNÜŞÜMLER

Bu bölümde, Riemann manifoldları arasındaki zayıf konform ve yatay zayıf konform dönüşümler açıklandıktan sonra Riemann manifoldları arasındaki yatay konform submersiyonlar ve bu tür submersiyonların özellikleri incelenecektir.

3.1 Zayıf Konform Dönüşümler

Tanım 3.1.1. (M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu taktirde $x \in M$ ve $X,Y \in T_xM$ için

$$h(d\pi_x(X), d\pi_x(Y)) = \Lambda(x) g(X,Y) \tag{3.1.1}$$

olacak şekilde bir $\Lambda(x)$ fonksiyonu varsa π dönüşümüne $x \in M$ noktasında zayıf konform dönüşüm denir[9].

Burada, $\Lambda(x) = \lambda^2(x)$ olacak şekilde bir $\lambda : M \longrightarrow [0,\infty)$ fonksiyonu için $\lambda(x)$ sayısına π dönüşümünün konform faktörü ve $\Lambda(x)$ sayısına da π dönüşümünün kare konform faktörü denir. Eğer π dönüşümünde her $x \in M$ için (3.1.1) şartını sağlıyorsa π dönüşümüne M üzerinde zayıf konform dönüşüm denir. (3.1.1) de iz alınırsa :

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{m} h(d\pi_x(e_i), d\pi_x(e_i)) &= \sum_{i=1}^{m} \Lambda(x) g(e_i, e_i) \\
|d\pi_x|^2 &= \Lambda(x) m \\
\frac{1}{m}|d\pi_x|^2 &= \Lambda(x)
\end{aligned}$$

elde edilir ve bu gösterir ki $\Lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu diferensiyellenebilirdir[9].

(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları olmak üzere $\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ dönüşümünün, $d\pi_x : T_xM \longrightarrow T_{\pi(x)}N$ türev dönüşümü ile $d\pi_x^* : T_{\pi(x)}N \longrightarrow T_xM$ türev dönüşümünün eki, $X \in T_xM, Y \in T_{\pi(x)}N$ olmak üzere

$$g(X, d\pi_x^*(Y)) = h(d\pi_x(X), Y) \tag{3.1.2}$$

ile tanımlanır [9].

$x \in M$ noktasında $\{X_i\}$ ve $\pi(x) \in N$ noktasında da $\{Y_\alpha\}$ çatıları için

$$g_{ij} = g(X_i, X_j),\ h_{\alpha\beta} = h(Y_\alpha, Y_\beta),\ d\pi_x(X_i) = \pi_i^\alpha Y_\alpha$$

denklemleri yazılabilir.

Lemma 3.1.1. *(M,g) ve (N,h) Riemann manifoldları, $\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $x \in M$ olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:*

(1) *π, $x \in M$ noktasında $\Lambda(x) = \lambda^2(x)$ olacak şekilde bir zayıf konform dönüşümdür.*

(2) *$x \in M$ noktasındaki herhangi bir $\{X_i\}$ çatısı için*

$$h(d\pi_x(X_i), d\pi_x(X_j)) = \Lambda(x) g_{ij}, \quad i,j = 1,2,...,m$$

dir.

(3) *$\{X_i\}$ ve $\{Y_\alpha\}$ sırasıyla $x \in M$ ve $\pi(x) \in N$ noktalarında birer çatı ise*

$$h_{\alpha\beta}\pi_i^\alpha \pi_j^\beta = \Lambda(x) g_{ij}, \quad i,j = 1,2,...,m$$

dir.

(4) *h metriğinin pullbacki*

$$(\pi^* h)_x = \Lambda(x) g_x$$

şartını sağlar.

(5) *$d\pi_x$ türev dönüşümünün eki olan $d\pi_x^*$ dönüşümü*

$$d\pi_x^* \circ d\pi_x = \Lambda(x) Id_{T_xM}$$

şartını sağlar. Burada Id_{T_xM}, M nin x noktasındaki tanjant uzayında tanımlanan özdeşlik dönüşümüdür.

(6) *$x \in M$ noktasındaki herhangi bir $\{X_i\}$ ortonormal çatısı için $d\pi_x(X_i)$ vektörleri birbirine diktir ve bu vektörlerin normu $\lambda(x)$ in normuna eşittir.*

(7) *$d\pi_x = 0$ dır veya $x \in M$ noktasındaki bir $\{X_i\}$ ortonormal çatısı için $\pi(x) \in N$ noktasında öyle bir $\{Y_\alpha\}$ ortonormal çatısı vardır ki*

$$d\pi_x(X_i) = \lambda(x) Y_i, \quad i = 1,2,...,m$$

dir[9].

İspat. (1) $\Rightarrow$ (2): π, $x \in M$ noktasında $\Lambda(x) = \lambda^2(x)$ olacak şekilde bir zayıf konform dönüşüm ve x noktasındaki herhangi $\{X_i\}$ çatısı için

$$\begin{aligned} h(d\pi_x(X_i), d\pi_x(X_j)) &= \Lambda(x) g(X_i, X_j) \\ h(d\pi_x(X_i), d\pi_x(X_j)) &= \Lambda(x) g_{ij} \end{aligned}$$

bulunur.

(2) $\Rightarrow$ (3): $i, j = 1, 2, ..., m$ olmak üzere $x \in M$ noktasındaki $\{X_i\}$ ortonormal çatısı için

$$\begin{aligned} h(d\pi_x(X_i), d\pi_x(X_j)) &= \Lambda(x) g_{ij} \\ h(\pi_i^\alpha Y_\alpha, \pi_j^\beta Y_\beta) &= \Lambda(x) g_{ij} \\ h_{\alpha\beta} \pi_i^\alpha \pi_j^\beta &= \Lambda(x) g_{ij} \end{aligned}$$

elde edilir.

(3) $\Rightarrow$ (4): $i, j = 1, 2, ..., m$ olmak üzere $x \in M$ noktasındaki $\{X_i\}$ ve $\pi(x) \in N$ noktasındaki $\{Y_\alpha\}$ çatıları için

$$\begin{aligned} h_{\alpha\beta} \pi_i^\alpha \pi_j^\beta &= \Lambda(x) g_{ij} \\ h(\pi_i^\alpha Y_\alpha, \pi_j^\beta Y_\beta) &= \Lambda(x) g_{ij} \\ h(d\pi_x(X_i), d\pi_x(X_j)) &= \Lambda(x) g(X_i, X_j) \\ (\pi^* h)_x(X_i, X_j) &= \Lambda(x) g(X_i, X_j) \\ (\pi^* h)_x &= \Lambda(x) g_x \end{aligned}$$

bulunur.

(4) $\Rightarrow$ (5): $(\pi^* h)_x = \Lambda(x) g_x$ olup her $X, Y \in T_x M$ için

$$\begin{aligned} (\pi^* h)_x(X, Y) &= \Lambda(x) g_x(X, Y) \\ h(d\pi_x(X), d\pi_x(X)) &= \Lambda(x) g(X, Y) \\ g(d\pi_x^*(d\pi_x(X)), Y) &= \Lambda(x) g(X, Y) \\ g(d\pi_x^* \circ d\pi_x(X), Y) &= \Lambda(x) g(X, Y) \\ d\pi_x^* \circ d\pi_x &= \Lambda(x) Id_{T_x M} \end{aligned}$$

elde edilir.

(5) $\Rightarrow$ (6): $d\pi_x^* \circ d\pi_x = \Lambda(x) Id_{T_xM}$ olup $x \in M$ noktasında herhangi bir $\{X_i\}$ ortonormal çatısı için

$$\begin{aligned} g(d\pi_x^* \circ d\pi_x(X_i), X_j) &= \Lambda(x) g(X_i, X_j) \\ h(d\pi_x(X_i), d\pi_x(X_j)) &= \Lambda(x) g(X_i, X_j) \end{aligned}$$

yazılır. $i \neq j$ için

$$h(d\pi_x(X_i), d\pi_x(X_j)) = 0$$

ve $i = j$ için

$$|d\pi_x(X_i)| = |\lambda(x)|$$

elde edilir.

(6) $\Rightarrow$ (7): $x \in M$ noktasında herhangi bir $\{X_i\}$ ortonormal çatısı için $d\pi_x(X_i)$ vektörleri birbirine dik ve bu vektörlerin $|d\pi_x(X_i)|$ normu, $\lambda(x)$ in normuna eşit olup yani $|d\pi_x(X_i)| = |\lambda(x)|$ olur. $\lambda(x) = 0$ ise $d\pi_x = 0$ olur. Eğer $\lambda(x) \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} |d\pi_x(X_i)|^2 &= |\lambda(x)|^2 \\ h(d\pi_x(X_i), d\pi_x(X_i)) &= |\lambda(x)|^2 \\ \pi_i^\alpha \pi_i^\alpha h(Y_\alpha, Y_\alpha) &= |\lambda(x)|^2 \\ \pi_i^\alpha &= |\lambda(x)| \end{aligned}$$

olur. Son eşitlik kullanılarak $i = 1, 2, ..., m$ için

$$d\pi_x(X_i) = \pi_i^\alpha Y_\alpha = \lambda(x) Y_\alpha$$
$$d\pi_x(X_i) = \lambda(x) Y_i$$

elde edilir.

(7) $\Rightarrow$ (1): $d\pi_x = 0$ için $\Lambda(x) = 0$ olur. Dolayısıyla π dönüşümü,

$$\lambda : M \longrightarrow [0, \infty)$$

fonksiyonuyla beraber zayıf konform dönüşümdür. Öte yandan $x \in M$ noktasında $\{X_i\}$ ortonormal bazı ve $i = 1, 2, ..., m$ için

$$d\pi_x(X_i) = \lambda(x)Y_i$$

olacak şekilde $\pi(x) \in N$ noktasında $\{Y_\alpha\}$ ortonormal bazı vardır. Böylece

$$\begin{aligned} h(d\pi_x(X_i), d\pi_x(X_i)) &= h(\lambda(x)Y_i, \lambda(x)Y_i) \\ \Lambda(x)g(X_i, X_i) &= \lambda^2(x)h(Y_i, Y_i) \\ \Lambda(x) &= \lambda^2(x) \end{aligned}$$

olup π, $\Lambda(x) = \lambda^2(x)$ kare konform faktörüne sahip zayıf konform dönüşümdür. □

Önerme 3.1.1. *M ve N Riemann manifoldları olmak üzere*

$$\pi : M \longrightarrow N$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm ve $x \in M$ olsun. Bu takdirde $x \in M$ noktasında π dönüşümünün zayıf konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart
(i) $d\pi_x = 0$ veya
(ii) $d\pi_x : T_xM \longrightarrow T_{\pi(x)}N$ dönüşümünün birebir konform olmasıdır[9].

Burada, $d\pi_x = 0$ şartını sağlayan $x \in M$ noktasına π dönüşümünün bir branch noktası denir. π dönüşümünün branch noktalarında $\Lambda(x) = \lambda(x) = 0$ ve $d\pi_x$ türev dönüşümünün rankı 0 dır.
π dönüşümünün türev dönüşümünün birebir konform olduğu $x \in M$ noktasına π dönüşümünün bir regüler noktası denir. π dönüşümünün regüler noktalarında $\Lambda(x) \neq 0, \lambda(x) \neq 0$ ve $rank d\pi_x = boy M$ dir. Böylece regüler noktalarda π bir immersiyondur. Dolayısıyla, π dönüşümünün hiç branch noktası yoksa yani $\forall x \in M$ için $d\pi_x \neq 0$ ise π tanım kümesinin tamamında regülerdir yani immersiyon olur. Bu takdirde π dönüşümüne konform immersiyon denir[9].

Bir zayıf konform dönüşüm regüler noktalarda bir immersiyon olduğundan boyutlar üzerindeki şu kısıtlamayı verebiliriz.

Önerme 3.1.2. *M ve N Riemann manifoldları ve*

$$\pi : M \longrightarrow N$$

bir zayıf konform dönüşüm olsun. Eğer boy$N <$ boy$M$ ise π sabittir yani $d\pi = 0$ dır[9].

Örnek 3.1.1. (Öklidyen uzaydan tanımlanan dönüşümler)
U, $\mathbb{R}^m$ Öklidyen uzayının bir açık altkümesi olmak üzere

$$\pi : U \longrightarrow N$$

dönüşümünün

$$\lambda : U \longrightarrow [0, \infty)$$

konform faktörüne sahip zayıf konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in U$ noktasında $\frac{\partial \pi}{\partial x^i} \in T_{\pi(x)}N$ kısmi türevlerinin birbirine dik ve

$$|\frac{\partial \pi}{\partial x^i}| = |\lambda(x)|$$

olmasıdır[9]. Yani $i, j = 1, 2, ..., m$ için

$$h(\frac{\partial \pi}{\partial x^i}, \frac{\partial \pi}{\partial x^j}) = \Lambda \delta_i^j$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

$$\pi : U \longrightarrow N$$

zayıf konform dönüşüm ise $x \in U$ noktasında

$$\begin{aligned} h(d\pi_x(\frac{\partial}{\partial x^i}), d\pi_x(\frac{\partial}{\partial x^j})) &= \Lambda(x) g(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}) \\ h(\frac{\partial \pi}{\partial x^i}, \frac{\partial \pi}{\partial x^j}) &= \Lambda(x) \delta_i^j \end{aligned}$$

dir. $i \neq j$ için

$$h(\frac{\partial \pi}{\partial x^i}, \frac{\partial \pi}{\partial x^j}) = 0$$

dır yani $\frac{\partial \pi}{\partial x^i}$ kısmi türevleri birbirine diktir. $i = j$ için

$$|\frac{\partial \pi}{\partial x^i}| = |\lambda(x)|$$

elde edilir.

Örnek 3.1.2. (Bileşkeler)

(M,g),(N,h) ve $(P,\tilde{g})$ Riemann manifoldları, $\pi : M \longrightarrow N$ ve $\psi : N \longrightarrow P$ konform faktörleri λ ve μ olan iki zayıf konform dönüşüm olmak üzere

$$\psi \circ \pi : M \longrightarrow P$$

bileşke dönüşümü $x \longrightarrow \lambda(x)$ ve $y \longrightarrow \mu(y)$ konform faktörleri için

$$x \longrightarrow \lambda(x)\mu(\pi(x))$$

konform faktörüne sahip zayıf konform dönüşümdür[9]. Gerçektende,

$$d(\psi \circ \pi) = d\psi \circ d\pi$$

olduğundan $x \in M$, $y \in N$ ve $\forall X,Y \in T_xM$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{g}(d\psi(d\pi(X)),d\psi(d\pi(Y))) &= \mu^2(y)h(d\pi(X),d\pi(Y)) \\
&= \mu^2(y)\lambda^2(x)g(X,Y) \\
&= \lambda^2(x)[\mu(\pi(x))]^2 g(X,Y)
\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan,

$$\psi \circ \pi : M \longrightarrow P$$

bileşke dönüşümünün $x \longrightarrow \lambda(x)\mu(\pi(x))$ konform faktörüne sahip zayıf konform dönüşüm olduğu açıktır.

Örnek 3.1.3. (Özdeşlik dönüşümü)

(M,g) ve (M,h) Riemann manifoldları olmak üzere, $I : (M,g) \longrightarrow (M,h)$ özdeşlik dönüşümünün konform olması için gerek ve yeter şart g ve h metriklerinin konform olarak denk olmasıdır[9]. Bu takdirde $\forall X,Y \in T_xM$ için,

$$\begin{aligned}
h(dI(X),dI(Y)) &= \lambda^2(x)g(X,Y) \\
h(X,Y) &= \lambda^2(x)g(X,Y) \\
h &= \lambda^2 g
\end{aligned}$$

dir.

Örnek 3.1.4. (Bir boyutlu manifoldlarda tanımlanan dönüşümler)
1-boyutlu Riemann manifoldundan keyfi Riemann manifolduna tanımlanan bir diferensiyellenebilir dönüşüm zayıf konform dönüşümdür. Çünkü 1-boyutlu bir Riemann manifoldunun bir tane baz vektörü vardır[9].

Tanım 3.1.2. M ve N Riemann manifoldları olmak üzere konform faktörü 1 olan

$$\pi : M \longrightarrow N$$

zayıf konform dönüşümüne Riemannian dönüşüm ya da izometrik immersiyon denir[9]. Yani,

$$\pi : M \longrightarrow N$$

öyle bir immersiyondur ki $\forall x \in M$ noktası için $d\pi_x : T_xM \longrightarrow T_{\pi(x)}N$ türev dönüşümü bir izometridir.

M bir C^∞ manifold ve (N,h) bir Riemann manifoldu olsun. $\pi : M \longrightarrow N$ immersiyonu için π yi izometrik immersiyon yapan M üzerine indirgenen g metriği tektir ve h metriğinin pullbacki olan π^*h ile tanımlanır. Bahsi geçen şekildeki izometrik immersiyonlara inclusion dönüşümü örnek verilebilir. $m \leqslant n$ olmak üzere $m,n \in \{1,2,...\}$ için standart inclusion dönüşümü

$$\begin{array}{ccc} R^m & \longrightarrow & R^n \\ (x_1,...,x_m) & \longrightarrow & (x_1,...,x_m,0,...,0) \end{array}$$

dir[9].

Tanım 3.1.3. M ve N Riemann manifoldları olmak üzere konform faktörü sıfırdan farklı bir sabit olan

$$\pi : M \longrightarrow N$$

zayıf konform dönüşümüne bir homotetik immersiyon denir. Bir diffeomorfizm olan homotetik inversiyona ise homoteti denir[9].

$\mathbb{R}^m$ Öklidyen uzayında iki önemli konform dönüşüm türü vardır. Bunları açıklayalım.

(i) Homotetiler: $\mathbb{R}^m$ deki izometri tanımından yola çıkarak $x \in R^m$ olmak üzere $\mathbb{R}^m$ deki homotetiler

$$\pi(x) = \lambda Ax + b$$

olarak tanımlanır. Burada A ortogonal matris, λ pozitif bir sayı ve $b \in \mathbb{R}^m$ dir.

(ii) Bir küredeki inversiyonlar: Birim küredeki inversiyonlar

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \quad &\longrightarrow \quad \mathbb{R}^m \setminus \{0\} \\ x \quad &\longrightarrow \quad \pi(x) = \frac{x}{|x|^2} \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Homotetiler ve immersiyonlar tarafından gerilen gruba da Möbius grup denir[9].

Önerme 3.1.3. *(Liouville Teoremi)* *S^m birim küre olmak üzere $m \geqslant 3$ için*

$$\pi : U \subset \mathbb{R}^m(S^m) \longrightarrow \mathbb{R}^m(S^m)$$

zayıf konform dönüşüm olsun. Bu takdirde, π Möbius grubun kısıtlanışının bir elemanıdır. Yani π homotetilerin ve immersiyonların bileşkesidir[9].

İspat. $U \subset S^m$ ve önermedeki ifade lokal verildiğinden $U \neq S^m$ olarak kabul edebiliriz. Steografik izdüşüm yardımıyla U nun tümleyenindeki bir nokta $\mathbb{R}^m$ Öklidyen uzayının bir bölgesine konform olarak denk yapılabilir. $\mathbb{R}^m$ in standart metriğine göre $\mathbb{R}^m$ in bir açık altkümesi olarak U alınabilir. λ sabit ise π bir homoteti olur.

$\lambda \neq 0$ ve $i = 1, ..., m$ için $Y_i = d\pi(\frac{\partial}{\partial x_i})$ olsun.

$$[Y_i, Y_j] = 0 \ \ (i, j = 1, ..., m)$$

ve R^m deki eğrilik tensörü sıfır olduğu için

$$\langle \nabla_{Y_k} \nabla_{Y_j} Y_i - \nabla_{Y_j} \nabla_{Y_k} Y_i, Y_l \rangle = 0 \ \ (i, j, k, l = 1, ..., m) \tag{3.1.3}$$

olur. π konform olduğundan

$$\begin{aligned}
\langle d\pi(\frac{\partial}{\partial x_i}), d\pi(\frac{\partial}{\partial x_j})\rangle &= \lambda^2\langle\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\rangle \\
\langle Y_i, Y_j\rangle &= \lambda^2\delta_i^j
\end{aligned}$$

dir. Koszul özdeşliğinden

$$\begin{aligned}
2\langle\nabla_{Y_i}Y_j, Y_l\rangle &= Y_i(\langle Y_j, Y_l\rangle) + Y_j(\langle Y_l, Y_i\rangle) - Y_l(\langle Y_i, Y_j\rangle) \\
&- \langle Y_i, [Y_j, Y_l]\rangle + \langle Y_j, [Y_l, Y_i]\rangle + \langle Y_l, [Y_i, Y_j]\rangle \\
&= Y_i(\lambda^2\delta_j^l) + Y_j(\lambda^2\delta_l^i) - Y_l(\lambda^2\delta_i^j) \\
&= 2\lambda(\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\delta_j^l + \frac{\partial\lambda}{\partial x_j}\delta_l^i - \frac{\partial\lambda}{\partial x_l}\delta_i^j)
\end{aligned}$$

olup $i, j, l = 1, ..., m$ için

$$\langle\nabla_{Y_i}Y_j, Y_l\rangle = \lambda\{\frac{\partial\lambda}{\partial x_i}\delta_j^l + \frac{\partial\lambda}{\partial x_j}\delta_l^i - \frac{\partial\lambda}{\partial x_l}\delta_i^j\}$$

bulunur. (3.1.3) de $\lambda_i = \frac{\partial\lambda}{\partial x_i}$ ve $\lambda_{ij} = \frac{\partial^2\lambda}{\partial x_i\partial x_j}$ yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
\lambda\{\lambda_{ik}\delta_{jl} &- \lambda_{kl}\delta_{ij} - \lambda_{ij}\delta_{kl} + \lambda_{jl}\delta_{ik}\} + 2\lambda_i\lambda_j\delta_{kl} - 2\lambda_i\lambda_k\delta_{jl} \\
&- 2\lambda_j\lambda_l\delta_{ik} + 2\lambda_k\lambda_l\delta_{ij} + (\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{ij}\delta_{kl})|grad\lambda|^2 = 0 \qquad (3.1.4)
\end{aligned}$$

elde edilir. $u = \frac{1}{\lambda}$, $i = j$ ve i, k, l farklı seçilirse (3.1.4) eşitliği

$$-\lambda\lambda_{kl} + 2\lambda_k\lambda_l = 0$$

olup

$$\frac{\partial u}{\partial x_l} = -\frac{\lambda_l}{\lambda^2}$$

ve

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k\partial x_l} = \frac{-\lambda_{kl}\lambda^2 + 2\lambda\lambda_k\lambda_l}{\lambda^4} = 0\ (k \neq l)$$

bulunur. $i = j, k = l$ ve i ile k nın farklı olması durumunda (3.1.3) denklemi

$$-\lambda\lambda_{kk} - \lambda\lambda_{ii} + 2\lambda_k\lambda_k + \lambda_i\lambda_i - |gradu|^2 = 0$$

şeklini alır. $i,k=1,...,m$ için
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$$
olduğundan $\rho=\frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$ alınırsa $|gradu|^2=2\rho u$ elde edilir. Böylece
$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k \partial x_l}=0\ (k\neq l),\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}=\rho,\ |gradu|^2=2\rho u \tag{3.1.5}$$
denklemleri elde edilir. Eğer $\rho=0$ ise
$$\begin{aligned}|gradu|^2 &= 0\\ \langle\frac{\partial u}{\partial x_i},\frac{\partial u}{\partial x_i}\rangle &= 0\end{aligned}$$
olur. Bu takdirde λ sabit ve π bir homotetidir. Aksi durumda, $\rho\neq 0$ ise $(3.1.5)$ denklem sistemi, $a=(a_1,...,a_m)$ sabit vektör olmak üzere
$$u=\frac{\rho}{2}\sum_{i=1}^{m}(x_i-a_i)^2 \tag{3.1.6}$$
genel çözümüne sahip olur. u, (3.1.6) daki gibi verildiğinde $\lambda=\frac{1}{u}$ konform faktörüne sahip bir konform dönüşüm inversiyondur. Uygun bir homotetiyle $u=|x|^2$ alınırsa $\lambda=\frac{1}{|x|^2}$ olur. Buradaki λ konform faktörü birim kürenin π inversiyonudur. Böylece π nin bir homoteti ile bir inversiyonun bileşkesi olduğu görülür. $\square$

Eğer dönüşüm $\mathbb{R}^m$ de global olarak tanımlandıysa inversiyonlar elde edilemez. Dolayısıyla aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3.1.1. ($\mathbb{R}^m$ deki konform dönüşümler) $\pi:\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ dönüşümü $m\geq 3$ için zayıf konform dönüşüm olsun. Bu takdirde π bir homotetidir[9].

Bu sonuç bize, boyutu en az 3 olan eşit boyutlu manifoldlar arasındaki zayıf konform dönüşümlerin hiç branch noktası olmadığını belirtir.

3.2 Yatay Zayıf Konform Dönüşümler

(M^m,g) ve (N^n,h) Riemann manifoldları ve
$$\pi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$$

bir diferensiyellenebilir dönüşümü olsun. $x \in M$ için

$$\mathcal{V}_x = \mathcal{V}_x(\pi) = \{X \in T_xM | d\pi_x(X) = 0\}$$

ve

$$\mathcal{H}_x = \mathcal{H}_x(\pi) = \mathcal{V}_x^{\perp} \subset T_xM$$

ile tanımlanan $\mathcal{V}_x$ altuzayına π nin x noktasındaki dikey uzayı ve $\mathcal{H}_x$ altuzayına da yatay uzayı denir.

$rankd\pi_x < min\{m,n\}$ olan $x \in M^m$ noktasına π dönüşümünün bir kritik noktası denir. Kritik noktanın π altındaki görüntüsü de kritik değer olarak adlandırılır. π dönüşümünün kritik noktalarının kümesini de C_π ile göstereceğiz.

$x \in \mathcal{H}_x$ ve $x \in \mathcal{V}_x$, M/C_π üzerinde $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\pi)$ ve $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\pi)$ diferensiyellenebilir distribüsyonlarını tanımlar. $\mathcal{H}(\pi)$ distribüsyonuna π nin yatay distribüsyonu ve $\mathcal{V}(\pi)$ distribüsyonuna da π nin dikey distribüsyonu denir[9].

Tanım 3.2.1. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : M^m \longrightarrow N^n$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $x \in M^m$ için aşağıdaki şartlardan herhangi biri sağlanıyorsa π dönüşümüne x noktasında yatay zayıf konform dönüşüm denir.
(i) $d\pi_x = 0$ dır
veya
(ii) $d\pi_x$ türev dönüşümü $\mathcal{H}_x = \{çek(d\pi_x)\}^{\perp}$ yatay uzayını $T_{\pi(x)}N$ üzerine konform olarak resmeder. Yani $d\pi_x$ örtendir ve $\forall X, Y \in \mathcal{H}_x$ için

$$h(d\pi_x(X), d\pi_x(Y)) = \Lambda(x) g(X,Y) \tag{3.2.1}$$

olacak şekilde bir $\Lambda(x) \neq 0$ sayısı vardır [9].
Eğer π, M manifoldunun her noktasında yatay zayıf konform ise π dönüşümüne M üzerinde yatay zayıf konform dönüşüm denir.

Burada, (3.2.1) eşitliğini $(\pi^* h)_x|_{\mathcal{H}_x \times \mathcal{H}_x} = \Lambda(x) g_x|_{\mathcal{H}_x \times \mathcal{H}_x}$ şeklinde de yazabiliriz.

Önerme 3.2.1. *(M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve*

$$\pi : M^m \longrightarrow N^n$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $x \in M^m$ noktasının π dönüşümünün kritik noktası olması için gerek ve yeter şart $d\pi_x = 0$ olmasıdır[9].

Tanım 3.2.2. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : M^m \longrightarrow N^n$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $X, Y \in \mathcal{H}_x$ için

$$h(d\pi_x(X), d\pi_x(Y)) = \Lambda(x) g(X, Y)$$

şartını sağlayan $x \in M^m$ noktasına π nin bir regüler noktası denir[9].

Tanım 3.2.3. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve

$$\pi : M^m \longrightarrow N^n$$

diferensiyellenebilir bir dönüşüm olsun. $x \in M^m$ için

$$rankd\pi_x = boyN$$

ise π dönüşümüne x noktasında submersiyon denir[9]. Eğer π dönüşümünün hiç kritik noktası yoksa π dönüşümüne konform submersiyon denir.

Kritik noktalarda $rankd\pi_x = 0$ ve $\Lambda(x) = \lambda(x) = 0$ iken regüler noktalarda ise $rankd\pi_x = n$ ve $\Lambda(x) \neq 0, \lambda(x) \neq 0$ dır, π dönüşümü de bir submersiyondur.

Bir yatay zayıf konform dönüşüm regüler noktalarda bir submersiyon olduğundan boyutlar üzerindeki şu kısıtlama verilebilir.

Önerme 3.2.2. *$\pi : M \longrightarrow N$ bir yatay zayıf konform dönüşüm olsun. $boyM < boyN$ yani $m < n$ ise π sabittir[9].*

Aşağıdaki Lemma zayıf konform dönüşümler için verilen karakterizasyonların yatay zayıf konform dönüşümlerdeki karşılığıdır.

Lemma 3.2.1. *(M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve*

$$\pi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. $x \in M$ için aşağıdaki ifadeler denktir.

(1) *π, x noktasında dilationu $\lambda(x)$ ve kare dilationu $\Lambda(x)$ olan yatay zayıf konform dönüşümdür.*

(2) *$\pi(x) \in N$ noktasında herhangi ortonormal $\{Y_\alpha\}$ çatısı için*

$$g(d\pi_x^*(Y_\alpha), d\pi_x^*(Y_\beta)) = \Lambda(x)h_{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, ..., n \tag{3.2.2}$$

dir.

(3) *$x \in M$ ve $\pi(x) \in N$ noktalarında sırasıyla $\{X_i\}$ ve $\{Y_\alpha\}$ çatısı için*

$$g^{ij}\pi_i^\alpha \pi_j^\beta = \Lambda(x)h^{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, ..., n \tag{3.2.3}$$

dir.

(4) *$g_x^* \in T_xM \bigotimes T_xM$ ve $h_{\pi(x)}^* \in T_{\pi(x)}N \bigotimes T_{\pi(x)}N$ olmak üzere*

$$\pi_* : T_xM \bigotimes T_xM \longrightarrow T_{\pi(x)}N \bigotimes T_{\pi(x)}N$$

bir dönüşümdür. T_x^*M üzerindeki g^* kometriği ve $T_{\pi(x)}^*N$ üzerindeki $h_{\pi(x)}^*$ kometriği arasında

$$\pi_*(g_x^*) = \Lambda(x)h_{\pi(x)}^*$$

ilişkisi vardır.

(5) *$d\pi_x$ türev dönüşümünün adjointi (eki) $d\pi_x^*$ arasında*

$$d\pi_x \circ d\pi_x^* = \Lambda(x)Id_{T_{\pi(x)}N} \tag{3.2.4}$$

eşitliği vardır.

(6) *$\pi(x) \in N$ noktasında herhangi bir ortonormal $\{Y_\alpha\}$ çatısı için $d\pi_x^*(Y_\alpha)$ vektörleri de ortogonaldir.*

(7) *$d\pi(x) = 0$ dır veya $\pi(x) \in N$ noktasındaki $\{Y_\alpha\}$ ortonormal çatısı için $x \in M$ noktasında öyle bir ortonormal $\{X_i\}$ çatısı vardır ki*

$$d\pi_x(X_i) = \begin{cases} \lambda(x)Y_i & (i = 1, ..., n), \\ 0 & (i > n), \end{cases} \tag{3.2.5}$$

dir.

(8) *$d\pi(x) = 0$ dır veya $d\pi_x$ örtendir ve h metriğinin pullbacki π^*h*

$$\pi^*h|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}} = \Lambda(x)g|_{\mathcal{H}\times\mathcal{H}}$$

eşitliğini sağlar.

(9) *$\pi(x)$ in bir komşuluğu üzerinde herhangi bir $\{y^1, ..., y^n\}$ lokal koordinatında*

$$g(grad\pi^\alpha, grad\pi^\beta) = \Lambda h^{\alpha\beta} \quad \alpha, \beta = 1, ..., n \tag{3.2.6}$$

dır[9].

Önerme 3.2.3. *(M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve*

$$\pi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$$

bir diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. π dönüşümünün $x \in M$ noktasında yatay zayıf konform dönüşüm olması için gerek ve yeter şart $\forall U, V \in T_{\pi(x)}N$ için

$$g(d\pi_x^*(U), d\pi_x^*(V)) = \Lambda(x)h(U, V)$$

olmasıdır[9].

$\Lambda(x) \neq 0$ olması halinde (3.2.4) den $d\pi_x^*$ adjoint dönüşümü $T_{\pi(x)}N$ nin $\mathcal{H}_x$ yatay uzayı üzerine bir konform izomorfizmdir. Yani $d\pi(x)$, $\mathcal{H}_x$ yatay uzayını $T_{\pi(x)}N$ üzerine konform ve birebir olarak resmeder. Buradan π dönüşümünün x noktasında submersiyon olduğu görülür.

Örnek 3.2.1. (Öklidyen uzaylar üzerine dönüşümler)

$\pi : M \longrightarrow \mathbb{R}^n$ diferensiyellenebilir dönüşümü kare dilationu $\Lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}$ olan yatay zayıf konform dönüşümdür gerek ve yeter şart $\forall x \in M$ noktasında π nin $\pi^{\alpha} : M \longrightarrow \mathbb{R}$ bileşenlerinin gradyentinin ortogonal ve kare normunun $\Lambda(x)$ olmasıdır. Yani,

$$g(grad\pi^{\alpha}, grad\pi^{\beta}) = \Lambda\delta^{\alpha\beta} \ \alpha, \beta = 1, ..., n$$

dir[9].

Örnek 3.2.2. (Bileşkeler)
$\pi : M \longrightarrow N$ ve $\psi : N \longrightarrow P$ iki yatay zayıf konform dönüşüm ve dilationları sırasıyla $\lambda : M \longrightarrow [0, \infty)$ ve $\mu : N \longrightarrow [0, \infty)$ olsun. π ve ψ nin bileşkesi olan $\psi \circ \pi : M \longrightarrow P$ dönüşümü $x \longrightarrow \lambda(x)\mu(\pi(x))$ dilationuyla bir yatay zayıf konform dönüşümdür[9].

Örnek 3.2.3. (Eşit boyutlar)
Eşit boyutlu Riemann manifoldları arasındaki bir diferensiyellenebilir dönüşüm için zayıf konform olma şartları ile yatay zayıf konform olma şartları denktir[9].

Örnek 3.2.4. (Bir boyutlu manifoldlar üzerine dönüşümler)
Keyfi bir Riemann manifoldundan bir 1-boyutlu Riemann manifolduna bir diferensiyellenebilir dönüşüm otomatik olarak yatay zayıf konform dönüşümdür[9].

Tanım 3.2.4. Dilationu 1 olan yatay zayıf konform dönüşüme bir Riemann submersiyonu denir. Yani, $\pi : M \longrightarrow N$ bir submersiyondur öyleki $\forall x \in M$ noktasında $d\pi_x$ diferensiyeli, $\mathcal{H}_x$ yatay uzayının bir izometrisini $T_{\pi(x)}N$ üzerine kısıtlar[9].

Örnek 3.2.5. Riemann submersiyonuna örnek olarak ortogonal projeksiyon verilebilir. $m \geq n \geq 1$ için

$$\begin{aligned} \pi : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \pi(x_1, ..., x_m) &= (x_1, ..., x_n) \end{aligned}$$

dir. Herhangi bir $x \in \mathbb{R}^m$ noktasında, dikey uzay $\{\frac{\partial}{\partial x_{n+1}}, ..., \frac{\partial}{\partial x_m}\}$ tarafından ve yatay uzay da $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\}$ tarafından gerilir[9].

Tanım 3.2.5. $\pi : M \longrightarrow N$ yatay zayıf konform dönüşümü için regüler noktalarda λ dilationunun gradyenti dikey oluyorsa yani

$$\mathcal{H}(grad\lambda) = 0$$

ise bu dönüşüme yatay homotetik dönüşüm denir. Burada $\mathcal{H}(grad\lambda) = 0$ şartı λ dilationunun yatay eğriler boyunca sabit olduğunu gösterir[9].

Örnek 3.2.6. (Ortogonal projeksiyon)

$$\begin{aligned} \pi_0 : \mathbb{R}^m &\longrightarrow \mathbb{R}^{m-1} \\ (x_0, ..., x_{m-1}) &\longrightarrow (x_1, ..., x_{m-1}) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüm bir Riemann submersiyondur[9].

Örnek 3.2.7. (Bir kürede tanımlanan radyal projeksiyon)
$\mathbb{R}^{m+1}$ de $S^m = \{(x_0, ..., x_m) \in \mathbb{R}^{m+1} : x_0^2 + ... + x_m^2 = 1\}$ ile verilen birim m-küre ve $M = S^m \backslash \{(\pm 1, 0, ..., 0)\}$ kürenin kutuplarının çıkarılmış hali olsun. $x_0 = 0$ ile verilen S^m deki ekvatoral büyük küreler $N^{m-1} = S^{m-1}$ olsun. $\pi_1 : M \longrightarrow N^{m-1}$ dönüşümü S^{m-1} e geodezikler boyunca dik olan projeksiyonu tanımlasın. Yani, $x = (x_0, \tilde{\mathbf{x}}) = (x_0, x_1, ..., x_m) \to \tilde{\mathbf{x}}/|\tilde{\mathbf{x}}|$ dir. Bunu bir $\{(\pm 1, 0, ..., 0)\}$ kutbundan radyal projeksiyon olarak düşünebiliriz. Buradan π_1 dilationu $\lambda(x) = 1/|\tilde{\mathbf{x}}| = 1/sinr$ olan yatay homotetik dönüşümdür. r, x in bir $(\pm 1, 0, ..., 0)$ kutbundan küresel uzaklığıdır[9].

Örnek 3.2.8. (Öklidyen uzayda tanımlanan radyal projeksiyon)

$$\begin{aligned} \pi_2 : \mathbb{R}^m \backslash \{0\} &\longrightarrow S^{m-1} \\ x &\longrightarrow \pi_2(x) = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \end{aligned}$$

şeklinde bir dönüşüm tanımlayalım. Her $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ noktasında dikey uzay $\partial/\partial r$ radyal vektör alanı tarafından gerilir. Buradan, π dilationu $\lambda(x) = 1/|\mathbf{x}| = 1/r$ olan yatay homotetik dönüşümdür. r, x in bir 0 dan Öklidyen anlamında uzaklığıdır[9].

3.3 Bir Dönüşüm Boyunca Tanımlı Geometrik Kavramlar

Bu bölümde M_1 ve M_2 Riemann manifoldları arasında tanımlı f dönüşümünün belirlediği geometrik kavramlar tanıtılacaktır.

Tanım 3.3.1. $f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm olsun. $\forall p_1 \in M_1$ için $X(p_1) \in T_{f(p_1)}M_2$ ise $X : M_1 \to TM_2$ dönüşümüne f boyunca bir vektör alanı denir [10].

$f : M_1 \to M_2$ dönüşümü boyunca vektör alanlarının kümesini $\Gamma_f TM_2$ ile göstereceğiz. $\Gamma_f TM_2$ kümesi $C^\infty(M_1)$ halkası üzerinde bir modüldür. Özel olarak $M_1 = M_2 = M$ ve f birim ise $\Gamma_{f=birim}TM = \Gamma TM$, M üzerindeki vektör alanlarının kümesidir.

$f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm olsun. $X \in \Gamma TM_1$ ve f dönüşümünün tanjant dönüşümü $f_* : TM_1 \to TM_2$ olmak üzere $f_*X : M_1 \to TM_2$ dönüşümü $(f_*X)(p_1) = f_{*p_1}X(p_1)$ şeklinde tanımlanan f boyunca bir vektör alanıdır. $Y \in \Gamma TM_2$ ise $Y \circ f$ de f boyunca bir vektör alanıdır. Bütün $Y \circ f \in \Gamma_f TM_2$ vektör alanlarının kümesi $C^\infty(M_1)$ üzerinde $\Gamma_f TM_2$ için lokal baz alanlarını içerir. Eğer $f_*X = Y \circ f$ ise $X \in \Gamma TM_1$ ve $Y \in \Gamma TM_2$ vektör alanlarına f bağlı denir [10].

Tanım 3.3.2. $f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm olsun. $X, Y \in \Gamma TM_1$ ve $U, V \in \Gamma_f TM_2$ için bir $\nabla : \Gamma TM_1 \times \Gamma_f TM_2 \to \Gamma_f TM_2$ dönüşümü

(1) $\nabla_{X+Y}U = \nabla_X U + \nabla_Y U$

(2) $\nabla_{hX}U = h\nabla_X U,\ h \in C^\infty(M_1)$

(3) $\nabla_X(U+V) = \nabla_X U + \nabla_X V$

(4) $\nabla_X(hU) = X(h)U + h\nabla_X U,\ h \in C^\infty(M_1)$

şartlarını sağlıyorsa ∇ ya f boyunca konneksiyon denir [10].

Özel olarak $M_1 = M_2 = M$ ve f birim ise ∇, M üzerindeki konneksiyondur.

$f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm ve ∇, M_2 üzerinde f boyunca bir konneksiyon olsun. Yukarıdaki tanımın **(1)** ve **(2)** özelliğinden $C^\infty(M_1)$ üzerindeki ∇ dönüşümünün lineerliğini gösterebiliriz. $p_1 \in M_1$ olmak üzere $(\nabla_X U)(p_1)$ değeri yalnız X vektör alanının

p_1 deki değerine bağlıdır. Dolayısıyla $\nabla_x U$, $X \in \Gamma TM_1$ ve $X(p_1) = x$ olmak üzere

$$\nabla_x U = (\nabla_X U)(p_1)$$

şeklinde tanımlanır [10].

Tanım 3.3.3. $f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm ve ∇, M_2 üzerinde f boyunca bir konneksiyon olsun. $\forall U \in \Gamma_f TM_2$ için

$$\begin{aligned} \nabla U : \Gamma TM_1 &\to \Gamma_f TM_2 \\ X &\to (\nabla U)(X) = \nabla_X U \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan dönüşüme U vektör alanının kovaryant türevi denir. $U \in \Gamma_f TM_2$ için $\nabla U = 0$ ise U ya paraleldir denir [10].

Teorem 3.3.1. *$f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm ve $\overset{2}{\nabla}$, M_2 üzerinde bir konneksiyon olsun. $Y \in \Gamma TM_2$ için f boyunca*

$$\overset{2}{\nabla}{}^f{}_X (Y \circ f) = \overset{2}{\nabla}_{f_* X} Y$$

olacak şekilde M_2 üzerinde birtek $\overset{2}{\nabla}{}^f$ konneksiyonu vardır [10].

İspat. <u>Teklik:</u> $\{Y_1, Y_2, ..., Y_{n_2}\}$, TM_2 için bir lokal çatı olsun. $i = 1, 2, ..., n_2$, $h^i \in C^\infty(M_1)$ için $Y \in \Gamma_f TM_2$ ise lokal olarak

$$Y = \sum_{i}^{n_2} h^i (Y_i \circ f)$$

dır. Böylece eğer $\overset{2}{\nabla}{}^f$, M_2 üzerinde f boyunca bir konneksiyon ise $X \in \Gamma TM_1$ için

$$\begin{aligned} \overset{2}{\nabla}{}^f{}_X Y &= \sum_{i=1}^{n_2} X(h^i)(Y_i \circ f) + \sum_{i=1}^{n_2} h^i \overset{2}{\nabla}{}^f{}_X (Y_i \circ f) \\ &= \sum_{i=1}^{n_2} X(h^i)(Y_i \circ f) + \sum_{i=1}^{n_2} h^i \nabla_{f_* X} Y_i \end{aligned}$$

olur. Buradan $\overset{2}{\nabla}{}^f$, $\overset{2}{\nabla}$ ile tamamen belirlenir, dolayısıyla $\overset{2}{\nabla}{}^f$ tektir.
<u>Varlık:</u> $\overset{2}{\nabla}{}^f$ lokal olarak yukarıdaki formülle tanımlayalım. $X \in \Gamma TM_1$ ve $Y \in \Gamma TM_2$ için $\overset{2}{\nabla}{}^f{}_X (Y \circ f) = \overset{2}{\nabla}_{f_* X} Y$ olup $\overset{2}{\nabla}{}^f$, f boyunca M_2 üzerinde konneksiyon olduğu kolayca görülür. □

Tanım 3.3.4. $f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm ve $\overset{2}{\nabla}$, M_2 üzerinde bir konneksiyon olsun. f boyunca M_2 üzerindeki $\overset{2}{\nabla}{}^f$ konneksiyonuna f boyunca $\overset{2}{\nabla}$ konneksiyonunun pullbacki denir [10].

Teorem 3.3.2. *M_1 bir manifold, (M_2, g_2) Riemann manifoldu ve Levi-Civita konneksiyonu $\overset{2}{\nabla}$ olsun. $f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm ve f boyunca $\overset{2}{\nabla}$ nin pullbackini de $\overset{2}{\nabla}{}^f$ ile gösterelim. Bu durumda*

(1) $Xg_2(U,W) = g_2(\overset{2}{\nabla}_X U, W) + g_2(U, \overset{2}{\nabla}_X W), X \in \Gamma TM_1, U, W \in \Gamma_f TM_2$

(2) $\overset{2}{\nabla}_X f_* Y - \overset{2}{\nabla}_Y f_* X = f_*[X,Y], X, Y \in \Gamma TM_1$

özelliklerini sağlar [10].

İspat. **(1)** $X \in \Gamma TM_1$, $X' \in \Gamma TM_2$ vektör alanına f-bağlı olsun yani $f_* X = X' \circ f$ olup $U, W \in \Gamma TM_2$ için

$$
\begin{aligned}
& Xg_2(U \circ f, W \circ f) - g_2(\overset{2}{\nabla}_X (U \circ f), W \circ f) - g_2(U \circ f, \overset{2}{\nabla}_X (W \circ f)) \\
&= (f_* X) g_2(U,W) - g_2(\overset{2}{\nabla}_{f_* X} U, W \circ f) - g_2(U \circ f, \overset{2}{\nabla}_{f_* X} W) \\
&= (X' \circ f) g_2(U,W) - g_2(\overset{2}{\nabla}_{X' \circ f} U, W \circ f) - g_2(U \circ f, \overset{2}{\nabla}_{X' \circ f} W) \\
&= (X' g_2(U,W)) \circ f - g_2(\overset{2}{\nabla}_{X'} U, W) \circ f - g_2(U, \overset{2}{\nabla}_{X'} W) \circ f \\
&= (X' g_2(U,W) - g_2(\overset{2}{\nabla}_{X'} U, W) - g_2(U, \overset{2}{\nabla}_{X'} W)) \circ f \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Not edelim ki,

$$
T : \Gamma TM_1 \times \Gamma_f TM_2 \times \Gamma_f TM_2 \to C^\infty(M_1)
$$

$$
T(X,U,W) = Xg_2(U,W) - g_2(\overset{2}{\nabla}_X U, W) - g_2(U, \overset{2}{\nabla}_X W)
$$

dönüşümü lineerdir. $Y \in \Gamma_f TM_2$ olmak üzere bütün $Y \circ f \in \Gamma_f TM_2$ kümesi $C^\infty(M_1)$ üzerinde $\Gamma_f TM_2$ için lokal baz alanlarını içerir. T dönüşümünün lineerliğinden $\forall X \in \Gamma TM_1$ ve $U, W \in \Gamma_f TM_2$ için $T(X,U,W) = 0$ dır.

(2) $X, Y \in \Gamma TM_1$, $X', Y' \in \Gamma TM_2$ vektör alanlarına f-bağlı olsun. Yani $f_* X = X' \circ f$ ve $f_* Y = Y' \circ f$ olsun. Bu durumda

$$
\overset{2}{\nabla}_X f_* Y = \overset{2}{\nabla}_X (Y' \circ f) = \overset{2}{\nabla}_{f_* X} Y' = \overset{2}{\nabla}_{X' \circ f} Y' = (\overset{2}{\nabla}_{X'} Y') \circ f
$$

dır. Benzer olarak

$$\overset{2}{\nabla}_Y f_*X = (\overset{2}{\nabla}_{Y'}X^{'}) \circ f$$

olur.X ve Y, $X^{'}$ ve $Y^{'}$ ne f- bağlantılı olduğundan

$$f_*[X,Y] = [X^{'},Y^{'}] \circ f$$

dir. Böylece

$$\overset{2}{\nabla}_X f_*Y - \overset{2}{\nabla}_Y f_*X - f_*[X,Y] = (\overset{2}{\nabla}_{X'}Y^{'} - \overset{2}{\nabla}_{Y'}X^{'} - [X^{'},Y^{'}]) \circ f = 0$$

olur. □

Not edelim ki,

$$T : \Gamma TM_1 \times \Gamma TM_1 \to \Gamma_f TM_1$$
$$T(X,Y) = \overset{2}{\nabla}_X f_*Y - \overset{2}{\nabla}_Y f_*X - f_*[X,Y]$$

dönüşümü lineerdir. $Z \in \Gamma TM_2$ için bütün $Z \circ f \in \Gamma_f TM_2$, $C^\infty(M_1)$ üzerinde $\Gamma_f TM_2$ için lokal baz alanlarını içerir. Dolayısıyla bütün $X,Y \in \Gamma TM_1$ için T lineer olduğundan $T(X,Y) = 0$ dır [10].

Tanım 3.3.5. $f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm ve ∇, f boyunca M_2 üzerinde bir konneksiyon olsun. $X,Y \in \Gamma TM_1$, $U \in \Gamma_f TM_2$ için f-boyunca R eğrilik tensörü

$$R : \Gamma TM_1 \times \Gamma TM_1 \times \Gamma_f TM_2 \to \Gamma_f TM_2$$

$$R(X,Y)U = \nabla_X \nabla_Y U - \nabla_Y \nabla_X U - \nabla_{[X,Y]}U$$

olarak tanımlanır [10].

Eğrilik tensörü lineerdir. Gerçekten $h \in C^\infty(M_1)$ için

$$\begin{aligned}
R(X,Y)(hU) &= \nabla_X \nabla_Y (hU) - \nabla_Y \nabla_X (hU) - \nabla_{[X,Y]}(hU) \\
&= \nabla_X [Y(h)U + h\nabla_Y U] - \nabla_Y [X(h)U + h\nabla_X U] - [X,Y](h)U - h\nabla_{[X,Y]}U \\
&= X(Y(h))U + Y(h)\nabla_X U + X(h)\nabla_Y U + h\nabla_X \nabla_Y U - Y(X(h))U \\
&- X(h)\nabla_Y U - Y(h)\nabla_X U - h\nabla_Y \nabla_X U - X(Y(h))U + Y(X(h))U \\
&- h\nabla_{[X,Y]}U \\
&= hR(X,Y)U olur.
\end{aligned}$$

R lineer olduğundan $p_1 \in M_1$ için $R(X,Y)U$ eğrilik tensörünün değeri yalnızca X,Y ve U nun p_1 deki değerlerine bağlıdır. Dolayısıyla,$X,Y \in \Gamma TM_1$,$U \in \Gamma_f TM_2$ olmak üzere $x = X(p_1)$,$y = Y(p_1)$,$u = U(p_1)$ için

$$R(x,y)u = (R(X,Y)U)(p_1)$$

dir.

Önerme 3.3.1. *$f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm ve M_2 üzerinde bir konneksiyon $\overset{2}{\nabla}$ ve eğrilik tensörü $\overset{2}{R}$ olsun. f boyunca $\overset{2}{\nabla}$ nin pullbacki $\overset{2}{\nabla^f}$, eğrilik tensörü $\overset{2}{R^f}$ olsun. $X,Y \in \Gamma TM_1$, $U \in \Gamma_f TM_2$ için*

$$\overset{2}{R}(f_*X, f_*Y)U = \overset{2}{R^f}(X,Y)U$$

olur [10].

İspat. $X,Y \in \Gamma TM_1$,$X',Y' \in \Gamma TM_2$ vektör alanlarına f-bağlantılı olsun. Buradan $f_*X = X' \circ f$ ve $f_*Y = Y' \circ f$ dir. $U' \in \Gamma TM_2$ için $U = U' \circ f$ olsun.

$$\begin{aligned}
\overset{2}{\nabla^f}_X \overset{2}{\nabla^f}_Y U &= \overset{2}{\nabla^f}_X \overset{2}{\nabla^f}_Y (U' \circ f) \\
&= \overset{2}{\nabla^f}_X \overset{2}{\nabla}_{f_*Y} U' \\
&= \overset{2}{\nabla^f}_X \overset{2}{\nabla}_{Y' \circ f} U' \\
&= \overset{2}{\nabla^f}_X ((\overset{2}{\nabla}_{Y'} U') \circ f) \\
&= \overset{2}{\nabla}_{f_*X} \overset{2}{\nabla}_{Y'} U' \\
&= \overset{2}{\nabla}_{X' \circ f} \overset{2}{\nabla}_{Y'} U' \\
&= (\overset{2}{\nabla}_{X'} \overset{2}{\nabla}_{Y'} U') \circ f
\end{aligned}$$

Benzer olarak

$$\overset{2}{\nabla^f}_Y \overset{2}{\nabla^f}_X U = (\overset{2}{\nabla}_{Y'} \overset{2}{\nabla}_{X'} U') \circ f$$

ve

$$\overset{2}{\nabla^f}_{[X,Y]} U = (\overset{2}{\nabla}_{[X',Y']} U') \circ f$$

dir. Böylece

$$\begin{aligned}
\overset{2}{R}{}^{f}(X,Y)U &= \overset{2}{\nabla}{}^{f}{}_{X}\overset{2}{\nabla}{}^{f}{}_{Y}U - \overset{2}{\nabla}{}^{f}{}_{Y}\overset{2}{\nabla}{}^{f}{}_{X}U - \overset{2}{\nabla}{}^{f}{}_{[X,Y]}U \\
&= (\overset{2}{\nabla}_{X'}\overset{2}{\nabla}_{Y'}U' - \overset{2}{\nabla}_{Y'}\overset{2}{\nabla}_{X'}U' - \overset{2}{\nabla}_{[X',Y']}U') \circ f \\
&= (\overset{2}{R}(X',Y')U') \circ f \\
&= \overset{2}{R}(X' \circ f, Y' \circ f)U' \circ f \\
&= \overset{2}{R}(f_*X, f_*Y)U
\end{aligned}$$

$Z \in \Gamma TM_2$ için bütün $Z \circ f$ vektör alanlarının kümesi $C^\infty(M_1)$ üzerinde $\Gamma_f TM_2$ için lokal baz alanlarını içerir. Dolayısıyla $\forall X, Y \in \Gamma TM_1$ ve $\forall U \in \Gamma_f TM_2$ için $\overset{2}{R}$ ve $\overset{2}{R}{}^{f}$ lineer olduğundan $\overset{2}{R}{}^{f}(X,Y)U = \overset{2}{R}(f_*X, f_*Y)U$ olur. □

$f : M_1 \to M_2$ bir dönüşüm olsun. $X \in \Gamma TM_1$ için $f_*X \in \Gamma_f TM_2$ ise

$$f_* : \Gamma TM_1 \to \Gamma_f TM_2$$

bir dönüşümdür [10]. f_* dönüşümü lineerdir. $h \in C^\infty(M_1)$ ve $X, Y \in \Gamma TM_1$ olsun. $\pi_1 : TM_1 \to M_1$ kanonik projeksiyon ve $f_{*\pi_1(X)} : T_{\pi_1(X)}M_1 \to T_{f(\pi_1(X))}M_2$ dönüşümü lineer olduğundan

$$\begin{aligned}
f_*(hX) &= f_{*\pi_1(hX)}h(\pi_1(X))X(\pi_1(X)) \\
&= h(\pi_1(X))f_{*\pi_1(X)}(X(\pi_1(X))) \\
&= hf_*X
\end{aligned}$$

Tanım 3.3.6. $f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ bir dönüşüm olsun. f boyunca $\overset{2}{\nabla}$ konneksiyonunun pullbacki $\overset{2}{\nabla}{}^{f}$ olmak üzere

$$\nabla f_* : \Gamma TM_1 \times \Gamma TM_1 \to \Gamma_f TM_2$$

$$(\nabla f_*)(X,Y) = \overset{2}{\nabla}{}^{f}{}_{X} f_*Y - f_*(\overset{1}{\nabla}_X Y)$$

şeklinde tanımlanan ∇f_* dönüşümüne f dönüşümünün ikinci temel formu denir [10].

İkinci temel form ∇f_* lineerdir. $h \in C^\infty(M_1)$ ve $X,Y \in \Gamma TM_1$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned}
(\nabla f_*)(X,hY) &= \overset{2}{\nabla}{}^f{}_X f_*(hY) - f_*(\overset{1}{\nabla}_X(hY)) \\
&= \overset{2}{\nabla}{}^f{}_X(hf_*Y) - f_*(X(h)Y + h\overset{1}{\nabla}_X Y) \\
&= X(h)(f_*Y) + h\overset{2}{\nabla}{}^f{}_X f_*Y - X(h)f_*Y - hf_*(\overset{1}{\nabla}_X Y) \\
&= h((\overset{2}{\nabla}{}^f{}_X f_*Y) - f_*(\overset{1}{\nabla}_X Y)) \\
&= h(\nabla f_*)(X,Y)
\end{aligned}$$

elde edilir.

$p_1 \in M_1$ noktasında $(\nabla f_*)(X,Y)$ ikinci temel formun değeri yalnızca X ve Y vektör alanlarının $p_1 \in M_1$ deki değerine bağlıdır. Dolayısıyla $X,Y \in \Gamma TM_1$,$X(p_1) = x$ ve $Y(p_1) = y$ olmak üzere

$$(\nabla f_*)(x,y) = (\nabla f_*)(X,Y)(p_1)$$

olarak yazılabilir.

Önerme 3.3.2. *$f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ bir dönüşüm olsun. $\forall X,Y \in \Gamma TM_1$ için*

$$(\nabla f_*)(X,Y) = (\nabla f_*)(Y,X)$$

dır.Yani ∇f_* simetriktir [10].

İspat.

$$\begin{aligned}
(\nabla f_*)(X,Y) &= \overset{2}{\nabla}{}^f{}_X f_*Y - f_*(\overset{1}{\nabla}_X Y) \\
&= \overset{2}{\nabla}{}^f{}_Y f_*X + f_*[X,Y] - f_*(\overset{1}{\nabla}_Y X) - f_*[X,Y] \\
&= \overset{2}{\nabla}{}^f{}_Y f_*X - f_*(\overset{1}{\nabla}_Y X) \\
&= (\nabla f_*)(Y,X)
\end{aligned}$$

olur. □

Önerme 3.3.3. *$\varphi : M \to N$ ve $\psi : N \to P$ dönüşüm olsunlar. $\psi \circ \varphi$ dönüşümünün ikinci temel formu*

$$\nabla(\psi \circ \varphi)_* = \psi_*(\nabla \varphi_*) + \nabla \psi_*(\varphi_*, \varphi_*)$$

dır [10].

İspat. $\psi\circ\varphi : M\to P$ olduğundan $X,Y\in\Gamma TM$ için

$$\nabla(\psi\circ\varphi)_*(X,Y)=\nabla_X^{\psi\circ\varphi}(\psi\circ\varphi)_*(Y)-(\psi\circ\varphi)_*(\nabla_X^M Y)$$

dır. Diğer taraftan $(\psi\circ\varphi)_*=\psi_*\circ\varphi_*$ olduğundan

$$\begin{aligned}
\nabla(\psi\circ\varphi)_*(X,Y) &= \nabla_X^{\psi\circ\varphi}(\psi_*\circ\varphi_*)(Y)-(\psi_*\circ\varphi_*)(\nabla_X^M Y)\\
&= \nabla_X^{\psi\circ\varphi}\psi_*(\varphi_*(Y))-\psi_*(\varphi_*(\nabla_X^M Y))\\
&= \nabla_X^{\psi\circ\varphi}\psi_*(\varphi_*(Y))-\psi_*(\nabla_X^{\varphi}\varphi_*(Y)-\nabla\varphi_*(X,Y))\\
&= \nabla_X^{\psi\circ\varphi}\psi_*(\varphi_*(Y))-\psi_*(\nabla_X^{\varphi}\varphi_*(Y))+\psi_*(\nabla\varphi_*(X,Y))\\
&= \nabla^P_{(\psi_*\circ\varphi_*)(X)}\psi_*(\varphi_*(Y))-\psi_*(\nabla^N_{\varphi_*(X)}\varphi_*(Y))+\psi_*(\nabla\varphi_*(X,Y))\\
&= \nabla^{\psi}_{\varphi_*(X)}\psi_*(\varphi_*(Y))-\psi_*(\nabla^N_{\varphi_*(X)}\varphi_*(Y))+\psi_*(\nabla\varphi_*(X,Y))\\
&= \psi_*(\nabla\varphi_*(X,Y))+\nabla\psi_*(\varphi_*(X),\varphi_*(Y))\\
&= (\psi_*(\nabla\varphi_*)+\nabla\psi_*(\varphi_*,\varphi_*))(X,Y)
\end{aligned}$$

olur. □

Tanım 3.3.7. $f:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ bir dönüşüm olsun. Belirli $\forall X\in\Gamma TM_1$ için ikinci temel form

$$\nabla_X f_*:\Gamma TM_1\to\Gamma_f TM_2$$

$$(\nabla_X f_*)(Y)=(\nabla f_*)(X,Y)$$

lineer dönüşümüyle tanımlanır [10].

$\nabla_X f_*$ dönüşümünün lineerliği ∇f_* dönüşümünün lineerliğinden kolayca görülebilir. $(\nabla f_*)(X,Y)$ dönüşümünün $p_1\in M_1$ noktasındaki değeri X,Y vektör alanlarının $p_1\in M_1$ noktasındaki değerine bağlı olduğundan $\forall x\in T_{p_1}M_1$ için $X,Y\in\Gamma TM_1$ ve $X(p_1)=x$,$Y(p_1)=y$ olmak üzere

$$\nabla_x f_*:T_{p_1}M_1\to T_{f(p_1)}M_2$$

$$(\nabla_x f_*)(y)=((\nabla_X f_*)(Y))(p_1)=(\nabla f_*)(X,Y)(p_1)$$

bir lineer dönüşüm tanımlanabilir. Diğer taraftan $f:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ bir dönüşümü $\forall p_1\in M_1$ için

$$f_{*p_1}:(T_{p_1}M_1,g_{1_{p_1}})\to(T_{f(p_1)}M_2,g_{2_{f(p_1)}})$$

ile tanımlanan dönüşüm $(T_{p_1}M_1,g_{1_{p_1}})$ ve $(T_{f(p_1)}M_2,g_{2_{f(p_1)}})$ iç çarpım uzayları arasında bir lineer dönüşümdür.

Tanım 3.3.8. $f:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ bir dönüşüm olsun. f_* dönüşümünün kare normu

$$\|f_*\|^2:M_1\to\mathbb{R}$$

$$\|f_*\|^2(p_1)=\|f_{*p_1}\|^2$$

şeklinde tanımlanan bir dönüşümdür [10].

$\{X_1,...,X_{n_1}\}$, TM_1 için lokal ortonormal çatı olsun.

$$\|f_*\|^2=\sum_{i=1}^{n_1}g_2(f_*X_i,f_*X_i)$$

şeklinde bir dönüşüm olduğundan $\|f\|^2$, M_1 üzerinde diferensiyellenebilir bir dönüşümdür.

Lemma 3.3.1. *$f:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ bir dönüşüm olsun.$\{x_1,...,x_{n_1}\}$,$(T_{p_1}M_1,g_{1_{p_1}})$ için bir ortonormal baz ve (M_1,g_1) üzerindeki $\|f_*\|^2$ nin gradyenti $\overset{1}{\nabla}\|f_*\|^2$ olmak üzere*

$$(\overset{1}{\nabla}\|f_*\|^2)(p_1)=2\sum_{i=1}^{n_1}({}^*(\nabla_{x_i}f_*)\circ f_{*p_1})x_i$$

dir [10]. ${}^*(\nabla_{x_i}f_*)$, $\nabla_{x_i}f_*$ dönüşümünün adjoint dönüşümüdür.

İspat. $\{x_1,...,x_{n_1}\}$, $(T_{p_1}M_1,g_{1_{p_1}})$ için bir ortonormal baz ve $\{X_1,...,X_{n_1}\}$,$\{x_1,...,x_{n_1}\}$ in

$p_1 \in M_1$ noktası yakınındaki bir çatıya genişlemesi olsun. $X \in \Gamma TM_1$ için,

$$
\begin{aligned}
g_1((\overset{1}{\nabla}\|f_*\|^2)(p_1), X(p_1)) &= X(p_1)\|f_*\|^2 \\
&= [\sum_{i=1}^{n_1} X(g_2(f_*X_i, f_*X_i))](p_1) \\
&= 2[\sum_{i=1}^{n_1} g_2(\overset{2}{\nabla}_X f_*X_i, f_*X_i)](p_1) \\
&= 2[\sum_{i=1}^{n_1} g_2((\nabla f_*)(X, X_i), f_*X_i)](p_1) \\
&= 2[\sum_{i=1}^{n_1} g_2((\nabla f_*)(X_i, X), f_*X_i)](p_1) \\
&= 2[\sum_{i=1}^{n_1} g_2((\nabla_{X_i} f_*)X, f_*X_i)](p_1) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n_1} g_2((\nabla_{x_i} f_*)X(p_1), f_{*p_1}x_i) \\
&= 2\sum_{i=1}^{n_1} g_1(X(p_1), ({}^*(\nabla_{x_i} f_*) \circ f_{*p_1})x_i) \\
&= g_1(2\sum_{i=1}^{n_1} g_1({}^*(\nabla_{x_i} f_*) \circ f_{*p_1})x_i, X(p_1))
\end{aligned}
$$

olur. İlk ve son ifadeden

$$(\overset{1}{\nabla}\|f_*\|^2)(p_1) = 2\sum_{i=1}^{n_1} ({}^*(\nabla_{x_i} f_*) \circ f_{*p_1})x_i$$

elde edilir. □

Sonuç 3.3.1. $f : (M, g) \to \mathbb{R}$ bir dönüşüm olsun. (M, g) üzerinde sırasıyla f ve $g(\nabla f, \nabla f)$ in gradyentleri ∇f ve $\nabla g(\nabla f, \nabla f)$ olmak üzere

$$\nabla g(\nabla f, \nabla f) = 2\nabla_{\nabla f}\nabla f$$

dir [10].

İspat. Önceki Lemmada $(M_1, g_1) = (M, g)$ ve $(M_2, g_2) = (\mathbb{R}, dt \bigotimes dt)$ olarak alırsak $X \in \Gamma TM$ ve $p_1 = p \in M_1 = M$ için

$$f_*X = g(\nabla f, X)\frac{d}{dt} \circ f$$

olup

$$\|f_*\|^2(p) = g(\nabla f, \nabla f)(p)$$

şeklinde veya

$$2\sum_{i=1}^{n_1}({}^*(\nabla_{x_i} f_*) \circ f_{*p_1})x_i = 2(\nabla_{\nabla f}\nabla f)(p)$$

olarak gösterilebilir. Yukarıdaki Lemmadan bu eşitlikler açıktır. Diğer taraftan $X \in \Gamma TM$ için

$$\begin{aligned} g(\nabla g(\nabla f, \nabla f), X) &= Xg(\nabla f, \nabla f) \\ &= 2g(\nabla_X \nabla f, \nabla f) \\ &= 2g(h_f(X), \nabla f) \\ &= 2g(X, h_f(\nabla f)) \\ &= 2g(X, \nabla_{\nabla f}\nabla f) \\ &= 2g(\nabla_{\nabla f}\nabla f, X) \end{aligned}$$

şeklinde de elde edilir. □

Tanım 3.3.9. $f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ dönüşümü için ikinci temel form sıfır ise f dönüşümüne afin dönüşüm denir [10].

$f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ bir dönüşüm $I \subseteq \mathbb{R}$ bir açık aralık olmak üzere $\gamma : I \to M_1$ bir eğri olsun. γ boyunca her X vektör alanı için $f \circ \gamma : I \to M_2$ dönüşümü de bir eğri tanımlar. Dolayısıyla $t \in I$ için $f \circ \gamma$ boyunca f_*X bir vektör alanıdır ve

$$(f_*X)(t) = f_{*\gamma(t)}X(t)$$

dir. Her $\gamma : I \to M_1$ eğrisi ve γ boyunca paralel her X vektör alanı için f_*X, $f \circ \gamma : I \to M_2$ eğrisi boyunca paralel ise f paralel ötelemeyi korur denir [10].

Önerme 3.3.4. *$f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ bir dönüşüm olsun. f dönüşümünün afin olması için gerek ve yeter şart f dönüşümünün paralel ötelemeyi korumasıdır [10].*

İspat. $I \subseteq \mathbb{R}$ açık aralık, $\gamma : I \to M_1$ bir eğri ve X, γ boyunca bir paralel vektör alanı olsun. $X = X^{'} \circ \gamma$ olacak şekilde $X^{'}$, M_1 üzerinde lokal tanımlı vektör alanı olsun. Bu takdirde

$$f_* X = (f_* X^{'}) \circ \gamma$$

dir. Buradan

$$\begin{aligned}
\overset{2}{\nabla}_{\frac{d}{dt}} f_* X &= \overset{2}{\nabla}_{\frac{d}{dt}} ((f_* X^{'}) \circ \gamma) \\
&= \overset{2}{\nabla}_{\gamma_* \frac{d}{dt}} f_* X^{'} \\
&= \overset{2}{\nabla}_{\dot{\gamma}} f_* X^{'} \\
&= (\nabla f_*)(\dot{\gamma}, X^{'} \circ \gamma) + f_*(\overset{1}{\nabla}_{\dot{\gamma}} X^{'}) \\
&= (\nabla f_*)(\dot{\gamma}, X) + f_*(\overset{1}{\nabla}_{\frac{d}{dt}} (X^{'} \circ \gamma)) \\
&= (\nabla f_*)(\dot{\gamma}, X) + f_*(\overset{1}{\nabla}_{\frac{d}{dt}} X) \\
&= (\nabla f_*)(\dot{\gamma}, X)
\end{aligned}$$

olur. Burada ispat biter. □

Tanım 3.3.10. $\gamma : I \to M_1$, (M_1, g_1) manifoldunun bir geodeziği ve $f \circ \gamma : I \to M_2$, (M_2, g_2) nin bir geodeziği ise $f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ dönüşümüne geodeziği geodeziğe gönderen dönüşüm denir [10].

Önerme 3.3.5. $f : (M_1, g_1) \to (M_2, g_2)$ *bir dönüşüm olsun.* f *dönüşümünün afin olması için gerek ve yeter şart* f *dönüşümünün geodeziği geodeziğe göndermesidir [10].*

İspat. (M_1, g_1) manifoldunun bir geodeziği $\gamma : I \to M_1$ ve $\alpha = f \circ \gamma$ olsun. Bu takdirde $\dot{\gamma}$, γ boyunca paralel bir vektör alanı ve $\dot{\alpha} = f_* \dot{\gamma}$, α boyunca bir vektör alanı olduğundan

$$\overset{2}{\nabla}_{\frac{d}{dt}} \dot{\alpha} = (\nabla f_*)(\dot{\gamma}, \dot{\gamma})$$

olur. ∇f_* simetrik olduğundan f dönüşümünün afin olması için gerek ve yeter şart f dönüşümünün geodeziği geodeziğe göndermesidir. □

Tanım 3.3.11. $f:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ bir dönüşüm olsun. $\{X_1,...,X_{n_1}\}$, TM_1 için lokal ortonormal çatı olsun. f dönüşümünün tension alanı $\tau(f)$,∇f_* ın izine eşittir, yani

$$\tau(f)=\sum_{i=1}^{n_1}(\nabla f_*)(X_i,X_i)$$

dir. Bir $f:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ dönüşümünün tension alanı f boyunca bir vektör alanıdır, yani $\tau(f)\in\Gamma_f TM_2$ dir [10].

Tanım 3.3.12. Eğer $\tau(f)=0$ ise $f:(M_1,g_1)\to(M_2,g_2)$ dönüşümüne harmonik dönüşüm denir [10].

$f:(M,g)\to(\mathbb{R},dt\bigotimes dt)$ olmak üzere $\forall X,Y\in\Gamma TM$ için

$$(\nabla f_*)(X,Y)=H_f(X,Y)\frac{d}{dt}\circ f$$

olup her iki tarafın toplamından

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n_1}(\nabla f_*)(X_i,X_i) &= \sum_{i=1}^{n_1}H_f(X_i,X_i)\frac{d}{dt}\circ f\\ &= \sum_{i=1}^{n_1}g(h_f(X_i),X_i)\frac{d}{dt}\circ f\\ &= \sum_{i=1}^{n_1}g(\nabla_{X_i}\nabla f,X_i)\frac{d}{dt}\circ f\\ &= (div\nabla f)\frac{d}{dt}\circ f\\ &= -(\Delta f)\frac{d}{dt}\circ f\end{aligned}$$

dolayısıyla

$$\tau(f)=-(\Delta f)\frac{d}{dt}\circ f$$

olur. Böylece f afindir $\Leftrightarrow$ $H_f=0$ ve f harmoniktir $\Leftrightarrow$ f, (M,g) üzerinde harmonik fonksiyondur.

Önerme 3.3.6. *$I\subseteq\mathbb{R}$ bir açık aralık ve (M,g) bir Riemann manifoldu olsun. Bu takdirde her $f:(I,dt\bigotimes dt)\to(M,g)$ harmonik dönüşümü afindir ve $f:I\to M$ dönüşümüde (M,g) nin bir geodeziğidir [10].*

İspat. Tension alanının tanımından

$$\tau(f) = (\nabla f_*)(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt})$$

dır. Böylece f harmonik ise f afindir. Diğer taraftan

$$\begin{aligned} 0 = \tau(f) &= (\nabla f_*)(\frac{d}{dt}, \frac{d}{dt}) \\ &= \overset{M}{\nabla}_{\frac{d}{dt}} f_* \frac{d}{dt} - f_*(\overset{I}{\nabla}_{\frac{d}{dt}} \frac{d}{dt}) \\ &= \nabla_{\frac{d}{dt}} \dot{f} \end{aligned}$$

olur. Bu ise f dönüşümünün bir geodezik olduğunu gösterir. □

3.4 Yatay Konform Submersiyonlar

Bu altbölümde yatay konform submersiyonların geometrisi incelenmekte ve temel özellikler sunulmaktadır.

Öncelikle not edelim ki, Riemann submersiyonları yatay konform dönüşümlerin $\lambda \equiv 1$ sabit dilationuna sahip olmasıyla elde edilen özel bir durumdur.

$\pi : M \longrightarrow N$ bir submersiyon olsun. $\forall x \in M$ için $d\pi(E_x) = \check{E}_{\pi(x)}$ şartını sağlayan N üzerinde bir $\check{E}$ vektör alanı varsa M üzerindeki E vektör alanına izdüşürülebilir denir. Bu durumda E ve $\check{E}$ vektör alanlarına π-bağlantılıdır denir. (M, g) üzerindeki bir Y yatay vektör alanı izdüşürülebilir ise temel vektör alanıdır. Dolayısıyla $\check{Z}$, N üzerinde bir vektör alanıysa M üzerinde öyle bir tek temel vektör alanı vardır ki Z ve $\check{Z}$ π-bağlantılıdır. Z vektör alanı , $\check{Z}$ vektör alanının yatay lifti olarak adlandırılır [11].

Tanım 3.4.1. (M^m, g) ve (N^n, h) Riemann manifoldları ve $\pi : M \longrightarrow N$ bir diferensiyellenebilir submersiyon olsun. Her $X, Y \in \Gamma((çekd\pi_*)^{\perp})$ için

$$\lambda^2 g(X, Y) = h(d\pi_*(X), d\pi_*(Y))$$

olacak şekilde bir pozitif λ fonksiyonu varsa π submersiyonuna yatay konform submersiyon denir [12].

Örnek 3.4.1. (R^4, g_4) ve (R^2, g_2) standart iç çarpımları ile verilen Öklidyen uzaylar olsun. $F : (R^4, g_4) \longrightarrow (R^2, g_2)$ diferensiyellenebilir dönüşümü $F(x_1, x_2, x_3, x_4) = (sinhx_3 sinx_4, coshx_3 cosx_4)$ şeklinde tanımlansın. Buradan

$$J(F,p) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cosh x_3 \sin x_4 & \sinh x_3 \cos x_4 \\ 0 & 0 & \sinh x_3 \cos x_4 & -\cosh x_3 \sin x_4 \end{pmatrix}$$

türev matrisi elde edilir. Bu durumda

$$çekF_* = \{Z_1 = \frac{\partial}{\partial x_1}, Z_2 = \frac{\partial}{\partial x_2}\},$$

$$(çekF_*)^{\perp} = \{Z_3 = \frac{\partial}{\partial x_3}, Z_4 = \frac{\partial}{\partial x_4}\}$$

olup $rankF_* = boyR^2 = 2$ dir. F bir submersiyondur. Doğrudan hesaplamalarla $\{\frac{\partial}{\partial y_1}, \frac{\partial}{\partial y_2}\}$, (R^2, g_2) nin standart bazı

$$F_* Z_3 = coshx_3 sinx_4 \frac{\partial}{\partial y_1} + sinhx_3 cosx_4 \frac{\partial}{\partial y_2},$$

$$F_* Z_4 = sinhx_3 cosx_4 \frac{\partial}{\partial y_1} - coshx_3 sinx_4 \frac{\partial}{\partial y_2}$$

elde ederiz. Diğer taraftan

$$g_2(F_* Z_3, F_* Z_3) = (cosh^2 x_3 sin^2 x_4 + sinh^2 x_3 cos^2 x_4) g_4(Z_3, Z_3),$$

$$g_2(F_* Z_4, F_* Z_4) = (cosh^2 x_3 sin^2 x_4 + sinh^2 x_3 cos^2 x_4) g_4(Z_4, Z_4)$$

ve

$$g_2(F_* Z_3, F_* Z_4) = 0$$

olduğundan F dönüşümü $\lambda^2 = cosh^2 x_3 sin^2 x_4 + sinh^2 x_3 cos^2 x_4$ olan yatay konform submersiyondur.

Önerme 3.4.1. $\pi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ *dönüşümü dilationu* λ *olan bir yatay konform submersiyon olsun.* $X, Y \in \Gamma TM^{\mathcal{H}}$ *için*

$$A_X Y = \frac{1}{2}\{\mathcal{V}[X,Y] - \lambda^2 g(X,Y) grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2})\} \tag{3.4.1}$$

dir[11].

İspat. X,Y temel vektör alanları ve $\{V_{n+1},...,V_m\}$ dikey distribüsyon için bir lokal ortonormal çatı olsun. Koszul özdeşliğini kullanırsak,

$$\begin{aligned} A_XY &= \mathcal{V}\nabla_XY = \sum_{i=n+1}^{m} g(\nabla_XY,V_i)V_i \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i=n+1}^{m}\{Xg(Y,V_i)+Yg(V_i,X)-V_ig(X,Y) \\ &- g(X,[Y,V_i])+g(Y,[V_i,X])+g(V_i,[X,Y])\}V_i \\ &= \frac{1}{2}\{\mathcal{V}[X,Y]-grad_{\mathcal{V}}(g(X,Y))\} \end{aligned} \tag{3.4.2}$$

elde edilir. X,Y temel vektör alanı olduğundan $V_i,[X,V_i],[Y,V_i]$ dikeydirler. Şimdi,

$$\begin{aligned} grad_{\mathcal{V}}(g(X,Y)) &= grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2}h(\check{X},\check{Y})) \\ &= h(\check{X},\check{Y})grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2}) \\ &= \lambda^2 g(X,Y)grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2}) \end{aligned} \tag{3.4.3}$$

bulunur. (3.4.3) eşitliği (3.4.2) de yerine yazılırsa istenen ifade bulunmuş olur. □

Eğer yatay distribüsyon $\mathcal{H}$ integrallenebilirse (M,g) manifoldu üzerinde bir foliasyon elde ederiz. Şimdi, π dönüşümünün yatay konformluğunun $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ foliasyonu için önemli olan bazı geometrik sonuçları verelim.

Önerme 3.4.2. $\pi:(M,g)\longrightarrow(N,h)$ *dönüşümü integrallenebilir yatay distribüsyonu* $\mathcal{H}$ *olan bir yatay konform submersiyon olsun.* $\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ *yatay foliasyonu* (M,g) *de total umbiliktir [11].*

İspat. X,Y iki yerel yatay vektör alanı olsun. Yatay distribüsyon integrallenebilir olduğundan $\mathcal{V}[X,Y]=0$ dır. Dolayısıyla Önerme 3.4.1. den

$$A_XY=-\frac{\lambda^2}{2}g(X,Y)grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2})$$

elde edilir. Bir $L\in\mathcal{F}_{\mathcal{H}}$ lifinin ikinci temel formu σ_L,

$$\sigma_L(X,Y)=\mathcal{V}\nabla_XY=A_XY=-\frac{\lambda^2}{2}g(X,Y)grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2})$$

şeklinde verilir. Dolayısıyla L, (M,g) nin bir total umbilik altmanifoldudur. □

Lemma 3.4.1. *(M,g) bir Riemann manifoldu ve $f: M \longrightarrow \mathbb{R}$ dönüşümü de M üzerinde bir fonksiyon olsun. $X,Y \in \Gamma TM$ ise,*

$$g(\nabla_X grad(f),Y) = g(\nabla_Y grad(f),X)$$

dir [11].

İspat. $X,Y \in \Gamma TM$ için

$$\begin{aligned} g(\nabla_X grad(f),Y) &- g(\nabla_Y grad(f),X) \\ &= X(Y(f)) - g(grad(f),\nabla_X Y) - Y(X(f)) + g(grad(f),\nabla_Y X) \\ &= X(Y(f)) - Y(X(f)) - [X,Y](f) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. □

Şimdi kaynak ve hedef manifoldların eğrilikleri arasındaki ilişkiler incelenecektir. Aşağıdaki Lemma doğrudan işlemlerin bir sonucu olarak elde edilmektedir.

Lemma 3.4.2. *$m \geq 2$ ve (M^m,g), $(M^m,\bar{g})$ iki Riemann manifoldu olsun. Levi-Civita konneksiyonları sırasıyla ∇, $\bar{\nabla}$ ve eğrilik tensörleri de R, $\bar{R}$ olsun. Eğer $\bar{g} = \lambda^2 g$ ise*

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Z,H) &= \frac{1}{\lambda^2}\bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z,H) \\ &+ \frac{\lambda^2}{2}[g(X,Z)g(\nabla_Y grad(\frac{1}{\lambda^2}),H) - g(Y,Z)g(\nabla_X grad(\frac{1}{\lambda^2}),H) \\ &+ g(Y,H)g(\nabla_X grad(\frac{1}{\lambda^2}),Z) - g(X,H)g(\nabla_Y grad(\frac{1}{\lambda^2}),Z)] \\ &+ \frac{\lambda^4}{4}[(g(X,H)g(Y,Z) - g(Y,H)g(X,Z)).|grad(\frac{1}{\lambda^2})|^2 \\ &+ g(X(\frac{1}{\lambda^2})Y - Y(\frac{1}{\lambda^2})X, H(\frac{1}{\lambda^2})Z - Z(\frac{1}{\lambda^2})H)] \end{aligned} \tag{3.4.4}$$

dir [11].

Lemma 3.4.3. *$m > n \geq 2$ ve $(M^m,\bar{g})$, (N^n,h) iki Riemann manifoldu olsun. M ve N manifoldlarının Levi-Civita konneksiyonları sırasıyla $\bar{\nabla}$, ∇^N ve eğrilik tensörleri de $\bar{R}$, R^N olsun. $\bar{\pi}: (M^m,\bar{g}) \longrightarrow (N^n,h)$ dönüşümü bir Riemann submersiyon ise,*

$$\begin{aligned} \bar{g}(\bar{R}(X,Y)Z,H) &= h(R^N(\check{X},\check{Y})\check{Z},\check{H}) + \frac{1}{4}[\bar{g}(\mathcal{V}[X,Z],\mathcal{V}[Y,H]) \\ &- \bar{g}(\mathcal{V}[Y,Z],\mathcal{V}[X,H]) + 2\bar{g}(\mathcal{V}[X,Y],\mathcal{V}[Z,H])] \end{aligned} \tag{3.4.5}$$

dir[11].

Teorem 3.4.1. *$m > n \geq 2$ ve (M^m, g), (N^n, h) iki Riemann manifoldu olsun. Levi-Civita konneksiyonları sırasıyla ∇, ∇^N ve eğrilik tensörleri de R, R^N olsun. $\pi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ dönüşümü dilationu $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ olan bir yatay konform submersiyon ve π nin liflerinin eğrilik tensörü de $\hat{R}$ olsun. $X, Y, Z, H \in \Gamma TM^H$ ve $U, V, W, F \in \Gamma TM^V$ için*

$$
\begin{aligned}
\textbf{(1)} g(R(U,V)W,F) &= g(\hat{R}(U,V)W,F) + g(T_U W, T_V F) - g(T_V W, T_U F) && (3.4.6)\\
\textbf{(2)} g(R(U,V)W,X) &= g((\nabla_U T)_V W, X) - g((\nabla_V T)_U W, X), && (3.4.7)\\
\textbf{(3)} g(R(U,X)Y,V) &= g((\nabla_U A)_X Y, V) + g(A_X U, A_Y V) - g((\nabla_X T)_U Y, V)\\
&- g(T_V Y, T_U X) + \lambda^2 g(A_X Y, U) g(V, grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2})), && (3.4.8)\\
\textbf{(4)} g(R(X,Y)Z,U) &= g((\nabla_X A)_Y Z, U) - g((\nabla_Y A)_X Z, U)\\
&- g(T_U Z, \mathcal{V}[X,Y]), && (3.4.9)\\
\textbf{(5)} g(R(X,Y)Z,H) &= \frac{1}{\lambda^2} h(R^N(\check{X},\check{Y})\check{Z},\check{H}) + \frac{1}{4}[g(\mathcal{V}[X,Z], \mathcal{V}[Y,H])\\
&- g(\mathcal{V}[Y,Z], \mathcal{V}[X,H]) + 2g(\mathcal{V}[X,Y], \mathcal{V}[Z,H])]\\
&+ \frac{\lambda^2}{2}[g(X,Z) g(\nabla_Y grad(\frac{1}{\lambda^2}), H) - g(Y,Z) g(\nabla_X grad(\frac{1}{\lambda^2}), H)\\
&+ g(Y,H) g(\nabla_X grad(\frac{1}{\lambda^2}), Z) - g(X,H) g(\nabla_Y grad(\frac{1}{\lambda^2}), Z)]\\
&+ \frac{\lambda^4}{4}[(g(X,H) g(Y,Z) - g(Y,H) g(X,Z)).|grad(\frac{1}{\lambda^2})|^2\\
&+ g(X(\frac{1}{\lambda^2})Y - Y(\frac{1}{\lambda^2})X, H(\frac{1}{\lambda^2})Z - Z(\frac{1}{\lambda^2})H)]. && (3.4.10)
\end{aligned}
$$

dir [11].

İspat. (1) Eşitlik (3.4.6) ve (3.4.7), göstermektedirki π yatay konform submersiyon olduğunda da eşitlikler değişmemiştir. Eğrilik tensörünün tanımından

$$R(U,V)W = \nabla_U \nabla_V W - \nabla_V \nabla_U W - \nabla_{[U,V]} W \tag{3.4.11}$$

dır. Tanım 2.3.9. , Tanım 2.3.10. ve Lemma 2.3.1. den eğrilik tensörünün

$$\begin{aligned}
\nabla_U \nabla_V W &= \nabla_U T_V W + \nabla_U \hat{\nabla}_V W \\
&= \mathcal{H}\nabla_U T_V W + T_U T_V W + T_U \hat{\nabla}_V W + \hat{\nabla}_U \hat{\nabla}_V W, \qquad (3.4.12) \\
\nabla_V \nabla_U W &= \nabla_V T_U W + \nabla_V \hat{\nabla}_U W \\
&= \mathcal{H}\nabla_V T_U W + T_V T_U W + T_V \hat{\nabla}_U W + \hat{\nabla}_V \hat{\nabla}_U W, \qquad (3.4.13) \\
\nabla_{[U,V]} W &= T_{[U,V]} W + \hat{\nabla}_{[U,V]} W \\
&= \mathcal{H}\nabla_{[U,V]} W + \hat{\nabla}_{[U,V]} W \qquad (3.4.14)
\end{aligned}$$

bileşenleri elde edilir. (3.4.12), (3.4.13) ve (3.4.14) denklemleri (3.4.11) de yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
R(U,V)W &= \mathcal{H}\nabla_U T_V W + T_U T_V W + T_U \hat{\nabla}_V W + \hat{\nabla}_U \hat{\nabla}_V W \\
&- \mathcal{H}\nabla_V T_U W - T_V T_U W - T_V \hat{\nabla}_U W - \hat{\nabla}_V \hat{\nabla}_U W \\
&- \mathcal{H}\nabla_{[U,V]} W - \hat{\nabla}_{[U,V]} W \qquad (3.4.15)
\end{aligned}$$

denkleminin her iki yanını F ile çarparsak

$$\begin{aligned}
g(R(U,V)W,F) &= g(\hat{\nabla}_U \hat{\nabla}_V W - \hat{\nabla}_V \hat{\nabla}_U W - \hat{\nabla}_{[U,V]} W, F) \\
&+ g(T_U T_V W, F) - g(T_V T_U W, F) \\
&= g(\hat{R}(U,V)W,F) + g(T_V F, T_U W) - g(T_U F, T_V W)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(2) (3.4.15) denkleminin her iki yanını X ile çarparsak

$$\begin{aligned}
g(R(U,V)W,X) &= g(\mathcal{H}\nabla_U T_V W, X) + g(T_U \hat{\nabla}_V W, X) - g(\mathcal{H}\nabla_V T_U W, X) \\
&- g(T_V \hat{\nabla}_U W, X) - g(\mathcal{H}\nabla_{[U,V]} W, X) \qquad (3.4.16)
\end{aligned}$$

olur. Bu son eşitlikteki $\mathcal{H}\nabla_{[U,V]} W$ ifadesini açacak olursak

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\nabla_{[U,V]} W &= \mathcal{H}\nabla_{\nabla_U V} W - \mathcal{H}\nabla_{\nabla_V U} W \\
&= T_{\nabla_U V} W - T_{\nabla_V U} W \qquad (3.4.17)
\end{aligned}$$

elde edilir. (3.4.16) ve (3.4.17) denklemlerinden

$$\begin{aligned} g(R(U,V)W,X) &= g(\nabla_U T_V W - T_{\nabla_U V} W - T_V \nabla_U W, X) \\ &- g(\nabla_V T_U W - T_{\nabla_V U} W - T_U \nabla_V W, X) \\ &= g((\nabla_U T)_V W, X) - g((\nabla_V T)_U W, X) \end{aligned}$$

olur.

(3) $X,Y \in \Gamma TM^{\mathcal{B}}$ ve $U,V \in \Gamma TM^{\mathcal{V}}$ için,

$$\begin{aligned} \mathcal{V}R(U,X)Y &= \mathcal{V}\nabla_U \mathcal{V}\nabla_X Y + \mathcal{V}\nabla_U \mathcal{H}\nabla_X Y - \mathcal{V}\nabla_X \mathcal{V}\nabla_U Y \\ &- \mathcal{V}\nabla_X \mathcal{H}\nabla_U Y - \mathcal{V}\nabla_{[U,X]} Y \\ &= \nabla_U (A_X Y) + T_U(\mathcal{H}\nabla_X Y) - \nabla_X (T_U Y) \\ &- A_X(\mathcal{H}\nabla_U Y) - T_{\mathcal{V}[U,X]} Y \end{aligned}$$

elde edilir. Eşitliğin her iki yanını V ile çarparsak

$$\begin{aligned} g(R(U,X)Y,V) &= g(\nabla_U (A_X Y), V) + g(T_U(\mathcal{H}\nabla_X Y), V) - g(\nabla_X (T_U Y), V) \\ &- g(A_X(\mathcal{H}\nabla_U Y), V) - g(T_{\mathcal{V}[U,X]} Y, V) \end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikte T ve A temel tensörlerinin özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned} g(R(U,X)Y,V) &= g((\nabla_U A)_X Y, V) + g(A_{\nabla_U X} Y, V) \\ &- g((\nabla_X T)_U Y, V) - g(T_{\nabla_X U} Y, V) \\ &= g((\nabla_U A)_X Y, V) - g(A_Y(\mathcal{H}\nabla_X U), V) \\ &- \lambda^2 g(Y, \nabla_X U) g(grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2}), V) \\ &- g((\nabla_X T)_U Y, V) - g(T_V Y, T_U X) \\ &= g((\nabla_U A)_X Y, V) + g(A_X U, A_Y V) - g((\nabla_X T)_U Y, V) \\ &- g(T_V Y, T_U X) + \lambda^2 g(A_X Y, U) g(V, grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2})) \end{aligned}$$

olur.

(4) $X,Y,Z \in \Gamma TM^{\mathcal{B}}$ seçelim.

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}R(X,Y)Z &= \mathcal{V}\nabla_X\mathcal{V}\nabla_Y Z + \mathcal{V}\nabla_X\mathcal{H}\nabla_Y Z - \mathcal{V}\nabla_Y\mathcal{V}\nabla_X Z \\
&- \mathcal{V}\nabla_Y\mathcal{H}\nabla_X Z - \mathcal{V}\nabla_{\mathcal{H}[X,Y]}Z \\
&= \mathcal{V}\nabla_X(A_Y Z) + A_X(\mathcal{H}\nabla_Y Z) - \mathcal{V}\nabla_Y(A_X Z) \\
&- A_Y(\mathcal{H}\nabla_X Z) - A_{\mathcal{H}[X,Y]}Z - T_{\mathcal{V}[X,Y]}Z
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafı U ile çarparsak

$$\begin{aligned}
g(R(X,Y)Z,U) &= g(\nabla_X(A_Y Z),U) + g(A_X(\mathcal{H}\nabla_Y Z,U) \\
&- g(\nabla_Y(A_X Z),U) - g(A_Y(\mathcal{H}\nabla_X Z),U) \\
&- g(A_{\mathcal{H}[X,Y]}Z,U) - g(T_{\mathcal{V}[X,Y]}Z,U) \\
&= g((\nabla_X A)_Y Z),U) + g(A_{\nabla_X Y}Z,U) \\
&- g((\nabla_Y A)_X Z,U) - g(A_{\nabla_Y X}Z,U) \\
&- g(A_{[X,Y]}Z,U) - g(T_Z\mathcal{V}[X,Y],U) \\
&= g((\nabla_X A)_Y Z),U) - g((\nabla_Y A)_X Z,U) + g(T_Z U,\mathcal{V}[X,Y]) \\
&= g((\nabla_X A)_Y Z),U) - g((\nabla_Y A)_X Z,U) + g(T_U Z,\mathcal{V}[X,Y])
\end{aligned}$$

elde edilir.

(5) $Id_M : (M,g) \longrightarrow (M,\lambda^2 g)$ ve $\bar{\pi} : (M,\lambda^2 g) \longrightarrow (N,h)$ için $Id_M(p) = p$ ve $\bar{\pi}(p) = \pi(p)$ olacak şekilde

$$\begin{aligned}
\pi : (M,g) &\longrightarrow (N,h) \\
\pi &= \bar{\pi} \circ Id_M
\end{aligned}$$

dönüşümü vardır. Lemma 3.4.2. e Id_M dönüşümü ve Lemma 3.4.3. e $\bar{\pi}$ dönüşümü uygulanıp Lemma 3.4.3. , Lemma 3.4.2. de yerine yazılırsa $\forall X,Y \in \Gamma TM^{\mathcal{H}}$ için $\lambda^2 g(X,Y) = h(d\pi(X),d\pi(Y))$ eşitliği gözönüne alınarak (3.4.10) elde edilir. □

Sonuç 3.4.1. $m > n \geq 2$ ve $\pi : (M^m,g) \longrightarrow (N^n,h)$ dönüşümü dilationu $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$

olan bir yatay konform submersiyon olsun. $X,Y \in \Gamma TM^{\mathcal{H}}$ için

$$\begin{aligned} g(R(X,Y)Y,X) &= \frac{1}{\lambda^2}h(R^N(\check{X},\check{Y})\check{Y},\check{X}) - \frac{3}{4}|\mathcal{V}[X,Y]|^2 \\ &+ \frac{\lambda^2}{2}[g(X,Y)g(\nabla_Y grad(\frac{1}{\lambda^2}),X) - g(Y,Y)g(\nabla_X grad(\frac{1}{\lambda^2}),X) \\ &+ g(Y,X)g(\nabla_X grad(\frac{1}{\lambda^2}),Y) - g(X,X)g(\nabla_Y grad(\frac{1}{\lambda^2}),Y)] \\ &+ \frac{\lambda^4}{4}[|X\wedge Y|^2|grad(\frac{1}{\lambda^2})|^2 + |X(\frac{1}{\lambda^2})Y - Y(\frac{1}{\lambda^2})X|^2] \end{aligned}$$

elde edilir[11].

İspat. Teorem 3.4.1. in (5) eşitliğinde $Z=Y$ ve $H=X$ alınırsa ispat açıktır. □

Teorem 3.4.2. *$m>n\geq 2$ ve $\pi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$ dönüşümü dilationu $\lambda: M\longrightarrow \mathbb{R}^+$ olan bir yatay homotetik dönüşüm olsun. $X,Y\in\Gamma TM^{\mathcal{H}}$ olmak üzere $|X|=|Y|=1$ ve $g(X,Y)=0$ ise*

$$K_M(X\wedge Y) = \lambda^2.K_N(\check{X}\wedge\check{Y}) - \frac{3}{4}|\mathcal{V}[X,Y]|^2 - \frac{\lambda^2}{4}|grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2})|^2$$

dir[11].

İspat. $\pi:(M,g)\longrightarrow(N,h)$ yatay homotetik dönüşüm olduğundan aynı zamanda bir submersiyondur. Tanım 3.2.5. ten $grad_{\mathcal{H}}(\frac{1}{\lambda^2})=0$ dır. Dolayısıyla $X(\frac{1}{\lambda^2})=Y(\frac{1}{\lambda^2})=0$ dır. $Z\in S_p\{X,Y\}$ için

$$g(\nabla_Z grad(\frac{1}{\lambda^2}),Z) = -g(grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2}),\nabla_Z Z)$$

ve

$$\mathcal{V}\nabla_Z Z = A_Z Z = -\frac{\lambda^2}{2}g(Z,Z)grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2})$$

olur. Sonuç 3.4.1. de bu özellikler kullanılırsa

$$\begin{aligned} K_M(X\wedge Y) &= g(R(X,Y)Y,X) \\ &= \frac{1}{\lambda^2}h(R^N(\check{X},\check{Y})\check{Y},\check{X}) - \frac{3}{4}|\mathcal{V}[X,Y]|^2 \\ &+ \frac{\lambda^2}{2}[g(X,Y)g(\nabla_Y grad(\frac{1}{\lambda^2}),X) - g(Y,Y)g(\nabla_X grad(\frac{1}{\lambda^2}),X) \\ &+ g(Y,X)g(\nabla_X grad(\frac{1}{\lambda^2}),Y) - g(X,X)g(\nabla_Y grad(\frac{1}{\lambda^2}),Y)] \\ &+ \frac{\lambda^4}{4}[g(X,X)g(Y,Y) - 2g(X,Y)|grad(\frac{1}{\lambda^2})|^2 + |X(\frac{1}{\lambda^2})Y - Y(\frac{1}{\lambda^2})X|^2] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda^2.K_N(\check{X}\wedge\check{Y}) - \frac{3}{4}|\mathcal{V}[X,Y]|^2 + \frac{\lambda^2}{2}g(grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2}), \mathcal{V}\nabla_X X + \mathcal{V}\nabla_Y Y)\\
&+ \frac{\lambda^4}{4}|grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2})|^2\\
&= \lambda^2.K_N(\check{X}\wedge\check{Y}) - \frac{3}{4}|\mathcal{V}[X,Y]|^2 + \frac{\lambda^2}{2}g(grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2}), -\frac{\lambda^2}{2}grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2}))\\
&= \lambda^2.K_N(\check{X}\wedge\check{Y}) - \frac{3}{4}|\mathcal{V}[X,Y]|^2 - \frac{\lambda^4}{4}|grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2})|^2
\end{aligned}
$$

elde edilir. □

Sonuç 3.4.2. $m > n \geq 2$ ve (M^m,g),(N^n,h) iki Riemann manifoldu olmak üzere kesit eğrilikleri $K_M(\mathcal{H}) \geq 0$ ve $K_N \leq 0$ olsun. $\pi : M \longrightarrow N$ bir yatay homotetik dönüşüm ise aşağıdaki ifadeler denktir:

(1) $K_N \equiv 0$ ve $K_M \equiv 0$,

(2) $\lambda : M \longrightarrow \mathbb{R}^+$ dilationu sabittir,

(3) $\mathcal{H}$ yatay distribüsyonu integrallenebilirdir[11].

İspat. π dönüşümü yatay homotetik dönüşüm olduğundan aynı zamanda bir submersiyondur. $X,Y \in \Gamma TM^{\mathcal{H}}$ için $|X| = |Y| = 1$ ve $g(X,Y) = 0$ dır. Teorem 3.4.2. den elde edilen sonuçtan hareketle

$$
0 \leq K_M(X\wedge Y) - \lambda^2.K_N(\check{X}\wedge\check{Y}) = -\frac{3}{4}|\mathcal{V}[X,Y]|^2 - \frac{\lambda^4}{4}|grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2})|^2 \leq 0
$$

elde edilir. İspat açıktır. □

Önerme 3.4.3. *$m > n \geq 2$ ve $\pi : (M^m,g) \longrightarrow (N^n,h)$ dönüşümü lifleri total geodezik ve dilationu sabit olan bir yatay konform submersiyon olsun. $X \in \mathcal{H}$ ve $U \in \mathcal{V}$ için $|X| = 1$ ve $|U| = 1$ olmak üzere*

$$
K_M(X\wedge U) = |A_X U|^2
$$

dir[11].

İspat. π nin lifleri total geodezik olduğundan $T \equiv 0$ ve λ dilationu sabittir. A temel tensörü anti-simetrik (alterneleyen) olduğundan $A_X X = 0$ ve

$$
\mathcal{V}((\nabla_U A)_X X) = \mathcal{V}(\nabla_U A_X X - A_{\nabla_U X}X - A_X\nabla_U X) = 0
$$

dır. Bu özellikleri (3.4.8) denklemine uygularsak

$$\begin{aligned}
K_M(X\wedge U) &= g(R(U,X)X,U) \\
&= g((\nabla_U A)_X X,U)+g(A_X U,A_X U)-g((\nabla_X T)_U X,U) \\
&- g(T_U X,T_U X)+\lambda^2 g(A_X X,U)g(U,grad_{\mathcal{V}}(\frac{1}{\lambda^2})) \\
&= g(A_X U,A_X U) \\
&= |A_X U|^2
\end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 3.4.4. *$\pi:(M^m,g)\longrightarrow(N^n,h)$ bir yatay konform submersiyon ve $X,Y\in\Gamma TM^{\mathcal{B}}$ olsun. Bu takdirde,*

$$\mathcal{H}\nabla_X Y=\hat{\nabla}_X Y+\frac{\lambda^2}{2}\{X(\frac{1}{\lambda^2})Y+Y(\frac{1}{\lambda^2})X-g(X,Y)grad_{\mathcal{H}}(\frac{1}{\lambda^2})\}$$

dir[11].

İspat. (N,h) üzerinde lokal ortonormal çatı $\{\check{Z}_i|i=1,...,n\}$ ve $\check{Z}_i$ liftinin yatayı Z_i olsun. Buradan (M,g) nin yatay distribüsyonu için bir lokal ortonormal çatı $\{\lambda Z_i|i=1,...,n\}$ olur. Böylece Koszul özdeşliği kullanılarak

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}\nabla_X Y &= \sum_{i=1}^{n} g(\nabla_X Y,\lambda Z_i)\lambda Z_i=\lambda^2\sum_{i=1}^{n} g(\nabla_X Y,Z_i)Z_i \\
&= \frac{\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\big[X(g(Y,Z_i))+Y(g(Z_i,X))-Z_i(g(X,Y)) \\
&- g(X,[Y,Z_i])+g(Y,[Z_i,X])+g(Z_i,[X,Y])\big]Z_i \\
&= \frac{\lambda^2}{2}\sum_{i=1}^{n}\big[X(\frac{1}{\lambda^2})h(\check{Y},\check{Z}_i)+\frac{1}{\lambda^2}\check{X}(h(\check{Y},Z_i)) \\
&+ Y(\frac{1}{\lambda^2})h(\check{Z}_i,\check{X})+\frac{1}{\lambda^2}\check{Y}(h(\check{Z}_i,\check{X})) \\
&- Z_i(\frac{1}{\lambda^2})h(\check{X},\check{Y})-\frac{1}{\lambda^2}\check{Z}_i(h(\check{X},\check{Y})) \\
&+ \frac{1}{\lambda^2}\{-h(\check{X},[\check{Y},\check{Z}_i])+h(\check{Y},[\check{Z}_i,\check{X}])+h(\check{Z}_i,[\check{X},\check{Y}])\}\big]Z_i
\end{aligned}$$

elde edilir. Her iki tarafa $d\pi$ diferensiyelini uygular ve $d\pi(Z_i) = \check{Z}_i$ alırsak

$$\begin{aligned} d\pi(\mathcal{H}\nabla_X Y) &= \sum_{i=1}^{n} h(\nabla^N_{\check{X}}\check{Y},\check{Z}_i)\check{Z}_i + \frac{\lambda^2}{2}\{X(\frac{1}{\lambda^2})\sum_{i=1}^{n} h(\check{Y},\check{Z}_i)\check{Z}_i \\ &+ Y(\frac{1}{\lambda^2})\sum_{i=1}^{n} h(\check{X},\check{Z}_i)\check{Z}_i - h(\check{X},\check{Y})\sum_{i=1}^{n} Z_i(\frac{1}{\lambda^2})\check{Z}_i\} \\ &= \nabla^N_{\check{X}}\check{Y} + \frac{\lambda^2}{2}\{X(\frac{1}{\lambda^2})\check{Y} + Y(\frac{1}{\lambda^2})\check{X} - g(X,Y)d\pi(grad_{\mathcal{H}}(\frac{1}{\lambda^2}))\} \end{aligned}$$

elde edilir. □

Lemma 3.4.5. *(İkinci Bileşke Yasası)* $\pi_1 : (M,g) \longrightarrow (\tilde{N},\tilde{h})$ *ve* $\pi_2 : (\tilde{N},\tilde{h}) \longrightarrow (N,h)$ *dönüşümleri lifleri total geodezik olan iki yatay homotetik dönüşüm olsun.* $\pi = \pi_2 \circ \pi_1 : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ *bileşke dönüşümü de lifleri total geodezik olan bir yatay homotetik dönüşümdür[11].*

İspat. $i = 1,2$ için π_i dönüşümünün dilationu λ_i ve π_1 yoluyla π_2 dönüşümünün pullbacki $\pi_1^*\lambda_2$ olsun. Her $x \in M$ için $(\pi_1^*\lambda_2)(x) = \lambda_2 \circ \pi_1(x)$ olarak verilir. Eğer π dönüşümünün dilationu λ ise $\lambda^2 = \lambda_1^2(\pi_1^*\lambda_2)^2$ dir. X yatay vektör alanı olmak üzere

$$\begin{aligned} X(\lambda^2) &= X(\lambda_1^2)(\pi_1^*\lambda_2)^2 + \lambda_1^2 X((\pi_1^*\lambda_2)^2) \\ &= \lambda_1^2 d\pi_1(X)(\lambda_2^2) = 0 \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla π dönüşümü yatay homotetiktir.

π nin dikey distribüsyonu $\mathcal{V}$ distribüsyonunu iki ortogonal parçaya ayrılır. Bunlar $\mathcal{V}_1 = çekd\pi_1$ ve $\mathcal{W} = \mathcal{V}_1^{\perp} \cap \mathcal{V}$ olmak üzere $\mathcal{V} = \mathcal{V}_1 \oplus \mathcal{W}$ dır. Buradan $\mathcal{V}_2 = çekd\pi_2 = d\pi_1(\mathcal{W})$ olduğu görülür. $x \in M$ ve $V = V_1 + W \in \mathcal{V}_x$ ise $V_1 \in (\mathcal{V}_1)_x$ ve $W \in \mathcal{W}_x$ olur. V vektör alanını x noktasının bir küçük komşuluğuna genişletirsek W, π_1 dönüşümüne göre temel vektör alanı olur. π dönüşümüne göre herhangi bir $X \in \mathcal{H}_x$ yatay vektörü için Lemma 3.4.4. ten ve π_2 nin lifleri total geodezik olduğundan

$$\begin{aligned} g(\nabla_V V,X) &= g(\nabla_{V_1}V_1,X) + g(\nabla_{V_1}W + \nabla_W V_1,X) + g(\nabla_W W,X) \\ &= 2g(T_{V_1}W,X) + \frac{1}{\lambda^2}\tilde{h}(d\pi_1(\nabla_W W),d\pi_1(X)) \\ &= \frac{1}{\lambda^2}\tilde{h}(\nabla^N_{d\pi_1(W)}d\pi_1(W),d\pi_1(X)) = 0 \end{aligned}$$

elde edilir. π nin bir F lifinin ikinci temel formu σ_F simetrik olduğundan

$$\sigma_F(U,V) = \frac{1}{4}\{\sigma_F(U+V,U+V) - \sigma_F(U-V,U-V)\}$$

dir dolayısıyla π dönüşümünün lifleri total geodeziktir. $\square$

Lemma 3.4.6. *(Üçüncü Bileşke Yasası)* $\pi_1 : (M,g) \longrightarrow (\tilde{N},\tilde{h})$ *ve* $\pi_2 : (\tilde{N},\tilde{h}) \longrightarrow (N,h)$ *dönüşümleri iki yatay konform submersiyon olsun.* π_1 *ve* π_2 *dönüşümleri integrallenebilir yatay distribüsyona sahipseler bunların bileşimi olan* $\pi = \pi_2 \circ \pi_1 : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ *dönüşümü de integrallenebilir yatay distribüsyona sahiptir[11].*

İspat. $i = 1,2$ için π_i nin dikey ve yatay distribüsyonları sırasıyla $\mathcal{V}_i$ ve $\mathcal{H}_i$ olsun. $\check{X},\check{Y}$, N üzerinde iki lokal vektör alanı ve π_2 dönüşümüne göre $\check{X},\check{Y}$ vektör alanlarının yatay lifleri X,Y olsun. π_1 dönüşümüne göre de X,Y vektör alanlarının yatay lifleri $\hat{X},\hat{Y} \in \mathcal{H} \subset \mathcal{H}_1$ olsun. Bu takdirde $\mathcal{H}_1$ integrallenebilir olduğundan $\mathcal{V}_1[\hat{X},\hat{Y}] = 0$ olup $\mathcal{V}[\hat{X},\hat{Y}] \subset \mathcal{H}_1$ dir. Şimdi $\mathcal{H}_2$ integrallenebilir olduğundan

$$d\pi_1(\mathcal{V}[\hat{X},\hat{Y}]) = \mathcal{V}_2[d\pi_1(\hat{X}), d\pi_1(\hat{Y})] = \mathcal{V}_2[X,Y] = 0$$

dır. Dolayısıyla $\mathcal{V}[\hat{X},\hat{Y}] = 0$ olur. $\square$

$\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ yatay konform submersiyon ve π dönüşümünün yatay ve dikey distribüsyonları sırasıyla $\mathcal{H}$, $\mathcal{V}$ olmak üzere N nin bir altmanifoldu L olsun. π bir submersiyon olduğundan $K = \pi^{-1}(L)$ de M manifoldunun bir altmanifoldu olur. $x \in K$ için

$$(\mathcal{H}_1)_x = T_xK \cap \mathcal{H}_x \quad \text{ve} \quad (\mathcal{H}_2)_x = T_xK^{\perp}$$

tanımlanır. Buradan K boyunca

$$TK = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H}_1, \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \quad \text{ve} \quad TM = \mathcal{V} \oplus \mathcal{H} = TK \oplus \mathcal{H}_2$$

ortogonal ayrışımı elde edilir. K boyunca TM nin altdemetlerinin ortogonal projeksiyonlarını $\mathcal{H}_1$ ve $\mathcal{H}_2$ ile gösterebiliriz.

$\sigma_K : TK \times TK \longrightarrow \mathcal{H}_2$ dönüşümü ile K nın σ_K ikinci temel formunu ve benzer olarak $\check{\sigma}_L : TL \times TL \longrightarrow \nu(L)$ dönüşümüyle de L nin $\check{\sigma}_L$ ikinci temel formunu göstereceğiz. Ortalama eğrilik vektör alanlarını da H_K ve $\check{H}_L$ ile göstereceğiz.

Tanım 3.4.2. $\pi : (M,g) \longrightarrow (N,h)$ dönüşümü yatay konform submersiyon, N nin bir altmanifoldu L ve $K = \pi^{-1}(L) \subset M$ olsun. K üzerinde $grad_{\mathcal{H}_2}(\frac{1}{\lambda^2}) = 0$ oluyorsa π dönüşümüne K boyunca normal homotetik dönüşüm denir[11].

π yatay homotetik dönüşümse yani $grad_{\mathcal{H}}(\frac{1}{\lambda^2}) = 0$ ise π dönüşümü N nin herhangi bir L altmanifoldu için K boyunca normal homotetik dönüşümdür.

Lemma 3.4.7. *$\pi : (M^m,g) \longrightarrow (N^n,h)$ dönüşümü lifleri minimal olan yatay konform submersiyon ve N nin bir altmanifoldu L olsun. Bu takdirde aşağıdaki ifadeler denktir:*
(1) *$K = \pi^{-1}(L)$, M de minimaldir,*
(2) *$\check{H}_L = \frac{1}{2}d\pi(grad_{\mathcal{H}_2}(\frac{1}{\lambda^2}))$*
dir[11].

İspat. TL için bir lokal ortonormal çatı $\{\check{X}_i | i = 1,...,l\}$ ve $\mathcal{H}_1$ için bir lokal ortonormal çatıysa normalleştirilmiş yatay liftlerin oluşturduğu $\{\lambda X_i | i = 1,...,l\}$ kümeyi seçelim. $\mathcal{V}$ için de bir lokal ortonormal çatı $\{V_r | r = n+1,...,m\}$ dir. K nın ortalama eğrilik vektörü için

$$\begin{aligned}(m-(n-l))H_K &= \sum_{i=1}^{l} \sigma_K(\lambda X_i, \lambda X_i) + \sum_{r=n+1}^{m} \sigma_K(V_r, V_r) \\ &= \lambda^2 \sum_{i=1}^{l} \mathcal{H}_2(\nabla_{X_i} X_i)\end{aligned}$$

elde edilir. Lemma 3.4.4. den

$$\begin{aligned}&= \lambda^2 \sum_{i=1}^{l} \mathcal{H}_2(\hat{\nabla}_{X_i} X_i + \frac{\lambda^2}{2}\{2X_i(\frac{1}{\lambda^2})X_i - g(X_i,X_i) grad_{\mathcal{H}}(\frac{1}{\lambda^2})\}) \\ &= \lambda^2 \sum_{i=1}^{l} \{\mathcal{H}_2(\hat{\nabla}_{X_i} X_i) - \frac{\lambda^2}{2} g(X_i,X_i) grad_{\mathcal{H}_2}(\frac{1}{\lambda^2})\}\end{aligned}$$

dir. Her iki tarafa $d\pi$ diferensiyeli uygulanırsa

$$\begin{aligned}(m-(n-l))d\pi(H_K) &= \lambda^2 \sum_{i=1}^{l} \check{\sigma}_L(\check{X}_i, \check{X}_i) - \frac{\lambda^2}{2} \sum_{i=1}^{l} h(\check{X}_i, \check{X}_i) d\pi(grad_{\mathcal{H}_2}(\frac{1}{\lambda^2})) \\ &= \lambda^2 l \check{H}_L - \frac{l\lambda^2}{2} d\pi(grad_{\mathcal{H}_2}(\frac{1}{\lambda^2}))\end{aligned}$$

olur. □

Sonuç 3.4.3. $\pi : (M^m, g) \longrightarrow (N^n, h)$ dönüşümü lifleri minimal olan yatay konform submersiyon ve N nin bir altmanifoldu L olsun. π dönüşümü $\pi^{-1}(L)$ boyunca normal homotetik ise aşağıdaki iki şart denktir:

(1) $\pi^{-1}(L)$, M de minimaldir,

(2) L, N de minimaldir[11].

KAYNAKLAR

[1] O'Neill B., *The Fundamental Equations of a Submersion*, **Mich.Math J.** 13 459-469, (1966).

[2] Gray A., *Pseudo-Riemann Almost Product Manifolds and Submersions*, **J.Math. Mech.**,16 715 – 737, (1967).

[3] Yano K., Kon M., *Structures On Manifolds*, World Scientific Publishing, (1984).

[4] Falcitelli M., Ianus S., Pastore A.M., *Riemannian Submersions and Related Topics*, World Scientific Company, (2004).

[5] Do Carmo M., *Riemannian Geometry*, Birkhauser Boston, (1992).

[6] Boothby W.M., *An Introduction To Differentiable Manifolds And Riemannian Geometry*, Department of Mathematics, Washington University, (1986).

[7] Şahin B., *"CR-Altmanifoldların Geometrisi"*, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, (1996).

[8] Gündüzalp Y., *"Riemann Submersiyonlarının Geometrisi Üzerine"*, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, Yüksek Lisans Tezi, (2007).

[9] Baird P., Wood J.C., *Harmonic Morphisms Between Riemannian Manifolds*, Oxford University Press,(2003).

[10] Garcia-Rio E., Kupeli D.N., *Semi-Riemannian Maps and Their Applications*, Kluwer Academic Publishers, (1999).

[11] Gudmundsson S., *"The Geometry of Harmonic Morphisms"*, Ph.D. Thesis, University of Leeds, (1992).

[12] Şahin B., *Contact Horizontally Conformal Submersions*, , **Demonstratio Mathematica** Vol. XLII No 4, (2009).

ÖZGEÇMİŞ

1987 yılı Malatya doğumludur. İlköğretimini İzmir, Malatya ve ortaöğretimini ise Malatya Anadolu Lisesi'nde tamamladı. 2005 yılında Atatürk Üniversitesi Fen Fakültesi Matematik bölümü programını kazandı. 2009 yılında bu bölümden mezun oldu. 2009 – 2010 öğretim yılında, İnönü Üniversitesi'nde Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanları Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Öğretmenliği programında Tezsiz Yüksek Lisansı bitirdi. 2010 yılında İnönü Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik bölümü Geometri Anabilim Dalı'nda Yüksek Lisans eğitimine başladı.